Mathematisches Seminar

# Felder

Andreas Müller

## 1. Koordinaten

# Inhalt

# 1. Eigenschaften von Feldern

**Beispiel:** Wärmeleitung. Wenn $T_1 > T_2$, dann fliesst Wärmeenergie vom Teil ① zum Teil ②:


Der Wärmefluss ist proportional zum Temperatur-unterschied:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k\,(T_1 - T_2) = k\,\Delta T$$

Beobachtungen:

① Kontakt ist erforderlich: Wärmetransport ist lokal

② Die Wirkung ($\Delta Q$) hängt linear von der Ursache ($\Delta T$) ab

**Beispiel:** Gravitation nach Newton: die Bewegung der Himmelskörper lässt sich mit ausserordentlicher Genauigkeit vorhersagen, wenn man annimmt, dass zwischen 2 Körpern mit Massen $m_1$ und $m_2$ eine Kraft mit Betrag

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad r = \text{Abstand}$$

Vergleich mit der Beobachtung zur Wärmeleitung:

① Das Gravitationsgesetz ist nicht lokal. Die Wirkung erfolgt sofort über kosmische Distanzen hinweg ohne etwas physikalisches, welches die Gravitationswirkung vermitteln kann. → geisterhafte Fernwirkung

→ Magie, nicht Physik!

② Wirkung an der Stelle von der Masse $m_1$ ist linear von der Masse abhängig:

$$F = \frac{G m_2}{r^2} \cdot m_1$$

z.B. Erdoberfläche: $F = g\, m$

Lösung des Problems: Es gibt ein physikalisches Objekt, welches die Gravitationskraft vermittelt – das Gravitationsfeld. Als physikalisches Objekt muss es durch physikalische Eigenschaften (Energie, Kopplungskonstanten, Bewegungsgleichungen) beschrieben werden können.

Einstein: Feld $= g_{\mu\nu}$ metrischer Tensor

Feldgleichung: $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

proportional

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ Einstein-Tensor

$T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

## 2. Mathematische Beschreibung von Feldern

<u>Forderungen</u>

① Das Feld ist überall dort anwesend, wo die physikalische Wirkung spürbar ist.

② Es muss eine "Feldstärke" geben, die das Ausmass der Wirkung beschreibt.

③ Es muss eine "Kopplungsfunktion" geben, die beschreibt, wie stark ein Körper sich von einem Feld beeinflussen lässt.

Aus ①+② folgt, dass ein Feld eine von Ort und Zeit abhängige Funktion

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Zeit}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{Ort}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{Feldstärke}}$$

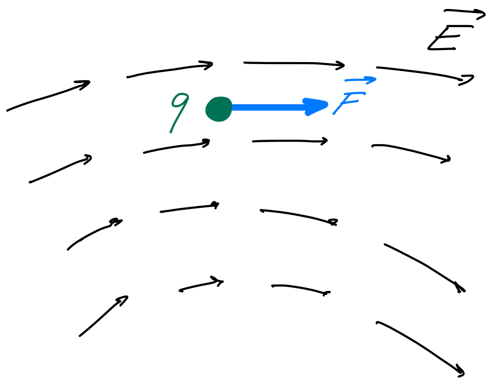
Beispiel 1: Temperaturfeld

$$T: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (t,x,y,z) \longmapsto T(t,x,y,z)$$

$T$ ist proportional zur Wärmeenergiedichte. Je höher die Temperatur, desto höher auch die übertragene Energiemenge.

Das T-Feld bewirkt T-Änderungen von ins Feld gebrachten Testkörpern. Kopplungskonstante ist der thermische Übergangswiderstand.

## Beispiel 2: Elektrostatisches Feld




$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$: (x,y,z) \longmapsto \vec{E}(x,y,z)$

Feldstärke ist eine vektorielle Grösse, da die Wirkung auf andere Körper eine Kraft (vektoriell!) ist

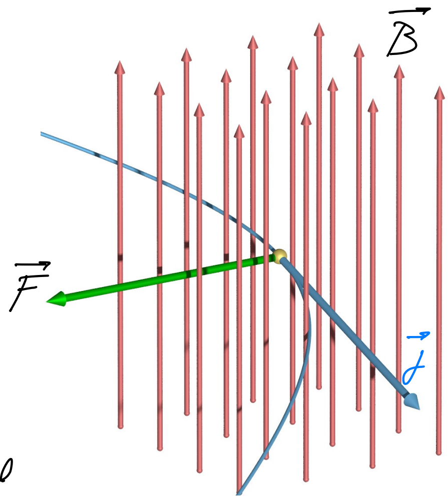
Das $\vec{E}$-Feld koppelt an Ladungen:

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{Wirkung}} = q \cdot \underbrace{\vec{E}}_{\text{Feldstärke}}$$

