Mathematisches Seminar

Felder

Andreas Müller

3. 2-Vektoren, 2-Formen, Satz von Green

Inhalt

1. Begriffsrepetition

Zwei Arten von Objekten:

① Tangentialvektoren mit Komponenten ξ^i, darstellbar als

- Kurven, die mit gleicher Geschwindigkeit durch einen Punkt gehen.
- in der Standardbasis in einem Koordinaten-System: $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \vec{e}_i$
- Differentialoperatoren, die auf Funktionen wirken: $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X \cdot f = \sum \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$

Transformationsgesetz:

Spaltenvektor

$$\dot{y}^k = \frac{dy^k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} J^k{}_i \, \dot{x}^i$$

kontravariante Tensoren 1. Stufe

"Forscher"

② 1-Formen $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx^i$, die die Änderungsrate entlang eines Tangentialvektors messen:

$$X \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta^k_i$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^k} \left\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle$$

$$= \Big\langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k}_{df}, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}}_{X} \Big\rangle = \langle df, X \rangle$$

Zeilenvektor

Transformation: $$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^k} J^k{}_i$$

kovariante Tensoren 1. Stufe

"Felder"

In der klassischen Vektoranalysis werden kontravariante (Spaltenvektoren) und kovariante Tensoren (Zeilenvektoren) nicht unterschieden. Dies ist gleichbedeutend damit, nur kartesische Koordinaten zuzulassen (d.h. nicht allgemein kovariant!), und 1-Formen mit dem Skalarprodukt als Vektoren zu schreiben

$$\langle \alpha, X \rangle = (a_1 \; \cdots \; a_n) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

Das Differential df wird in der klassischen Vektoranalysis daher auch als

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad \text{"Nabla-Operator"}$$

geschrieben. D.h. ∇ ist nicht allgemein kovariant!

<u>Wegintegral einer 1-Form α:</u>

allg. kovariant

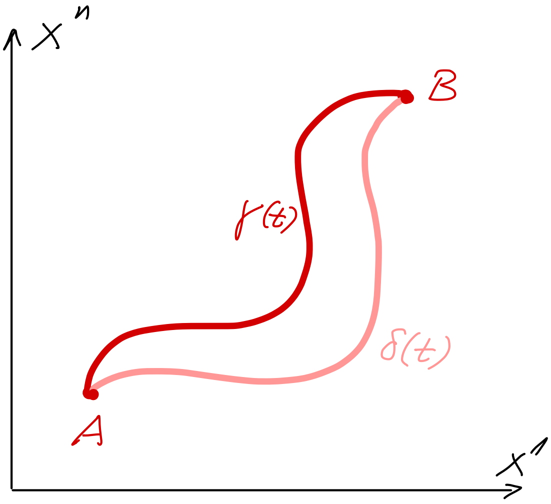
$$\int_\gamma \alpha = \int_{t_A}^{t_B} \langle \alpha, \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^{n} a_i \, \dot{x}^i(t) \, dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \vec{a} \cdot \dot{\vec{x}} \, dt = \int_\gamma \vec{a} \cdot d\vec{x}$$

<u>Beispiele:</u> potentielle Energie im Gravitationsfeld, Arbeit entlang eines Weges.

2. Wegunabhängigkeit des Integrals

<u>Gegeben</u>: 1-Form α, Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ von A nach B



<u>Frage</u>: Hängt das Integral

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \langle \alpha, \dot\gamma(t) \rangle dt \overset{?}{=} \int_\delta \alpha$$

von der Wahl des Weges ab?

Falls $\alpha = df$ gilt $\int_\gamma \alpha = f(b) - f(a)$, d.h. der Weg spielt keine Rolle.

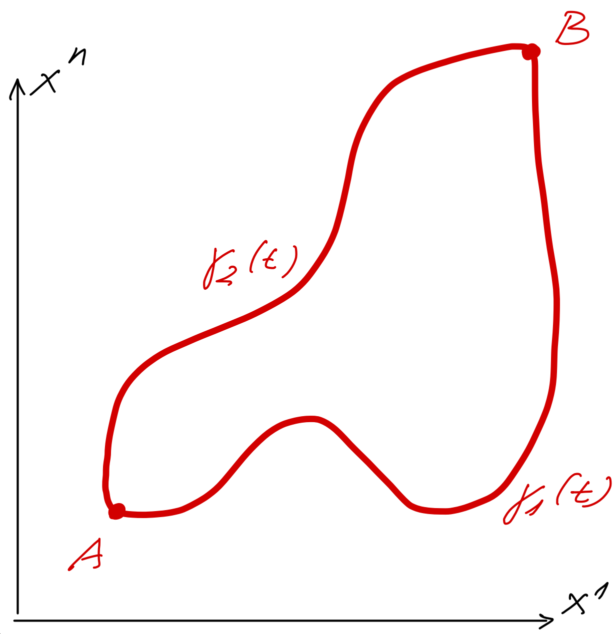
$\longrightarrow$ konservatives Feld, Potentialfeld, Gradientfeld

