Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

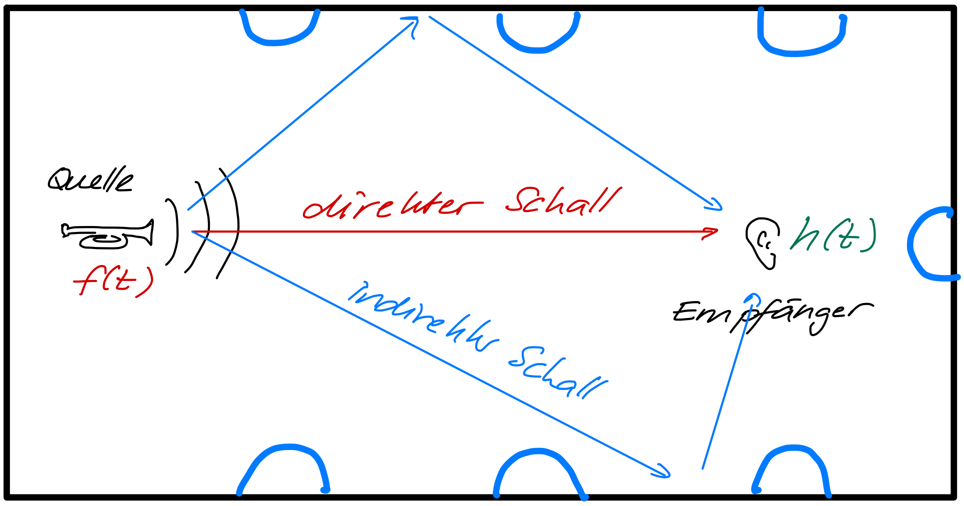
Andreas Müller

Faltung, Gruppen, Darstellung

Inhalt

1. Motivation

Wie funktioniert der Nachhall in einem Konzertsaal?

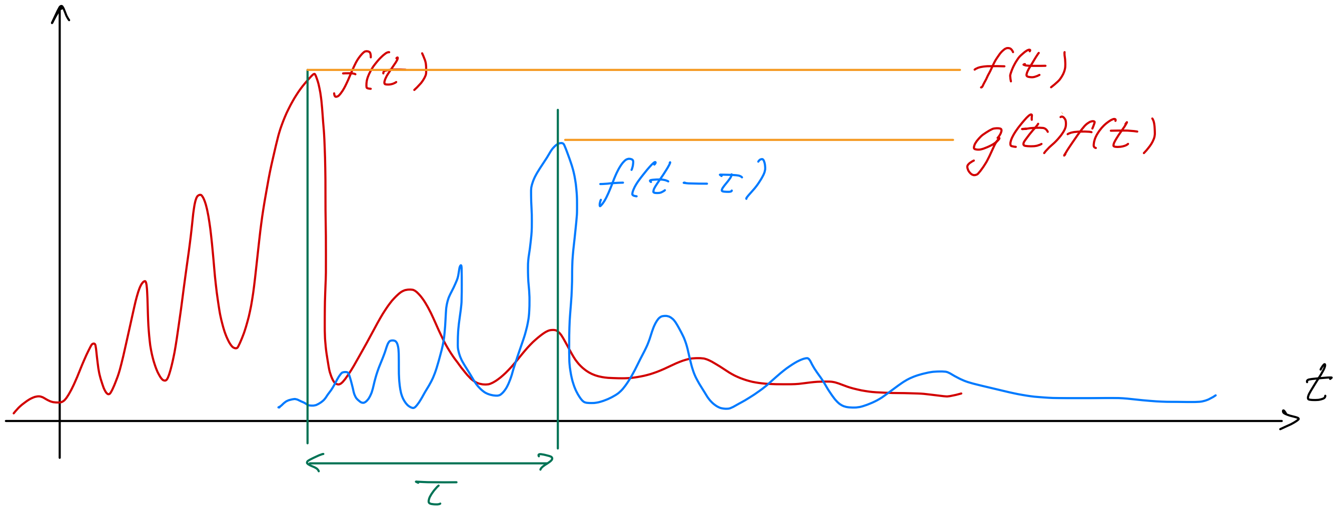


Empfangener Schall = direkter Schall + verspätete indirekte Echos

In einem schalltoten Raum hört der Empfänger nur den direkten Schall $= f(t)$.

Ein Wandstück reflektiert das Originalsignal, charakterisiert durch Verzögerung τ und Ausmass der Dämpfung $g(\tau)$. Von dieser Reflektion hört der Empfänger

$$\underbrace{g(\tau)}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{f(t-\tau)}_{\text{um } \tau \text{ verzögertes Signal}}$$



Gesamtsignal empfangen durch den Zuhörer:
Summe aller Verzögerungen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Signal}\\ \text{mit Hall}\end{array}\right\} = h(t) = \text{"}\sum_{\tau} \underbrace{g(\tau)}_{\text{Konzertsaal}}\ \underbrace{f(t-\tau)}_{\text{Quelle}}\text{"}$$

Eigenschaften von $g(\tau)$:

- $g(\tau)=0$ für $\tau<0$: Kausalität, Schall kann nicht gehört werden, bevor er erzeugt wird.
- Direktschall: $g(0) \leq 1$, kann sehr schwach sein
- Messung von $g(\tau)$: Pistolenknall als Schallquelle, empfangenes Signal ist $g(\tau)$
- $g(\tau)$ hängt von der Position des Zuhörers ab.

