Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

5. Divergenz, Kontinuitätsgleichung, Poincaré-Lemma

Inhalt

1. Divergenz 2
2. Kontinuitätsgleichung 4
3. Satz von Gauss 7
4. Der allgemeine Satz von Stokes 10
5. Das Poincaré-Lemma 12

1. Divergenz

Sei α eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$, sie hat die Komponenten

$$\alpha = a_{23}(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + a_{13}(x)\, dx^1 \wedge dx^3 + a_{12}(x)\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Die äussere Ableitung ist

$$d\alpha = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2}\, dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}\, dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Durch Umordnen der Basis-1-Formen in den einzelnen Termen kann

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

geschrieben werden.

Dieselbe Situation tritt für eine $(n-1)$-Form α auf $\mathbb{R}^n$ auf. Die Basis-$(n-1)$-Formen sind

$$dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

wobei der Hut $\widehat{\ }$ bedeutet, dass dx^i weggelassen wird. Wir schreiben daher

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Die äussere Ableitung ist

$$d\alpha = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Nur die Terme mit $i \neq k$ sind von 0 verschieden.
Durch Vertauschen von 1-Formen kommt ein Vorzeichen $(-1)^{i-1}$ hinzu

$$d\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

In beiden Fällen ist $d\alpha$ im Wesentlichen die Summe der n partiellen Ableitungen der n Komponenten von $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. In der klassischen Vektoranalysis ist dies der Divergenz-Operator:

<u>Definition</u>: Ist $\vec{a}(x) \in \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionales Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, dann heisst

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \qquad (1)$$

die Divergenz von $\vec{a}$.

Setzt man für das Vektorfeld $\vec{a}$ die $(n-1)$-Form

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} a_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

dann ist

$$d\alpha = (\operatorname{div} \vec{a})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Kontinuitätsgleichung

Erhaltungssätze sind für die Physik von besonderer Bedeutung:

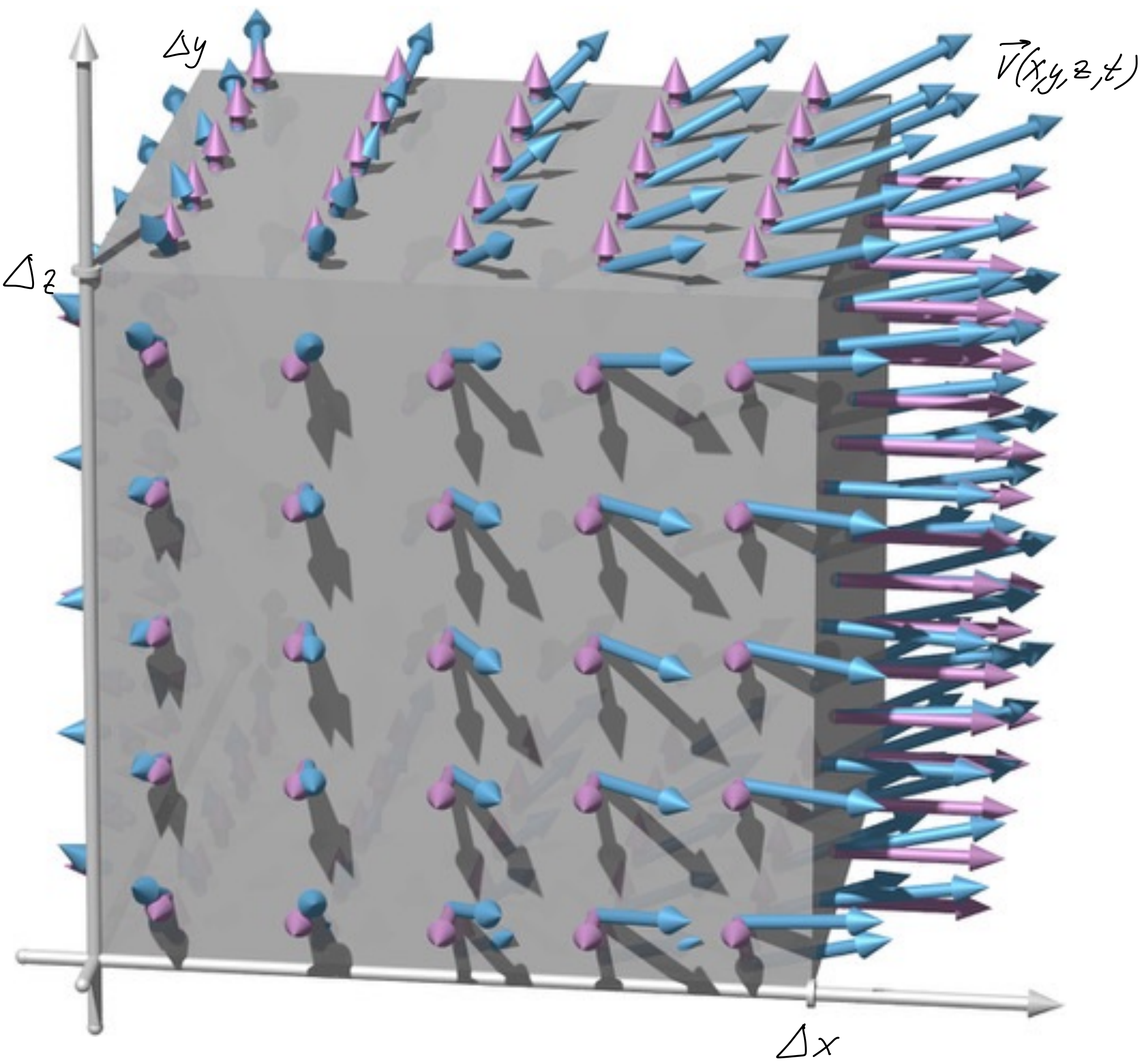
- Materie kann nicht aus dem Nichts entstehen oder verschwinden: Masse ist erhalten
- Energieerhaltung: Wärmeenergie bleibt erhalten

