Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

6. Gruppen, Transformationen, Radon

Inhalt

1. Prinzipien

Ein harmonische Analysis für Funktionen auf dem Definitionsbereich X entsteht wie folgt:

- X ist eine Gruppe: $X = G$

  Beispiele: $G = \mathbb{R} \longrightarrow$ Fourier-Integral

  $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow$ Fourier-Reihe

  $G = \mathbb{Z} \longrightarrow$ Fourier-Synthese

  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow$ diskrete Fourier-Transformation

- Analysefunktione sind Homomorphismen, d.h. Funktione $h: G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

  h muss beschränkt sein, da sonst die Skalarprodukte $\langle h, T_x f \rangle$ mit verschobenen Funktionen unbeschränkt anwachsen können.

  Beispiel: $h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

  Neutrales Element: $h(0) = 1$

  Homomorphismus: $h(n+1) = h(n)h(1)$

  $$\Longrightarrow h(n) = h(1)^n$$

Beschränkt: $|h(1)| = 1$

$\Longrightarrow$ h ist durch $h(1) \in S^1 = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$ vollständig bestimmt $\circ$

<u>Definition:</u> Die Menge $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ der Homomorphismen $G \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst die duale Gruppe.

<u>Beispiel:</u> Die duale Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ ist S^1 oder die Gruppe der Drehwinkel

- Skalarprodukt

Entsteht aus dem Haar-Mass der Gruppe.

$$\langle f, g \rangle = \int_G \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Die Funktionen aus $\hat{G}$ sind möglicherweise nicht mehr normierbar, d.h. man kann nicht mit einer orthonormierten Basis analysieren

- Gelfand-Transformation

$$\mathcal{G} : C(G) \longrightarrow C(\hat{G}) : f \longmapsto \mathcal{G}f$$

Die Gelfand-Transformierte hat auf $h \in \hat{G}$ den Wert $(\mathcal{G}f)(h) = \langle h, f \rangle$

- Faltung

Aus dem Integral:

$$(f*g)(x) = \int_G f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$$

$$= \int_G f(y)\,g(x-y)\,dy \quad \text{(additiv)}$$

Faltungsformel (evtl. von der Normierung des Integrals abhängig)

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

<u>Anwendung</u>: Deconvolution

$$f = \mathcal{F}^{-1}\frac{\mathcal{F}(f*g)}{\mathcal{F}g}$$

d.h. wenn man $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ effizient berechnen kann, kann man die Faltung $f \mapsto f*g$ effizient umkehren ○

- Skalarprodukt auf $\hat{G}$

$\hat{G}$ hat Gruppenstruktur (für G abelsch) und damit auch ein Haar-Integral

- Plancherel-Parseval-Formel

Mit einer geeigneten Normierung des Skalarproduktes auf $\hat{G}$ kann man erreichen, dass $\mathcal{G}$ eine Isometrie ist:

$$\begin{array}{ccc} \|f\|_G^2 & = & \int_G |f(x)|^2 \, dx \\ \| & & \\ \|\mathcal{G}f\|_{\hat{G}}^2 & = & \int_{\hat{G}} |(\mathcal{G}f)(h)|^2 \, dh \end{array}$$

2. Die duale Gruppe

Satz: die Menge $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ ist eine Gruppe

Beweis: $h_1, h_2 \in \hat{G}$, dann ist

$$h_1 \cdot h_2 : G \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto h_1(x) h_2(x)$$

ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot h_2)(x+y) &= h_1(x+y)\, h_2(x+y) \\ &= h_1(x)\, h_1(y)\, h_2(x)\, h_2(y) \\ &= (h_1 \cdot h_2)(x) \cdot (h_1 \cdot h_2)(y) \end{aligned}$$

□

Da $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ eine Gruppe ist, kann man die duale Gruppe von $\hat{G}$ bestimmen.

Satz: $G \subset \hat{\hat{G}}$, denn $x \in G$ wird ein Homomorphismus $e_x : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto h(x)$

Beweis: Wir müssen überprüfen, dass e_x ein Homomorphismus ist. Sei $h_1, h_2 \in \hat{G}$, dann gilt:

$$e_x(h_1 \cdot h_2) = (h_1 \cdot h_2)(x) = h_1(x)\, h_2(x)$$
$$= e_x(h_1)\, e_x(h_2) \qquad \square$$

3. Beispiele von dualen Gruppen-Paaren

- $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$

Homomorphismen $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind 2π-periodische Funktionen mit $h(x+y) = h(x)h(y)$, wir haben früher gezeigt, dass $h(x) = e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. D.h. als Menge ist $\hat{G} = \mathbb{Z}$

Gruppenoperation: $(h_1 h_2)(x) = e^{ik_1x} e^{ik_2x}$
$= e^{i(k_1+k_2)x}$

Früher gezeigt: duale Gruppe von $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

