Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

4. Hodge-Operator, Laplace-Operator, Maxwell-Gleichungen

Inhalt

1. Felder als Formen oder Vektoren?

Traditionellerweise werden viele Felder nicht als p-Formen, sondern als Vektorfelder dargestellt. Die Ausführungen früherer Kapitel haben gezeigt, dass die Darstellung als Felder die "richtige" Wahl ist. Der Erfolg der Vektorfeldbeschreibung in der Praxis zeigt, dass sie nicht ganz falsch sein kann. Es braucht also eine Methode, zwischen p-Formen und Vektorfeldern umzurechnen. Durch diese Umrechnung wird notwendigerweise das Prinzip der allgemeinen Kovarianz verletzt. Es kann daher nur für eine eingeschränkte Familie von Koordinatentransformationen funktionieren, die durch eine zusätzliche Strukturkomponente definiert ist.

Voraussetzung: Im Folgenden wird immer angenommen, dass auf M eine Metrik definiert ist, die ein Skalarprodukt von Tangentialvektoren definiert:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \langle X, Y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, \xi^i \eta^k$$

oder

$$g = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx^i \otimes dx^k \quad \text{(kovarianter Tensor).}$$

Mit dem Skalarprodukt ist es möglich eine 1-Form in einen Vektor zu verwandeln:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i \\ X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i.$$

Finde ein Vektor A mit Komponenten a^k derart, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = \langle \alpha, X \rangle = \langle A, X \rangle = \sum_{i,k} g_{ik} a^i \xi^k.$$

Das geht nur, wenn

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ik} a^i = \sum_{i=1}^{n} g_{ki} a^i$$

oder in Matrixschreibweise:

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}^{-1} (a_1 \ \dots \ a_n)^t.$$

Zur Berechnung der Komponenten a^k von A wird die Inverse Matrix der Matrix (g_{ik}) benötigt.

Definition: Zur Metrik g_{ik} mit Matrix (g_{ik}) gehört die inverse Matrix, deren Einträge mit g^{ik} bezeichnet werden. g^{ik} sind daher so, dass

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l .$$

Definition: Die kontravarianten Komponenten a^i zum kovarianten Tensor a_k sind durch

$$a^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} a_k$$

gegeben. Dieser Prozess heisst "Hochziehen eines Index". Umgekehrt gibt es zu jedem Vektor mit kontravarianten Komponenten ξ^i den kovarianten Tensor mit Komponenten

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}\, \xi^i \qquad \left(\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k dx^k\right).$$

Dieser Prozess heisst "Herunterziehen eines Index".

Die Metrik ermöglicht also, beliebig zwischen Vektoren und 1-Formen zu wechseln. Der Preis dafür ist 1. eine Metrik und 2. nur noch Transformationen, die die die Metrik respektieren.

Es gilt:

$$\langle \alpha, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i = \sum_{i,k,j=1}^{n} a_k g^{kj} g_{ji} \xi^i = \sum a^j \xi_j = \langle \xi, A \rangle$$

Für eine beliebige Metrik ist die zu einem Vektor $A = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ gehörige 1-Form

$$\alpha = \sum_{i,k=1}^{n} a^i g_{ik}\, dx^k .$$

Die äussere Ableitung

$$d\alpha = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}(a^i g_{ik})\, dx^j \wedge dx^k$$

$$= \sum_{j<k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial a^i}{\partial x^k} g_{ij} \right) dx^j \wedge dx^k$$

$$+ \sum_{j<k} \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k$$

enthält nicht nur die Ableitungen von a^i, sondern auch Ableitungen des metrischen Tensors. Die Identifikation einer 1-Form mit einem Vektor ist also eigentlich nur zulässig, wenn die Ableitungen $\partial g_{ik}/\partial x^j = 0$ sind, d.h. g_{ik} müssen konstant sein. Die metrischen Koeffizienten stören nur dann nicht, wenn $g_{ik} = \delta_{ik}$.

