Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

8. Radon-Transformation

Inhalt

1. Die Gruppe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mit der Addition ist eine abelsche Gruppe, man erwartet also eine zugehörige Fourier-Theorie, die mit der üblichen Vorgehensweise aus der Gelfand-Theorie gewonnen werden kann. Dazu müssen erst die Homomorphismen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ bestimmt werden

<u>Satz</u>: Jeder stetige Homomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ hat die Form

$$\varphi(x,y) = e^{i(kx+ly)}, \quad k, l \in \mathbb{R}$$

Beweis: Die partielle Funktion $x \longmapsto \varphi(x,0)$ ist ein Homomorphismus $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, nach früheren Erkenntnissen ist $\varphi(x,0) = e^{ikx}$. Auf die gleiche Art folgt $\varphi(0,y) = e^{ily}$. Aus der Homomorphismus-Eigenschaft folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \varphi(x+0, 0+y) = \varphi(x,0)\varphi(0,y) \\ &= e^{ikx} e^{ily} = e^{i(kx+ly)}, \end{aligned}$$

wie behauptet $\square$

Das Argument im Beweis des Satzes funktioniert für ein beliebiges Produkt abelscher Gruppen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_1 \times \dots \times G_2, \mathbb{C}^*) \Rightarrow$

$$\varphi(g_1, \dots, g_n) = \varphi_1(g_1) \cdot \dots \cdot \varphi_n(g_n)$$

mit $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(G_i, \mathbb{C}^*)$.

<u>Satz</u>: Die duale Gruppe von $G = \mathbb{R}^2$ besteht aus den Paaren $(k, \ell) \in \mathbb{R}^2$, also ist die duale Gruppe $\mathbb{R}^2 \cong \hat{G} = \widehat{\mathbb{R}^2}$.

Zugehörige Fourier-Theorie für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist

$$(\mathcal{F}f)(k, \ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx + \ell y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

mit der Umkehrtransformation

$$(\mathcal{F}^{-1} g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(kx + \ell y)} g(k, \ell)\, dk\, d\ell.$$

für $g : \widehat{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{C} : (k, \ell) \longmapsto g(k, \ell)$.

Die Faktorisierung der Homomorphismen bedeutet auch, dass die Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^2$ zurückgeführt werden kann auf eindimensionale Fourier-Transformationen.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, dann ist die Fourier-Transformierte:

$$\hat{f}(k,l) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} f(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ily} f(x,y)\, dy}_{(\mathcal{F}_y f(x,\cdot))(l)}\, dx$$

- Das innere Integral ist die eindimensionale Fourier-Transformierte der partiellen Funktion $y \longmapsto f(x,y)$ für festes x.

- Das äussere Integral ist die eindimensionale Fourier-Transformation der Funktion

$$x \longmapsto (\mathcal{F} f(x,\cdot))(l)$$

Die gleiche Faktorisierung ist auch für Fourier-Umkehr möglich.

2. Die Gruppe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$

Die Homomorphismen $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ sind Homomorphismen $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ derart, dass

$$\varphi(x,y) = \varphi(x+2\pi, y) = \varphi(x, y+2\pi).$$

Setzt man $x=0$ oder $y=0$ folgt, dass die partiellen Funktionen $x \longmapsto \varphi(x,0)$ und $y \longmapsto \varphi(0,y)$ Homomorphismen $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ sind. Darüber ist bereits bekannt, dass

$$\varphi(x,0) = e^{ikx} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi(0,y) = e^{ily} \quad \text{mit } l \in \mathbb{Z}$$

sein muss. Insbesondere ist $\varphi(x,y) = e^{i(kx+ly)}$ mit $k,l \in \mathbb{Z}^2$ oder

$$\widehat{(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2} = \mathbb{Z}^2.$$

Fourier-Transformation:

$$\hat{f}(k,l) = (\mathcal{F}f)(k,l) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Fourier-Reihe.

$$f(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}$$

Auch hier ist die Faktorisierung in eindimensionale Transformation möglich.