Definition: $g(\tau)$ heisst **Impulsantwort**

2. Faltung auf $\mathbb{R}$

<u>Definition</u>: Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die Faltung $f*g$ ist die Funktion

$$f*g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$x \longmapsto (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

Achtung: die Faltung ist nicht immer definiert, das Integral könnte für gewisse x divergieren

<u>Anwendung</u>: Signal $f(t)$ in einem Konzertsaal mit Impulsantwort $g(\tau)$, Zuhörer hört die Faltung

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = (g*f)(t)$$

Rechenregeln für die Faltung:

a) linear in beiden Faktoren:

$$(f*(g_1+g_2))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g_1(x-y) + g_2(x-y))\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_1(x-y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_2(x-y)\, dy$$
$$= (f*g_1)(x) + (f*g_2)(x)$$

und analog für f ...

b) Assoziativ: $((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x)$

$$((f*g)*h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(y)\, h(x-y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(y-z)\, dz\; h(x-y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(\underbrace{y-z})\, h(x-y)\, dy\; dz$$

$\eta = y - z \Rightarrow d\eta = dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\; g(\eta)\; h(x-(\eta+z))\, d\eta\; dz$$

Andererseits ist:

$$(f*(g*h))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, (g*h)(x-z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, h(x-z-y)\, dy\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\; g(y)\; h(x-(y+z))\, dy\; dz$$

$\Longrightarrow ((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x)$

Voraussetzungen

- alle Integrale müssen konvergieren
- Integrationen müssen vertauscht werden können

$\Longrightarrow$ Einschränkung an Funktionen, für die die Faltung funktioniert.

Satz: Die Faltung ist ein Produkt, d.h. sie ist bilinear und assoziativ

Man kann mit Faltungen genau so rechnen wie man es in der Algebra gelernt hat.

c) kommutativ: $(f*g)(x) = (g*f)(x)$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(\underbrace{x-y}_{z})\, dy \qquad z \Rightarrow dz = -dy$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} g(z)\, f(x-z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy = (g*f)(x)$$

$\Longrightarrow$ Faktoren in Faltungsprodukten können beliebig vertauscht werden.

Man beachte: die Rechenregeln für die Faltung sind völlig analog zu den Regeln für das punktweise Produkt von Funktionen:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

a) bilinear: $(f\cdot(g_1+g_2))(x) = f(x)g_1(x) + f(x)g_2(x)$
$= (f\cdot g_1 + f\cdot g_2)(x) \ldots$

b) assoziativ: $(f\cdot(g\cdot h))(x) = f(x)g(x)h(x) = ((f\cdot g)\cdot h)(x)$

c) kommutativ: $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g\cdot f)(x)$

Definition Eine Algebra A ist ein Vektorraum mit einem Produkt, d.h. einer bilineare und assoziativen Verknüpfung $A \times A \longrightarrow A$. Die Algebra heisst kommutativ, wenn das Produkt kommutativ.

Beispiele:

① Stetige Funktionen mit punktweisem Produkt

② ausreichend integrierbare Funktionen mit Faltungsprodukt

3. Translation und Spiegelung von Funktionen

Definition: Die Translation T_y einer Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Funktion $(T_y f)(x) = f(x-y)$. Die gespiegelte Funktion von f ist $\check{f}(x) = f(-x)$.

Die Faltung kann durch Translation und Spiegelung ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \check{g}(y-x)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, (T_x \check{g})(y)\, dy \\
&= \langle f, T_x \check{g} \rangle
\end{aligned}
$$

Spiegelung von g

Translation um x

<u>Schlussfolgerung</u>: Die Faltung entsteht, indem man die gespiegelte Funktion g über die reelle Achse verschiebt und jeweils das Skalarprodukt ausrechnet.

Rechenregeln für die Operatoren T_x und $\vee$:

a) T_x und $\vee$ sind linear:

$$T_x(f+g)(y) = f(y-x)+g(y-x)$$
$$\Longrightarrow \quad T_x(f+g) = T_x f + T_x g$$

$$(f+g)^\vee(x) = f(-x)+g(-x) = \check{f}(x)+\check{g}(x)$$
$$\Longrightarrow \quad (f+g)^\vee = \check{f}+\check{g}$$

und analog für skalare Faktoren

b) Vertauschungsregel für T_x und $\vee$

$$(T_x f)^\vee(y) = (T_x f)(-y) = f(-y-x)$$
$$= \check{f}(y-(-x)) = (T_{-x}\check{f})(y)$$
$$\Longrightarrow (T_x f)^\vee = T_{-x}\check{f}$$

c) T_x und Skalarprodukt

$$\langle T_x f, T_x g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (T_x f)(y)(T_x g)(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)g(y-x)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z)\,dz = \langle f, g\rangle$$

$z = y-x$
$dz = dy$

d.h. T_x ist eine Isometrie

$$\langle \check{f}, \check{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(y)\, \check{g}(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\, g(-y)\, dy \qquad z = -y,\quad dz = -dy$$
$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f(z)\, g(z)\, dz$$
$$= \langle f, g \rangle$$

d.h. auch die Spiegelung ist eine Isometrie

d) Die Eigenschaften der Faltung kann man aus den Eigenschaften der Operatoren T_x und $\vee$ bekommen:

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \langle f, T_x \check{g} \rangle && \text{Definition} \\
&= \langle T_{-x} f, \check{g} \rangle && T_{-x} \text{ ist Isometrie} \\
&= \langle (T_{-x} f)^{\vee}, g \rangle && \vee \text{ ist Isometrie} \\
&= \langle T_x \check{f}, g \rangle && \text{Vertauschungsregel} \\
&= \langle g, T_x \check{f} \rangle && \langle\, ,\, \rangle \text{ symmetrisch} \\
&= (g*f)(x)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Faltung ist kommutativ.

<u>Folgerung</u>: Kommutativität hat man immer, wenn T_x und $\vee$ Isometrien sind.

