Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

1. Skalarprodukt

Inhalt

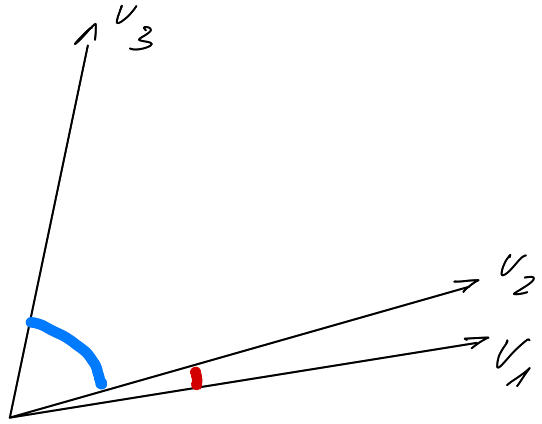
1. Vergleich von Vektoren 2
2. Vergleich von Zufallsvariablen 2
3. Vergleich von Funktionen 3
4. Skalarprodukt 5
5. Cauchy-Schwarz-Ungleichung 6
6. Dreiecks-Ungleichung 8
7. Polar-Identität 10
8. Normierte Räume 10
9. L^1- und L^2-Norm 12
10. Konvergenz in verschiedenen Normen 13
11. Probleme mit dem Integral 14
12. Hilbert-Raum 18
13. Hilbert-Basis 19
14. Komplexe Skalarprodukte 21
15. Ableitungen und Sobolev-Räume 23

1. Vergleich von Vektoren

Vektoren sind umso ähnlicher, je kleiner der Winkel zwischen ihnen ist:

Zwischenwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|\,|v_2|}$$



nahe bei 0: v_2 und v_3 ungefähr orthogonal.

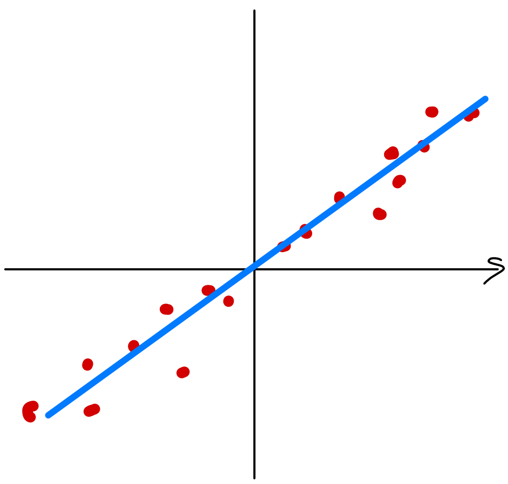
nahe bei 1: v_1 und v_2 ungefähr parallel

$\Longrightarrow$ Skalarprodukt liefert Information, wie ähnlich sich zwei Vektoren sind.

Berechnung: $u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

2. Vergleich von Zufallsvariablen

Zwei Zufallsvariablen sind sich umso ähnlicher, je besser die Korrelation zwischen ihnen ist



$$r = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}}$$

Umso besser, je näher r bei ± 1 ist.

Berechnung der Korrelation im Spezialfall $E(X) = E(Y) = 0$ (kann durch Translation immer erreicht werden) für Stichproben $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n$:

$$\operatorname{cov}(X,Y) \approx \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{Skalarprodukt!}$$

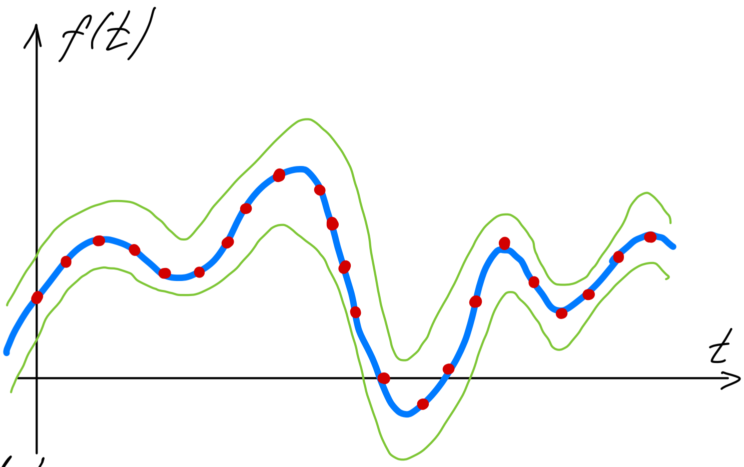
$$\sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \sqrt{\operatorname{var}(Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$\Longrightarrow$ Sieht genau gleich aus wie das Skalarprodukt von Vektoren!