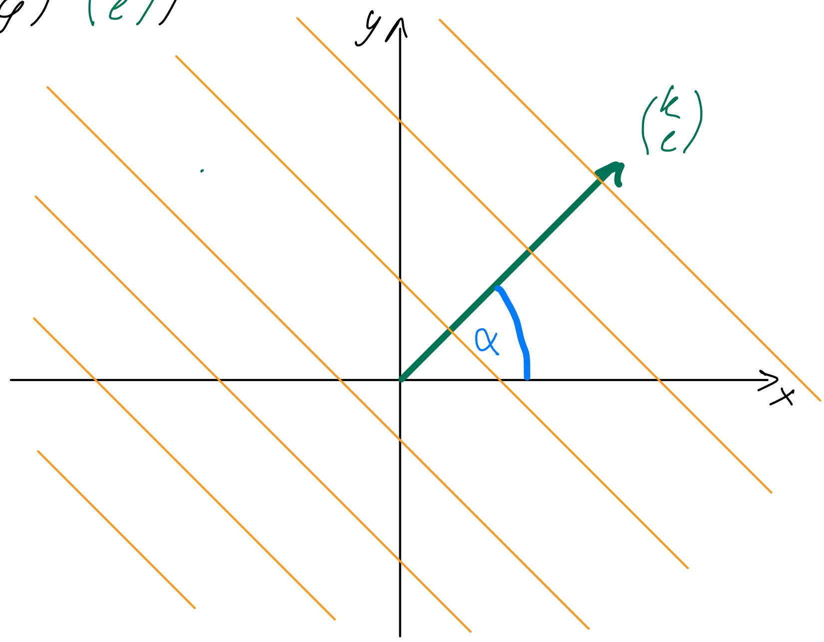
Dasselbe gilt auch für die diskrete Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\widehat{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Die Faktorisierung in eindimensionale Transformationen ermöglicht dank der schnellen Transformation die effiziente numerische Berechnung.

3. Integrale über Geraden

Der Homomorphismus $\varphi(x,y) = e^{i(kx+ly)}$ kann in Vektorform geschrieben werden:

$$\varphi(x,y) = \exp\left(i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\right)$$

Der Exponent ist konstant entlang Geraden, die auf $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.



Die Transformation

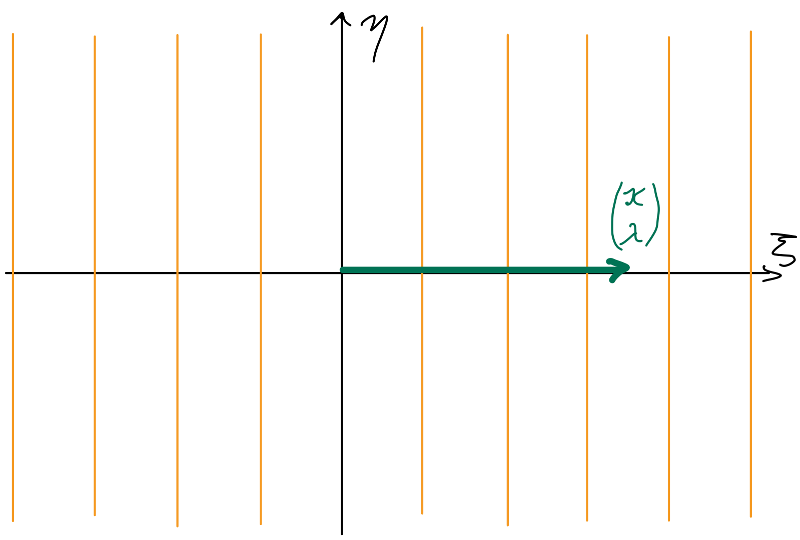
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{D_\alpha} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

dreht Funktion von (x,y) in Funktionen auf der ξ-η-Ebene um den Winkel $-\alpha$.

Der gedrehte k-Vektor ist

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = D_\alpha \begin{pmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{pmatrix} = D_\alpha \begin{pmatrix} \varkappa \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k = \varkappa\cos\alpha, \quad l = \varkappa\sin\alpha$



Der Faktor $\exp i\binom{x}{y}\cdot\binom{k}{l} = \exp i\binom{\xi}{\eta}\cdot\binom{\kappa}{\lambda} = e^{i\kappa\xi}$ hängt nicht mehr von η ab.

