Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

2. Tangentialvektoren, Richungsableitung, 1-Formen, Integral

Inhalt

1. Tangentialvektoren

In der ersten Sitzung wurde gezeigt, dass Naturgesetze so formuliert werden müssen, dass sie in jedem Koordinatensystem funktionieren. Dies wird erreicht, indem man sich zu jeder verwendeten Grösse überlegt, wie sie sich ändert, wenn man das Koordinatensystem wechselt. Zulässige Formulierungen von Naturgesetzen liegen vor, wenn sie sich beim Koordinatenwechsel nicht ändern.

Als Beispiel wurde gezeigt, wie $\vec{F} = m\vec{a}$ ein gutes Naturgesetz ist, weil $\vec{F}$ und $\vec{a}$ sich bei vielen Koordinatentransformationen nicht ändern (Inertialsysteme). Allerdings waren ganz allgemeine nichtlineare Transformationen der Form

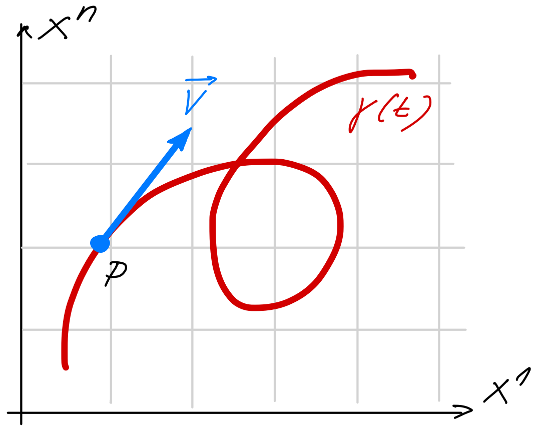
$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n)$$

ausgeschlossen. Dass die Funktionen $y^k(x^1, \dots, x^n)$ "kompliziert" sein können, wird weniger "schlimm", wenn man den Geschwindigkeitsvektor einer Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n : t \longmapsto \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

im Koordinatensystem $(x^1, \dots, x^n)$ betrachtet.

Für die Ableitungen der Koordinaten wurde auch schon das Transformationsgesetz



$$\frac{dy^k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial y^k}{\partial x^i}}_{J^k{}_i} \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_{\vec{v}} \qquad (1)$$

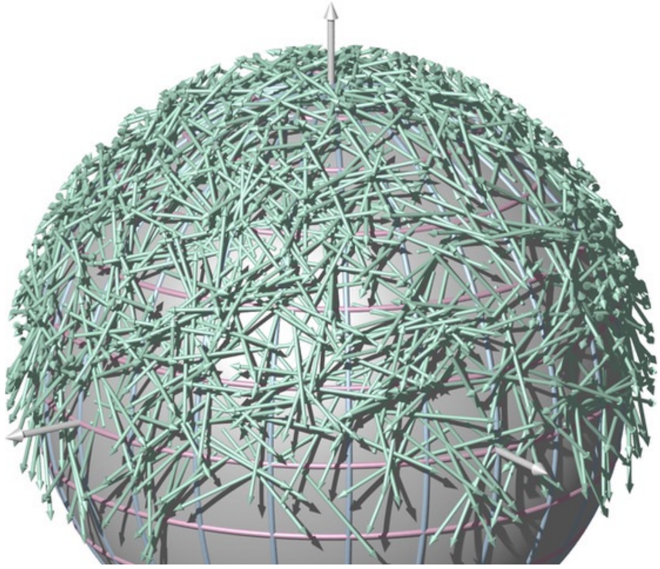
mit der Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(y^1,\dots,y^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)}$ gefunden. Man kann das Gesetz (1) auch als Produkt einer Matrix mit Spaltenvektoren schreiben:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & J & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{pmatrix}}_{\to\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}} .$$

Es sieht also so aus, als wären Ableitung der Koordinaten = Geschwindigkeiten eine gute Basis für Naturgesetze.

"Ableitungsvektoren"
= Spaltenvektoren, die mit der Jacobi-Matrix transformiert werden
= obere Indizes

Es gibt aber ein Problem: wo genau liegt der in der Abb. auf der letzten Seite gezeichnete Vektor?



① Masseinheit von $\dot{x}^i$

$$[\dot{x}^i] = \frac{[\text{Länge}]}{[\text{Zeit}]},$$

kann nicht in einem Koordinatensystem gezeichnet, dessen Achsen Masseinheit [Länge] haben! Das wird auch im Physikunterricht immer "falsch" gemacht.