Für die in einem Strömungsfeld fliessende Masse oder für die Wärmeenergie eines Temperaturfeldes muss es daher eine Feldgleichung geben, die den Erhaltungssatz wiedergibt. Dies ist die Kontinuitätsgleichung. Wir illustrieren es am Beispiel der Strömung eines Fluids mit Dichte $\rho(x,y,z,t)$ und Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(x,y,z,t)$.

Wir berechnen den Materiefluss durch die Oberfläche eines Quaders mit Kanten $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Durch die Fläche senkrecht zur x-Achse fliesst in einem Zeitintervall Δt die Masse

$$v_x(x,y,z,t)\,\rho(x,y,z,t)\ \Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

nach aussen. Die Komponenten v_y und v_z tragen nicht zum Fluss durch diese Fläche bei. Die Bilanz des Flusses durch alle Seitenflächen ist die Massenänderung im Innern des Quaders:



$\frac{\partial}{\partial t}$ (Masse im Quader) = Bilanz des Flusses

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \varrho(x,y,z,t)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$
$$= \left(\varrho v_x(x+\Delta x, y, z, t) - \varrho v_x(x,y,z,t)\right)\Delta y\,\Delta z$$
$$+\left(\varrho v_y(x, y+\Delta y, z, t) - \varrho v_y(x,y,z,t)\right)\Delta x\,\Delta z$$
$$+\left(\varrho v_z(x,y,z+\Delta z,t) - \varrho v_z(x,y,z,t)\right)\Delta x\,\Delta y.$$

Division durch $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ ergibt

$$= \frac{(\rho v_x)(x+\Delta x, y, z, t) - (\rho v_x)(x,y,z,t)}{\Delta x}$$
$$+ \frac{(\rho v_y)(x, y+\Delta y, z, t) - (\rho v_y)(x,y,z,t)}{\Delta y}$$
$$+ \frac{(\rho v_z)(x, y, z+\Delta z, t) - (\rho v_z)(x,y,z,t)}{\Delta z}$$