$\Longrightarrow$ Nur in kartesischen Koordinaten mit der Standardmetrik $g_{ik} = \delta_{ik}$ kann man "ungestraft" p-Vektoren und p-Formen identifizieren

2. Skalarprodukt von p-Vektoren und p-Formen

Der metrische Tensor g_{ik} definiert das Skalarprodukt zwischen Tangentialvektoren

$$X = \sum \xi^i \vec{e_i}\,,\quad Y = \sum \eta^k \vec{e_k} \implies \langle X, Y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \eta^k g_{ik}$$

Da sich jeder kovariante Index mit der inversen Matrix g^{ik} zu einem kontravarianten Index hochziehen lässt, definiert g_{ik} auch ein Skalarprodukt von 1-Formen:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i \implies A = \sum_{i,k=1}^{n} a_i g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\, dx^2 \implies B = \sum_{i,k=1}^{n} b_i g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle A, B\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j g^{ji}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} b_l g^{lk}\Big)$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} g^{ji} g_{ik}\Big)}_{\delta^j_k} g^{lk}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l \sum_{k=1}^{n} \delta^j_k g^{lk}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} a_j b_l g^{jl}$$

d.h. der kontravariante Tensor g^{jl} definiert das Skalarprodukt der 1-Formen.

Die Metrik lässt sich aber auch auf p-Formen und p-Vektoren ausdehnen. Seien

$$\overset{\beta}{\alpha} = \sum_{i_1<\dots<i_p} \overset{b_{i_1\dots i_p}}{a_{i_1\dots i_p}}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \quad \in \Omega^p(M),$$

$$\overset{\gamma}{X} = \sum_{k_1<\dots<k_p} \overset{\eta^{k_1\dots k_p}}{\xi^{k_1\dots k_p}}\, \vec{e}_{k_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{k_p} \quad \in \Lambda^p TM .$$

Durch Hoch- und Herunterziehen von Indizes kann man aus einem p-Vektor eine p-Form machen und umgekehrt

$$a^{k_1\dots k_p} = \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} a_{i_1\dots i_p}\, g^{i_1k_1}\cdots g^{i_pk_p}$$

$$\xi_{i_1\dots i_p} = \sum_{k_1,\dots,k_p=1}^{n} \xi^{k_1\dots k_p}\, g_{i_1k_1}\cdots g_{i_pk_p}$$

und analog für $b^{k_1\dots k_p}$ und $\eta_{i_1\dots i_p}$.

Das Skalarprodukt von p-Vektoren

$$\langle \vec{e}_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{i_p},\ \vec{e}_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec{e}_{i_p}\rangle$$

ist eine total antisymmetrische lineare Funktion der $\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_p}$, sie muss daher ein Vielfaches der Gram-Determinante

$$= \begin{vmatrix} \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_1},\vec{e}_{k_p}\rangle \\ \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_2},\vec{e}_{k_p}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_1}\rangle & \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_2}\rangle & \dots & \langle\vec{e}_{i_p},\vec{e}_{k_p}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_{i_1 k_1} & g_{i_1 k_2} & \cdots & g_{i_1 k_p} \\ g_{i_2 k_1} & g_{i_2 k_2} & \cdots & g_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i_p k_1} & g_{i_p k_2} & \cdots & g_{i_p k_p} \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Skalarprodukt von p-Formen durch hochziehen der Indizes, d.h. in der Determinante werden die $g_{i_s k_t}$ durch $g^{i_s k_t}$ ersetzt, also

$$\langle dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_p} \rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle dx^{i_1}, dx^{k_1} \rangle & \ldots & \langle dx^{i_1}, dx^{k_p} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle dx^{i_p}, dx^{k_1} \rangle & \ldots & \langle dx^{i_p}, dx^{k_p} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g^{i_1 k_1} & \cdots & g^{i_1 k_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{i_p k_1} & \cdots & g^{i_p k_p} \end{vmatrix} .$$

3. Der Hodge-Operator

Beobachtung: in $\mathbb{R}^3$ gilt:

p	Basis	Dimension
0	1	1
1	dx^1, dx^2, dx^3	3
2	$dx^2\wedge dx^3, dx^1\wedge dx^3, dx^1\wedge dx^2$	3
3	$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$	1

Allgemein:

$$\dim \Omega^p(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Omega^{n-p}(\mathbb{R}^n)$$

Zufall? Gibt es eine umkehrbare lineare Abbildung

$$* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

für alle p? Zum Beispiel:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \longleftrightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3): \quad 1 \longmapsto dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3): \quad \begin{aligned} dx^1 &\mapsto dx^2\wedge dx^3 \\ dx^2 &\mapsto dx^1\wedge dx^3 \\ dx^3 &\mapsto dx^1\wedge dx^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung muss aber allgemein kovariant definiert werden.

