Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

4 - Fourier-Integral und Unschärfe

Inhalt

1. Prinzipien

Ein harmonische Analysis für Funktionen auf dem Definitionsbereich X entsteht wie folgt:

- X ist eine Gruppe: $X = G$

  <u>Beispiele:</u>
  $G = \mathbb{R} \longrightarrow$ Fourier-Integral
  $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow$ Fourier-Reihe
  $G = \mathbb{Z} \longrightarrow$ Fourier-Synthese
  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow$ diskrete Fourier-Transformation

- Analysefunktionen sind Homomorphismen, d.h. Funktionen $h : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

h muss beschränkt sein, da sonst die Skalarprodukte $\langle h, T_x f \rangle$ mit verschobenen Funktionen unbeschränkt anwachsen können.

<u>Beispiel:</u> $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

Neutrales Element: $h(0) = 1$

Homomorphismus: $h(n+1) = h(n)h(1)$

$$\Longrightarrow h(n) = h(1)^n$$

Beschränkt: $|h(1)| = 1$

$\Longrightarrow$ h ist durch $h(1) \in S^1 = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$ vollständig bestimmt $\circ$

Definition: Die Menge $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ der Homomorphismen $G \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst die duale Gruppe.

Beispiel: Die duale Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ ist S^1 oder die Gruppe der Drehwinkel

- Skalarprodukt

Entsteht aus dem Haar-Mass der Gruppe.

$$\langle f, g \rangle = \int_G \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Die Funktionen aus $\hat{G}$ sind möglicherweise nicht mehr normierbar, d.h. man kann nicht mit einer orthonormierten Basis analysieren

- Gelfand-Transformation

$$\mathcal{G} : C(G) \longrightarrow C(\hat{G}) : f \longmapsto \mathcal{G}f$$

Die Gelfand-Transformierte hat auf $h \in \hat{G}$ den Wert $(\mathcal{G}f)(h) = \langle h, f \rangle$

- **Faltung**

Aus dem Integral:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy$$

$$= \int_G f(y) g(x-y) dy \quad \text{(additiv)}$$

Faltungsformel (evtl. von der Normierung des Integrals abhängig)

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

<u>Anwendung</u>: Deconvolution

$$f = \mathcal{F}^{-1} \frac{\mathcal{F}(f*g)}{\mathcal{F}g}$$

d.h. wenn man $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ effizient berechnen kann, kann man die Faltung $f \mapsto f*g$ effizient umkehren ○

- **Skalarprodukt auf $\hat{G}$**

$\hat{G}$ hat Gruppenstruktur (für G abelsch) und damit auch ein Haar-Integral

- **Plancherel-Parseval-Formel**

Mit einer geeigneten Normierung des Skalarproduktes auf $\hat{G}$ kann man erreichen, dass $\mathcal{G}$ eine Isometrie ist:

$$\begin{array}{ccc} \|f\|_G^2 & = & \int_G |f(x)|^2\,dx \\ \| & & \\ \|\mathcal{G}f\|_{\hat{G}}^2 & = & \int_{\hat{G}} |(\mathcal{G}f)(h)|^2\,dh \end{array}$$

2. Die duale Gruppe

<u>Satz</u>: die Menge $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ ist eine Gruppe

Beweis: $h_1, h_2 \in \hat{G}$, dann ist

$$h_1 \cdot h_2 : G \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto h_1(x) h_2(x)$$

ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot h_2)(x+y) &= h_1(x+y)\, h_2(x+y) \\ &= h_1(x)\, h_1(y)\; h_2(x)\, h_2(y) \\ &= (h_1 \cdot h_2)(x) \cdot (h_1 \cdot h_2)(y) \end{aligned}$$ $\square$

Da $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ eine Gruppe ist, kann man die duale Gruppe von $\hat{G}$ bestimmen.

<u>Satz</u>: $G \subset \hat{\hat{G}}$, denn $x \in G$ wird ein Homomorphismus $e_x : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto h(x)$

Beweis: Wir müssen überprüfen, dass e_x ein Homomorphismus ist. Sei $h_1, h_2 \in \hat{G}$, dann gilt:

$$e_x(h_1 \cdot h_2) = (h_1 \cdot h_2)(x) = h_1(x)\, h_2(x)$$
$$= e_x(h_1)\, e_x(h_2) \qquad \square$$

3. Beispiele von dualen Gruppen

- $G = \mathbb{R}$

Homomorphismen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ müssen die Funktionalgleichung

$$h(x+y) = h(x)\, h(y)$$

erfüllen. Ableiten nach y, $y=0$ setzen gibt die Differentialgleichung

$$h'(x) = h'(0)\, h(x)$$

mit den Lösungen $h(x) = e^{h'(0)x}$.