Da $\det D_\alpha = 1$, ändert das Integral nicht, also

$$(\mathcal{F}f)(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\kappa\xi} f(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\ \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)\,d\xi\,d\eta$$

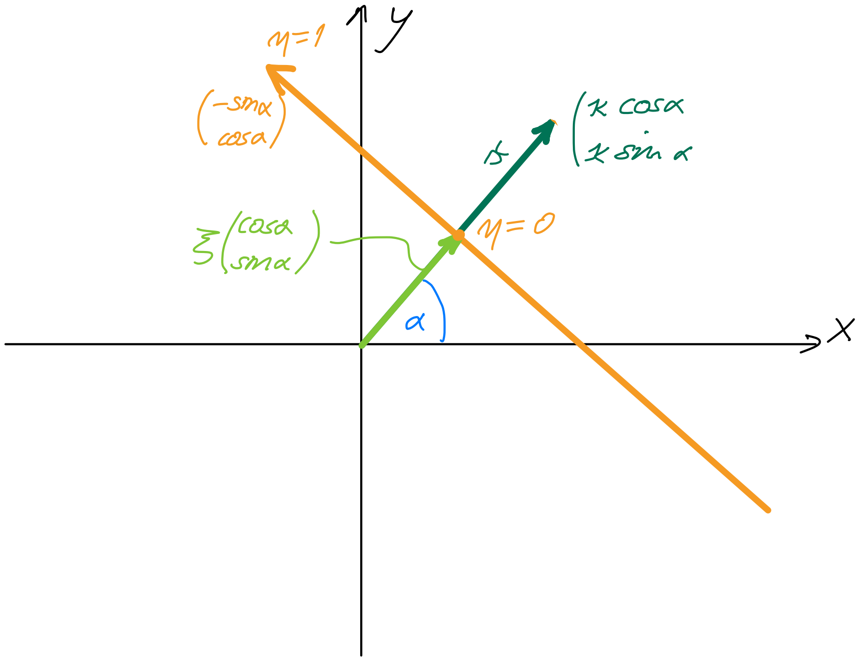
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\ \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)\,d\eta}_{g(\xi)}\ d\xi$$

Dies ist eine eindimensionale Fourier-Transformation der Funktion $g(\xi)$, dem Integral der Funktion f über die Menge

$$\left\{ \xi\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \eta\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha} \;\middle|\; \eta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist eine Gerade mit Stützvektor $\xi\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und Richtungsvektor $\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

κ ist der Betrag des Vektors $\binom{k}{l}$, α ist der Polarwinkel. (κ, α) sind als die Polarkoordinaten des Vektors $\binom{k}{l}$



Der Vektor

$$\xi\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \xi \cdot \frac{1}{\kappa}\binom{k}{l}$$

liegt auf der von $\binom{k}{l}$ aufgespannten Geraden. Der Richtungsvektor

$$\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ist dazu senkrecht. $g(\xi)$ ist also das Integral von f über die orange Gerade

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \eta\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) d\eta$$

Die 2D-Fourier-Transformierte von f kann also mit nur einer 1D-Fourier-Transformierten über Werte von Integralen über Geraden berechnet werden.

4. Radon-Transformation

<u>Definition:</u> $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ist eindeutig festgelegt durch $\omega \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$: $p = s\omega$. Das Paar (s, ω) definiert auch die Hyperebene

$$E(s,\omega) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \omega = s \}$$

durch den Punkt $s\omega$ senkrecht auf ω.

Für $n=2$ beschreibt das Paar (s,ω) einen Punkt von $\mathbb{R}^n$ durch Polarkoordinaten. Mit den Notationen der Definition lassen sich die Integrale über Geraden von Abschnitt 3 auf Integrale über Hyperebenen verallgemeinern.

<u>Definition:</u> Die Radon-Transformation einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine Funktion $\mathcal{R}u : \mathbb{R} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\mathcal{R}u\,(s,\omega) = \int_{E(s,\omega)} u \, d\mu$$

wobei μ das Flächenelement der Ebene $E(s,\omega)$ ist.

