Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

7. Paralleltransport, kovariante Ableitung, Geodäten

Inhalt

1. Die zweite Ableitung einer Kurve

Das newtonsche Bewegungsgesetz besagt, dass sich Kräfte auf eine Masse als Beschleunigung, d.h. als zweite Ableitung der Bahnkurve manifestieren. Für die Bahnkurve $\gamma(t)$, die in einem Koordinatensystem durch die Funktionen

$$t \longmapsto x^i(t)$$

beschrieben wird, bedeutet dies, dass es eine Differentialgleichung der Form

$$m \, \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} = F^i(x^1(t), \dots, x^2(t))$$

geben muss, wobei F^i die Komponenten der Kraft sind. Damit sind jedoch ein paar Schwierigkeiten verbunden:

1. Was ist überhaupt die 2. Ableitung? Die erste Ableitung $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)} M$ ist ein Tangentialvektor, dieser ist nicht Teil der Mannigfaltigkeit. $\dot\gamma(t)$ müsste also ein Tangentialvektor an das Tangentialbündel sein, $\ddot\gamma(t) \in T_{(\gamma(t),\dot\gamma(t))} T_{\gamma(t)} M$

2. Die 1. Ableitung konnte zu einem koordinaten-unabhängigen Konzept gemacht werden, indem die Jacobi-Matrix eingeführt wurde. Dazu wurde

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$$

geschrieben. Die Ableitung einer Kurve war dann:

$$\dot{y}^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \cdot \dot{x}^k = \sum_{k=1}^{n} J^i{}_k \, \dot{x}^k$$

Die 2. Ableitung müsste dann sein

$$\ddot{y}^i = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x^1(t), \ldots, x^k(t)) \, \dot{x}^k(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x^1(t), \ldots, x^k(t)) \cdot \ddot{x}^k(t)$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^l \partial x^k}(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \cdot \dot{x}^i(t) \dot{x}^k(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} J^i{}_k \, \ddot{x}^k(t)}_{\text{Transformation eines Vektors}} + \underbrace{\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial J^i{}_k}{\partial x^l} \dot{x}^i(t) \dot{x}^k(t)}_{\text{kein Vektor!}} \qquad (1)$$

Wäre da nur der erste Term, könnte man die Beschleunigung als einen Vektor betrachten. Der zweite Term zeigt, dass dies nicht möglich ist

3. Das newtonsche Gesetz in der Form

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

nimmt an, dass die Kraft ein Vektor ist; die Transformationsformel 1 zeigt, dass man dies nicht erwarten kann.

<u>Lösungsansatz 1:</u> Hamiltonsche Mechanik. Ortskoordinaten q^k und Impulskoordinaten werden gleichwertig behandelt. Die Bewegung des Systems ist jetzt eine Kurve $t \longmapsto (q^k(t), p^k(t))$ in einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Die Hamilton-Funktion $H(p,q)$ ist die Energie. Die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p^k} \quad \text{und} \quad \dot{p}^k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}$$

brauchen nur noch 1. Ableitungen.

Vorteile:
- ergibt sich natürlich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung von Maupertuis
- führt auf die "richtigen" Gleichungen der Quantenmechanik

<u>Lösungsansatz 2:</u> Paralleltransport und kovariante Ableitung

2. Zusammenhang und kovariante Ableitung

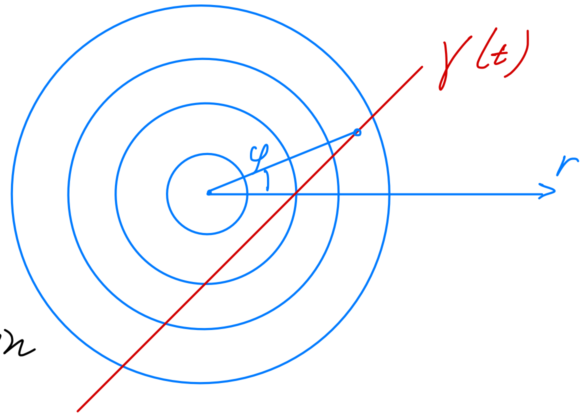
Um die zweite Ableitung eines berechnen zu können, muss man die Tangentialvektoren

$$\dot{\gamma}(t+\Delta t) \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(t)$$

miteinander vergleichen bzw. den Differenzenquotienten

$$\frac{\dot{\gamma}(t+\Delta t)-\dot{\gamma}(t)}{\Delta t}$$

bilden können. In einem festen Koordinatensystem ergeben sich im Grenzwert die Komponenten $\ddot{x}^{\mu}(t)$. Die Formel (1) zeigt aber, dass dies keine allgemein kovariante Formulierung sein kann. Beim Koordinatenwechsel treten zusätzliche Terme auf, die von den 2. Ableitungen der Koordinaten herrühren. Die $\ddot{x}^{\mu}(t)$ müssen daher mit zusätzlichen Termen korrigiert. Diese Terme beschreiben den Teil der scheinbaren Beschleunigung, die von der Krümmung der Koordinatenlinien herkommt.



