Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

8. Krümmung, Feldtheorie für das ganze Universum

Inhalt

1. Kovariante Ableitung und "Kräfte"

Für einen Beobachter äussern sich Kräfte durch die durch sie verursachte Beschleunigung, die sich wiederum durch die nicht verschwindenden zweiten Ableitungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \neq 0 \quad \text{für gewisse } i$$

verrät. Nicht verschwindende zweite Ableitungen entstehen aber auch durch nichtlineare Koordinatentransformationen mit gekrümmten Koordinatenlinien. Die zu solchen nur durch das Koordinatensystem verursachten "Kräfte" werden manchmal auch Scheinkräfte genannt.

Die kovariante Ableitung

$$\nabla_X A = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma^i_{kl} A^l \right) \xi^k$$

ermöglicht die Unterscheidung zwischen Scheinkräften und echten Kräften. Die Wirkung echter Kräfte ist daran erkennbar, dass die kovariante Ableitung des Tangentialvektors an die Bahnkurve nicht verschwindet.
Eine Teilchen bewegt sich also frei von Kräften, wenn $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ gilt

oder

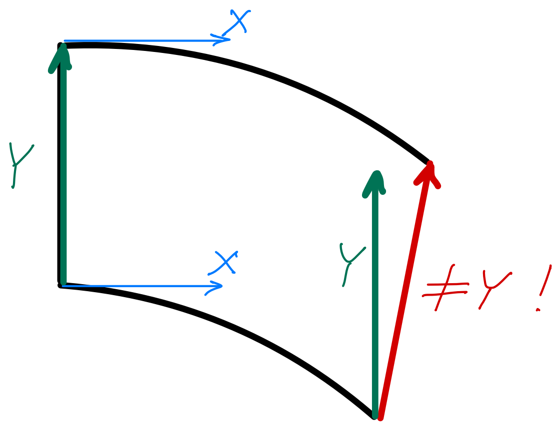
$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{k,\ell=1}^{n} \Gamma^i_{k\ell}\, \frac{dx^k}{dt}\, \frac{dx^\ell}{dt} = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung einer Geodäten.