Schwierigkeit: $f(x) = e^{-|x|}$ ist in L^1 und L^2. Wenn $h'(0) = a+bi$ ist, dann ist auch $g(x) = e^{-a|x|+ibx}$ in L^1 und L^2, da $|e^{ibx}| = 1$. Dann ist

$$\langle h, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax-ibx}\, g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax-ibx} e^{-a|x|+ibx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x-|x|)} dx$$

Da für $x>0$ der Exponent 0 ist, ist das Integral divergent.

$\Rightarrow$ man muss sicherstellen, dass $h(x)$ beschränkt ist $\Rightarrow h(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{R}$

<u>Satz</u>: die duale Gruppe von $\mathbb{R}$ ist $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, $k \longmapsto h(x) = e^{ikx} \in \hat{\mathbb{R}}$ ist ein Isomorphismus von Gruppen

Beweis: Man muss sich noch davon überzeugen, dass die Gruppenoperation in $\hat{G} = \hat{\mathbb{R}}$ die Addition in $\mathbb{R}$ (der k-Werte) ist.

Gruppenoperation in $\hat{\mathbb{R}}$: $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit $h_1(x) = e^{ik_1 x}$, $h_2(x) = e^{ik_2 x}$.

$$h = h_1 h_2, \quad h(x) = h_1(x) h_2(x) = e^{ik_1 x} e^{ik_2 x}$$
$$= e^{i(k_1+k_2)x}$$

d.h. $(k_1, k_2) \longmapsto k_1 + k_2$ $\square$

- $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: die Homomorphismen $G \to \mathbb{C}$ sind wieder Lösungen der Differentialgleichung $h' = h'(0)\,h$, d.h. eine Exponentialfunktion. Zusätzlich muss h aber 2π-periodisch sein. Aus $h(x) = e^{\lambda x}$ folgt dann

$$e^{\lambda x} = h(x) = h(x+2\pi) = h(x)\,h(2\pi) = e^{\lambda x}\,e^{\lambda 2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{2\pi\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = ik \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

<u>Satz</u>: Die duale Gruppe von $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist $\widehat{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^\wedge$: $k \longmapsto h(x) = e^{ikx}$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis: Die Isomorphismus-Eigenschaft ist bereits für $\hat{\mathbb{R}}$ gezeigt worden.

- $G = \mathbb{Z}$:

Homomorphismen $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ erfüllen

$$h(n) = h(1) \cdots h(1) = h(1)^n = z^n$$

mit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = e^{a+bi}$

Schwierigkeit: die Folge $f(n) = e^{-|an| + bin}$ ist summierbar.

$$\langle h, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h(n)}\, f(n)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{e^{(a+bi)n}}\; e^{-|an|+bin}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{an-|an|}$$

Für $an > 0$ ist $e^{an-|an|} = 1$, d.h. die Summe ist divergent. Man muss also zusätzlich fordern, dass die Folge $h(n)$ beschränkt ist, d.h. $a=0$ und $z = e^{ib}$.

Satz: $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Beweis: Da $h(n) = z^n$ mit $z = e^{ib}$, $b\in\mathbb{R}$, entspricht jedem $b\in\mathbb{R}$ ein Homomorphismus. Da $b \mapsto e^{ib}$ 2π-periodisch ist, ergeben die Zahlen $b + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, denselben Homomorphismus. Also ist $b\mapsto e^{ib}$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow S^1 \cong \hat{\mathbb{Z}}$.
Auch die Gruppenoperation funktioniert:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(n) = e^{ib_1 n} \\ h_2(n) = e^{ib_2 n} \end{array}\right\} \Rightarrow h = h_1 h_2,\; h(n) = h_1(n)\, h_2(n)$$