T_x Isometrie: Eigenschaft des Integrals

$\vee$ Isometrie: Eigenschaft "unimodular"

4. Ableitung

Ableitung von $f*g$:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

Ableiten nach x unter dem Integral

$$(f*g)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g'(x-y)\, dy = (f*g')(x)$$

$$(g*f)'(x) = (g*f')(x) = (f'*g)(x)$$

Die Ableitung kann mit dem Translationsoperator ausgedrückt werden

$$f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Rightarrow f' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_{-h}f - f)$$

Um die Ableitung der Faltung damit zu berechnen braucht man eine Rechenregel für die Wirkung von T_x auf der Funktion

$$h(y) = \langle f, T_y g\rangle : \quad (T_x h)(y) = h(y-x)$$
$$= \langle f, T_{y-x}\, g\rangle$$
$$= \langle f, T_{-x} T_y g\rangle$$

Damit kann man die Ableitung der Faltung berechnen:

$$(f*g)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_{-h} f*g - f*g)$$

$$(f*g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(T_{-h}\langle f, T_x \check{g}\rangle - \langle f, T_x \check{g}\rangle\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\langle f, T_{x+h}\check{g}\rangle - \langle f, T_x \check{g}\rangle\right)$$

$$= \left\langle f, \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(T_{x+h}\check{g} - T_x\check{g}\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle T_{-x} f, \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_{-h} g - g)^\vee\right.$$

$$= \langle T_{-x} f, (g')^\vee\rangle = \langle f, T_x (g')^\vee\rangle$$

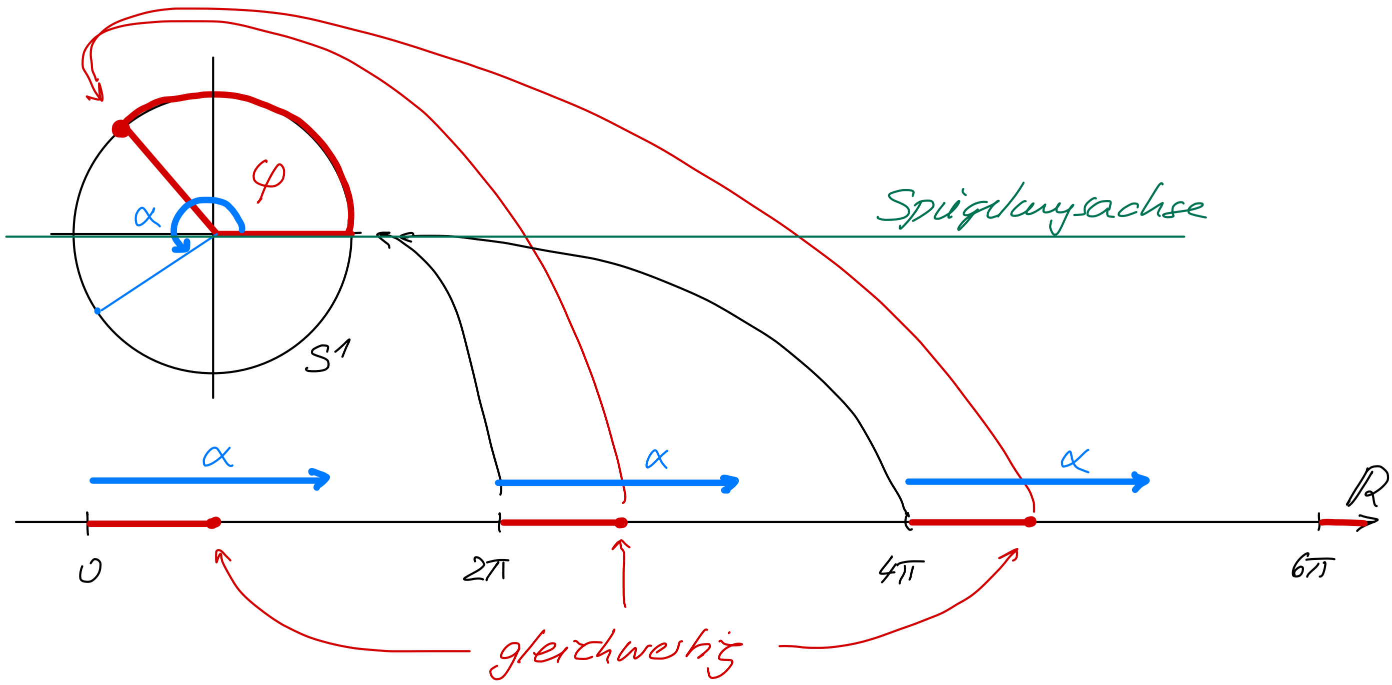
$$= (f * g')(x)$$

$\Rightarrow$ Auch die Rechenregeln für die Ableitung sind ein Resultat der Eigenschaften von Skalarprodukt, Translation und Spiegelung

5. Faltung auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

2π-periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllen $f(x+2\pi) = f(x)$, d.h. $x, x+2\pi, x+4\pi, \ldots, x-2\pi \ldots$ sind alle gleichwertig.

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ = $\mathbb{R}$ aber Unterschiede von 2π werden ignoriert



$\Longrightarrow$ 2π-periodische Funktionen sind Funktionen des Winkels φ, Funktionen auf einem Einheitskreis S^1

Für Funktionen von φ gibt es

Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(\varphi)}\, g(\varphi)\, d\varphi$

Translation: $(T_\alpha f)(\varphi) = f(\varphi - \alpha)$

Spiegelung: $\check{f}(\varphi) = \bar{f}(-\varphi) = \bar{f}(2\pi - \varphi)$

Daher gibt es auch eine Faltung für Funktionen auf S^1

$$(f * g)(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\alpha)\, g(\varphi - \alpha)\, d\alpha$$

$$= \langle f, T_\varphi \check{g}\rangle$$

mit den gleichen Rechenregeln!

6. Gruppen

Woher kommen die gemeinsamen Eigenschaften $\langle\,,\,\rangle$, $T_\bullet$, $^\vee$, die eine Faltung mit allen Rechenregeln ergeben?