3. Vergleich von Funktionen

Gegeben: Funktion

$$f: X \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$$

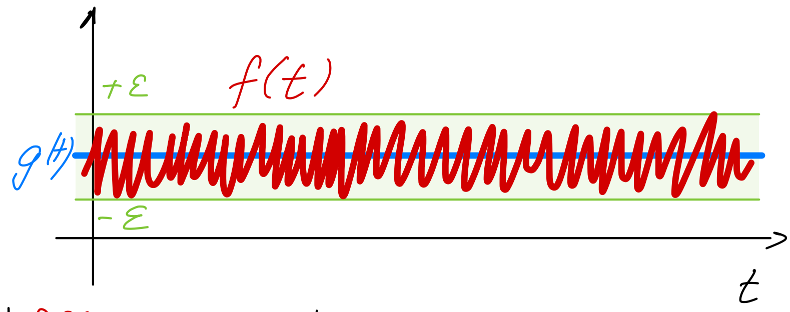


Naheliegende Vergleichsmethode: maximale Abweichung messen, d.h. Funktion muss im "grünen Bereich" bleiben.

$$\| f - g \| = \sup_{x \in X} | f(x) - g(x) |$$

"Supremum-Norm".

Nachteil: Funktionen können völlig versch. Charakter haben:



$$\|f-g\| = \sup_{t\in X} |f(t)-g(t)| < \varepsilon$$

f und g nahe im Sinn der Supremum-Norm aber von total verschiedenem Charakter.

1. Schritt: "Stichprobe" herstellen durch Auswertung an Abtastpunkten

$$f \rightsquigarrow \text{Vektor} \begin{pmatrix} f(t_1)\\ f(t_2)\\ \vdots \\ f(t_n)\end{pmatrix}, \quad g \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g(t_1)\\ g(t_2)\\ \vdots \\ g(t_n)\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Vergleich mit Kovarianz/Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot g(t_i)$$

3. Schritt: Abtastpunkte beliebig nahe beieinander:

$$\langle f,g\rangle = \int_X f(t)\,g(t)\,dt$$

Sieht aus wie ein Skalarprodukt, doch ist die Intuition von Vektoren übertragbar?

4. Skalarprodukt

Ziel: allgemeine Definition und Eigenschaften eines Skalarprodukts

a) Wovon?

Vektorräume: Mengen von Objekten, mit denen die Vektoroperationen ausgeführt werden können. z.B. $V = \mathbb{R}^n$, ZV, Funktionen

$$x, y \in V \implies x + y \in V$$
$$x \in V, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in V$$

b) Produkt: bilinear

d.h. die vertrauten Rechenregeln für Produkte sollen weiterhin gelten

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$
$$\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$$
$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle = \langle f, \lambda g \rangle$$

Diese Eigenschaft heisst bilinear.

c) Symmetrisch

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

d) Als "Länge" geeignet: positiv definit

$$\langle f, f\rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} \qquad \text{Norm}$$

$$\|f\| = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \qquad \text{definit}$$

Nur der Nullvektor hat Norm 0.

<u>Definition</u>: Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform

<u>Beispiele</u>:

- Skalarprodukt der Vektorgeometrie
- Kovarianz von Zufallsvariablen
- Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_X f(t)g(t)\,dt$ von Funktionen

5. Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Aus der Vektorgeometrie weiss man, dass $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, d.h.

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Gleichheit genau dann, wenn $\vec{u}, \vec{v}$ lin. abh. sind.

→ Diese Ungleichung gilt allgemein.

Satz: $\langle\,,\,\rangle$ ein Skalarprodukt, dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \qquad \text{(C-S)}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y lin. abh. sind.