- $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$

Homomorphismen $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, früher gezeigt, dass $h(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$, d.h. als Menge ist $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Gruppenoperation: $(h_1 \cdot h_2)(x) = h_1(x) h_2(x)$
$= e^{ik_1x} e^{ik_2x} = e^{i(k_1+k_2)x}$, $k_1+k_2 \in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Homomorphismen $h: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Homomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit der zusätzlichen Bedingung $h(n) = 1$, d.h.

$$h(x) = e^{2\pi i k x/n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ersetzt man k durch $k+n$, entsteht der Homomorphismus

$$e^{2\pi i (k+n)x/n} = e^{2\pi i k x/n} \underbrace{e^{2\pi i x}}_{=1} = h(x)$$

d.h. $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4. Gruppenkonstruktionen

Satz: $G = G_1 \times G_2 \implies \hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$

Beweis: durch Nachrechnen

Satz: Zu einer Untergruppe $U \subset G$ gibt es einen Homomorphismus $\hat{G} \longrightarrow \hat{U}$, der $h: G \longrightarrow \mathbb{C}$ auf $h|U : U \longrightarrow \mathbb{C}$ abbildet.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \mathbb{R} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

duale Gruppe

○

5. Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^2$

- $\mathbb{R}^2$ ist eine Gruppe
- Homomorphismen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Produkte
  $h(x_1,x_2) = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$, d.h.

  $$\hat{\mathbb{R}}^2 = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

  Vektorschreibweise: $x \in \mathbb{R}^2$, $h_k(x) = e^{ik\cdot x}$

- Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^2$

  $$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ik\cdot x} f(x)\,dx$$

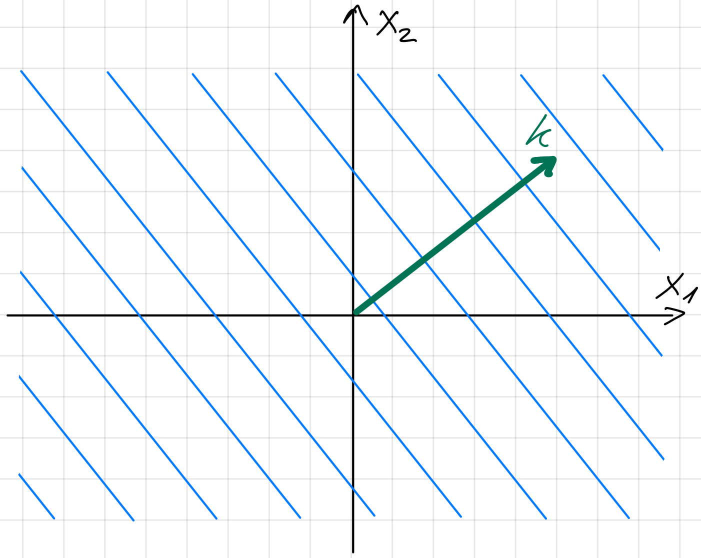
  \+ Faltungsformel
  \+ Plancherel-Formel

- Rücktransformation

  $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ik\cdot x}\hat{f}(k)\,dk$$

6. Radon-Transformation

Aufgabe: berechne $\hat{f}(k)$ für $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$



Die Gleichung

$$k \cdot x = r \cdot |k|$$

beschreibt die blauen Geraden in der Ebene, senkrecht auf k im Abstand r vom Nullpunkt.

Sei e ein Einheitsvektor $e \cdot k = 0$.
Die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ik\cdot x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir\cdot|k|} f(rk^0 + te)\,dr\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir|k|} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(rk^0+te)\,dt}_{\text{Integral über eine blaue Gerade}}\,dr$$

Definition: Das innere Integral

$$(Rf)(k^0, r) = \int_{\mathbb{R}} f(rk^0+te)\,dt$$

heisst die Radon-Transformation

Die Radon-Transformierte ist eine Funktion von $k^0 \in S^1$ und $\mathbb{R}$, d.h. wir arbeiten jetzt in Polarkoordinaten.

<u>Anwendung</u>: Computer-Tomographie, MRI

Umkehrung der Radon-Transformation

$$
\begin{tikzcd}
f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \arrow[rr, "\text{Radon-Transformation}"] \arrow[d, shift left, "\mathcal{F}"] & & \mathcal{R}f : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \arrow[dll, "\text{Fourier bezüglich } r"] \arrow[ll, bend left, red] \\
\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \arrow[u, shift left, "\mathcal{F}^{-1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

kartesische Koordinaten

Polar-Koordinaten

$\rightarrow$ zeigt, dass die Radon-Transformation umkehrbar ist.

Bessere Methoden:
- Backprojection + Fourier
- algebraische Methoden