5. Radon- und Fourier-Transformation

Sei $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, dann kann die Fourier-Transformation durch die Radon-Transformation ausgedrückt werden.

<u>Satz</u>: Die Fourier-Transformierte von $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist

$$(\mathcal{F}u)(k_0\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_0 r} \mathcal{R}u(r,\omega)\, dr$$

Beweis: Zu $k \in \mathbb{R}^n$ sei $k = k_0\omega$, $\omega \in S^{n-1}$

$$(\mathcal{F}u)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} u(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik_0\omega\cdot x} u(x)\, dx$$

$$(\mathcal{F}u)(k_0\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_0 r} \underbrace{\int_{E(r,\omega)} u \, d\mu}_{\mathcal{R}u(r,\omega)}\, dr$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_0 r} \mathcal{R}u(r,\omega)\, dr$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Der Satz ist auch bekannt als "central slice theorem".

Aus dem Satz lassen sich zwei interessante Folgerungen ziehen.

<u>Korollar 1</u>: Die Radon-Transformation ist umkehrbar.

Beweis: Die Fouriertransformation ist mit der Fourier-Umkehrformel umkehrbar. Aus $\mathcal{F}f$ kann also f eindeutig bestimmt werden. Da aber $\mathcal{F}f$ aus $\mathcal{R}f$ bestimmt werden kann, muss man auch f eindeutig aus $\mathcal{R}f$ bestimmen können $\square$

<u>Korollar 2</u> Umkehrformel für die Radon-Transformation:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \int_{\mathbb{R}} e^{-i|k|s} \mathcal{R}u(s, k^0)\, ds\, dk$$

Beweis: Mit der Formel des Satzes berechnen wir die Fourier-Transformierte aus der Radon-Transformierten für den Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^n$ mit $k = |k| \cdot k^0$, $k^0 \in S^{n-1}$.

$$(\mathcal{F}u)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i|k|s} \mathcal{R}u(s, \omega)\, ds.$$

Mit der Fourier-Umkehrformel bekommt man jetzt:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} (\mathcal{F}u)(k)\, dk$$

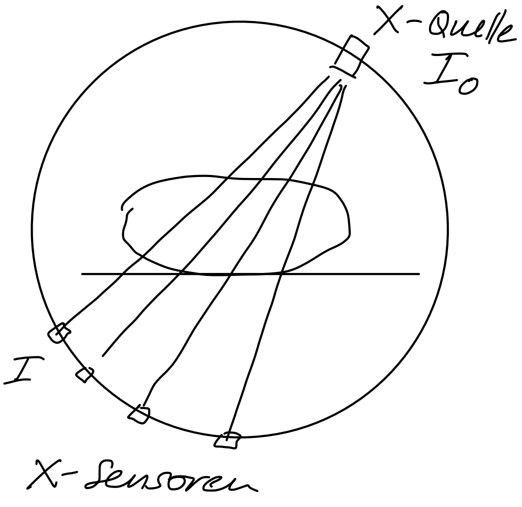
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-i|k|s} \mathcal{R}u(s,\omega)\, ds\, dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} \int_{\mathbb{R}} e^{-i|k|s} \mathcal{R}u(s,\omega)\, ds\, dk$$

$\square$

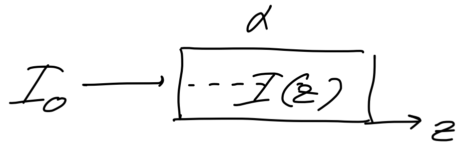
6. Anwendung: CAT und MRI

Ein CAT-Scanner misst die Abschwächung der Röntgen-Strahlung entlang einer Geraden.



