

Rossby Wellen



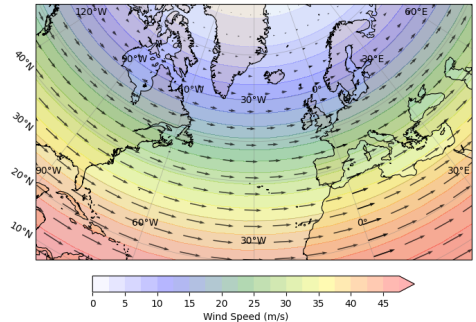
Michael Schmid

ICAI Interdisciplinary Center for Artificial Intelligence

June 3, 2025

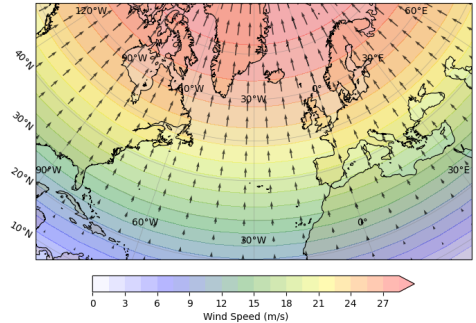
Idealisiertes zonales Windfeld

- Gezeigt ist ein simuliertes **zonales Windfeld**:
 - Reine Ost-West-Strömung ($v = 0$)
 - Geschwindigkeit abhängig von der Breite:
$$u = U_0 \cdot \sin^2(\theta)$$
 - Keine Druckgradienten oder vertikale Struktur
- Dieses idealisierte Feld dient als Basis zur Untersuchung großskaliger atmosphärischer Prozesse.
- Zonale Winde treten z. B. in der Realität als **Jetstreams** auf.



Idealisiertes meridionales Windfeld

- Gezeigt ist ein simuliertes **meridionales Windfeld**:
 - Reine Nord-Süd-Strömung ($u = 0$)
 - Geschwindigkeit abhängig von der Breite:
$$v = V_0 \cdot \cos(\theta)$$
- Die Darstellung ist idealisiert, ohne Rückkopplung durch Coriolis oder Druckgradienten.



Corioliskraft: Grundprinzip

- Die **Corioliskraft** ist eine Scheinkraft, die in rotierenden Bezugssystemen wie der Erde wirkt.
- Sie verursacht eine Ablenkung von bewegten Luft- und Wassermassen:
 - **Nordhalbkugel:** Ablenkung nach rechts
 - **Südhalbkugel:** Ablenkung nach links
- Maximale Wirkung an den Polen, null am Äquator.

Mathematische Formulierung

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v})$$

- m : Masse des Körpers
- $\vec{\Omega}$: Rotationsvektor der Erde
- \vec{v} : Geschwindigkeit relativ zur Erdoberfläche

Breitenabhängigkeit und Coriolis-Parameter

- Der **Coriolis-Parameter** beschreibt die Breitenabhängigkeit:

$$f = 2\Omega \sin(\phi)$$

- Seine Änderung mit der Breite ergibt den β -**Parameter**:

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega \cos(\phi)}{a}$$

- a : Erdradius, y : Nord-Süd-Koordinate

Bedeutung für Rossby-Wellen

- Rossby-Wellen entstehen durch:
 - Erhaltung der absoluten Vorticity
 - Variation der Corioliskraft mit der Breite (β -Effekt)
- Bewegung nach Norden: Zunahme von f , erzeugt zyklonale Vorticity
- Rückstellende Wirkung → wellenartige Westwärts-Ausbreitung

- Die Corioliskraft lenkt Luftmassen ab und hängt von der geographischen Breite ab.
- Ihre Breitenänderung ist die physikalische Grundlage für Rossby-Wellen.
- Ohne Corioliskraft gäbe es keine großskaligen planetaren Wellen wie Jetstreams.

Was ist die β -Ebene?

