Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

6. Feld- und Bewegungsgleichungen

Inhalt

1. Newtonsche Gravitation als Krümmung

Ist $U(x)$ das Gravitationspotential, dann bewegen sich Teilchen auf Bahnen, die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$$

sind. Ein Teilchen spürt dabei keine Kräfte. In einer Raumstation auf einer solchen Bahn herrscht Mikrogravitation. Dies bedeutet, dass die Bahnen Geodäten für eine geeignete Metrik sein sollten.

Betrachte die Metrik g_{ik} mit

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad g_{ii} = -1, \quad i = 1, \ldots, 3$$

und alle anderen $g_{ik} = 0$. Wieder ist $x^0 = ct$. Da c^2 so gross ist, ist $2U/c^2$ klein im Vergleich zu 1, die folgenden Rechnungen können daher alle Terme höherer als erster Ordnung vernachlässigen.

- Ableitungen von g_{ik}:

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad \text{für } i > 0$$

alle anderen sind $= 0$.

- Christoffel-Symbole erster Art:

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right).$$

Von 0 verschieden sind

$$\Gamma_{0,k0} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \qquad k>0$$

$$\Gamma_{0,0l} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} \qquad l>0$$

$$\Gamma_{i,00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \qquad i>0$$

- Inverse Matrix:

$$g^{00} = 1 - \frac{2U}{c^2}, \quad g^{ii} = -1 \text{ für } i>0$$

- Christoffel-Symbole zweiter Art:

$$\Gamma^j_{ik} = g^{jl}\,\Gamma_{l,ik}.$$

Es bleibt jeweils nur der Term mit $j=l$ stehen. Für $j>0$ ist

$$\Gamma^j_{ik} = \underbrace{g^{jj}}_{-1}\Gamma_{l,ik} = \Gamma_{l,ik} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x^i} & i=k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Gamma^0_{ik} = g^{00}\,\Gamma_{0,ik} = \begin{cases} g^{00}\,\frac{1}{2}\,\partial g_{00}/\partial x^i & k=0 \\ g^{00}\,\frac{1}{2}\,\partial g_{00}/\partial x^k & i=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In erster Ordnung ist daher

$$\Gamma^0_{ik} = \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial x^i} & k=0 \\[2ex] \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial x^k} & i=0. \end{cases}$$

- Geodätengleichung:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0$$

Für $i>0$ folgt

$$\ddot{x}^i + \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial x^i}\dot{x}^0\dot{x}^0 = 0.$$

Für ein Teilchen ist daher

$$\frac{1}{c}\frac{dx^0}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dct}{dt} = 1 \Longrightarrow \ddot{x}^i = -\frac{\partial u}{\partial x^i},$$

dies ist die newtonsche Bewegungsgleichung!

Allein durch Modifikation von g_{00} kann die newtonsche Gravitationstheorie als eine Theorie eines gekrümmten Raumes gewonnen werden. Raumkrümmung ist als kein Privileg der einsteinschen Theorie. Nur die einsteinsche Theorie liefert die richtigen Feldgleichungen für die Feldkomponenten g_{ik} für starke Felder.

2. Variationsprinzipien für Teilchen und Felder

Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Maupertuis besagt, dass die Natur immer den "günstigsten" Weg wählt. Was genau minimiert werden soll ist nicht immer einfach zu ermitteln, aber ein paar Beispiele sollen illustrieren, wie das Prinzip umgesetzt werden kann.

a) <u>Teilchen im Potential $V(x)$</u>

Nach Newton ist $F = ma$ mit $a = \ddot{x}(t)$ und $F = -V'(x)$: $m\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$.
Diese Bewegungsgleichung kann man auch aus dem folgenden Variationsproblem bekommen: mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = E_{kin} - E_{pot} \qquad (1)$$

definieren wir die Wirkung

$$S = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

für die gesuchte Bahn $x(t)$ des Teilchens.
Die tatsächliche Bahn minimiert S.

