

**Kollegium Spiritus Sanctus Brig**

**Maturaarbeit 2020/21**

# **Brown'sche Bewegung**

**Von der Petrischale  
an die Wallstreet**

Von:

**Pfammatter Sandro, 5B**

**Eingereicht im Fachbereich Mathematik**

Betreut durch:

**Dr. Blumenthal Adrian**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ziele . . . . .	1
1.2 Aufbau . . . . .	2
<b>2 Die Geschichte der Brown'schen Bewegung</b>	<b>3</b>
2.1 Die Entdeckung der Brown'schen Bewegung . . . . .	3
2.2 Die Beschreibung der Brown'schen Bewegung . . . . .	3
2.3 Quantitative Messung der Brown'schen Bewegung . . . . .	5
<b>3 Brown'sche Bewegung als Zufallsfunktion</b>	<b>6</b>
3.1 Definition Brown'sche Bewegung . . . . .	6
3.2 Eigenschaften der Brown'schen Bewegung . . . . .	7
3.2.1 Monotonie der Brown'schen Bewegung . . . . .	7
3.2.2 Differenzierbarkeit der Brown'schen Bewegung . . . . .	7
3.3 Konstruktionsarten . . . . .	8
3.3.1 Unabhängige normalverteilte Inkremente . . . . .	8
3.3.2 Einfacher Random Walk . . . . .	9
3.3.3 Lévy-Konstruktion . . . . .	10
3.3.4 Spektralzerlegung (Fourier-Reihe) . . . . .	12
<b>4 Brown'sche Fraktale</b>	<b>14</b>
4.1 Definition eines Brown'schen Fraktals . . . . .	14
4.2 Dimension und Konstruktion eines Brown'schen Fraktals . . . . .	15
4.2.1 Dimension eines Brown'schen Fraktals . . . . .	15
4.2.2 Konstruktion eines Brown'schen Fraktals . . . . .	16
4.3 Anwendungen und Weiterführungen . . . . .	16
4.3.1 Netzwerk-Verkehr und fraktales Gauss'sches Rauschen . . . . .	16
4.3.2 Brown'sche Oberflächen . . . . .	17
<b>5 Brown'sche Bewegung im Finanzwesen</b>	<b>19</b>
5.1 Vom Ein-Perioden-Modell zum Black-Scholes-Modell . . . . .	19
5.1.1 Einführung endlicher Perioden-Modelle . . . . .	19
5.1.2 Das Black-Scholes-Modell als Grenzwert endlicher Perioden-Modelle . . . . .	21
5.2 Das Black-Scholes-Modell . . . . .	22
5.2.1 Eigenschaften des Black-Scholes-Modell . . . . .	22

5.2.2 Berechnung des Payoffs einer europäischen Call-Option . . . . .	23
<b>6 Schlussfolgerung</b>	<b>25</b>
6.1 Erkenntnisse . . . . .	25
6.2 Ausblick . . . . .	26
<b>A Begriffserklärungen und Definitionen</b>	<b>27</b>
A.1 Kapitel 3: Brown'sche Bewegung als Zufallsfunktion . . . . .	27
A.1.1 Gauss'sche Normalverteilung . . . . .	27
A.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum . . . . .	28
A.2 Kapitel 4: Brown'sche Fraktale . . . . .	30
A.2.1 Definition eines Fraktals . . . . .	30
A.2.2 Dimensionen von Fraktalen . . . . .	30
A.3 Kapitel 5: Brown'sche Bewegung im Finanzwesen . . . . .	33
A.3.1 Die Mathematik des Finanzwesens . . . . .	33
A.3.2 Grundbegriffe der Finanzmathematik . . . . .	34
<b>B Programmcodes zu den Konstruktionsarten</b>	<b>37</b>
B.1 Normalverteilte unabhängige Inkremente . . . . .	37
B.2 Random Walk . . . . .	38
B.3 Lévy-Konstruktion . . . . .	39
B.4 Spektralzerlegung (Fourierreihe) . . . . .	40
B.5 Brown'sche Fraktale . . . . .	41
B.6 Brown'sche Oberfläche . . . . .	42
B.7 Black-Scholes-Modell . . . . .	43
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>44</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>46</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>47</b>
<b>Authentizitätserklärung</b>	<b>49</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

„One of the things I like about doing science, the thing is the most fun, is coming up with something that seems ridiculous when you first hear it but finally seems obvious when you’re finished.“

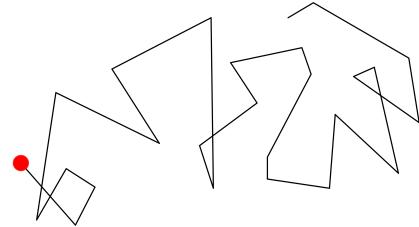


Abbildung 1: Brown’sche Bewegung eines Teilchens.

Dies ist ein Zitat von Fischer Black, der in Zusammenarbeit mit Myron Scholes eines der wichtigsten Modelle zur Simulation von Aktienkursen, das Black-Scholes-Modell, entwickelte (Raptis Rare Books, [24]).

Eine direkte Verbindung zwischen einem Experiment eines Botanikers im 19. Jahrhundert und einem Wirtschaftsmodell erscheint im ersten Augenblick bizarr, vielleicht sogar etwas albern. Doch hinter dieser Verbindung steckt so viel Interessantes aus allen Bereichen der Wissenschaft. Einen solchen Zusammenhang über zahlreiche Fachbereiche zu erarbeiten kann tatsächlich zu den schönsten Dingen der Naturwissenschaften gezählt werden. Und vielleicht ist es sogar offensichtlich, dass eine zufällige Bewegung von Teilchen als Ideengeber für einen stochastischen Prozess dient, der genau diese Zufälligkeit auszudrücken vermag. Ist es nicht sogar naheliegend, diese Unsicherheit der Bewegung auch in eine Unsicherheit eines Aktienkurses implementieren zu können? Möglicherweise, doch dazu muss die Brown’sche Bewegung erst genauer und vor allem aus den verschiedensten Blickwinkeln betrachtet werden. Die Motivation dieser Arbeit ist genau dies, einen Einblick in die Welt der Brown’schen Bewegung zu ermöglichen.

### 1.1 Ziele

Diese Arbeit befasst sich mit der Brown’schen Bewegung. Diese ist sowohl ein physikalischer als auch ein stochastischer Prozess. Das erste konkrete Ziel ist die Definition der Brown’schen Bewegung als Zufallsfunktion und die Diskussion ihrer mathematischen Eigenschaften und Konstruktionsmethoden. Weiter soll diese Definition zu den Brown’schen Fraktalen ausgeweitet werden und ein Einblick in die fraktale Geometrie ermöglicht werden. Grundbegriffe der fraktalen Geometrie wie Dimension und Selbstähnlichkeit werden anhand des Brown’schen Fraktals diskutiert. Das Ziel des letzten Teils dieser Arbeit ist eine Anwendung im Bereich der Finanzmathematik mittels

der Black-Scholes-Formel. Mithilfe dieser soll der Erwartungswert eines Payoffs einer europäischen Call-Option ermittelt werden.

## 1.2 Aufbau

Das zweite Kapitel stellt einen historischen Abriss von der Entdeckung der Brown'schen Bewegung durch Robert Brown bis zu einer quantitativen Messung durch Jean Perrin dar. Fokus wird dabei vor allem auf die Theorie Einsteins gelegt. Die Definition des mathematischen Modells der Brown'schen Bewegung wird im dritten Kapitel eingeführt. Anhand dieser Definition werden grundlegende mathematische Eigenschaften wie das Monotonieverhalten und die Differenzierbarkeit weiter betrachtet. Zusätzlich werden vier Konstruktionstechniken eingeführt, welche einen Überblick über die vielseitigen und zahlreichen Konstruktions- beziehungsweise Annäherungsverfahren bieten. Im darauffolgenden Kapitel wird der Begriff des Brown'schen Fraktales eingeführt und definiert. Die erweiterte Definition der Brown'schen Bewegung wird auf Eigenschaften geprüft. Insbesondere werden fraktaltypische Eigenschaften wie Dimension und Selbstähnlichkeit diskutiert. Es folgt eine Anwendung im Bereich des Netzwerk-Verkehrs mittels fraktalem Gauss'schen Rauschens und eine Weiterführung zu Brown'schen Oberflächen und deren Annäherung. Das fünfte und letzte Kapitel befasst sich mit einer Anwendung in der Finanzmathematik. Allgemeine Ein- und Mehr-Perioden-Modelle werden eingeführt. Anhand dieser wird das Black-Scholes-Modell motiviert und anschliessend diskutiert. Mithilfe dieses Modells wird der Payoff einer europäischen Call-Option genauer betrachtet.

Der Anhang dieser Arbeit unterteilt sich in zwei Teile. In einem ersten Teil werden mathematische Grundlagen und Definitionen zu den Kapiteln des Hauptteils gegeben. Dazu gehören die Theorie der Normalverteilung und des Wahrscheinlichkeitsraums, die Definitionen von FraktaLEN und deren Dimensionen sowie ein Einstieg in die Finanzmathematik und Erklärungen zu den Themen Derivate und Arbitrage. Der zweite Teil des Anhangs befasst sich mit dem Code der *processing* Programme zu den Konstruktionsverfahren einer Standard Brown'schen Bewegung (eingeführt Abschnitt 3.3), zur Annäherung von Brown'schen FraktaLEN und Oberflächen (eingeführt Abschnitt 4.2.2 beziehungsweise 4.3.2) und zum Black-Scholes-Modell (eingeführt Abschnitt 5.2).

# Kapitel 2

## Die Geschichte der Brown'schen Bewegung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Geschichte der Brown'schen Bewegung. Es bietet Einblicke in die Entdeckung durch Robert Brown und Weiterführungen verschiedenster Wissenschaftler bis hin zur Beschreibung von Albert Einstein.

### 2.1 Die Entdeckung der Brown'schen Bewegung

Bereits kurz nach der Erfindung des Mikroskops wurden erste unregelmässige Bewegungen von kleinen Körnern suspendiert in Flüssigkeiten entdeckt und beobachtet. Im Jahr 1827 veröffentlichten Robert Brown und Adolphe Brongniart ihre ersten Beobachtungen (Haw, 2002, [3]). Diese interpretierten die Bewegungen als Folge von kleinen lebenden Kreaturen ("animalcules"). Doch schon bald entdeckte Brown diese Unregelmässigkeit auch bei anorganischen Partikeln. Gleiche Beobachtungen wurden bei Gasbläschen in eingefangenen Flüssigkeiten innerhalb von mineralischen Kristallen gemacht. Diese ganzen Observationen sprachen gegen eine biologische Ursache, stattdessen wurde nach einem physikalischen Grund gesucht. Viele physikalische Hypothesen wurden zur Erklärung der Brown'schen Bewegung hervorgebracht. Beispiele hierfür sind Vibrationen, thermische Unterschiede, die Kapillaranziehung oder auch elektrische Effekte und Polaritäten (Haw, 2002, [3]). Doch die Frage, ob diese unregelmässige Bewegung nur durch externe Kräfte erklärt werden kann, blieb. Erst in den späten 1880er konnte Leon Gouy zeigen, dass die Brown'sche Bewegung nicht durch externe Kräfte begründet ist, sondern eine fundamentale physikalische Eigenschaft von fliessfähiger Materie ist. Er entdeckte die Zusammenhänge der Viskosität und der Partikelgrösse auf die Intensität der Bewegung (Haw, 2002, [3]). Weiter zeigte er die Wichtigkeit der Brown'schen Bewegung für das Carnot Prinzip der Thermodynamik auf. Dieses ist auf mikroskopischer Skala nicht absolut, sondern bedarf einer statistischen Interpretation, die den absoluten Charakter sichtbar macht. Eine solche Idee wurde unter anderem bereits von Boltzmann eingeführt (Haw, 2002, [3]).

### 2.2 Die Beschreibung der Brown'schen Bewegung

Frühe Versuche einer Quantifizierung der Brown'schen Bewegung trafen schnell auf grosse Probleme, da die Experimentalisten nicht wussten, was sie zu messen hatten. Erst nach 1905 und damit den ersten Veröffentlichungen von Einstein, Smoluchowski und Langevin ändert sich dieses Verhalten (Haw, 2002, [3]).

In seiner Arbeit untersuchte Einstein den osmotischen Druck für suspendierte Teilchen. Falls in

einem Teilvolumen  $V^*$  einer Flüssigkeit eine Menge von  $z$  nichtelektrolytischen Teilchen gelöst ist und das Teilvolumen  $V^*$  mit einer bloss für das Lösungsmittel durchlässigen Wand vom reinen Lösungsmittel getrennt ist, so wirkt sich auf diese Wand ein osmotischer Druck aus. Er nutzte das Prinzip, dass nach der molekularkinetischen Wärmetheorie sich ein suspendierter Körper nur durch seine Grösse von einem gelösten Molekül unterscheidet. Deshalb ist es nicht ersichtlich, wieso bei suspendierten Körpern nicht derselbe osmotische Druck entstehen sollte (Einstein, 1926/1956, [13]). Sind also  $z$  suspendierte Körper im Teilvolumen  $V^*$  und damit  $v = \frac{z}{V^*}$  Teilchen in einer Volumeneinheit, so gilt für den osmotischen Druck (Einstein, 1926/1956, [13]):

$$p = \frac{RTz}{N_A V^*} = \frac{RTv}{N_A}, \quad (2.1)$$

wobei  $N_A$  der Avogadro-Konstante,  $T$  der absoluten Temperatur und  $R$  der universalen Gaskonstante entspricht.

Allerdings ist nach der klassischen Theorie der Thermodynamik keine solche Kraft zu erwarten, da die freie Energie eines Systems nach damaliger Auffassung nicht von der Lage der Wand und der suspendierten Körper abhängt, sondern bloss von der Gesamtmasse und der Qualität der suspendierten Substanz, der Flüssigkeit und der Wand sowie vom Druck und der Temperatur. Einstein konnte die Theorie der molekularkinetischen Wärmetheorie jedoch belegen und damit die klassische Theorie der Thermodynamik widerlegen (Einstein, 1926/1956, [13]). Nach der Untersuchung des osmotischen Drucks von suspendierten Teilchen untersuchte Einstein weiter die Theorie der Diffusion. Dabei geht er von einer Flüssigkeit aus, in welcher suspendierte Teilchen regellos verteilt sind. Auf die einzelnen Teilchen wirkt dabei eine Kraft  $K$ , die abhängig vom Ort nicht aber der Zeit ist. Diese Kraft wird durch die osmotischen Druckkräfte geleistet. Einem einzelnen Teilchen wird nun durch die Kraft  $F$  eine Geschwindigkeit von  $\frac{F}{6\pi kP}$  erteilt, wobei  $P$  der Kugelradius eines Teilchens und  $k$  der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit ist (Einstein, 1926/1956, [13]). Ferner bezeichnet  $D$  den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz. In einer Suspension gilt folgendes Gleichgewicht (Einstein, 1926/1956, [13]):

$$\frac{vF}{6\pi kP} - D \frac{\delta v}{\delta x} = 0. \quad (2.2)$$

Dabei entspricht der Term  $-D \frac{\delta v}{\delta x}$  der Anzahl Teilchen, die pro Zeiteinheit eine Querschnittseinheit passieren. Für den Diffusionskoeffizienten gilt weiter (Einstein, 1926/1956, [13]):

$$D = \frac{RT}{6\pi k P N_A}. \quad (2.3)$$

Folglich ist der Diffusionskoeffizient der suspendierten Substanz neben universellen Konstanten und der absoluten Temperatur nur vom Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit und der Grösse der suspendierten Teilchen abhängig (Einstein, 1926/1956, [13]). Einstein analysierte die ungeordnete Bewegung von Teilchen in einer Suspension und vor allem den Zusammenhang zur

Diffusion. Er untersuchte die eindimensionale Bewegungen für sehr kleine Zeiträume, der so genannten Brown'schen Zeit, wobei er feststellte, dass diese für jedes Teilchen und für jeden Zeitraum verschieden ist. Einstein entdeckte, dass das Verhalten einer Diffusion derselben Differentialgleichung folgt und stellte damit einen wichtigen Zusammenhang zwischen Diffusion, osmotischem Druck und der Brown'schen Bewegung dar, der erstmalig so dokumentiert wurde. Außerdem bestimmte er die mittlere Verschiebung der Teilchen in  $x$ -Richtung als  $\lambda_x = \sqrt{2Dt}$ . Durch einsetzen der Gleichung (2.3) entsteht folgender Zusammenhang (Einstein, 1926/1956, [13]):

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{RTt}{3\pi k P N_A}}. \quad (2.4)$$

Somit muss  $\lambda_x$  von  $T$ ,  $k$  und  $P$  abhängen (Einstein, 1926/1956, [13]).

Mit dieser Theorie und dem damit verbundenen Ansatz über die molekularkinetische Energie gelang es Einstein, eine erste Qualifizierung der Brown'schen Bewegung durchzuführen.

Ein Jahr später veröffentlichte Marian von Smoluchowski einen ähnlichen Ansatz und bestätigte damit Einsteins Resultat. Auch Paul Langevin präsentierte eine dritte Version der Theorie der Brown'schen Bewegung mit einem simplen und direkten Ansatz. Er wertet nur Kräfte von kollidierenden Partikel aus, die die Impulse der Moleküle repräsentieren. Langevin nutzte schliesslich auch die Diffusionsgleichung von Einstein, konnte jedoch die Ähnlichkeit der Brown'schen Bewegung zur Diffusion für einen weniger eingeschränkten Zeitraum zeigen (Haw, 2002, [3]).