nicht allg. kovariant

<u>Gegenbeispiele</u>: Reibung, zeitlich veränderliches Magnetfeld.

<u>Äquivalente Frage</u>:

Wege $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ (in umgekehrter Richtung) zu einem geschlossenen Weg zusammensetzen:

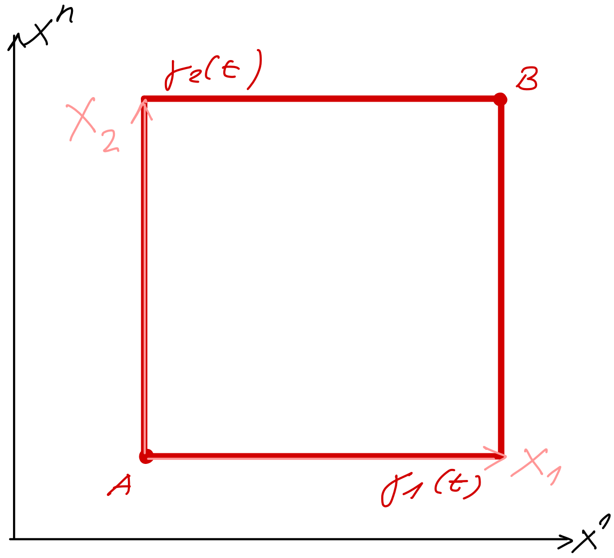


$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha \Leftrightarrow \oint_\gamma \alpha = 0 \quad (1)$$

D.h. man muss Integrale über geschlossene Wege verstehen, um Wegunabhängigkeit zu entscheiden.

3. 2-Vektoren

① Spezialfall der Frage nach Wegunabhängigkeit des Integrals: $\gamma_i(t)$ bilden den Rand eines Rechtecks.

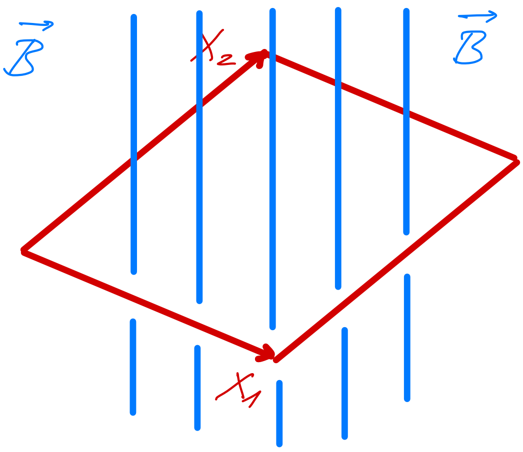


Nach (1) (p. 4) muss untersucht werden ob

$$\int_{\square} \alpha = \int_{\partial \square} \alpha = 0$$

Das Rechteck wird von 2 Vektoren X_1 und X_2 aufgespannt. Man könnte auch beliebige Parallelogramme aufgespannt von X_1 und X_2 betrachten.

② Ein veränderliches Magnetfeld $\vec{B}$ induziert in der von X_1 und X_2 aufgespannten Drahtschleife eine Spannung. Sie ist abhängig von



- Winkel zw. der Ebene $X_1 X_2$ und dem $\vec{B}$-Feld
- Orientierung
- Flächeninhalt

