Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

Integraltransformationen

Inhalt

1. Analyseprinzipien

In den letzten Sitzungen hat sich eine Reihe von Prinzipien herauskristallisiert, nach denen erfolgreiche Analyse und Synthese von Funktionen durchgeführt werden kann:

a) <u>Integrale statt einzelne Werte</u>

Prinzip: einzelne Werte sind eher unwichtig, Integrale $\int g(x) t(x) dx$ mit geeigneten "Test"-Funktionen sind oft nützlicher.

<u>Beispiel:</u> Skalarprodukte der Form

$$\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x) dx$$

die sesquilinear und positiv sind. Sie erfüllen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

aus der sich auch die Dreiecksungleichung und damit unsere Intuition über Längen ableiten lässt ⤳ Funktionen sind "wie Vektoren" ○

Skalarprodukte suggerieren, dass man mit orthonormierten Basisfunktionen arbeiten soll. So entsteht die klassische Fourier-Theorie.

b) Basisfunktionen und Differentialoperatoren

Orthogonale Funktionenfamilien entstehen auf natürliche Art und Weise als Eigenfunktionen von selbstadjungierten Differentialoperatoren.

Beispiel: $D = \frac{d}{dx}$ hat als Eigenfunktionen

$$Df = \lambda f \Rightarrow f' = \lambda f \Rightarrow f(x) = Ce^{\lambda x}.$$

Damit der Operator D selbstadjungiert ist, braucht es

- ein Skalarprodukt, $\langle f, g \rangle = \int_?^? \overline{f(x)}\, g(x) \ldots dx$
- Randbedingungen

Prinzip: Für "$\langle Df, g \rangle = \langle f, Dg \rangle$" muss die Ableitung im Integral auf den anderen Faktor übergewälzt werden. Dabei treten "Randterme", die mit den Randbedingungen zum Verschwinden gebracht werden können. z.B.

- Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$
- "periodische Randbedingungen": $f(x+2\pi) = f(x)$ oder auch nur $f(-\pi) = f(\pi)$

$\Rightarrow iD$ selbstadjungiert mit Eigenfunktionen e^{ikx}

Beispiel: Sturm-Liouville-Operator

$$L = \frac{1}{w(x)}\left(\frac{d}{dx}\, p(x) \frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

mit Skalarprodukt

Gewichtsfunktion

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, w(x)\, dx$$

und gemischten Randbedingungen

$$k_x\, f(x) + h_x\, p(x) f'(x) = 0 \qquad x \in \{a, b\}$$

mit $k_a, h_a, k_b, h_b \in \mathbb{R}$. ○

c) Symmetrieprinzipien und Faltung

Die "guten" Analysefunktionen haben interessante Symmetrie-Eigenschaften bezüglich der Gruppen-Operation auf dem Definitionsbereich.

Beispiel: Die Funktionen e^{ikx} sind Eigenfunktionen des Translationsoperators: $f(x) = e^{ikx}$

$$(T_\delta f)(x) = f(x+\delta) = e^{ik(x+\delta)} = e^{ik\delta} e^{ikx} = e^{ik\delta} f(x)$$

$\Rightarrow T_\delta f = e^{ik\delta} f$, Eigenwert $\lambda = e^{ik\delta}$ ○

Einschränkung: geht nur, wenn der Definitionsbereich eine Gruppe ist.

Beispiel: Abbildung $t \to -t$ in der Gruppe $(\mathbb{R},+)$ liefert die Abbildung $f \mapsto \check{f}$, $\check{f}(t) = f(-t)$.
Für $f(t) = e_k(t) = e^{ikt}$ folgt

$$\check{e}_k(t) = e_k(-t) = e^{-ikt} = e_{-k}(t) \Rightarrow \check{e}_k = e_{-k}$$

d.h. lineare Abbildung $f \mapsto \check{f}$ hat hat die zweidimensionalen Unterräume aufgespannt von $e_{\pm k}(t)$ als Eigenräume. ○

Beispiel: Die Funktionen $c_k(x) = \cos kx$ und $s_k(x) = \sin kx$ spannen einen zweidimensionalen Eigenraum des Translationsoperators auf. Ausserdem sind sie Eigenfunktionen der Spiegelung ○

Die Gruppeneigenschaften des Definitionsbereichs führt direkt auf die Faltung:

auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $\quad (f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy$

auf $\mathbb{R}$ $\quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy$

auf G $\quad (f * g)(x) = \int_G f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$

d) Basisfunktionen als Homomorphismen

Besonders erfolgreich sind Basisfunktionen, die Homomorphismen sind, z.B.

$$e_k(x+y) = e_k(x)\, e_k(y)$$

Für solche Funktionen gilt der Faltungssatz. Sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\, f(t)\, dt \quad = c_k(f)$$

die komplexen Fourierkoeffizienten von f, dann gilt

$$c_k(f * g) = c_k(f)\, c_k(g)$$

d.h. aus der Faltung wird ein gewöhnliches Produkt.

