Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

6. Diskrete Fourier-Transformation

Inhalt

1. Endliche abelsche Gruppen

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $x \in G$. Die Elemente

$$e, x, x^2, x^3, \ldots$$

können nicht alle verschieden sein. Sei also n der kleinste Exponent derart, dass $x^n = x^k$ für $0 \leq k < n$. Dann gilt wegen der Gruppeneigenschaft:

$$x^{n-k} = e$$

d.h. n kann gar nicht der kleinste Exponent gewesen sein ausser wenn $k=0$ ist. Damit ist gezeigt, dass die Element

$$C_n = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$$

verschieden sind und $x^n = e$ gilt. Das Rechnen in C_n ist gleichbedeutend mit dem Rechnen in den Resten $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modulo n. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow C_n : k \longmapsto x^k$$

ist bijektiv, man sagt, die Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und C_n sind isomorph.

Definition: Die Gruppe C_n heisst die von x erzeugte zyklische Gruppe

Der Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen besagt, dass dies der "Normalfall" ist. Um ihn zu formulieren brauchen wir den Begriff des Produktes von Gruppen

Definition: Sind G_1 und G_2 Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 und e_2, dann ist $G = G_1 \times G_2$ eine Gruppe mit neutralem Element $e = (e_1, e_2)$ und

Verknüpfung: $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$
Inverse: $(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$

Der Hauptsatz besagt, dass endlich erzeugte abelsche Gruppen immer als Produkte von zyklischen Gruppen geschrieben werden können:

Satz (Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen): Ist G endlich erzeugt und abelsch, dann gibt es eindeutig bestimmte Primzahl-Potenzen $1 < d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_t$ und r derart, dass

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times \bigtimes_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

Ist G endlich, dann ist $r = 0$.

2. Duale Gruppe von C_n

Die duale Gruppe besteht aus den Homomorphismen $C_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ oder $\varphi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Der Wert $\varphi(1)$ legt den Homomorphismus vollständig fest, da

$$\varphi(k) = \varphi(k-1+1) = \varphi(k-1)\varphi(1) = \dots = \varphi(1)^k.$$

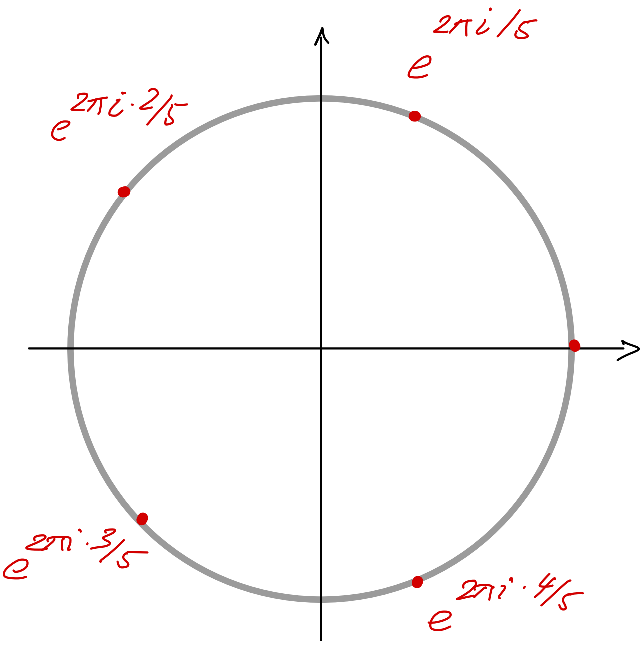
Ausserdem muss gelten: $\varphi(1)^n = \varphi(n) = \varphi(0) = 1$ (wegen $n=0$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Daher ist $\varphi(1)$ eine n-te Wurzel von n oder

$$\varphi(1) = e^{2\pi i k/n} \qquad \text{für } 0 \le k < n.$$

Die Menge $\hat{G}$ der Homomorphismen ist also wieder die Menge $\{0, 1, \dots, n-1\}$, wobei

$$\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x/n}$$

gilt. Die Elemente $e^{2\pi i k/n}$ können als Punkte auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ visualisiert werden. Sie bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.