- Die β -**Ebene** ist eine lokale Approximation der Erdkugel nahe einer bestimmten Breite ϕ_0 .
- Ziel: Vereinfachung der Corioliskraft für mathematische Modelle großskaliger Strömungen.
- Der Coriolisparameter f wird linearisiert:

$$f(y) = f_0 + \beta y$$

mit:

- $f_0 = 2\Omega \sin(\phi_0)$: Coriolisparameter an der Referenzbreite
- $\beta = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\phi_0} = \frac{2\Omega \cos(\phi_0)}{a}$
- y : meridionale Entfernung vom Referenzbreitenkreis

Warum ist die β -Ebene wichtig?

- Ermöglicht analytische Lösungen für Rossby-Wellen:

$$\text{Wellengleichung: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0$$

- Führt zur Dispersionsrelation für barotrope Rossby-Wellen:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

- Die Wellen bewegen sich **westwärts**, auch wenn der Wellenvektor ostwärts zeigt!

Zusammenfassung β -Ebene

- Lokale Näherung, um Breitenabhängigkeit von f zu berücksichtigen.
- Ideal für theoretische Untersuchungen von großskaliger Dynamik.
- Grundlage für das Verständnis von Rossby-Wellen, atmosphärischer Stabilität und großräumiger Zirkulation.

Vorticity – Wirbelstärke in der Atmosphäre

- **Relative Vorticity** ζ : Rotation der Strömung relativ zur Erde

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- **Absolute Vorticity** q : Summe aus relativer Vorticity und planetarer Vorticity

$$q = \zeta + f$$

- **Satz zur Erhaltung der absoluten Vorticity** (ohne Reibung):

$$\frac{D}{Dt}(\zeta + f) = 0$$

Physikalische Interpretation

- Ein Luftpaket, das sich in meridionaler Richtung bewegt, erlebt Änderung in f .
- Um die totale Vorticity konstant zu halten, ändert sich ζ – es wird zyklonal oder antizyklonal.
- **Das erzeugt eine rückstellende Kraft** → wellenförmige Bewegung entsteht.

Dies ist die physikalische Grundlage der Rossby-Wellen!

Linearisierte Vorticity-Gleichung (auf β -Ebene)

- Wir betrachten kleine Störungen u', v' über einer zonalen Grundströmung U .
- Einsetzen in die Vorticity-Gleichung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi') + U \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi') + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$$

- Dabei ist ψ' das Stromfunktion-Störungsfeld:

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

Dispersionsrelation für barotrope Rossby-Wellen

- Lösung mit Wellenansatz: $\psi' \propto e^{i(kx+ly-\omega t)}$
- Einsetzen ergibt die Dispersionsrelation:

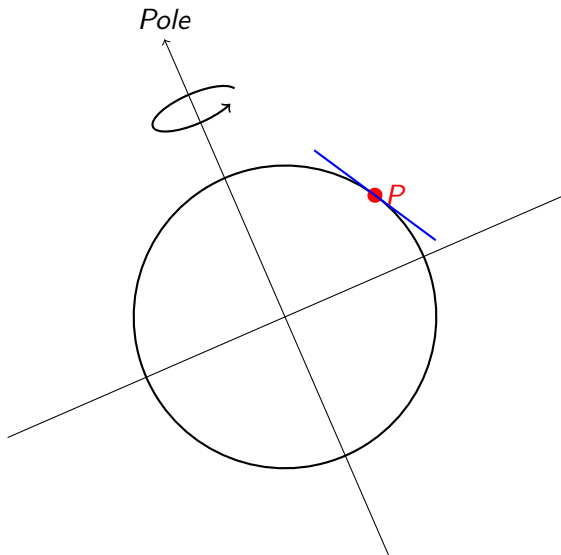
$$\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

- **Folge:** Rossby-Wellen bewegen sich in einem ruhenden System stets **westwärts** (wenn $U = 0$).