Beweis: Berechne die Norm von $x+ty$ für $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \overset{(*)}{\leq} \|x+ty\|^2 = \langle x+ty, x+ty\rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2$$
$$= c + bt + at^2$$

$$c = \|x\|^2, \; b = 2\langle x,y\rangle, \; a = \|y\|^2$$

Das quadratische Polynom hat das Minimum beim Scheitel, also bei $t = -b/2a$. Der Wert des Polynoms für dieses t ist

$$0 \leq \|x\|^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{b^2}{4a^2}\|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle \frac{\cancel{2}\langle x,y\rangle}{\cancel{2}\|y\|^2} + \frac{4\langle x,y\rangle^2}{4\|y\|^{\cancel{4}\,2}} \cancel{\|y\|^2} \quad \Big|\cdot \|y\|^2$$

$$0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle^2 + \langle x,y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2$$

$$\Longrightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Longrightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

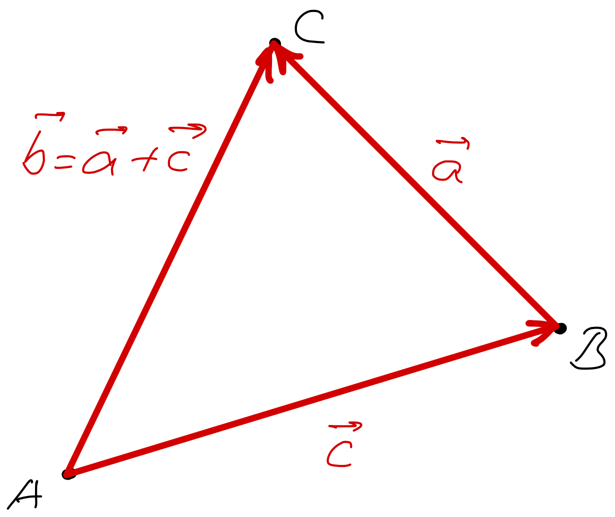
Gleichheit tritt ein, wenn (*) eine Gleichheit wird, also

$$\|x+ty\|=0 \implies x+ty=0 \implies x,y \text{ lin. abh.}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist die Basis für viele andere Ungleichungen.

6. Dreiecksungleichung



Geometrie:

$$|AC| \leq |AB| + |BC|$$

Vektorgeometrie:

$$|\vec{a}+\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{c}|$$

Allgemein:

<u>Satz</u>: V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\,,\,\rangle$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Dann gilt die Dreiecksungleichung

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

für alle $x,y \in V$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = ty$, $t \geq 0$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \quad \text{wegen } a \le |a| \\
&\le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\le \|x\|^2 + \|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \checkmark$$

Gleichheit genau dann, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

① Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungl.
d.h. $x = ty$

② $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ (aus 1. Ungleichung)

Aus ① und ② folgt

$$\underset{\overset{\shortparallel}{|\langle x,y\rangle|}}{\langle x,y\rangle} = \langle ty,y\rangle = t\langle y,y\rangle = t\underbrace{\|y\|^2}_{\ge 0}$$

$$\Longrightarrow t \ge 0 \qquad \square$$

<u>Folgerung</u>: die geometrische Intuition der Vektorgeometrie ist direkt auf Funktionen übertragbar.

7. Polaridentität

Das Skalarprodukt kann aus der Norm rekonstruiert werden.

<u>Satz:</u> Ist $\|\cdot\|$ eine Norm, die aus einem Skalarprodukt hervorgegangen ist, dann ist

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2.$$

Polar-identität

Beweis: Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

nach dem Skalarprodukt auflösen:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \qquad \square$$

8. Normierte Räume

Die Supremum-Norm entsteht <u>nicht</u> aus einem Skalarprodukt. Sie ist trotzdem eine Norm im folgenden Sinn:

<u>Definition:</u> V ein Vektorraum, $\|.\|: V \to \mathbb{R}$ heisst **Norm**, wenn gilt:

① Positiv definit: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

② Homogen: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

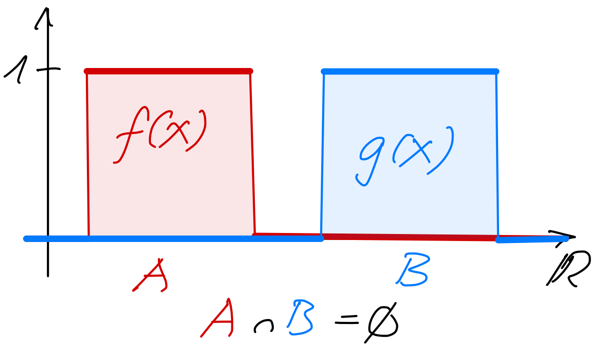
③ Δ-Ungleichung: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Für die Supremum-Norm gilt die Δ-Ungleichung:

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)|$$
$$\leq \sup_{x\in X} \left(|f(x)| + |g(x)|\right)$$
$$\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{y\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Die anderen Bedingungen für eine Norm sind klar.

