Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

7. Nichtkommutative harmonische Analysis

Inhalt

1. Motivation: Registrierungsproblem

<u>Aufgabe</u>: Gegeben Bilder $f(x,y)$, $g(x,y)$ finde eine Translation $\vec{t}$ der x-y-Ebene derart, dass $f(x+t_x, y+t_y) = g(x,y)$

Zu viel verlangt wegen:

- Rauschen (Messfehler)
- Diskretisation (Pixel)
- Bildverzerrung

$\Longrightarrow$ Aufgabe modifizieren

<u>Aufgabe</u>: Gegeben Bilder $f(x,y)$, $g(x,y)$ finde eine Translation $\vec{t}$ der x-y-Ebene derart, dass $f(x+t_x, y+t_y)$ "möglichst nahe" an $g(x,y)$

Was heisst möglichst nahe? Antwort nach Kapitel 1: grösstmögliches Skalarprodukt.

<u>Lösungsansatz</u>: finde den Vektor $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$, der $\langle T_{\vec{t}} f, g \rangle$ maximiert.

Problem: Es müssen sehr viele Skalarprodukte berechnet werden!

Idee: Faltung ist Skalarprodukt verschobener und gespiegelter Funktionen

Faltung von f mit h

$$(f*h)(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, h(y-x)\, dx$$

$$(f*\check{g})(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \check{g}(y-x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \underbrace{g(x-y)}_{\text{Um } y \text{ verschobenes Bild}}\, dx$$

$$= \langle f, T_y g \rangle \rightarrow \text{muss maximiert werden!}$$

<u>Lösungsansatz</u>: finde den Vektor $\vec{t}$ derart, dass $(f*\check{g})(\vec{t})$ maximiert wird.

Problem: Faltung berechnen ist aufwendig.

<u>Idee</u>: $f*g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$ ist einfach, wenn $\mathcal{F}$ "einfach" ist!

<u>Lösung</u> des Registrierungsproblems:

1. Berechne $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$ mit der schnellen Fourier-Transformation in $O(n^2 \log n)$
2. Finde Maximum in $O(n^2)$

2. Nichtkommutative Registrierungsprobleme

In der ursprünglichen Registrierungsaufgabe fehlt ein wesentlicher Aspekt: Drehungen der Ebene.

<u>Definition</u>: die Menge der Drehungen und Verschiebungen der Ebene bilden die Gruppe $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 = \{(s,v) \mid s \in SO(2), v \in \mathbb{R}^2\}$ mit der Verknüpfung

$$(s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) = (s_1 s_2,\ s_1 v_2 + v_1)$$

Die Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ heisst das semidirekte Produkt von $SO(2)$ und $\mathbb{R}^2$.

Die Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ ist nicht kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} (s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) = (& s_1 s_2 \ , & s_1 v_2 + v_1) \\ & \| & \nparallel \ \text{i.A.} \\ (s_2, v_2) \cdot (s_1, v_1) = (& s_2 s_1 \ , & s_2 v_1 + v_2) \end{array}$$

Gleichheit nur in sehr speziellen Fällen, nämlich $s_1 v_2 + v_1 = s_2 v_1 + v_2$.

Die Gruppe G operiert auf $\mathbb{R}^2$:

$$(s,v) \cdot x = (s,v) \cdot (e, x) = sx + v$$

d.h. Drehung um s, dann Verschiebung um v.

Aufgabe: Finde $(s,v) \in G$ derart, dass das mit (s,v) transformierte Bild g dem Bild f so ähnlich wie möglich ist

Ähnliche Situation: Bilder auf einer Kugel-Oberfläche können mit 3-dimensionalen Drehmatrizen gedreht werden:

Aufgabe: Gegeben $f, g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, finde $s \in SO(3)$ derart, dass $g \circ s$ so ähnlich wird wie f wie möglich

Schwierigkeiten, die Idee der "Fourier-Lösung" zu übertragen:

- Definitionsbereich der Bilder sind keine Gruppen
- Gruppen sind nicht kommutativ, d.h. Gelfand-Transformation "vergisst" Information
- Schnelle Berechnung

3. Homogene Räume

Gemeinsamkeiten

- Registrierung in der Ebene:
  - Gruppe $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ operiert auf $\mathbb{R}^2$
  - Fixpunkt definiert eine Untergruppe von Drehungen

- Registrierung auf der Kugeloberfläche
  - Gruppe $SO(3)$ operiert auf S^2
  - Fixpunkt definiert eine Untergruppe von Drehungen (Drehungen um eine feste Achse)

<u>Definition:</u> G eine Gruppe von Transformationen auf einer Menge X.
Stabilisator von $x \in G$: $S_x = \{g \in G \mid gx = g\}$,
d.h. Transformationen, die x als Fixpunkt haben.

Gruppenelement g und gk, $k \in S_x$ haben dieselbe Wirkung auf x:

$$gk \cdot x = g(kx) = gx$$

Satz: Ist K der Stabilisator von x, d.h. $K = S_x$, und ist $y = gx$, dann ist

$$S_y = gKg^{-1}$$

Beweis: Welche "Drehungen" halten y fest? Wenn $h \cdot y = y$ ist, dann ist

$$h \cdot y = h \cdot gx = y = gx$$

oder: $g^{-1}hg\, x = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in K$, d.h.

$$g^{-1}hg = k \in K \Leftrightarrow \quad h = gkg^{-1} \in gKg^{-1}$$

D.h. $S_y = gKg^{-1}$ $\square$

Algebraische Formulierung der Gemeinsamkeiten der Registrierungsprobleme:

- Gruppe G wirkt auf Definitionsgebiet X
- Alle Punkte haben "den gleichen" Stabilisator, eine Untergruppe $K \subset G$.

Definition: Ein homogener Raum ist ein Raum X mit einer transitiven Gruppenwirkung durch die Gruppe G derart, dass der Stabilisator S_x für alle $x \in X$ "gleich" ist

"homogen": hat überall die gleiche Symmetrie

4. Quotientenraum

Voraussetzung: Homogener Raum X mit Gruppe G

Transitive Operation heisst: jeder Punkt kann von einem einzigen Punkt $x \in X$ aus erreicht werden.

- Jeder Punkt der Erde kann durch Drehung vom Nordpol aus erreicht werden.
  → Sogar mit einer Achse, die durch den Äquator geht!
- Jeder Punkt der Ebene kann vom Nullpunkt aus durch eine Dreh-Verschiebung erreicht werden.
  → Sogar mit einer Translation!

$\Rightarrow$ Der Punkt $y \in X$ kann beschrieben werden durch $g \in G$ derart, dass $y = gx$. g ist nicht eindeutig, alle gk mit $k \in K = S_x$ beschreiben ebenfalls y:

$$gkx = g(kx) = gx = y$$

d.h. die Menge gK beschreibt y

Definition: K eine Untergruppe von G, dann setze:

$$G/K = \{ gK \mid g \in G \}$$

Menge der Rechtsnebenklassen, Quotient von G modulo K, Orbitraum, K-Orbits in G

Satz: $X \cong G/S_x \cong G/S_y = G/K$

Beispiele:

① $X = \mathbb{R}^2$ mit Wirkung von $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, der Stabilisator des Nullpunktes ist

$$S_0 = K = \{ (s, 0) \mid s \in SO(2) \}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R}^2 = G/K = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 / SO(2)$$

Details: Abschnitt 7

② $X = S^2$ mit Wirkung von $SO(3)$, der Stabilisator des Nordpoles ist

$$S_N = K = \{ s \in SO(3) \mid s \text{ Drehung um } z\text{-Achse} \}$$

$$\Longrightarrow S^2 = G/K = SO(3)/SO(2)$$

Details: Abschnitt 8

Zweiteilung des Registrierungsproblems:

- Fixpunkt x der gesuchten Transformation finden
- Element in S_x finden.