2. Versuch: Zu $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ definiere $*\omega = s\, dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{n-p}}$ derart, dass

$$\omega \wedge *\omega = \underbrace{dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n}_{\substack{\text{bis auf einen skalaren Faktor} \\ \text{eindeutig da } \dim \Omega^n(\mathbb{R}^n) = 1}} \qquad (2)$$

Die $dx^{k_1}, \ldots, dx^{k_{n-p}}$ sind die Basis-1-Formen, die in $dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}$ fehlen $\Longrightarrow$ $s = \pm 1$.

$$dx^1 \wedge s\, dx^2 \wedge dx^3 = s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = 1$$
$$dx^2 \wedge s\, dx^1 \wedge dx^3 = -s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = -1$$
$$dx^3 \wedge s\, dx^1 \wedge dx^3 = s\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \Longrightarrow s = 1$$

Die korrekte Wahl der Bildformen ist daher

$$\left.\begin{aligned} dx^1 &\longmapsto dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^2 &\longmapsto -dx^1 \wedge dx^3 \\ dx^3 &\longmapsto dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Die Formel (2) kann nur für Basisformen funktionieren

Definition: Sei $\beta \in \Omega^p(M)$. Dann ist $*\beta$ die p-Form, die für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, vol(M)$$

mit $vol(M) = \sqrt{\det(g_{ik})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ erfüllt.
$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$ heisst der **Hodge-Operator**

Rechenregeln für den Hodge-Operator:

$$\left.\begin{aligned} *(\alpha_1 + \alpha_2) &= *\alpha_1 + *\alpha_2 \\ *(c\alpha_1) &= c(*\alpha_1) \end{aligned}\right\} \text{linear}$$

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)}\,\omega \qquad \text{(Satz 8.4 im Buch)}$$

(für $n=3$ ist $(-1)^{0(n-0)}=1$ und $(-1)^{1(3-1)}=1$, d.h. für $n=3$ kann man das Vorzeichen ignorieren).

<u>Berechnungsalgorithmus</u> für $*$-Operator:

1. Metrik g_{ik} festlegen
2. Volumenform aus $\sqrt{\det(g_{ik})}$
3. Skalarprodukt von 1-Formen: g^{ik}
4. Skalarprodukt von p-Formen
5. $*$-Operator für p-Formen aus der Definition.

Beispiel Polarkoordinaten:

$$*dr = r\,d\varphi\,, \qquad *d\varphi = -\frac{1}{r}\,d\varphi$$

Weitere Beispiele im Buch, z.B. für Kugelkoordinaten.

4. 1- und 2-Formen als Vektorfelder

In diesem Abschnitt gehen wir von kartesischen Koordinaten mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ auf $\mathbb{R}^3$ aus. Der Hodge-Operator hat dann die Form (3) auf 1-Formen.

① Zu einem Vektor A mit Komponenten a^i sind die $a_i = a^i$ die Komponenten einer 1-Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dx^i$. Die aussere Ableitung davon ist

$$d\alpha = \sum_{k<i} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i \in \Omega^2$$

Der Hodge-Operator ergibt die 1-Form

$$\begin{aligned} * d\alpha = & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^3 \\ & - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3} \right) dx^2 \\ & + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) dx^3 \end{aligned}$$

da der Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a} \quad \text{entspricht}$$

② Zum Vektor A mit Komponenten a^i gibt der Hodge-Operator die 2-Form

$$\alpha = a^3\, dx^1 \wedge dx^2 - a^2\, dx^1 \wedge dx^3 + a^1\, dx^2 \wedge dx^3$$

mit der äusseren Ableitung

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^3} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^1}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

aus der der Hodge-Operator wieder die Funktion

$$* d\alpha = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3} = \operatorname{div} \vec{a}$$

macht.

$$\begin{tikzcd}
 & TM & & \\
C^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[ur, "\mathrm{grad}"] & \Omega^1(M) \arrow[u, leftrightarrow] \arrow[r, "d"] \arrow[ddr, "\mathrm{rot}"'] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & \Omega^3(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] \\
 & & \Omega^1(M) \arrow[d, leftrightarrow] & C^\infty(M) \\
 & & TM \arrow[ur, "\mathrm{div}"'] &
\end{tikzcd}$$

5. Laplace-Operator

Die Kombination div grad entspricht die Verkettung der blauen Pfeile in

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "\text{grad}"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "?"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[r, bend left, "\text{div}"] & \Omega^3(M)
\end{tikzcd}$$

Dann fehlt aber der rote Schnitt, div grad lässt sich daher nicht allgemein kovariante Art definieren.

