Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

6. Hodge-Operator, Laplace-Operator, Feldgleichungen

Inhalt

1. Felder als Formen oder Vektoren?

Traditionellerweise werden viele Felder nicht als p-Formen, sondern als Vektorfelder dargestellt. Die Ausführungen früherer Kapitel haben gezeigt, dass die Darstellung als Felder die "richtige" Wahl ist. Der Erfolg der Vektorfeldbeschreibung in der Praxis zeigt, dass sie nicht ganz falsch sein kann. Es braucht also eine Methode, zwischen p-Formen und Vektorfeldern umzurechnen. Durch diese Umrechnung wird notwendigerweise das Prinzip der allgemeinen Kovarianz verletzt. Es kann daher nur für eine eingeschränkte Familie von Koordinatentransformationen funktionieren, die durch eine zusätzliche Strukturkomponente definiert ist.

Voraussetzung: Im Folgenden wird immer angenommen, dass auf M eine Metrik definiert ist, die ein Skalarprodukt von Tangentialvektoren definiert:

$$X=\sum_{i=1}^n \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_{i=1}^n \eta^i\frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \langle X,Y\rangle = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}\,\xi^i\eta^k$$

oder

$$g=\sum_{i,k=1}^n g_{ik}\,dx^i\otimes dx^k \quad \text{(kovarianter Tensor).}$$

Mit dem Skalarprodukt ist es möglich eine 1-Form in einen Vektor zu verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i \\ X &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i .$$

Finde ein Vektor A mit Komponenten a^k derart, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = \langle \alpha, X \rangle = \langle A, X \rangle = \sum_{i,k} g_{ik} a^i \xi^k .$$

Das geht nur, wenn

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ik} a^i = \sum_{i=1}^{n} g_{ki} a^i$$

oder in Matrixschreibweise:

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} (a_1 \; \cdots \; a_n)^t .$$

Zur Berechnung der Komponenten a^k von A wird die Inverse Matrix der Matrix (g_{ik}) benötigt.

Definition: Zur Metrik g_{ik} mit Matrix (g_{ik}) gehört die inverse Matrix, deren Einträge mit g^{ik} bezeichnet werden. g^{ik} sind daher so, dass

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l .$$

Definition: Die kontravarianten Komponenten a^i zum kovarianten Tensor a_k sind durch

$$a^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} a_k$$

gegeben. Dieser Prozess heisst "Hochziehen eines Index". Umgekehrt gibt es zu jedem Vektor mit kontravarianten Komponenten ξ^i den kovarianten Tensor mit Komponenten

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki} \xi^i \qquad \left(\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k dx^k \right).$$

Dieser Prozess heisst "Herunterziehen eines Index".

Die Metrik ermöglicht also, beliebig zwischen Vektoren und 1-Formen zu wechseln. Der Preis dafür ist 1. eine Metrik und 2. nur noch Transformationen, die die die Metrik respektieren.

Es gilt:

$$\langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i = \sum_{i,k,j=1}^{n} a_k g^{kj} g_{ji} \xi^i = \sum a^j \xi_j = \langle \xi, A \rangle$$

Für eine beliebige Metrik ist die zu einem Vektor $A = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gehörige 1-Form

$$\alpha = \sum_{i,k=1}^{n} a^i g_{ik}\, dx^k .$$

Die äussere Ableitung

$$d\alpha = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (a^i g_{ik})\, dx^j \wedge dx^k$$

$$= \sum_{j<k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial a^i}{\partial x^k} g_{ij} \right) dx^j \wedge dx^k$$

$$+ \sum_{j<k} \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k$$

enthält nicht nur die Ableitungen von a^i, sondern auch Ableitungen des metrischen Tensors. Die Identifikation einer 1-Form mit einem Vektor ist also eigentlich nur zulässig, wenn die Ableitungen $\partial g_{ik}/\partial x^j = 0$ sind, d.h. g_{ik} müssen konstant sein. Die metrischen Koeffizienten stören nur dann nicht, wenn $g_{ik} = \delta_{ik}$.