In einem Material mit Absorbtionskoef. α nimmt die empfangene exponentiell ab:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$



oder

$$I'(z) = -\alpha I(z)$$

In einem inhomogenen Material ist α nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von z, also

$$I'(z) = -\alpha(z) I(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I'(z)}{I(z)} = -\alpha(z)$$

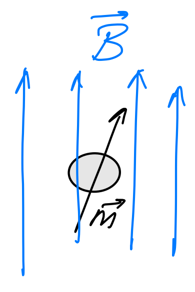
Integrieren liefert

$$\log \frac{I(z)}{I_0} = -\int_{z_0}^{z} \alpha(z)\, dz$$

d.h. der Logarithmus des Intensitätsverhältnisses ist das Integral des Absorbtions-koeffizienten entlang des Strahls. Der CAT-Scanner ermittelt als im Wesentlichen die Radon-Transformierte des Röntgen-Absorbtions-koeffizienten.

Ein MRI-Scanner erzeugt ein inhomogenes Magnetfeld. Das Feld einen vorgegebenen Wert nur entlang einer Ebene, deren Lage im Raum beliebig geändert werden kann.

Paralleler oder antiparalleler Spin von H-Kernen im Magnetfeld sind Zustände mit verschiedener Energie.



Die Atome können dazu gebracht werden, den Zustand zu wechseln durch HF-Photonen mit der Energiedifferenz. Es werden daher immer nur Protonen in einer Ebene angeregt. Messung der Absorbtion oder der Ausstrahlung bei der Rückkehr in den Grundzustand misst daher die Zahl der Protonen in der Ebene bzw. in einer dünnen Schicht um die Ebene. So wird es möglich, die Radon-Transformierte der Protonendichte zu messen. Durch Rücktransformation kann die Protonendichte errechnet und zwei- oder dreidimensional visualisiert werden.

Die Resonanzfrequenz der H-Kerne hängt von der chemischen Nachbarschaft ab. Durch geeignete Wahl der Frequenz können daher Atomkerne in spezifischen Positionen in einem Molekül gemessen werden.

7. Radon-Transformation und Ableitungen

Sei $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\omega = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S^{n-1}$ der erste Einheitsvektor. Dann ist die Radon-Transformierte gegeben durch

$$\mathcal{R}u(s,\omega) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

Damit das Integral immer existiert, nehmen wir zusätzlich an, dass u kompakten Träger hat.

Ziel: Berechnung der Radon-Transformierten der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

$$\left(\mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)(s,\omega) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial s}(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}u(s,\omega)$$

$$\left(\mathcal{R}\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right)(s,\omega) = \frac{\partial^k}{\partial s^k} \mathcal{R}u(s,\omega)$$

$$\left(\mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)(s,\omega) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_k}(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x_k}(s, x_2, \ldots, x_n)\, dx_k \cdot dx_2 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \underbrace{u(s, x_2, \ldots, \infty, \ldots, x_n) - u(s, x_2, \ldots, -\infty, \ldots x_n)}_{=0 \quad \text{(kompakter Support)}} dx_2 \cdots \widehat{dx_k} \cdots dx_n$$

$$= 0$$

<u>Satz:</u> Sei $(s, \omega) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ und $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Sei $b \perp \omega$ ein Einheitsvektor. Dann ist die Radon-Transformierte der Richtungsableitungen:

$$(R\, D_\omega u)(s, \omega) = \frac{\partial}{\partial s} Ru(s, \omega)$$

$$(R\, D_b u)(s, \omega) = 0$$

Die Richtungsableitung in Richtung ist

$$D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Aus dem Satz folgt daher:

$$\left(R \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(s, \omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(R \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(s, \omega)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} Ru(s, \omega)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \left(\mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(s,\omega) = 0 \qquad (*)$$

Die Gleichungen (*) bedeuten, dass der Vektor v mit den Komponenten

$$v_i = \mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial x_i}(s,\omega)$$

orthogonal ist auf allen Vektoren b, er hat daher die Richtung ω. Da $|\omega|=1$ ist die Länge von v $|v| = v\cdot\omega$, d.h.

$$|v| = v\cdot\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial x_i}(s,\omega) = \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}u(s,\omega)$$

Die einzelnen Komponenten sind daher

$$v_i = |v|\cdot\omega_i = \omega_i \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}u(s,\omega).$$