Mit dem Hodge-Operator kann jetzt ein neuer Differentialoperator definiert werden, der das Prinzip der allgemeinen Kovarianz respektiert. Dazu kombinieren wir den Ω^*-Komplex mit einer 2. Kopie:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{p-1}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"] & \Omega^{p}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \arrow[l, bend left, "\delta"] & \Omega^{p+1}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \arrow[l, bend left, "\delta"] & \Omega^{p+2}(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \arrow[l, bend left, "\delta"] \\
\Omega^{n-p+1}(M) & \Omega^{n-p}(M) \arrow[l, "d"'] & \Omega^{n-p-1}(M) \arrow[l, "d"'] & \Omega^{n-p-2}(M) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Definition: $\delta = (-1)^p *^{-1} d * = (-1)^{p(n-p)+p} * d *$

heisst das **Kodifferential**.

Rechenregeln für das Kodifferential

$$\delta : \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \Omega^{p}(M)$$

linear:
$$\begin{aligned}
\delta(\alpha_1 + \alpha_2) &= \pm * d * (\alpha_1 + \alpha_2) \\
&= \pm * d * \alpha_1 \pm * d * \alpha_2 \\
&= \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 \\
\delta(c\alpha) &= \pm * d * (c\alpha) \\
&= c(\pm * d * \alpha) \\
&= c\,\delta\alpha
\end{aligned}$$

Iteration:
$$\begin{aligned}
\delta\delta\alpha &= \pm * d * * d * \alpha \\
&= * \underbrace{dd}_{=0} * \alpha \quad = 0
\end{aligned}$$

Die beiden Operatoren d und δ

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^{p-1}(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^{p}(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & \Omega^{p+1}(M) \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend left, "d"] & {} \arrow[l, bend left, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

lassen sich jetzt zu einem neuen Operator kombinieren:

Definition: Der Operator $\Delta = d\delta + \delta d$ heisst der Hodge-Laplace-Operator oder **Laplace-Operator**

Für $f \in C^\infty(M)$: $\Delta f = d\delta f + \delta d f$
$$= \pm \underbrace{d * d \underbrace{* f}_{\in\, \Omega^n(M)}}_{=0} \pm * d * d f = * d * d f$$

In kartesischen Koordinaten ist

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i$$

$$*df = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\text{weglassen}}{\widehat{dx^i}} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$d*df = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}\, dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$*d*df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}\,.$$

In anderen Koordinatensystemen ist die Rechnung komplizierter zum Beispiel in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

oder in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\, r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

6. Wärmeleitung und Diffusion

In einem Medium mit konstanter Wärmekapazität ist die enthaltene Wärmeenergie proportional zur Temperatur T. Der Wärmefluss ist proportional zum Gradienten, d.h. es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(-\kappa \operatorname{grad} T)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = -\kappa\, \Delta T$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\, \Delta T.$$

Wärmeleitungsgleichung

Die Konzentration eines in einem homogenen Medium gelösten Stoffes ist c. Der Stofffluss ist proportional zu $\operatorname{grad} c$. Aus der Materieerhaltung folgt daher die Kontinuitätsgleichung für c:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\, \Delta c,$$

dies ist die Diffusionsgleichung.

7. Wellengleichung

Sei $u(x,t)$ die Auslenkung eines Teilchens eines elastischen Mediums aus der Ruhelage. Nach dem Hookschen Gesetz ist die Rücktreibende Kraft: $F = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Nach dem newtonschen Gesetz gilt

$$F = ma = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dies ist die Wellengleichung.

Die grösse $m \frac{\partial u}{\partial t}$ ist die Impulsdichte und $\operatorname{grad} u$ ist proportional zum Impulsstrom. Da der Impuls erhalten ist, gibt es eine Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial t} m \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(-k \operatorname{grad} u)$$