3. Fourier-Transformation

Aus der allgemeinen Theorie folgt jetzt die diskrete Fourier-Transformation und ihre Inverse:

Satz: Für Funktionen $f : C_n \to \mathbb{C}$ ist die Fourier-Transformierte die Funktion

$$\hat{f} : C_n \longrightarrow \mathbb{C} : k \mapsto \hat{f}(k) = \sum_{x=0}^{n-1} e^{-2\pi i k x/n} f(x)$$

mit der Umkehrtransformation

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k x/n} \hat{f}(k)$$

Es gilt die Faltungsformel $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

In dieser Normierung ist die Fourier-Transformation keine Isometrie, aber fast. Es gilt

Satz (Parseval-Plancherel):

$$\sum_{x=0}^{n-1} |f(x)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{f}(k)|^2$$

Die Summenformeln werden etwas einfacher, wenn man $z = e^{2\pi i/n}$ schreibt, nämlich

$$\hat{f}(k) = \sum_{x=0}^{n-1} z^{-kx} f(x) , \quad f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^{kx} \hat{f}(k)$$

Schreibt man die Funktionen f und $\hat{f}$ als Spaltenvektoren, dann kann man die Fourier-Transformation als Matrix schreiben:

$$f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n-1) \end{pmatrix} \qquad \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} z^0 & z^0 & z^0 & \dots & z^0 \\ z^0 & z^{-1} & z^{-2} & \dots & z^{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^0 & z^{-n+1} & z^{-2n+2} & \dots & z \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} f$$

$$f = \frac{1}{n} \underbrace{\begin{pmatrix} z^0 & z^0 & z^0 & \dots & z^0 \\ z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^0 & z^{n-1} & z^{2n-2} & \dots & z^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}_{\overline{\mathcal{F}}} \hat{f}$$

Die Matrizen $\mathcal{F}$ und $\overline{\mathcal{F}}$ haben sehr spezielle Form. Die Determinante von $\mathcal{F}$ heisst die Vandermonde-Determinante, es gilt

$$\det \mathcal{F} = \prod_{0 \le i < k < n} (z^i - z^k) \neq 0$$

4. Tensorprodukt

Aus Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$, $g: Y \to \mathbb{C}$ wird eine Funktion $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{C}$ durch

$$f \otimes g\,(x,y) = f(x)\,g(y)$$

Dies ist zu unterscheiden vom kartesischen Produkt $f \times g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} : (x,y) \mapsto (f(x), g(y))$.
Das Produkt $\otimes$ ist bilinear

$$(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g \qquad \text{und analog}$$
$$\lambda f \otimes g = \lambda (f \otimes g) \qquad \text{für } g.$$

Wir interessieren uns vor allem für den Fall wo X und Y endliche Mengen sind, wo also $f \in \mathbb{C}^X$ und $g \in \mathbb{C}^Y$ auch als Spalten- oder Zeilenvektoren geschrieben werden können.

Die Standardbasis von $\mathbb{C}^X$ und $\mathbb{C}^Y$ besteht aus den Funktionen

$$e_x(\xi) = \begin{cases} 1 & x = \xi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad e_y(\eta) = \begin{cases} 1 & y = \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus lässt sich eine Basis für $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^Y$ finden

$$e_{(x,y)}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & x = \xi \text{ und } y = \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionen $f \in \mathbb{C}^X$ und $g \in \mathbb{C}^Y$ werden in der Standardbasis

$$f = \sum_{x \in X} f(x) e_x \quad \text{bzw.} \quad g = \sum_{y \in Y} g(y) e_y$$

dargestellt. Das Tensorprodukt ist dann

$$\begin{aligned} f \otimes g &= \sum_{x \in X, y \in Y} f(x) g(y)\, e_x \otimes e_y \\ &= \sum_{x \in X, y \in Y} f(x) g(y)\, e_{(x,y)} \\ &= \sum_{x \in X, y \in Y} (f \otimes g)(x,y)\, e_x \otimes e_y \end{aligned}$$