## 2.3 Quantitative Messung der Brown'schen Bewegung

Jean Perrin führte im Jahre 1908 eine der ersten erfolgreichen Experimentreihen zusammen mit seinen Schülern in Paris durch. Dabei studierte er nie die Details von Einsteins und Smoluchowskis theoretischer Arbeit, was für Perrin aber kein aussergewöhnliches Vorgehen war. Trotzdem waren seine Experimente durch die enge Freundschaft mit Langevin wahrscheinlich sehr gut begleitet (Haw, 2002, [3]). Perrins Arbeit war nicht einfach, da die Ergebnisse sehr genau sein mussten. Andere Experimente scheiterten beispielsweise an ungenauen Partikelgrössen und -geschwindigkeiten. Perrin entwickelte viele verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Partikelgrösse. Dazu zählen beispielsweise ein Fotografieverfahren und ein Verfahren mit Nutzung der Stokes Gleichung für Sedimentationsgeschwindigkeiten. Seine besten Messversuche hatten eine Ungenauigkeit von weniger als 1% (Haw, 2002, [3]). Um solch genaue Werte zu erhalten, grenzte er den gemessenen Teil stark ein, so dass er teils nur in einem Zehntausendstel der Gesamtprobe Messungen vornahm. Er nutzte die unterschiedlichsten Materialien wie beispielsweise Gummigutta, einen aus Gummiharz gewonnenen dunklen gelben Farbstoff (Haw, 2002, [3]). Doch das wichtigste Element seiner Strategie war Geduld. Erst seine tausenden Experimente und Messungen machten eine statistische Präzision möglich. Im Jahr 1909 publizierte er seine Experimente. Später erhielt er für seine Forschungen den Nobelpreis (Haw, 2002, [3]).

# Kapitel 3

## Brown'sche Bewegung als Zufallsfunktion

Zuerst wird der als Brown'sche Bewegung bekannte stochastische Prozess definiert. Anhand dieser Definition können einzelne Eigenschaften genauer erläutert werden. Es werden weiter einige Konstruktionsarten aufgezeigt. Im folgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Brown'schen Bewegung als Zufallsfunktion aufgeführt. Einzelne Fachbegriffe werden im Unterkapitel A.1 des Anhangs definiert und erklärt.

### 3.1 Definition Brown'sche Bewegung

Die lineare, eindimensionale Brown'sche Bewegung, auch Wienerprozess genannt zu Ehren des Mathematikers Norbert Wiener (Revuz und Yor, 2005, [20]), wird als stochastischer Prozess  $\{B(t) : t \geq 0\}$  mit Startpunkt  $x$  und den folgenden Eigenschaften definiert (Mörters und Peres, 2010, [19]):

- (i) Startwert:  $B(0) = x$ .
- (ii) Für alle  $t \geq 0$  und  $h > 0$  sind die Inkremente  $B(t + h) - B(t)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $h$ .
- (iii) Der Prozess besitzt unabhängige Inkremente, das heisst, für jede Zeit  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  sind die Inkremente  $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1), B(t_1) - B(0)$  unabhängige Zufallsvariablen.
- (iv) Die Funktion  $t \mapsto B(t)$  ist fast sicher stetig.

Der stochastische Prozess  $\{B(t) : t \geq 0\}$  wird eine Standard Brown'sche Bewegung genannt, falls  $x = 0$  (Mörters und Peres, 2010, [19]).

Der Wienerprozess entspricht einer Familie von (unzählbar vielen) Zufallsvariablen  $\omega \mapsto B(t, \omega)$  definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ .

Gleichzeitig kann ein stochastischer Prozess auch als zufällige Funktion mit der Stichprobenfunktion definiert als  $t \mapsto B(t, \omega)$  angesehen werden (Mörters und Peres, 2010, [19]). Diese Ansicht wird in den folgenden Kapiteln weiter vertieft.

Die Definition der linearen Brown'sche Bewegung kann auf den  $\mathbb{R}^d$  erweitert werden. Dabei ist  $B : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  gegeben als  $B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))^T$  eine  $d$ -dimensionale Brown'sche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, falls  $B_i(t)$  eine eindimensionale Brown'sche Bewegung für jedes  $i$  ist. Die Inkremente  $B(t + h) - B(t)$  sind weiter unabhängig und  $d$ -dimensional normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = h$  (Falconer, 1990, [14]).

## 3.2 Eigenschaften der Brown'schen Bewegung

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Eigenschaften der Brown'schen Bewegung analysiert. Es wird gezeigt, dass ein Wienerprozess fast sicher nirgends monoton oder differenzierbar ist. Der Ausdruck "fast sicher" bezieht sich auf eine Wahrscheinlichkeit von 1.

### 3.2.1 Monotonie der Brown'schen Bewegung

Die Brown'sche Bewegung ist fast sicher für alle  $0 < a < b < \infty$  auf dem Intervall  $[a, b]$  nicht monoton. Eine Funktion  $f$  ist monoton wachsend im Intervall  $I$ , falls für alle  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$  gilt:  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Falls  $f(x_1) \geq f(x_2)$  gilt, wird von monoton fallend gesprochen (Baum u. a., 2013, [11]). Um zu zeigen, dass ein Wienerprozess fast sicher nicht monoton ist, wird das Intervall  $[a, b]$  in  $n$  Teile  $[a_i, a_{i+1}]$  mit  $a_0 = a, a_n = b$  und  $i = 0, 1, \dots, n$  unterteilt. Jedes Inkrement  $B(a_{i+1}) - B(a_i)$  muss nun dasselbe Vorzeichen besitzen. Da die Inkremente aber unabhängig sind, passiert dies mit der Wahrscheinlichkeit  $2^{1-n}$ . Für sehr grosse  $n$  oder sogar  $n \rightarrow \infty$  geht die Wahrscheinlichkeit gegen 0, wodurch bewiesen ist, dass fast sicher kein Intervall, auf dem Monotonie herrscht, existiert (Mörters und Peres, 2010, [19]).

### 3.2.2 Differenzierbarkeit der Brown'schen Bewegung

Um zu zeigen, dass die Brown'sche Bewegung fast sicher nirgends differenzierbar ist, müssen erst einige weitere Eigenschaften des Wienerprozess genauer erläutert werden.

Sei  $\{B(t) : t \geq 0\}$  eine Standard Brown'sche Bewegung. Es kann nun bewiesen werden, dass der folgende stochastische Prozess  $\{X(t) : t \geq 0\}$  eine Brown'sche Bewegung ist, falls folgendes gilt (Mörters und Peres, 2010, [19]):

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tB\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Weiter wächst der Wienerprozess fast sicher schneller als  $\sqrt{t}$ . Dies spiegelt sich in den folgenden Gleichungen wider (Mörters und Peres, 2010, [19]):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = -\infty. \quad (3.2)$$

Die mathematischen Funktionen Supremum und Infimum definieren dabei die kleinste obere beziehungsweise die grösste untere Schranke von Mengen (Zakon, 1975, [23]). Mithilfe dieser grundlegenden Eigenschaften der Brown'schen Bewegung kann gezeigt werden, dass diese fast sicher nirgends differenzierbar ist.

Dazu werden die Dini-Ableitungen folgendermassen definiert (Mörters und Peres, 2010, [19]):

$$D^*f(t) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}; \quad D_*f(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \quad (3.3)$$

Nun kann bewiesen werden, dass sich  $D^*B(t)$  und  $D_*B(t)$  nicht entsprechen und daher die Brown'sche Bewegung fast sicher nirgends differenzierbar ist. Zudem gilt sogar:  $D^*B(t) = +\infty$  und  $D_*B(t) = -\infty$ . Um dies zu zeigen, wird eine weitere Brown'sche Bewegung  $X$  durch Zeitumkehr wie in (3.1) konstruiert.

$$D^*X(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X\left(\frac{1}{n}\right) - X(0)}{\frac{1}{n}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}X\left(\frac{1}{n}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}}. \quad (3.4)$$

Analog kann gezeigt werden, dass  $D_*X(0) = -\infty$  und damit  $X$  an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist. Jetzt kann eine Brown'sche Bewegung  $\{B(t) : t \geq 0\}$  angenommen werden. Es gilt  $X(s) = B(t+s) - B(t)$  ist eine Standard Brown'sche Bewegung und die Differenzierbarkeit von  $X$  an der Stelle 0 entspricht der Differenzierbarkeit von  $B$  an der Stelle  $t$  (Mörters und Peres, 2010, [19]).

### 3.3 Konstruktionsarten

Es gibt viele verschiedene Varianten, die Brown'sche Bewegung beziehungsweise einen einzelnen Pfad zu konstruieren. Alle Konstruktionsarten besitzen das gemeinsame Ziel, möglichst der Definition eines Wienerprozesses zu entsprechen. Dabei ist es für die Konstruktion eines Pfads nützlich, diesen zu diskretisieren. Das bedeutet,  $B(t)$  an diskreten Stellen für  $t$  genau zu bestimmen (Higham, 2001, [4]). Die Programmcodes zu den einzelnen Konstruktionsarten befinden sich im Kapitel B des Anhangs.

#### 3.3.1 Unabhängige normalverteilte Inkremente

Die Grundlage der Konstruktion über unabhängige normalverteilte Inkremente ist die Unterteilung eines Intervalls  $[0, T]$ , über welchem ein Pfad der Brown'schen Bewegung konstruiert werden soll, in  $n$  äquidistante Teile (Higham, 2001, [4]). Jedes dieser Teile besitzt die Länge  $\Delta t = \frac{T}{n}$ .

Die Konstruktion über unabhängige normalverteilte Inkremente verfolgt nun die Idee, dass bei jeder Brown'schen Bewegung gilt: Für  $t \geq 0$  und  $h > 0$  ist  $B(t+h) - B(t)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $h$ . Durch Umstellen entsteht die neue Gleichung:

$$B(j) = B(j-1) + \Delta B_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Jedes  $\Delta B_j$  ist eine unabhängige Zufallsvariable der Form  $\sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, 1)$ . Eigentlich müsste  $\Delta B_j$  nach Definition der Brown'schen Bewegung einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\Delta t$  entsprechen. Durch die in Unterkapitel A.1.1 beschriebene Transformation (A.4) kann diese Normalverteilung in die Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  mit Faktor  $\sqrt{\Delta t}$  umgewandelt werden (Zhuohua Xu, 2009, [10]).

Bei dieser Konstruktion werden (nach Angabe des Startwertes  $B(0)$ ) durch Addition von  $\Delta B_j$  die diskreten Punkte  $\{(1, B(1)), (2, B(2)), \dots, (n, B(n))\}$  spezifiziert und damit ein diskreter

Brown'scher Pfad geschaffen. Der Wert  $B(j)$  kann als Addition einzelner normalverteilter Zufallsvariablen angesehen werden (Higham, 2001, [4]):

$$B(j) = B(0) + \Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_j. \quad (3.6)$$

Je grösser  $n$  gewählt wird, desto genauer ist die Annäherung an einen tatsächlichen Brown'schen Pfad.

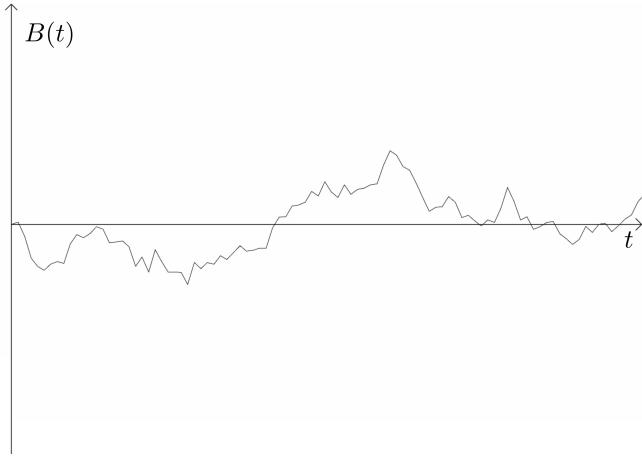


Abbildung 2:  $n = 100$ .

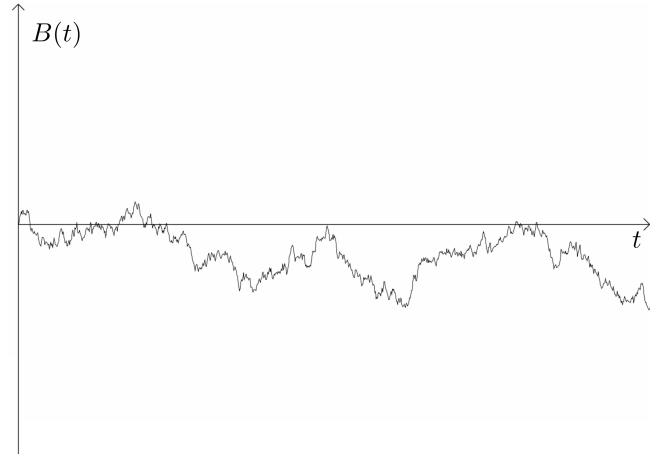


Abbildung 3:  $n = 1'000$ .

Die Abbildungen 2 und 3 sind zwei Beispiele für Programmdurchläufe mit unterschiedlicher Anzahl generierter, diskreter Punkte. Es ist ersichtlich, dass eine Konstruktion mit einem grösseren Wert für  $n$  eine bessere Annäherung für eine Brown'sche Bewegung ist beziehungsweise deren Eigenschaften besser erfüllt. Beispielsweise kann bei der Abbildung 3 erkannt werden, dass der Graph viel "rauer" ist, sprich in einem Intervall dieser Graph viele verschiedene positive und negative Inkremente im Wechsel besitzt. Auch ein Wienerprozess muss sehr "rau" sein, da dieser fast sicher nirgends monoton sein darf und daher in jedem noch so kleinen Intervall Steigungen mit verschiedenen Vorzeichen vorkommen müssen. Bei dieser Konstruktionart entscheidet also die Menge diskreter Punkte über die Güte der Annäherung.

### 3.3.2 Einfacher Random Walk

Das Konstruktionsverfahren über einen einfachen Random Walk ist eine Vereinfachung der Konstruktion aus Abschnitt 3.3.1. Der Grundgedanke bleibt identisch. Das Intervall  $[0, T]$  wird wieder in  $n$  äquidistante Teile unterteilt mit der Länge  $\Delta t = \frac{T}{n}$  (Scherer, 2017, [21]).

Zur Spezifizierung von neuen Punkten des zu konstruierenden Brown'schen Pfads gilt erneut die Gleichung:

$$B(j) = B(j - 1) + \Delta B_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Im Unterschied zur Konstruktion über normalverteilte unabhängige Inkremente entspricht  $\Delta B_j$  keiner normalverteilten, sondern einer skalierten rademacherverteilten Zufallsvariablen (Scherer, 2017 [21]). Diese folgt der Rademacherverteilung mit einer Streckung um den Faktor  $\sqrt{\Delta t}$ ,

wodurch gilt (Montgomery-Smith, 1990, [5]):

$$\mathbb{P}(\Delta B_j = -\sqrt{\Delta t}) = \mathbb{P}(\Delta B_j = \sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

Vorteilhaft an diesem Konstruktionsverfahren ist die einfache Generierbarkeit von rademacher-verteilten Zufallsvariablen. Jedoch stimmt der konstruierte Pfad nicht wirklich mit einem Wienerprozess überein, da der konstruierte Pfad nicht normalverteilte, sondern binomialverteilte Zustände aufweist. Bei einer Binomialverteilung wird von jeweils zwei möglichen Ereignissen ("Erfolg" oder "Misserfolg") ausgegangen. Ist nun  $p$  die Wahrscheinlichkeit bei einem Versuch und  $n$  die Anzahl Versuche, dann ist  $\mathcal{B}(k|p, n)$  die Wahrscheinlichkeit genau  $k$  Erfolge zu erzielen mit (Baum u. a., 2013, [11]):

$$\mathcal{B}(k|p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.9)$$

Um einer Normalverteilung möglichst nahe zu kommen, müssen also sehr kleine  $\Delta t$  gewählt werden.

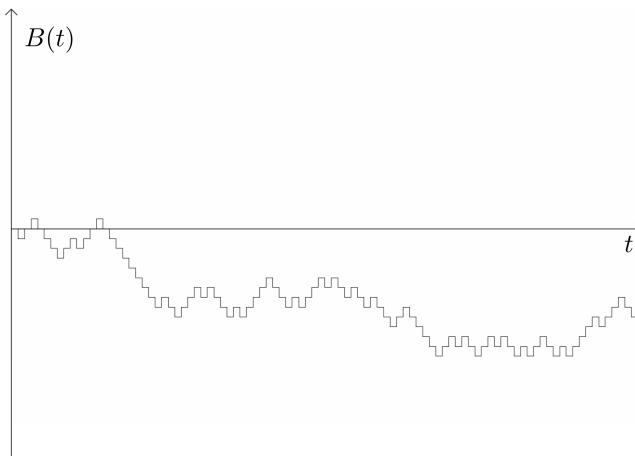


Abbildung 4:  $n = 100$ .

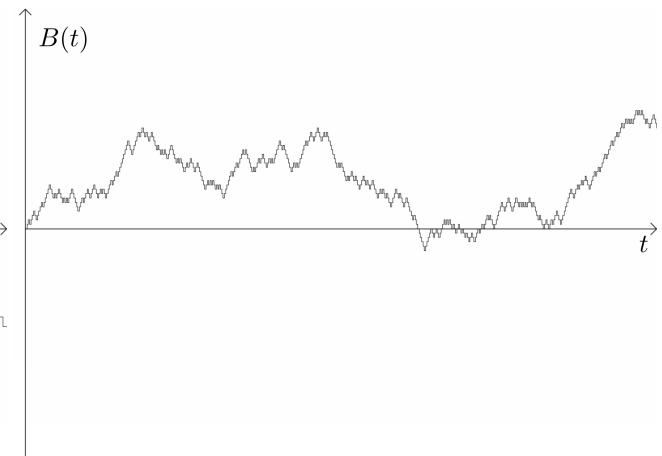


Abbildung 5:  $n = 500$ .