Ist $x(t)$ eine Lösung des Variationsproblems, dann haben "Nachbarbahnen" $x(t) + \varepsilon \eta(t)$

kleinere Wirkung, die Ableitung nach ε muss verschwinden:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b L(x(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{x}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t))\,dt\Big|_{\varepsilon=0}=0$$

$$=\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))\,\eta(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\,\dot{\eta}(t)\,dt$$

Die Funktion η soll auch $\eta(a)=\eta(b)=0$ erfüllen, damit die Nachbarlösung durch die Punkte $(a,x(a))$ und $(b,x(b))$ gehen. Der zweite Term im Integral kann mit partieller Integration umgeformt werden:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\,\dot{\eta}(t)\,dt$$

$$=\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\,\underbrace{\cancel{\eta(t)}}_{=0}\Big]_a^b$$

$$-\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\,\eta(t)\,dt$$

Zusammen mit dem ersten Term folgt:

$$\int_a^b\Big(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t))\Big)\eta(t)\,dt=0$$

für alle $\eta(t)$ mit $\eta(a)=\eta(b)=0$. Man kann dies als Skalarprodukt von Funktionen schreiben:

$$\Big\langle \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t)),\ \eta(t)\Big\rangle=0$$

für alle η. Dies ist nur möglich, wenn der erste Faktor im Skalarprodukt verschwindet:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t)) = 0$$

Dies ist die Euler-Lagrange-Differentialgleichung.
Für $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -V'(x) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow -V'(x) - \frac{d}{dt}m\dot{x} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{x} = -V'(x)$$

Satz: Das Integral

$$S = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))\, dt$$

wird minimiert durch eine Lösung $q(t)$ der Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(t,q(t),\dot{q}(t)) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(t,q(t),\dot{q}(t)) = 0 \quad \forall k$$

b) Variationsprinzip für ein Skalarfeld

Auf dem Gebiet $G \in \mathbb{R}^2$ ist eine Funktion φ gesucht, die die Randbedingungen $\varphi(x) = g(x)$, $x \in \partial G$ erfüllt, und das Integral

$$S = \int_G \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \varphi(x))^2 \, dx \, dy$$

minimiert.

Ansatz: ersetze $\varphi(x)$ durch $\varphi(x) + \varepsilon \eta(x)$ mit $\eta(x) = 0 \ \forall x \in \partial G$. Dann ist

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} S \Big|_{\varepsilon = 0} = \int_G \operatorname{grad} \varphi(x) \cdot \operatorname{grad} \eta(x) \, dx$$

$$= \int_{\partial G} \cdot \operatorname{grad} \varphi(x) \ \eta(x) \, d\vec{f}$$

$$- \int_G \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(x) \cdot \eta(x) \, dx.$$

Wegen $\eta(x) = 0$ auf ∂G fällt das erste Integral weg und es bleibt

$$- \int_G \Delta\varphi \cdot \eta \, dx = 0 \quad \forall \eta$$

Dies ist nur möglich, wenn $\Delta\varphi = 0$ ist mit der Randbedingung $\varphi(x) = g(x)$ für $x \in \partial G$.

Satz: Das Integral

$$S = \int_G L(\varphi, \varphi_{x_i}) \, dx$$

wird minimiert von einer Lösung der DGL

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}(\varphi, \varphi_{x_i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{x_i}}(\varphi, \varphi_{x_i}) = 0$$

(Euler-Ostrogradski-Differentialgleichung)

c) δ-Notation für Variation

Die Variation ist eine Richtungsableitung. Die δ-Notation ist eine vereinfachte Schreibweise dafür. Die Ableitung einer Funktion in Richtung

$$\delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \vdots \\ \delta x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \delta f = \frac{d}{dt} f(x + t\,\delta x)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x) \cdot \delta x^k.$$