<u>Beispiel:</u> Warum kann die Supremum-Norm nicht von einem Skalarprodukt herkommen?



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \\ g(x) = \begin{cases} 1 & x\in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)+g(x) = \begin{cases} 1 & x\in A\cup B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Normen: $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $\|f\pm g\| = 1$. Für diese Werte

$$\langle f, \pm g\rangle = \tfrac{1}{2}\|f\pm g\|^2 - \tfrac{1}{2}\|f\|^2 - \tfrac{1}{2}\|g\|^2 = -\tfrac{1}{2}$$
$$\parallel$$
$$\pm\langle f, g\rangle = \qquad\qquad = \mp\tfrac{1}{2}$$

Für das untere Vorzeichen folgt: $-\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$, ein Widerspruch! ⚡

9. L^1- und L^2-Norm

<u>Definition</u>: Für $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ ist die
L^2-Norm

$$\|f\|_2^2=\int_a^b|f(x)|^2\,dx,$$

dies ist die Norm, die zum Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

gehört. Die Menge der Funktionen, für die die L^2-Norm existiert ist der Raum

$$L^2_{\mathbb{R}}([a,b])=\left\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\;\middle|\;\int_a^b|f(x)|^2dx<\infty\right\}$$

Die stetigen Funktionen

$$C_{\mathbb{R}}([a,b])=C([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{ stetig}\}$$

sind alle in L^2: $\quad C([a,b])\subset L^2([a,b])$.

<u>Definition</u>: Die L^1-Norm ist

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Die Funktionen mit endlicher L^1-Norm bilden den Raum

$$L^1_{\mathbb{R}}([a,b])=\left\{f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\;\middle|\;\int_a^b|f(x)|\,dx<\infty\right\}$$

10. Konvergenz in verschiedenen Normen

- Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ d.h.
  Fehler $\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x$,
  Fehler wird gleichmässig über das ganze Intervall kleiner
  $\longrightarrow$ gleichmässige Konvergenz
  $\Rightarrow$ $f(x)$ ist stetig (falls f_n stetig)

- Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_1$: Konvergenz im Mittel

- Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_2$: Konvergenz im quadr. Mittel

  Harmonische Analysis

Beispiel: $f_n : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : f_n(x) = x^{-1-1/n}$
konvergiert punktweise gegen die Funktion $x^{-1} = 1/x$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ in } L^2 : \int_1^\infty |f(x)|^2\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{x^{-1}}{2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ in } L^1 : \int_1^\infty |f(x)|\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^\infty = \infty$$

d.h. f_n konvergiert gleichmässig

f_n konvergiert im quadratischen Mittel

f_n konvergiert nicht im Mittel $\circ$

11. Probleme mit dem Integral

Das Riemann-Integral funktioniert nicht gut zusammen mit Grenzwerten.

Beispiel: $q_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$

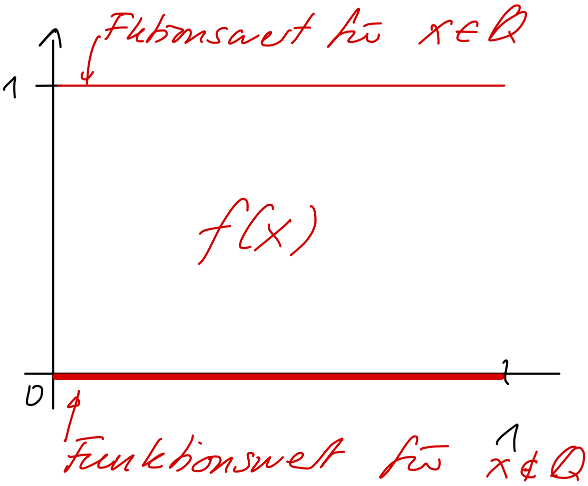
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = q_k \text{ für ein } k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n$ ist an endlich vielen Stellen $\neq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$

f_n konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



hat Riemann-Summen

$$\overline{I} = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\max_{x_i \leq \xi \leq x_{i+1}} f(\xi)}_{=1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = 1$$

$$\underline{I} = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\min_{x_i \leq \xi \leq x_{i+1}} f(\xi)}_{=0} \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0$$

für jede Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$.