$$= e^{ib_1 n + ib_2 n} = e^{i(b_1+b_2)n}$$

also $b_1 + b_2 \longmapsto h_1 \cdot h_2$ $\square$

- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

Ein Homomorphismus $h: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}: x \to h(x)$ muss von der Form $h(x) = h(1)^x = z^x$ mit $z = h(1) \in \mathbb{C}$ sein. Ausserdem muss $h(n) = h(0) = 1$ sein, als $z^n = 0$. Da $z = e^{a+bi}$ geschrieben werden kann, bedeutet dies

$$1 = z^n = e^{an+nbi} = e^{an} e^{nbi}.$$

Da $|e^{an}| = 1$ sein muss, folgt $a = 0$. Wegen $e^{nbi} = 1$ folgt $nb = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = \frac{2\pi k}{n}$.
Jeder Homomorphismus ist von der Form

$$h(x) = e^{\frac{2\pi i k x}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ersetzt man k durch $k+n$, wird daraus

$$e^{\frac{2\pi i(k+n)}{n}x} = e^{\frac{2\pi i k}{n}x} \underbrace{e^{2\pi i \cdot x}}_{=1} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

Somit geben nur die k-Werte $0, 1, \dots, n-1$ verschiedene Homomorphismen, als Menge ist $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Für die Verknüpfung der Homomorphismen h_1 und h_2 für k_1 und k_2 gilt:

$$h = h_1 h_2 \Rightarrow h(x) = h_1(x) h_2(x) = e^{\frac{2\pi i k_1 x}{n}} e^{\frac{2\pi i k_2 x}{n}}$$
$$= e^{\frac{2\pi i (k_1+k_2) x}{n}}$$

Satz: Die duale Gruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4. Biduale Gruppe

Sei G eine abelsche Gruppe und $\hat{G}$ die duale Gruppe. Dann gibt es eine Abbildung, die jedem Element $x \in G$ eine Funktion $\varphi_x : \hat{G} \to \mathbb{C}$ zuordnet mit $\varphi_x(h) = h(x)$. Rechenregeln:

$$\varphi_x(h_1 h_2) = h_1(x) h_2(x) = \varphi_x(h_1)\varphi_y(h_2)$$
$$\varphi_x(e) = e(x) = 1$$

d.h. φ_x ist ein Homomorphismus $\hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$, φ_x ist also in $\hat{\hat{G}}$.

Die Abbildung $G \longrightarrow \hat{\hat{G}} : x \longmapsto \varphi_x$ erfüllt die Rechenregeln

$$\varphi_{x_1+x_2}(h) = h(x_1+x_2) = h(x_1)h(x_2) = \varphi_{x_1}(h)\varphi_{x_2}(h)$$
$$\varphi_e(h) = h(e) = 1$$

$\Rightarrow$ $x \longmapsto \varphi_x$ ist ein Homomorphismus der Gruppen $G \xrightarrow{\varphi_\bullet} \hat{\hat{G}}$.

Wir bestimmen den Kern von $\varphi_\bullet$, also die Untergruppe U aus Elementen x, für die $\varphi_x = e$ ist $\Rightarrow \varphi_x(h) = h(x) = 1 \quad \forall h \in \hat{G}$ oder

$$\ker \varphi_\bullet = \bigcap_{h \in \hat{G}} \ker h$$

Für eine abelsche Gruppe kann man zeigen, das es zu jedem Element $x \in G \setminus \{e\}$ einen Homomorphismus h mit $h(x) \neq 1$ gibt. Es folgt $\ker \varphi_\bullet = \{e\}$, d.h. $\varphi_\bullet$ ist injektiv.

Es ist etwas aufwendiger zu zeigen, dass $\varphi_\bullet$ auch surjektiv ist.

Satz (Pontrjagin): $G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ ist ein Isomorphismus

5. Allgemeine Fourier-Umkehr

Gelfand-Transformation einer Funktion f auf G:

$$(\mathcal{G}f)(h) = \langle h, f\rangle_G = \int_G \overline{h(x)}\, f(x)\, dx$$

heisst Fourier-Transformation $\mathcal{F}f = \mathcal{G}f$.