② Der Geschwindigkeitsvektor einer Kurve auf einer Kugeloberfläche kann nicht Teil der Kugeloberfläche sein, da diese gekrümmt ist!

Lösung: Der Tangentialvektor

- ist eine abstrakte Eigenschaft differenzierbarer Kurven in einem Koordinatensystem, die ausdrücken kann, ob zwei Kurven mit der gleichen Geschwindigkeit durch einen Punkt gehen
- wird durch Ableitungen $\dot{x}^i$ der Koordinaten dargestellt und mit $J^k{}_i$ transformiert
- gleiche "Geschwindigkeit" im Punkt P bedeutet gleichen Tangentialvektor.

2. Tangentialvektoren als Ableitung, Richtungsableitung

Ein skalares Feld f (z.B. Temperaturfeld oder Druckfeld in der Erdatmosphäre) kann dadurch erforscht werden, dass man sich ausgerüstet mit einem Messgerät entlang einer Kurve $\gamma(t)$ durch das Feld bewegt. Man misst dann abhängig von der Zeit

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(\gamma(t))$$

und kann nach der Rate fragen, mit der sich das Feld ändert:

$$\frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot \frac{dx^1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \cdot \frac{dx^n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt} . \qquad (2)$$

In der Formel (2) kommen nur die Komponenten $\dot{x}^i$ des Tangentialvektors vor (d.h. dies ist eine gute Basis für ein Naturgesetz!).

Folgerung: zu jedem Tangentialvektor (gegeben durch die $\dot{x}^i$) gibt es einen Ableitungsoperator, der auf Funktionen = Skalarfeldern wirkt.

Definition: Der Tangentialvektor X mit Komponenten $\xi^1, \dots, \xi^n$ entspricht dem Ableitungsoperator

$$X \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \xi^i \qquad (3)$$

auf der Funktion f.

Beispiel: Die Standardbasisvektoren haben die Form

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Passende Kurven mit diesen Tangentialvektoren sind

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(0)+t \\ x^2(0) \\ \vdots \\ x^n(0) \end{pmatrix}, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0)+t \\ \vdots \\ x^n(0) \end{pmatrix}, \dots, t \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \\ \vdots \\ x^n(0)+t \end{pmatrix}.$$

Dies sind die Koordinatenlinien: es ändert sich entlang der Kurve nur jeweils eine Koordinate.

Der zugehörige Ableitungsoperator ist

$$\vec{e}_i \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

d.h. man muss die $\frac{\partial}{\partial x^i}$ als Basis-Tangentialvektoren betrachten und kann jeden Tangentialvektor daraus zusammensetzen:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow X \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

wie in (3)!

Die Basis $\frac{\partial}{\partial x^i}$ passt auch zum Transformations-gesetz. Dazu muss man die Operatoren $\frac{\partial}{\partial y^k}$ durch die $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ausdrücken. Dazu berechnet man mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(y^1,\dots,y^n) = \frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y^k} = \sum_{k=1}^{n} J^k{}_i \frac{\partial f}{\partial y^k}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} J^k{}_i \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Für den Vektor X mit Komponenten ξ^i folgt

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{k=1}^{n} J^k{}_i \frac{\partial}{\partial y^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} J^k{}_i \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial y^k},$$

d.h. die Komponenten von X im y-Koordinatensystem sind durch

$$\eta^k = \sum_{i=1}^{n} J^k{}_i \xi^i \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

gegeben, wie es für Vektorkomponenten sein muss.

3. Linearformen oder 1-Formen

Die Formel (3) für die Wirkung des Tangentialvektors auf dem Feld f kann man auch als Matrizen-produkt schreiben:

$$X \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \xi^i$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

Achtung: wir versuchen nicht, $X \cdot f$ als Skalarprodukt zu schreiben, weil das Verhalten eines Skalar-produktes bei Koordinatentransformation noch ungeklärt ist.

Die Komponenten $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ definieren eine lineare Abbildung

$$X \longmapsto X \cdot f \qquad \xi^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i,$$

die nur von den partiellen Ableitungen abhängt.

<u>Definition:</u> Das **Differential** df einer Funktion f ist die lineare Abbildung

$$df : X \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i = \langle df, X \rangle$$

In der klassischen Vektoranalysis werden die $\partial f/\partial x^i$ als der Gradient-Vektor betrachtet. Dies ist jedoch nicht ganz richtig, weil die partiellen Ableitungen das falsche Transformationsgesetz haben.

