

Rossby Wellen



Michael Schmid

ICAI Interdisciplinary Center for Artificial Intelligence

June 4, 2025

Mittlere Strömung und Anomalien

- In Äquatornähe dominiert eine mittlere Ost-West-Strömung U
- Wir betrachten kleine Abweichungen davon:

$$u' = U + u, \quad v' = v \quad \text{mit } u, v \ll U$$

- Die Strömung ist quellenfrei \rightarrow Stromfunktion ψ existiert:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Zirkulation und Drehimpuls

- Relative Vorticity (Zirkulation):

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta\psi$$

- Absolute Vorticity:

$$\zeta + f \quad (\text{mit Coriolisparameter } f = f(y))$$

- Annahme: Erhaltung der absoluten Vorticity:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$$

Bewegungsgleichung – Herleitung

- Kettenregel für totale Ableitung:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- Näherungen:

- $u \ll U \rightarrow$ vernachlässigbar
- $\partial \zeta / \partial y \ll \partial f / \partial y$
- $\partial f / \partial y = \beta$
- $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

- Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

- Mit $\zeta = \Delta \psi$:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Wellenlösung der Gleichung

- Ansatz: ebene Wellen

$$\psi(x, y, t) = \cos(kx + ly - \omega t)$$

- Einsetzen in Gleichung ergibt Dispersionsrelation:

$$\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

- Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\omega}{k} = U - \frac{\beta}{k^2 + l^2}$$

- Interpretation: westwärts laufende Wellen mit geringer Geschwindigkeit als U

Physikalisches Feld am Beispiel der Vorticity

- Die **Vorticity** $\zeta(x, y, t)$ beschreibt die Rotation eines Luftpakets.
- Sie ist ein **physikalisches Skalarfeld**, das jedem Punkt eine Wirbelstärke zuordnet:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- In der Atmosphäre entsteht Vorticity durch:
 - Wind-Scherung (Änderung der Windrichtung oder -geschwindigkeit)
 - Bewegung entlang der Breitenkreise (β -Effekt)
- Die **Vorticity-Gleichung** beschreibt, wie sich dieses Feld entwickelt:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \beta v = 0$$

- → Diese Gleichung ist eine typische **Feldgleichung**, weil sie die Änderung eines Feldes durch lokale und advective Prozesse beschreibt.