$\Longrightarrow$ Nur in kartesischen Koordinaten mit der Standardmetrik $g_{ik} = \delta_{ik}$ kann man "ungestraft" p-Vektoren und p-Formen identifizieren

2. Skalarprodukt von p-Vektoren und p-Formen

Der metrische Tensor g_{ik} definiert das Skalarprodukt zwischen Tangentialvektoren

$$X = \sum \xi^i \vec{e_i}\,,\quad Y = \sum \eta^k \vec{e_k} \implies \langle X, Y \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \eta^k g_{ik}$$

Da sich jeder kovariante Index mit der inversen Matrix g^{ik} zu einem kontravarianten Index hochziehen lässt, definiert g_{ik} auch ein Skalarprodukt von 1-Formen:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i \implies A = \sum_{i,k=1}^{n} a_i g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\, dx^2 \implies B = \sum_{i,k=1}^{n} b_i g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle A, B \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j g^{ji} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} b_l g^{lk} \right)$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} g^{ji} g_{ik} \right)}_{\delta^j_k} g^{lk}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l \sum_{k=1}^{n} \delta^j_k g^{lk}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l g^{jl}$$

d.h. der kontravariante Tensor g^{jl} definiert das Skalarprodukt der 1-Formen.

Die Metrik lässt sich aber auch auf p-Formen und p-Vektoren ausdehnen. Seien

$$\overset{\beta}{\alpha} = \sum_{i_1<\dots<i_p} \overset{b_{i_1\dots i_p}}{a_{i_1\dots i_p}}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \qquad \in \Omega^p(M),$$

$$\overset{\gamma}{X} = \sum_{k_1<\dots<k_p} \overset{\eta^{k_1\dots k_p}}{\xi^{k_1\dots k_p}}\, \vec{e}_{k_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{k_p} \qquad \in \Lambda^p TM .$$

Durch Hoch- und Herunterziehen von Indizes kann man aus einem p-Vektor eine p-Form machen und umgekehrt

$$a^{k_1\dots k_p} = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}\, g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}$$

$$\xi_{i_1\dots i_p} = \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{n} \xi^{k_1\dots k_p}\, g_{i_1k_1}\cdots g_{i_pk_p}$$

und analog für $b^{k_1\dots k_p}$ und $\eta_{i_1\dots i_p}$.

Das Skalarprodukt von p-Vektoren

$$\langle \vec{e}_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{i_p}, \vec{e}_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{i_p}\rangle$$

ist eine total antisymmetrische lineare Funktion der $\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_p}$, sie muss daher ein Vielfaches der Gram-Determinante

$$= \begin{vmatrix} \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_p}\rangle \\ \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_p}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_p}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & g_{i_1 k_2} & \cdots & g_{i_1 k_p} \\ g_{i_2 k_1} & g_{i_2 k_2} & \cdots & g_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i_p k_1} & g_{i_p k_2} & \cdots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Skalarprodukt von p-Formen durch hochziehen der Indizes, d.h. in der Determinante werden die $g_{i_s k_t}$ durch $g^{i_s k_t}$ ersetzt, also

$$\langle dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p} \rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle dx^{i_1}, dx^{k_1} \rangle & \ldots & \langle dx^{i_1}, dx^{k_p} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle dx^{i_p}, dx^{k_1} \rangle & \ldots & \langle dx^{i_p}, dx^{k_p} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g^{i_1 k_1} & \cdots & g^{i_1 k_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{i_p k_1} & \cdots & g^{i_p k_p} \end{vmatrix} .$$

3. Der Hodge-Operator

Beobachtung: in $\mathbb{R}^3$ gilt:

p	Basis	Dimension
0	1	1
1	dx^1, dx^2, dx^3	3
2	$dx^2\wedge dx^3, dx^1\wedge dx^3, dx^1\wedge dx^2$	3
3	$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$	1

Allgemein:

$$\dim \Omega^p(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Omega^{n-p}(\mathbb{R}^n)$$

Zufall? Gibt es eine umkehrbare lineare Abbildung

$$* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

für alle p? Zum Beispiel:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \longleftrightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3): \quad 1 \longmapsto dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3): \quad \begin{aligned} dx^1 &\mapsto dx^2\wedge dx^3 \\ dx^2 &\mapsto dx^1\wedge dx^3 \\ dx^3 &\mapsto dx^1\wedge dx^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung muss aber allgemein kovariant definiert werden.