$$\Rightarrow \qquad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u$$

8. Maxwell-Gleichungen

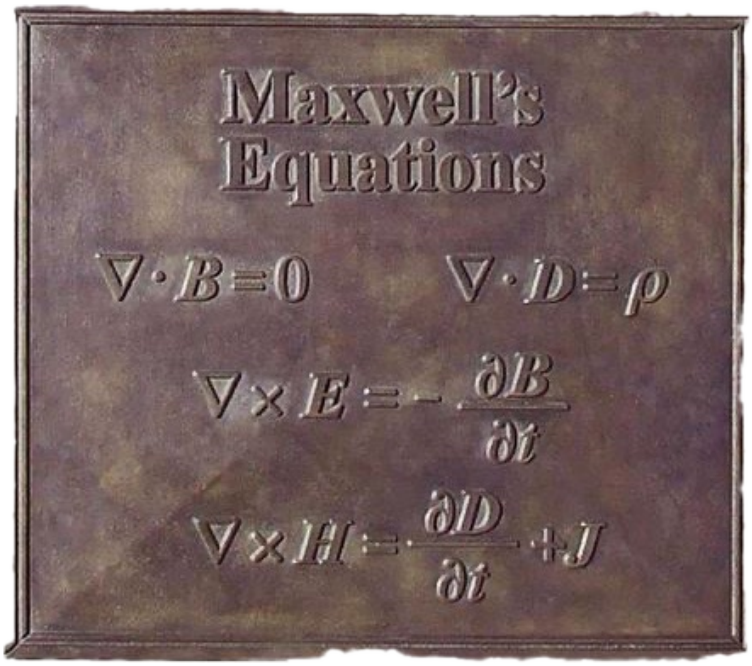
Es ist das Verdienst Maxwells, den visionären, aber wenig mathematischen Ideen von Faraday eine präzise mathematische Form zu geben. Heaviside wird die heutige vektoranalytische Form zugeschrieben. Die Feldgleichungen beschreiben zwei zeitabhängige Vektorfelder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die von Ladungen (Ladungsdichte ϱ) und Strömen (Stromdichte $\vec{J}$) erzeugt werden.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$



Aus mathematischer Sicht ist es zweckmässiger, wenn die Felder links vom Gleichheitszeichen und die Feldquellen rechts davon geschrieben werden:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

homogen

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

inhomogen

Die erste Gleichung ist jeweils eine Skalare Gleichung, die zweite eine Vektorgleichung. Die homogenen wie auch die inhomogenen Gleichungen sind jeweils 4 Gleichungen für insgesamt 6 Feldkomponenten.

Magnetfelder entstehen durch bewegte Ladungen. Die Aufteilung in $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld verletzt daher das Prinzip der allgemeinen Kovarianz. Beide Felder sollten Aspekte eines gemeinsamen zugrundeliegenden Feldes sein. Ebenso kann man ρ und $\vec{J}$ nicht wirklich trennen, da $\vec{J}$ vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt.

Raum und Zeit bilden eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Dimensionen der Vektorräume der p-Formen sind $\binom{n}{p}$, d.h.

$\dim \Omega^2(M) = 6 \quad \longrightarrow$ Bilden $\vec{E}, \vec{B}$ eine 2-Form?

$\left.\begin{array}{l} \dim \Omega^1(M) = 4 \\ \dim \Omega^3(M) = 4 \end{array}\right\} \longrightarrow$ Bilden $\rho, \vec{J}$ eine 1- oder 3-Form?

Um $\Omega^1(M)$ mit $\Omega^3(M)$ zu identifizieren, braucht man den Hodge-Operator, aber mit welchem Skalarprodukt?

9. Raumzeit und Skalarprodukt

Das Experiment von Michelson und Morley hat gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters ist. In jedem 4-dimensionalen Koordinatensystem gilt daher für die Lichtausbreitung von einem Punkt A zum Punkt B:

$$c^2 \Delta t^2 = \underbrace{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}_{\ell^2} \qquad (4)$$

Einstein hat auf dieser Grundlage die spezielle Relativitätstheorie entwickelt, welche vorhersagt, dass die Länge ℓ ebenso wie Zeitintervalle abhängig sind vom Bewegungszustand. Diese Vorhersagen sind durch vielfältige Experimente bestätigt. Es folgt, dass die 3-dimensionale euklidische Metrik ("Pythagoras") nicht allein die Basis der Längenmessung sein kann. Eine Metrik muss notwendigerweise die Zeitkoordinate involvieren. Es werden daher die Koordinaten

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

verwendet, in denen (4) als

$$(\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = 0$$

geschrieben werden kann. Die Resultate der speziellen Relativitätstheorie sind konsistent mit einer Metrik der Form

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Ein Tangentialvektor an eine Kurve $\gamma(t)$ hat daher die Länge

$$|\dot\gamma(s)|^2 = \dot x^0(t)^2 - \dot x^1(t)^2 - \dot x^2(t)^2 - \dot x^3(t)^2 \qquad (6)$$

Der Parameter s muss nicht die Zeit in irgend einem Inertialsystem sein.