5. Gruppenoperation auf G/K

Wir haben bereits gesehen, dass $X = G/K$ ist.
Wie wird die Gruppenoperation von G auf X beschrieben?

- Die "Punkte" y von X sind die Mengen sind die Mengen hK, die x nach y transportieren: $hx = y$

- Wirkung von g auf y: $gy = ghx$, d.h. gy entspricht der Menge ghK

Kontrolle: Finde den Stabilisator von x

- das neutrale Element e transportiert x nach x, d.h. dem Punkt x entspricht die Menge $eK = K$

- Stabilisator: Elemente $g \in G$ derart, dass $gK = K$, also $gk_1 = k_2 \Rightarrow g = k_2 k_1^{-1} \in K$, somit ist K genau der Stabilisator

Fazit: Alle Transformationen in X lassen sich auf Operationen in G zurückführen

6. Funktionen auf X

Im Registrierungsproblem geht es um Funktionen auf X:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto f(y)$$

Daraus wird eine Funktion auf G:

$$\tilde{f}(g) = f(gx) \qquad \forall\, g \in G$$

Da $gkx = gx = y$ für $k \in K$ ist

$$\tilde{f}(gk) = \tilde{f}(g)$$

d.h. im Registrierungsproblem müssen nur rechtsinvariante Funktionen auf G studiert werden: $C(G/K)$, $L^2(G/K)$ ...

Auf G gibt es ausserdem
- Haar-Integral
- Faltung

$$(f * h)(s) = \int_G f(t) g(t^{-1}s)\, dt$$

Schwierigkeit: $f*h$ ist nicht mehr rechtsinvariant. Faltung funktioniert nur für biinvariante Funktionen in $L^2(K\backslash G/K)$, d.h.

$$f(g) = f(kg) = f(gk)$$

7. $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ und die Ebene $\mathbb{R}^2$

In diesem Abschnitt ist $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$.
Die Gruppe $SO(2)$ der Drehungen ist auf eine natürliche Art und Weise eine Untergruppe:

$$SO(2) \hookrightarrow SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 : s \longmapsto (s,0)$$

Wie früher gezeigt ist diese Einbettung der Stabilisator des Nullpunktes.

Satz: $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 / SO(2) \cong \mathbb{R}^2$

Beweis: Die Abbildung

$$\pi : SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \underbrace{(s,v)}_{g} \longmapsto v$$

hat die Eigenschaft

$$\pi(g \cdot t) = \pi((s,v)\cdot(t,0)) = \pi(st, s0+v) = v$$

unabhängig von $t \in SO(2)$. Jedem $K = SO(2)$-Orbit wird also genau ein Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet □

Die Wirkung von $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ von links auf G/K ist genau die erwartete, wie folgende Rechnung zeigt.

Sei $g=(t,v)$ und $x=gK\in G/K$ der Rechts-K-Orbit. Unter der Projektion π wird er durch den Punkt v dargestellt.

Sei jetzt $h=(s,u)\in G$ ein Gruppenelement. Es ist nachzurechnen, dass der Orbit $hx=hgK$ durch den Punkt hv dargestellt wird.
Dazu rechnet man

$$hg=(s,u)(t,v)=(st,sv+u)$$
$$\pi(hg)=sv+u$$

Andererseits ist

$$hv=(s,u)v=sv+u.$$

Somit gilt:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, "h\cdot"'] & G/K \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h\cdot"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "h\cdot"'] \\
G \arrow[r] & G/K \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Multiplikation in der Gruppe