<u>Satz</u>: $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger

$$\left(\mathcal{R}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} u\right)(s,\omega) = \omega_1^{\alpha_1}\cdots\omega_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s^{|\alpha|}}\mathcal{R}u(s,\omega)$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Multiindex-Notation: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdots \omega_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial^\alpha$$

Mit dieser Notation ist das Resultat des Satzes:

$$(\mathcal{R} D^\alpha u)(s,\omega) = \omega^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s^{|\alpha|}} \mathcal{R}u(s,\omega)$$

<u>Satz</u> (Radon-Transformation und Laplace-Operator): Für $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger gilt:

$$(\mathcal{R} \Delta u)(s,\omega) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}u(s,\omega)$$

Beweis: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ und daher

$$\begin{aligned}(\mathcal{R} \Delta u)(s,\omega) &= \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{R} \partial_i^2 u)(s,\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}u(s,\omega) \\ &= |\omega|^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}u(s,\omega) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}u(s,\omega)\end{aligned}$$

$\square$

Anwendung: Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \Delta u \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}^n$$

Radon-transformieren

$$(\mathcal{R}\, \partial_t^2 u)(s,\omega) = \partial_t^2 (\mathcal{R}u)(s,\omega)$$

$$(\mathcal{R}\Delta u)(s,\omega) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathcal{R}u)(s,\omega)$$

führt auf eine eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}, \quad U(t,s,\omega) = \mathcal{R}u(s,\omega)$$

für jede Richtung.

Interpretation:

Die Integrale über Ebenen $\perp \omega$ erfüllen die Gleichung einer Welle, die sich in Richtung ω ausbreitet.

$\rightsquigarrow$ Huygens-Prinzip

8. Radon-Inversion

Die Radon-Umkehrformel von Abschnitt 5 kann noch etwas schöner schreiben, indem man die n-dimensionale Fourier-Umkehr in (s,ω)-Koordinaten schreibt.

Das Integral über $\mathbb{R}^n$ soll als Integral über $\mathbb{R}\times S^{n-1}$ geschrieben werden. Zu diesem Zweck sei $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ und

$$\varphi : \mathbb{R}\times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n : (s,\omega) \longmapsto s\omega$$

Das Volumen-Element ist $s^{n-1}\,ds\,d\mu$, daher wird das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty s^{n-1} \int f(s\omega)\,d\omega\,ds$$

Angewendet auf die Fourier-Umkehr

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} f(k)\,dk = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty s^{n-1}\int_{S^{n-1}} f(s\omega)\,e^{is\omega\cdot x}\,d\omega\,ds$$

Für $f(k)=(\mathcal{F}u)(k)$ bedeutet dies

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty r^{n-1}\int_{S^{n-1}} \hat{f}(r\omega)\,e^{ir\omega\cdot x}\,d\omega\,dr$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_S e^{-irs} Ru(s,\omega)\, ds$$

$$\cdot\, e^{ir\omega\cdot x}\, d\omega\, dr$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir(s-\omega\cdot x)}$$

$$Ru(s,\omega)\, ds\, d\omega\, dr.$$

Leider verbessert diese Form das Verständnis für die Geometrie der Umkehrung der Radon-Transformation auch nicht. Dazu wird im nächsten Abschnitt die Rückprojektion untersucht.

Das Integral von 0 bis ∞ kann mit der Beobachtung $Ru(-s,\omega) = Ru(s,-\omega)$ in ein Integral über ganz $\mathbb{R}$ umgewandelt werden

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \ldots\, dr\, d\omega = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^{n-1}} \ldots\, dr\, d\omega$$

Eine weitere Vereinfachung ist für n ungerade möglich, siehe Abschnitt **??**

9. Rückprojektion

Sei $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\mathcal{R}u: \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{C}$ die Radon-Transformierte. Ändert man u in einer Umgebung eines Punktes y, dann ändert die Radon-Transformierte nur für Hyperebenen, die durch den Punkt bzw. seine Umgebung gehen, also für (s,ω) mit $|\omega \cdot y - s| < \varepsilon$. Genau die Funktionswerte $\mathcal{R}u(\omega \cdot y, \omega)$ enthalten also die Information über $u(y)$. Durch Integration über S^{n-1} erhält man einen Wert, der vor allem von $u(y)$ abhängt, aber auch einen gewichteten Mittelwert aller anderen Werte von u. Dabei integriert man aber zweimal über alle Werte, man muss das Integral also nur über eine Halbkugel S_+^{n-1} erstrecken.