Somit existiert das Riemann-Integral nicht!

<u>Problem:</u> Grenzwerte können abzählbar ∞-viele "Problemstellen" entwickeln.

Gesucht: Integralbegriff, der mit Grenzwerten besser umgehen kann $\rightsquigarrow$ Lebesgue-Integral.

<u>1. Schritt:</u> Messbarkeit. Ziel: alle Mengen bestimmen, von denen man den Inhalt bestimmen kann:

- offene Intervalle (a,b) sind messbar und haben Inhalt $\lambda((a,b)) = b-a$
- Differenzmengen sind messbar.
- Abzählbare disjunkte Vereinigungen sind messbar: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

  $$\Rightarrow \lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$
- + einiges an Arbeit $\Rightarrow$ messbare Mengen und ein Mass λ, welches jeder messbaren Menge einen Inhalt zuteilt.

Beispiel: $\varepsilon > 0$, um jede rationale Zahl q_n einen Kreis U_n mit Durchmesser $\varepsilon 2^{-n}$, haben zusammen

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon \quad \text{bel. klein}$$

$$\Rightarrow \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) < \varepsilon \ \forall \varepsilon \Rightarrow \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0 \qquad \square$$

Nullmenge: messbare Menge A mit $\lambda(A)=0$.
Dürfen im Integral keine Rolle spielen

<u>2. Schritt</u>: Stufenfunktionen:
Indikatorfunktionen von A messbar

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Linearkombinationen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{A_k}(x)$$

haben Integral: $\displaystyle\int f(x)\,d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda(A_k)$

<u>3. Schritt</u>: Messbare Funktionen (d.h. $\{x \mid f(x) \le a\}$ messbare Menge für alle a) durch Stufenfunktionen approximieren: $f_n \to f$, mit Integral

$$\int f(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,d\lambda(x)$$

+ viel Arbeit um zu zeigen, dass das auf konsistente Art möglich ist.

<u>4. Schritt</u>: Eigenschaften des neuen Integrals

<u>Satz</u> (dominierte Konvergenz): $|f_n| \le g$, f_n und g integrierbar, $f_n \to g \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,d\lambda(x) = \int g(x)\,d\lambda(x)$

Mit diesem neuen Lebesgue-Integral sind die Probleme des Riemann-Integrals gelöst.

Wichtig: nichts Neues für stetige Funktionen

Neue Schwierigkeit: Funktionen können sich in ∞ vielen Punkten unterscheiden und trotz das gleiche Integral haben:

<u>Definition</u>: f und g heissen **fast überall gleich**

$$f(x) = g(x) \quad \text{f.ü.}$$

wenn $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist

Mit dem Lebesgue-Integral kann man Fkt nur bis auf eine Nullmenge bestimmen.

$$\mathcal{L}^1(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ Lebesgue-integrierbar} \}$$

$\Longrightarrow$ viele Funktionen f_1, f_2 mit

$$\int |f_1(x) - f_2(x)| \, d\lambda(x) = \|f_1 - f_2\|_1 = 0$$

Alle solchen Funktionen in eine Klasse zusammenfassen:

$$L^1(X) = \{ \text{Klasse von Fkt } f \in \mathcal{L}^1, \text{ die sich nur in eine Nullmenge unterscheiden} \}$$

analog $\mathcal{L}^2(X) \rightsquigarrow L^2(X)$

12. Hilbertraum

Ziel: Untersuchung von Funktionen mit Hilfe des Skalarproduktes in $L^2(X)$

Definition: Prähilbertraum = Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle u,v\rangle$.

