

# Naive Bayes Classifiers

Andrea Lavino

UniMORE

24 Gennaio 2024

# Sommario

## 1 Formula di Bayes

## 2 Classificatore bayesiano ingenuo

- Modello probabilistico
- Classificatore
- Tipi di classificatori bayesiani
- Filtro anti-spam

# Formula di Bayes

La formula di Bayes, già di grande importanza nella teoria della probabilità, ha un ruolo centrale nella probabilità bayesiana. Infatti la formula può essere interpretata come:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\text{likelihood} \times \text{prior}}{\text{evidence}}$$

La formula permette, secondo quest'ottica, di aggiornare una ipotesi in seguito ad una evidenza.

# Classificatore bayesiano ingenuo

- Assegna un oggetto ad una classe a partire da alcune sue caratteristiche
- Utilizza la formula di Bayes per effettuare l'assegnazione
- La sua ingenuità deriva dal fatto che considera le caratteristiche come indipendenti

# Modello probabilistico

Il classificatore si basa su un modello probabilistico che assegna una probabilità condizionata  $P(C_k|x_1, \dots, x_n)$  per ognuna delle possibili  $k$  classi, con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  il vettore delle caratteristiche.

Queste probabilità vengono calcolate usando la formula di Bayes:

$$P(C_k|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n|C_k)P(C_k)}{P(x_1, \dots, x_n)} =$$
$$\frac{P(C_k) \prod_{i=1}^n P(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}, C_k)}{P(x_1, \dots, x_n)} = \frac{P(C_k) \prod_{i=1}^n P(x_i|C_k)}{P(x_1, \dots, x_n)}^1$$

---

<sup>1</sup>Il risultato è ottenuto usando la regola della catena e l'ipotesi di indipendenza delle componenti del vettore

# Classificatore

Una volta definito il modello probabilistico, per poter creare il classificatore, bisognerà definire una regola per decidere quale sarà il risultato della classificazione. Una delle regole più comuni consiste nello scegliere la classe per cui il valore della probabilità è più alto. È ora possibile definire il concetto di classificatore più propriamente.

## Definition (Classificatore)

Definiamo come classificatore la funzione  $\hat{y}$  che assegna una classe  $C_k$  ad un oggetto in base alla formula

$$\hat{y} = \operatorname{argmax}_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{P(C_k) \prod_{i=1}^n P(x_i | C_k)}{P(x_1, \dots, x_n)} = \operatorname{argmax}_{k \in \{1, \dots, K\}} P(C_k) \prod_{i=1}^n P(x_i | C_k)$$

# Tipi di classificatori bayesiani

Esistono tre tipi principali di classificatori bayesiani:

- Classificatore bayesiano ingenuo gaussiano: usato quando i dati da cui derivano le caratteristiche sono continui
- Classificatore bayesiano ingenuo multinomiale: usato quando i dati da cui derivano le caratteristiche sono discreti
- Classificatore bayesiano ingenuo bernoulliano: usato quando le caratteristiche possono essere considerate delle variabili aleatorie di Bernoulli

## Esempio (Filtro anti-spam)

Una applicazione notevole dei classificatori bayesiani riguarda i filtri anti-spam. Applicando i concetti visti in precedenza possiamo ricavare le seguenti formule:

$$P(S|\mathbf{W}) = \frac{P(\mathbf{W}|S)P(S)}{P(\mathbf{W}|H)P(H) + P(\mathbf{W}|S)P(S)}$$

$$P(H|\mathbf{W}) = \frac{P(\mathbf{W}|H)P(H)}{P(\mathbf{W}|H)P(H) + P(\mathbf{W}|S)P(S)}$$

Poiché il vettore contenente le parole del messaggio rimane costante, ai fini della classificazione, si può effettuare la seguente semplificazione:

$$P(S|\mathbf{W}) \propto P(\mathbf{W}|S)P(S)$$

$$P(H|\mathbf{W}) \propto P(\mathbf{W}|H)P(H)$$

Il classificatore, perciò, restituirà "Spam" se  $P(\mathbf{W}|S)P(S) > P(\mathbf{W}|H)P(H)$ , "Ham" altrimenti.