Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

4. Äussere Algebra, äussere Ableitung und der Satz von Stokes

Inhalt

1. Äussere Algebra

Für die Formulierung des Satzes von Green haben wir zwei Arten von Objekten eingeführt:

2-Vektoren: $X_1 \wedge X_2$ beschreibt ein Flächenelement (kleines Parallelogramm). Daraus lässt sich das Integrationsgebiet zusammensetzen. Wichtig daran sind aber nur

- die von X_1 und X_2 aufgespannte Ebene
- der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms
- die Orientierung

In der Vektorgeometrie kennt man dafür folgende Konstruktionen:

2D: Die Determinante

$$\det(X, Y) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$$

3D: Das Vektorprodukt $X \times Y$

$\Longrightarrow$ Das Wedge-Produkt verallgemeinert das Vektorprodukt auf beliebige Dimension

2-Formen: α misst eine Grösse, die sich auf ein Flächenelemen auswirkt, z.B. Magnetfeld.

Die 2-Form $dx^i \wedge dx^k$ hängt nur ab von:

- den Komponenten der Vektoren $X_1 \wedge X_2$ in der x^2-x^4-Ebene
- dem Flächeninhalt
- der Orientierung

Das Wedge-Produkt der 1-Formen hat die gleichen algebraischen Eigenschaften wie das Wedge-Produkt der Vektoren.

Die $\wedge$ soll ein "Produkt" sein, d.h. man soll damit rechnen können, wie man es sich von Produkten gewohnt ist:

linear in beiden Faktoren = bilinear

$$
\left.\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta &= \alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta \\
(X_1+X_2)\wedge Y &= X_1\wedge Y+X_2\wedge Y \\
\alpha\wedge(\beta_1+\beta_2) &= \alpha\wedge\beta_1+\alpha_2\wedge\beta_2 \\
X\wedge(Y_1+Y_2) &= X\wedge Y_1+X\wedge Y_2 \\
(s\alpha)\wedge\beta = s(\alpha\wedge\beta) &= \alpha\wedge(s\beta) \\
(tX)\wedge Y = t(X\wedge Y) &= X\wedge(tY).
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

Distributivgesetz

Da nur der Flächeninhalt und die Orientierung wichtig sind, gilt ausserdem die Vertauschungsrelation:

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha\wedge\beta &= -\beta\wedge\alpha \\
X\wedge Y &= -Y\wedge X
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

(für 1-Formen α,β).

Aus den Rechenregeln ergibt sich, dass für 2-Vektoren die Basis

$$\{ \vec{e}_i \wedge \vec{e}_k \mid i < k \}$$

verwendet werden kann.

2D: alle 2-Vektoren sind Vielfache von $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, dieser beschreibt das Einheitsquadrat der Ebene.

Beispiel: $X = \xi^1 \vec{e}_1 + \xi^2 \vec{e}_2$, $Y = \eta^1 \vec{e}_1 + \eta^2 \vec{e}_2$

$$\begin{aligned} X \wedge Y &= \xi^1 \eta^1 \underbrace{\cancel{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1}}_{=0} + \xi^1 \eta^2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + \xi^2 \eta^1 \underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{= -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2} \\ &\quad + \xi^2 \eta^2 \underbrace{\cancel{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2}}_{=0} \\ &= (\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 . \end{aligned}$$

3D: alle 3-Vektoren sind Linearkombinationen von $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$ und $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$

Beispiel: $A = \sum_{i=1}^{n} a^i \vec{e}_i$, $B = \sum_{k=1}^{n} b^k \vec{e}_k$

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \cancel{a^1 b^1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1} + a^1 b^2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + a^1 b^3 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + a^2 b^1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + \cancel{a^2 b^2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2} + a^2 b^3 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + a^3 b^1 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + a^3 b^2 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 + \cancel{a^3 b^3 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3} \\ &= (a^2 b^3 - a^3 b^2) \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + (a^1 b^3 - a^3 b^1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 . \end{aligned}$$

Dies sind die Komponenten des Vektorproduktes aber mit der (korrekten) Basis der 2-Vektoren. Das Vektorprodukt erhält man, wenn man

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &\longmapsto \vec{e}_3 \\
\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 &\longmapsto \vec{e}_2 \\
\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &\longmapsto \vec{e}_1
\end{aligned}
$$

abbildet. ○

Das letzte Beispiel zeigt, dass das Wedge-Produkt die "korrekte" Verallgemeinerung des Vektorprodukts auf beliebige Dimension ist.

Es gibt kein Hindernis, die durch (1) und (2) definierte Algebra auf Produkte mit mehr als 2 Faktoren zu erweitern.

