Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

2. Orthogonale Funktionenfamilien

Inhalt

1. Motivation

Aus der Vektorgeometrie weiss man: mit Hilfe einer orthonormierten Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$ kann man jeden Vektor v linear kombinieren:

$$v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \langle b_2, v\rangle + \dots + \langle b_n, v\rangle b_n \qquad (*)$$

$$\|v\|^2 = \langle b_1, v\rangle^2 + \langle b_2, v\rangle^2 + \dots + \langle b_n, v\rangle^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

Linearkombination ist immer möglich, wenn $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis ist, aber mit dem Skalarprodukt ist es besonders einfach, die Koeffizienten zu finden.

<u>Definition:</u> Vektoren $b_1, \dots, b_n$ heissen eine **Basis**, wenn jeder Vektor als Linearkombination $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ geschrieben werden kann.

<u>Definition:</u> Eine Basis heisst **orthonormiert**, wenn

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Ziel:</u> für Funktionenräume orthonormierte Basen finden.

2. Beispiel: Fourierbasis für 2π-period. Funktionen

Sei $V \subset C(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2π-period. Funktionen. Für $f \in V$ genügt es, die Funktionswerte im Intervall $[-\pi, \pi]$ zu kennen. Man kann daher das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$$

verwenden.

Gesucht: eine orthogonale Funktionenfamilie aus 2π-periodischen Funktionen.

<u>Idee (Fourier)</u>: Verwende

$$c_k(x) = \cos kx \qquad k \in \mathbb{N}$$
$$s_k(x) = \sin kx \qquad k \in \mathbb{N},\ k > 0$$

<u>Satz</u>: Die Funktionenfamilie $\{\ _0,\ _k,\ _k \mid k>0\}$ ist orthogonal

Beweis: Skalarprodukte nachrechnen

$$\langle c_k, s_l \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} c_k(x) s_l(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos kx}_{\text{gerade}}\, \underbrace{\sin lx}_{\text{ungerade}}\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \text{ungerade Fkt}\ dx = 0 \quad ✓$$

Trigonometrische Identitäten:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Damit kann man die Skalarprodukte für $k \neq \ell$ berechnen

$$\langle C_k, C_\ell \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-\ell)x + \cos(k+\ell)x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}}_{2\pi\text{-period}} + \underbrace{\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}}_{2\pi\text{-period}} \Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\Big[\underbrace{f(x)}_{2\pi\text{-period.}} \Big]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi) - f(-\pi) = f(-\pi+2\pi) - f(-\pi) = 0$$

$$\langle S_k, S_\ell \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin \ell x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}}_{2\pi\text{-period.}} - \underbrace{\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell}}_{2\pi\text{-period}} \Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Fall C_0:

$$\langle C_0, C_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \overbrace{\cos kx}^{2\pi\text{-period}} \, dx = 0$$
$$\langle C_0, S_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \underbrace{\sin kx}_{2\pi\text{-period}} \, dx = 0$$

$\square$

3. Normierung

Neue Funktionen

$$c_k(x) = \frac{1}{\|C_k\|} C_k(x) \,, \quad s_k(x) = \frac{1}{\|S_k\|} S_k(x)$$

Normen berechnen:

$$\|C_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} C_k(x)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\cos 2kx}_{2\pi\text{-period.}}) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

$$\|S_k\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_k(x)^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \underbrace{\cos 2kx}_{2\pi\text{-period}}) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

$$\|C_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

folglich gilt:

Satz: Die Funktionen

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$$

$$s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$$

sind orthonormiert

4. Fourier-Reihen

Sei $f(x)$ eine stetige, 2π-periodische Funktion. Dann folgt aus $(*)$

$$f(x) = \langle c_0, f\rangle c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\langle c_k, f\rangle c_k(x) + \langle s_k, f\rangle s_k(x)\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,dx \,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \cdot f(x)\,dx \,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \, f(x)\,dx \,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}_{= a_0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx}_{= a_k} \cdot \cos kx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx}_{= b_k} \cdot \sin kx$$

<u>Satz</u>: Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ kann geschrieben werden als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

wobei die Koeffizienten a_k, b_k wie folgt berechnet werden:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Ausserdem gilt für die Norm

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right) \quad (+)$$

Sind u_k, v_k die Fourier-Koeffizienten von $g(x)$, dann ist das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \pi\left(\frac{a_0 u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k u_k + b_k v_k)\right) \quad (+)$$

Bemerkungen:

- Andere Skalarprodukte $t\langle\, ,\,\rangle$ sind möglich, um die Faktoren π in (+) los zu werden.