Die Bahn eines ruhenden Gegenstands hat $\dot x^1(s) = \dot x^2(s) = \dot x^3(s) = 0$, also $|\dot\gamma(s)|^2 = \dot x^0(s)^2$. Falls $\dot x^0(s) = 1$ ist folgt, dass s bis auf eine Konstante (den Nullpunkt der Parametrisierung) mit mit der Zeitkoordinate übereinstimmt.
Die Wahl der Vorzeichen in (5) stellt sicher, dass (6) für Bahnen realer Teilchen immer >0 ist.

9. Plan: 4d-Formulierung der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik soll in 4-dimensionaler Form so formuliert werden, dass dem Prinzip der allgemeinen Kovarianz automatisch Rechnung getragen wird. Konkret bedeutet dies:

- Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ müssen in eine 2-Form vereinheitlicht werden.

- Differentialoperatoren müssen ausschliesslich mit der äusseren Ableitung formuliert werden können

- Ladungsdichte und Stromdichte müssen als 1- oder 3-Form formuliert werden

- Der Übergang zwischen 1- und 3-Formen muss mit dem Hodge-Operator erfolgen

Auf diese Weise entstehen Feldgleichungen, die automatische allgemein kovariant sind und nach den bekannten Transformationsgesetzen in jedes andere Koordinatensystem umgerechnet werden können.

11. Hodge-Operator für die Raumzeit

Wir verwenden die Definition

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, vol(M) \qquad \forall \alpha \in \Omega^p$$

für die Berechnung von $*\beta$, die Volumenform ist $vol(M) = \sqrt{-g}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

1-Formen:

$$dx^0 \mapsto *dx^0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad \text{denn}$$

$$dx^0 \wedge *dx^0 = vol(M)$$

$$\langle dx^0, dx^0 \rangle = g^{00} = 1$$

$$dx^1 \mapsto s \cdot dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad s \in \{\pm 1\}$$

$$dx^1 \wedge *dx^1 = s\, dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$= -s\, vol(M)$$

$$\overset{?}{=} \underbrace{\langle dx^1, dx^1 \rangle}_{g^{11} = -1} vol(M)$$

$$\Longrightarrow s = 1$$

$$dx^2 \mapsto s\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3$$

$$dx^2 \wedge *dx^2 = s\, dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3$$

$$= s\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$= \underbrace{\langle dx^2, dx^2 \rangle}_{g^{22} = -1} vol(M)$$

$$\Longrightarrow s = -1$$

$$dx^3 \longmapsto *dx^3 = s\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$
$$dx^3 \wedge *dx^3 = s\, dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$
$$= -s\, vol(M)$$
$$= \underbrace{\langle dx^3, dx^3 \rangle}_{g^{33}=-1} vol(M) \qquad \Rightarrow s = 1$$

Zusammengefasst:

$$\left.\begin{array}{lll} dx^0 & \longmapsto & dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^1 & \longmapsto & dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^2 & \longmapsto & -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ dx^3 & \longmapsto & dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{array}\right\} \quad (7)$$

2-Formen: Hierzu müssen erst die Skalarprodukte bestimmt werden

$$\langle \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{i<j}, \underbrace{dx^k \wedge dx^l}_{k<l} \rangle = \begin{vmatrix} \langle dx^i, dx^k \rangle & \langle dx^i, dx^l \rangle \\ \langle dx^j, dx^k \rangle & \langle dx^j, dx^l \rangle \end{vmatrix}$$

$$= g^{ik} g^{jl} - g^{jk} g^{il}$$

$$= \begin{cases} g^{ii} g^{jj} & i=k,\ j=l \\ -g^{jj} g^{ii} & i=l,\ j=k \ \lightning\ i<j \wedge k<l \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & 0 \in \{i,j\} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

	01	02	03	12	13	23
01	-1	0	0	0	0	0
02		-1	0	0	0	0
03			-1	0	0	0
12				1	0	0
13					1	0
23						1

Jetzt kann der Hodge-Operator bestimmt werden

$$* dx^0 \wedge dx^k = s\, dx^u \wedge dx^v$$

$$s\, \sigma(uv0k)\, \mathrm{vol}(M) = -1 \cdot \mathrm{vol}(M)$$

$$\Rightarrow \quad s = -\sigma(uv0k)$$

$$\left.\begin{aligned} * dx^0 \wedge dx^1 &= -dx^2 \wedge dx^3 \\ * dx^0 \wedge dx^2 &= dx^1 \wedge dx^3 \\ * dx^0 \wedge dx^3 &= -dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Für 2-Formen gilt $**\omega = (-1)^{2(4-2)}\omega = \omega$, d.h.