<u>Definition:</u> Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Man setzt:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^0 V &= \mathbb{R} && \text{Skalare} \\
\Lambda^1 V &= V && \text{Vektoren} \\
\Lambda^2 V &= V \wedge V = \{ X \wedge Y \mid X, Y \in V \} && \text{2-Vektoren} \\
\Lambda^p V &= \{ X_1 \wedge \dots \wedge X_p \mid X_i \in V \} && p\text{-Vektoren}
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\Lambda^* V = \mathbb{R} \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots + \Lambda^n V = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p V \qquad (3)
$$

eine Algebra mit den Rechenregeln (1) und (2).
Für $X \in \Lambda^p V$ und $Y \in \Lambda^q V$ gilt

$$X \wedge Y = (-1)^{pq}\, X \wedge Y. \tag{4}$$

Sie heisst die äussere Algebra.
Die p-Vektoren $\vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_p}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ bilden eine Basis von $\Lambda^p V$.

Dieselbe Konstruktion ist auch möglich für Linearformen. Die äussere Algebra der Linearformen $V^* = \{ l : V \longrightarrow \mathbb{R} \}$ wird $\Lambda^* V^*$.

Die 1-Formen in einem n-dimensionalen Koordinatensystem haben die Basis $dx^1, \ldots, dx^n$. Entsprechend bilden die $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ eine Basis der p-Formen. Jede p-Form lässt sich daher mit den Komponenten $a_{i_1 \ldots i_p}(x)$ als

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

schreiben. Der Vektorraum der p-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M wird mit $\Omega^p(M) = \Lambda^p \Omega^1(M)$ bezeichnet, die äussere Algebra mit $\Omega^*(M)$ oder auch nur $\Omega(M)$.

2. Die äussere Ableitung

Für den Satz von Green wurde zu der 1-Form $\alpha = f\,dx + g\,dy$ die 2-Form

$$d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy \qquad (5)$$

Schreibt man die partiellen Ableitungen als ∂_x und ∂_y und tut so, als könnte man damit wie mit Zahlen rechnen könnte man die Formel (5) rein formal auch als Wedge-Produkt

$$\begin{aligned}(\partial_x dx + \partial_y dy)\alpha &= (\partial_x dx + \partial_y dy)(f\,dx + g\,dy)\\ &= \partial_x g\, dx \wedge dy + \partial_y f\, dy \wedge dx\\ &= (\partial_x g - \partial_y f)\, dx \wedge dy\end{aligned}$$

erhalten. Dies deutet darauf hin, dass $d\alpha$ nur ein Spezialfall des folgenden, allgemeineren Ableitungsoperators ist:

<u>Definition</u>: Die äussere Ableitung einer 1-Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^i$ ist

$$d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dx^i \qquad (6)$$

Die äussere Ableitung einer p-Form

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

ist

$$d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \quad (7)$$

Die äussere Ableitung ist linear, es gilt also $d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta$ und $d(s\alpha) = s\,d\alpha$. Für ein Produkt $\alpha\wedge\beta$ gilt die folgende Produkt-Regel:

<u>Satz:</u> Für $\alpha \in \Omega^p V$ und $\beta \in \Omega^q V$ gilt die Produktregel

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \quad (8)$$

Beweis: Seien $a_{i_1\ldots i_p}$ und $b_{j_1\ldots j_q}$ die Komponenten von α bzw. β. Dann gilt für das Produkt $\alpha\wedge\beta$

$$\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p,\, j_1<\ldots<j_q} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(a_{i_1\ldots i_p}(x)\, b_{j_1\ldots j_q}(x)\right) \\
&\qquad dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \\
&= \left(\sum_{k=1} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) \\
&\qquad \wedge \sum_{j_1<\ldots<j_q} b_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \\
&\quad + (-1)^p \left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) \\
&\qquad \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j_1<\ldots<j_q} \frac{\partial b_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}\right) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

$\square$

__Beispiel:__ Äussere Ableitung in 3 Dimensionen.

$$\alpha = a_1(x)\,dx^1 + a_2(x)\,dx^2 + a_3(x)\,dx^3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d\alpha = {} & \cancel{\frac{\partial a_1}{\partial x^1}\,dx^1\wedge dx^1} + \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\,\underbrace{dx^2\wedge dx^1}_{=-dx^1\wedge dx^2} + \frac{\partial a_1}{\partial x^3}\,\underbrace{dx^3\wedge dx^1}_{=-dx^1\wedge dx^3} \\
& + \frac{\partial a_2}{\partial x^1}\,dx^1\wedge dx^2 + \cancel{\frac{\partial a_2}{\partial x^2}\,dx^2\wedge dx^2} + \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\,\underbrace{dx^3\wedge dx^2}_{=-dx^2\wedge dx^3} \\
& + \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\,dx^1\wedge dx^3 + \frac{\partial a_3}{\partial x^2}\,dx^2\wedge dx^3 + \cancel{\frac{\partial a_3}{\partial x^3}\,dx^3\wedge dx^3} \\
= {} & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{dx^3}\right) dx^2\wedge dx^3 \\
& + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3}\right) dx^1\wedge dx^3 \\
& + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1\wedge dx^2 .
\end{aligned}$$

Diese Komponenten sind in der klassischen Vektoranalysis bekannt als die Rotation $\operatorname{rot}\vec{a}$ des Vektorfeldes $\vec{a}$ mit den Komponenten a_1, a_2, a_3.

