Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

2. Orthogonale Funktionenfamilien

Inhalt

1. Motivation

Aus der Vektorgeometrie weiss man: mit Hilfe einer orthonormierten Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$ kann man jeden Vektor v linear kombinieren:

$$v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \langle b_2, v\rangle + \dots + \langle b_n, v\rangle b_n \qquad (*)$$

$$\|v\|^2 = \langle b_1, v\rangle^2 + \langle b_2, v\rangle^2 + \dots + \langle b_n, v\rangle^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

Linearkombination ist immer möglich, wenn $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis ist, aber mit dem Skalarprodukt ist es besonders einfach, die Koeffizienten zu finden.

Definition: Vektoren $b_1, \dots, b_n$ heissen eine **Basis**, wenn jeder Vektor als Linearkombination $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ geschrieben werden kann.

Definition: Eine Basis heisst **orthonormiert**, wenn

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ziel: für Funktionenräume orthonormierte Basen finden.

2. Beispiel: Fourierbasis für 2π-period. Funktionen

Sei $V \subset C(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2π-period. Funktionen. Für $f \in V$ genügt es, die Funktionswerte im Intervall $[-\pi, \pi]$ zu kennen. Man kann daher das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

verwenden.

Gesucht: eine orthogonale Funktionenfamilie aus 2π-periodischen Funktionen.

<u>Idee (Fourier)</u>: Verwende

$$c_k(x) = \cos kx \qquad k \in \mathbb{N}$$
$$s_k(x) = \sin kx \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 0$$

<u>Satz</u>: Die Funktionenfamilie $\{ {}_0, {}_k, {}_k \mid k>0 \}$ ist orthogonal

Beweis: Skalarprodukte nachrechnen

$$\langle c_k, s_l \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} c_k(x) s_l(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos kx}_{\text{gerade}}\, \underbrace{\sin lx}_{\text{ungerade}}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \text{ungerade Fkt}\; dx = 0 \quad ✓$$

Trigonometrische Identitäten:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Damit kann man die Skalarprodukte für $k \neq \ell$ berechnen

$$\begin{aligned}\langle C_k, C_\ell\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-\ell)x + \cos(k+\ell)x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}}_{2\pi\text{-period}} + \underbrace{\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}}_{2\pi\text{-period}}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

2π-period.

$$\big[f(x)\big]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi) - f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$\begin{aligned}\langle S_k, S_\ell\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin \ell x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}}_{2\pi\text{-period.}} - \underbrace{\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}}_{2\pi\text{-period}}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

Fall C_0:

$$\langle C_0, C_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \overbrace{\cos kx}^{2\pi\text{-period}} \, dx = 0$$

$$\langle C_0, S_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \underbrace{\sin kx}_{2\pi\text{-period}} \, dx = 0$$

$\square$

3. Normierung

Neue Funktionen

$$c_k(x) = \frac{1}{\|C_k\|} C_k(x), \quad s_k(x) = \frac{1}{\|S_k\|} S_k(x)$$

Normen berechnen:

$$\|C_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} C_k(x)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\cos 2kx}_{2\pi\text{-period.}}) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

$$\|S_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_k(x)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \underbrace{\cos 2kx}_{2\pi\text{-period}}) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

$$\|C_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

folglich gilt:

Satz: Die Funktionen

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$$

$$s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$$

sind orthonormiert

4. Fourier-Reihen

Sei $f(x)$ eine stetige, 2π-periodische Funktion.
Dann folgt aus (*)

$$f(x) = \langle c_0, f \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle c_k, f \rangle c_k(x) + \langle s_k, f \rangle s_k(x) \right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,dx \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \cdot f(x)\,dx \, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \, f(x)\,dx \, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}_{= a_0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx}_{= a_k} \cdot \cos kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx}_{= b_k} \cdot \sin kx$$

<u>Satz</u>: Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ kann geschrieben werden als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

wobei die Koeffizienten a_k, b_k wie folgt berechnet werden:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

Ausserdem gilt für die Norm

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right) \quad (+)$$

Sind u_k, v_k die Fourier-Koeffizienten von $g(x)$, dann ist das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \pi\left(\frac{a_0 u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k u_k + b_k v_k)\right) \quad (+)$$

Bemerkungen:

- Andere Skalarprodukte $t\langle\, ,\, \rangle$ sind möglich, um die Faktoren π in $(+)$ los zu werden.