Gelfand-Transformation einer Funktion g auf $\hat{G}$

$$(\mathcal{G}g)(j) = \langle j, g\rangle = \int_{\hat{G}} j(\hat{x})\, g(\hat{x})\, d\hat{x}$$

heisst Fourier-Kotransformation $\overline{\mathcal{F}}g = \mathcal{G}g$.
Man kann zeigen, dass mit der richtigen Normierung des Integrals gilt

Satz: $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ und $\|\mathcal{F}f\|^2 = \|f\|^2$

Allgemeine Fourier-Umkehr für die Beispiel-Gruppen

$G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\hat{G} = \mathbb{Z}$

Homomorphismen: $G \longrightarrow \mathbb{C}^* : h(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$
Homomorphismen $\hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}^* : h(k) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Fourier-Transformation

$$(\mathcal{F}f)(k) = N \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx = \hat{f}(k) \qquad \text{Fourier-Koef.}$$

Fourier-Kotransformation: $\int_{\hat{G}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}$

$$(\bar{\mathcal{F}}\hat{f})(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} \hat{f}(k) \qquad \text{Fourier-Reihe}$$

Skalierung des Skalarproduktes: $N = \frac{1}{2\pi}$

Mit dieser Normierung sind die Funktionen e^{ikx} auf G orthonormiert.

Umkehrformel:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\xi} f(\xi)\,d\xi \; e^{ikx}$$

Plancherel-Parseval:

$$\|\mathcal{F}f\|^2 = \int_{\hat{G}} |\mathcal{F}f(k)|^2 dk = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\|$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_G |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$G=\mathbb{Z}$, $\hat{G}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Homomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$: $h(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Homomorphismen $\hat{G} \to \mathbb{C}^*$: $h(k) = e^{ikx}$, $x \in \mathbb{Z}$

Integral über G: $\sum_{x\in\mathbb{Z}}$

Integral über $\hat{G}$: $\int_{\hat{G}} \dots dk = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \, dk$

Fourier-Transformation der Funktion $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) = \int_G e^{-ikx} f(x) dx$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-ikx} f(x)$$ coFourier-Reihe

Fourier-Kotransformation einer Funktion $\hat{f}: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x) = N \int_{\hat{G}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk$$ coFourier-Koef.

Skalierung des Skalarproduktes : $N = \frac{1}{2\pi}$

Umkehrformel

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-ixx} f(x) \, dx$$

Plancherel-Parseval: wie vorhin

$G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,,\ \hat{G} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Homomorphismen: $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}\ :\ h(x) = e^{2\pi i k x/n}$

Homomorphismen $\hat{G} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\ :\ h(k) = e^{2\pi i k x/n}$

Integral über $G = \hat{G}$: $\sum_{x=0}^{n-1}$ bzw $\sum_{k=1}^{n-1}$

Fourier-Transformation einer Funktion: $f : G \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) = \int_G \overline{k(x)}\, f(x)\, dx$$

$$= \sum_{x=0}^{n-1} e^{-2\pi i k x/n} f(x)$$

diskrete Fourier-Transformierte

Fourier-Kotransformierte einer Funktion $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$

$$(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(k)\, \hat{f}(k)\, dk$$

$$= N \sum_{x=0}^{n-1} e^{2\pi i k x/n} \hat{f}(k)$$

Skalierung des Skalarproduktes: $N = \frac{1}{n}$

Umkehrformel:

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k x} \left(\sum_{\xi=0}^{n-1} e^{-2\pi i k \xi} f(\xi) \right)$$

Plancherel-Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{x=0}^{n-1} |f(x)|^2 = \frac{1}{n} \|\hat{f}(k)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{f}(k)|^2$$

$G = \mathbb{R}\,,\ \hat{G} = \mathbb{R}$

Homomorphismen $G \to \mathbb{C}$: $\quad h(x) = e^{ikx}\,,\ k \in \mathbb{R}$

Homomorphismen $\hat{G} \to \mathbb{C}$: $\quad h(k) = e^{ikx}\,,\ x \in \mathbb{R}$

Integral: $\quad \int_G \ldots dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx\,,\ \int_{\hat{G}} \ldots dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx$

Fourier-Transformation einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) = \int_G \overline{k(x)} f(x)\, dx = N_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

Fourier-Integral

Fourier-Kotransformation einer Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(k) \hat{f}(k)\, dk = N_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$$

Fourier-Integral

Skalierung des Skalarprodukts: zwei verbreitete Konventionen: $N_1 = 1,\ N_2 = \frac{1}{2\pi}$ oder $N_1 = N_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Umkehrformel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} f(\xi)\, d\xi\, dk$$

Plancherel-Parseval-Formel: $N_1 = N_2 = 1/\sqrt{2\pi}$

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|\hat{f}(k)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