Zusammenfassung

- Die **Corioliskraft** nimmt mit der Breite zu $\rightarrow \beta$ -Effekt.
- Die **absolute Vorticity** ist entlang eines Stromfadens erhalten.
- Kleine Störungen führen zu **planetaren Wellen** mit westwärts gerichteter Ausbreitung.
- Diese Wellen heißen **Rossby-Wellen** und sind fundamental für die großräumige atmosphärische Dynamik.

Tilted Earth with 3D Spin



What is Vorticity?

- **Vorticity** quantifies the local rotation in a fluid flow.
- Defined as the **curl** of the velocity field:

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{u}$$

- For 2D flow $\vec{u} = (u(x, y), v(x, y))$, only the z-component matters:

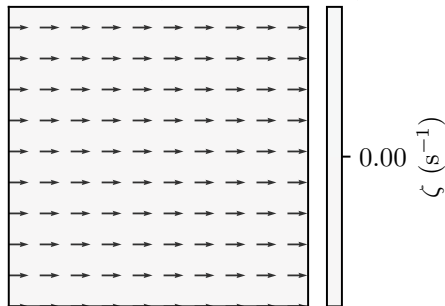
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- $\zeta > 0$: Cyclonic (counter-clockwise) rotation
- $\zeta < 0$: Anticyclonic (clockwise) rotation

Zero Vorticity (Uniform Flow)

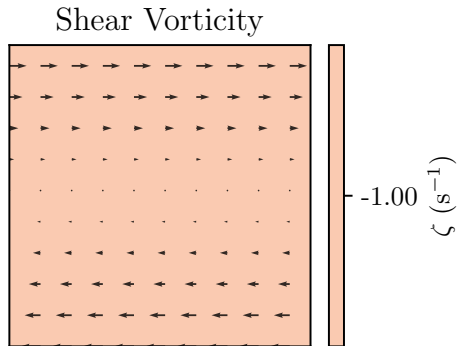
- $\vec{u} = (2, 0)$
- Uniform horizontal flow
- No shear or curvature
- $\zeta = 0$

Zero Vorticity (Uniform Flow)



Shear Vorticity

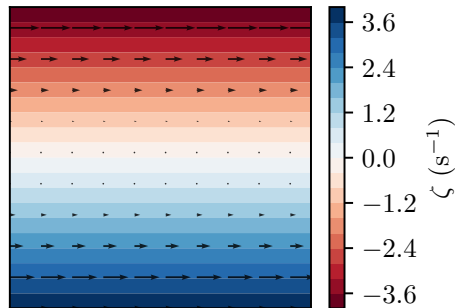
- $\vec{u} = (y, 0)$
- Horizontal shear: $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$
- $\zeta = -1$



Nonlinear Shear Vorticity

- $\vec{u} = (y^2, 0)$
- $\zeta = -2y$
- Antisymmetric vorticity field
- Stronger at larger $|y|$

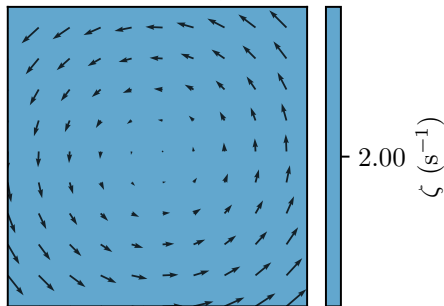
Nonlinear Shear Vorticity



Positive Vorticity (Cyclonic)

- $\vec{u} = (-y, x)$
- Pure rotation, counter-clockwise
- $\zeta = 2$

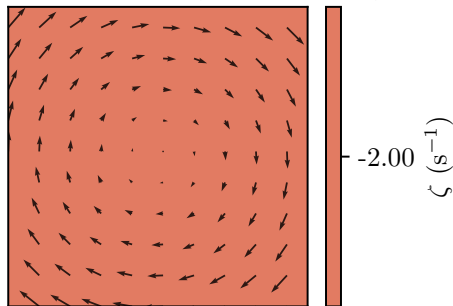
Positive Vorticity (Cyclonic)