- Man muss noch zeigen, dass es keine Funktion gibt, die auf allen c_k, s_k orthogonal ist.

- Fourier reduziert eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf die Koeffizienten a_k, b_k mit denen sich bereits viele Fragen über die Funktion beantworten lassen

- Fourier geht auch für viele nicht stetige Funktionen

5. Orthogonalisierung nach Gram-Schmidt

Satz: V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine Basis. Dann ist

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$b_2 = \frac{a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1}{\| a_2 - \langle b_1, a_2 \rangle b_1 \|}$$

$$b_3 = \frac{a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2}{\| a_3 - \langle b_1, a_3 \rangle b_1 - \langle b_2, a_3 \rangle b_2 \|}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{a_n - \langle b_1, a_n \rangle b_1 - \dots - \langle b_{n-1}, a_n \rangle b_{n-1}}{\| a_n - \langle b_1, a_n \rangle b_1 - \dots - \langle b_{n-1}, a_n \rangle b_{n-1} \|}$$

eine orthonormierte Basis mit der Eigenschaft, dass für alle i die Vektoren

$$a_1, \dots, a_i \quad \text{und} \quad b_1, \dots, b_i$$

den gleichen Unterraum aufspannen.

Dieser Algorithmus kann auch auf Funktionenfamilien angewendet werden und erzeugt orthonormierte Funktionenfamilien.

6. Orthogonale Polynome

<u>Satz (Weierstrass)</u>: Stetige Funktionen $C([a,b])$ auf dem Intervall $[a,b]$ können gleichmässig durch Polynome approximiert werden.

Wir betrachten den Fall $[a,b]=[-1,1]$ und das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Die Monome $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots$ sind linear unabhängig. Der Gram-Schmidt-Prozess liefert eine Familie orthogonaler Polynome:

$$a_0(x)=1\,,\quad \|a_0\|^2=\int_{-1}^{1} dx = 2 \Rightarrow \quad b_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_1(x)=x,\quad \langle b_0,a_1\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\,dx = 0$$

$$\|a_1\|^2=\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

$$a_2(x)=x^2,\quad \langle b_0,a_2\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}x^2dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\langle b_1,a_2\rangle = 0$ (da $b_1(x)a_2(x)$ ungerade)

$\Rightarrow x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = x^2-\frac{1}{3}$ normieren

$$\|x^2-\tfrac{1}{3}\|^2=\int_{-1}^{1} x^4-\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{1}{9}\,dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{2}{9}x^3+\tfrac{x}{9}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\tfrac{2}{5}-\tfrac{4}{9}+\tfrac{2}{9}=\tfrac{18-20+10}{45}=\tfrac{8}{45}$$

$$\Longrightarrow\quad b_2(x)=\sqrt{\tfrac{45}{8}}\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)$$

Im Prinzip lässt sich so eine orthonormierte Familie von Polynomen finden. Berechnung ist sehr mühsam...

Übliche Normierung statt $\|b_n\|=1$: Funktionswert für $x=1$ muss 1 sein

<u>Satz:</u> Die bezüglich

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

orthogonalen Polynome $P_n(x)$ vom Grad n mit $P_n(1)=1$ heissen Legendre-Polynome

Legendre-Polynome können zur Approximation von Funktionen durch Polynome verwendet werden.