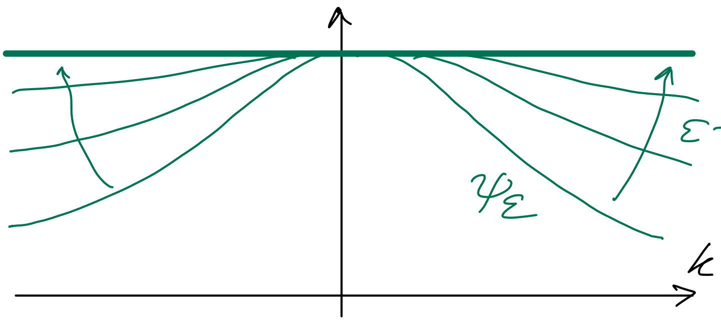
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

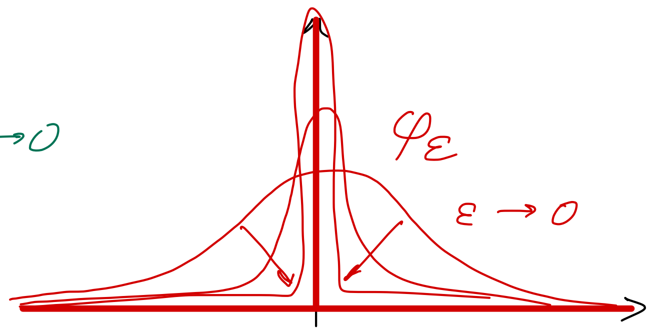
6. Beweis der Inversionsformel für $G=\hat{G}=\mathbb{R}$

<u>Satz</u>: für stetige Funktionen derart, dass $\hat{f}(k)$ stetig, gilt

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\,\hat{f}(k)\,dk \qquad (*)$$

Idee: Funktionen $\psi_\varepsilon(k)$ wählen, die gegen 1 konvergieren und für die $\varphi_\varepsilon=\hat{\psi}_\varepsilon$ gegen einen "Einheits-Peak" (Dirac-δ-Distribution konvergiert).





$$\psi_\varepsilon(k)=e^{-\varepsilon^2k^2/2} \qquad\qquad \varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\,e^{-x^2/2\varepsilon^2}$$

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\,\frac{1}{\varepsilon}e^{-x^2/2\varepsilon^2}\,dx \qquad z=\frac{x}{\varepsilon},\quad dx=\varepsilon\,dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon k z}\,\frac{1}{\varepsilon}e^{-z^2/2}\,\varepsilon\,dz$$

$$= e^{-\varepsilon^2k^2/2}=\psi_\varepsilon(k)$$

<u>Lemma</u>: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_\varepsilon * f\right)(x)=f(x)$

<u>Definition</u>: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_\varepsilon$ heisst Approximation der Einheit

Beweis des Lemmas: Aus der Definition der Faltung folgt:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Da $\varphi_\varepsilon(y)$ für y weit weg von 0 sehr klein ist das Integral

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \approx \int_{-S(\varepsilon)}^{S(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Es kommt also vor allem auf die Werte von f nahe bei x an. Da f stetig ist sind diese für ε und damit S genügend klein alle nahe bei $f(x)$. Also

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-y^2/2\varepsilon^2} dy}_{=1}\, f(x)$$

$$= f(x) \qquad \square$$

Beweis der Fourier-Umkehrformel:

1. Schritt: wegen $\psi_\varepsilon \to 1$ kann das Integral $(*)$ als Grenzwert $\varepsilon \to 1$ von

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(k) e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^2 k^2/2 + ikx} (\mathcal{F}f)(k)\, dk$$

berechnet werden.

2. Schritt: Im Integral kann der $\mathcal{F}$-Operator auf den anderen Faktor geschoben werden:

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi_\varepsilon e^{ikx})(y)\, f(y)\, dy$$

3. Schritt: Der Faktor e^{ikx} entspricht einer Verschiebung um x, d.h. es reicht $\mathcal{F}\psi_\varepsilon$ zu berechnen.

$$(\mathcal{F}\psi_\varepsilon)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\varepsilon^2/2} e^{-iky}\, dk \qquad l = k\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-l^2/2}}_{\varphi(l)} e^{-ily/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, dl$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(l)\, e^{-il\frac{y}{\varepsilon}}\, dl$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \varphi_\varepsilon(y)$$