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen das Ergebnis einer Konstruktion mittels Random Walk. Ähnlich wie in Abschnitt 3.3.1 entspricht die Konstruktion mit mehr generierten, diskreten Punkten einer besseren Annäherung eines tatsächlichen Wienerprozesses. Dies gilt, da bei einer grösseren Anzahl an generierten Punkten das  $\Delta t$  kleiner wird, wodurch die in dieser Konstruktionsart vorhandene Binomialverteilung sich immer mehr einer Normalverteilung annähert, die in den Eigenschaften der Brown'schen Bewegung auch wiederzuentdecken ist. Somit ist eine Annäherung mit einem grösseren Wert für  $n$  genauer, da einerseits mehr diskrete Punkte generiert werden, aber auch die Binomialverteilung sich einer Normalverteilung annähert.

### 3.3.3 Lévy-Konstruktion

Die Lévy-Konstruktion ist benannt nach ihrem Erfinder Paul Lévy (Schilling und Partzsch, 2012, [22]). Er konstruierte einen Brown'schen Pfad Schritt für Schritt auf einer endlichen Menge von

dyadischen Punkten  $D_n = \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n$  auf dem zugrundeliegenden Intervall  $[0, 1]$ . Anschließend werden einzelne Funktionen, welche später aufsummiert werden, definiert. Es gilt (Mörters und Peres, 2010, [19]):

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1, & t = 1 \\ 0, & t = 0 \\ \text{linear} & \text{dazwischen} \end{cases} \quad (3.10)$$

und für jedes  $n \geq 1$ ,

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_t, & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0, & t \in D_{n-1} \\ \text{linear} & \text{zwischen aufeinanderfolgenden Punkten in } D_n \end{cases}. \quad (3.11)$$

Dabei sind  $Z_i$  standardnormalverteilte Zufallsvariablen für  $i \in D_n$ . Diese Funktionen sind stetig auf  $[0, 1]$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in D_n$  gilt (Mörters und Peres, 2010, [19]):

$$B(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t). \quad (3.12)$$

Diese Konstruktionsart wird schrittweise durchgeführt. In einem ersten Schritt ( $n = 0$ ) wird eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z_1$  berechnet und damit der diskrete Punkt  $(1, Z_1)$  spezifiziert. Die zwei bekannten Punkte  $(0, 0)$  und  $(1, Z_1)$  werden durch eine Gerade verbunden, womit alle Teile der Funktion  $F_0$  erfüllt sind. Nun gilt es  $F_1$  beziehungsweise  $F_n$  genauer zu analysieren. Bei  $F_1$  soll allen Werten  $t \in D_1 \setminus D_0$  ein Wert  $\frac{1}{2}Z_t$  zugeordnet werden. In diesem Fall existiert nur ein  $t$ , das die Bedingung erfüllt, nämlich  $t = \frac{1}{2}$ . Der Wert  $\frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}}$  setzt sich aus der standardnormalverteilten Zufallsvariable  $Z_{\frac{1}{2}}$  und dem Faktor  $\frac{1}{2}$  zusammen, wobei der Faktor die Varianz korrigieren soll, so dass diese mit der Definition eines Wienerprozesses übereinstimmt. Die Funktion  $F_1$  weist den Punkten in  $D_0$  den Wert 0 zu. Zwischen den zwei aufeinanderfolgenden dyadischen Punkten wird eine Gerade gezogen. Durch die Addition von  $F_0$  und  $F_1$  entsteht eine nächste (genauere) Annäherung an einen Brown'schen Pfad. Bei einem nächsten Schritt werden den  $t$ -Werten  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{3}{4}$  skalierte standardnormalverteilte Zufallsvariablen aufsummiert und die einzelnen dyadischen Punkte wieder durch Geraden verbunden.

Im Allgemeinen gilt, falls  $B(j2^{-k})$  bereits für  $j = 0, 1, \dots, 2^k$  konstruiert wurde, dann ist

$$B(l2^{-(k+1)}) = \begin{cases} B(j2^{-k}), & l = 2j \\ \frac{1}{2} (B(j2^{-k}) + B((j+1)2^{-k})) + 2^{-(k+2)} Z_{l2^{-(k+1)}}, & l = 2j+1 \end{cases}. \quad (3.13)$$

Damit entsteht ein neuer Punkt bei der Lévy-Konstruktion durch die Addition einer skalierten standardnormalverteilten Zufallsvariable zum Durchschnitt der  $B(t)$ -Werte der Punkte unmittelbar rechts und links davon (Schilling und Partzsch, 2009, [22]).

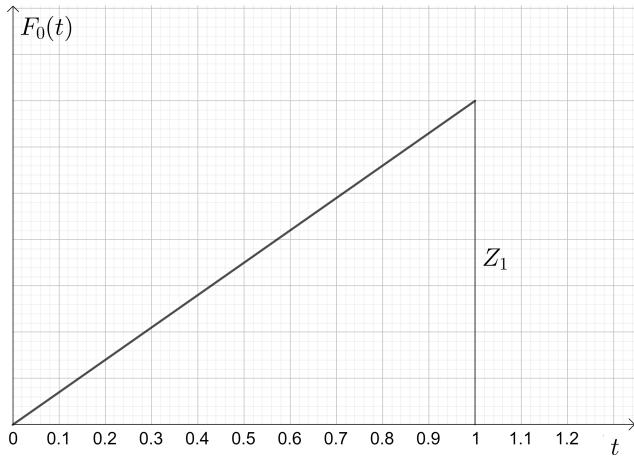


Abbildung 6: Start (Schritt 0) der Konstruktion.

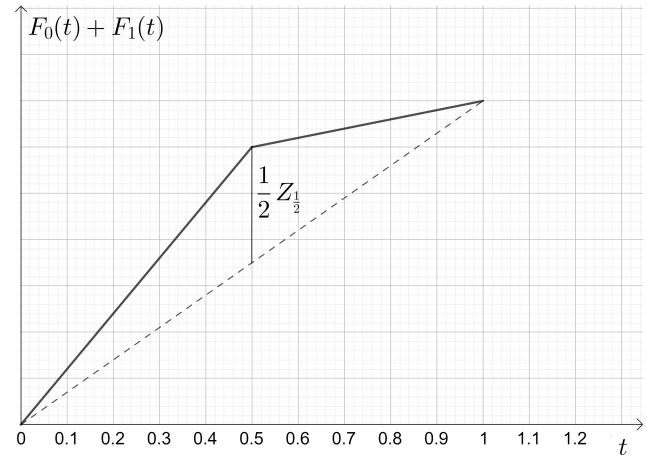


Abbildung 7: Schritt 1 der Konstruktion.

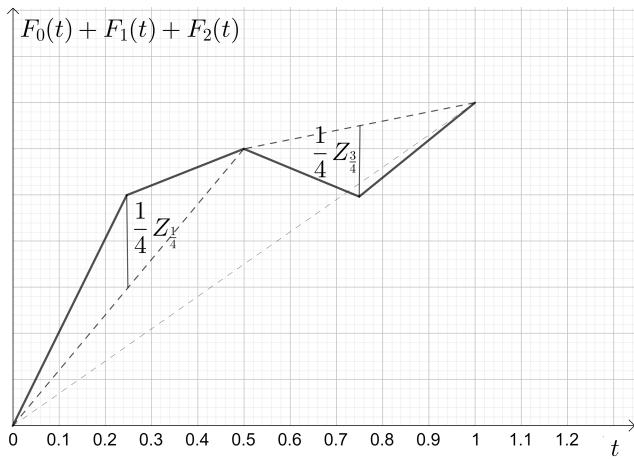


Abbildung 8: Schritt 2 der Konstruktion.

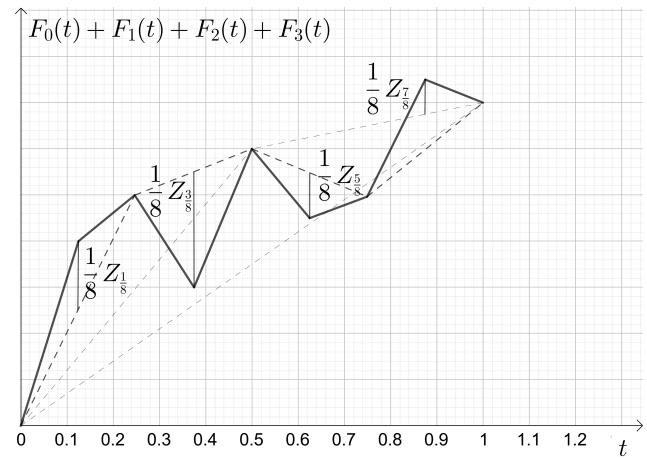


Abbildung 9: Schritt 3 der Konstruktion.

Die Abbildungen 6, 7, 8 und 9 zeigen die ersten Schritte einer Lévy-Konstruktion. Bei den ersten Schritten einer Lévy-Konstruktion kann noch nicht wirklich von einem Wienerprozess gesprochen werden. Nach mehreren Schritten wird die Annäherung aber immer besser. Dies folgt daraus, dass bei den weiteren Schritten immer mehr Punkte diskretisiert werden. Denn nach dem  $n$ -ten Schritt, ist für alle Werte  $t$ , die in  $D_n$  liegen, ein Punkt  $(t, B(t))$  bestimmt. Da in der Menge  $D_n \setminus D_{n-1}$  für grosse  $n$  mehr Elemente liegen, wird die Annäherung für grosse  $n$  schneller besser.

### 3.3.4 Spektralzerlegung (Fourier-Reihe)

Das Konstruktionsverfahren über eine Spektralzerlegung wurde erstmalig von Wiener publiziert und bedient sich vor allem zweier Prinzipien (Schilling und Partzsch, 2012, [22]). Eines davon stammte von Zbigniew Ciesielskie, einem polnischen Mathematiker, der zeigte, dass, falls ein stochastischer Prozess gewisse Eigenschaften abhängig von einem Orthogonalsystem in einem Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(dt)$  erfüllt, dieser einer Brown'schen Bewegung entspricht. Dieser Satz kann im Buch *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes* [22] weiterverfolgt werden. Aus-

serdem stützte sich Wiener auf die Fourier-Reihe. Fourier zeigte, dass jede periodische Funktion durch eine (unendliche) Reihe an harmonischen Schwingungen  $y(t) = \hat{y} \sin(\omega t)$  mit Amplitude  $\hat{y}$  und Frequenz  $\omega$  beschrieben werden kann (Küng, 2009, [6]).

Wiener folgerte daraus die Wiener-Fourier-Reihe, welche einen Brown'schen Pfad annähern kann durch (Schilling und Partzsch, 2012, [22]):

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n} Z_n. \quad (3.14)$$

Dabei sind  $Z_i$  für  $i = 1, 2, \dots$  standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Das Problem dieser Konstruktionsart ist, dass die trigonometrischen Funktionen sehr aufwändig in der Auswertung sind. Deshalb wird diese Konstruktionsart kaum genutzt. In der Anwendung wird die Wiener-Fourier-Reihe noch minimal angepasst, so dass gilt (Schilling und Partzsch, 2012, [22]):

$$B(t) = \sum_{n=1}^k \frac{\sin(n\pi t)}{n} Z_n. \quad (3.15)$$

Dabei ist die Annäherung für grosse  $k \in \mathbb{N}$  genauer.

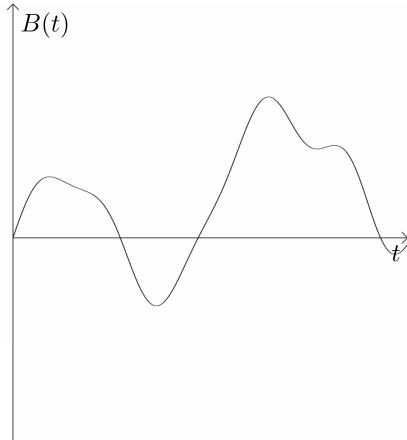


Abbildung 10:  $k = 10$ .

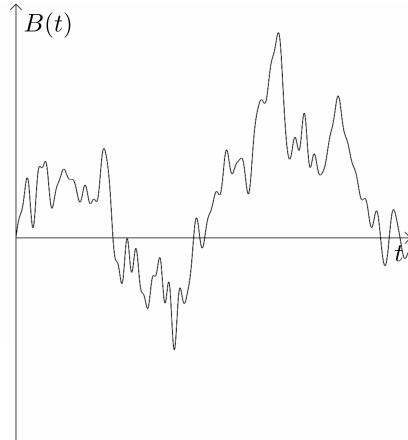


Abbildung 11:  $k = 100$ .

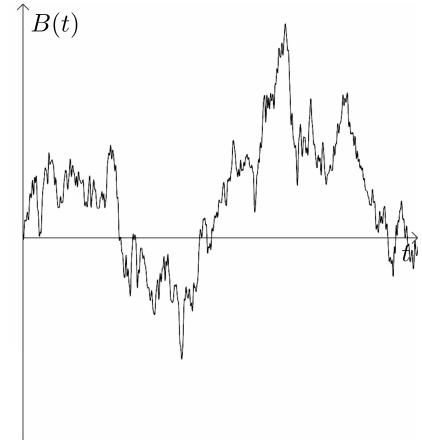


Abbildung 12:  $k = 500$ .

Die Abbildungen 10, 11 und 12 zeigen Beispiele eines mittels Spektralzerlegung konstruierten Brown'schen Pfads mit unterschiedlichen Werten für  $k$ . Anders als bei den Konstruktionarten aus den Abschnitten 3.3.1-3.3.3 entscheidet bei der Güte der Konstruktion nicht die Menge an diskreten Punkten, sondern der Endwert  $k$  des Laufindex, da bei grösserwerdendem  $k$  die  $B(t)$ -Werte zu den einzelnen  $t$ -Werten sich ändern. Durch Überprüfung der Eigenschaften eines Wienerprozesses auf die einzelnen Graphen der Abbildungen 10, 11 und 12 ist klar ersichtlich, dass die Abbildung mit dem grössten Wert für  $k$  die beste Annäherung ist.

# Kapitel 4

## Brown'sche Fraktale

Dieses Kapitel befasst sich mit der Definition Brown'scher Fraktale und dem stochastischen Prozess der gebrochenen Brown'schen Bewegung. Anhand dessen werden einzelne Eigenschaften weiter erläutert und einige Weiterführungen erklärt. Grundlegende Begriffserklärungen und Definitionen zum Thema Fraktale sind im Anhang A.2 zu finden.

### 4.1 Definition eines Brown'schen Fraktals

Die gebrochene Brown'sche Bewegung ist der stochastische Prozess, der ein Brown'sches Fraktal beschreibt. Dieser Prozess  $B_\alpha : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und muss folgende Eigenschaften erfüllen (Falconer, 1990, [14]):

- (i) Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist  $B_\alpha(t)$  stetig und  $B_\alpha(0) = 0$ .
- (ii) Für alle  $t \geq 0$  und  $h > 0$  sind die Inkremente  $B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $h^{2\alpha}$ , so dass:

$$\mathbb{P}(B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t) \leq x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h^{2\alpha}}\right) du. \quad (4.1)$$

Es kann gezeigt werden, dass für  $0 < \alpha < 1$  ein solcher Prozess existiert. Der Parameter  $\alpha$  wird auch als Hurstparameter bezeichnet (Dieker, 2004, [2]). In der obigen Definition ist impliziert, dass die Inkremente  $B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t)$  stationär sind, das heisst deren Wahrscheinlichkeitsverteilung ist unabhängig von  $t$  (Falconer, 1990, [14]). Jedoch kann der als fraktale Brown'sche Bewegung beschriebene Prozess nicht unabhängige Inkremente besitzen, ausser für den Fall  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Falconer, 1990, [14]). Mittels Bedingung (ii),  $\mathbb{E}[(B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t))^2] = h^{2\alpha}$ , kann gezeigt werden, dass gilt (Falconer, 1990, [14]):

$$\mathbb{E}[B_\alpha(t)(B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t))] = \frac{1}{2} [(t+h)^{2\alpha} - t^{2\alpha} - h^{2\alpha}]. \quad (4.2)$$

Dieser Term ist ungleich null, falls  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ . Daher ist  $\mathbb{E}[(B_\alpha(t) - B_\alpha(0))(B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t))]$  positiv oder negativ je nachdem, ob  $\alpha > \frac{1}{2}$  oder  $\alpha < \frac{1}{2}$ , was bedeutet, dass die Inkremente nicht unabhängig sind (Falconer, 1990, [14]). Falls  $\alpha > \frac{1}{2}$ , dann tendieren  $B_\alpha(t) - B_\alpha(0)$  und  $B_\alpha(t+h) - B_\alpha(t)$  dazu, dasselbe Vorzeichen zu besitzen. Dies bedeutet, falls  $B_\alpha(t)$  in der Vergangenheit gestiegen ist, hat es eine steigende Tendenz in der Zukunft. Ähnliches gilt, im Fall  $\alpha < \frac{1}{2}$ , nur mit umgekehrten Vorzeichen und damit umgekehrten Tendenzen (Falconer, 1990, [14]). Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  entspricht  $B_\alpha$  einer Standard Brown'schen Bewegung (Falconer, 1990, [14]).