Beispiel: $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt

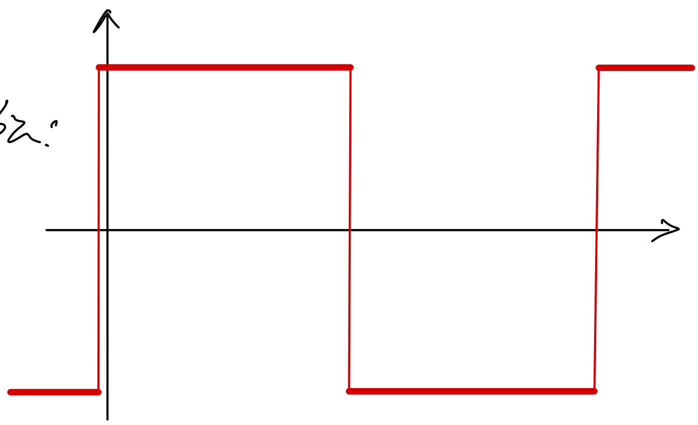
Beispiel: $C_{\mathbb{R}}(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
mit Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_X f(x)\,g(x)\,dx$$

Schwierigkeit: wir möchten Reihen bilden können, z.B.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right)$$

konvergiert in L^2 gegen die Rechteckfunktion:



Partialsumme in $C_{\mathbb{R}}(X)$, aber Grenzfkt nicht mehr

Definition: Hilbert-Raum = Prähilbertraum, in dem jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

Beispiel: $L^2(X)$ (mit Hilfe der dom. Konvergenz) O

Beispiel: $\ell^2 = \{ (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$

(quadratsummierbare Folgen) bilden einen Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \qquad \text{O}$$

13. Hilbert-Basis

In einem endlichdimensionalen Vektorraum kann man mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine o.n. Basis aus n Vektoren finden.

Definition: Eine orthonormierte Folge $b_0, b_1, \dots$ von Vektoren $b_i \in H$ Hilbert-Raum,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \; i, j \in \mathbb{N}$$

heisst Hilbertbasis, wenn sich jedes $v \in H$ beliebig genau durch die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle b_i, v \rangle \cdot b_i$$

approximieren lässt.

Beispiel: ℓ^2 mit Standardbasisvektoren O

Beispiel: $L^2([-\pi, \pi])$ mit $\sin kx, \cos kx, 1$ O

Ein solcher Hilbert-Raum heisst auch separabel. Es gibt nicht separable Hilbert-Räume, für uns nicht relevant.

<u>Satz</u>: Alle separablen Hilberträume sind isometrisch zu ℓ^2.

Beweis: H ein separabler Hilbertraum mit Hilbert-Basis $b_0, b_1, \dots$. Konstruiere die Abbildung:

$$\mathcal{F} : H \longrightarrow \ell^2 : v \longmapsto (\langle b_0, v\rangle, \langle b_1, v\rangle, \dots)$$

$$\mathcal{F}^{-1} : (x_0, x_1, \dots) \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, b_i$$

ist eine Isometrie

$$\|v\|^2 = \Big\|\sum_{i=0}^{\infty} \langle b_i, v\rangle\, b_i\Big\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle b_i, v\rangle|^2 = \|\mathcal{F} v\|^2$$

Diese Gleichung heisst auch Parseval-Plancherel-Identität. $\square$

D.h. Fourier-Theorie macht aus Funktionen Koeffizientenfolgen in einem "Standard-ℓ^2", mit denen sich leichter rechnen lässt.

14. Komplexe Skalarprodukte

Ziel: mit komplexen Zahlen arbeiten können, vor allem wegen komplexen Eigenwerten

Schwierigkeit: Linearität gibt keine Norm

$$\langle iv, iv\rangle = i^2\langle v,v\rangle = -\langle v,v\rangle < 0 \quad ⚡$$

Statt "bilinear" ⟶ "sesquilinear":

Definition: Eine sesquilineare[1] Funktion erfüllt

$$\underbrace{\begin{aligned}\langle f_1+f_2, g\rangle &= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2, g\rangle\\ \langle \lambda f, g\rangle &= \bar\lambda\langle f,g\rangle\end{aligned}}_{\text{konj. linear im ersten Argument}} \qquad \underbrace{\begin{aligned}\langle f, g_1+g_2\rangle &= \langle f,g_1\rangle+\langle f,g_2\rangle\\ \langle f,\lambda g\rangle &= \lambda\langle f,g\rangle\end{aligned}}_{\text{linear im zweiten Argument}}$$

Symmetrie funktioniert auch nicht mehr:

$$\begin{aligned}\langle iu, v\rangle &= -i\langle u,v\rangle = -i\langle u,v\rangle\\ \| \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \nparallel\\ \langle v, iu\rangle &= i\langle v,u\rangle = i\langle u,v\rangle\end{aligned} \Rightarrow \text{konj. symmetrisch, hermitesch}$$

Konjugation nötig!