- Man muss noch zeigen, dass es keine Funktion gibt, die auf allen c_k, s_k orthogonal ist.

- Fourier reduziert eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf die Koeffizienten a_k, b_k mit denen sich bereits viele Fragen über die Funktion beantworten lassen

- Fourier geht auch für viele nicht stetige Funktionen

5. Orthogonalisierung nach Gram-Schmidt

<u>Satz</u>: V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Basis. Dann ist

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$b_2 = \frac{a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1}{\|a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1\|}$$

$$b_3 = \frac{a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2}{\|a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2\|}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{a_n - \langle b_1, a_n \rangle b_1 - \ldots - \langle b_{n-1}, a_n \rangle b_{n-1}}{\|a_n - \langle b_1, a_n \rangle b_1 - \ldots - \langle b_{n-1}, a_n \rangle b_{n-1}\|}$$

eine orthonormierte Basis mit der Eigenschaft, dass für alle i die Vektoren

$$a_1, \ldots, a_i \qquad \text{und} \qquad b_1, \ldots, b_i$$

den gleichen Unterraum aufspannen.

Diese Algorithmus kann auch auf Funktionenfamilien angewendet werden und erzeugt orthonormierte Funktionenfamilien.

6. Orthogonale Polynome

Satz (Weierstrass): Stetige Funktionen $C([a,b])$ auf dem Intervall $[a,b]$ können gleichmässig durch Polynome approximiert werden.

Wir betrachten den Fall $[a,b]=[-1,1]$ und das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Die Monome $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots$ sind linear unabhängig. Der Gram-Schmidt-Prozess liefert eine Familie orthogonaler Polynome:

$$a_0(x)=1,\quad \|a_0\|^2=\int_{-1}^{1} dx = 2 \Rightarrow \quad b_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_1(x)=x,\quad \langle b_0,a_1\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}x\,dx = 0$$

$$\|a_1\|^2=\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

$$a_2(x)=x^2,\quad \langle b_0,a_2\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\langle b_1,a_2\rangle = 0$ (da $b_1(x)a_2(x)$ ungerade)

$\Longrightarrow x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2-\frac{1}{3}$ normieren

$$\|x^2-\tfrac{1}{3}\|^2=\int_{-1}^{1} x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{9}x^3+\frac{x}{9}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{18-20+10}{45}=\frac{8}{45}$$

$$\Longrightarrow\quad b_2(x)=\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

Im Prinzip lässt sich so eine orthonormierte Familie von Polynome finden. Berechnung ist sehr mühsam...

Übliche Normierung statt $\|b_n\|=1$: Funktionswert für $x=1$ muss 1 sein

Satz: Die bezüglich

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

orthogonalen Polynome $P_n(x)$ vom Grad n mit $P_n(1)=1$ heissen Legendre-Polynome

Legendre-Polynome können zur Approximation von Funktionen durch Polynome verwendet werden.

Anwendung: numerische Integration mit Gauss-Quadratur

7. Komplexe Fourier-Reihen

"Alles wird einfacher mit komplexen Zahlen"

Funktionenraum: 2π-periodische Funktionen

$$t \longmapsto f(t) \in \mathbb{C}$$

Komplexes Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Basisfunktionen: $e_k(t) = e^{-ikt}$

① Funktionen e_k, e_l mit $k \neq l$ sind orthogonal

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}}\, e^{ilt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t}\, dt$$

2π-periodisch

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(l-k)t}}{i(l-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