Die obige Gleichung (4.2) kann umgeformt werden zur Kovarianzfunktion für  $0 < s \leq t$  (Dieker, 2004, [2]):

$$\rho(s, t) = \mathbb{E} [B_\alpha(s)B_\alpha(t)] = \frac{1}{2} [t^{2\alpha} + s^{2\alpha} - (t-s)^{2\alpha}]. \quad (4.3)$$

Für die fraktale Brown'sche Bewegung gilt weiter, dass  $c^\alpha B_\alpha(\frac{t}{c})$  und  $B_\alpha(t)$  für  $c > 0$  die gleiche Verteilung besitzen. Diese Eigenschaft wird Selbstähnlichkeit genannt (Cheridito, 2001, [1]).

## 4.2 Dimension und Konstruktion eines Brown'schen Fraktales

Die Dimension ist eine wichtige Grundlage eines Fraktales. Bereits Mandelbrot nutzte diese Eigenschaft, um zu definieren, was ein Fraktal ist (Mandelbrot, 2013, [18]). Die Abhängigkeit der Dimension zum Wert von  $\alpha$  wird in diesem Unterkapitel weiter erläutert. Eine einfache Konstruktion ermöglicht es, den Einfluss unterschiedlicher  $\alpha$ -Werte besser zu verstehen.

### 4.2.1 Dimension eines Brown'schen Fraktales

Mit Wahrscheinlichkeit 1 besitzt der Graph einer fraktalen Brown'schen Bewegung mit Hurstparameter  $\alpha$  die Hausdorff- und Boxcounting-Dimension  $2 - \alpha$  (Falconer, 1990, [14]). Da der diesem Graph zugrundeliegende stochastische Prozess in einen topologisch eindimensionalen Raum abbildet, jedoch die Dimension vom Graphen fast sicher grösser ist als 1, ist dieser nach der Definition von Mandelbrot ein Fraktal (Mandelbrot, 2013, [18]).

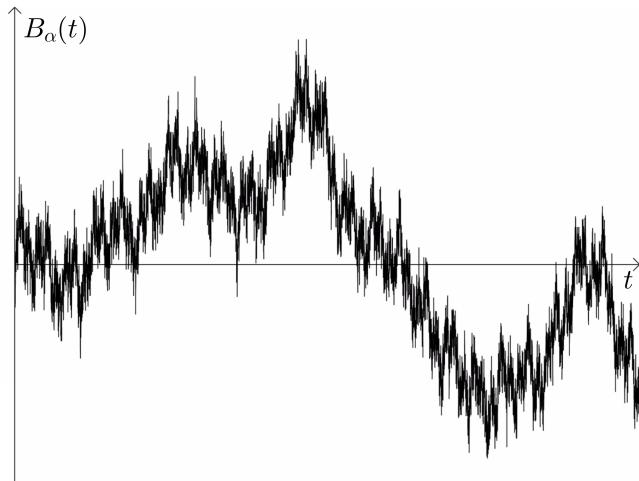


Abbildung 13:  $\alpha = 0.3$ .

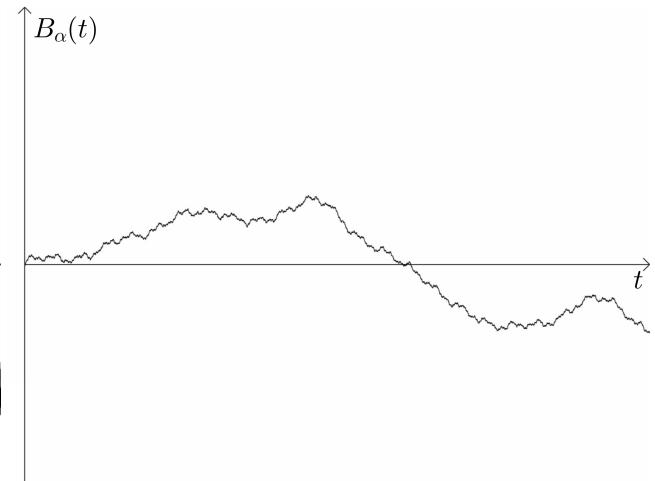


Abbildung 14:  $\alpha = 0.7$ .

Dass die Dimension bei grösserem Wert für  $\alpha$  kleiner ist, widerspiegelt sich bereits in der Kovarianzfunktion. Denn bei einem  $\alpha > \frac{1}{2}$  gilt  $\rho(s, t) > 0$  und damit hat  $B_\alpha$  einen glatten Graphen, welcher eine kleine Dimension nahe bei 1 besitzt. Umgekehrt besitzen gebrochene Brown'sche Bewegungen mit  $\alpha < \frac{1}{2}$  einen rauen Graphen und damit eine Dimension näher bei 2.

Dieses Verhalten der gebrochenen Brown'schen Bewegung wird mit einem Blick auf deren Graphen für verschiedene Werte für  $\alpha$  deutlicher. Die grössere Dimension und damit das rauere

Verhalten zeigt sich klar in Abbildung 13 stärker. Dieses Brown'sche Fraktal besitzt eine Dimension von 1.7. Der Graph aus Abbildung 14 zeigt eine geringere Dimension von 1.3. Dies zeigt sich in einem glatteren Graphen, aufgrund einer positiv gewichteten Kovarianzfunktion.

### 4.2.2 Konstruktion eines Brown'schen Fraktals

Um die gebrochene Brown'sche Bewegung zu konstruieren, gibt es verschiedene Verfahren, welche teils einen grossen Rechenaufwand mit sich ziehen (Falconer, 1990, [14]). Beispiele dafür wären die Hosking Methode, die Cholesky Methode oder auch die Davies und Harte Methode, welche gebrochene Brown'sche Bewegungen exakt simulieren können (Dieker, 2004, [2]). Eine Möglichkeit einer Annäherung ist das Einbeziehen von stochastischen Komponenten in die Weierstrass-Funktion, eine stetige aber nirgends differenzierbare Funktion. Diese Annäherung folgt der Form (Falconer, 1990, [14]):

$$X_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \gamma^{-\alpha k} \sin(\gamma^k t + A_k), \quad (4.4)$$

wobei  $\gamma > 1$  und  $C_k$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Die Phasenverschiebung  $A_k$  ist gleichverteilt auf  $[0, 2\pi[$  (Falconer, 1990, [14]). Um zu zeigen, dass dies eine gute Annäherung für eine gebrochene Brown'sche Bewegung ist, müssen einzelne Punkte der Definition eines solchen Prozess belegt werden. Der Prozess  $X_\alpha(t)$  ist stetig und  $X_\alpha(0) = 0$ . Weiter kann gezeigt werden, dass dieser Prozess in Erwartungswert und Varianz der Inkremente mit einer gebrochenen Brown'schen Bewegung annähernd übereinstimmt (Falconer, 1990, [14]).

## 4.3 Anwendungen und Weiterführungen

Die gebrochene Brown'sche Bewegung findet Anwendungen in vielen Bereichen (Dieker, 2004, [2]). Ein Beispiel wird aufgeführt und eine kurze Einleitung gegeben. Dafür wird der Begriff des gebrochenen Gauss'schen Rauschens eingeführt. Das Konzept der gebrochenen Brown'schen Bewegung wird ausgeweitet, um Brown'sche Oberflächen zu simulieren.

### 4.3.1 Netzwerk-Verkehr und fraktale Gauss'sches Rauschen

Bei der Untersuchung des Netzwerk-Verkehr ist Walter Willinger ein selbstähnliches Verhalten aufgefallen. Er beschäftigte sich mit der Menge von gesendeten Bytes innerhalb eines LANs (*Local Area Network*). Willinger untersuchte Graphen und verkleinerte die gesamthaft observierte Zeit um einen Faktor von 10. Dabei fiel ihm auf, dass er zwischen den einzelnen Grafiken keinen Unterschied feststellen konnte und stellte somit einen selbstähnlichen Charakter fest (Dieker, 2004, [2]).

Er untersuchte erst einen von der gebrochenen Brown'schen Bewegung abgeleiteten inkrementalen Prozess, das fraktale Gauss'sche Rauschen. Das fraktale Gauss'sche Rauschen ist ein

stochastischer Prozess  $X = \{X(k) : k = 0, 1, \dots\}$ , gegeben als (Dieker, 2004, [2]):

$$X(k) = B_\alpha(k+1) - B_\alpha(k). \quad (4.5)$$

Dabei ist  $X(k)$  standardnormalverteilt für jedes  $k$ , jedoch herrscht im Allgemeinen keine Unabhängigkeit. Dies erschliesst sich aus der Bedingung (ii) der Definition von Brown'schen FraktaLEN ( $\sigma^2 = h^{2\alpha} = 1$ ). Diese Kovarianz zeigt sich positiv für  $\alpha > \frac{1}{2}$  und negativ für  $\alpha < \frac{1}{2}$  analog zur fraktalen Brown'schen Bewegung (Dieker, 2004, [2]).

Walter Willinger erforschte vor allem das fraktale Gauss'sche Rauschen für  $\alpha$ -Wert grösser als  $\frac{1}{2}$ , da er in seinen Untersuchungen über Netzwerk-Verkehr eine Langzeitkorrelation entdeckte. Diese findet sich auch im gebrochenen Gauss'schen Rauschen für  $\alpha > \frac{1}{2}$ , da durch die positive Kovarianzfunktion für diese Werte für  $\alpha$  die Inkremente zu gleichen Vorzeichen tendieren (Dieker, 2004, [2]).

### 4.3.2 Brown'sche Oberflächen

Anders als bei der gebrochenen Brown'schen Bewegung wird bei dem stochastischen Prozess, der für Brown'sche Oberflächen verantwortlich ist, der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$  statt  $\mathbb{R}$  abgebildet. Auch wird die Zeitvariable  $t$  durch die Koordinaten  $(x, y)$  ersetzt, so dass die Zufallsvariable  $X(x, y)$  als Höhe der Oberfläche am Punkt  $(x, y)$  interpretiert werden kann (Falconer, 1990, [14]). Für  $0 < \alpha < 1$  wird dieser stochastische Prozess  $X_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch die folgenden Eigenschaften (Falconer, 1990, [14]):

- (i) Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist  $X_\alpha(x, y)$  stetig und  $X_\alpha(0, 0) = 0$ .
- (ii) Für  $(x, y), (h, k) \in \mathbb{R}^2$  sind die Inkremente  $X_\alpha(x + h, y + k) - X_\alpha(x, y)$  normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $(h^2 + k^2)^\alpha$ , so dass:

$$\mathbb{P}(X_\alpha(x + h, y + k) - X_\alpha(x, y) \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(h^2 + k^2)^\alpha}} \int_{-\infty}^z \exp\left(\frac{-u^2}{2(h^2 + k^2)^\alpha}\right) du. \quad (4.6)$$

Eine Brown'sche Oberfläche von Index  $\alpha$  ist nun  $\{(x, y, X_\alpha(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Analog zu den Brown'schen FraktaLEN besitzt eine Brown'sche Oberfläche des Index  $\alpha$  eine Dimension von  $3 - \alpha$  (Falconer, 1990, [14]). Damit gilt, dass bei kleinem Wert für  $\alpha$  die Oberfläche viel rauer ist, da sie eine grössere Dimension aufweist. Bei grösserem Wert folgt analog eine glattere Oberfläche.

Auch bei der Konstruktion von Brown'schen Oberflächen können Probleme wie beispielsweise grosser Rechenaufwand auftreten. Doch durch wenige Anpassungen der Annäherung aus Abschnitt 4.2.2 ergibt sich eine ähnliche Annäherung auch zur Konstruktion von Brown'schen Ober-

flächen. Es sei (Falconer, 1990, [14]):

$$Y_\alpha(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \gamma^{-\alpha k} \sin(\gamma^k (x \cos(B_k) + y \sin(B_k)) + A_k). \quad (4.7)$$

Dabei entspricht  $C_k$  einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen,  $\gamma > 1$  und  $A_k$  beziehungsweise  $B_k$  sind gleichverteilt auf  $[0, 2\pi[$ . Diese Funktion bietet eine Möglichkeit zur Simulation von Brown'schen Oberflächen.

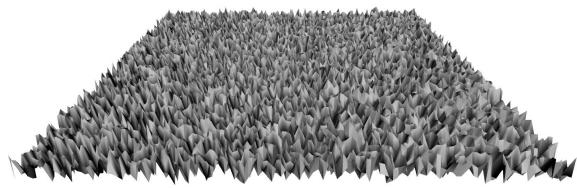


Abbildung 15:  $\alpha = 0.3$ .

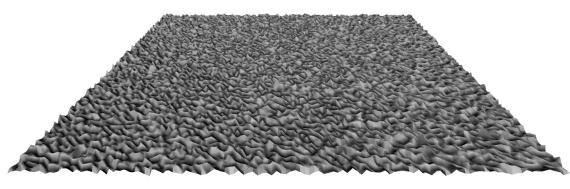


Abbildung 16:  $\alpha = 0.7$ .

Die Abbildungen 15 und 16 zeigen zwei Beispiele von Brown'schen Oberflächen, die mit obiger Annäherung simuliert wurden. Die Abbildung 15 entsteht durch die Nutzung eines kleinen Wertes für  $\alpha$ , was zu einer grösseren Dimension und damit einer raueren Oberfläche führt. Bei Abbildung 16 kann der umgekehrte Fall beobachtet werden.

Brown'sche Oberflächen finden ihre Anwendung vor allem in der Simulation von Landschaften beziehungsweise Terrains. Da durch die Veränderung von bloss einer Variablen verschiedene Oberflächen generiert werden können, ist dieser Ansatz beliebt (Falconer, 1990, [14]).

# Kapitel 5

## Brown'sche Bewegung im Finanzwesen

Dieses Kapitel befasst sich mit der Brown'schen Bewegung im Fachbereich der Finanzmathematik. Insbesondere wird dabei das Black-Scholes-Modell betrachtet, welches erst über einfache Perioden-Modelle motiviert und danach weiter analysiert wird. Grundlagen zu diesem Kapitel sind im Anhang A.3 zu finden.

### 5.1 Vom Ein-Perioden-Modell zum Black-Scholes-Modell

In den folgenden Abschnitte wird das Black-Scholes-Modell als Grenzwert eines Mehr-Perioden-Modells motiviert. Dazu wird erst ein Ein-Perioden-Modell eingeführt. Dieses Modell wird weiterentwickelt zum Mehr-Perioden-Modell, wobei auch Handelsstrategien in diesen Modellen betrachtet werden. Der Grenzwert dieses Mehr-Perioden-Modells wird als Black-Scholes-Modell motiviert. Die Märkte, die diesen Modellen zugrunde liegen, werden dabei stets als arbitragefrei angenommen.

#### 5.1.1 Einführung endlicher Perioden-Modelle

Die Grundlage des Ein-Perioden-Marktes beruht auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Für diesen Markt mit  $k$  verschiedenen Aktien existiert eine endliche Anzahl von Zuständen am Ende der Periode, welche alle positive Wahrscheinlichkeiten besitzen. Die Aktienpreise werden durch eine  $(k + 1)$ -dimensionale Variable  $S$  beschrieben. Dabei gilt, dass  $S(0)$ , das heisst die Aktienwerte zur Zeit  $t = 0$ , bekannt ist. Weiter ist  $S_j(T, \omega)$  positiv für alle  $j = 1, 2, \dots, k$  und  $\omega \in \Omega$  und  $S_0(T, \omega) = 1$ . Insbesondere werden die Aktienkurse zur Zeit  $T$  als Zufallsvariablen modelliert, wobei angenommen wird, dass die Menge aller verschiedenen Werte endlich und bekannt ist (Korn, 2002, [7]).

Ein Investor besitzt nun die Möglichkeit im Zeitpunkt  $t = 0$  sein Anfangsvermögen auf die Aktien aufzuteilen beziehungsweise Teile als Bargeld zu behalten. Negative Anzahlen werden als Kredit oder Leerkauf interpretiert. Eine Handelsstrategie ist ein  $(k + 1)$ -dimensionaler Vektor  $\Psi(0)$ . Die einzelnen Komponenten geben die Stückzahlen der einzelnen Aktien oder des Bargelds an. Das Anfangs- und Endvermögen werden mit  $V^\Psi(0)$  und  $V^\Psi(T)$  bezeichnet und sind gegeben durch (Korn, 2002, [7]):

$$V^\Psi(0) = \sum_{i=0}^k \Psi_i(0) S_i(0), \quad (5.1)$$

$$V^\Psi(T) = \Psi_0(0) + \sum_{i=1}^k \Psi_i(T) S_i(T). \quad (5.2)$$

Diese Summen können auch als Skalarprodukt der Vektoren  $S(t)$  und  $\Psi(T)$  aufgefasst werden. Wichtig zu sehen ist, dass auch  $V^\Psi(T)$  eine Zufallsvariable ist. Bei einem Ein-Perioden-Modell ist somit genau eine Entscheidung des Investors gesucht (Korn, 2002, [7]).

Doch dieses Modell kann auch weiter erweitert beziehungsweise verallgemeinert werden zum Mehr-Perioden-Modell. Grundlage zu diesem Modell bildet erneut ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ . Es existieren wieder endlich viele mögliche Zustände des Marktes zum Ende der Periode. Die zeitliche Entwicklung der Wertpapiere ist durch den  $(k + 1)$ -dimensionalen stochastischen Prozess  $S = \{S(t), t \in \{0, 1, \dots, T\}\}$  beschrieben. Analog zum Ein-Perioden-Markt gilt, dass  $S(0)$  bekannt ist und dass  $S_j(t, \omega) > 0$  für alle  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$  und  $j = 1, 2, \dots, k$ . Weiter gilt stets  $S_0(t, \omega) = 1$  (Korn, 2002, [7]).