Die Fourier-Theorie zeichnet sich also dadurch aus, dass alle diese Eigenschaften zusammen auftreten. Im Allgemeinen muss man auf die eine oder andere Eigenschaft verzichten.

Beispiel: Wavelets bilden eine Basis von Funktionen, die nicht mehr beliebige Translationen zulässt

2. Anwendung ohne Gruppenstruktur/Faltung: Lösung von partiellen Differentialgleichungen

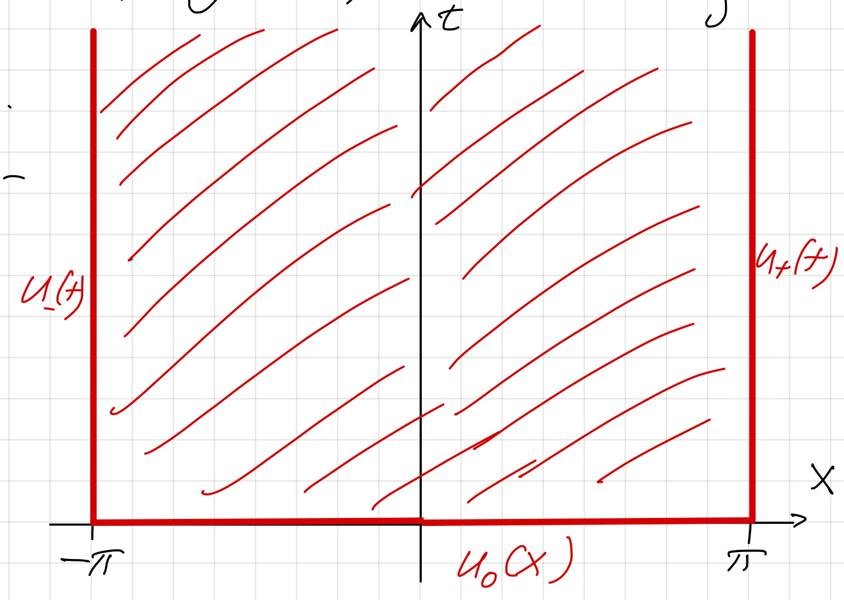
Fourier ist auf die Fouriertheorie im Rahmen des Versuchs gestoßen, die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , u(t,x) = \text{Temperatur}$$

auf einem Stab $x \in [-\pi, \pi]$ zu lösen.

Randbedingungen:

- $u(0,x) = u_0(x)$ Anfangstemperaturverteilung



- Vorgegebene Temp. am Rand (Thermostat)

$$u(t,-\pi) = u_-(t)$$
$$u(t,\pi) = u_+(t)$$

oder

- Vorgegebener Wärmefluss durch die Stabenden (Heizung mit vorgegebener Leistung):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,-\pi) = u_-(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = u_+(t)$$

Lösung für periodische Randbedingungen: $u(t,x)$ kann für jeden Zeitpunkt t als Fourier-Reihe geschrieben werden:

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(t)\cos kx + b_k(t)\sin kx\right)$$

Lösungsidee: Gleichungen für die Koeffizienten aufstellen und lösen

Diese Vorgehensweise ist bekannt als Transformationsmethode.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dot{a}_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\dot{a}_k(t)\cos kx + \dot{b}_k(t)\sin kx\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(t)\, k^2\cos kx + b_k k^2 \sin kx\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\dot{a}_0(t) = 0 \implies a_0(t) = a_0(0)$$

$$\dot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t) \implies a_k(t) = a_k(0)e^{-k^2 t}$$

$$\dot{b}_k(t) = -k^2 b_k(t) \implies b_k(t) = b_k(0)e^{-k^2 t}$$

$$\implies u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(0)\cos kx + b_k(0)\sin kx\right)e^{-k^2 t}$$

Hochfrequente Komponenten verschwinden exponentiell schnell.

3. Verallgemeinerung: ohne Randbedingungen

Wärmeleitungsgleichung auf einem unendlich langen Stab:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \qquad (*)$$

Anfangsbedingung: $u(0,x) = u_0(x)$, Anfangstemperaturverteilung.