Satz: Die Bahnen von sich kräftefrei bewegenden Teilchen sind Geodäten

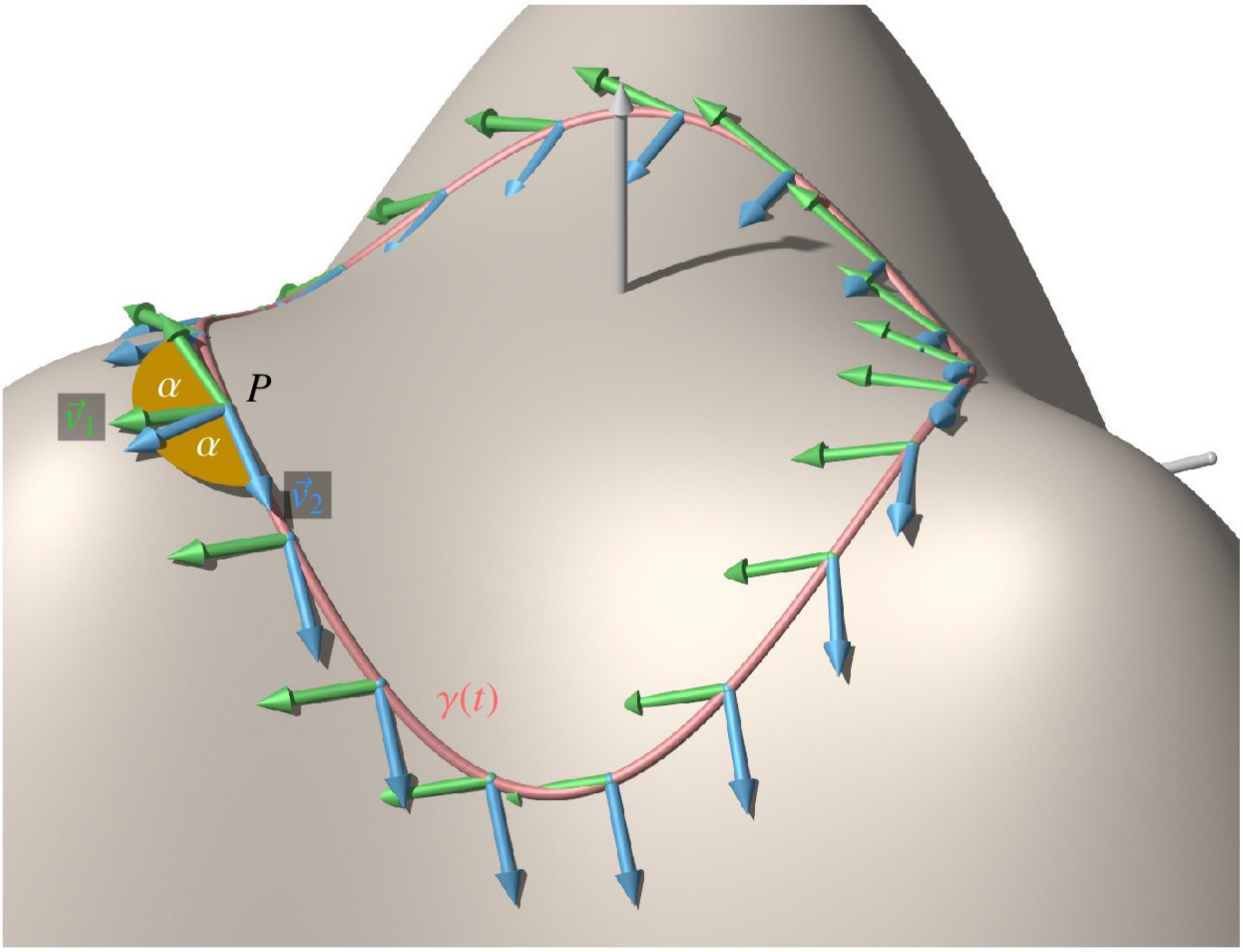
Dies heisst aber nicht, dass Geodäten Geraden sind. Die Bewohner einer Raumstation spüren keine Kräfte, da sie sich auf einer Geodäten bewegen, die in der 4-dimensionalen Raumzeit als Schraubenlinie um die Zeitrichtung der Bewegung Erde folgt. Die Erdbewohner dagegen spüren ständig die Kraft des Bodens, der versucht, ihnen die Füsse in den Bauch zu stossen und sie daran hindert auf einer Geodäten in Richtung Schwerpunkt der Erde zu fallen.

Der Unterschied zur Bewegung ohne Gravitation wird daran erkennbar, dass sich Teilchen, die in verschiedenen Punkten mit gleicher Geschwindigkeit starten, voneinander entfernen.