Ein Investor trifft seine Entscheidungen über seine Kapitalanlage auf Basis der gegenwärtigen und vergangenen Aktienpreise. Dabei sind ihm keine weiteren Informationen bekannt. Er besitzt die Möglichkeit an den Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  sein Vermögen auf verschiedene Wertpapiere aufzuteilen (Korn, 2002, [7]). Natürlich kann er auch Teile seines Vermögens als Bargeld halten. Eine Handelsstrategie wird durch den  $(k + 1)$ -dimensionalen Prozess  $\Psi(t)$  mit  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  definiert. Die einzelnen Komponenten stellen die Stückzahl der einzelnen Aktien beziehungsweise die Menge gehaltenes Bargeld dar. Die Entscheidung zur haltenden Stückzahl  $\Psi(t)$  wird im Zeitpunkt  $t$  nach Betrachtung der Aktienpreise  $S(t)$  getroffen. Diese Stückzahl bleibt bis zur nächsten Umschichtung konstant (Korn, 2002, [7]).

Der zugehörige Vermögensprozess  $V^\Psi(t)$  ist gegeben als (Korn, 2002, [7]):

$$V^\Psi(t) = \sum_{i=0}^k \Psi_i(t) S_i(t), \quad t = 1, \dots, T - 1, \quad (5.3)$$

$$V^\Psi(T) = \sum_{i=0}^k \Psi_i(T-1) S_i(T). \quad (5.4)$$

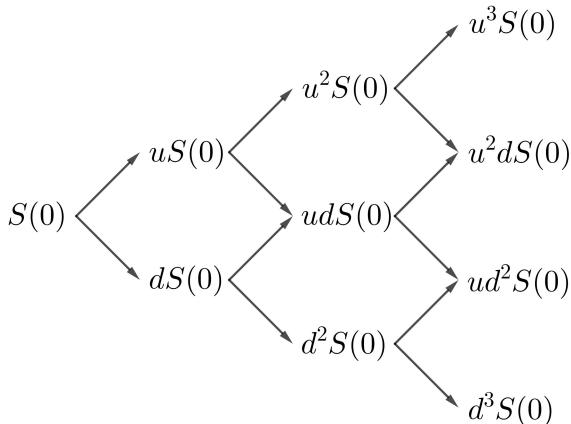
Der Investor muss sich dabei selbst-finanzierend verhalten, das heisst sein Vermögen muss vor und nach der Umschichtung identisch sein (Korn, 2002, [7]):

$$\sum_{i=0}^k \Psi_i(t-1) S_i(t) = \sum_{i=0}^k \Psi_i(t) S_i(t), \quad t = 2, \dots, T - 1. \quad (5.5)$$

Ein mögliches Modell für diesen Markt ist das Cox-Ross-Rubinstein-Modell, auch bekannt als Binomialmodell (Korn, 2002, [7]). In diesem Modell findet zur Zeit  $\frac{jT}{n}$  mit  $j = 1, \dots, n$  jeweils eine Preisänderung statt. Zu diesen Zeitpunkten kann der Investor auch jeweils sein Vermögen umschichten. Der Aktienpreis verhält sich dabei wie aus einzelnen Ein-Perioden-Binomialmodellen zusammengesetzt. Dies bedeutet, dass die Vermehrungsfaktoren  $u$  und  $d$  sowie die Wahrscheinlichkeit  $p$  für einen Kursanstieg in jedem Knoten gleich sind. Somit kann der Preis einer Aktie zum

Zeitpunkt  $\frac{iT}{n}$  eindeutig durch die Anzahl vorheriger Kursanstiege bestimmt werden. Der Name Binomialmodell erschliesst sich dadurch, dass die Anzahl  $X_n$  Kursanstiege der Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$  folgt. Als Alternative zur Aktie existiert im Cox-Ross-Rubinstein-Modell auch eine risikolose Anlagemöglichkeit zu einem Zinssatz  $r \geq 0$  (Korn, 2002, [7]).

Für ein Drei-Perioden-Binomialmodell mit Anfangswert der Aktie  $S(0)$  ergäben sich folgende Aktienwerte mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:



$S(T)$	$\mathbb{P}(S(T))$
$u^3S(0)$	$p^3$
$u^2dS(0)$	$3p^2(1-p)$
$ud^2S(0)$	$3p(1-p)^2$
$d^3S(0)$	$(1-p)^3$

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten.

Abbildung 17: Aktienkurs des Modells.

### 5.1.2 Das Black-Scholes-Modell als Grenzwert endlicher Perioden-Modelle

Besteht in einem Modell eines Marktes die Möglichkeit an jedem beliebigen Zeitpunkt  $0 \leq t < T$  seine Handelsstrategie zu ändern beziehungsweise sind die Zeitspannen zwischen zwei Umschichtungsmöglichkeiten unendlich klein, kann nicht mehr von einem endlichen Mehr-Perioden-Modell gesprochen werden. Es braucht ein neues Modell zur Beschreibung eines solchen Marktes. Das wohl populärste Aktienpreismodell ist das Black-Scholes-Merton-Modell, meist blass Black-Scholes-Modell genannt (Hull, 2011, [16]; Korn, 2002, [7]). Dieses ist benannt nach seinen Erfindern Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton.

Im Modell wird  $S(t)$  als Wertpapierpreis zum Zeitpunkt  $t$  verstanden. Weiter beschreibt  $\mu$  die erwartete Rendite des Aktienkurses,  $\sigma > 0$  die Volatilität und  $B(t)$  eine Standard Brown'sche Bewegung. Die Entwicklung des Aktienpreises wird durch die folgende stochastische Differentialegleichung beschrieben (Hull, 2011, [16]):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t). \quad (5.6)$$

Diese Gleichung beschreibt einen Aktienpreiskurs in der realen Welt. In einer risikoneutralen Welt würde sich  $\mu$  der risikolosen Zinsrate  $r$  annähern (Hull, 2011, [16]). Die prozentuale Änderung  $\frac{dS(t)}{S(t)}$  ist somit abhängig von einer normalverteilten Zufallsvariable ( $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ ). Diese Normalverteilung kann als Grenzwert der Binomialverteilung des Binomialmodells verstanden

werden.

Die Lösung dieser Differentialgleichung und damit die Funktion zur Bestimmung eines Aktienpreises ist (Hull, 2011, [16]; Korn, 2002, [7]):

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T + \sigma B(T)\right). \quad (5.7)$$

Damit ist der Preis einer Aktie abhängig vom Startwert  $S(0)$ , der Rendite  $\mu$ , der Volatilität  $\sigma$  und einem stochastischen Faktor  $B(t)$ , der Brown'schen Bewegung. Die Grundlage dieser Lösung der Differentialgleichung (5.6) können *Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modeling and Applied Probability)* [15] nachgelesen werden.

## 5.2 Das Black-Scholes-Modell

Die nächsten Abschnitte befassen sich weiter mit dem im vorherigen Unterkapitel 5.1 motivierten Black-Scholes-Modell, welches als stochastischen Faktor eine Standard Brown'sche Bewegung aufweist. Auf die einzelnen bestimmenden Faktoren des Modells wird detailliert eingegangen. Anschliessend wird der Wert einer europäischen Option berechnet.

### 5.2.1 Eigenschaften des Black-Scholes-Modell

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Black-Scholes-Modells ist, dass die prozentuale Änderung des Aktienpreises logarithmisch normalverteilt ist (Hull, 2011, [16]):

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right]T, \sigma^2 T\right). \quad (5.8)$$

Durch Nutzung der Logarithmengesetze und Eigenschaften der Normalverteilung kann ermittelt werden, dass auch  $S(t)$  einer logarithmischen Normalverteilung folgt (Hull, 2011, [16]):

$$S(t) \sim \mathcal{LN}\left(\ln(S(0)) + \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right]T, \sigma^2 T\right). \quad (5.9)$$

Damit ist die Standardabweichung des Logarithmus abhängig von der Quadratwurzel der Zeitspanne  $T$ .

Zumal der Aktienpreis  $S(T)$  abhängig ist von einem stochastischen Faktor, kann dieser nicht analytisch berechnet werden. Dadurch ist es nützlich, Erwartungswert und Varianz zu bestimmen. Da der Erwartungswert einer Variable  $X$ , die einer logarithmischen Normalverteilung  $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$  folgt,  $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$  entspricht, gilt (Hull, 2011, [16]; Korn, 2002, [7]):

$$\mathbb{E}(S(t)) = S(0)e^{\mu t}. \quad (5.10)$$

Für die Varianz ergibt sich für die Variable  $X$  der Term  $e^{\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$  und damit für den Aktienpreis (Hull, 2011, [16]):

$$\text{Var}(S(T)) = S(0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1). \quad (5.11)$$

Anhand dieser beiden Eigenschaften des Wertpapierpreises wird die Bedeutung der Rendite  $\mu$  und der Volatilität  $\sigma$  weiter verdeutlicht. Die mittlere Rendite oder auch mittlere Ertragsrate ist entscheidend für den Erwartungswert eines Aktienpreises (Hull, 2011, [16]). Da eine gewisse Analogie zum Zins bei einer risikolosen Anlage erkennbar ist, wird selten auch von der mittleren Zinsrate gesprochen (Korn, 2002, [7]). Weiter ist zu erkennen, dass die Volatilität  $\sigma$  blos einen Einfluss auf die Varianz des Aktienpreises besitzt. Die Volatilität einer Aktie kann somit als Mass ihrer Unsicherheit bezüglich ihrer Rendite angesehen werden. Typischerweise weisen Aktien eine Volatilität zwischen 15% und 60% auf (Hull, 2011, [16]).

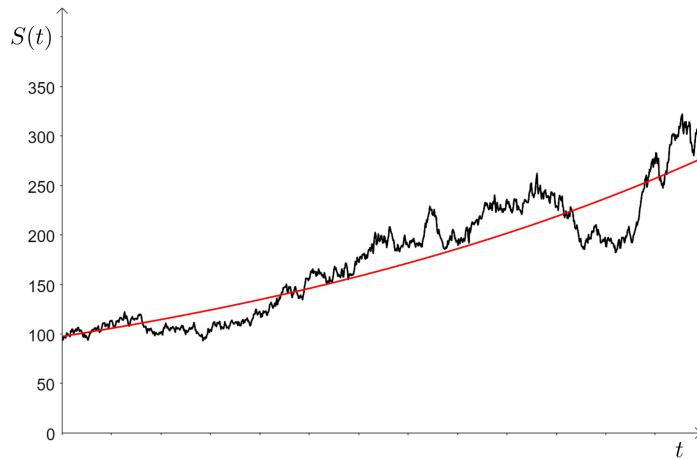


Abbildung 18: Aktienkurs im Black-Scholes-Modell.

Die Abbildung 18 zeigt ein Beispiel für einen Kurs einer Aktie im Black-Scholes-Modell in Abhängigkeit der Parameter  $\mu = 1.05$ ,  $\sigma = 0.6$  und  $S(0) = 100$ . In roter Farbe ist der Erwartungswert des Aktienpreises zu erkennen. Die Brown'sche Bewegung wurde über normalverteilte unabhängige Inkremente konstruiert. Diese Konstruktionsmethode ist in Kapitel 3.3.1 beschrieben.

## 5.2.2 Berechnung des Payoffs einer europäischen Call-Option

Zur Berechnung des Wertes einer europäischen Option ist der Wertpapierpreis durch die Gleichung (5.7) gegeben. Der Wert der risikolosen Geldanlage, sprich dem Halten von Bargeld ist gegeben durch (Korn, 2002, [7]):

$$G(t) = e^{rt}. \quad (5.12)$$

Wobei  $r$  für den Zinssatz einer kontinuierlichen Verzinsung steht.

Mithilfe des Duplikationsprinzips ergibt sich, dass  $\mu = r$  angenommen werden kann, so dass sich der Optionspreis als abgezinster Erwartungswert der Endzahlung ergibt. Das Duplikationsprinzip besagt, dass falls zwei Finanzprodukte in einem arbitragefreien Markt den gleichen Zahlungs-

strom liefern, die Preise dieser in jedem Zeitpunkt identisch sein müssen (Korn, 2002, [7]). Der Beweis dieses Prinzips und weitere Grundlagen zur obigen Annahme werden in dieser Arbeit nicht weiter behandelt, können jedoch in *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden der Finanzmathematik* [17] nachgelesen werden.

Als Beispiel wird eine europäische Call-Option angenommen. Für die Berechnung von Optionspreisen ist der Erwartungswert des Payoffs entscheidend (Korn, 2002, [7]):

$$\mathbb{E} \left( e^{-rT} (S(T) - K)^+ \right). \quad (5.13)$$

Dabei entspricht  $K$  dem Kaufpreis der Option und der Abzinsungsfaktor  $e^{-rT}$  ist nötig, um den Wert der Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu ermitteln. Dieser Erwartungswert kann berechnet werden, in dem der Term der Brown'schen Bewegung durch eine normalverteilte Zufallsvariable  $Z \sim \mathcal{N}(0, T)$  ersetzt wird. Durch einige Integralumformungen und eine Reduktion des Terms  $(S(T) - K)^+$  zu  $S(T) - K$  durch geschicktes Ändern der Grenzen kann dieser Erwartungswert berechnet werden (Korn, 2002, [7]). Der Payoff einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis  $K$  und Laufzeit  $T$  ist innerhalb des Black-Scholes-Modell gegeben als (Hull, 2011, [16]; Korn, 2002, [7]):

$$P_{Call} = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \quad (5.14)$$

wobei  $d_1$  und  $d_2$  wie folgt definiert sind:

$$d_1 = \frac{\ln \left( \frac{S(0)}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (5.15)$$

Die Funktion  $\Phi(t)$  entspricht dabei der Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung. Somit zeigt sich, dass der Payoff einer europäischen Option nicht abhängig ist von der Ertragsrate  $\mu$ . Dies ist wichtig, da die Abschätzung einer Ertragsrate an einem Markt sehr schwer ist und selten Einigkeit erzielt wird. Dagegen können die zwei Größen Zins und Volatilität einfach am Markt ermittelt beziehungsweise aus Daten geschätzt werden (Korn, 2002, [7]).

Myron Scholes und Robert Merton erhielten für dieses Modell insbesondere der Betrachtung von Optionsbewertungen 1997 den Nobelpreis. Fischer Black erlebte dies nicht mehr, da er bereits 1995 verstarb (Korn, 2002, [7]).

# Kapitel 6

## Schlussfolgerung

Der erste Teil der Schlussfolgerung befasst sich mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit. In einem weiteren Schritt werden mittels eines Ausblicks einige mögliche Weiterführungen der behandelten Themen aufgeführt.

### 6.1 Erkenntnisse

Die Brown'sche Bewegung kann als Paradebeispiel der Interdisziplinarität verstanden werden. Entdeckt von einem Biologen, beschrieben von Physikern, modelliert von Mathematikern und genutzt in den verschiedensten Fachbereichen, die die Wissenschaften, aber auch die Wirtschaft zu bieten haben, ist die Brown'sche Bewegung ein Komplex, hinter dem sich viele Möglichkeiten verstecken.

Erstmals entdeckt von Robert Brown, wurde der physikalische Prozess der Brown'schen Bewegung vor allem durch Albert Einstein geprägt. Dieser ordnete der zufälligen Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten Abhängigkeiten zu, die zu einer ersten Qualifizierung aber auch Quantifizierung führten. Vor allem Jean Perrins Arbeiten, die durch viel Geduld und Genauigkeit überzeugten, führten im Bereich der Messtechnik und -qualität zu Fortschritten (Haw, 2002, [3]).

Fast entscheidender bleibt jedoch das mathematische Modell der Brown'schen Bewegung. Dieser stochastische Prozess, der keine Monotonie und Differenzierbarkeit zeigt, weist einen starken Bezug zur Normalverteilung auf (Mörters und Peres, 2010, [19]). Entscheidend bei stochastischen Modellen sind ihre Konstruktionsmöglichkeiten, wobei diese beim Wienerprozess zahlreich existieren. Die verschiedenen Konstruktionstechniken nehmen dabei stets Bezug auf eine Normalverteilung beziehungsweise eine an die Normalverteilung angenäherte Binomialverteilung und sind bemüht der Definition der Brown'schen Bewegung bestmöglich zu entsprechen. Trotzdem bleiben die Konstruktionsverfahren bloss Annäherungen, da der stochastische Prozess des Wienerprozesses nicht absolut konstruiert werden kann (Higham, 2001, [4]).

Durch kleine Umformungen in der Definition können aus der Brown'schen Bewegung weitere stochastische Prozesse und Modelle gebildet werden, wie beispielsweise Brown'sche Fraktale. Dieser Prozess konstruiert ein Fraktal, das heißt eine Menge an Punkten, deren Dimension nicht ganzzahlig ist, welches fraktaltypisch auch selbstähnlich ist (Falconer, 1990, [14]). Der Prozess kann dabei auch durch eine Kovarianzfunktion beschrieben werden. Entscheidend für diesen stochastischen Prozess ist der Hurstparameter, der Kovarianz und damit auch Dimension entscheidend beeinflusst. Anwendung finden Brown'sche Fraktale beispielsweise in der Simulation von Netzwerk-Verkehr in Form von fraktalem Gauss'schen Rauschen, einem vom Brown'schen Frak-

tal abgeleiteten Inkrementalprozess (Dieker, 2004, [2]). Auch kann das Prinzip des Brown'schen Fraktals auf eine weitere Dimension zu den Brown'schen Oberflächen ausgeweitet werden, welche Anwendung in der Geländesimulation finden. Dabei entscheidet erneut der Hurstparameter über Form und damit Dimension (Falconer, 1990, [14]).