für die Repräsentanten

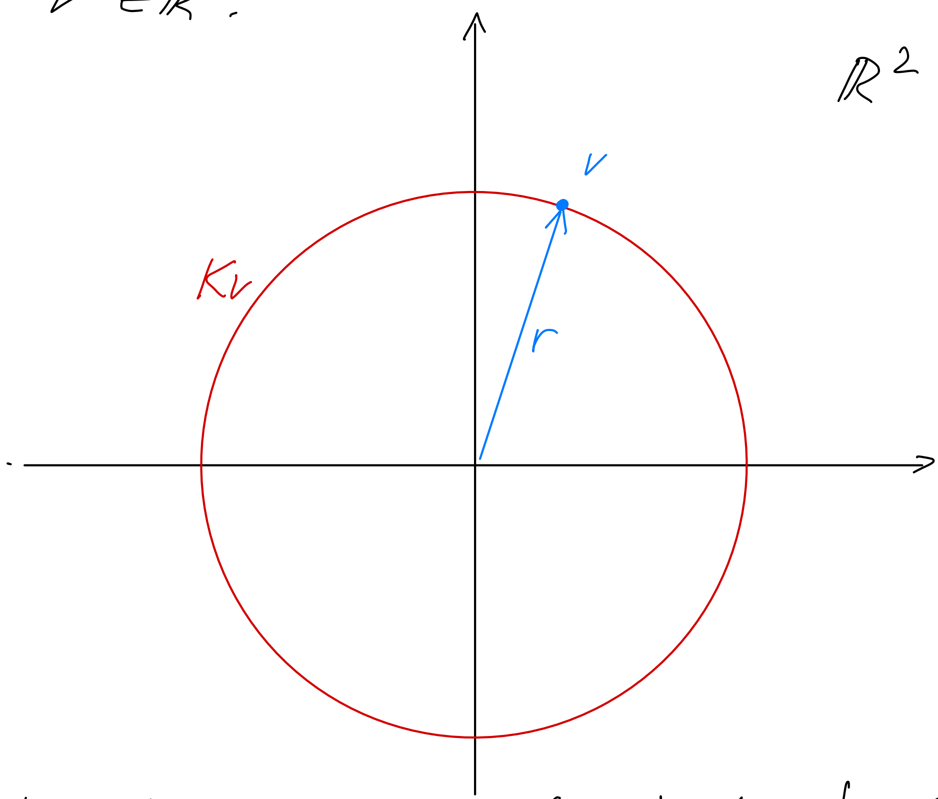
$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] & gK \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] & v \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] \\
hg \arrow[r, mapsto] & hgK \arrow[r, mapsto] & hv=sv+u
\end{tikzcd}$$

Wirkung von G auf $\mathbb{R}^2$

Die Links-Orbits der Wirkung von $SO(2)$ auf G/K sind die Mengen $Kv \subset \mathbb{R}^2$

$$Kv = \pi(K(S,v)) = \{\pi(ts, tv+0) \mid t \in K\}$$
$$= \{tv \mid t \in K\}$$

d.h. ein Kreis um den Nullpunkt durch den Punkt $v \in \mathbb{R}^2$.



Der Links-K-Orbitraum ist $K\backslash G/K = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$

Anwendung: Nach Wahl einer Geraden, z.B. $\{\binom{x}{0} \mid x \geq 0\}$ ist ein Punkt in der Ebene $G/K = \mathbb{R}^2$ festgelegt durch:

$$x \in K\backslash G/K \quad \text{und} \quad k \in K = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

d.h. durch Polarkoordinaten

8. SO(3) und die Kugel S^2

In diesem Abschnitt ist $G = SO(3)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen mit Determinante 1, d.h. die Matrizen erhalten die Orientierung. Wir schreiben ein Element $g \in G$ als Matrix

$$g = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \;g_1 & \quad g_2 & \quad g_3 \end{matrix} \end{array} \in SO(3)$$

Orthogonalität bedeutet, dass die Spalten orthonormierte Vektoren sind:

$$g_i \cdot g_k = \delta_{ik} \quad \text{für } i,k \in \{1,2,3\}$$

Der Stabilisator der z-Achse $S_z \subset G$ besteht aus den Matrizen, die die z-Richtung $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unverändert lassen, also

$$g e_z = \begin{pmatrix} g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow g_{13} = g_{23} = 0,\; g_{33} = 1 \Rightarrow g_3 = e_z$$

Damit $g_1 \cdot g_3 = g_{13}$ und $g_2 \cdot g_3 = g_{23} = 0$ muss g die Form

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben.