Diese Brüche sind Differenzenquotienten, die beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ zu Ableitungen werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z$$

oder mit der Definition (1) der Divergenz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \vec{v}). \qquad (2)$$

<u>Definition</u>: Ein erhaltener Strom mit Dichte ρ ist ein Vektorfeld $\vec{j}$, welches die Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}. \qquad (3)$$

<u>Beispiele</u>:

① Massedichte ρ, $\vec{j} = \rho \vec{v}$

② elektrische Ladungsdichte ρ, Stromdichte $\vec{j}$

③ Wärmeenergiedichte T, Wärmestrom $\Rightarrow \partial_t T = \kappa \Delta T$

3. Satz von Gauss

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Masseerhaltung infinitesimal in jedem Punkt des Strömungsfeldes. Durch Integration über ein grösseres Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ entsteht eine globale Aussage ähnlich dem Satz von Stokes.

Dazu betrachten wir das Integral der 3-Form

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

über ein 3-dimensionales Gebiet, welches durch

$$G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in G_2,\ z_-(x,y) \le z \le z_+(x,y) \}$$

gegeben ist. Das Integral ist

$$\int_G \alpha = \int_{G_2} \underbrace{\left(\int_{z_-(x,y)}^{z_+(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \right)}\, dx \wedge dy$$