Als mögliches Einsatzgebiet eines stochastischen Modells bietet sich die Finanzwirtschaft, vor allem deren Aktienkurse an, da diese stets unsicher sind und deshalb zur Modellierung eine stochastische Komponente benötigen. Beispielhaft dafür ist das Black-Scholes-Modell, welches in Abhängigkeit von Startwert, Rendite und Volatilität einen Aktienkurs simuliert (Hull, 2011, [16]). Mittels dieses Modells können auch Payoffs von Optionen beziehungsweise deren Erwartungswerte berechnet werden. Optionen und andere Derivate gehören zu den wichtigsten Finanzprodukten und den Pfeilern der Finanzwirtschaft, da das Risiko als wichtigstes Finanzgut gilt (Korn, 2002, [7]).

## 6.2 Ausblick

Innerhalb des Modells der Brown'schen Bewegung bieten sich viele Erweiterungsmöglichkeiten vor allem in der Grundtheorie von stochastischen Prozessen an. Beispiele dafür sind die Integration von stochastischen Prozessen durch das Itô-Integral oder auch das Stratonowitsch-Integral. Weitere Grundtheoreme über Wahrscheinlichkeiten und Eigenschaften des Wienerprozesses könnten analysiert werden (Mörters und Peres, 2010, [19]).

Auch innerhalb der Brown'schen Fraktale gibt es weitere Anwendungen in Bereichen der elektrischen Kommunikationstechnik, im Besonderen im Bereich der Simulation von Rauschsignalen. Die Konstruktion von Brown'schen Fraktalen kann mittels mehrerer exakten Konstruktionsverfahren über Umformungen der Kovarianzmatrix näher betrachtet werden. Ein Beispiel dafür wäre das Hosking-Verfahren oder auch die Cholesky-Methode (Dieker, 2004, [2]).

Durch die Abhängigkeit vieler Modelle aus verschiedenen Anwendungsbereichen von einer stochastischen Komponente bietet sich die Brown'sche Bewegung sehr an und stellt einen geeigneten stochastischen Prozess dar. Beispiele für Anwendungen finden sich in den verschiedensten Bereichen, wobei einige wenige kurz vorgestellt werden. Im Bereich der Wirtschaft und Finanzmathematik bieten sich Modelle zur Simulation von Aktienkursen wie das vorgestellte Black-Scholes-Verfahren und dessen Weiterführungen, das Heston-Modell, welches selbst der Volatilität einen stochastischen Faktor zuordnet, an. Zudem existieren Modelle zur Ermittlung von Versicherungsrisiken, welche Häufigkeit und Grösse der Schäden simulieren.

Weitere Anwendungen finden sich in vielen Bereichen der Biologie, der Chemie oder auch der Physik bei der Simulation von Prozessen wie beispielsweise Wärmeleitungsprozesse aber auch in der ursprünglichsten Idee der Brown'schen Bewegung als Teilchenbewegung in Diffusionen und Osmosen.

# Anhang A

## Begriffserklärungen und Definitionen

Dieses Kapitel begründet und motiviert mathematische Grundlagen zum Hauptteil der Arbeit.

### A.1 Kapitel 3: Brown'sche Bewegung als Zufallsfunktion

Dieser Abschnitt befasst sich mit den Definitionen zum Verständnis des Kapitels 3.

#### A.1.1 Gauss'sche Normalverteilung

Wahrscheinlichkeitsfunktionen oder auch -verteilungen sind Funktionen, welche jedem möglichen Wert einer Zufallsvariablen dessen Wahrscheinlichkeit zuordnen (Baum u. a., 2013, [11]). Als wichtigstes Verteilungsmodell in der Statistik wird die Normalverteilung angesehen (Xu, 2009, [10]). Der Entdecker der Normalverteilung ist Carl Friedrich Gauss, weswegen der Graph der Verteilung auch unter dem Namen "Gauss'sche Glockenkurve" bekannt ist (Xu, 2009, [10]). Sie wird folgendermassen definiert:

Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable, dann ist diese normalverteilt mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad (\text{A.1})$$

wenn ihre Dichtefunktion durch

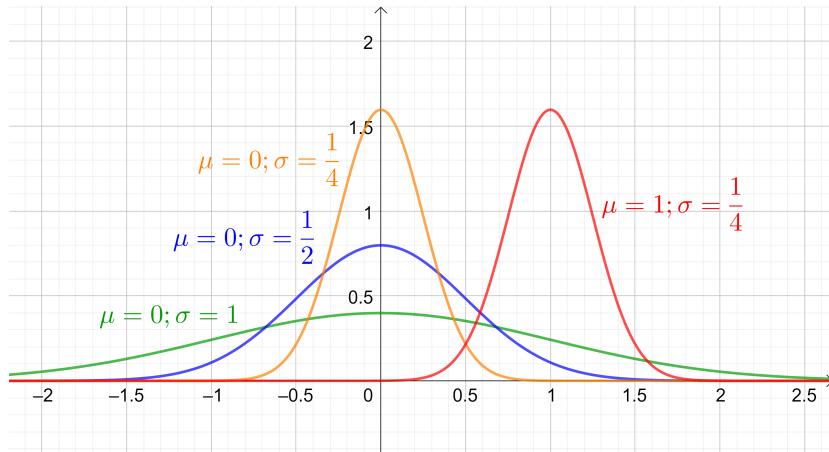
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

gegeben ist (Zhuohua Xu, 2009, [10]). Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$  durch das folgende Integral berechnen (Baum u. a., 2013, [11]):

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (\text{A.3})$$

Eine Normalverteilung wird von zwei Parametern charakterisiert: dem Erwartungswert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ . Dabei verändert  $\sigma$  die Gestalt der Kurve und  $\mu$  nur die Position in  $x$ -Richtung.

Zusätzlich ist die Gauss'sche Glockenkurve achsensymmetrisch zur Achse  $x = \mu$ . Das globale Maximum liegt ebenfalls auf dieser Achse und besitzt die  $y$ -Komponente  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  (Xu, 2009, [10]). Die wichtigste Normalverteilung ist die Standardnormalverteilung mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  (Xu, 2009, [10]).

Abbildung 19: Normalverteilungen mit unterschiedlichen  $\mu$  und  $\sigma$ .

Für die Dichtefunktion  $\varphi$  existiert keine elementar bestimmbare Stammfunktion, was die Berechnung des Integrals (A.3) erschwert (Xu, 2009, [10]). Dadurch können die Werte der Verteilungsfunktion nur durch numerische Integrationen (Näherungsverfahren) berechnet werden. In der Praxis werden diese Wahrscheinlichkeitswerte in Tabellen für die Standardnormalfunktion gedruckt. Durch die unendliche Menge an Normalverteilungen gibt es keine Formelsammlung, die für jede Normalverteilung mit beliebigen Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  eine solche Tabelle aufweist. Daher ist es wichtig, diese Normalverteilungen auf eine Standardnormalverteilung zurückzuführen. Dies geschieht durch die Standardisierung, welche wie folgt beschrieben werden kann.

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , dann gilt (Xu, 2009, [10]):

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (\text{A.4})$$

Um dies zu zeigen, müssen Erwartungswert und Varianz von  $Z$  bestimmt werden:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\mathbb{E}(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0; \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{\text{Var}(X)}{\sigma^2} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Damit ist  $Z$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ , was einer Standardnormalverteilung entspricht.

Falls jede Komponente einer  $k$ -dimensionale Zufallsvariable normalverteilt ist, wird von einer  $k$ -dimensionalen Normalverteilung gesprochen (Falconer, 1990, [14]).

### A.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  besteht aus drei Komponenten: der Ergebnismenge  $\Omega$ , dem Ereignissystem  $\Sigma$  und dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  (Shum, 2019, [9]).

Die Ergebnismenge  $\Omega$  enthält alle möglichen Ergebnisse eines Experiments oder auch die Aus-

gänge eines stochastischen Prozesses (Shum, 2019, [9]). Als Beispiel kann ein Experiment angesehen werden, in welchem eine Münze zweimal geworfen wird. In diesem Fall würde die Ergebnismenge folgendermassen aussehen:  $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$ . Ein Ereignis ist dabei eine Teilmenge von  $\Omega$  (Shum, 2019, [9]). Im genannten Beispiel wäre ein mögliches Ereignis “zweimal Kopf“.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreibt  $\Sigma$  eine  $\sigma$ -Algebra von  $\Omega$ . Eine  $\sigma$ -Algebra muss die folgenden Eigenschaften erfüllen (Shum, 2019, [9]):

- (i)  $\emptyset \in \Sigma$ .
- (ii) Falls ein Ereignis  $A \in \Sigma$ , dann  $A^c \in \Sigma$  (geschlossen unter Komplementbildung).
- (iii) Falls  $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ , dann  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$  (geschlossen unter abzählbarer Vereinigung).

Dabei gibt es meistens mehrere Möglichkeiten von  $\sigma$ -Algebren, selbst für einfache Beispiele, wie das Münzwurfbeispiel (Shum, 2019, [9]). Die trivialsten Beispiele sind wohl  $\{\emptyset, \Omega\}$  oder die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  ist definiert als das Mengensystem, das alle Teilmengen von  $\Omega$  enthält. Ein Element aus  $\Sigma$  heisst Ereignis.

Das Wahrscheinlichkeitsmass  $\mathbb{P}$  ordnet den Elementen aus  $\Sigma$  einen Wert aus dem Intervall  $[0, 1]$  zu. Dabei gilt (Shum, 2019, [9]):

- (i)  $\mathbb{P}(A) \geq 0$ , für alle  $A \in \Sigma$ .
- (ii)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- (iii) Sind  $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$  paarweise disjunkte Ereignisse (das bedeutet  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ ) gilt  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ .

Für das Beispiel mit dem Münzwurf bedeutet dies folgendes:

Ereignis $A$	$\mathbb{P}(A)$
$KK$	$\frac{1}{4}$
$KZ$	$\frac{1}{4}$
$ZK$	$\frac{1}{4}$
$ZZ$	$\frac{1}{4}$
$\emptyset$	0
$\Omega$	1
$(KK, KZ, ZK)$	$\frac{3}{4}$
$(KK, ZZ)$	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 2: Wahrscheinlichkeitstabelle Beispiel.

## A.2 Kapitel 4: Brown'sche Fraktale

Dieses Unterkapitel befasst sich mit Fraktalen. Grundlegende Definitionen und Begriffe werden erläutert, um das in Kapitel 4 beschriebene Brown'sche Fraktal besser zu verstehen.

### A.2.1 Definition eines Fraktals

Der Begriff *Fraktal* wurde erstmal von Mandelbrot definiert. Er beschrieb ein Fraktal als eine Menge, deren Hausdorff-Dimension die topologische Dimension übersteigt (Mandelbrot, 2013, [18]). Die Hausdorff-Dimension wird in Abschnitt A.2.2 genauer beschrieben und beschreibt eine Abbildung, wobei einer Teilmenge des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$  eine positive reelle Zahl zugeordnet wird. Die topologische Dimension ist immer ganzzahlig. Mit diesem Wissen und der Ungleichung von Szpilrajn, die besagt, dass die Hausdorff-Dimension immer grösser oder gleich der topologischen Dimension sein muss, ist bekannt, dass jede Menge mit einer nichtganzzahligen Hausdorff-Dimension ein Fraktal ist (Mandelbrot, 2013, [18]).

### A.2.2 Dimensionen von Fraktalen

Ein wichtiger Begriff zur Beschreibung von Fraktalen ist die Dimension. Fraktale haben meist nicht ganzzahlige Dimensionen, die durch verschiedene Verfahren errechnet werden können. Die zwei wichtigsten, die Hausdorff- und die Boxcounting-Dimension, werden vorgestellt. Welches Verfahren für die Berechnung einzelner Fraktale verwendet wird, unterscheidet sich von Fraktal zu Fraktal, da nicht jedes Verfahren bei jedem Fraktal funktioniert und sich diese in ihrem Rechenaufwand unterscheiden können (Falconer, 1990, [14]).

#### Hausdorff-Mass und Dimension

Das Hausdorff-Mass verallgemeinert die Idee von Länge, Fläche, Volumen und ähnlichem, jedoch ist es nicht mehr abhängig von ganzzahligen Dimensionen.

Es sei  $U$  eine nicht leere Teilmenge des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$ , dann ist der Durchmesser von  $U$  definiert als  $|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$ , also die grösste Distanz zwischen zwei Punkten in  $U$  (Falconer, 1990, [14]). Falls  $\{U_i\}$  eine endliche Mengenfamilie mit maximalen Durchmesser  $\delta$  ist und das Fraktal  $F$  überdeckt, entspricht  $\{U_i\}$  einer  $\delta$ -Überdeckung von  $F$ . Angenommen  $F$  ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $s$  ist eine nicht-negative Zahl. Für jedes  $\delta > 0$  wird definiert (Falconer, 1990, [14]):

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Durch die obige Gleichung wurde die Summe der  $s$ -ten Potenz der Diameter minimiert über alle möglichen  $\delta$ -Überdeckungen von  $F$ . Mit kleiner werdendem  $\delta$  sinkt auch die Zahl an möglichen

Überdeckungen von  $F$ . Dadurch wächst das Infinum  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  und es gilt (Falconer, 1990, [14]):

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (\text{A.8})$$

Dieser Grenzwert existiert für jede Teilmenge  $F$  von  $\mathbb{R}^n$ , jedoch kann der Grenzwert 0 oder  $\infty$  betragen.  $\mathcal{H}^s(F)$  wird  $s$ -dimensionales Hausdorff-Mass genannt. Analog zu den bekannten Skalierungsfaktoren von Länge ( $\lambda$ ), Fläche ( $\lambda^2$ ) und Volumen ( $\lambda^3$ ) gilt der Skalierungsfaktor  $\lambda^s$  für ein  $s$ -dimensionales Hausdorff-Mass (Falconer, 1990, [14]).

Zur Bestimmung der Hausdorff-Dimension muss eine weitere Eigenschaft des Hausdorff-Masses geklärt werden. Dieses „springt“ an einem kritischen Wert für  $s$  von  $\infty$  zu 0. Dieser kritische Punkt wird Hausdorff-Dimension von  $F$  genannt und wird geschrieben als  $\dim_H(F)$  (Falconer, 1990, [14]; Mandelbrot, 2013, [18]). Formal bedeutet dies:

$$\dim_H(F) = \inf \{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}, \quad (\text{A.9})$$

so dass gilt:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H(F) \\ 0, & s > \dim_H(F) \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Falls  $s = \dim_H(F)$ , kann  $\mathcal{H}^s(F)$  sowohl null oder unendlich entsprechen oder die Ungleichung  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$  erfüllen (Mandelbrot, 2013, [18]).

Die Berechnung der Hausdorff-Dimension kann jedoch kompliziert werden, wodurch auch auf andere Verfahren zur Dimensionsbestimmung zurückgegriffen werden muss.

### **Boxcounting-Dimension**

Die Boxcounting-Dimension ist ein oft genutztes Verfahren zur Bestimmung der Dimension eines Fraktales, da die mathematische Ausrechnung und Annäherung relativ simpel ist (Falconer, 1990, [14]).

Sei  $F$  eine nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $N_\delta(F)$  die kleinste Anzahl von Mengen mit einem maximalen Durchmesser von  $\delta$ , welche  $F$  überdecken können. Dann ist die untere und die obere Boxcounting-Dimension definiert als (Falconer, 1990, [14]):

$$\sup(\dim_B F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)} \quad (\text{A.11})$$

$$\inf(\dim_B F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)}. \quad (\text{A.12})$$

Falls sich diese entsprechen, wird dieser Wert Boxcounting-Dimension von  $F$  genannt (Falconer, 1990, [14]):

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)}. \quad (\text{A.13})$$

Es gibt einige äquivalente Definitionen für die Boxcounting-Dimension, welche öfter genutzt werden. Beispielsweise gilt für eine Anordnung von Würfeln mit Seitenlänge  $\delta$  in einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^n$ , das heisst Würfel der Form

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta] \text{ für } m \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.14})$$

eine sehr ähnliche Rechenregel. Sei nun  $N'_\delta(F)$  die Anzahl an Würfeln des  $\delta$ -Netzes die sich mit  $F$  schneiden. Es ergibt sich eine Sammlung von  $N_{\delta\sqrt{n}}(F)$  Mengen mit Durchmesser  $\delta\sqrt{n}$ , welche  $F$  überdeckt, so dass gilt (Falconer, 1990, [14]):

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F). \quad (\text{A.15})$$

Falls  $\delta\sqrt{n} < 1$ , dann

$$\frac{\log(N_{\delta\sqrt{n}}(F))}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log(N'_\delta(F))}{-\log(\sqrt{n}) - \log(\delta)}. \quad (\text{A.16})$$

Damit gilt für  $\delta \rightarrow 0$  (Falconer, 1990, [14]):

$$\inf(\dim_B F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N'_\delta(F))}{-\log(\delta)} \quad (\text{A.17})$$

und

$$\sup(\dim_B F) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N'_\delta(F))}{-\log(\delta)}. \quad (\text{A.18})$$

Falls sich nun diese Grenzwerte entsprechen, können sie mit der Boxcounting-Dimension gleichgesetzt werden. Damit kann auch über ein  $\delta$ -Netz an Würfeln die Boxcounting-Dimension berechnet werden (Falconer, 1990, [14]).