Es gibt eine gemeinsame Struktur:

Definition: Eine Gruppe G ist eine Menge mit einer Verknüpfung $G \times G \longrightarrow G$, geschrieben $(x,y) \longrightarrow x+y$ (additive Schreibweise) oder $(x,y) \longrightarrow xy$ (multiplikative Schreibweise) mit folgenden Eigenschaften

1. assoziativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\quad (xy)z = x(yz)$
2. es gibt ein neutrales Element: $x+0 = x \ \forall x \in G$ $\quad x \cdot e = x \ \forall x \in G$
3. es gibt ein inverses Element $x+(-x) = 0 \ \forall x \in G$ $\quad x \cdot x^{-1} = e \ \forall x \in G$

Beispiele:

① $\mathbb{R}$ mit Addition: $x + (-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
② $\mathbb{R}_{>0}$ mit Multiplikation $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$
③ $\mathbb{Z}$ mit Addition
④ Reste bei Teilung durch n: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Diese Gruppen haben eine harmonische Analysis

⑤ Permutationsgruppe: S_n: Permutationen von n Objekten

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Zusammensetzung: $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Achtung, nicht kommutativ

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

○

<u>Definition</u>: Eine Gruppe G heisst abelsch, wenn die Verknüpfung kommutativ ist, d.h. $xy = yx \ \forall x, y \in G$. In diesem Fall wird die Verknüpfung additiv geschrieben:

i) neutrales Element: $0 \in G$: $0 + x = x \ \forall x \in G$

ii) inverses Element: $x \in G \Rightarrow \exists -x \in G \ (x + (-x) = 0)$

Aus der Translationsoperation T_x auf Funktionen auf der Gruppe ergibt sich die Ableitung: $(T_x f)(y) = f(y - x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (T_{-h} f - f)(x)$$

$$D = \frac{d}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (T_{-h} - id)$$

"Symmetrien führen auf Ableitungsoperatoren"

7. Integral und Mittelbarkeit

Fourier-Theorie verwendet für das Skalarprodukt das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

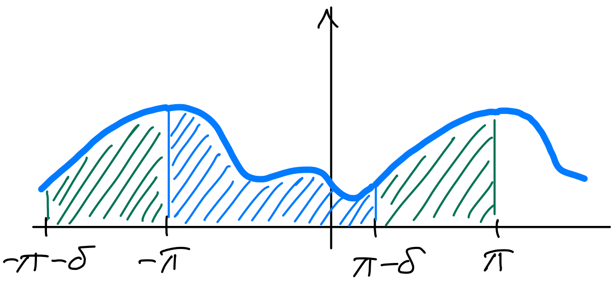
Es hat die Eigenschaft, dass eine verschobene Funktion dasselbe Integral hat:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(T_\delta f)(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(\underbrace{x-\delta}_{z})\,dx \qquad dz = dx$$

$$= \int_{-\pi-\delta}^{\pi-\delta} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\,dz$$

da die grünen Flächen gleich gross sind



Aus der Kombination Gruppe + Integral ergab sich die Faltung. Ein Integral gibt es aber "praktisch immer":

<u>Satz</u> (Alfred Haar): Ist G eine lokal kompakte topologische Gruppe, dann gibt es ein translationsinvariantes Mass μ auf G:

$$\int_G T_y f(x)\,d\mu(x) = \int_G f(x)\,d\mu(x) \qquad \forall y \in G$$

Es heisst auch das Haar-Mass.

"lokal kompakt" ist eine verallgemeinerte "Endlichkeitsbedingung": sie bedeutet ungefähr soviel wie "lokal endlich dimensional" oder "sieht lokal ähnlich aus wie $\mathbb{R}^n$"

<u>Beispiel</u>: Die Drehungen der Ebene bilden eine Gruppe, deren Elemente durch den Drehwinkel charakterisiert sind. Drehwinkel sind $\alpha \in \mathbb{R}$, lokal sieht die Gruppe der Drehungen wie $\mathbb{R}$ aus.
$\Longrightarrow$ Die Drehgruppe hat das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha$.

"topologisch" heisst, dass es einen Grenzwertbegriff gibt. Man kann also von Folgen von Gruppenelementen sprechen, die gegen 0 konvergieren (oder gegen das neutrale Element in der Gruppe), so wie die Drehungen um $\alpha_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$

Endliche Gruppen, wie die Reste mod n, haben ebenfalls ein "Integral": sei G eine endliche Gruppe und und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Gruppe, dann hat

$$\int_G f(x)\,d\mu(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \qquad (*)$$

alle benötigten Eigenschaften des Integrals, zum Beispiel Translationsinvarianz:

$$\int_G (T_y f)(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} f(xy^{-1})$$

Da $x \longmapsto xy^{-1}$ eine umkehrbare Abbildung der endlichen Menge G auf sich ist, ist die Summe über die Elemente xy^{-1} und x dasselbe. Daher ist

$$\int_G (T_y f)(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} f(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x).$$

Das Integral (*) ist auch der Mittelwert der Funktionswerte von f. Eine solche Interpretation ist immer möglich, wenn $\int_G 1\, d\mu(x) < \infty$ ist. In diesem Fall kann das Integral normiert werden.

<u>Definition</u>: Eine Gruppe heisst mittelbar, wenn es ein invariantes Mass mit $\int_G d\mu(x) = 1$ gibt.

- endliche Gruppen sind mittelbar
- kompakte Gruppen sind mittelbar, z.B. die Gruppe der Drehungen $(SO(2))$ oder des Raumes $SO(3)$.
- Mittelbare Gruppen haben ein Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x) g(x)\, d\mu(x), \quad \|1\|^2 = \int_G 1^2 d\mu(x) = 1$$

8. Faltung und Fourier-Funktionen

Die Faltung für 2π-periodische Funktionen ist definiert als

$$(f*g)(x) = \int_G f(y)\, g(x-y)\, dx$$

für die Gruppe G = Drehungen in der Ebene.
Die Faltung ist ein Produkt von Funktionen, d.h. es ist zum Beispiel bilinear:

$$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$$

Wie verträgt sich die Faltung mit dem Skalarprodukt? Gibt es eine Funktion $h(x)$ derart, dass $\langle h, f*g\rangle = \langle h,f\rangle \cdot \langle h,g\rangle$

"Definition": Ein Algebrahomomorphismus ist eine Abbildung zwischen Algebren, die sich mit den algebraischen Operationen verträgt.