Für ein Integral der Form

$$S = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt$$

schreiben wir die Änderung von x, die wir früher als y bezeichnet haben, mit δx. Dann ist

$$\delta S = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L\left(t, x + \varepsilon\,\delta x, \dot{x} + \varepsilon \frac{d}{dt}\delta x\right) dt \Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\delta x^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\,\frac{d}{dt}\delta x^k \; dt$$

partielle Integration

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x^k}\,\delta x^k - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\,\delta x^k \; dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right)}_{\text{Koeffizienten einer Linearform der } \delta x^k} \delta x^k \, dt$$

Die Euler-Ostrogradski-Differentialgleichung bekommt man aus einem Integral

$$S = \int_V L(x, \varphi, \nabla\varphi)\, dx$$

$$= \int_V L\left(x^1, \dots, x^n, \varphi^1, \dots, \varphi^r, \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}\right) dx$$

Die Variation in δ-Notation ist

$$\delta S = \int_V \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} \delta\varphi^i + \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{,k}} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \varphi^i \, dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_V \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} \delta\varphi^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{,k}} \delta\varphi^i \, dx$$

$$= \int_V \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi^i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{,k}} \right) \delta\varphi^i \, dx$$

Der Schritt (*) verwendet den allgemeinen Satz von Gauss

$$\int_V \frac{\partial f^k}{\partial x^k} dV = \int_{\partial V} f^k \, d\sigma_k$$

für ein Produkt $f^k = g^k h^k$:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^k} g^k h^k \, dx = \int_V \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial g^k}{\partial x^k} h^k \, dx + \int_V \sum_{k=1}^{r} g^k \frac{\partial h^k}{\partial x^k} dx$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^k} g^k h^k \, dx = \int_{\partial V} g^k h^k \, d\sigma_k$$

und wendet dies auf

$$g^k = \delta\varphi^i \,, \quad h^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{,k}}$$

für jedes i an.

Der Nutzen dieser Notation ist vor allem, dass man damit wie mit Ableitungen rechnen kann:

① Linear: $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha\, \delta f + \beta\, \delta g$

② Kettenregel: $\delta f(x^1, \dots, x^n) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \delta x^i$

③ Ableitung: $\frac{\partial}{\partial \alpha} \delta f(\alpha, x^i) = \delta \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x^i)$

④ Produktregel: $\delta(f \cdot g) = \delta f \cdot g + f \cdot \delta g$

⑤ Integration: $\delta \int_V f \, dx = \int \delta f \, dx$

⑥ Partielle Integration: (Variation $=0$ auf ∂V)

$$\int_V f \cdot \delta g \, dx = - \int_V \delta f \cdot g \, dx$$

3. Der Einstein-Tensor

Vorgehensweise:

- Finde eine Lagrange-Funktion für das Gravitationsfeld
- Finde eine Lagrange-Funktion für die Materie im Universum
- Verwende Variationsrechnung, um daraus eine Feldgleichung des von der Materie erzeugten Gravitationsfeldes zu finden.

Aus der Darstellung der newtonschen Gravitation als Krümmung (Abschnitt 1) wird klar, dass die Lagrange-Funktion aus dem Krümmungstensor konstruiert werden. Da die Lagrange-Funktion ein Skalar sein muss, ist $L_g = R$ eine naheliegende Wahl. Die zugehörige Wirkung ist das Integral:

$$W_g = \int R \sqrt{-g}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

der Faktor $\sqrt{-g}$ ist nötig, damit das Integral koordinatensystemunabhängig wird (siehe letzte Sitzung). Das Integrationsgebiet ist

$$\{ (x^0, x^1, x^2, x^3 \mid x^0_{min} < x^0 < x^0_{max} \},$$

Ereignisse zwischen zwei Werten der Zeitkoordinate.