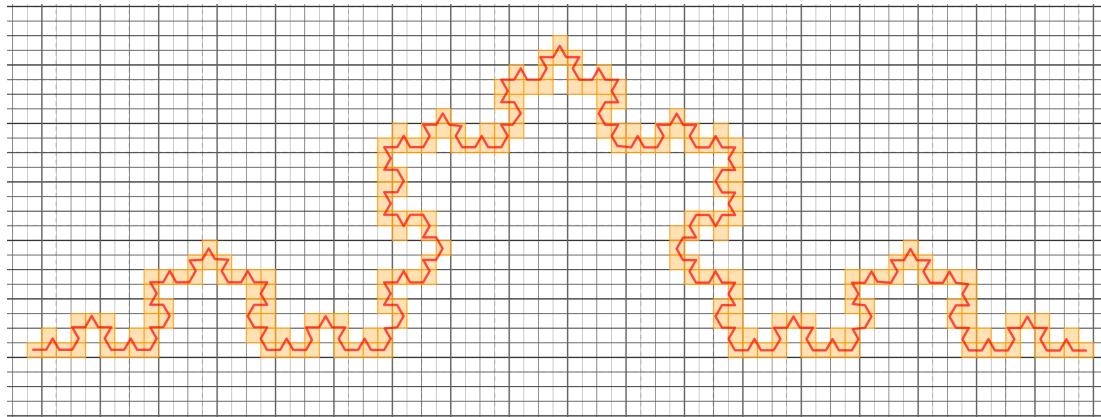


Abbildung 20: Boxcounting-Dimension.

Die Abbildung 20 zeigt eine Veranschaulichung des Prinzips der Boxcounting-Dimension. In diesem Beispiel wurde ein zweidimensionales Netz benutzt, um die Dimension anzunähern. Das gezeigte Fraktal, die Kochkurve, kann durch einen iterativen Prozess konstruiert werden. Hierbei wird jeder Streckenabschnitt durch vier Teilstrecken ersetzt, die jeweils ein Drittel des ursprünglichen Streckenabschnitts ausmachen. Die Strecken werden so angelegt, dass die Winkel zwischen den Strecken  $240^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $240^\circ$  entsprechen (Falconer, 1990, [14]).

Das Konzept der Boxcounting-Dimension kann weiter ausgeweitet werden. Mögliche Beschreibungen von  $N_\delta(F)$  sind (Falconer, 1990, [14]):

- (i) Die kleinste Anzahl an geschlossenen Kugeln mit Radius  $\delta$ , welche  $F$  überdecken.
- (ii) Die kleinste Anzahl an Würfeln mit Seitenlänge  $\delta$ , welche  $F$  überdecken.
- (iii) Die Anzahl an Würfeln eines  $\delta$ -Netzes die sich mit  $F$  schneiden.
- (iv) Die kleinste Anzahl an Mengen mit maximalem Durchmesser  $\delta$  die  $F$  überdecken.
- (v) Die grösste Anzahl an disjunkten Kugeln mit Radius  $\delta$  mit Mittelpunkt in  $F$

Diese Liste könnte noch erweitert werden (Falconer, 1990, [14]).

## A.3 Kapitel 5: Brown'sche Bewegung im Finanzwesen

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Einblick in die Finanzmathematik gegeben und danach einige grundlegende Begriffe zum Verständnis des Kapitels 5 des Hauptteils gegeben.

### A.3.1 Die Mathematik des Finanzwesens

Die Finanzmathematik, auf Englisch *Financial Engineering*, ist ein interdisziplinäres Feld, welches sich auf die Anwendung von mathematischen und statistischen Modellen und rechnergestützten Technologien zur Lösung von Problem des Finanzwesens fokussiert (Birge und Linetsky, 2007, [12]). Wichtige Bereiche der Finanzmathematik umfassen die mathematische Modellierung des Markt- und Kreditrisikos, die Preisfestsetzung und Absicherung von derivativen Wertpapieren bezüglich des Risikomanagement, die Vermögensallokation und das Portfoliomanagement. Unter Marktrisiko wird das Risiko nachteiliger Veränderungen von Preisen oder Raten wie beispielsweise Zinssätzen, ausländischen Wechselkursen, Aktienkursen sowie Rohstoff- und Energiepreisen verstanden. Kreditrisiko ist das Risiko des Ausfalls einer Anleihe, eines Darlehens, eines Leasingvertrags, einer Rente oder jeder anderen Art von finanzieller Verpflichtung (Birge und Linetsky, 2007, [12]). Moderne Derivatemärkte können als ein globaler Marktplatz für finanzielle Risiken betrachtet werden. Die Funktion der Derivatemärkte besteht darin, den Transfer finanzieller Risiken von Risikominderern (Hedgern) auf Risikoträger (Investoren) zu erleichtern. Organisationen, die ihre Risikoexposition gegenüber einer bestimmten Art von finanziellen Risiken reduzieren möchten, wie beispielsweise das Risiko steigender Rohstoff- und Energiepreise, die die zukünftige Produktion verteuern, oder das Risiko steigender Zinssätze, die die zukünftige Finanzierung erschweren, können diese Risiken durch den Abschluss von Finanzverträgen ausgleichen, die als Versicherung fungieren und das Unternehmen vor negativen Markteneignissen schützen. Während der Absicherer auf den Derivatemarkt kommt, um sein Risiko zu reduzieren, kommt die Gegenpartei, die den anderen Teil des Vertrags übernimmt, auf den Markt, um in dieses Risiko zu investieren und erwartet, für die Übernahme des Risikos angemessen entschädigt

zu werden. Damit bestimmt der Kauf beziehungsweise Verkauf von Finanzrisiko einen grossen Anteil der Finanzmathematik, wodurch diese als Grundlage der modernen Wirtschaft verstanden werden kann (Birge und Linetsky, 2007, [12]).

Die mathematischen Modelle der Finanzmathematik stützen sich vermehrt auf Differentialgleichungen (Hull, 2011, [16]). In Differentialgleichungen wird der Zusammenhang zwischen einer Funktion  $f$  und ihren Ableitungen  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  beschrieben, wobei  $n$  der Ordnung der Differentialgleichung entspricht. Oftmals können Lösungen dieser Gleichungen nur durch numerische Verfahren angenähert werden, da viele Gleichungen nicht algebraisch lösbar sind (Baum u. a., 2013, [11]). Eine solche Differentialgleichung, die Black-Scholes-Gleichung, wird im Abschnitt 5.1 weiter beschrieben.

### A.3.2 Grundbegriffe der Finanzmathematik

In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffe der Finanzmathematik eingeführt und erklärt.

#### Europäische Optionen als Beispiel für Derivate

Ein Derivat ist ein Finanzvertrag zwischen zwei Parteien, der die Bedingungen festlegt, unter denen Zahlungen oder Auszahlungen (*Payoffs*) zwischen den Parteien zu leisten sind. Solche Zahlungen können entweder in Form von Bargeld oder der Lieferung eines bestimmten Vermögenswertes erfolgen (Birge und Linetsky, 2007, [12]).

Eine Option ist ein Beispiel eines solchen Derivats. Im Allgemeinen ist eine Option ein Vertrag, der seinem Käufer eine nichtnegative Zahlung von unsicherer Höhe zu einem fixen zukünftigen Zeitpunkt sichert (Korn, 2002, [7]). Dies bedeutet, dass der Käufer beziehungsweise Verkäufer schlimmstenfalls nichts, das heisst eine Zahlung der Höhe 0, ansonsten aber eine positive Zahlung erhält. Zu den bekanntesten Optionen zählen die europäischen Kauf- und Verkaufsoptionen (*Calls* und *Puts*) auf Aktien (Korn, 2002, [7]). Diese sichern ihrem Besitzer das Recht zu, eine Aktie zu einem festgelegten Zeitpunkt  $T$  zu einem festgelegten Preis  $K$  vom Zeichner zu erwerben beziehungsweise an den Zeichner zu verkaufen. Dabei verpflichtet eine Option nie zum Kauf oder Verkauf (Korn, 2002, [7]).

Ist der Preis  $S(T)$  der Aktie am Zeitpunkt  $T$  grösser als  $K$ , so wird der Besitzer der Kaufoption die Aktie zum billigen Preis  $K$  erwerben. Er hätte dadurch die Möglichkeit, diese Aktie direkt am Markt zum Preis  $S(T)$  weiterzuverkaufen. Damit hätte er eine Auszahlung von  $S(T) - K$  durch Ausüben der Option erzielt. Falls der Preis  $S(T)$  jedoch unter  $K$  gesunken ist, wird der Besitzer des Calls sein Recht nicht wahrnehmen. Er könnte die Aktie billiger am Markt erwerben. Der Besitz der Kaufoption führt in diesem Fall zu keiner positiven Zahlung. Der Payoff eines europäischen Calls wird beschrieben als (Korn, 2002, [7]):

$$P_{\text{Call}} = (S(T) - K)^+ = \max \{0, S(T) - K\} . \quad (\text{A.19})$$

Die Abbildung 21 zeigt einen möglichen Graphen der Funktion  $(S(T) - K)^+$  für den Ausübungspreis  $K = 100$ .

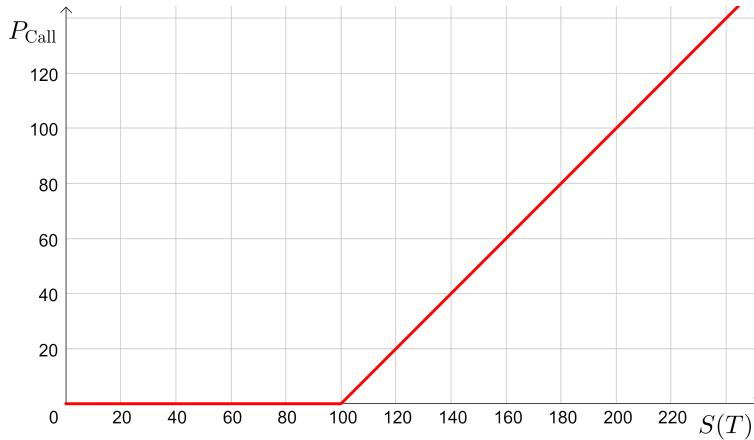


Abbildung 21: Payoffs eines Calls mit Ausübungspreis  $K = 100$ .

Die Begriffe "Payoff" und "Gewinn" müssen differenziert werden, da der Gewinn dem Payoff abzüglich der Optionsprämie entspricht. Die Optionsprämie ist der Preis, welcher der Erwerber einer Option dem Verkäufer zahlen muss (Korn, 2002, [7]).

Die Finanzmathematik kennt auch andere Typen von Optionen, wie beispielsweise die amerikanische Option. Der Käufer dieser Option hat das Recht des Ausübens dieser nicht nur am Endzeitpunkt  $T$ , sondern auch zwischen Endzeitpunkt und dem Zeitpunkt der Erwerbung. Weiter existieren auch noch exotischere Optionen (Korn, 2002, [7]).

## Arbitrage

Ein fundamentaler Begriff im Finanzbereich ist Arbitrage, definiert als den gleichzeitigen Kauf und Verkauf desselben oder eines im Wesentlichen ähnlichen Wertpapiers in zwei verschiedene Märkte zu vorteilhaft unterschiedlichen Preisen. Theoretisch gesehen erfordert eine solche Arbitrage kein Kapital und birgt kein Risiko (Shleifer und Vishny, 1997, [8]).

Als Beispiel kann die durch folgende im Ein-Perioden-Binomialmodell beschriebene Kurssentwicklung zweier Aktien betrachtet werden. Dabei hat ein Investor die Möglichkeit in zwei Aktien oder in Bargeld zu investieren. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  besitzen beide Aktien einen Einkaufswert  $S_1(0) = S_2(0) = 100$ . Innerhalb einer Periode steigen im einen Fall beide Aktien auf die Werte  $S_{1,\nearrow}(T) = 120$  und  $S_{2,\nearrow}(T) = 115$  oder fallen auf die Werte  $S_{1,\searrow}(T) = 80$  und  $S_{2,\searrow}(T) = 95$ . Beide Aktien steigen oder fallen demnach gemeinsam. Damit ist also das Halten von Aktien nicht in jedem Zustand besser als das Halten von Bargeld, welches in diesem Beispiel als Festgeldanlage zum Zins Null interpretiert wird (Korn, 2002, [7]). Trotzdem besteht eine Arbitrage-Möglichkeit. Diese kann allgemein beschrieben werden als Gleichungssystem mit der zu haltenden Strategie

$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  am Zeitpunkt  $t = 0$  als Lösung (Korn, 2002, [7]):

$$\begin{aligned}\varphi_0 + S_1(0)\varphi_1 + S_2(0)\varphi_2 &= 0 \\ \varphi_0 + S_{1,\nearrow}(T)\varphi_1 + S_{2,\nearrow}(T)\varphi_2 &= X \\ \varphi_0 + S_{1,\searrow}(T)\varphi_1 + S_{2,\searrow}(T)\varphi_2 &= X.\end{aligned}\tag{A.20}$$

Die erste Gleichung beschreibt dabei die Bedingung, dass der Gesamtwert der zu Beginn gehaltenen Positionen gleich Null ist. Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich, da das Endvermögen unabhängig vom Zustand der Gewinnsumme  $X$  entsprechen soll (Korn, 2002, [7]).

Im obigen Beispiel ergibt sich aus dem Gleichungssystem für einen Gewinn  $X = 100$  folgende Strategie  $(-1500, -25, 40)$ . Diese ist folgendermassen zu verstehen. Es sind 40 Stück der zweiten Aktie zu kaufen und 25 der ersten leer zu verkaufen. Dies bedeutet, dass der Verkäufer bereits die Kaufprämie erhält, die vereinbarte Anzahl Aktie aber erst am Investmenthorizont liefern muss. Zusätzlich wird ein Kredit von 1500 aufgenommen. Falls dieser Strategie gefolgt wird, wird in jedem Fall ein Gewinn von 100 erzielt (Korn, 2002, [7]).

In der Finanzmathematik werden jedoch hauptsächlich arbitragefreie Märkte betrachtet (Korn, 2002, [7]). Ein Markt in einem Ein-Perioden-Modell ist arbitragefrei, falls der Nullvektor von der konvexen Hülle der möglichen Aktienzuwächse überdeckt wird. Es gilt (Korn, 2002, [7]):

$$\vec{0} \in \text{conv} \{ Y(\omega) \mid \omega \in \Omega \} .\tag{A.21}$$

Dabei entspricht  $Y(\omega) = (S_1(T, \omega) - S_1(0), \dots, S_k(T, \omega) - S_k(0))^T$  und die Elemente in  $\Omega$  beschreiben alle möglichen Fälle der Kursentwicklungen. Eine konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die die Ausgangsmenge enthält. Für eine konvexe Menge liegen alle Strecken zwischen zwei beliebigen Elementen der Ausgangsmenge ganz in der konvexen Menge (Korn, 2002, [7]). In der Praxis muss jedoch die Eigenschaft der Abwesenheit einer Arbitrage-Möglichkeit meist nicht nachgewiesen werden, da dies vorausgesetzt wird (Korn, 2002, [7]).

# Anhang B

## Programmcodes zu den Konstruktionsarten

Dieses Kapitel zeigt die unterschiedlichen Programmcodes zu den Konstruktionsarten aus dem Unterkapitel 3.3.