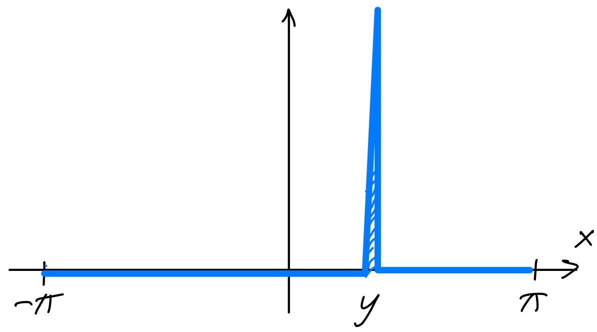
Beispiel: $\varphi: C([-\pi,\pi]) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \langle h,f\rangle$ ist ein Homomorphismus, wenn

$$\varphi(f+g) = \varphi(f)+\varphi(g) \Leftrightarrow \langle h,f+g\rangle = \langle h,f\rangle + \langle h,g\rangle \checkmark$$
$$\varphi(f*g) = \varphi(f)\varphi(g) \Leftrightarrow \langle h,f*g\rangle = \langle h,f\rangle\langle h,g\rangle \ ?$$

Offenbar ist eine solche Funktion $h(x)$ sehr speziell.

Trick: Funktionen $d_y(x) \geq 0$ verwenden mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} d_y(x)\,dx = 1,$$



die nur in einer winzigen Umgebung von y von 0 verschieden sind.

$$\langle f, d_y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d_y(x)\,dx \approx f(y)$$

Für $f = d_x$ und $g = d_y$ folgt

$$\langle h, f\rangle \langle h, g\rangle = \langle h, d_x\rangle \langle h, d_y\rangle \approx h(x)\,h(y).$$

Faltung $d_x * d_y$ bestimmen

$$(d_x * d_y)(z) = \int_G \underbrace{d_x(\xi)}_{\neq 0 \text{ nur wenn } \xi \text{ nahe bei } x \text{ ist.}} \underbrace{d_y(z-\xi)}_{\neq 0 \text{ nur wenn } z-\xi \text{ nahe bei } y \text{ ist.}}\,d\xi$$

$\neq 0$ nur, wenn $z - x$ nahe bei y ist

$\Rightarrow z - x \approx y \Rightarrow z \approx x + y.$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned}\int_G d_x * d_y(z)\,dz &= \int_G \int_G d_x(\xi) d_y(z-\xi)\,d\xi\,dz \\ &= \int_G d_x(\xi) \underbrace{\int_G d_y(z-\xi)\,dz}_{1}\,d\xi \\ &= \int_G d_x(\xi)\,d\xi = 1\end{aligned}$$

Die Faltund $d_x * d_y$ ist also eine Funktion der Art d_{x+y}. Es folgt

$$\langle h, d_{x+y} \rangle \approx h(x+y)$$

Grenzübergang ergibt, dass $\varphi(f) = \langle h, f \rangle$ genau dann ein Homomorphismus ist, wenn

$$h(x+y) = h(x) h(y) \qquad (*)$$

Lösung der Funktionalgleichung durch Ableiten nach y und $y=0$ setzen:

$$h'(x+y) = h(x) h'(y)$$

$$h'(x) = \lambda h(x) \qquad \lambda = h'(0)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$h(x) = C e^{\lambda x}$$

Kontrolle: $h(x+y) = C e^{\lambda(x+y)} = C e^{\lambda x} e^{\lambda y} = h(x) h(y) \frac{1}{C}$
d.h. einzige Lösung ist $C = 1$.

Reelle Exponentialfunktionen sind nicht periodisch, aber die komplexen Exponentialfunktionen schon: $e_k(t) = e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ auf der mittelbaren Gruppe $SO(2)$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{SO(2)} f(x) g(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

9. Gelfand Transformation

Ausgangspunkt: Algebra A der Funktionen auf einer mittelbaren Gruppe mit Faltung

Definition: $\mathbb{X}(A)$ = Menge aller Homomorphismen $A \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst Spektrum von A

Beispiel: $SO(2) = [-\pi, \pi]$,

$$\mathbb{X}(A) = \{ f \longmapsto \langle e^{ikt}, f \rangle \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Spektrum besteht aus "Fourier-Funktionen"

Definition: Die Gelfand-Transformation ist die Abbildung

$$\mathcal{G} : C(G) \longrightarrow \mathbb{X}(A) : f \longmapsto \mathcal{G}f = \hat{f}$$

mit $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$.

Beispiel: $SO(2) = [-\pi, \pi]$, f eine Funktion auf $SO(2)$, dann ist

$$(\mathcal{G}f)(k) = \hat{f}(k) = \langle e^{ikt}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\, dt = \mathcal{F}f(k)$$

Satz: $\mathcal{G}(f * g) = \mathcal{G}f \cdot \mathcal{G}g$

Beweis: $\mathcal{G}(f*g)(\varphi) = \varphi(f*g) = \varphi(f)\varphi(g)$

$= (\mathcal{G}f)(\varphi) \cdot (\mathcal{G}g)(\varphi)$ $\square$

10. Darstellungen

Gruppen ergeben auf natürliche Weise eine Art von Transformation mit den gleichen Eigenschaften wie die Fouriertransformation. Es ist aber noch nicht klar, ob die so gefundenen Funktionen orthogonal sind.