$$= \left[f(x,y,z) \right]_{z_-(x,y)}^{z_+(x,y)}$$

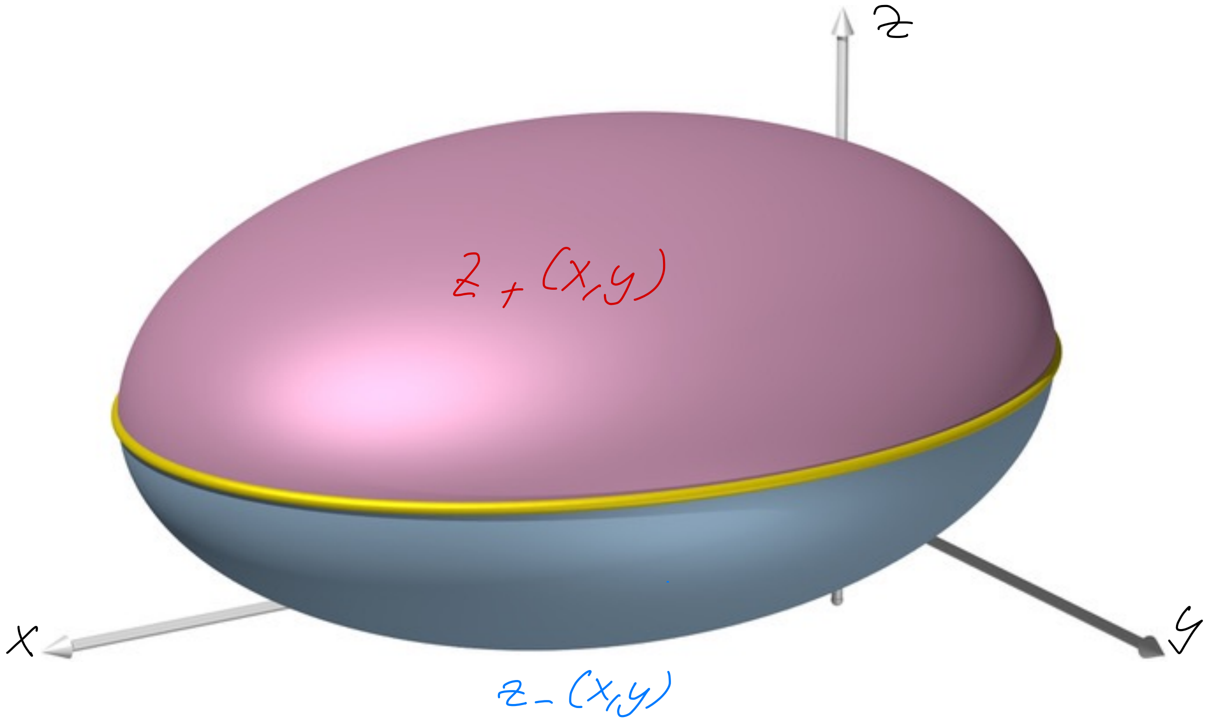
$$= f(x,y,z_+(x,y)) - f(x,y,z_-(x,y))$$

$$= \int_{G_2} f(x,y,z_+(x,y))\, dx \wedge dy$$

Integral über die "Oberseite" von G

$$- \int_{G_2} f(x,y,z_-(x,y))\, dx \wedge dy.$$

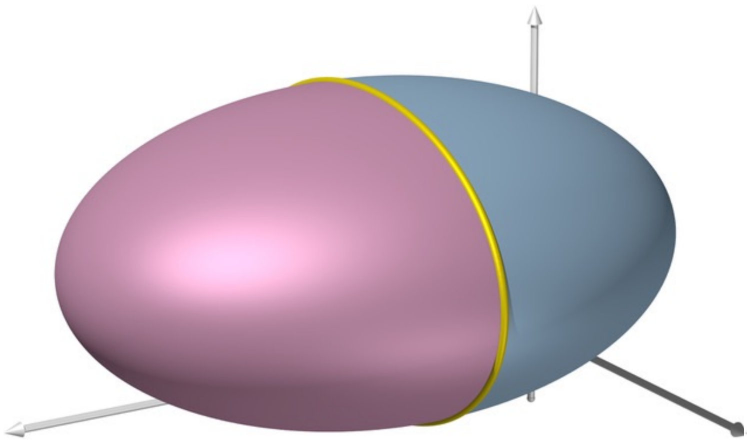
Integral über die "Unterseite" von G

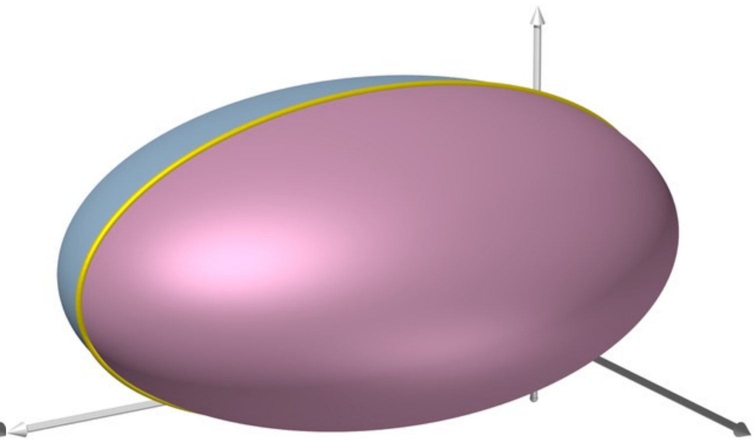


Eine analoge Rechnung kann man für die Formen

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{und} \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial z}\, dx \wedge dy \wedge dz$$

mit Gebietsbeschreibungen wie in den Bildern





durchführen. Auch die Integrale der anderen partiellen Ableitungen über das Gebiet G lassen sich also in ein Oberflächenintegral über den Rand ∂G (Oberfläche) umformen. Es folgt der

Satz (Gauss): Für eine 2-Form

$$\alpha = a_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 + a_{13}\, dx^1 \wedge dx^3 + a_{23}\, dx^2 \wedge dx^3$$

auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\int_G d\alpha = \int_{\partial G} \alpha$$

oder in der konventionellen Schreibweise $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{23} \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\int_G \operatorname{div} \vec{a}\, dV}_{\text{Volumenintegral}} = \underbrace{\int_{\partial G} \vec{a} \cdot d\vec{f}}_{\text{Flussintegral}} .$$

$d\vec{f}$: Oberflächenelemente

Der Satz von Gauss erlaubt zusammen mit der Kontinuitätsgleichung, die Divergenz anschaulich zu interpretieren:

$$\underbrace{\int_{\partial G} \vec{j} \cdot df}_{\text{Massefluss durch } \partial G} = \underbrace{\int_G \operatorname{div} \vec{j}\, dV}_{\text{Integral der Massequellen}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_G \rho\, dV = \frac{\partial m}{\partial t}}_{\text{zeitliche Masse-änderung in } V} .$$

Die Divergenz beschreibt also die Quellstärke des Feldes $\vec{j}$.