Die Feldgleichungen sind Differentialgleichungen für die Komponenten g_{ik} der Metrik. Dafür kann man die gleiche Technik verwenden, die auf die Euler-Ostrogradski-Differentialgleichung geführt hat.

$$\delta W_g = \delta \int R \sqrt{-g}\, dv$$

$$= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, dv$$

4 + 5

$$= \int \delta g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} + g^{ik}\, \delta R_{ik} \sqrt{-g} + \overbrace{g^{ik} R_{ik}}^{=R}\, \delta \sqrt{-g}\, dv$$

Die Variationen δg^{ik}, δR_{ik} und $\delta\sqrt{-g}$ sind durch die Ableitungen nach g_{ik} gegeben.

Aus der letzten Sitzung, Formel (22) folgen die Ableitungen

$$dg = -g\, g_{ik}\, dg^{ik},$$

aus der

$$d\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\, dg = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\, dg^{ik}$$

berechnet werden kann. Dies kann man auf den letzten Integranden anwenden:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik}. \qquad 2$$

Der erste und letzte Term des Integrals ( ) können daher zusammengefasst werden:

$$\delta W_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, dv$$

$$+ \int g^{ik}\, \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, dv$$

Der Integrand im ersten Integral ist bereits der Einstein-Tensor, der in den Feldgleichungen auftritt.

Es kann wie folgt gezeigt werden, dass das zweite Integral keinen Beitrag leistet. Dazu muss man ein sogenanntes lokalgeodätisches Koordinaten-System verwenden, in welchem an einer Stelle alle $\Gamma^{l}_{kl} = 0$ sind. Der Krümmungstensor an dieser Stelle ist dann nur noch durch die Ableitungen gegeben:

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\, \delta \left(\frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}} \right)$$

$$= g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^{l}} \delta \Gamma^{l}_{ik} - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^{l}} \delta \Gamma^{k}_{ik}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{l}} \left(g^{ik}\, \delta \Gamma^{l}_{ik} - g^{il}\, \delta \Gamma^{k}_{ik} \right)$$

$$- \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}} \delta \Gamma^{l}_{ik} + \frac{\partial g^{il}}{\partial x^{l}} \delta \Gamma^{k}_{ik}$$

Da an der betrachteten Stelle alle $\Gamma^i_{kl}=0$ sind, sind dort auch die ersten Ableitungen der g_{ik} $=0$. Somit ist

$$g^{ik}\,\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\underbrace{g^{ik}\,\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\,\delta\Gamma^k_{ik}}_{=:w^l}\Big).$$

Die w^l bilden einen Vektor. Die Divergenz $\partial w^l/\partial x^l$ muss für ein allgemeines Koordinatensystem durch die kovariante Divergenz ersetzt werden. Nach der Formel (27)

$$\nabla_l w^l = w^l_{;l} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}.$$

Das Variationsintegral ist daher

$$\int g^{ik}\,\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,dv = \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{-g}}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}\,\cancel{\sqrt{-g}}\,dv$$

$$= \int \operatorname{div}\left(\sqrt{-g}\,w^l\right) dv.$$

Dieses Integral kann mit dem Satz von Gauss in ein Integral über den Rand umgewandelt werden. Auf dem Rand verschwinden aber die Variationen und damit auch das Integral. Es folgt, dass

$$\delta W_g = \int \underbrace{\left(R_{ik} - \tfrac{1}{2}R\,g_{ik}\right)}_{\text{Einstein-Tensor}}\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,dv.$$

4. Der Energie-Impuls-Tensor

Wir brauchen noch eine "rechte Seite" für die Feldgleichungen der Gravitation. Gravitationswirkung wird von jeglicher Form von Energie verursacht, die in einem System steckt. Dazu gehören sowohl mechanische Energie wie auch elektromagnetische Feldenergie. Wir suchen daher nach einer Konstruktion, die sich aus der Lagrange-Funktion eines beliebigen Systems ableiten lässt. Der Einfachheit halber arbeiten wir in kartesischen Koordinaten und verallgemeinern am Schluss auf beliebige Koordinaten.