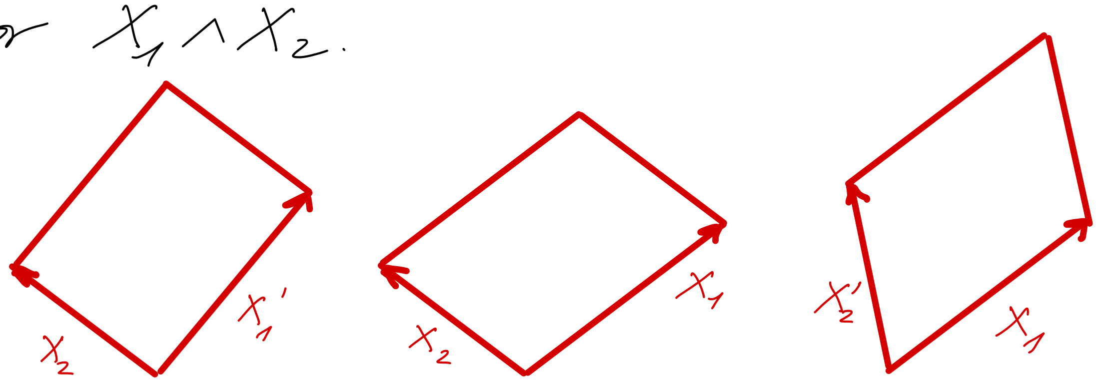
Definition: Für Tangentialvektoren X_1 und X_2 ist $X_1 \wedge X_2$ der von X_1 und X_2 aufgespannte 2-Vektor. Zwei 2-Vektoren sind gleich, wenn die Vektoren in der gleichen Ebene liegen und Parallelogramme mit gleichem orientierten Flächeninhalt aufspannen.

Wedge-Produkt:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c} &= \vec{a}\wedge\vec{c} + \vec{b}\wedge\vec{c} \\ \vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{c} \\ \vec{a}\wedge\vec{b} &= -\vec{b}\wedge\vec{a} \end{aligned}\right\} (2)$$

Visualisierung in 3D: Das Vektorprodukt $X_1 \times X_2$ hat die gleichen Eigenschaften (2) wie der 2-Vektor $X_1 \wedge X_2$.

2D:



Alle 3 Parallelogramme haben den gleichen Flächeninhalt und stellen damit den gleichen 2-Vektor dar. 2-Vektoren in 2D sind Vielfache des Basis-2-Vektors $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \Longrightarrow$ 1-dimensional.

3D: 2-Vektoren haben die Basis $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$.

n-D, $n>3$: schwierig zu zeichnen $\Longrightarrow$ rechnen!

4. 2-Formen

Feld: Magnetfeld β

Wirkung: induziert Spannung im Rand eines 2-Vektors $X_1 \wedge X_2$

Kopplung: $X_1 \wedge X_2 \longmapsto \langle \beta, X_1 \wedge X_2 \rangle$ linear

d.h. das Magnetfeld ist eine 2-Form

<u>Definition</u>: Eine lineare Abbildung von 2-Vektoren in die reellen Zahlen heisst 2-Form. Für das Wedge-Produkt gelten die Rechenregeln

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$$
$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$$
$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$$

Die 2-Formen $dx^i \wedge dx^k$, $i \neq k$, bilden eine Basis der 2-Formen.

Was ist $\langle dx^1 \wedge dx^2, X \wedge Y \rangle$?

Eigenschaften:

- linear in X und Y
- nur abhängig von den Spaltenvektoren
$$\begin{pmatrix} \langle dx^1, X \rangle \\ \langle dx^2, X \rangle \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \langle dx^1, Y \rangle \\ \langle dx^2, Y \rangle \end{pmatrix}$$
- antisymmetrisch

$\Longrightarrow$ Determinante!

$$\langle dx^1 \wedge dx^2, X \wedge Y \rangle = \begin{vmatrix} \langle dx^1, X\rangle & \langle dx^1, Y\rangle \\ \langle dx^2, X\rangle & \langle dx^2, Y\rangle \end{vmatrix}$$

In 3D werden 2-Formen oft mit Vektoren identifiziert: $\alpha \wedge \beta$

$$= (a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3) \wedge (b_1 dx^1 + b_2 dx^2 + b_3 dx^3)$$

$$= \begin{array}{lll} (a_2 b_3 - a_3 b_2) & dx^2 \wedge dx^3 & \text{2-Vektor } \perp \vec{e}_1 \\ (a_1 b_3 - a_3 b_1) & dx^1 \wedge dx^3 & \text{2-Vektor } \perp \vec{e}_2 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) & dx^1 \wedge dx^2 & \text{2-Vektor } \perp \vec{e}_3 \end{array}$$

Komponenten von $\vec{a} \times \vec{b}$

Die 2-Form $\alpha \wedge \beta$ hat auf den 2-Vektor $X \wedge Y$ den Wert

$$\langle \alpha \wedge \beta, X \wedge Y \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{X} \times \vec{Y})$$

Wie Skalarprodukt mit dem "Normalenvektor" $\vec{a} \times \vec{b}$.