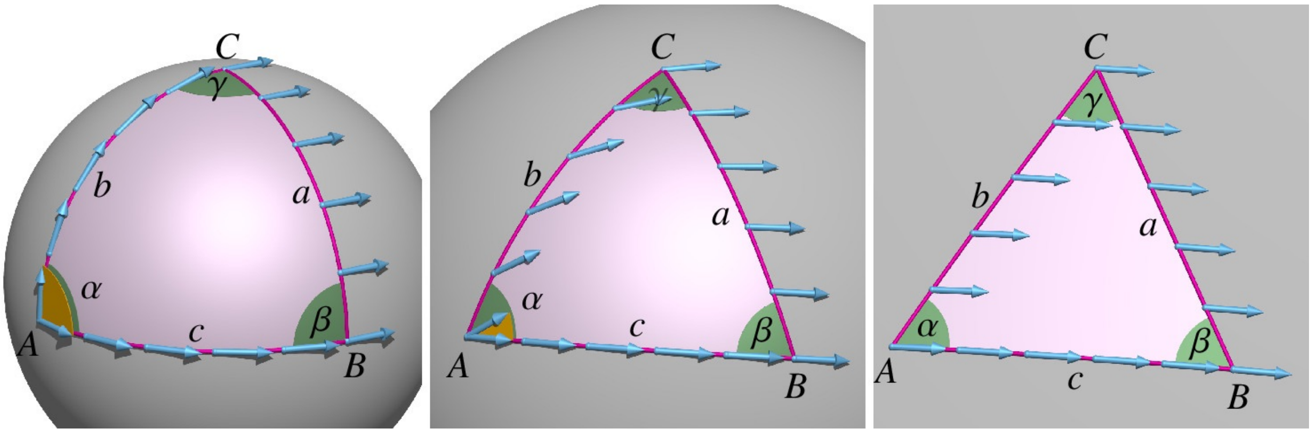
2. Krümmung

Transportiert man einen Vektor parallel entlang einer geschlossenen Kurve, wird er sich im Vergleich zur Ausgangsrichtung gedreht haben:

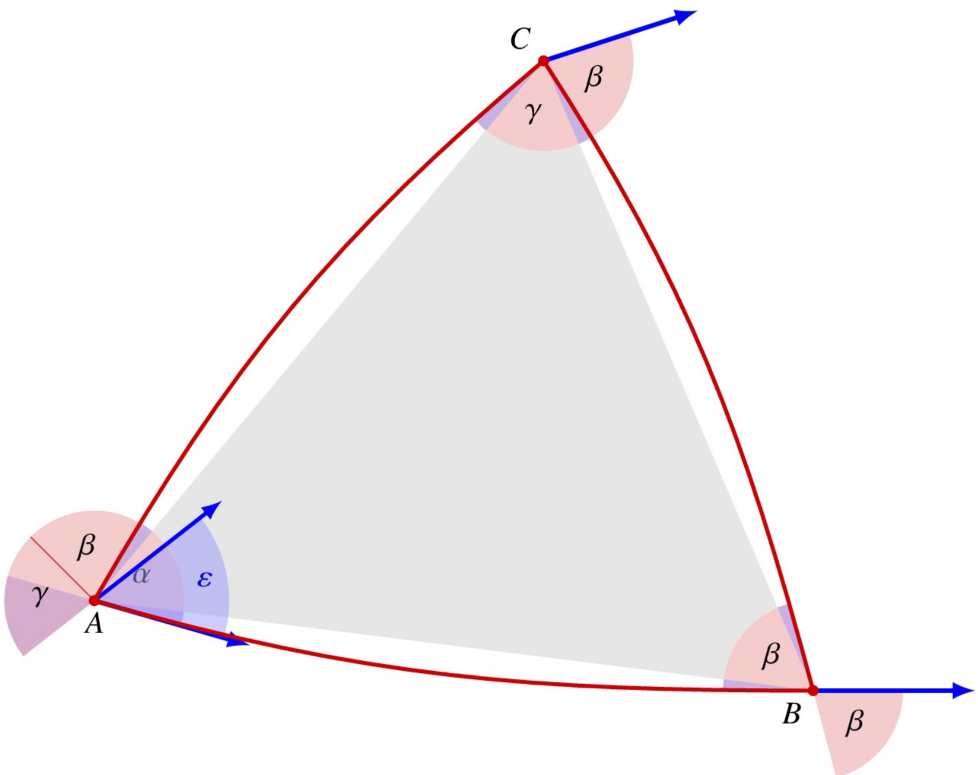


Die Drehung wird durch die Krümmung der Fläche verursacht, bezüglich der der Paralleltransport stattfindet. Beim Paralleltransport entlang einer ebenen Kurve ist keine Drehung feststellbar.

