Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

8. Nichtkommutative harmonische Analysis

Inhalt

1. Motivation: Registrierungsproblem

<u>Aufgabe</u>: Gegeben Bilder $f(x,y), g(x,y)$ finde eine Translation $\vec{t}$ der x-y-Ebene derart, dass $f(x+t_x, y+t_y) = g(x,y)$

Zu viel verlangt wegen:
- Rauschen (Messfehler)
- Diskretisation (Pixel)
- Bildverzerrung

$\Longrightarrow$ Aufgabe modifizieren

<u>Aufgabe</u>: Gegeben Bilder $f(x,y), g(x,y)$ finde eine Translation $\vec{t}$ der x-y-Ebene derart, dass $f(x+t_x, y+t_y)$ "möglichst nahe" an $g(x,y)$

Was heisst möglichst nahe? Antwort nach Kapitel 1: grösstmögliches Skalarprodukt.

<u>Lösungsansatz</u>: finde den Vektor $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$, der $\langle T_{\vec{t}} f, g \rangle$ maximiert.

Problem: Es müssen sehr viele Skalarprodukte berechnet werden!

Idee: Faltung ist Skalarprodukt verschobener und gespiegelter Funktionen.

Faltung von f mit h

$$(f*h)(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, h(y-x)\, dx$$

$$(f*\check{g})(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \check{g}(y-x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \underbrace{g(x-y)}_{\text{Um } y \text{ verschobenes Bild}}\, dx$$

$$= \langle f, T_y g \rangle \rightarrow \text{muss maximiert werden!}$$

<u>Lösungsansatz</u>: finde den Vektor $\vec{t}$ derart, dass $(f*\check{g})(\vec{t})$ maximiert wird.

Problem: Faltung berechnen ist aufwendig.

<u>Idee</u>: $f*g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$ ist einfach, wenn $\mathcal{F}$ "einfach" ist!

<u>Lösung</u> des Registrierungsproblems:

1. Berechne $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$ mit der schnellen Fourier-Transformation in $O(n^2 \log n)$
2. Finde Maximum in $O(n^2)$

2. Nichtkommutative Registrierungsprobleme

In der ursprünglichen Registrierungsaufgabe fehlt ein wesentlicher Aspekt: Drehungen der Ebene.

<u>Definition</u>: die Menge der Drehungen und Verschiebungen der Ebene bilden die Gruppe $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 = \{(s,v) \mid s \in SO(2), v \in \mathbb{R}^2\}$ mit der Verknüpfung

$$(s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) = (s_1 s_2, s_1 v_2 + v_1)$$

Die Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ heisst das semidirekte Produkt von $SO(2)$ und $\mathbb{R}^2$.

Die Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ ist nicht kommutativ:

$$\begin{array}{rcl} (s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) & = & (s_1 s_2 \quad , \quad s_1 v_2 + v_1) \\ & & \quad \,\| \qquad\qquad \not\| \text{ i.A.} \\ (s_2, v_2) \cdot (s_1, v_1) & = & (s_2 s_1 \quad , \quad s_2 v_1 + v_2) \end{array}$$

Gleichheit nur in sehr speziellen Fällen, nämlich $s_1 v_2 + v_1 = s_2 v_1 + v_2$.

Die Gruppe G operiert auf $\mathbb{R}^2$:

$$(s,v) \cdot x = (s,v) \cdot (e,x) = sx + v$$

d.h. Drehung um s, dann Verschiebung um v.

Aufgabe: Finde $(s,v) \in G$ derart, dass das mit (s,v) transformierte Bild g dem Bild f so ähnlich wie möglich ist

Ähnliche Situation: Bilder auf einer Kugel-Oberfläche können mit 3-dimensionalen Drehmatrizen gedreht werden.

Aufgabe: Gegeben $f, g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, finde $s \in SO(3)$ derart, dass $g \circ s$ so ähnlich wird wie f wie möglich

Schwierigkeiten, die Idee der "Fourier-Lösung" zu übertragen:

- Definitionsbereich der Bilder sind keine Gruppen
- Gruppen sind nicht kommutativ, d.h. Gelfand-Transformation "vergisst" Information
- Schnelle Berechnung

3. Homogene Räume

Gemeinsamkeiten

- Registrierung in der Ebene:
  - Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ operiert auf $\mathbb{R}^2$
  - Fixpunkt definiert eine Untergruppe von Drehungen

- Registrierung auf der Kugeloberfläche
  - Gruppe $SO(3)$ operiert auf S^2
  - Fixpunkt definiert eine Untergruppe von Drehungen (Drehungen um eine feste Achse)

Definition: G eine Gruppe von Transformationen auf einer Menge X.
Stabilisator von $x \in G$: $S_x = \{g \in G \mid gx = g\}$,
d.h. Transformationen, die x als Fixpunkt haben.