Spezielle periodische Lösungen mit Anfangstemperaturverteilung

$$u_0(x) = e^{ikx}.$$

Versuch mit einem Ansatz der Form $c_k(t)$:

$$u(t,x) = c_k(t) e^{ikx}$$

in die DGl $(*)$ einsetzen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}_k(t) e^{ikx} \overset{?}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c_k(0)(-k^2) e^{ikx}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\dot{c}_k(t) = -k^2 c_k(t) \Longrightarrow c_k(t) = c_k(0) e^{-k^2 t}$$

$$\Longrightarrow u(t,x) = c_k(0) e^{-k^2 t} e^{ikx}$$

Die Differentialgleichung (*) ist linear, d.h. beliebige Linearkombinationen von Lösungen sind auch wieder Lösungen:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-k^2 t} c_k(0)\, dk$$

Die Anfangsbedingung wird erfüllt, wenn für $t=0$ die ursprüngliche Funktion $u_0(x)$ gefunden wird:

$$u_0(x) = u(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} c_k(0)\, dk \qquad (**)$$

Normierungsfaktor so wählen, dass später eine sog. unitäre Transformation entsteht.

Folgerungen:

① $c_k(0)$ beschreibt, wie "stark" jede Wellenzahl k in der Funktion $u_0(x)$ vertreten ist.

② (**) sieht aus wie die Fourier-Reihenformel mit Integral statt Summe. Das passt: die Randbedingung hat die Beschränkung auf ganzzahlige k auferlegt → weggefallen

③ Die Funktion $e^{-k^2 t}$ scheint eine besondere Rolle zu spielen.

4. Fouriertransformation

<u>Definition</u>: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion, dann heisst

$$\hat{f}(k) = (\mathcal{G} f)(k) = \mathcal{F} f\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

die Fourier-Transformierte von f. Die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ heisst Fourier-Transformation.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

1. <u>Translation</u>: $\mathcal{F} T_\delta f = e^{-k\delta} \mathcal{F} f$

$$\widehat{T_\delta f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-kx}\, T_\delta f(x)\,dx \qquad \begin{cases} z = x - \delta \\ x = z + \delta \\ dx = dz \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-kz} e^{-k\delta} f(z)\,dz$$

$$= e^{-k\delta} \hat{f}(k)$$

Translation wird Multiplikation mit $e^{-k\delta}$

2. <u>Skalierung</u>: $(D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(x/a)$ so gewählt damit $\|D_a f\|_2 = \|f\|_2$

$$\widehat{D_a f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x/a)\,\frac{dx}{\sqrt{a}} \qquad \begin{matrix} z = x/a \\ dz = dx/a \\ x = az \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iakz} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}}\, a\,dz$$

$$= \sqrt{a}\, \hat{f}(ak)$$

Kontrolle der Norm-Eigenschaft:

$$\|D_a f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x/a)^2 \frac{1}{a}\, dx \qquad z = x/a,\ x = az$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z)^2 \frac{1}{a}\, a\, dz = \|f\|_2^2$$

3. Spiegelung: $Sf(x) = f(-x)$

$$\mathcal{F}Sf(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, Sf(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(-x)\, dx \qquad z = -x,\ dz = -dx$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i(-k)z} f(z)\, dz = \mathcal{F}f(-k)$$

4. Faltungsformel aus Gelfand-Transformation

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

5. Adjungierte: f, g integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(k)\, g(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx\, g(k)\, dk$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} g(k)\, dk\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{F}g(x)\, dx$$

6. <u>Eigenfunktionen:</u> $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

Ableitung nach k:

$$(\mathcal{F}\varphi)'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix\, e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} dx$$

partiell integrieren:

$$= \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \Big[e^{-ikx} e^{-x^2/2} \Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ik\, e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

$$= -k\, (\mathcal{F}\varphi)(k)$$

d.h. $(\mathcal{F}\varphi)(k)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -xy \qquad \text{Separation:} \quad \frac{y'}{y} = -x$$

$$\Longrightarrow \quad \log y = -\frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow \quad y = Ce^{-x^2/2}$$

oder im vorliegenden Fall

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) = C e^{-k^2/2} \qquad = e^{-k^2/2}$$

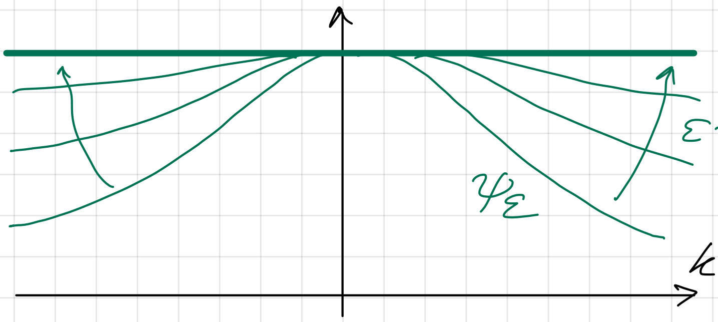
C aus $k=0$: $(\mathcal{F}\varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx = 1$