Sei $\Lambda(q, \frac{\partial q}{\partial x^i})$ die Lagrange-Funktion des Systems, wobei q $(q^1, \dots, q^e)$ irgendwelche Felder sind, die das System beschreiben. Die Euler-Ostrogradski-Gleichungen sind dann

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial q}} = 0 \quad , \quad q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i} .$$

Aus der Kettenregel für Λ folgt

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \boxed{\frac{\partial \Lambda}{\partial q}} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \cdot q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \cdot q_{,i} \right).$$

Andererseits ist auch

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_i^k \Lambda \right)$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \cdot q_{,i} - \delta_i^k \Lambda \right) = 0.$$

Der Klammerausdruck ist also eine Grösse, für die die Kontinuitätsgleichung gilt. Dies ist die gesuchte Erhaltungsgrösse des Systems:

$$T_i^k = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \cdot q_{,i} - \delta_i^k \Lambda.$$

Falls Λ von mehreren Feldkomponenten $q^1, \ldots, q^\ell$ abhängt, ist

$$T_i^k = \sum_{s=1}^{\ell} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^s_{,k}} q^s_{,i} - \delta_i^k \Lambda$$

mit

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0.$$

Das Integral über ein vierdimensionales Volumen kann mit dem Satz von Gauss in ein Integral über die 3-dimensionale Oberfläche umgewandelt werden. Schreibt man

$$\omega_i = T_i^0 \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - T_i^1 \, dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$+ T_i^2 \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - T_i^3 \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

dann ist

$$d\omega_i = \left(\frac{\partial T_i^0}{\partial x^0} + \frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_i^3}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3.$$

Nach dem allgemeinen Satz von Stokes folgt

$$0 = \int_V d\omega_i = \int_{\partial V} \omega_i .$$

Schreibt man $\sigma_k = (-1)^k dx^0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^3$, und integriert man über ein Gebiet zwischen zwei Hyperflächen F_1 und F_2, die sich über den ganzen 3-dimensionalen Raum erstrecken, folgt

$$\int_{F_1} T_i^k \sigma_k = \int_{F_2} T_i^k \sigma_k ,$$

das Integral

$$P_i = \int_F T_i^k \sigma_k \quad \text{oder} \quad P^i = \int_F T^{ik} \sigma_k$$

ist eine Erhaltungsgrösse.

Für T^{00} gilt nach (1)

$$T^{00} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial q}{\partial x^0}}_{\text{Impuls } p} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,0}}}_{p \cdot m \;=\; pm^2 = 2 \cdot E_{kin}} - \underbrace{\Lambda}_{E_{kin} - E_{pot}} = E_{kin} + E_{pot}.$$

T^{00} muss also mit der Gesamtenergie identifiziert werden.

Da P^i ein Vektor ist, dessen 0-Komponente die Energie wiedergibt, müssen die anderen Komponenten den Impuls wiedergeben. P^i ist daher der Impuls-Vierervektor des Systems. Der Tensor T^{ik} codiert daher die Energie-Impuls-Dichte des Systems.

<u>Verbleibende Schwierigkeiten</u>:

- T^{ik} ist nicht der einzige mögliche Tensor, der durch Integration den Viererimpuls ergibt.
- T^{ik} ist nicht symmetrisch.

Durch Zusatzforderungen an den Drehimpuls kann erreicht werden, dass T^{ik} symmetrisch und eindeutig wird.