Koppelungskonstante

$\longrightarrow$ linear

## Beispiel 3: statisches Magnetfeld




$\vec{B} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$: (x,y,z) \longmapsto \vec{B}(x,y,z)$

Wirkung auf elektrische Ströme $\vec{j}$ ist eine Kraft $\vec{F}$. Es gibt also eine Funktion, die die Kraft aus $\vec{B}$ und $\vec{j}$ berechnet:

$$\vec{F} = f(\vec{B}, \vec{j}) \sim \vec{j} \times \vec{B}$$

linear in $\vec{j}$

# 3. Naturgesetze und Koordinatensysteme

Einfache Naturgesetze können manchmal allein in Worten ausgedrückt werden:

> Ein Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt.

Sobald man aber fragt, wie denn eine Kraft den Bewegungszustand ändert, braucht man die präzisere mathematische Sprache:

$$F = ma$$

Darin ist $a$ die Beschleunigung. Um diese festzulegen braucht man Messungen des Ortes $x$ und der Zeit $t$, aus denen man dann Geschwindigkeit $v = \dot{x}(t)$ und Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ ableiten kann. Man braucht ein Koordinatensystem.

Die Wahl des Koordinatensystems ist willkürlich. Im Prinzip ist jede Wahl des Koordinatensystems zulässig, wenngleich gewisse Koordinatensysteme praktischer für die Berechnung sind. Das Koordinatensystem mit Nullpunkt im Schwerpunkt des Sonnensystems ist nicht unbedingt optimal, wenn man Häuser auf der Erde bauen will. Es wird aber nützlich, wenn man eine Raumsonde zum Pluto steuern will. In beiden Fällen kommen die gleichen Naturgesetze der Mechanik zum Einsatz, es gilt also

Prinzip der allgemeinen Kovarianz: Naturgesetze müssen in einer Form geschrieben werden können, die in jedem Koordinatensystem gleich ist.

Mit der Vektorgeometrie kommt man diesem Prinzip bereits sehr nahe:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (*)$$

gilt in jedem Koordinatensystem, welches nicht beschleunigt ist (Inertialsystem). In einem Koordinatensystem wird (*) zu 3 Gleichungen

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z,$$

die sich verändern, wenn man das Koordinatensystem dreht.

Das Prinzip der allgemeinen Kovarianz kann auch erfüllt werden, wenn man nur Grössen verwendet, deren Transformationsverhalten bekannt ist.

# 4. Koordinatentransformationen

## a) Translation des Raumes

Vektoren sind so konstruiert worden, dass Verschiebungen durch Addition leicht durchgeführt werden können: Verschiebung um $\vec{b}$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x} + \vec{b} = \vec{x}'$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung ändern dadurch nicht $\left(\frac{d\vec{b}}{dt} = 0\right)$, und

$$\vec{F}'(\vec{x}') = \vec{F}(\vec{x}' - \vec{b}) \quad = \quad m\vec{a}!$$

## b) Drehung des Raumes

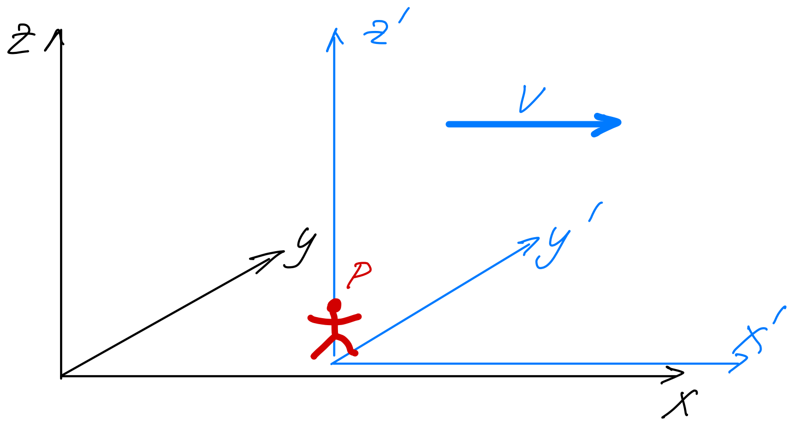
Ein Drehmatrix $D$ transformiert $\vec{x}$ in $\vec{x}' = D\vec{x}$ und $\vec{F}'(\vec{x}') = D\vec{F}(D^{-1}\vec{x}')$ und es gilt wieder

$$\vec{F}' = m\vec{a}'$$

## c) Galilei-Transformation

Wie ändert sich die Formulierung eines Naturgesetzes, wenn man die Vorgänge in einem ortsfesten Labor beschreiben will, wie man sie von einem vorbeifahrenden Zug aus beobachtet?