Man kann sich das Tensorprodukt zweier Vektoren auch als Matrix vorstellen. Diese Vorstellung ist aber nicht immer hilfreich.
Die Algebra der Matrizen wurde konstruiert, um lineare Abbildungen zu beschreiben, die Tensorprodukt $f \otimes g$ sind aber keine lin. Abb. sondern nur Vektoren eines grossen Vektorraums.

5. Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Wir betrachten wieder Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$ und $g: Y \to \mathbb{C}$ sowie lineare Abbildungen

$$A: \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^X \quad \text{und} \quad B: \mathbb{C}^Y \to \mathbb{C}^Y$$

A und B können in der Standardbasis durch Matrizen beschrieben werden

$$(Af)(x) = \sum_{x' \in X} \underbrace{a_{xx'}}_{\text{Einträge der Matrix } A} f(x')$$

$$(Bg)(y) = \sum_{y' \in Y} b_{yy'}\, g(y')$$

Wendet man A und B auf die Faktoren f und g von $f \otimes g$ an, entsteht das Tensorprodukt:

Definition: Das Tensorprodukt zweier linearer Abbildungen A und B ist die lineare Abbildung $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^Y \to \mathbb{C}^{X \otimes Y}$ mit

$$(A \otimes B)(f \otimes g) := Af \otimes Bg$$

Man beachte, dass die Forderung nach Linearität Teil der Definition ist, da $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^Y$ nicht nur aus Vektoren $f \otimes g$ besteht sondern auch aus Linearkombinationen.

Wenn A und B die Matrixelement $a_{xx'}$ und $b_{yy'}$ haben, welche Matrixelemente hat dann $A \otimes B$ in der Standardbasis? Dazu muss das Bild von $e \otimes e$ in der Standardbasis ausgedrückt werden.

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(e_x \otimes e_y) &= (Ae_x) \otimes (Be_y) \\
&= \sum_{x' \in X} (a_{xx'} e_{x'}) \otimes \Big(\sum_{y' \in Y} b_{yy'} e_{y'} \Big) \\
&= \sum_{\substack{x' \in X \\ y' \in Y}} a_{xx'} b_{yy'} \; e_{x'} \otimes e_{y'}
\end{aligned}
$$

d.h. die "Matrixeinträge" von $C = A \otimes B$ sind

$$c_{(x,y)(x',y')} = a_{xx'} b_{yy'}$$

Man beachte, dass man dies nicht sofort als Matrix schreiben kann. Die Matrixnotation basiert auf einer Standardreihenfolge der Basisvektoren, für die Basis aus den Tensorprodukten $e_x \otimes e_y$ ist aber a priori keine Reihenfolge definiert.

6. Kroneckerprodukt von Matrizen

Um das Tensorprodukt von linearen Abbildungen $A \otimes B$ als Matrix zu schreiben, muss eine Reihenfolge der Basisvektoren festgelegt werden. Sei daher wieder $X = \{1, \dots, n\}$ und $Y = \{1, \dots, m\}$ und A und B seien durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wählen die lexikographische Reihenfolge der Basisvektoren:

$$(1,1), (1,2) \dots (1,m), (2,1), \dots, (2,m), \dots, (n,1) \dots (n,m)$$

In dieser Reihenfolge bekommt die Matrix von $A \otimes B$ die Form

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
a_{11} b_{11} & \cdots & a_{11} b_{1m} & a_{12} b_{11} & \cdots & a_{12} b_{1m} & \cdots & a_{1n} b_{11} & \cdots & a_{1n} b_{1m} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{11} b_{m1} & \cdots & a_{11} b_{mm} & a_{12} b_{m1} & \cdots & a_{12} b_{mm} & \cdots & a_{1n} b_{m1} & \cdots & a_{1n} b_{mm} \\
\hline
a_{21} b_{11} & \cdots & a_{21} b_{1m} & a_{22} b_{11} & \cdots & a_{22} b_{1m} & \cdots & a_{2n} b_{11} & \cdots & a_{2n} b_{1m} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{21} b_{m1} & \cdots & a_{21} b_{mm} & a_{22} b_{m1} & \cdots & a_{22} b_{mm} & \cdots & a_{2n} b_{m1} & \cdots & a_{2n} b_{mm} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\hline
a_{n1} b_{11} & \cdots & a_{n1} b_{1m} & a_{n2} b_{11} & \cdots & a_{n2} b_{1m} & \cdots & a_{nn} b_{11} & \cdots & a_{nn} b_{1m} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} b_{m1} & \cdots & a_{n1} b_{mm} & a_{n2} b_{m1} & \cdots & a_{n2} b_{mm} & \cdots & a_{nn} b_{m1} & \cdots & a_{nn} b_{mm}
\end{array} \right)$$

Die einzelnen Blöcke sind Matrizen B mit einem gemeinsamen Faktor a_{kl}:

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \hline a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{array}\right) \qquad (\star)$$

Definition: Die Matrix $(\star)$ heisst das Kronecker-Produkt der Matrizen A und B.

Beispiele:

① $A \otimes I$ besteht aus Blöcken $a_{ik}I$, d.h. einzelne Einträge sind zu $n \times n$-Matrizen $a_{ik}I$ aufgeblasen worden.

② $I \otimes B$ ist blockdiagonal mit Blöcken B auf der Diagonalen

$$I \otimes B = \begin{pmatrix} B & & & 0 \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B \end{pmatrix}$$

7. Zusammensetzung, Inverse und Determinante

Da die Abbildungen A und B auf den Faktoren f und g von $f \otimes g$ individuell wirken, ist

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(f \otimes g)$$

$$= (A_1 \otimes B_1)(A_2 f \otimes B_2 g)$$

$$= (A_1 A_2 f) \otimes (B_1 B_2 g)$$

$$= ((A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2))(f \otimes g)$$

und folglich:

Satz:
$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2$$
$$I_n \otimes I_m = I_{nm}$$
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Für die Determinante von $A \otimes B$ beachtet man zunächst

$$A \otimes B = (A \otimes I_m)(I_n \otimes B)$$
$$\Rightarrow \det(A \otimes B) = \det(A \otimes I_m)\det(I_n \otimes B)$$

nach dem Produktsatz für Determinanten. Es müssen jetzt nur noch $\det(A \otimes I_m)$ und $\det(I_n \otimes B)$ berechnet werden.

Satz: $\det(I_n \otimes B) = \det(B)^n$

$\det(A \otimes I_m) = \det(A)^m$

$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$

Beweis: I_n ist eine Blockmatrix der Form

$$I_n \otimes B = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

Jeder Faktor hat Determinante $\det(B)$, es gibt n solche Faktoren, also $\det(I_n \otimes B) = \det(B)^n$.

Durch Umordnen der Zeilen und Spalten kann die lexikographische Reihenfolge in die rechts-lexikographische Reihenfolge gebracht werden, d.h. $\det(A \otimes I_m) = \det(I_m \otimes A) = \det(A)^m$.