<u>Definition:</u> Die Rückprojektion einer Funktion $f: \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$(\mathcal{R}^* f)(y) = \int_{S_+^{n-1}} f(\omega \cdot y, \omega)\, d\omega$$

$\mathcal{R}^*$ heisst auch die duale Transformation

Was ist $(\mathcal{R}^*\mathcal{R}u)(x) = \int_{S_+^{n-1}} \mathcal{R}u(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$?

Ableitungen von $\mathcal{R}^* v$, $v : \mathbb{R}\times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{R}^* v(x) = \int_{S_+^{n-1}} v(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{R}^* v(x) = \int_{S_+^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_i} v(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$$

$$= \int_{S_+^{n-1}} \omega_i \frac{\partial}{\partial s} v(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$$

Laplace-Operator:

$$\Delta \mathcal{R}^* v = \int_{S_+^{n-1}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2\right)}_{=1} \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$$

$$= \int_{S_+^{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(\omega\cdot x, \omega)\, d\omega$$

$$= \mathcal{R}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} v \qquad \Longrightarrow \quad \Delta \mathcal{R}^* = \mathcal{R}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

Zusammen mit dem Satz von S. 18 kann man

$$\Delta \mathcal{R}^*\mathcal{R}u = \mathcal{R}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}u = \mathcal{R}^*\mathcal{R}\, \Delta u$$

schliessen.

10. Umkehrformel und Rückprojektion

Ausgangspunkt ist Formel für die Fourier-Transformierte der Radon-Transformierten

$$\mathcal{F}u(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i|k|s} Ru(s, k^0)\, ds$$

Aus $u(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u(x)$ liest man ab

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} \mathcal{F}u(k)\, dk.$$

Das Integral über $\mathbb{R}^n$ kann in "Radon-Koordinaten" (s,ω) berechnet werden, wobei $r = |k|$ und $\omega = k^0$.

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{i(r\omega)\cdot x} \mathcal{F}u(r\omega)\, d\omega\, r^{n-1} dr$$

Man kann das Integral über S^{n-1} in zwei Integrale über die Halbkugeln S_+^{n-1} und $S_-^{n-1} = \{-\omega \,|\, \omega \in S_+^{n-1}\}$ zerlegen,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{S_+^{n-1}} e^{i(r\omega)\cdot x} \mathcal{F}u(r\omega)\, d\omega\, r^{n-1} dr$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{S_+^{n-1}} e^{i(-r\omega)\cdot x} \mathcal{F}u(-r\omega)\, d(-\omega)\, r^{n-1} dr$$

Die Spiegelung $S^{n-1} \to S^{n-1}: \omega \mapsto -\omega$ hat

Determinante $(-1)^{n-1}$, also ist $d(-\omega)=(-1)^n d\omega$.
Ausserdem ist $(-r)^{n-1}d(-r) = (-1)^n r^{n-1} dr$,
das zweite Integral wird daher zu

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{S_+^{n-1}} e^{i(-r\omega)\cdot x} \mathcal{F}u(-r\omega)\, d\omega\, (-r)^{n-1} d(-r)$$

Durch die Substitution $s=-r$ wird daraus

$$\frac{-1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^0 \int_{S_+^{n-1}} e^{i(s\omega)\cdot x} \mathcal{F}u(s\omega)\, d\omega\, s^{n-1}\, ds$$

Zusammen mit dem ersten Integral erhält man jetzt

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{S_+^{n-1}} e^{i(r\omega)x} \mathcal{F}u(r\omega)\, |r|^{n-1}\, d\omega\, dr$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S_+^{n-1}} \int e^{ir\omega\cdot x} \mathcal{F}u(r\omega)\, |r|^{n-1} dr \quad d\omega$$

Dies bedeutet dass die Fouriertransformierte mit $|r|^{n-1}$ multipliziert werden muss, anschliessend kann die Fourier-Inverse der r-Koordinate und schliesslich die Rückprojektion ermittelt werden