Aber: 2-Vektoren und 2-Formen sind weder Vektoren noch 1-Formen, da sie sich bei Spiegelung anders verhalten: $X \longmapsto -X$, $Y \longmapsto -Y$

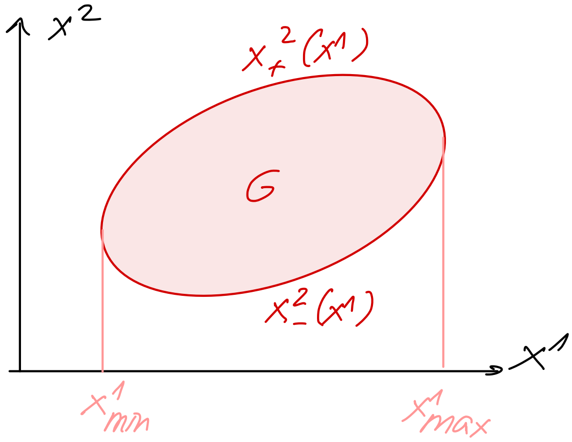
$$\left.\begin{array}{l} X \wedge Y \longmapsto (-X) \wedge (-Y) = X \wedge Y \\ \alpha \wedge \beta \longmapsto (-\alpha) \wedge (-\beta) = \alpha \wedge \beta \end{array}\right\} \text{unverändert!}$$

5. Integration von 2-Formen

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben.
Kann man

$$"\int_\Omega f"$$

definieren? Z.B $f =$ Dichte
$\Rightarrow \int_\Omega f =$ Masse von Ω?



<u>Idee</u>: G in kleine Rechtecke zerlegen und

$$"\int_\Omega f" = \sum_{\text{Rechtecke}} f(x^1, x^2)\ F(\text{Rechteck})$$

<u>Problem</u>: bei Koordinatentransformation werden die Rechtecke zu Parallelogrammen verzerrt, Flächeninhalt ändert um den Faktor

$$\det J = \begin{vmatrix} J^1{}_1 & J^1{}_2 \\ J^2{}_1 & J^2{}_2 \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^1, x^2)} \right| \quad \text{Funktionaldet.}$$

<u>Definition</u>: Das Integral einer 2-Form $\alpha = a_{12}(x)\, dx^1 \wedge dx^2$

$$\int_\Omega \alpha = \int_{x^1_{min}}^{x^1_{max}} \int_{x_-^2(x^1)}^{x_+^2(x^1)} a_{12}(x)\, dx^2\, dx^1$$

ist unabhängig von der Wahl des Koordinaten systems.

(Koordinatentransformation von 2-fachen Integralen)

6. Satz von Green

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Kurvenintegral einer 1-Form α über den Rand $\partial\Omega$ und dem Integral einer aus α abgeleiteten 2-Form $d\alpha$ über ganz Ω.

<u>Satz (Green)</u>: $\alpha = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ und

$$d\alpha = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy \qquad (3)$$

dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy =$$

$$= \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy = \int_{\Omega} d\alpha$$

Beweis durch Nachrechnen für jeden Term in (3):

$$\int_{\Omega} -\frac{\partial f}{\partial y}\, dx \wedge dy = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} -\frac{\partial f}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= -\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[f \right]_{y_-(x)}^{y_+(x)} dx$$

$$= -\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y_+(x))\, dx + \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y_-(x))\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} f\, dx.$$

Die Koordinatenvertauschung $x \leftrightarrow y$ ist eine Koordinatentransformation mit Determinante -1, daher gilt auch

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} g\, dy.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz: Das Wegintegral einer 1-Form α ist wegunabhängig wenn $d\alpha = 0$

Beweis: Nach dem Kriterium (1) ist

$$\oint_{\gamma} \alpha = \int_{\Omega} d\alpha = 0$$

□

Definition: Eine 1-Form α heisst geschlossen, wenn $d\alpha = 0$ gilt. Sie heisst exakt, wenn es eine Funktion f gibt mit $df = \alpha$

Es folgt: Auf einem Gebiet ohne Löcher ist $\alpha = df$ genau dann, wenn $d\alpha = 0$.

Beispiel: Für das Gravitationsfeld

$$\alpha = -\frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{gilt} \quad d\alpha = 0$$

daher gibt es das Potential φ mit $\alpha = d\varphi$.