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Satz: $\mathrm{Spur}(A \otimes B) = \mathrm{Spur}\, A \cdot \mathrm{Spur}\, B$

8. Faktorisierung der diskreten Fourier-Transformation

Sei $\omega = e^{-2\pi i/n}$, dann ist die Fourier-Transformierte eines Signals f_x

$$\hat{f}_k = \sum_{x=0}^{n-1} \omega^{kx} f_x = (\mathcal{F}f)_k$$

und die Inverse ist

$$f_x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-kx} \hat{f}_k = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})_x = \frac{1}{n}(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})_x$$

Die Fourier-Transformation wird also durch die Matrix

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2n-2} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Man beachte, dass $\omega^n = 1$ ist.
$\mathcal{F}$ ist eine Vandermonde-Matrix:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{F} = V(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$$

Aus allg. Theorie: $\det(V_1, \dots, V_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

Satz: $\mathcal{F}$ und $\bar{\mathcal{F}}$ sind invertierbar

Beweis: $\det(\mathcal{F}) = \prod_{i<j} (\omega^i - \omega^j) \neq 0$, da alle Potenzen ω^i verschieden sind. $\square$

Faktorisierungen im Fall $n=6$

$$
\mathcal{F}_6 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\
1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} \\
1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} \\
1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} \\
1 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25}
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\
1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\
1 & \omega^3 & 1 & \omega^3 & 1 & \omega^3 \\
1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\
1 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega
\end{pmatrix}
$$

$$
= \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\
\hline
1 & \omega^2 & \omega^4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \omega^3 & \omega^6 \\
\hline
1 & \omega^4 & \omega^8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \omega^5 & \omega^{10}
\end{array}\right)}_{A(2,3,\omega)}
\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 \\
\hline
1 & & & \omega^3 & & \\
 & 1 & & & \omega^3 & \\
 & & 1 & & & \omega^3
\end{array}\right)}_{F(2,3,\omega)}
$$

Wegen $(\omega^3)^2 = 1$ ist die Matrix $F(2,3,\omega)$ ein Kroneckerprodukt

$$
F(2,3,\omega) = \mathcal{F}_2 \otimes I_3
$$

Alternative Faktorisierung:

$$\mathcal{F}_6 = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 \\ \hline 1 & \omega^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^5 \end{array}\right)}_{A(3,2,\omega)} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & \omega^2 & & \omega^4 & \\ & 1 & & \omega^2 & & \omega^4 \\ \hline 1 & & \omega^4 & & \omega^8 & \\ & 1 & & \omega^4 & & \omega^8 \end{array}\right)}_{F(3,2,\omega)}$$

$$F(3,2,\omega) = \mathcal{F}_3 \otimes I_2$$

Die Matrix $A(2,3,\omega)$ bzw. $A(3,2,\omega)$ kann man durch Umordnen der Zeilen ebenfalls in eine Form bringen, die wie eine Fourier-Transformation aussieht

$$A(2,3,\omega)' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & 0 & \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & & & \\ \hline & & & 1 & \omega & \omega^2 \\ & 0 & & 1 & \omega^3 & \omega^6 \\ & & & 1 & \omega^5 & \omega^{10} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{F}_3 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{F}_3 \circ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= I_2 \otimes \mathcal{F}_3 \cdot \left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & \begin{matrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Für $A(3,2,\omega)$ wird die Zerlegung

$$A(3,2,\omega)' = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & & & & \\ 1 & \omega^3 & & & & \\ \hline & & 1 & \omega & & \\ & & 1 & \omega^4 & & \\ \hline & & & & 1 & \omega^2 \\ & & & & 1 & \omega^5 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathcal{F}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{F}_2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & \omega \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathcal{F}_2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & \omega^2 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= I_3 \otimes \mathcal{F}_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \omega & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \omega^2 \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u>: Wenn $n = pq$ und $\omega = e^{-2\pi i/n}$, dann kann die Fourier-Transformation $\mathcal{F}_n$ faktorisiert werden:

$$\mathcal{F}_n = A(p,q,\omega)(\mathcal{F}_p \otimes I_q)$$

$$\mathcal{F}_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{\mathcal{F}_n} = \frac{1}{q} A(p,q,\overline{\omega})\left(\frac{1}{p}\overline{\mathcal{F}_p} \otimes I_q\right)$$

$$= \frac{1}{q} \cdot A(p,q,\overline{\omega})(\mathcal{F}_p^{-1} \otimes I_q)$$

9. Schnelle Fourier-Transformation

Die Faktorisierung von $\mathcal{F}_n$ ist die Grundlage der Beschleunigung in der schnellen Fourier-Transformation.