Notation: $g: \mathbb{R}\times S^{n-1} \to \mathbb{C}$, dann ist $\mathcal{F}_1$ die Fouriertransformierte der 1. Koordinate:

$$\mathcal{F}_1 g(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-its} g(s,\omega)\, ds$$

Satz (Gefilterte Rückprojektion):

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \mathcal{F}_1^{-1} \, |r|^{n-1} \, \mathcal{F}_1 \mathcal{R} u$$

Dabei ist mit $|r|^{n-1}$ der Multiplikationsoperator gemeint, der der Funktion $g : \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$|r|^{n-1} g : \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{C} : (r, \omega) \mapsto |r|^{n-1} g(r, \omega)$$

zuordnet.

Falls $n-1$ gerade ist, ist $|r|^{n-1}$ eine gerade Potenz von r, das Betragszeichen kann ignoriert werden. Den Multiplikationsoperator r^{n-1} kann man dann mit $\mathcal{F}_1$ vertauschen wodurch er zur $(n-1)$-ten Ableitung wird, als

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \mathcal{F}_1^{-1} r^{n-1} \mathcal{F}_1 \mathcal{R} u$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R} u$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R} u$$

Da $n-1$ gerade ist, ist der Differentialoperator

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Dieser Operator kann aber mit $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}^*$ vertauscht werden:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R} u$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \Delta^{(n-1)/2} \mathcal{R}^* \mathcal{R} u$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^* \mathcal{R} \Delta^{(n-1)/2} u$$

Das Auftreten eines Differentialoperators deutet an, dass die Bestimmung von u schlecht konditioniert ist. Schwache hochfrequente Komponenten von u werden übermässig verstärkt und erschweren die Rekonstruktion der Funktion u aus der Radon-Transformierten.

Für $n-1$ ungerade wird der Multiplikationsoperator $|r|^{n-1}$ unter der Fourier-Transformation nicht unmittelbar zu einem Ableitungsoperator, denn es gilt ja

$$\mathcal{F}_1 \frac{\partial}{\partial s} g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial s} g(s,\omega)\, e^{-isr}\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ir\, g(s,\omega)\, e^{-isr}\, ds$$

$$= ir\, \mathcal{F}_1 g = i\, \mathrm{sgn}(r)\, |r|\, \mathcal{F}_1 g.$$

11. Hilbert-Transformation

In der gefilterten Rückprojektion kommt der Multiplikationsoperator $|r|^{n-1}$ vor. Der Operator r^{n-1} wäre im Wesentlichen ein Differential-operator:

$$\mathcal{F}_1 \frac{\partial}{\partial s} g = i \operatorname{sign}(r) |r| \mathcal{F}_1 g$$

$$\mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1} g = i^{n-1} \operatorname{sign}(r)^{n-1} |r|^{n-1} \mathcal{F}_1 g$$

$$\Longrightarrow \quad |r|^{n-1} \mathcal{F}_1 g = (-i)^{n-1} \operatorname{sign}(r)^{n-1} \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1} g$$

Was ist der Operator, der zu $-i \operatorname{sign}(r)$ gehört? Oder: Welcher Operator $\mathcal{H}$ erfüllt

$$-i \operatorname{sign}(r) \mathcal{F}_1 g = \mathcal{F}_1 \mathcal{H} g \quad ?$$

Zunächst ist klar, dass $\mathcal{H}^2 = -I$, $\mathcal{H}^4 = I$ und daher $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^3$, der Operator $\mathcal{H}$ ist also invertierbar.

<u>Definition:</u> Die Hilbert-Transformation einer Funktion ist

$$(\mathcal{H}f)(t) = \frac{1}{\pi} \, PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{t-x} \, dx$$

Hauptwert: $$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{t-x} \, dx$$

Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{F}\mathcal{H}f = -i\,\operatorname{sign}(r)\,\mathcal{F}f$$

Damit kann man die gefilterte Rückprojektion schreiben als

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\,\mathcal{R}^*\mathcal{H}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1}\mathcal{R}u$$