Koordinatentransformation für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k} J^k{}_i \,.$$

Die Transformation erfolgt zwar wieder mit der Jacobi-Matrix $J^k{}_i$, aber es wird über den "falschen" Index summiert, und es wird vom y- zum x-Koordinatensystem transformiert, d.h. in die "falsche" Richtung. In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

<u>Definition</u>: Das Differential ist ein kovarianter Tensor 1. Stufe, seine Komponenten l_k transformieren sich nach dem Gesetz

$$l_i = \sum_{k=1}^{n} l'_k J^k{}_i$$

vom y- ins x-Koordinatensystem. Ein Tangentialvektor heisst kontravarianter Tensor 1. Stufe

Definition: Eine lineare Abbildung

$$\alpha : X \longmapsto \langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} l_i \xi^i \qquad (4)$$

heisst **Linearform** oder **1-Form**.

1-Formen stellen Felder dar, die durch Bewegung in Richtung von Tangentialvektoren erforscht werden. Die Kombination einer 1-Form mit einem Tangentialvektor wie in (4) ergibt eine Grösse, die vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Beispiel: die Differentiale dx^k der Koordinatenfunktionen x^k haben die Komponenten

$$\langle dx^k, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \xi^i = \xi^k.$$

$$= \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Man kann daher auch

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$$

schreiben. Die 1-Formen dx^k bilden eine Basis der 1-Formen.

Definition: Der Operator d heisst die **äussere Ableitung**

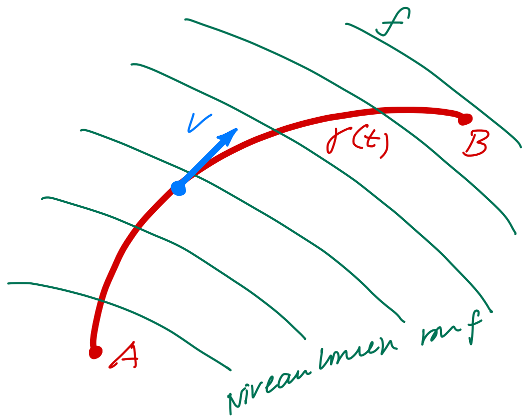
$$d(f+g) = df + dg,$$

$$d(fg) = g\,df + f\,dg,$$

$$d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2.$$

4. Integration einer 1-Form entlang einer Kurve

Wie ändert sich das Feld f, wenn man sich entlang der Kurve $\gamma(t)$ von A nach B bewegt?



Die Änderungsrate wird durch das Differential df und die aktuelle Geschwindigkeit v als $\langle df, v\rangle$ gegeben. Die Änderung zwischen t und $t+\Delta t$ ist daher $\langle df, v\rangle \cdot \Delta t$ und die gesammte Änderung zwischen A und B:

$$\sum \langle df, \vec{v}\rangle \Delta t \approx \int_{t_A}^{t_B} \langle df, \dot\gamma(t)\rangle \, dt.$$

<u>Definition</u>: Das Integral einer 1-Form α entlang einer Kurve $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \langle \alpha, \dot\gamma(t)\rangle \, dt.$$

<u>Beispiel</u>: die 1-Form dx^1 hat das Integral

$$\int_\gamma dx^1 = \int_a^b \langle dx^1, \dot\gamma(t)\rangle \, dt = \int_a^b \frac{dx^1}{dt} \, dt$$

$$= [x^1(t)]_a^b = x^1(b) - x^1(a).$$

Beispiel: Das Gravitationsfeld der Masse M im Nullpunkt wird durch die 1-Form α, dargestellt durch den Zeilenvektor

$$-\frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

gegeben. Die Masse m wird dann entlang der x^1-Achse von a nach b bewegt, d.h. der Weg ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

Die zum Zeitpunkt t erbrachte Leistung ist

$$\langle \alpha, \dot{\gamma} \rangle = \left(-\frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , r = t$$

$$= -\frac{GM}{t^2}.$$

Der Unterschied der potentiellen Energie ist daher

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b -\frac{GM}{t^2}\,dt = \left[\frac{GM}{t}\right]_a^b = GM\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

Die Funktion $f = \frac{GM}{r}$ heisst auch das Gravitationspotential.

Es gilt $\alpha = df$. Um dies zu zeigen berechnet man

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{GM}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\frac{1}{\cancel{2}r}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right)}_{\cancel{2}x^i}$$

$$= -\frac{GM}{r^3}x^i.$$

Dies sind die Komponenten von α in (5)