Zunächst müssen wir die Berechnung der Potenzen ω^k nicht zählen, da dies vorgängig gemacht werden kann.

Satz: Das Produkt $F(p,q,\omega)v$ kann in genau np Multiplikationen und $n(p-1)$ Additionen berechnet werden.

Beweis: Die Matrix $F(p,q,\omega) = \mathcal{F}_p \otimes I_q$ hat genau p Einträge $\neq 0$ in jeder Zeile. Das Produkt Zeile $\times$ Spalte v enthält daher nur p Terme $\neq 0$, die mit $p-1$ Additionen summiert werden können. $\square$

Satz: Das Produkt $A(p,q,\omega)v$ kann mit genau $n \cdot q$ Multiplikationen und $n(q-1)$ Additionen berechnet werden

Beweis: $A(p,q,\omega)$ hat genau q von 0 verschiedene Einträge in jeder Zeile. Nur q Einträge müssen daher tatsächlich multipliziert werden. Die q Terme müssen dann mit $q-1$ Additionen summiert werden. $\square$

Schreibt man $A(p,q,\omega)$ als Produkt $\mathcal{F}_p \otimes I_q$ mit einer Diagonalmatrix, die aber nur Potenzen von ω enthält, die ohne Berechnung einer Multiplikation in das Produkt eingesetzt werden können.

<u>Satz</u>: Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}_n f$ kann mit $n(p+q)$ Multiplikationen und $n(p+q-2)$ Additionen berechnet werden.

Ist $p = p_1 p_2$, dann lässt sich $F(p,q,\omega) = \mathcal{F}_p \otimes I_q$ in $A(p_1, p_2, \omega^q)(\mathcal{F}_{p_1} \otimes I_{q_1}) \otimes I_q$ faktorisieren, d.h. der Rechenaufwand kann auf $n(p_1+p_2+q)$ Multiplikationen und $n(p_1+p_2+q-4)$ Additionen reduziert werden. Der Aufwand ist also $O(n(p_1+p_2+q))$.

Da $A(p,q,\omega)$ bis auf eine Diagonalmatrix von der Form $I_p \otimes \mathcal{F}_q$ ist, lässt sich auch diese Matrix wieder faktorisieren, wenn $q = q_1 q_2$ ist, der Rechenaufwand sinkt auf $O(n(p+q_1+q_2))$.

<u>Satz:</u> Ist $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ die Primfaktorzerlegung von n, dann ist die Berechnung der Fourier-Transformation mit Aufwand $O(n \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i p_i)$ möglich.

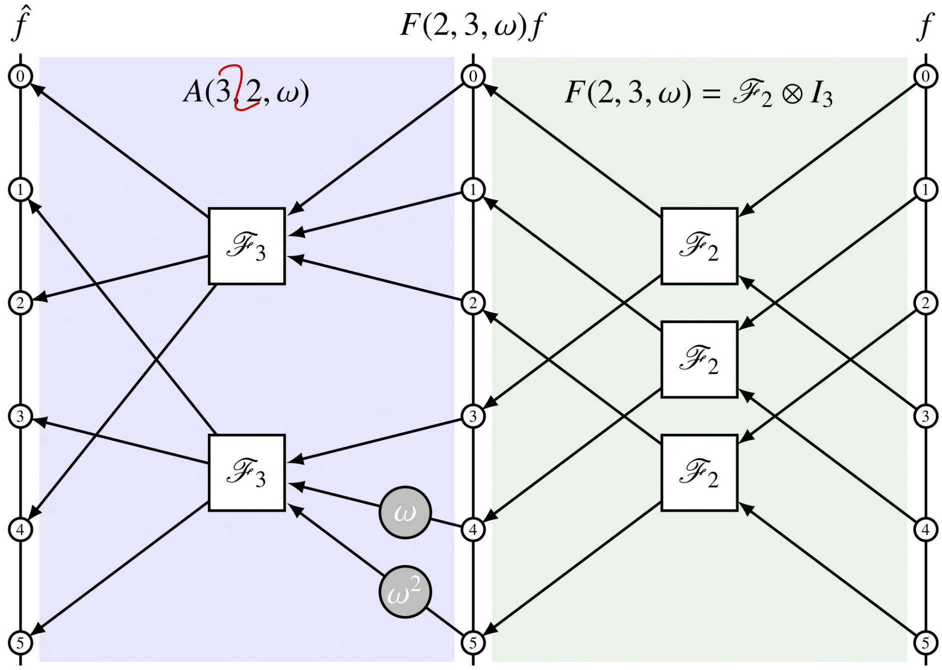
<u>Korollar:</u> Ist $n = p^k$, dann lässt sich die Fourier-Transformation mit Aufwand $O(n\,kp) = O(n\,p\log_p n) = O(n \log n)$ berechnen.