Die verkürzten Spalten $\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix}$ sind orthonormiert, d.h. die orange Untermatrix ist in $SO(2)$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{k} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in SO(2) \right\} \cong SO(2)$$

<u>Satz</u>: $G/K = SO(3)/SO(2) \cong S^2$

Beweis: Ein Rechts-K-Orbit in $SO(3)$ besteht aus den Matrizen

$$gk = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11}k_{11}+g_{12}k_{12} & g_{11}k_{12}+g_{12}k_{22} & g_{13} \\ g_{21}k_{11}+g_{22}k_{21} & g_{21}k_{12}+g_{22}k_{22} & g_{23} \\ g_{31}k_{11}+g_{32}k_{21} & g_{31}k_{12}+g_{32}k_{22} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Die dritte Spalte ändert nicht! Da auch $gk \in SO(3)$, müssen die ersten 2 Spalten orthonormierte Vektoren in einer Ebene $\perp g_3$ sein. Die Wirkung von K auf dieser Ebene ist eine Drehung, die beliebige Einheitsvektoren in der Ebene in jeden anderen solchen Vektor überführen kann.

Die Projektion:

$$\pi : SO(3) \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \; g \longmapsto g_3$$

hat die Eigenschaft $\pi(gk) = \pi(g) \;\forall k \in SO(2)$, somit ist π eine Bijektion

$$G/K = SO(3)/SO(2) \xrightarrow{\;\pi\;} \mathbb{R}^3$$

Da $|g_3| = 1$ ist $\pi(g) \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$. $\square$

Die Operation von $K = SO(2)$ auf $G = SO(3)$ durch Multiplikation von links ist verträglich mit der Projektion π:

$$\pi(hg) = \pi\begin{pmatrix} hg_1 & hg_2 & hg_3 \end{pmatrix} = hg_3$$

d.h. die Multiplikation von links in G wird in die Wirkung von links von G auf S^2:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] & gK \arrow[r, mapsto, "\pi"] \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] & g_3 \arrow[d, mapsto, "h\cdot"'] \\
hg \arrow[r, mapsto] & hgK \arrow[r, mapsto, "\pi"] & hg_3
\end{tikzcd}$$

Multiplikation in der Gruppe $SO(3)$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, "h\cdot"'] & G/K \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h\cdot"'] & S^2 \arrow[d, "h\cdot"'] \\
G \arrow[r] & G/K \arrow[r, "\pi"] & S^2
\end{tikzcd}$$

Operation von $SO(3)$ auf S^2

Die Operation von K auf S^2 ist

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}v_1 + k_{12}v_2 \\ k_{21}v_1 + k_{22}v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Sie bewegt einen Vektor $\binom{v_1}{v_2}$ in einer horizontalen Ebene auf Höhe v_3, ohne deren Länge zu ändern, d.h. sie ist eine Drehung auf der Höhe v_3. Die Projektion

$$S^2 \longrightarrow [-1,1] : v \longmapsto v_3$$

ist bildet alle Punkte eines Links-K-Orbits auf seine "Höhe" in $[-1,1]$ ab. Somit ist

$$K\backslash G/K = SO(2)\backslash SO(3)/SO(2) = [-1,1]$$

Anwendung: Sei ϑ die geographische Breite auf der Kugel S^2 gemessen vom Nordpol.
Die z-Koordinate eines Punktes mit Breite ϑ ist $z = \cos\vartheta \in [-1,1]$.

Durch Wahl eines Meridians, zB $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x^2+z^2=1 \\ x \geq 0 \end{matrix} \right\}$
wird ein Koordinatensystem festgelegt.
Ein Punkt wird festgelegt durch

$$z = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad k\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Kugelkoordinaten.

9. Gelfand-Paare

Das Registrierungsproblem auf X führt also auf ein Paar von Gruppen $G \supset K$ mit $X = G/K$.
Die Punkte von X entsprechen den verschiedenen Untergruppen $gKg^{-1} \subset G$, die alle isomorph sind zu K.