② Funktionen e_k sind normiert

$$\|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2\, dt = 1$$

③ Komplexe Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

wobei die Koeffizienten c_k durch

$$c_k = \hat{f}(k) = \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt$$

Für die Norm gilt:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \qquad \text{(Parseval-Plancherel)}$$

Sind d_k die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(t)$, dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k}\, d_k \qquad \text{(Parseval-Plancherel)}$$

Ist f eine reellwertige Funktion, dann ist

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)\,dt$$

$$= c_k + c_{-k} = c_k + \overline{c_k} = 2\,\mathrm{Re}\, c_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}\,dt$$

$$= \frac{1}{i}(c_{-k} - c_k) = 2\,\frac{\overline{c_k} - c_k}{2i} = -2\,\mathrm{Im}\, c_k$$

8. Symmetrieeigenschaften

Die Funktionen $e_k(t)$ haben interessante Symmetrieeigenschaften.

<u>Definition</u>: T_δ ist der Translationsoperator auf Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$(T_\delta f)(x) = f(x+\delta)$$

① Die Wirkung von T_δ auf e_k ist

$$(T_\delta e_k)(t) = e_k(t+\delta) = e^{ik(t+\delta)} = e^{ik\delta} e_k(t)$$

$$\Rightarrow \quad T_\delta e_k = \underbrace{e^{ik\delta}}_{\lambda} e_k = \lambda e_k$$

Die Funktionen e_k sind Eigenvektoren von T_δ

② Für c_k, s_k ist die Situation etwas komplizierter

$$(T_\delta c_k)(t) = \cos k(t+\delta) = \cos kt \cos k\delta - \sin kt \sin k\delta$$
$$= \cos k\delta \; c_k(t) - \sin k\delta \; s_k(t)$$

$$(T_\delta s_k)(t) = \sin k(t+\delta) = \sin kt \cos k\delta + \cos kt \sin k\delta$$
$$= \cos k\delta \; s_k(t) + \sin k\delta \; c_k(t)$$

Matrixform

$$T_\delta \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\delta & -\sin k\delta \\ \sin k\delta & \cos k\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix} = D_{k\delta} \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix}$$

c_k, s_k spannen einen unter T_δ invarianten 2-dimensionalen Unterraum auf.

9. Ableitungseigenschaften

① Ableitungen von e_k:

$$\frac{d}{dt} e_k(t) = \frac{d}{dt} e^{ikt} = ik\, e^{ikt} = ik\, e_k(t)$$

Sei D der Ableitungsoperator: $D = \frac{d}{dt}$

$De_k = ik\, e_k \implies$ e_k ist Eigenvektor von D zum Eigenwert ik

② Ableitungen von S_k, C_k:

$$D C_k(t) = D \cos kt = -k \sin kt = -S_k(t)$$
$$D S_k(t) = D \sin kt = k \cos kt = C_k(t)$$

$\implies$ S_k, C_k sind <u>keine</u> Eigenfunktionen von D

Aber C_k und S_k sind Eigenfunktionen von D^2:

$$D^2 C_k = D(-S_k) = -C_k$$
$$D^2 S_k = D C_k = -S_k$$

③ D^2 und Skalarprodukt

2π-period.

$$\langle D^2 f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) g(x)\, dx = \underbrace{\left[f'(x) g(x) \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g'(x)\, dx$$

$$\langle f, D^2 g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g''(x)\, dx = \underbrace{\left[f(x) g'(x) \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g'(x)\, dx$$

$$\implies \langle D^2 f, g\rangle = \langle f, D^2 g\rangle$$

10. Eigenfunktionen von selbstadjungierten Operatoren

Lineare Algebra: A eine symmetrische Matrix und $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^t u\, v$, dann gilt

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle.$$

Dann sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal und die Eigenwerte sind reell.

Dies gilt auch für Funktionenräume und Operatoren A, für die $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ gilt.

Beweis: ① $Au = \lambda u$, dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &= \langle \lambda u, u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle \\ \shortparallel\quad & \\ \langle u, Au\rangle &= \langle u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.