### B.1 Normalverteilte unabhängige Inkreme

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 3.3.1 präsentiert.

```
//Programm zur Konstruktion über normalverteilte unabhängige Inkremente

float T = 1;                                //Bestimmen der Bedingungen
float N = 1000;
float dt = T / N;

float[] B = new float[int(N+1)];           //Array zum Speichern der B(t)-Werte
float dB;

int n = 1;                                    //Zählvariable

void setup(){
    size(4000,2400);
    background(255);
    strokeWeight(1);
    line(0, height/2, width, height/2);      //t-Achse
    strokeWeight(3);
    B[0]=0;                                  //Startwert B(0)=0
}

void draw(){
    translate(0, height/2);                  //Verschieben des Ursprungs

    dB = sqrt(dt) * randomGaussian();        //Bestimmung dB
                                                //randomGaussian() generiert eine standardnormalverteilte Zufallsvariable
    B[n]= B[n-1] + dB;
    line(map((n-1)*dt,0,T,0,width), map(B[n-1],-2,2,-height/2,height/2),
         map(n*dt,0,T,0,width), map(B[n],-2,2,-height/2,height/2));   //Verbinden zweier diskreter Punkte
    n++;
    if(n > N){                            //Falls die Konstruktion beendet ist
        saveFrame("Brown.1000.jpg");        //Speichern eines Bildes
        stop();
    }
}
```

## B.2 Random Walk

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 3.3.2 präsentiert.

```
//Programm zur Konstruktion mittels Random Walk

float T = 1;                                //Bestimmen der Bedingungen
float N = 500;
float dt = T / N;

float[] B = new float[int(N+1)];             //Array zum Speichern der B(t)-Werte
float dB;

int n = 1;                                    //Zählvariable

void setup(){
    size(4000,2400);
    background(255);
    strokeWeight(1);
    line(0, height/2, width, height/2);        //t-Achse
    B[0] = 0;                                  //Startwert B(0)=0
    strokeWeight(3);

}

void draw(){
    translate(0, height/2);                  //Verschiebung des Ursprungs
    dB = sqrt(dt) * (1 - 2 * round(random(0,1))); //Berechnung von dB
    B[n] = B[n-1] + dB;                      //Verbinden zweier diskreten Punkte
    line(map((n-1)*dt,0,T,0,width), map(B[n-1],-2,2,-height/2,height/2),
         map(n*dt,0,T,0,width), map(B[n-1],-2,2,-height/2,height/2));
    line(map(n*dt,0,T,0,width), map(B[n-1],-2,2,-height/2,height/2),
         map(n*dt,0,T,0,width), map(B[n],-2,2,-height/2,height/2));
    n++;
    if(n>N){                                //Falls Konstruktion beendet ist
        saveFrame("randomwalk.500.jpg");       //Speichern eines Bildes
        stop();
    }
}
```

## B.3 Lévy-Konstruktion

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 3.3.3 präsentiert.

```
//Programm zur Lévy-Konstruktion

int Schritt = 0;                                //Zählvariable
int Genauigkeit = 6;                            //Anzahl zu machender Schritte

float[] Xt = new float[int(pow(2,Genauigkeit)+1)]; //Array für B(t)-Werte

void setup(){
    size(800,1200);
    background(255);

}

void draw(){

    fill(255,200);                                //Zeichnet Rechteck, wodurch vordere Schritte verblassen
    noStroke();
    rect(0, 0, width, height);
    stroke(0);

    line(50, height/2, width-25, height/2);        //Aufzeichnen der t-Achse und der B(t)-Achse
    line(50, 0, 50, height);
    translate(50, height/2);                      //Verschiebung des Ursprungs
    scale(width-100, -width/3);
    strokeWeight(0.005);
    stroke(255 , 0, 0);

    if(Schritt == 0){                            //erster Schritt
        Xt[(Xt.length-1)]=randomGaussian();      //Bestimmen von B(1)
        line(0, Xt[0], 1, Xt[(Xt.length-1)]);    //Verbinden (0,B(0)) und (1,B(1))

    }else{
        for(int i=1; i<=pow(2,Schritt);i=i+2){

            Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i)]=
                randomGaussian()*pow(2,-Schritt/2) +
                0.5*(Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i-pow(2,-Schritt)*(Xt.length-1))]+
                Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i+pow(2,-Schritt)*(Xt.length-1))]); //Bestimmen von einzelnen B(t)-Werten für dyadiischen Punkte

            line(i/pow(2,Schritt),Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i)],
                i/pow(2,Schritt)-pow(2,-Schritt),Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i-pow(2,-Schritt)*(Xt.length-1))]);

            line(i/pow(2,Schritt),Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i)],
                i/pow(2,Schritt)+pow(2,-Schritt),Xt[int((Xt.length-1)/pow(2,Schritt)*i+pow(2,-Schritt)*(Xt.length-1))]);
                //Verbinden des neu errechneten Punktes links + rechts
        }
    }

    Schritt++;
    saveFrame("levy.##.jpg");                    //Speichern eines Bildes nach jedem Schritt

    if(Schritt==Genauigkeit){
        noLoop();                                //Falls maximale Anzahl Schritte -> Ende
    }
}
```

## B.4 Spektralzerlegung (Fourierreihe)

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 3.3.4 präsentiert.

```
//Programm zur Konstruktion mittels Spektralzerlegung

float N= 10000;                                //Bestimmen der Anzahl Punkte

float[] ywerte = new float[int(N+1)];           //Array für B(t)-Werte
float[] normi = new float[1000];                  //Array für Zufallsvariablen

float dt= 1 / N;
int Schritt = 1;

void setup(){
    size(2800,4000);
    background(255);
    strokeWeight(0.002);
    normi[0] = randomGaussian();                  //Startwert

}

void draw(){

    background(255);
    translate(0, height/2);                      //Verschieben des Ursprungs
    stroke(0);

    line(0, 0, width, 0);                        //t-Achse
    scale(width, -height/5);

    normi[Schritt]=randomGaussian();

    for(int i=0; i<ywerte.length ; i++){          //Bestimmung aller B(t)-Werte für den Schritt k
        ywerte[i] += sin(Schritt*PI*dt*i)/Schritt*normi[Schritt];
    }
    for(int i=0; i<ywerte.length-1 ; i++){         //Verbinden der einzelnen Punkte
        line(dt*i,ywerte[i],dt*(i+1),ywerte[i+1]);
    }

    if(Schritt==10){                             //Speichern von Bildern für verschiedene k
        saveFrame("sz.10.jpg");
    }
    if(Schritt==100){
        saveFrame("sz.100.jpg");
    }
    if(Schritt==500){
        saveFrame("sz.500.jpg");
    }
    Schritt++;
}

if(Schritt>999){                                //Falls Konstruktion beendet ist
    noLoop();
}

}
```

## B.5 Brown'sche Fraktale

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 4.2.2 präsentiert.

```
//Programm zur Konstruktion eines Brown'schen Fraktals mittels Annäherung

float gamma = 1.4;                                //Werte für gamma>1 und alpha in ]0,1[
float alpha = 0.3;

float N= 10000;                                     //Bestimmen der Anzahl Punkte

float[] ywerte = new float[int(N+1)];              //Array für B(t)-Werte
float[] norm = new float[1000];                      //Array für Zufallsvariablen
float[] gleich = new float[1000];

float dt= 1 / N;
int Schritt = 1;

void setup(){
    size(1000, 1000);                               //Grundeinstellungen
    strokeWeight(0.001);

}

void draw(){
    background(255);
    translate(0, height/2);                         //Verschieben des Ursprungs
    stroke(0);

    line(0, 0, width, 0);                           //t-Achse
    scale(width, -height/6);

    norm[Schritt]=randomGaussian();                 //Zufallsvariablen
    gleich[Schritt]=random(0,2*PI);

    for(int i=0; i<ywerte.length ; i++){           //Bestimmung aller B(t)-Werte für den Schritt k
        ywerte[i] += norm[Schritt] * pow(gamma,-alpha * Schritt) * sin(pow(gamma,Schritt) * dt * i + gleich[Schritt]);
    }

    for(int i=0; i<ywerte.length-1 ; i++){          //Verbinden der einzelnen Punkte
        line(dt*i,ywerte[i],dt*(i+1),ywerte[i+1]);
    }

    Schritt++;

    if(Schritt>999){                                //Falls Annäherung beendet ist
        noLoop();
    }
}
```

## B.6 Brown'sche Oberfläche

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 4.3.2 präsentiert.

```

int zeile, reihe;                                //Anzahl Zeilen und Reihen; Skalierungsfaktor
int scl = 10;                                     //Länge und Breite
int w = 1200;
int h = 1200;

int Schritt = 1;
int maxSchritt = 50;

float [] A = new float [maxSchritt];             //Arrays für Zufallsvariablen
float [] B = new float [maxSchritt];
float [] C = new float [maxSchritt];

float alpha = 0.7;                               //alpha und gamma
float gamma = 3;

float[][] terrain;                             //2D-Array für Höhe zu Koordinate

void setup() {
    size(1600, 1600, P3D);                      //P3D implementieren
    zeile = w / scl;
    reihe = h/ scl;
    terrain = new float[zeile][reihe];
}

void draw() {
    directionalLight(200,200,200,0,0,-1);        //Licht -> Schatten einfügen
    C[Schritt]=randomGaussian();                //Zufallsvariablen
    B[Schritt]=random(0,2 * PI);
    A[Schritt]=random(0,2 * PI);

    for (int y = 0; y < reihe; y++) {           //alle Punkte (x,y)
        for (int x = 0; x < zeile; x++) {         //Berechnen Höhe
            terrain[x][y] += C[Schritt] * pow(gamma,-alpha * Schritt) * sin(pow(gamma,Schritt)
                * ( x * cos(B[Schritt]) + y * sin(B[Schritt])) + A[Schritt]);
        }
    }

    background(255);                           //optische Einstellungen
    noStroke();

    translate(width/2, height/2+50);           //Verschiebungen und Rotationen
    rotateX(PI/3);
    rotateZ(PI/2);
    translate(-w/2*1.7, -h/2);

    Schritt++;

    if(Schritt>maxSchritt-1){                  //Annäherung abgeschlossen
        for (int y = 0; y < reihe-1; y++) {     //Zeichnen der Brown'schen Oberfläche
            beginShape(QUAD_STRIP);
            for (int x = 0; x < zeile-1; x++) {
                vertex(x*scl, y*scl, map(terrain[x][y],-3,3,-100,100));
                vertex(x*scl, (y+1)*scl, map(terrain[x][y+1],-3,3,-100,100));

            }
            endShape();
        }

        saveFrame("BF7VW.jpg");                 //Grafik speichern
        stop();
    }
}

```

## B.7 Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt wird der Code des *processing*-Programmes zu 5.2 präsentiert.

```
//Programm zur Konstruktion eines Aktienkurses;
//Konstruktion der Brown'schen Bewegung über normalverteilte unabhängige Inkremente

float T = 1;                                //Bestimmen der Bedingungen
float N = 1000;
float dt = T / N;

float[] S = new float[int(N+1)];           //Array zum Speichern der S(t) und Erwartungswerte
float[] E = new float[int(N+1)];

float SNull=100;                            //Parameter der Black-Scholes-Gleichung
float mu=1.05;
float sigma=0.6;

float[] B = new float[int(N+1)];           //Array zum Speichern der B(t)-Werte

int n = 1;                                  //Zählvariable

void setup(){
    size(4000,2400);                      //Grundbedingungen
    background(255);
    strokeWeight(10);

    B=BrownscheBewegung(N);

    S[0]=SNull;
    E[0]=SNull;
    //randomSeed(14);

}

void draw(){
    translate(0,height);
    scale(1,-1);
    stroke(0);

    S[n]=SNull*exp((mu-0.5*pow(sigma,2))*(dt*n)+sigma*B[n]);          //Berechnung des Aktienpreises
    line(map(dt*n,0,T,0,width),map(S[n],0,400,0,height),
        map(dt*(n-1),0,T,0,width),map(S[n-1],0,400,0,height));           //Kurs wird gezeichnet
    stroke(255,0,0);
    E[n]=SNull*exp(mu*dt*n);          //Berechnung des Erwartungswertes
    line(map(dt*n,0,T,0,width),map(E[n],0,400,0,height),
        map(dt*(n-1),0,T,0,width),map(E[n-1],0,400,0,height));           //Kurve des Erwartungswert wird gezeichnet

    if(n>N-1){                         //Abbruchkriterium + Speichern Grafik
        noLoop();
        saveFrame("Black.jpg");
    }

    n++;
}

float [] BrownscheBewegung(float N){      //Funktion zur Berechnung einer Brown'schen Bewegung
    float[] Brown = new float[int(N+1)];   //über normalverteilte unabhängige Inkremente
    Brown[0]=0;
    for(int i=1; i<int(N+1);i++){
        float dB = sqrt(dt) * randomGaussian();
        Brown[i]=Brown[i-1]+dB;
    }
    return Brown;
}
```

# Abbildungsverzeichnis

Abb. 1:	Brown'sche Bewegung als zufällige Bewegung eines Teilchens; erstellt in GeoGebra am 14.10.2020.	1
Abb. 2:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads durch unabhängige normalverteilte Inkremente; $n = 100$ ; erstellt in processing am 13.10.2020; bearbeitet in GeoGebra.	9
Abb. 3:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads durch unabhängige normalverteilte Inkremente; $n = 1'000$ ; erstellt in processing am 13.10.2020; bearbeitet in GeoGebra.	9
Abb. 4:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads mittels Random Walk; $n = 100$ ; erstellt in processing am 13.10.2020; bearbeitet in GeoGebra.	10
Abb. 5:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads mittels Random Walk; $n = 500$ ; erstellt in processing am 13.10.2020; bearbeitet in GeoGebra.	10
Abb. 6:	Start (Schritt 0) einer Lévy-Konstruktion; erstellt in GeoGebra am 15.06.2020.	12
Abb. 7:	Schritt 1 einer Lévy-Konstruktion; erstellt in GeoGebra am 15.06.2020.	12
Abb. 8:	Schritt 2 einer Lévy-Konstruktion; erstellt in GeoGebra am 15.06.2020.	12
Abb. 9:	Schritt 3 einer Lévy-Konstruktion; erstellt in GeoGebra am 15.06.2020.	12
Abb. 10:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads mittels Spektralzerlegung mit $k = 10$ , erstellt in processing am 15.06.2020; bearbeitet in GeoGebra.	13
Abb. 11:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads mittels Spektralzerlegung; $k = 100$ ; erstellt in processing am 15.06.2020; bearbeitet in GeoGebra.	13
Abb. 12:	Konstruktion eines Brown'schen Pfads mittels Spektralzerlegung; $k = 500$ ; erstellt in processing am 15.06.2020; bearbeitet in GeoGebra.	13
Abb. 13:	Annäherung eines Brown'schen Fraktals mit $\alpha = 0.3$ ; erstellt in processing am 08.08.2020; bearbeitet in GeoGebra.	15
Abb. 14:	Annäherung eines Brown'schen Fraktals mit $\alpha = 0.7$ ; erstellt in processing am 08.08.2020; bearbeitet in GeoGebra.	15
Abb. 15:	Annäherung einer Brown'schen Oberfläche mit $\alpha = 0.3$ ; erstellt in processing am 08.08.2020.	18
Abb. 16:	Annäherung einer Brown'schen Oberfläche mit $\alpha = 0.7$ ; erstellt in processing am 08.08.2020.	18
Abb. 17:	Aktienkurs in einem Drei-Perioden-Modell; erstellt in GeoGebra am 07.09.2020.	21
Abb. 18:	Aktienkurs ( $\mu = 1.05$ , $\sigma = 0.6$ , $S(0) = 100$ ) im Black-Scholes-Modell; erstellt in processing und GeoGebra am 19.09.2020.	23

Abb. 19:	Normalverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswerten ( $\mu$ ) und Standardabweichungen ( $\sigma$ ); erstellt in GeoGebra am 06.06.2020. . . . .	28
Abb. 20:	Visulaisierung der Boxcounting-Dimension anhand der Kochkurve, erstellt in GeoGebra am 21.11.2020 . . . . .	32
Abb. 21:	Payoffs eines Calls mit Ausübungspreis $K = 100$ ; erstellt in GeoGebra am 07.09.2020. . . . .	35

# Tabellenverzeichnis

Tab. 1:	Wahrscheinlichkeiten im Drei-Perioden-Binomialmodell. . . . .	21
Tab. 2:	Wahrscheinlichkeitstabelle für Experiment “zwei Münzwürfe“.	. . . . .

# Literaturverzeichnis

## Artikel

- [1] Patrick Cheridito, „Mixed fractional Brownian Motion,“ *Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*, 2001.
- [2] Ton Dieker, „Simulation of fractional Brownian motion,“ *University of Twente*, 2004.
- [3] Mark D. Haw, „Colloidal suspensions, Brownian motion, molecular reality: a short history,“ *Journal of Physics: Condensed Matter*, Nr. 14. 2002.
- [4] Desmond John Higham, „An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations,“ *SIAM Review*, Jg. 43, Nr. 3. 2001.
- [5] Stephen Montgomery-Smith, „The Distribution of Rademacher Sums,“ *Proceedings of the American Mathematical Society*, Jg. 109, Nr. 2. 1990.
- [6] Roland Küng, „Kapitel 2: Fourieranalyse,“ *Zürcher Hochschule für angewandte Wissenschaften*, 2009.
- [7] Ralf Korn, „Elementare Finanzmathematik,“ *Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM*, 2002.
- [8] Andrei Shleifer und Robert W. Vishny, „The Limits of Arbitrage,“ *The Journal of Finance*, Jg. 52, Nr. 1. 1997.
- [9] Matthew Shum, „Introduction to Probability Theory,“ *California Institute of Technology*, 2019.
- [10] Zhuohua Xu, „Normalverteilung,“ *Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg*, 2009.

## Bücher

- [11] Manfred Baum, Martin Bellstedt, Gerhard Bitsch, Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck, Jürgen Denker, Günther Dopfer, Rolf Dürr, Alfred Franz, Hans Freudigmann und Herbert u. a. Götz, *Lambacher Schweizer 11/12 (Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen)*. Baar: Klett und Balmer Verlag, 2013.
- [12] John R. Birge und Vadim Lintesky, *Handbooks in Operations Research and Management Science: Financial Engineering*. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [13] Albert Einstein, *Investigation on the Theory of the Brownian Movement*. Mineola: Dover Publication, 1926/1956.
- [14] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [15] Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modelling and Applied Probability)*. New York: Springer, 2003.
- [16] John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives, 8th Edition*. London: Pearson Academic, 2011.
- [17] Ralf Korn und Elke Korn, *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung: Moderne Methoden der Finanzmathematik*. Berlin: Springer, 2014.
- [18] Benoît Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*. Basel: Springer, 2013.

- [19] Peter Mörters und Yuval Peres, *Brownian Motion*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [20] Daniel Revuz und Marc Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Berlin: Springer, 2005.
- [21] Philip Scherer, *Computational Physics (Simulation of Classical and Quantum Systems)*. Cham: Springer, 2017.
- [22] René Schilling und Lothar Partzsch, *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2012.
- [23] Elias Zakon, *Mathematical Analysis 1*. West Lafayette: The Trillia Group, 1975.

## Internetquellen

- [24] Raptis Rare Books. (Abgerufen am 21.11.2020). „Business Cycles and Equilibrium,“ Adresse: <https://www.raptisrarebooks.com/product/business-cycles-fischer-black-first-edition/>.

# Authentizitätserklärung

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass meine Angaben über die bei der Abfassung meiner Maturaarbeit benützten Hilfsmittel und über mir allenfalls zuteil gewordene Hilfe in jeder Hinsicht der Wahrheit entsprechen und vollzählig sind.

Ort und Datum: \_\_\_\_\_

Unterschrift des Schülers: \_\_\_\_\_