Gruppenelement g und gh, $h \in S_x$ haben dieselbe Wirkung auf x:

$$gh\cdot x = g(hx) = gx$$

Satz: Ist K der Stabilisator von x, d.h. $K = S_x$, und ist $y = gx$, dann ist

$$S_y = gKg^{-1}$$

Beweis: Welche "Drehungen" halten y fest? Wenn $h \cdot y = y$ ist, dann ist

$$h \cdot y = h \cdot gx = y = gx$$

oder: $\quad g^{-1}hg\, x = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in K$, d.h.

$$g^{-1}hg = k \in K \Leftrightarrow \quad h = gkg^{-1} \in gKg^{-1}$$

D.h. $S_y = gKg^{-1}$ $\square$

Algebraische Formulierung der Gemeinsamkeiten der Registrierungsprobleme:

- Gruppe G wirkt auf Definitionsgebiet X
- Alle Punkte haben "den gleichen" Stabilisator, eine Untergruppe $K \subset G$.

Definition: Ein homogener Raum ist ein Raum X mit einer transitiven Gruppenwirkung durch die Gruppe G derart, dass der Stabilisator S_x für alle $x \in X$ "gleich" ist

"homogen": hat überall die gleiche Symmetrie

4. Quotientenraum

Voraussetzung: Homogener Raum X mit Gruppe G

Transitive Operation heisst: jeder Punkt kann von einem einzigen Punkt $x \in X$ aus erreicht werden.

- Jeder Punkt der Erde kann durch Drehung vom Nordpol aus erreicht werden.
  → Sogar mit einer Achse, die durch den Äquator geht!
- Jeder Punkt der Ebene kann vom Nullpunkt aus durch eine Dreh-Verschiebung erreicht werden.
  → Sogar mit einer Translation!

⇒ Der Punkt $y \in X$ kann beschrieben werden durch $g \in G$ derart, dass $y = gx$. g ist nicht eindeutig, alle gk mit $k \in K = S_x$ beschreiben ebenfalls y:

$$gkx = g(kx) = gx = y$$

d.h. die Menge gK beschreibt y

Definition: K eine Untergruppe von G, dann setze:

$$G/K = \{ gK \mid g \in G \}$$

Menge der Rechtsnebenklassen, Quotient von G modulo K

Satz: $X \cong G/S_x \cong G/S_y = G/K$

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}^2$ mit Wirkung von $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, der Stabilisator des Nullpunktes ist

$$S_0 = K = \{ (s, 0) \mid s \in SO(2) \}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R}^2 = G/K = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 / SO(2)$$

2. $X = S^2$ mit Wirkung von $SO(3)$, der Stabilisator des Nordpoles ist

$$S_N = K = \{ s \in SO(3) \mid s \text{ Drehung um } z\text{-Achse} \}$$

$$\Longrightarrow S^2 = G/K = SO(3)/SO(2)$$

Zweiteilung des Registrierungsproblems:
- Fixpunkt x der gesuchten Transformation finden
- Element in S_x finden.

5. Gruppenoperation auf G/K

Wir haben bereits gesehen, dass $X = G/K$ ist. Wie wird die Gruppenoperation von G auf X beschrieben?

- Die "Punkte" y von X sind die Mengen sind die Mengen hK, die x nach y transportieren: $hx = y$

- Wirkung von g auf y: $gy = ghx$, d.h. gy entspricht der Menge ghK

Kontrolle: Finde den Stabilisator von x
- das neutrale Element e transportiert x nach x, d.h. dem Punkt x entspricht die Menge $eK = K$

- Stabilisator: Elemente $g \in G$ derart, dass $gK = K$, also $gk_1 = k_2 \Rightarrow g = k_2 k_1^{-1} \in K$, somit ist K genau der Stabilisator

Fazit: Alle Transformationen in X lassen sich auf Operationen in G zurückführen

6. Funktionen auf X

Im Registrierungsproblem geht es um Funktionen auf X:

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto f(y)$$

Daraus wird eine Funktion auf G:

$$\tilde{f}(g) = f(gx) \qquad \forall\, g \in G$$

Da $\quad gkx = gx = y$ für $k \in K$ ist

$$\tilde{f}(gk) = \tilde{f}(g)$$

d.h. im Registrierungsproblem müssen nur rechtsinvariante Funktionen auf G studiert werden: $C(G/K)$, $L^2(G/K)$...