2. Versuch: Zu $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ definiere $*\omega = s\, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{n-p}}$ derart, dass

$$\omega \wedge *\omega = \underbrace{dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n}_{} \qquad (2)$$

bis auf einen skalaren Faktor eindeutig da $\dim \Omega^n(\mathbb{R}^n) = 1$

Die $dx^{k_1}, \ldots, dx^{k_{n-p}}$ sind die Basis-1-Formen, die in $dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}$ fehlen $\Longrightarrow s = \pm 1$.

$$dx^1 \wedge s\, dx^2 \wedge dx^3 = s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = 1$$
$$dx^2 \wedge s\, dx^1 \wedge dx^3 = -s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = -1$$
$$dx^3 \wedge s\, dx^1 \wedge dx^3 = s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = 1$$

Die korrekte Wahl der Bildformen ist daher

$$\left.\begin{aligned} dx^1 &\longmapsto dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^2 &\longmapsto -dx^1 \wedge dx^3 \\ dx^3 &\longmapsto dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Die Formel (2) kann nur für Basisformen funktionieren

Definition: Sei $\beta \in \Omega^p(M)$. Dann ist $*\beta$ die p-Form, die für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol}(M)$$

mit $\operatorname{vol}(M) = \sqrt{\det(g_{ik})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ erfüllt.
$*: \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ heisst der Hodge-Operator

Rechenregeln für den Hodge-Operator:

$$\left.\begin{aligned} *(\alpha_1 + \alpha_2) &= *\alpha_1 + *\alpha_2 \\ *(c\alpha_1) &= c(*\alpha_1) \end{aligned}\right\} \text{linear}$$

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)}\,\omega \qquad \text{(Satz 8.4 im Buch)}$$

(für $n=3$ ist $(-1)^{0(n-0)}=1$ und $(-1)^{1(3-1)}=1$, d.h. für $n=3$ kann man das Vorzeichen ignorieren).

<u>Berechnungsalgorithmus</u> für $*$-Operator:

1. Metrik g_{ik} festlegen
2. Volumenform aus $\sqrt{\det(g_{ik})}$
3. Skalarprodukt von 1-Formen: g^{ik}
4. Skalarprodukt von p-Formen
5. $*$-Operator für p-Formen aus der Definition.

Beispiel Polarkoordinaten:

$$*dr = r\,d\varphi\,, \qquad *d\varphi = -\frac{1}{r}\,d\varphi$$

Weitere Beispiele im Buch, z.B. für Kugelkoordinaten.

4. 1- und 2-Formen als Vektorfelder

In diesem Abschnitt gehen wir von kartesischen Koordinaten mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ auf $\mathbb{R}^3$ aus. Der Hodge-Operator hat dann die Form (3) auf 1-Formen.

① Zu einem Vektor A mit Komponenten a^i sind die $a_i = a^i$ die Komponenten einer 1-Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i$. Die äussere Ableitung davon ist

$$d\alpha = \sum_{k<i} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i \in \Omega^2$$

Der Hodge-Operator ergibt die 1-Form

$$\begin{aligned} * d\alpha = &\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^3 \\ &- \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3} \right) dx^2 \\ &+ \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) dx^3 \end{aligned}$$

da der Vektor

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial a_2}{\partial x^3} \\[2ex] \dfrac{\partial a_1}{\partial x^3} - \dfrac{\partial a_3}{\partial x^1} \\[2ex] \dfrac{\partial a_2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a} \quad \text{entspricht}$$

② Zum Vektor A mit Komponenten a^i gibt der Hodge-Operator die 2-Form

$$\alpha = a^3\, dx^1 \wedge dx^2 - a^2\, dx^1 \wedge dx^3 + a^1\, dx^2 \wedge dx^3$$

mit der äusseren Ableitung

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^3} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^1}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

aus der der Hodge-Operator wieder die Funktion

$$* d\alpha = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3} = \mathrm{div}\, \vec{a}$$

macht.