Wir haben gefunden, dass für die Gelfand-Transformation Funktionen $h: G \to \mathbb{C}$ gebraucht werden, die die Eigenschaft

$$h(t+s) = h(t)h(s)$$

haben. Diese Eigenschaft ist analog zu den Eigenschaften eines Algebrahomomorphismus, aber nur für Gruppen.

<u>Definition</u>: Seien G, H Gruppen, dann heisst eine Abbildung $\varphi: G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus, wenn $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall x,y \in G$.

<u>Beispiel</u>: $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \exp$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ mit der Addition in die Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Multiplikation

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \bigcirc$$

Beispiel: die Fourier-Funktionen $e_k(t) = e^{ikt}$ sind Homomorphismen von der Gruppe $\mathbb{R}$ mit der Addition in die Gruppe $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation. ○

Beispiel: Die Determinante $\det : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist wegen der Produkteigenschaft der Determinanten $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ein Homomorphismus. ○

Beispiel: Die reellen Fourier-Funktionen geben Anlass zu einer Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow O(2) : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$$

Da $\varphi_n(t)$ eine Drehmatrix mit Drehwinkel nt ist, folgt

$$\varphi_n(s+t) = \varphi_n(s)\,\varphi_n(t)$$

d.h. φ_n ist ein Homomorphismus. ○

Allgemein

Definition: Eine n-dimensionale (reelle) Darstellung einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$.

Darstellungen ermöglichen, Gruppen als Untergruppen der Matrizengruppen zu studieren, über die man mehr weiss. Die Fourier-Funktionen tauchen also auf in 1- oder 2-dimensionalen Darstellungen der Gruppe.

11. Zerlegung von Darstellungen

Sind $\rho_i : G \longrightarrow GL_{n_i}(\mathbb{R})$ zwei Darstellungen der Dimension n_i, $i=1,2$. dann kann man eine neu Darstellung der Dimension $n=n_1+n_2$

$$G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) : g \longmapsto \rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

konstruieren. Die Matrix $\rho(g)$ operiert auf $V = \mathbb{R}^n$. Der Vektorraum V hat zwei Unterräume

$$V_1 \cong \mathbb{R}^{n_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \mathbb{R}^{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n_2} \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft: $V_1 + V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = 0$.

<u>Definition</u>: Ein Vektorraum V heisst direkte Summe von V_1 und V_2, wenn $V_1 + V_2 = V$ und $V_1 \cap V_2 = 0$.

Die beiden Unterräume $V_1 \subset V$ und $V_2 \subset V$ haben die Eigenschaft, dass

$$\rho(g) V_1 \subset V_1 \quad \text{und} \quad \rho(g) V_2 \subset V_2$$

Definition: Ein Unterraum $V_1 \subset V$ heisst invariant wenn $\rho(g) V_1 \subset V_1 \quad \forall g \in G$

Die beiden Darstellungen $V_1, V_2 \subset V$ sind also invariante Unterräume von V. Die Darstellung $\rho: G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ lässt sich also in zwei Darstellungen geringerer Dimension zerlegen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, Darstellungen durch solche Zerlegungen in Bausteine zu zerlegen, die sich individuell studieren lassen.

Definition: Eine Darstellung $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ heisst irreduzibel, wenn die einzigen invarianten Unterräume V und 0 sind.

Der Plan ist daher eine Darstellung in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zu zerlegen.

12. Das Lemma von Schur

Satz: Ist h eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{h} V$ und $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ eine irreduzible Darstellung mit $h\,\rho(g) = \rho(g)\,h \quad \forall g \in G$, dann ist entweder $h = 0$ oder $h = \lambda$

Dieser Satz ist bekannt als das Lemma von Schur.

Beweis: Der Unterraum

$$V_1 = \{ v \in V \mid h(v) = 0 \}$$

ist invariant, denn für $v \in V_1$ gilt

$$h\, \rho(g)(v) = \rho(g)\, h(v) = \rho(g)\, 0 = 0$$

$\Longrightarrow$ $\rho(g)(v) \in V_1$. Da die einzigen invarianten Unterräume 0 und V sind, ist $V_1 = 0$ oder $V_1 = 0$.

1. Fall: $V_1 = V$, d.h. $h(v) = 0 \ \forall v = 0 \Rightarrow h = 0$.

2. Fall: $V_1 = 0$, d.h. h ist invertierbar. Wir müssen noch zeigen, dass $h = \lambda$ ist. Dazu sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von h. Dann gilt

$$(h - \lambda)\, \rho(g) = \rho(g)\, (h - \lambda),$$

d.h. wie für h vorhin. Da aber $h - \lambda$ nicht invertierbar ist muss $h - \lambda = 0$ sein, also $h = \lambda$. $\square$

Mit derselben Überlegung kann man irreduzible Darstellungen vergleichen:

Satz: Sind $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$ irreduzible Darstellungen von G und $h : V_1 \longrightarrow V_2$ eine lin. Abbildung mit $h\, \rho_1(g) = \rho_2(g)\, h \ \forall g \in G$, dann ist $h = 0$ oder umkehrbar.

Beweis: Die Unterräume

$$\ker h = \{ v \in V_1 \mid h(v) = 0 \}$$
$$\operatorname{im} h = \{ h(v) \mid v \in V_1 \}$$

sind invariant, denn

$$v \in \ker h \Longrightarrow h\,\rho_1(g)(v) = \rho_2(g)\underbrace{h(v)}_{=0} = 0$$
$$\Longrightarrow \rho_1(g)(v) \in \ker h \qquad \forall g \in G$$

$$h(v) \in \operatorname{im} h \Longrightarrow \rho_2(g)h(v) = h(\rho_1(g)v) \in \operatorname{im} h \quad \forall g \in G$$

Da die Darstellungen irreduzibel sind gibt es nur zwei Fälle:

1\. Fall: $\operatorname{im} h = 0 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow \ker h = V_1$

2\. Fall: $\left.\begin{array}{l} \operatorname{im} h = V_2, \text{ d.h. } h \text{ ist surjektiv} \\ \ker h = 0, \text{ d.h. } h \text{ ist injektiv} \end{array}\right\}$ bijektiv. $\square$

Der Fall h invertierbar bedeutet, dass die beiden Darstellungen eigentlich dasselbe in verschiedenen Koordinatensystemen sind: $\rho_2(g) = h\,\rho_1(g)h^{-1}$.