Beim Paralleltransport entlang den Seiten eines Kugeldreiecks ist eine Drehung feststellbar, die umso grösser ist, je grösser der Anteil der Fläche des Dreiecks an der Kugeloberfläche ist:

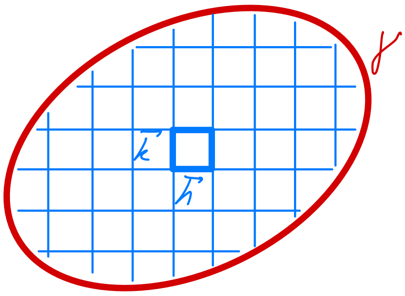


Das Ausmass der Drehung ist die Summe der blauen Winkel, sie beläuft sich auf $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.



Die Winkelsumme ist in einem sphärischen Dreieck immer $> 180^0$. ε ist der Flächeninhalt des Dreiecks.

3. Der riemannsche Krümmungstensor



Mithilfe des Koordinatengitters kann man sich den Transport entlang eines geschlossenen Weges aus dem Transport entlang vieler kleiner Koordinatenparallelogramme zusammengesetzt denken. Die Drehung beim Transport entlang der Kurve $\gamma(t)$ entsteht also als Integral infinitesimaler Drehungen entlang des "Randes" von 2-Vektoren $\vec{h} \wedge \vec{k}$.

Infinitesimale Drehung: Die gesuchte Drehmatrix entsteht als Schrittweise, man kann dies als Funktion $t \longmapsto D(t) \in SO(n)$ verstehen. Jede Matrix $D(t)$ ist eine Drehmatrix, erfüllt als

$$D(t)^t D(t) = I.$$

Ableitung an der Stelle $t=0$ ergibt nach der Produktregel:

$$\dot{D}(0)^t \underbrace{D(0)}_{=I} + \underbrace{D(0)^t}_{=I} \dot{D}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{D}(0)^t = -\dot{D}(0).$$

Die infinitesimale Drehung ist also eine antisymmetrische Matrix.

Beispiel: 2-dimensionale Drehmatrizen haben die Form

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}$$

mit der Ableitung

$$\dot{D}(t) = \begin{pmatrix} -k\sin kt & -k\cos kt \\ k\cos kt & -k\sin kt \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \dot{D}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

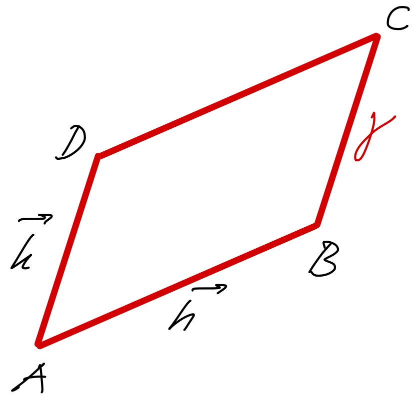
Jede antisymmetrische 2×2-Matrix ist von dieser Form

Krümmungstensor: Der Krümmungstensor berechnet zu jedem 2-Vektor $\vec{h} \wedge \vec{k}$ die infinitesimale Drehung beim Paralleltransport entlang eines infinitesimalen Parallelogramms mit Kanten $\vec{h}$ und $\vec{k}$. Als Matrix kann man ihn daher als

$$R^i{}_e(\vec{h} \wedge \vec{k}) = \sum_{u,v=1}^{n} R^i{}_{euv}\, h^u k^v.$$

Als 2-Form ist R antisymmetrisch in den letzten 2 Indizes: $R^i{}_{euv} = -R^i{}_{evu}$.
Nach Herunterziehen des ersten Index $R_{jeuv} = g_{ji} R^i{}_{euv}$ ist er auch antisymmetrisch in den ersten zwei Indizes: $R_{jeuv} = -R_{ejuv}$.

4. Berechnung des Krümmungstensors



Infinitesimale Drehung beim Paralleltransport entlang γ = Unterschied beim Transport entlang ABC bzw. ADC.