$$\left.\begin{matrix}\ddot{r}(t) \neq 0 \\ \ddot{\varphi}(t) \neq 0\end{matrix}\right\} \text{ Krümmung der Polarkoordinatenlinien}$$

Die 2. Ableitung eines Vektors A entlang einer Kurve mit Tangentialvektor muss daher durch die kovariante Ableitung

$$\nabla_X A = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} \xi^k + \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma^i_{k\ell} A^\ell \xi^k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma^i_{k\ell} A^\ell \right) \xi^k \qquad (2)$$

ersetzt werden. ξ^k sind die Komponenten von X, A^i jene von A. Die $\Gamma^i_{k\ell}$ heissen Christoffel-Symbole oder Zusammenhangskoeffizienten.

Die $\Gamma^i_{k\ell}$ beschreiben, wie die Komponente A^ℓ entlang eines infinitesimalen Schrittes mit Richtung ξ^k angepasst werden muss, um den "Krümmungseinfluss" des Koordinatensystems zu kompensieren.

Genau genommen beschreibt (2) nur die i-Komponente der kovarianten Ableitung:

Definition: Die kovariante Ableitung von A in Richtung X ist

$$\nabla_X A = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma^i_{k\ell} A^\ell \right) \xi^k \vec{e}_i .$$

Damit die kovariante Ableitung eine koordinaten-unabhängige Grösse wird, müssen die Γ^i_{ke} ein spezielles Transformationsgesetz erfüllen, welches im Bach hergeleitet wird. Sind $\tilde{\Gamma}$ die Zusammenhangskoeffizienten im y-Koordinatensystem, ergeben sich die Formeln

$$\underbrace{\sum_{s=1}^{n} J^i{}_s \Gamma^s_{ru}}_{\text{Transformation für kontravariante Indizes}} = \underbrace{\frac{\partial J^i{}_r}{\partial x^u}}_{\text{kein Transformationsgesetz für Tensoren!}} + \underbrace{\sum_{\ell k=1}^{n} \tilde{\Gamma}^i_{\ell k} J^\ell{}_r J^k{}_u}_{\text{Transformation für kovariante Indizes}}$$

Die Γ^i_{ke} bilden daher keinen Tensor!

Die kovariante Ableitung beschreibt also die Änderung der Richtung eines Vektors, die nicht durch die Krümmung der Koordinatenlinien erklärt ist.

$\nabla_X A = 0 \iff$ "Der Vektor A ändert objektiv nicht bei der Bewegung in Richtung X"

3. Paralleltransport und Levi-Civitá-Zusammenhang

Wenn sich ein Vektor bei der Bewegung in Richtung X nicht ändert, dann würde man in einer Ebene davon sprechen, dass der Vektor zu sich selbst parallel verschoben worden ist.

<u>Definition</u>: Ein Vektor A wird entlang einer Kurve $\gamma(t)$ parallel transportiert, wenn für alle t gilt

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} A = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma^i_{kl} A^l \right) \dot{x}^k(t) = 0$$

In der Geometrie bringt man Paralleltransport auch mit dem Skalarprodukt in Verbindung: beim Paralleltransport von Vektoren A und B darf das Skalarprodukt nicht ändern:

$$\langle A, B \rangle_g = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} A^i B^k = \text{const.}$$

Die Zusammenhangskomponenten sollen so gewählt werden, dass für die Ableitung entlang der Kurve die Produktregel gilt:

$$\nabla_X \langle A, B \rangle_g = \langle \nabla_X A, B \rangle_g + \langle A, \nabla_X B \rangle_g .$$

Einsetzen der Definitionen:

$$\text{LHS:}\quad \frac{\partial}{\partial x^k}\sum_{i,l=1}^n g_{il}A^iB^l = \sum_{i,l=1}^n \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}A^iB^l + \sum_{i,l=1}^n g_{il}\cancel{\frac{\partial A^i}{\partial x^k}B^l}^{\,①} + \sum_{i,l=1}^n g_{il}\cancel{A^i\frac{\partial B^l}{\partial x^k}}^{\,②}$$

$$\text{RHS:}\quad \sum_{i,l=1}^n g_{il}\left(\cancel{\frac{\partial A^i}{\partial x^k}}^{\,①} + \sum_{s=1}^n \Gamma^i_{sk}A^s\right)B^l + \sum_{i,l=1}^n g_{il}A^i\left(\cancel{\frac{\partial B^l}{\partial x^k}}^{\,②} + \sum_{s=1}^n \Gamma^l_{sk}B^s\right).$$