13. Mittelung von Abbildungen

Sei G eine mittelbare Gruppe und $h: G \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine matrixwertige Funktion. Dann ist

$$\int_G h(g)\,dg \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

Dieser Mittelungsprozess kann dazu verwendet werden, invariante Unterräume zu finden.

<u>Satz</u>: Ist $V_1 \subset V$ ein invarianter Unterraum der Darstellung $\rho : G \to GL(V)$, dann gibt es einen invarianten Unterraum $V_2 \subset V$ derart, dass $V = V_1 \oplus V_2$.

Beweis: Sei P eine Projektion von V auf V_1, d.h. $P^2 = P$ u. $\operatorname{im} P = V_1$. Setze

$$\bar{P} = \int_G \rho(g) P \rho(g)^{-1} \, dg$$

Für Vektoren $v \in V_1$ gilt: $\rho(g)^{-1} v \in V_1$, $P\rho(g)^{-1} v = \rho(g)^{-1} v \Rightarrow \rho(g) P \rho(g)^{-1} v = v$ oder $\bar{P} v = v$.

Für $t \in G$ gilt

$$\begin{aligned}
\bar{P} \rho(t) &= \int_G \rho(g) P \rho(t^{-1} g)^{-1} \, dg \\
&= \int_G \rho(t\tilde{g}) P \rho(\tilde{g})^{-1} \, d\tilde{g} \\
&= \rho(t) \int_G \rho(\tilde{g}) P \rho(\tilde{g})^{-1} \, d\tilde{g} \\
&= \rho(t) \bar{P}
\end{aligned}$$

$V_2 = \ker \bar{P}$ ist invariant, denn aus $\bar{P} v = 0$ folgt $\bar{P}\rho(t) v = \rho(t) \bar{P} v = 0$, d.h. $\rho(t) v \in V_2$.

Für die Schnittmenge gilt: $v \in V_1 \cap V_2$:

$$\left.\begin{array}{l} v \in V_1 \Rightarrow \bar{P}v = v \\ v \in V_2 \Rightarrow \bar{P}v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = 0$ und daher $V = V_1 \oplus V_2$ $\square$

14. Mittelung des Skalarproduktes

Sei ϱ eine n-dimensionale Darstellung $G \to GL(V)$ der mittelbaren Gruppe G und $\langle\, ,\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Man kann nicht davon ausgehen, dass sich das Skalarprodukt unter der Wirkung von G nicht ändert, d.h. im Allgemeinen ist

$$\langle \varrho(g)v, \varrho(g)w\rangle \neq \langle v, w\rangle$$

für $g \neq e$. Man kann die Unterschiede aber "ausmitteln":

Satz: Unter obigen Voraussetzungen ist

$$\langle u, v\rangle_G = \int_G \langle \varrho(t)^{-1}u, \varrho(t)^{-1}v\rangle \, dt$$

ein invariantes Skalarprodukt, d.h.

$$\langle \varrho(g)u, \varrho(g)v\rangle_G = \langle u, v\rangle_G$$

Beweis:

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle_G = \int_G \langle \rho(t)^{-1}\rho(g)u, \rho(t)^{-1}\rho(g)v\rangle \, dt$$

$$= \int_G \langle \rho(g^{-1}t)^{-1}u, \rho(g^{-1}t)^{-1}v\rangle \, dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_G \langle \rho(t)^{-1}u, \rho(t)^{-1}v\rangle \, dt = \langle u,v\rangle_G$$

wobei (*) wegen der Linksinvarianz des Integrals gilt $\square$

Da in einem endlichdimensionalen Vektorraum immer ein Skalarprodukt existiert, gibt es für jede Darstellung immer ein <u>invariantes</u> Skalarprodukt. Durch Wahl einer orthonormierten Basis ist jede Darstellung durch orthogonale (V reell) oder unitäre (V komplex) Matrizen realisierbar.

<u>Satz</u>: Jede Darstellung einer mittelbaren Gruppe G ist äquivalent zu einer Darstellung ρ durch orthogonale / unitäre Matrizen und

$$\rho(g^{-1})_{ik} = \overline{\rho(g)}_{ki}$$

15. Orthogonalität von Matrixelementen

<u>Definition</u>: Skalarprodukt für Funktionen auf einer Gruppe

$$\langle f,g\rangle = \int_G \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

Wir erinnern zunächst an das Schursche Lemma, welches wir auch so formulieren können

<u>Satz</u>: Seien ρ_i zwei Darstellungen in V_i und $h: V_1 \longrightarrow V_2$ linear, dann ist

$$\bar{h} = \int_G \rho_2(t)^{-1} h \rho_1(t)\, dt \quad : V_1 \longrightarrow V_2$$

linear und es gilt $\bar{h}\rho_1(g) = \rho_2(g)\bar{h} \quad \forall g \in G$.

<u>Satz</u>: Sind die ρ_i zusätzlich irreduzibel, dann ist

1) $\bar{h} = 0$ oder invertierbar
2) $V_1 = V_2 \Longrightarrow \bar{h} = \lambda = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}(h)$

Beweis: Es ist nur noch der Wert von λ im Fall 2) zu berechnen:

$$n\lambda = \mathrm{Spur}\,\bar{h} = \int_G \mathrm{Spur}(\rho_1(t)^{-1} h \rho_1(t))\, dt$$
$$= \int_G dt\ \mathrm{Spur}(h) = \mathrm{Spur}(h)$$

$\square$

Aus dem Schurschen Lemma kann man jetzt Orthogonalitätseigenschaften für die Matrixelemente irreduzibler Darstellungen.