__Anwendung:__

- $\operatorname{div} \vec{E}$ = Quellen des $\vec{E}$-Feldes = el. Ladungen
- Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

4. Der allgemeine Satz von Stokes

Die Sätze von Green, Stokes und Gauss folgen alle dem selben Muster: Das Integral einer abgeleiteten p-Form $d\alpha$ über ein Gebiet G kann durch das Integral der ursprünglichen Differentialform α über den Rand ersetzt werden. Tatsächlich war sogar der Beweis immer gleich:

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots dx^p$$

$$= \int_{G'} \underbrace{\left(\int_{x^1_-(x^2,\dots,x^n)}^{x^1_+(x^2,\dots,x^n)} \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 \right)}_{f(x^1_+,\dots) - f(x^1_-,\dots)} dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$$

$$= \int_{G'} f(x^1_+,\dots)\, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$$

$$- \int_{G'} f(x^1_-,\dots)\, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$$

$$= \int_{\partial G} f\, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

Er läuft immer nur auf die Anwendung des Hauptsatzes hinaus:

$$\int_{[a,b]} f'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$= \text{"} \int_{\partial[a,b]} f \text{"} \quad (\text{"0-Form"}).$$

Daher kann man auch den folgenden, ganz allgemeinen Satz ableiten:

<u>Allgemeiner Satz von Stokes</u>: für ein p-Form

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

und ein $(p+1)$-dimensionales Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit p-dimensionalem Rand ∂G gilt

$$\int_G d\alpha = \int_{\partial G} \alpha .$$

<u>Spezialfälle</u>:

- $n=2, p=1$: Green $\int_G \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \, dx \wedge dy = \int_{\partial G} f dx + g dy$
- $n=3, p=1$: Stokes

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

- $n=3: p=2$: Gauss

$$\int_G \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{f}$$

- $n=1, p=0$: Hauptsatz

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

- n bel, $p=0$: Potentialfeld

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

5. Das Poincaré-Lemma

Aus dem Satz von Green wurde gefolgert: Wenn für eine 1-Form $d\alpha = 0$ gilt, dann ist das Wegintegral von α vom Weg unabhängig und α ist das Differential des Integrals:

$$f(P) = \int_0^P \alpha \implies df = \alpha.$$

Auch diese Beobachtung gilt viel allgemeiner:

<u>Lemma (Poincaré)</u>: Ist α eine p-Form auf einem zusammenziehbaren Gebiet und ist $d\alpha = 0$, dann gibt es eine $(p-1)$-Form β mit $d\beta = \alpha$.

Beweis mit Integration entlang einer Koordinate (Buch)

<u>Satz</u>: $dd\alpha = 0$

Beweis: $dd\alpha$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{i_1<\dots<i_p} \underbrace{\frac{\partial a_{i_1\dots i_p}}{\partial x^i\,\partial x^k}}_{\frac{\partial a_{i_1\dots i_p}}{\partial x^k\,\partial x^i}} \underbrace{dx^i \wedge dx^k}_{-dx^k\wedge dx^i} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

d.h. jeder Term kommt mit entgegengesetztem Vorzeichen nochmals vor. Es folgt $dd\alpha = 0$.

Folgerungen für die klassischen Operatoren:

$p=0$: $\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$

$p=1$: $\quad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \vec{a} = 0$

Spezialfälle des Poincaré-Lemmas:

- f eine Funktion (0-Form) mit $df = 0$, dann ist f konstant
- $p=1$: $\quad d\alpha = 0 \implies \alpha = d\beta$

  $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0 \implies \vec{a} = \mathrm{grad}\, b$
- $p=2$: $\quad d\alpha = 0 \implies \alpha = d\beta$

  $\mathrm{div}\,\vec{a} = 0 \implies \vec{a} = \mathrm{rot}\,\vec{b}$