Anwendung: numerische Integration mit Gauss-Quadratur

7. Komplexe Fourier-Reihen

"Alles wird einfacher mit komplexen Zahlen"

Funktionenraum: 2π-periodische Funktionen

$$t \longmapsto f(t) \in \mathbb{C}$$

Komplexes Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Basisfunktionen: $e_k(t) = e^{-ikt}$

① Funktionen e_k, e_l mit $k \neq l$ sind orthogonal

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}}\, e^{ilt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t}\, dt$$

2π-periodisch

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(l-k)t}}{i(l-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

② Funktionen e_k sind normiert

$$\|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2\, dt = 1$$

③ Komplexe Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

wobei die Koeffizienten c_k durch

$$c_k = \hat{f}(k) = \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\, dt$$

Für die Norm gilt:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \qquad \text{(Parseval-Plancherel)}$$

Sind d_k die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(t)$, dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k}\, d_k \qquad \text{(Parseval-Plancherel)}$$

Ist f eine reellwertige Funktion, dann ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)\, dt$$

$$= c_k + c_{-k} = c_k + \overline{c_k} = 2 \operatorname{Re} c_k$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}\, dt$$

$$= \frac{1}{i} (c_{-k} - c_k) = 2\, \frac{\overline{c_k} - c_k}{2i} = -2 \operatorname{Im} c_k$$

8. Symmetrieeigenschaften

Die Funktionen $e_k(t)$ haben interessante Symmetrieeigenschaften.

<u>Definition</u>: T_δ ist der Translationsoperator auf Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$(T_\delta f)(x) = f(x+\delta)$$

① Die Wirkung von T_δ auf e_k ist

$$(T_\delta e_k)(t) = e_k(t+\delta) = e^{ik(t+\delta)} = e^{ik\delta} e_k(t)$$

$$\Rightarrow \quad T_\delta e_k = \underbrace{e^{ik\delta}}_{\lambda} e_k = \lambda e_k$$

Die Funktionen e_k sind Eigenvektoren von T_δ

② Für c_k, s_k ist die Situation etwas komplizierter

$$\begin{aligned}(T_\delta c_k)(t) &= \cos k(t+\delta) = \cos kt \cos k\delta - \sin kt \sin k\delta \\ &= \cos k\delta \; c_k(t) - \sin k\delta \; s_k(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_\delta s_k)(t) &= \sin k(t+\delta) = \sin kt \cos k\delta + \cos kt \sin k\delta \\ &= \cos k\delta \; s_k(t) + \sin k\delta \; c_k(t)\end{aligned}$$

Matrixform

$$T_\delta \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\delta & -\sin k\delta \\ \sin k\delta & \cos k\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix} = D_{k\delta} \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix}$$

c_k, s_k spannen einen unter T_δ invarianten 2-dimensionalen Unterraum auf.

9. Ableitungseigenschaften

① Ableitungen von e_k:

$$\frac{d}{dt} e_k(t) = \frac{d}{dt} e^{ikt} = ik\, e^{ikt} = ik\, e_k(t)$$

Sei D der Ableitungsoperator: $D = \frac{d}{dt}$

$De_k = ik\, e_k \Rightarrow$ e_k ist Eigenvektor von D zum Eigenwert ik

② Ableitungen von S_k, C_k:

$$D C_k(t) = D \cos kt = -k \sin kt = -S_k(t)$$
$$D S_k(t) = D \sin kt = k \cos kt = C_k(t)$$

$\Rightarrow$ S_k, C_k sind <u>keine</u> Eigenfunktionen von D

Aber C_k und S_k sind Eigenfunktionen von D^2:

$$D^2 C_k = D(-S_k) = -C_k$$
$$D^2 S_k = D C_k = -S_k$$

③ D^2 und Skalarprodukt

$$\langle D^2 f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) g(x)\, dx = [\underbrace{\overset{2\pi\text{-period.}}{f'(x)g(x)}}_{=0}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g'(x)\, dx$$

$$\langle f, D^2 g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g''(x)\, dx = [\underbrace{f(x)g'(x)}_{=0}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) g'(x)\, dx$$

$\Longrightarrow \langle D^2 f, g\rangle = \langle f, D^2 g\rangle$

10. Eigenfunktionen von selbstadjungierten Operatoren

Lineare Algebra: A eine symmetrische Matrix und $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^t u\, v$, dann gilt

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle.$$

Dann sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal und die Eigenwerte sind reell.

Dies gilt auch für Funktionenräume und Operatoren A, für die $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ gilt.

Beweis: ① $Au = \lambda u$, dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \langle Au, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle \\ \quad \shortparallel \\ \langle u, Au\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.

② $Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\langle Au_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_2\rangle$$

$$\shortparallel$$

$$\langle u_1, Au_2\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle u_1, u_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1, u_2\rangle = 0$$

□