Seien im Folgenden ϱ_i zwei irreduzible Darstellungen durch unitäre $n_i \times n_i$-Matrizen und h eine $n_2 \times n_1$ Matrix:

$$\mathbb{C}^{n_1} \xrightarrow{\;h\;} \mathbb{C}^{n_2}$$

$$\begin{tikzcd}
GL_{n_1}(\mathbb{C}) & & GL_{n_2}(\mathbb{C}) \\
& G \arrow[ul, "\varrho_1"] \arrow[ur, "\varrho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann ist $\bar{h} : \mathbb{C}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_2}$ eine $n_2 \times n_1$-Matrix.

Im Fall $\bar{h} = 0$ folgt

$$0 = \int_G \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_1} r_{ik}^{(2)}(t^{-1})\, h_{kl}\, r_{lj}^{(1)}(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_1} h_{kl} \int_G r_{ik}^{(2)}(t^{-1})\, r_{lj}^{(1)}(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_1} \langle r_{ki}^{(2)}, r_{lj}^{(1)} \rangle\, h_{kl}$$

Da diese Linearform in den Variablen h_{kl} verschwindet, müssen alle Koeffizienten $=0$ sein:

$$\langle r_{ki}^{(2)}, r_{lj}^{(1)} \rangle = 0 \quad \forall\, i, k, l, j$$

Im Fall einer einzelnen irreduziblen Darstellung von G durch unitäre $n\times n$-Matrizen

$$\int_G \sum_{k,l=1}^{n} r_{ik}(t^{-1})\, h_{kl}\, r_{lj}(t)\, dg = \lambda\, \delta_{ij}$$

mit $\lambda = \frac{1}{n}\operatorname{Spur}(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}\,\delta_{lk}$,

d.h. zusammen

$$\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}\,\langle r_{ki}, r_{lj}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} h_{kl}\,\delta_{lk}\,\delta_{ij}$$

Beide Seiten sind linear in h_{kl}, d.h. die Koeffizienten müssen übereinstimmen:

$$\langle r_{ki}, r_{lj}\rangle = \frac{1}{n}\,\delta_{lk}\,\delta_{ij}$$

d.h.

$$\langle r_{ki}, r_{lj}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{n} & l=k \text{ und } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Satz</u>: Verschiedene Matrixelemente einer irreduziblen n-dimensionalen Darstellung einer mittelbaren Gruppe bilden eine orthogonale Basis eines n^2-dimensionalen Raumes von Funktionen auf G.

Satz: Die Matrixelemente verschiedener Darstellungen durch unitäre Matrizen sind orthogonale Funktionen

Beispiel: Darstellungen der Gruppe S_3 durch die Permutationsmatrizen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} \longmapsto P(\sigma) = \delta_{\sigma(i) i}$$

Diese Darstellung ist aber nicht irreduzibel, da der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein gemeinsamer Eigenvektor ist.
Wir verwenden als Basis:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Unterraum $V_1 = \langle b_1 \rangle$ ist invariant.
Da Permutationsmatrizen orthogonal sind, ist auch $V_2 = \langle b_2, b_3 \rangle$ invariant.

In der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ haben die Permutationen die Matrix-Elemente:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{wegen } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente ergeben 5 Vektoren:

$$r_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; r_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \; r_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \; r_{33} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind alle orthogonal, wie erwartet.

Es gibt noch eine weitere eindimensionale Darstellung mit dem Matrixelementvektor

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der ebenfalls auf alle Vektoren senkrecht steht.

16. Charakter einer irreduziblen Darstellung

Definition: Ist ρ eine Darstellung von G, dann heisst $\chi(g) = \text{Spur}\,\rho(g)$ der Charakter der Darstellung.

Wichtig: Der Charakter ist basisunabhängig.

Satz: Die Charakter irreduzibler Darstellungen sind orthonormiert.

Beweis: Zwei verschiedene Darstellungen ϱ und ϱ' mit Charakter χ und χ' und Matrixelementen $r_{ij}(t)$ und $r'_{ij}(t)$. Dann gilt:

① $$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle r_{ii}, r_{ii} \rangle = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

d.h. normiert.

② $$\langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle r_{ii}, r'_{ii} \rangle = 0$$ d.h. orthogonal

□

Zerlegung einer Darstellung ϱ in irreduzible Summanden:

1. Schritt: Alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe ermitteln: $\varrho_1, \varrho_2, \dots$

2. Schritt: Charaktere $\chi_i = \text{Spur}\, \varrho_i$ bilden eine o.n. Basis

3. Schritt: Charakter $\chi = \text{Spur}\, \varrho$ nach χ_i entwickeln:

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \chi_i, \chi \rangle}_{n_i \in \mathbb{N}} \chi_i$$

n_i = wie oft kommt ϱ_i in ϱ vor?

17. Faltung auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

③ Gegeben eine Funktion $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, verwende als "Integral":

$$"\int_{\mathbb{Z}} f(z)\,dz" = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f(z)$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{z=-\infty}^{\infty} f(z) g(z)$$

und Faltung

$$(f * g)(y) = \sum_{z=-\infty}^{\infty} f(z) g(y-z)$$

④ Gegeben eine Funktion $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ (Funktion mit Periode n), verwende als "Integral"

$$\int_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(z)\,dz = \sum_{z=0}^{n-1} f(z)$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{z=0}^{n-1} f(z) g(z)$$

und Faltung

$$(f * g)(x) = \sum_{z=0}^{n-1} f(z) g(x-z) = \sum_{y+z=x} f(z) g(y)$$