Die rot gestrichenen Terme fallen beim Vergleich weg und es bleibt

$$\sum_{i,l=1}^n \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}A^iB^l = \sum_{i,l,s=1}^n g_{il}\left(\underbrace{\Gamma^i_{sk}A^sB^l}_{i\leftrightarrow s} + \underbrace{\Gamma^l_{sk}A^iB^s}_{l\leftrightarrow s}\right)$$

$$= \sum_{i,l,s=1}^n \left(g_{sl}\Gamma^s_{ik}A^iB^l + g_{is}\Gamma^s_{lk}A^iB^l\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i,l=1}^n \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \sum_{s=1}^n g_{ls}\Gamma^s_{ik} - \sum_{s=1}^n g_{is}\Gamma^s_{lk}\right)A^iB^l = 0.$$

Da dies für alle A, B gelten soll, muss die runde Klammer verschwinden:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \sum_{s=1}^n g_{ls}\Gamma^s_{ik} + \sum_{s=1}^n g_{is}\Gamma^s_{lk} \qquad (3)$$

für alle i, l, k.

Die Gleichungen (3) liefern durch zyklisches Vertauschen das Gleichungssystem

$$
\left.
\begin{array}{lcllll}
\dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^k} & = & g_{sl}\,\Gamma^s_{ik} & + \; g_{is}\,\Gamma^s_{lk} & & \\[3ex]
\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} & = & & \; g_{si}\,\Gamma^s_{kl} & + \; g_{ks}\,\Gamma^s_{il} & \\[3ex]
\dfrac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} & = & g_{ls}\,\Gamma^s_{ki} & & + \; g_{sk}\,\Gamma^s_{li} \, . &
\end{array}
\right\} \quad (4)
$$

Die blauen Terme stimmen überein, weil g symmetrisch ist: $g_{ik} = g_{ki}$. In übereinander stehenden Termen sind die unteren Indizes von Γ vertauscht. Das Gleichungssystem (4) bestimmt die Γ nur dann eindeutig, wenn man zusätzlich

$$\Gamma^s_{ik} = \Gamma^s_{ki}$$

verlangt. Dann werden die Gleichungen zu

$$
\left.
\begin{array}{lcllll}
\dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^k} & = & g_{ls}\,\Gamma^s_{ik} & + \; g_{is}\,\Gamma^s_{kl} & & \\[3ex]
\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} & = & & \; g_{is}\,\Gamma^s_{kl} & + \; g_{ks}\,\Gamma^s_{il} & \\[3ex]
\dfrac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} & = & g_{ls}\,\Gamma^s_{ik} & & + \; g_{ks}\,\Gamma^s_{il} &
\end{array}
\right\} \quad (5)
$$

(5) kann man nach dem ersten Term auflösen indem man die mittlere Gleichung von der Summe der anderen 2 subtrahiert:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \sum_{s=1}^{n} 2 g_{ls} \Gamma^s_{ik}.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ und der inversen Matrix g^{jl} findet man

$$\Gamma^j_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \frac{g^{jl}}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right). \qquad (6)$$

Diese heissen auch die Christoffel-Symbole 2. Art des Levi-Civitá-Zusammenhangs. Die Terme

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) \qquad (7)$$

werden auch Christoffel-Symbole 1. Art genannt.

<u>Algorithmus zur Berechnung der Γ^j_{ik}:</u>

1. g_{ik} bestimmen
2. Inverse Matrix g^{ik} berechnen
3. Ableitungen $\partial g_{ik} / \partial x^l$ berechnen
4. $\Gamma_{l,ik}$ nach (7) bilden
5. Γ^j_{ik} nach (6) bilden.

4. Geodäten

Eine Geodäte ist eine Kurve minimaler Länge. Sie minimiert die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{ik}\, \dot{x}^i(t)\dot{x}^k(t)}\, dt \qquad (8)$$

unter allen Kurven mit festen Endpunkten.

Die Variationsrechnung zeigt, dass man aus eine Differentialgleichung ableiten kann, die die Lösungskurve erfüllen muss, die Euler-Lagrange-Differentialgleichung.

Eine Kurve minimiert die Länge, wenn sie "so gerade wie möglich" verläuft, d.h. "keine Abweichungen" von der paralleltransportierten Tangentialrichtung hat. Die kovariante Ableitung des Tangentialvektors muss daher verschwinden, es gilt

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^k}\dot{x}^k + \Gamma^i_{kl}\, \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{x}^i + \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma^i_{kl}\, \dot{x}^k \dot{x}^l = 0. \qquad (9)$$

Geodäten sind daher Lösungen der Differentialgleichung (9). (9) ist auch die Euler-Lagrange-Dgl des Variationsproblems (8).