Für Funktionen f und g folgt die altbekannte Produktregel

$$d(fg) = (df)g + (-1)^0 f(dg).$$

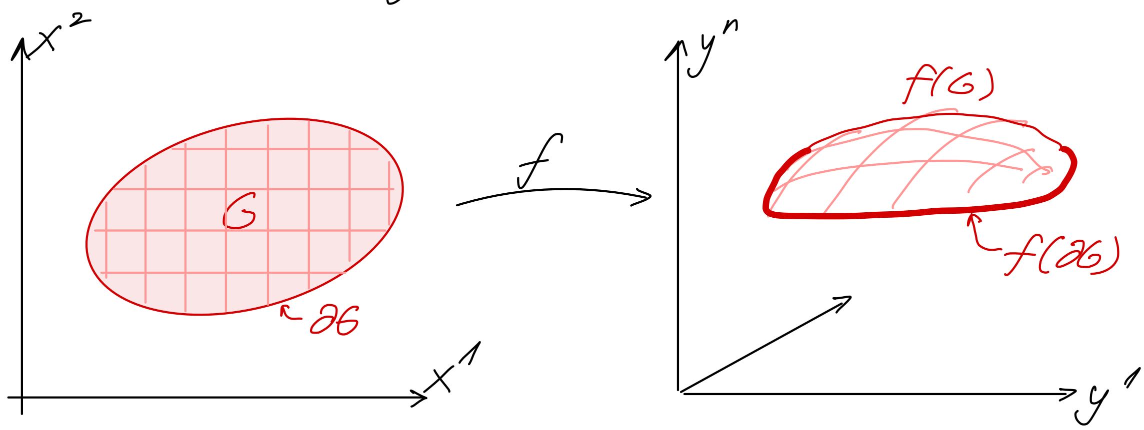
3. Der Satz von Stokes

Der Satz von Green gilt in 2 Dimensionen. Für (x^1, x^2)-Koordinaten geschrieben lautet er für eine 1-Form $\alpha = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$:

$$\int_G d\alpha = \int_G \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \int_\partial a_1 dx^1 + a_2 dx^2 = \int_{\partial G} \alpha .$$

Wir betrachten jetzt die Parametrisierung einer im n-dimensionalen Raum eingebetteten Fläche durch die Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$



$$f(x^1, x^2) = (y^1, \dots, y^n) \qquad y^k = y^k(x^1, x^2)$$

Ausserdem sei auf $\mathbb{R}^n$ die 1-Form $\beta = \sum_{k=1}^{n} b_k dy^k$ gegeben. Mit

$$dy^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial y^k}{\partial x^2} dx^2$$

wird daraus die 1-Form

$$Tf^*\beta = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^1}\right)}_{=a_1} dx^1 + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^2}\right)}_{=a_2} dx^2 = \alpha,$$

für die der Satz von Green gilt. Für das Randintegral folgt

$$\int_{\partial G} \alpha = \int_{f(\partial G)} \beta.$$

Die äussere Ableitung von α ist

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

Die äussere Ableitung von β kann in x^i-Koordinaten umgerechnet werden:

$$d\beta = \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial y^l} dy^l \wedge dy^k.$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial y^l} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{l=1}^n \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^l}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j}}_{a_j} \qquad dx^i \wedge dx^j$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = d\alpha.$$

Der Satz von Green kann daher auf die Fläche $f(G)$ im $\mathbb{R}^n$ übertragen werden.

Satz (Stokes): Für eine zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$ mit Parametrisierung $f: G \to \mathbb{R}^n$ und eine 2-Form β auf $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int_{f(G)} d\beta = \int_{f(\partial G)} \beta. \tag{9}$$

Für $n = 3$ kann $\beta = \sum b_i \, dx^{\hat{i}}$ als Vektorfeld $\vec{b}$ mit Komponenten b_i verstanden werden und $d\beta$ als die Rotation $\operatorname{rot} \vec{b}$. Schreibt man $S = f(G)$, dann bekommt man die klassische Form des Satzes von Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{b} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial S} \vec{b} \cdot d\vec{s},$$

wobei $d\vec{f}$ das Flächenelement auf S ist

Probleme mit dem Prinzip der allgemeinen Kovarianz