② $Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} \langle Au_1, u_2\rangle &= \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_2\rangle \\ \shortparallel\quad & \\ \langle u_1, Au_2\rangle &= \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle u_1, u_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1, u_2\rangle = 0$$

□

11. Die Ableitung im Komplexen

Wir betrachten 2π-periodische komplexwertige Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\,dx.$$

Ist die zweite Ableitung selbstadjungiert, d.h.

$$\langle D^2 f, g\rangle = \langle f, D^2 g\rangle \ ?$$

Nachrechnen:

$$\langle D^2 f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f''(x)}\, g(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\overline{f'(x)}\, g(x)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(x)}\, g'(x)\,dx$$

2π-periodisch

$$\langle f, D^2 g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g''(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\overline{f(x)}\, g'(x)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(x)}\, g'(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ selbstadjungiert.

Geht das auch für die erste Ableitung?

$$\langle Df, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(x)}\, g(x)\,dx = \left[\overline{f(x)}\, g(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g'(x)\,dx$$

$$= -\langle f, g\rangle$$

$\Rightarrow$ nicht selbstadjungiert, aber nur wegen -1.

Selbstadjungiertheit 1. Ableitungsoperator: $-iD$

$$\langle -iDf, g\rangle = i\langle Df, g\rangle = -i\langle f, Dg\rangle = \langle f, -iDg\rangle$$

Konsequenz: es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von $-iD$, die Eigenwerte sind reell:

$$-iDf = \lambda f \iff -if'(x) = \lambda f(x)$$

$$f(x) = e^{i\lambda x}$$

2π-periodisch: $\lambda \in \mathbb{Z}$

Somit ist $e_k(x) = e^{ikx}$ eine Familie orthogonaler, 2π-periodischer Funktionen

<u>Bemerkung</u>: In der Quantenmechanik hat der Operator $\frac{\hbar}{i} D = -i\hbar D$ die Bedeutung des Impulses.

Wir betrachten Funktionen: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit dem L^2-Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Damit die Integrale existieren, muss $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \overset{(*)}{=} 0$ sein

Satz: $-iD$ ist selbstadjungiert

Beweis: nachrechnen

$$\langle -iDf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} i\overline{f'(x)}\, g(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[i\overline{f(x)}g(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{=0 \text{ wegen} \\ \text{Randbedingung } (*)}} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, i g'(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\,(-ig'(x))\,dx = \langle f, -iDg\rangle$$

also selbstadjungiert $\square$

Eigenvektoren: $-iDf(x) = \lambda f(x) \Rightarrow f(x) = e^{i\lambda x}$

Aber:
- nicht normierbar für jedes beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. es ergibt sich keine Hilbert-Basis
- Randbedingung $(*)$ ist nicht erfüllt

Ursache dieser Schwierigkeit ist der unendliche Definitionsbereich. Die allgemeine Theorie findet heraus, dass sich eine Hilbert-Basis nur für sogenannte kompakte Operatoren finden lässt, z.B. Differentialoperatoren auf kompakten Gebieten.

12. Der Sturm-Liouville-Operator L_0

Wir betrachten 2-mal stetig differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$.
Sei $p(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf $[a,b]$. Wir verwenden das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

<u>Definition</u>: Der Sturm-Liouville-Operator L_0 ist

$$L_0 = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}$$

Die Schreibweise ist so gemeint:

$$L_0 f = \frac{d}{dx}\big(p(x)f'(x)\big) = p'(x)f'(x) + p(x)f''(x)$$

<u>Satz</u>: L_0 ist selbstadjungiert auf Funktionen mit einer Randbedingung der Form

$$k_a f(b) + h_a p(a) f'(a) = 0 \quad \text{und} \quad k_b f(b) + h_b p(b) f'(b) = 0$$

mit $k_a, h_a, k_b, h_b \in \mathbb{R}$.