Faltung steht nur auf den biinvarianten Funktionen zur Verfügung, also in $L^2(K\backslash G/K)$

Erfolgreiche harmonische Analysis bekommt man nur, wenn die Faltung kommutativ ist.

<u>Definition</u>: (G, K) heisst ein Gelfand-Paar wenn $K \subset G$ eine kompakte Untergruppe ist und die Faltungsalgebra $L^2(K\backslash G/K)$ kommutativ ist

Zweiteilung des Registrierungsproblems:

① Bilder von $L^2(G/K)$ in $L^2(K\backslash G/K)$ transportieren und Registrierungsproblem bis auf "Drehung" in K lösen

② Restproblem in K lösen (kleineres Problem)

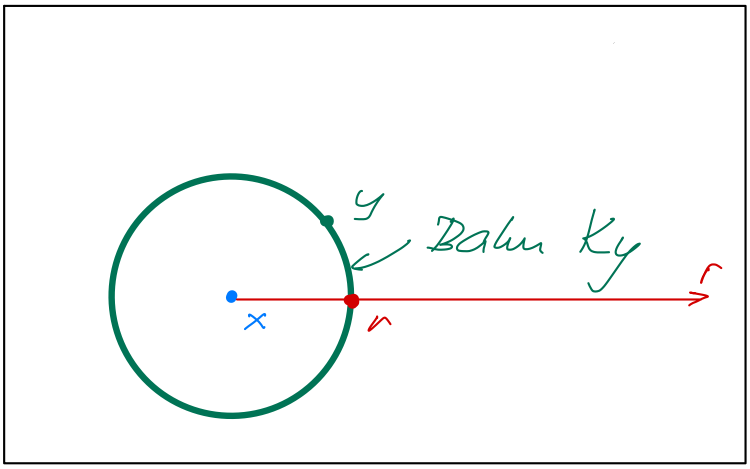
10. Méndez-Transformation

Aus der Gelfand-Theorie folgt, dass man die Funktionen auf $X = G/K$ biinvariant machen muss, d.h. die Wirkung von K darf das Bild nicht mehr verändern.

K = Stabilisator des Punktes x

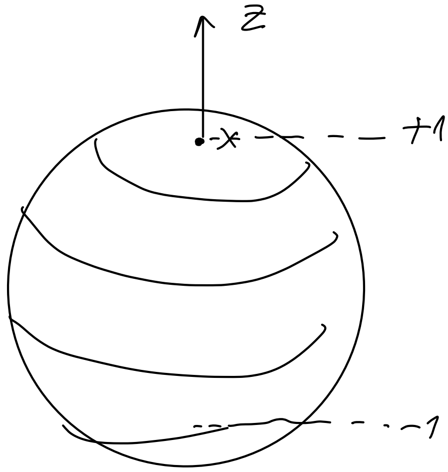
$\Rightarrow$ alle Pixel auf der Bahn von K mitteln

Neue Funktion, die von x und vom Radius r abhängt:



$$\mathcal{M}f(x)(r) = \int_{S_x} f(kr)\,dk$$

Oder auf der Kugel:



$$\mathcal{M}f(x)(z) = \int_{S_x} f(kz)\,dk$$

Mittelung über Breitenkreise zum Pol x.

11. Lösung des Registrierungsproblems

Gegeben: Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$

Gesucht: $g \in G$ derart, dass $f_1 \circ g$ möglichst nahe an f_2 ist

Schlüssel zur Lösung: g zunächst nur bis auf eine Transformation in K finden.

1. Schritt: finde x derart, dass

$$\mathcal{M}f_1(x) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}f_2(x)$$

möglichst nahe beieinander sind
$\Longrightarrow$ gemeinsamer Fixpunkt gefunden

2. Schritt: finde Drehung s um x (Element im Stabilisator S_x) derart, dass $f_1 \circ s$ und f_2 möglichst nahe beieinander sind.