$$\left.\begin{aligned} * dx^1 \wedge dx^2 &= -dx^0 \wedge dx^3 \\ * dx^1 \wedge dx^3 &= dx^0 \wedge dx^2 \\ * dx^2 \wedge dx^3 &= -dx^0 \wedge dx^1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

<u>3-Formen:</u> es gilt $**\omega = (-1)^{1\cdot(4-1)}\omega = -\omega$

$$\left.\begin{aligned}
* dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 &= *(*dx^0) = -dx^0\\
* dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3 &= *(*dx^1) = -dx^1\\
* dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3 &= *(-*dx^2) = dx^2\\
* dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2 &= *(*dx^3) = -dx^3
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Äussere Ableitung einer 2-Form

Die äussere Ableitung von $F = \sum_{i<k} F_{ik}\, dx^i\wedge dx^k$ ist

$$dF = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i<k} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}\, dx^l\wedge dx^i\wedge dx^k$$

Als 3-Form hat sie 4 unabhängige Komponenten, die man durch die "fehlende" Basis-1-Form charakterisieren kann:

$$0:\ \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$1:\ \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3}\right) dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$2:\ \left(\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} \qquad \frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3$$

$$3:\ \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Die F_{0k} kommen in den Gleichungen 1–3 genau einmal vor, die Komponenten F_{ik} mit $i>0$ dagegen zweimal.

Vergleich mit den homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{} = 0$$

jeweils zwei Terme

Es folgt, dass man die Komponenten von $\vec{E}$ mit den F_{0k} identifizieren muss, d.h.

$$u E_k = F_{0k} \qquad u \in \mathbb{R}$$

und die Komponenten von B mit F_{ik}, $i,k>0$

$$v B_1 = F_{23}\ ,\ v B_2 = -F_{13}\ ,\ v B_3 = F_{12}\ ,\ v \in \mathbb{R}$$

Dann wird die 0-Komponente zu

$$v \operatorname{div} \vec{B}\ (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$$

und die übrigen Komponenten

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{v}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} & -u\left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right) \\ -\frac{v}{c}\frac{\partial B_2}{\partial t} & u\left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right) \\ \frac{v}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} & -u\left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) \end{array}\right\} \frac{v}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - u \operatorname{rot} \vec{E}$$

Mit der Wahl $u = -\frac{1}{c}$ und $v = 1$ erhält man

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E}\right).$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind also gleichbedeutend mit $dF = 0$ mit

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Definition: Die 2-Form F mit den Komponenten (11) heisst der Faraday-Tensor.

Hodge-Dual des Faraday-Tensors:

$$*F = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 & \frac{1}{c}E_2 \\ B_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 & -\frac{1}{c}E_1 \\ B_3 & -\frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

mithilfe der Formeln (8) und (9).

Äussere Ableitung von $*F$

Die Komponenten der äusseren Ableitung von $*F$ können mit den Formeln von Seite 27 gefunden werden:

0: $$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{1}{c}E_1\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{c}E_2\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(-\frac{1}{c}E_3\right)$$

$$=-\frac{1}{c}\operatorname{div}\vec{E}$$

1: $$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}E_1\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}(-B_3)+\frac{\partial}{\partial x^3}(-B_2)$$

$$=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}+(\operatorname{rot}\vec{B})_1$$

2: $$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}E_2\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}(-B_3)+\frac{\partial}{\partial x^3}(-B_1)$$

$$=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t}-(\operatorname{rot}\vec{B})_2$$

3: $$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}E_3\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}(-B_2)+\frac{\partial}{\partial x^2}(-B_1)$$

$$=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}+(\operatorname{rot}\vec{B})_3$$

Kodifferential von $d{*}F$

Aus (10) folgt jetzt, dass $*d*F$ die Komponenten

$$\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \operatorname{rot} \vec{B}$$

hat. Den Faktor $\frac{1}{c^2}$ kann man als $\varepsilon_0 \mu_0$ schreiben. Nach den Maxwellschen Gleichungen ist

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{c\varepsilon_0}.$$

Schreibt man also J für die 4-Form mit Komponenten

$$J = \frac{1}{c\varepsilon_0} \rho \, dx^0 - \mu_0 j_1 \, dx^1 - \mu_0 j_2 \, dx^2 - \mu_0 j_3 \, dx^3$$

erhalten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Form $*d*F = J$.