Die Faktorisierung erlaubt also eine schnelle Berechnung der FT, wenn n ein Produkt kleiner Primfaktoren ist. Keine Beschleunigung ist möglich, wenn n eine Primzahl ist.

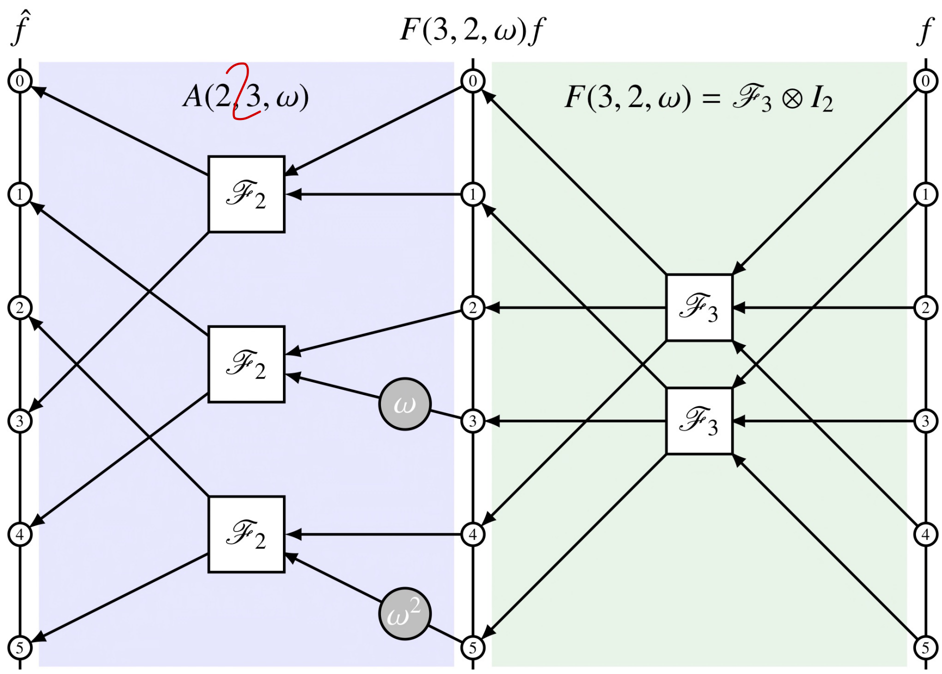
Die grösste Beschleunigung ist möglich für $n = 2^k$. Die FFTW3-Bibliothek ist in der Lage, beschleunigte FFT auch für Dimensionen n zu rechnen, die keine Potenzen von 2 sind.