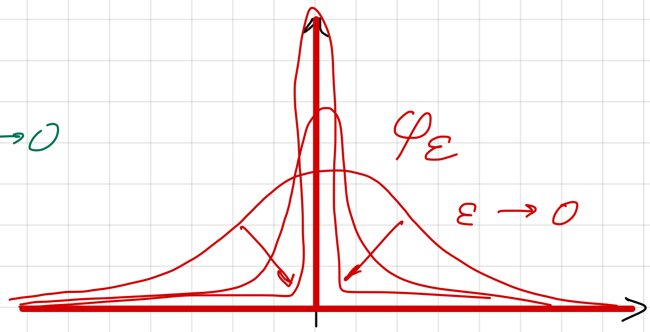
5. Fourier-Inversionsformel

Satz: für stetige Funktionen derart, dass $\hat{f}(k)$ stetig, gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk \qquad (*)$$

Idee: Funktionen $\psi_\varepsilon(k)$ wählen, die gegen 1 konvergieren und für die $\varphi_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon$ gegen einen "Einheits-Peak" (Dirac-δ-Distribution konvergiert).





$$\psi_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon^2 k^2/2} \qquad \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$$

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2} dx \qquad z = \frac{x}{\varepsilon},\ dx = \varepsilon dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon k z} \frac{1}{\varepsilon} e^{-z^2/2} \varepsilon\, dz$$

$$= e^{-\varepsilon^2 k^2/2} = \psi_\varepsilon(k)$$

Lemma: $\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon * f\right)(x) = f(x)$

Definition: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon$ heisst Approximation der Einheit

Beweis des Lemmas: Aus der Definition der Faltung folgt:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Da $\varphi_\varepsilon(y)$ für y weit weg von 0 sehr klein ist das Integral

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \approx \int_{-S(\varepsilon)}^{S(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Es kommt also vor allem auf die Werte von f nahe bei x an. Da f stetig ist sind diese für ε und damit S genügend klein alle nahe bei $f(x)$. Also

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-y^2/2\varepsilon^2} dy}_{=1}\, f(x)$$

$$= f(x)$$

$\square$

Beweis der Fourier-Umkehrformel:

1. Schritt: wegen $\psi_\varepsilon \to 1$ kann das Integral $(*)$ als Grenzwert $\varepsilon \to 1$ von

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(k) e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^2 k^2/2 + ikx} (\mathcal{F}f)(k)\, dk$$

berechnet werden.

2. Schritt: Im Integral kann der $\mathcal{F}$-Operator auf den anderen Faktor geschoben werden:

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi_\varepsilon\, e^{ikx})(y)\, f(y)\, dy$$

3. Schritt: Der Faktor e^{ikx} entspricht einer Verschiebung um x, d.h. es reicht $\mathcal{F}\psi_\varepsilon$ zu berechnen.

$$(\mathcal{F}\psi_\varepsilon)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\varepsilon^2/2}\, e^{-iky}\, dk \qquad l = k\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-l^2/2}}_{\varphi(l)}\, e^{-ily/\varepsilon}\, \frac{1}{\varepsilon}\, dl$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(l)\, e^{-il\frac{y}{\varepsilon}}\, dl$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \varphi_\varepsilon(y)$$

4. Schritt mit dem Faktor e^{ikx} folgt

$$(\mathcal{F}(\psi_\varepsilon\, e^{ikx}))(y) = \varphi_\varepsilon(y-x) = \varphi_\varepsilon(x-y)$$

5. Damit wird $(*_\varepsilon)$ zu

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi_\varepsilon * f\right)(x) \longrightarrow f(x)$$

nach dem Lemma $\square$

6. Wärmeleitungsgleichung und $\mathcal{F}$

Fouriertransformation und Ableitung

$$(\mathcal{F}f')(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f'(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{-ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= ik\,\mathcal{F}f(k)$$

Ableitung der Fouriertransformierten:

$$(\mathcal{F}f)'(k) = \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= \mathcal{F}(-ixf)(k)$$

Transformation der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}u(k) = -k^2 \mathcal{F}u(k)$$

ist eine Familie von gewöhnlichen Differentialgleichungen in t mit Lösungen:

$$(\mathcal{F}u)(t,k) = e^{-k^2 t} (\mathcal{F}u)(0,k)$$

Mit Anfangsbedingung $u(t,x) = u_0(x)$ folgt
$(\mathcal{F}u)(0,k) = (\mathcal{F}u_0)(k)$

Mit der Fourier-Inversionsformel kann man jetzt die Lösung in geschlossener Form schreiben:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - k^2 t} (\mathcal{F} u_0)(k)\, dk$$