$$\begin{tikzcd}
& TM \arrow[d, leftrightarrow] & & \\
C^\infty(M) \arrow[ur, "\mathrm{grad}"] \arrow[r, "d"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[ddr, "\mathrm{rot}"'] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & \Omega^3(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] \\
& & \Omega^1(M) \arrow[d, leftrightarrow] & C^\infty(M) \\
& & TM \arrow[ur, "\mathrm{div}"'] &
\end{tikzcd}$$

5. Laplace-Operator

Die Kombination div grad entspricht die Verkettung der blauen Pfeile in

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "\text{grad}"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "?"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "\text{div}"] & \Omega^3(M)
\end{tikzcd}
$$

Dann fehlt aber der rote Schnitt, div grad lässt sich daher nicht allgemein kovariante Art definieren.

Mit dem Hodge-Operator kann jetzt ein neuer Differentialoperator definiert werden, der das Prinzip der allgemeinen Kovarianz respektiert. Dazu kombinieren wir den Ω^*-Komplex mit einer 2. Kopie:

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^{p-1}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & \Omega^{p}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] & \Omega^{p+1}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] & \Omega^{p+2}(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] \\
\Omega^{n-p+1}(M) & \Omega^{n-p}(M) \arrow[l, "d"'] & \Omega^{n-p-1}(M) \arrow[l, "d"'] & \Omega^{n-p-2}(M) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Definition: $\delta = (-1)^p *^{-1} d * = (-1)^{p(n-p)+p} * d *$

heisst das **Kodifferential.**

Rechenregeln für das Kodifferential

$$\delta : \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

linear:
$$\begin{aligned}\delta(\alpha_1 + \alpha_2) &= \pm * d * (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= \pm * d * \alpha_1 \pm * d * \alpha_2 \\ &= \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 \\ \delta(c\alpha) &= \pm * d * (c\alpha) \\ &= c(\pm * d * \alpha) \\ &= c\,\delta\alpha\end{aligned}$$

Iteration:
$$\begin{aligned}\delta\delta\alpha &= \pm * d * * d * \alpha \\ &= * \underbrace{dd}_{=0} * \alpha \quad = 0\end{aligned}$$

Die beiden Operatoren d und δ

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^{p-1}(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^p(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^{p+1}(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & {} \arrow[l, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

lassen sich jetzt zu einem neuen Operator kombinieren:

Definition: Der Operator $\Delta = d\delta + \delta d$ heisst der Hodge-Laplace-Operator oder Laplace-Operator

Für $f \in C^\infty(M)$: $\Delta f = d\delta f + \delta d f$

$$= \underbrace{\pm d * d \underbrace{* f}_{\in \Omega^n(M)}}_{=0} \pm * d * d f = * d * d f$$

In kartesischen Koordinaten ist

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i$$

weglassen

$$*df = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$d{*}df = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \, dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$*d{*}df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2} .$$

In anderen Koordinatensystemen ist die Rechnung komplizierter zum Beispiel in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

oder in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

6. Wärmeleitung und Diffusion

In einem Medium mit konstanter Wärmekapazität ist die enthaltene Wärmeenergie proportional zur Temperatur T. Der Wärmefluss ist proportional zum Gradienten, d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = -\kappa \Delta T$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T. \qquad \text{Wärmeleitungsgleichung}$$

Die Konzentration eines in einem homogenen Medium gelösten Stoffes ist c. Der Stofffluss ist proportional zu $\operatorname{grad} c$. Aus der Materieerhaltung folgt daher die Kontinuitätsgleichung für c:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c,$$

dies ist die Diffusionsgleichung.

7. Wellengleichung

Sei $u(x,t)$ die Auslenkung eines Teilchens eines elastischen Mediums aus der Ruhelage. Nach dem Hookschen Gesetz ist die Rücktreibende Kraft: $F = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Nach dem newtonschen Gesetz gilt

$$F = ma = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dies ist die Wellengleichung.

Die grösse $m \frac{\partial u}{\partial t}$ ist die Impulsdichte und grad u ist proportional zum Impulsstrom. Da der Impuls erhalten ist, gibt es eine Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t} m \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(-k \operatorname{grad} u)$$

$$\Longrightarrow \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u$$