Transport des Vektors a^l von A nach B

$$b^l = a^l + \Gamma^l_{uv} a^u h^v.$$

Durch Paralleltransport verursachte Änderung

Transport von B nach C:

$$\left(\frac{\partial b^s}{\partial x^m} + \Gamma^s_{nm} b^n\right) k^m$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^s_{uv}}{\partial x^m} a^u h^v + \Gamma^s_{nm} a^n + \Gamma^s_{nm} \Gamma^n_{uv} a^u h^v\right) k^m.$$

Für den Weg ADC muss man die Indizes u, m vertauschen. Die grünen Terme sind entlang beider Wege gleich und heben sich in der Differenz weg. Es bleibt

$$R^s{}_{uvm} = \frac{\partial \Gamma^s_{uv}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^s_{mv}}{\partial x^u} - \Gamma^s_{nm} \Gamma^m_{uv} + \Gamma^s_{nm} \Gamma^n_{um}$$

Der Krümmungstensor lässt sich als vollständig aus den Christoffel-Symbolen berechnen, die ihrerseits durch die Metrik bestimmt sind.

5. Der Weg zur Feldtheorie der Gravitation

Idee: Die Verteilung von Masse und Energie im Universum legt die Krümmung fest.

① Beschreibung der gesamten Masse/Energie als Tensor 2. Stufe:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \text{Masse} & \text{Impuls} \\ \text{Impuls} & \text{Spannungen} \end{pmatrix}$$

Siehe Vortrag über Elastomechanik

T_{ik} heisst Energie-Impuls-Tensor.

② Konstruktion eines Tensors 2. Stufe aus $R^i_{\ klm}$

1. Schritt: Ricci-Tensor $R_{km} = R^i_{\ kim}$ durch Kontraktion ("Spurbildung")

2. Schritt: Krümmungsskalar $R = g^{km} R_{km}$ durch nochmalige Kontraktion

3. Schritt: Linearkombinationen: $a R_{ik} + b\, g_{ik} R$ so, dass die Kontinuitätsgleichung gilt:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

(Einstein-Tensor)

③ Feldgleichungen der Gravitation: $G_{ik} = \varkappa T_{ik}$, so muss nur noch die Kopplungskonstante $\varkappa$ bestimmt werden.

④ Vergleich mit dem newtonschen Gravitationsgesetz. In der Nähe der Sonne ist das Gravitationsfeld schwach, man kann daher

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + h_{ik}$$

approximieren mit h_{ik} klein (d.h. Produkte $h_{ik} h_{em}$ vernachlässigbar). Dafür berechnet man die Christoffel-Symbole, den Riemann-Tensor, Ricci-Tensor und den Einstein-Tensor. Für die Sonne kann man auch den Energie-Impuls-Tensor T_{ik} berechnen. Aus dem Vergleich $G_{ik} = \varkappa T_{ik}$ folgt dann die Konstante $\varkappa = 8\pi G/c^4$, G = newtonsche Gravitationskonstante.

Einsteinsche Feldgleichungen der Gravitation:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}.$$

6. Wie weiter?

① Schlussfolgerungen aus der Gravitationstheorie:
- Lichtablenkung durch die Sonne
- Perihelbewegung des Merkur
- Friedmann-Gleichung für die Geschichte des Universums
- Neutronensterne und Magnetare
- Schwarze Löcher
- Entstehung von Strukturen im Universum
- GPS

② Die kovariante Ableitung kann man auch in den Strömungsdifferentialgleichungen finden: Abweichung vom "mit dem Strom schwimmen"

⟶ Navier-Stokes-Gleichung

③ Die kovariante Ableitung kann auch für den "Transport" anderer Vektoren als von Tangentialvektoren konstruiert werden:
- Spinoren: Feldtheorie für Elektronen und Positronen
- Yang-Mills-Feldtheorien für die elektroschwache und die starke Wechselwirkung

⟶ Standardmodell