Auf G gibt es ausserdem
- Haar-Integral
- Faltung

$$(f * h)(s) = \int_G f(t)\, g(t^{-1}s)\, dt$$

Schwierigkeit: $f*h$ ist nicht mehr rechtsinvariant. Faltung funktioniert nur für biinvariante Funktionen in $L^2(K\backslash G/K)$, d.h.

$$f(g) = f(kg) = f(gk)$$

7. Gelfand-Paare

Das Registrierungsproblem auf X führt also auf ein Paar von Gruppen $G \supset K$ mit $X = G/K$. Die Punkte von X entsprechen den verschiedenen Untergruppen $gKg^{-1} \subset G$, die alle isomorph sind zu K.

Faltung steht nur auf den biinvarianten Funktionen zur Verfügung, also in $L^2(K\backslash G/K)$

Erfolgreiche harmonische Analysis bekommt man nur, wenn die Faltung kommutativ ist.

<u>Definition</u>: (G, K) heisst ein Gelfand-Paar wenn $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe ist und die Faltungsalgebra $L^2(K\backslash G/K)$ kommutativ ist

Zweiteilung des Registrierungsproblems:

1. Bilder von $L^2(G/K)$ in $L^2(K\backslash G/K)$ transportieren und Registrierungsproblem bis auf "Drehung" in K lösen
2. Restproblem in K lösen (kleineres Problem)

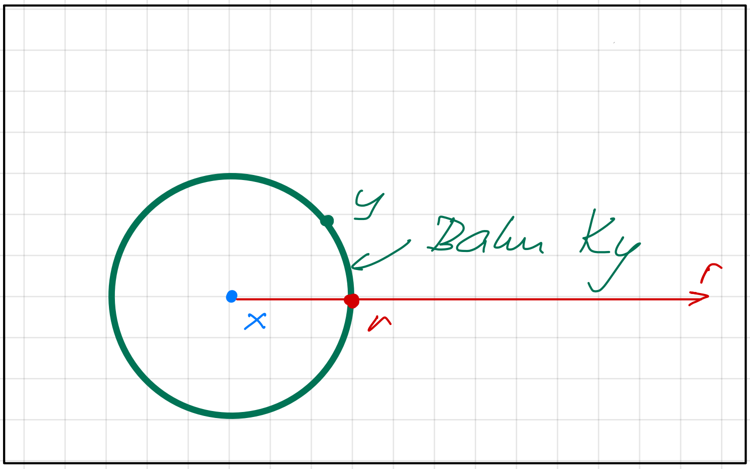
8. Méndez-Transformation

Aus der Gelfand-Theorie folgt, dass man die Funktionen auf $X = G/K$ biinvariant machen muss, d.h. die Wirkung von K darf das Bild nicht mehr verändern.

K = Stabilisator des Punktes x

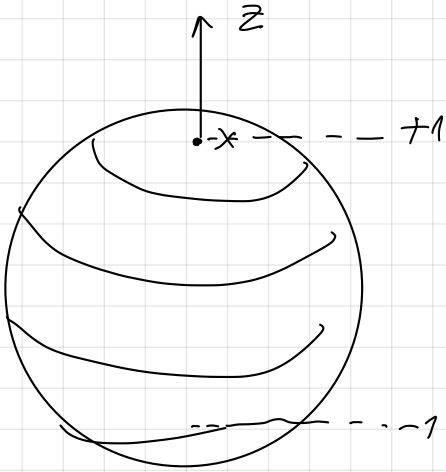
$\Rightarrow$ alle Pixel auf der Bahn von K mitteln

Neue Funktion, die von x und vom Radius r abhängt:



$$\mathcal{M}f(x)(r) = \int_{S_x} f(kr)\,dk$$

Oder auf der Kugel:



$$\mathcal{M}f(x)(z) = \int_{S_x} f(kz)\,dk$$

Mittelung über Breitenkreise zum Pol x.

9. Lösung des Registrierungsproblems

Gegeben: Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$

Gesucht: $g \in G$ derart, dass $f_1 \circ g$ möglichst nahe an f_2 ist

Schlüssel zur Lösung: g zunächst nur bis auf eine Transformation in K finden.

1. Schritt: finde x derart, dass

$$Mf_1(x) \quad \text{und} \quad Mf_2(x)$$

möglichst nahe beieinander sind
$\Longrightarrow$ gemeinsamer Fixpunkt gefunden

2. Schritt: finde Drehung s um x (Element im Stabilisator S_x) derart, dass $f_1 \circ s$ und f_2 möglichst nahe beieinander sind.