Beweis:

$$\langle L_0 f, g\rangle = \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x)\,dx$$

$$= \Big[p(x)f'(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b p(x)f'(x)g'(x)\,dx$$

$$\langle f, L_0 g\rangle = \Big[p(x)f(x)g'(x)\Big]_a^b - \int_a^b p(x)f'(x)g'(x)\,dx$$

Die ersten Terme müssen übereinstimmen:

$$\left[p(x)f'(x)g(x)\right]_a^b = p(b)f'(b)g(b) - p(a)f'(a)g(a)$$
$$\|$$
$$\left[p(x)f(x)g'(x)\right]_a^b = p(b)f(b)g'(b) - p(a)f(a)g'(a)$$

oder

$$p(b)\left(f'(b)g(b) - f(b)g'(b)\right) = p(a)\left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right)$$

oder mit Determinanten geschrieben

$$p(b)\begin{vmatrix} f(b) & g(b) \\ f'(b) & g'(b) \end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(a) & g'(a) \end{vmatrix}$$

Die beiden Endpunkte sollten unabhängig voneinander sein, können aber auch nicht konstant sein, also müssen sie $=0$ sein

Die Determinante verschwindet genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind, d.h. die Vektoren

$$\begin{pmatrix} f(b) \\ p(b)f'(b) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g(b) \\ p(b)g'(b) \end{pmatrix}$$

haben die gleiche Richtung. Es gibt daher einen Vektor $\begin{pmatrix} k_b \\ h_b \end{pmatrix}$, der darauf senkrecht steht oder

$$k_b f(b) + h_b p(b) f'(b) = 0 \quad \text{und} \quad k_a f(a) + h_a p(a) f'(a) = 0$$

$\square$

13. Sturm-Liouville-Operator mit Gewichtsfunktion

Sei $w : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion.
Wir betrachten das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx$$

und den Operator

$$L_w = \frac{1}{w(x)} \left(\frac{d}{dx}\, p(x) \frac{d}{dx} \right)$$

Ist L_w selbstadjungiert?

$$\langle L_w f, g \rangle_w = \int_a^b \frac{1}{w(x)} \left(\frac{d}{dx}\, p(x)\, f'(x) \right) g(x)\, w(x)\, dx$$

$$= \langle L_0 f, g \rangle \overset{(*)}{=} \langle f, L_0 g \rangle = \langle f, L_w g \rangle_w$$

$\Rightarrow$ L_w ist selbstadjungiert, wenn in (*) die gleiche Art von Randbedingungen vorausgesetzt werden wie im Abschnitt 12.

14. Das verallgemeinerte Eigenwertproblem

<u>Definition:</u> Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn $Av = \lambda Bv$.

Analog zum Beweis für das gewöhnliche Eigenwertproblem kann man zeigen, dass es zu symmetrischen Matrizen A, B mit B positiv definit eine Basis aus verallgemeinerten Eigenvektoren gibt:

<u>Satz:</u> Sind A, B symmetrische $n \times n$-Matrizen und B positiv definit, dann gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ mit $Ab_i = \lambda_i B b_i$, die ausserdem $b_i \cdot B_j = \delta_{ij}$ erfüllen.

Der Satz besagt, dass die Vektoren bezüglich des verallgemeinerten Skalarprodukts $\langle u, v \rangle_B = u \cdot Bv$ orthonormiert sind. Tatsächlich ist $\tilde{A} = B^{-1}A$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_B$ selbstadjungiert:

$$\langle \tilde{A}u, v \rangle_B = B^{-1}Au \cdot Bv \overset{B \text{ symmetrisch}}{=} Au \cdot \underbrace{\cancel{B^{-1}B}}_{I}v \overset{A \text{ symmetrisch}}{=} u \cdot Av$$

$$= u \cdot BB^{-1}Av = u \cdot B\tilde{A}v = \langle u, \tilde{A}v \rangle_B$$

Der Operator L_w hat eine ähnliche Form.