Definition $\langle\ ,\ \rangle$ heisst konjugiert symmetrisch oder hermitesch, wenn $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}\ \forall u,v$.

$$\Rightarrow \langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle} \Rightarrow \langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$$

---

[1] lateinisch: "einein halb linear"

Definition: Eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform heisst ein komplexes Skalarprodukt

Norm: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

Alle Eigenschaften lassen sich übertragen:

Satz (Cauchy-Schwarz): $\langle\, ,\, \rangle$ komplexes Skalarprodukt:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Satz (Δ-Ungleichung): $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Satz (Polaridentität):

$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$$
$$\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\|x-iy\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$$

Beispiel: $\ell^2_{\mathbb{C}} = \{ (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \}$
mit Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{x_k}\, y_k .$$

Beispiel: $L^2_{\mathbb{C}}(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \int_X |f(x)|^2 \, d\lambda(x) < \infty \}$
mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, d\lambda(x).$$

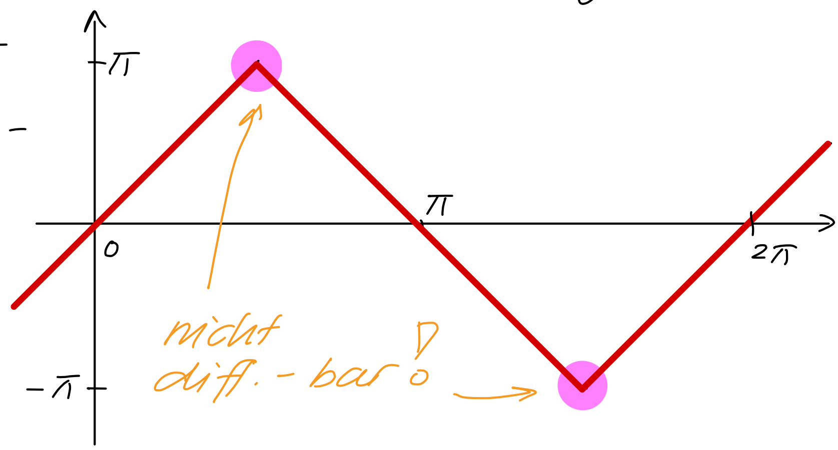
15. Ableitungen und Sobolev-Räume

<u>Dilemma</u>: man möchte Fourier-Reihen zur Lösung von Differentialgleichungen verwenden, aber die Grenzfunktion ist möglicherweise nicht differenzierbar:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right)$$

hat stetige Partialsummen, die gleichmässig gegen die Dreiecksfunktion (Bild) konvergieren.

$\Longrightarrow$ nicht diff.-bar!



<u>Ursache</u>: Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots\right)$$

hat stetige Partialsummen, aber konvergiert an den Stellen $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ <u>nicht</u> gleichmässig!

<u>Lösung</u>: eine Norm verwenden, welche Ableitungen berücksichtigt, zum Beispiel

$$C^k(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid k \text{ mal stetig diffbar}\}$$

mit Norm $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ k\le n}} \left|\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right|$

Gibt es ein Skalarprodukt, welches Ableitungen berücksichtigt?

1. $\langle\ ,\ \rangle_1$, $\langle\ ,\ \rangle_2$ positive, symmetrische Bilinearform
$\Rightarrow$ $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ positive, symmetrische Bilinearform.

2. $\langle\ ,\ \rangle_1$ Skalarprodukt, $\langle\ ,\ \rangle_2$ positiv, symmetrisch
$\Rightarrow$ $\langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$ Skalarprodukt

3. Norm: $\langle x,x\rangle_1 + \langle x,x\rangle_2 = \|x\|_1^2 + \|x\|_2^2$
$\Rightarrow$ durch geeignete zusätzliche Terme $\langle\ ,\ \rangle_2$ kann Konvergenz der Ableitungen erzwungen werden

Beispiel: Prähilbertraum

$$H_0 = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ stetig diffbar} \\ \int_X |f(x)|^2 dx < \infty,\ \int_X |f'(x)|^2 dx < \infty \end{array} \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_X f(x)g(x)\,dx + \int_X f'(x)g'(x)\,dx$$

d.h. Konvergenz in der Norm

$$\|f\|^2 = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}$$ bedeutet

Konvergenz von f im quadr. Mittel

Konvergenz von f' im quadr. Mittel