10. Darstellung als Filter-Kaskade

Faktorisierung von $\mathcal{F}_6$ in $(I_2 \otimes \mathcal{F}_3)\cdot D \cdot (\mathcal{F}_2 \otimes I_3)$:



Faktorisierung von $\mathcal{F}_6$ in $(I_3 \otimes \mathcal{F}_2)\cdot D \cdot (\mathcal{F}_3 \otimes I_2)$



Für $n = 2^k$ lässt sich $\mathcal{F}_n$ vollständig in $\mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und Phasenfaktoren $\omega, \omega^2, \dots$ zerlegen.

11. Donoho-Stark Unschärfe-Relation

f und $\hat{f}$ können nicht gleichzeitig beliebig genau lokalisiert sein.

<u>Beispiel:</u> wenn $f = e_k$ ein Standardbasisvektor ist, dann ist $\hat{f}$ eine Spalte von $\mathcal{F}$, alle Einträge sind $\neq 0$. Umgekehrt: ist $\hat{f}$ ein Standardbasisvektor, dann ist $f = \frac{1}{n}\overline{\mathcal{F}}\hat{f}$ Vielfaches einer Spalte von $\overline{\mathcal{F}}$ und alle Einträge sind $\neq n$

<u>Definition:</u> Sei $N(f)$ = Anzahl der Einträge $\neq 0$ von f.

Die Zahl $N(f)$ kann als Mass für die Lokalisierung von f betrachtet werden: je kleiner $N(f)$, desto kleiner ist $N(f)$.

Das Beispiel suggeriert $N(f)N(\hat{f}) = n$, das kann aber nicht sein, da es $f, \hat{f}$ gibt mit $N(f)=N(\hat{f})=n$. Vielmehr gilt

<u>Satz</u> (Donoho-Stark): $N(f)\,N(\hat{f}) \geq n$.

Definition: Eine komplexe Matrix A heisst k-Hadamard, falls alle Einträge Betrag ≤ 1 haben, A^*A invertierbar ist und

$$\|(A^*A)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{k} \qquad (*)$$

ist. Die Norm $\|\,.\,\|_\infty$ ist

$$\|B\|_\infty = \max_k \sum_{i=0}^{n-1} |b_{ki}| = \max_k \|b_{k:}\|_1$$

Da für die Fourier-Transformation gilt dass $\mathcal{F}\mathcal{F} = n \Rightarrow \mathcal{F}$ ist n-Hadamard.

Satz (Unschärferelation für k-Hadamard-Matrizen)
Ist A k-Hadamard, dann gilt

$$\|v\|_1 \, \|Av\|_1 \geq k \, \|v\|_\infty \, \|Av\|_\infty$$

Beweis: da die Einträge von A Betrag ≤ 1 haben, folgt:

$$\|Av\|_\infty \leq \|v\|_1 \quad \text{und} \quad \|A^*v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

$$\|A^*Av\|_\infty \leq \|Av\|_1$$

Multiplizieren:

$$\|Av\|_1 \, \|v\|_1 \geq \|Av\|_\infty \, \|A^*Av\|_\infty \geq k \, \|Av\|_\infty \, \|v\|_\infty$$

$\square$

Satz: Ist A k-Hadamard, dann ist

$$N(v) \cdot N(Av) \geq k$$

Beweis: Zusammenhang zw $\| \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$

$$\|v\|_1 = \sum_i |v_i| \leq N(v) \cdot \|v\|_\infty .$$

$$\Longrightarrow \quad N(v) \geq \frac{\|v\|_1}{\|v\|_\infty}$$

Angewendet auf $N(v)$ und $N(Av)$ folgt

$$N(v)\, N(Av) \geq \frac{\|v\|_1}{\|v\|_\infty} \frac{\|Av\|_1}{\|Av\|_\infty} \geq k \frac{\|v\|_\infty \|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty \|Av\|_\infty} = k$$

□

Beweis der Donoho-Stark-Unschärferelation:
$\mathcal{F}$ ist n-Hadamard, also ist

$$N(f) \cdot N(\mathcal{F}f) = N(f)\, N(\hat{f}) \geq n$$

□