Negative Vorticity (Anticyclonic)

- $\vec{u} = (y, -x)$
- Clockwise rotation
- $\zeta = -2$

Negative Vorticity (Anticyclonic)



Absolute Vorticity

- In a rotating frame (like Earth), the total or **absolute vorticity** is:

$$\eta = f + \zeta$$

- ζ : relative vorticity (from local shear and curvature)
- $f = 2\Omega \sin \phi$: Coriolis parameter, varies with latitude
- Important for large-scale geophysical flows (e.g., Rossby waves, PV conservation)

Konservierung der potentiellen Vorticity

- Die **potentielle Vorticity (PV)** ist gegeben durch:

$$q = \frac{\eta}{H} = \frac{f + \zeta}{H}$$

- η : absolute Vorticity, $f + \zeta$
- H : effektive Schichtdicke (z.B. Troposphärenhöhe oder isentrope Schichtdicke)
- In der reibungsfreien, adiabatischen Atmosphäre gilt:

$$\frac{Dq}{Dt} = 0$$

- Implikation:** PV ist entlang von Teilchenbahnen erhalten \rightarrow zentrale Rolle in der großräumigen Dynamik

Barotrope Vorticity-Gleichung

- Annahmen:
 - Nicht-divergente Strömung
 - Eine Schicht (barotropes Modell)
- Vorticity-Gleichung (mit ψ : Stromfunktion):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

- Wellenlösung:

$$\psi = \Re \left\{ \hat{\psi} e^{i(kx + ly - \omega t)} \right\}$$

- Dispersionsrelation:

$$\omega = -\beta \frac{k}{k^2 + l^2}$$

- **Folgen:**

- Westwärts laufende Rossby-Wellen ($\omega < 0$ für $k > 0$)
- Phasengeschwindigkeit \neq Gruppengeschwindigkeit

Rossby-Wellen auf der Kugel

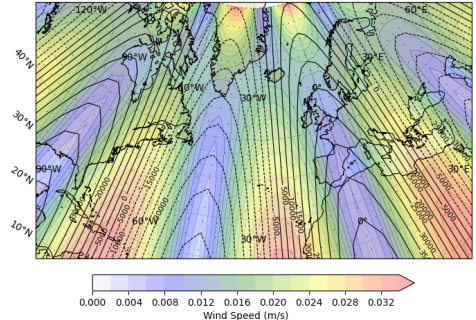
- Idealisierte Strömung basierend auf der **Stromfunktion**:

$$\psi(\theta, \phi) = \hat{\psi} \cos(k\phi) \sin(\theta)$$

- Daraus ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld über:

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

- Wellenzahl k , mittlerer Wind U_0 , Erdradius a , Beta-Effekt implizit enthalten
- Die Westwärts-Drift ist charakteristisch für Rossby-Wellen



Rossby-Wellen auf der β -Ebene

- Lineare Lösung der barotropen Vorticity-Gleichung auf der β -Ebene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

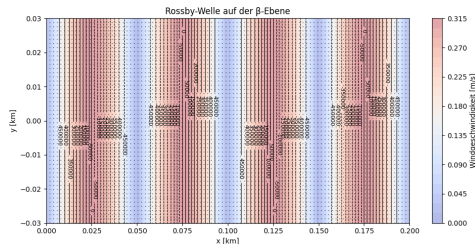
- Wellenansatz für die Stromfunktion:

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi} \cos(kx + ly - \omega t)$$

- Dispersionsrelation:

$$\omega = -\beta \frac{k}{k^2 + l^2}$$

- Geschwindigkeit:



Darstellung: Windvektoren (Pfeile),
Stromfunktion (schwarz), Windgeschwindigkeit
(Farbflächen)