Koordinaten des Punktes P im bewegten System sind konstant (P fährt mit)




Koordinaten im ruhenden System

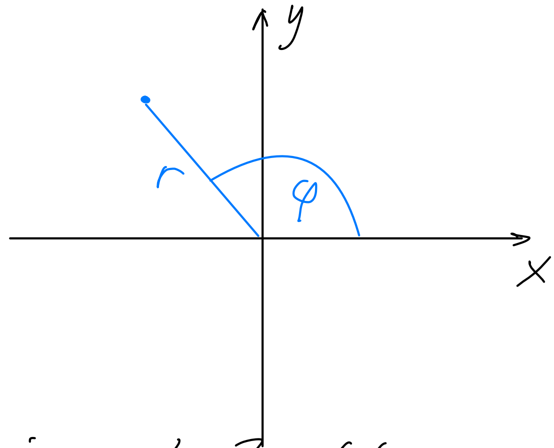
$$x(P) = x'(P) + v \cdot t$$
$$y(P) = y'(P)$$
$$z(P) = z'(P)$$

Die beiden Koordinatensysteme sind Inertialsysteme und es gilt in beiden $\vec{F} = m\vec{a}$. Trotzdem ist die Umrechnung der Koordinaten viel komplizierter, da auch noch die Zeit involviert ist. Die Zeit ist also für die vollständige Beschreibung notwendig und ist als weitere Koordinate unverzichtbar. Seit Galilei und bis zum Ende des 19. Jhdts nahm man, dass es eine universelle Zeitkoordinate $t = t'$. Dies hat die spezielle Relativitätstheorie als falsch erkannt.

Matrixform: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$ Galilei-Transformation

## d) Nichtlineare Koordinatentransformation

Beispiel: Polarkoordinaten und kartesische Koordinaten.




$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Wie berechnet man den Geschwindigkeitsvektor aus den Zeitableitungen $\dot r$ und $\dot\varphi$?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$
$$= \cos\varphi\,\dot r - r\sin\varphi\,\dot\varphi$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\varphi)\,\dot\varphi$$
$$= \sin\varphi\cdot\dot r + r\cos\varphi\,\dot\varphi$$

Matrixform:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$$

$\Longrightarrow$ Transformationsgesetz für Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor bekannt (Kovarianz)

<u>Allgemein</u>: Umrechnung von Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ in Koordinaten $y^1, \ldots, y^n$

$$y^k = y^1(x^1, \ldots, x^n)$$

Umrechnung für Vektoren durch Ableitung

$$\frac{d}{dt} y^k(t) = \frac{\partial y^k}{\partial x^1} \frac{dx^1(t)}{dt} + \ldots + \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \frac{dx^n(t)}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial y^k}{\partial x^i}} \frac{dx^i(t)}{dt}$$

Geschwindigkeit in $y^k$-Koordinaten

Jacobi-Matrix $J^k{}_i$

Geschwindigkeit in $x^i$-Koordinaten

$$\dot{y}^k = \sum_{i=1}^{n} J^k{}_i \, \dot{x}^i$$

Koordinatentransformationsgesetz für einen Vektor mit Komponenten $a^i$ im $x^i$-Koord-system in die Komponenten $\tilde{a}^k$ im $y^k$-Koord-System

$$\tilde{a}^k = \sum_{i=1}^{n} J^k{}_i \, a^i = J^k{}_i \, a^i$$

(automatische Summierung über gleiche oberen und unteren Index: einsteinsche Summen-konvention)

Vektoren heißen auch kontravariante Tensoren, sie haben $J^k{}_i$ als Transformationsgesetz.

# 5. Lichtgeschwindigkeit

Bei einer Galilei-Transformation werden Geschwindigkeit addiert: Wenn sich $P$ im blauen System mit Geschwindigkeit $v_P$ bewegt, dann sieht ein Beobachter im schwarzen System die Geschwindigkeit $v + v_P$.

Ist $P$ ein Lichtblitz einer Taschenlampe, müsste man vom schwarzen System aus messen, dass er sich mit Geschwindigkeit $v + c$ bewegt.
Die experimentelle Erfahrung zeigt aber, dass man in allen Inertialsystemen die gleiche Geschwindigkeit misst:

Lichtgeschwindigkeit

$$c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0}$$

Ist das Naturgesetz der Lichtausbreitung in <u>allen</u> Inertialsystemen (mit universellem $c$)

$\Rightarrow$ Galilei-Transformation verletzt das Prinzip der allgemeinen Kovarianz

$\Rightarrow$ Die (versteckte) Annahme einer absoluten Zeit $t = t'$ steht im Widerspruch zur experimentellen Erfahrung

$\Rightarrow$ neue Theorie nötig: SRT, Lorentz-Transformation