4. Schritt mit dem Faktor e^{ikx} folgt

$$(\mathcal{F}(\psi_\varepsilon e^{ikx}))(y) = \varphi_\varepsilon(y-x) = \varphi_\varepsilon(x-y)$$

5. Damit wird $(*_\varepsilon)$ zu

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon * f\right)(x) \longrightarrow f(x)$$

nach dem Lemma $\square$

7. Unschärferelation

Eine gemeinsame Eigenschaft aller Arten von Fourier-Transformation ist die Unschärferelation, die etwas informell besagt

> f und $\mathcal{F}f$ können nicht beide beliebig genau lokalisiert sein

Um dieser Aussage einen Sinn zu geben, braucht es:
① Ein "Lokalisierungsmass" $H(f)$, $H(\mathcal{F}f)$
② Eine Ungleichung, die die Lokalisierungsmasse verbindet, z.B. $H(f)H(\mathcal{F}f) \geq k$.

Lokalisierungsmass für eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$: "Varianz".

- f ist keine Wahrscheinlichkeitsverteilung da nicht ≥ 0 $\Longrightarrow$ verwende $|f|^2$
- $|f|^2$ ist nicht normiert $\Rightarrow$ teile durch $\|f\|_2^2$
- Erwartungswert $\neq 0 \Rightarrow$ Translation so, dass $E(X)=0$. Dadurch ändert $\mathcal{F}f$ nur um eine Funktion mit Werten vom Betrag 1
- Varianz:

$$H(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f|^2 \, dx$$

- Analog für $\mathcal{F}f$:

$$H(\mathcal{F}f) = \frac{1}{\|\mathcal{F}f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\mathcal{F}f(k)|^2 dk$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Parseval-Plancherel: $\|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}f\|_2^2$
- Fourier-Transformation einer Ableitung:

$$\mathcal{F}f'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\left[e^{-ikx} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

$$= ik\, \mathcal{F}f(k)$$

Vereinfachung von $H(\mathcal{F}f)$:

$$H(\mathcal{F}f) = \frac{1}{\|\mathcal{F}f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} |ik\, \mathcal{F}f(k)|^2 dk$$

$$= \frac{1}{\|f\|_2^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f'(k)|^2 dk}_{= \|\mathcal{F}f'\|^2 = \|f'\|^2} = \frac{\|f'\|_2^2}{\|f\|_2^2}$$

In der folgenden Rechnung nehmen wir an, dass $\|f\|_2^2 = 1$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle f', xf \rangle|^2 \leq \|xf\|_2^2 \, \|f'\|_2^2$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x)\, dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \quad (*)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f'(x) = \lambda x f(x)$ oder

$$\frac{|f'(x)|}{|f(x)|} = \lambda x \Rightarrow \log|f(x)| = \frac{\lambda}{2} x^2$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \exp\left(\lambda \frac{x^2}{2}\right).$$

Die Ungleichung bleibt gültig, wenn man f durch $\overline{f}$ ersetzt, also für $x f(x) \overline{f'(x)}$ oder $x \overline{f(x)} f'(x)$.

$$x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 = x \frac{d}{dx} f(x) \overline{f(x)}$$

$$= x\left(f'(x)\overline{f(x)} + \overline{f'(x)} f(x)\right)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} x \left(f'(x)\overline{f(x)} + \overline{f'(x)} f(x)\right)\right| \leq x \left| \operatorname{Re} \overline{f'(x)} f(x) \right|$$

$$\leq x \, \overline{f'(x)} f(x)$$

Einsetzen in $(*)$

$$LHS = \left| \int \frac{1}{2} \, x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 \, dx \right|^2 =$$

$$= \left(\overbrace{\left[\frac{1}{2} x |f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty}}^{=0} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \|f\|_2^4$$

Ungleichung zusammensetzen:

$$\frac{1}{4} \|f\|_2^4 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}_{H(f) \cdot \|f\|_2^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\mathcal{F}f(k)|^2 dk}_{H(\mathcal{F}f) \cdot \|f\|_2^2}$$

oder

<u>Satz</u> (Heisenberg): $\quad H(f) \cdot H(\mathcal{F}f) \geq \frac{1}{4}$

In dieser Form kann der Satz nicht auf andere Definitionsbereiche verallgemeinert werden, weil die Varianz nur auf dem Definitionsbereich $G = \mathbb{R}$ sinnvoll ist.