<u>Satz</u> (Maxwell): Der Faraday-Tensor erfüllt

$$dF = 0 \quad \text{und} \quad \delta F = J \qquad (13)$$

12 Vektorpotential

Mit dem Poincaré-Lemma folgt aus der homogenen Maxwell-Gleichung $dF=0$, dass es eine 4 Form A gibt mit $F=dA$.

Aus $A=\sum_{k=1}^{n} A_k dx^k$ folgt für die äussere Ableitung

$$dA = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^k$$

$$= \sum_{j<k} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k \qquad F_{jk}$$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right) dx^0 \wedge dx^1 \qquad \frac{1}{c}E_1$$

$$+ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} \right) dx^0 \wedge dx^2 \qquad \frac{1}{c}E_2$$

$$+ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^2 \qquad \frac{1}{c}E_3$$

$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \qquad B_3$$

$$+ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 \qquad -B_2$$

$$+ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 \qquad B_1$$

Schreibt man $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, folgt $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$.

Die ersten drei Komponenten sind in Vektorform:

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} A_0 = \frac{1}{c}\,\vec{E}$$

d.h. bis auf einen skalaren Faktor ist A_0 das Potential. Nach Multiplikation mit c ist

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} cA_0$$

Setzt man $A_0 = \varphi / c$ mit dem Potential φ wird daraus die bekannte Darstellung

$$\vec{E} = \frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi .$$

13. Wellengleichung

Für F gilt eine Wellengleichung. Dies folgt aus

$$\Delta F = (\delta d + d\delta)F = \delta \underbrace{dF}_{=0} + d\delta F.$$

Mit $\delta = *d*$ ergeben sich folgende Schritte:

<u>1. Schritt: $*$-Operator der 2-Form F:</u>

$$*F = \begin{pmatrix} 0 & -F_{23} & F_{13} & -F_{12} \\ F_{23} & 0 & -F_{03} & F_{02} \\ -F_{13} & F_{03} & 0 & -F_{01} \\ F_{12} & -F_{02} & F_{01} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_{01} & G_{02} & G_{03} \\ -G_{01} & 0 & G_{12} & G_{13} \\ -G_{02} & -G_{12} & 0 & G_{23} \\ -G_{03} & -G_{13} & -G_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt: Äussere Ableitung von $*F$</u>

Kann aus der Formel von Seite 27 abgelesen werden:

$$\begin{aligned} d*F = & \left(-\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \left(-\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3}\right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{23}}{\partial x^3}\right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ & + \left(-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{23}}{\partial x^2}\right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

3. Schritt: $\ast d \ast F$

$$\ast d \ast F = \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3} \right) dx^0$$

$$+ \left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} \right) dx^1$$

$$+ \left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{23}}{\partial x^3} \right) dx^2$$

$$+ \left(\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^2} \right) dx^3$$

4. Schritt: Äussere Ableitung von $\ast d \ast F = \delta F$

$$d\delta F =$$

$$\left(- \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^0 \partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^1$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^0 \partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^2$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^2 \partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^3$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^1 \partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^0 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^2 \partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^0 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial (x^2)^2} \right) dx^2 \wedge dx^3$$

Ausserdem muss $\star d \star dF = \delta dF$ berechnet werden. dF wurde auf Seite 27 bereits ermittelt.

5. Schritt: $\star dF$

$$
\begin{aligned}
\star dF = & \left(-\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} \right) dx^0 \\
& + \left(-\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} \right) dx^1 \\
& + \left(\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} \right) dx^2 \\
& + \left(-\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} \right) dx^3
\end{aligned}
$$

6. Schritt: Äussere Ableitung $d\star dF$

$$
\begin{aligned}
= & \left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{23}}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^0 \partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^1 \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^0 \partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^2 \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial (x^3)^2} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^2 \partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^3 \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^0 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^0 \partial x^1} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^1 \partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_{23}}{\partial x^0 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^3 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial (x^3)^2} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^0 \partial x^1} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial x^1 \partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^3 \\
& + \left(-\frac{\partial^2 F_{13}}{\partial x^0 \partial x^3} + \frac{\partial^2 F_{03}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial (x^3)^2} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^0 \partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{02}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{01}}{\partial (x^2)^2} \right) dx^2 \wedge dx^3
\end{aligned}
$$

Wenn man keine Vorzeichenfehler macht, heben sich in $(\delta d + d\delta)F$ alle gemischten Ableitungen weg und es bleiben die Wellengleichungen:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right) F_{ik} = 0,$$

d.h. jede Komponente von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllt eine Wellengleichung für eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c.