Gesamtenergie   Gesamtimpuls

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} E & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yz} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Spannungstensor

5. Feldgleichungen für das Gravitationsfeld

In Abschnitt 3 wurden die Variationsgleichungen für die Krümmung abgeleitet und in Abschnitt 4 jene für ein mechanisches System. Wenn die Energie (T^{ik}) das Gravitationsfeld erzeugt, dann erwartet man, die Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip zu bekommen, welches als Lagrange-Funktion die Summe

$$R\sqrt{-g} + K \cdot \Lambda\sqrt{-g}$$

hat. Darin ist K eine Kopplungskonstante, die experimentell bestimmt werden muss. Aus

$$\delta \int R\sqrt{-g} + K \cdot \Lambda\sqrt{-g}\, dv = 0$$

folgt

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, dv = -K\, \delta \int \Lambda\sqrt{-g}\, dv$$

Auf der rechten Seite müssen auch die g_{ik} variiert werden, die Rechnung von Abschnitt 4 muss daher noch etwas erweitert werden (was wir hier nicht durchführen). Es ergibt sich

$$\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, dv = -\frac{K}{2} \int T_{ik}\, \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, dv$$

Da die Variationen δg^{ik} beliebig sind, folgt

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\frac{\kappa}{2} T_{ik}$$

Damit im Grenzfall die newtonsche Theorie von Abschnitt 1 entsteht, muss die Kopplungskonstante so gewählt werden, dass

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \qquad (2)$$

gilt. Dies sind die einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation.

(2) sind 10 nichtlineare partielle Differentialgleichungen für die 10 unabhängigen Komponenten g_{ik}.

<u>Anwendungen</u>

- Lösungen für speziell symmetrische Situationen: kugelsymmetrisch, eine Symmetrieachse, homogenes Universum.
- Numerische Lösungen: sehr schwierig wegen der hohen Komplexität.

6. Lösungen der Feldgleichungen

a) <u>Kugelsymmetrisches Feld</u> (Schwarzschild 1916)

Ein Körper der Masse m erzeugt das Gravitations-feld mit der Metrik

$$ds^2 = h(r,t)c^2dt^2 - k(r,t)r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \ell(r,t)dr^2 + a(r,t)\,dr\,dt$$

in Kugelkoordinaten.

① Transformation von r,t so, dass $a(r,t)=0$ (orthogonalisieren der r- und t-Richtung)

② $k(r,t)=1$ (Normalisierung)

③ Christoffelsymbole und Krümmung ergeben Differentialgleichungen für $h(r,t)$ und $\ell(r,t)$ mit der Lösung

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - r^2(\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2) - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)},$$

wobei

$$r_g = \frac{2mG}{c^2}$$

der sogenannte Schwarzschildradius ist.

Falls r_g ausserhalb des Körpers ist, passieren bei $r=r_g$ seltsame Dinge: Die Metrik divergiert.

Konsequenzen:

- Lichtablenkung an der Sonne: Verifiziert durch A. Edington 1919
- Periheldrehung des Merkur (Einstein, 1914): 43''/Jahrhundert werden nicht durch die newtonsche Gravitationstheorie erklärt, die ART erklärt die Differenz.
- Relativistische Effekte in Erdnähe beeinflussen die Zeitmessung von GPS-Satelliten.
- Schwarze Löcher sind Objekt, die viel kleiner sind als ihr Schwarzschild-Radius:

Objekt	m	r_g
Mount Everest	$6 \cdot 10^{14}$ kg	< 1 pm
Erde	$5.97 \cdot 10^{24}$ kg	8.87 mm
Mond	$7.3 \cdot 10^{22}$ kg	0.1 mm
Sonne	$1\ M_\odot$	2.95 km
Cygnus X-1	$7-13\ M_\odot$	~ 30 km
Sag A*	$4.3 \cdot 10^{6}\ M_\odot$	$18\ R_\odot \approx 0.08$ AU

b) Rotierende Körper

Lösung von Kerr (1963):

c) Homogen isotropes Universum

Der Ansatz (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right)$$

$k = -1$: negativ gekrümmtes Universum

$k = 0$: flach

$k = +1$: positiv gekrümmtes Universum

zusammen mit Annahmen über die Massedichte im Universum führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

(Friedmann Gleichung)

Die Grösse $H = \dot a / a$ ist die Geschwindigkeit mit der sich Distanzen im Universum ändern. Durch Lösung der Differentialgleichung kann die Geschichte des Universums rekonstruiert werden.