Der Multiplikationsoperator $f \longmapsto wf$ ist

- selbstadjungiert: $\langle wf, g\rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,dx$
  $= \langle f, wg\rangle$
- positiv definit: $\langle wf, f\rangle = \int_a^b w(x) f(x)^2\,dx > 0$
  für $f \neq 0$ (da $w(x) > 0$ und stetig).

d.h. der Operator $f \longmapsto wf$ hat zu B analoge Eigenschaften.

Der zu $f \longmapsto wf$ inverse Operator ist

$$f \longmapsto \frac{1}{w} f \;:\; x \longmapsto \frac{1}{w(x)} f(x)$$

Der Operator L_0 spielt die Rolle von A. Dem Operator $\tilde{A} = B^{-1}A$ entspricht dann

$$L_w = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}$$

der bezüglichen des Skalarproduktes $\langle\,,\rangle_w$ selbstadjungiert ist.

<u>Satz</u>: Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}\; y(x) = \lambda\, w(x)\, y(x)$$

zu verschiedene Werte λ sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $\langle\,,\rangle_w$

15. Partielle Differentialoperatoren

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$.
Für Funktionen auf Ω wird das Skalar-Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

verwendet.

Ist der Laplace-Operator selbstadjungiert?

$$\langle \Delta f, g\rangle = \int_\Omega \Delta f(x)\, g(x)\, dx = \int \nabla\cdot\nabla f(x) g(x)\, dx$$

Gibt es partielle Integration?

$$\nabla\cdot(\nabla f(x)\cdot g(x)) = (\Delta f(x))g(x) + \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)$$

Integral über Ω:

$$\int_\Omega \Delta f(x)\cdot g(x)\, dx = \int_\Omega \nabla\cdot(\nabla f(x)\cdot g(x))\, dx - \int_\Omega \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \nabla f(x)\, g(x)\cdot dn - \langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

Ebenso:

$$\langle f, \Delta g\rangle = \int_{\partial\Omega} f(x)\nabla g(x)\cdot dn - \langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

D.h. der Laplace-Operator wird selbstadjungiert, für Funktionen, für die

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, \nabla g(x) \cdot dn = 0$$

gilt, z.B. für homogene Dirichlet-Randbedingungen $f(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$.

Die Normalableitung einer Funktion $g(x)$ ist $\nabla g(x) \cdot n$, d.h.

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, \nabla g(x) \cdot dn = \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial g}{\partial n}(x)\, dx$$

Insbesondere ist Δ auch selbstadjungiert für Funktionen, die homogene Neumann-Randbedingungen erfüllen.

Den Randbedingungen

$$h_x f(x) + h_x p(x) f'(x) = 0 \quad , x \in \{a, b\}$$

des Sturm-Liouville-Problems entsprechen die homogenen gemischten Randbedingungen

$$k(x) f(x) + h(x) \frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

mit zwei Funktionen $k(x)$ und $h(x)$.

D.h. Zu jedem beschränkten Gebiet Ω und einer Randbedingung $k(x)f(x) + h(x)\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0$ gibt es eine orthogonale Familie von Eigenfunktionen des Laplace-Operators.

Verallgemeinerungsmöglichkeiten:

$$\Delta \longrightarrow L_0 = \nabla p(x) \nabla$$

$$\langle\, , \rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle_w = \int f(x) g(x) w(x)\, dx$$

mit $w(x) > 0$

$$RB \longrightarrow h(x)f(x) + k(x)p(x)\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \qquad (RB)$$

$$L_0 \longrightarrow L_w = \frac{1}{w(x)} \nabla p(x) \nabla$$

Resultat: Es gibt eine bezüglich $\langle\, , \rangle_w$ orthogonale Familie von Lösungen der partiellen DGl

$$\nabla p(x) \nabla u(x) = \lambda w(x) u(x) \quad \text{in } \Omega$$

mit Randbedingungen

$$h(x)u(x) + k(x)p(x)\frac{\partial f}{\partial n}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$