Mathematisches Seminar

Harmonische Analysis

Andreas Müller

4 - Fourier-Integral und Unschärfe

Inhalt

1. Analyseprinzipien

In den letzten Sitzungen hat sich eine Reihe von Prinzipien herauskristallisiert, nach denen erfolgreiche Analyse und Synthese von Funktionen durchgeführt werden kann:

a) <u>Integrale statt einzelne Werte</u>

Prinzip: einzelne Werte sind eher unwichtig, Integrale $\int g(x)t(x)dx$ mit geeigneten "Test"-Funktionen sind oft nützlicher.

<u>Beispiel</u>: Skalarprodukte der Form

$$\langle f,g\rangle = \int_X \overline{f(x)}\,g(x)dx$$

die sesquilinear und positiv sind. Sie erfüllen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$$

aus der sich auch die Dreiecksungleichung und damit unsere Intuition über Längen ableiten lässt $\rightsquigarrow$ Funktionen sind "wie Vektoren" ○

Skalarprodukte suggerieren, dass man mit orthonormierten Basisfunktionen arbeiten soll. So entsteht die klassische Fourier-Theorie.

b) Basisfunktionen und Differentialoperatoren

Orthogonale Funktionenfamilien entstehen auf natürliche Art und Weise als Eigenfunktionen von selbstadjungierten Differentialoperatoren.

Beispiel: $D = \frac{d}{dx}$ hat als Eigenfunktionen

$$Df = \lambda f \Rightarrow f' = \lambda f \Rightarrow f(x) = C e^{\lambda x}$$

Damit der Operator D selbstadjungiert ist, braucht es

- ein Skalarprodukt, $\langle f,g\rangle = \int_?^? \overline{f(x)}\, g(x) \ldots dx$
- Randbedingungen

Prinzip: Für "$\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle$" muss die Ableitung im Integral auf den anderen Faktor übergewälzt werden. Dabei treten "Randterme", die mit den Randbedingungen zum Verschwinden gebracht werden können. z.B.

- Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$
- "periodische Randbedingungen": $f(x+2\pi) = f(x)$ oder auch nur $f(-\pi) = f(\pi)$

$\Rightarrow iD$ selbstadjungiert mit Eigenfunktionen e^{ikx}

<u>Beispiel:</u> Sturm-Liouville-Operator

$$L = \frac{1}{w(x)}\left(\frac{d}{dx}\,p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

mit Skalarprodukt

Gewichtsfunktion

$$\langle f,g\rangle_w = \int_a^b \overline{f(x)}\,g(x)\,w(x)\,dx$$

und gemischten Randbedingungen

$$k_x\,f(x) + h_x\,p(x)f'(x) = 0 \qquad x \in \{a,b\}$$

mit $k_a, h_a, k_b, h_b \in \mathbb{R}$. ○

c) <u>Symmetrieprinzipien und Faltung</u>

Die "guten" Analysefunktionen haben interessante Symmetrie-Eigenschaften bezüglich der Gruppen-Operation auf dem Definitionsbereich.

<u>Beispiel:</u> Die Funktionen e^{ikx} sind Eigenfunktionen des Translationsoperators: $f(x) = e^{ikx}$

$$(T_\delta f)(x) = f(x+\delta) = e^{ik(x+\delta)} = e^{ik\delta}e^{ikx} = e^{ik\delta}f(x)$$

$$\Rightarrow T_\delta f = e^{ik\delta} f, \quad \text{Eigenwert } \lambda = e^{ik\delta}$$ ○

Einschränkung: geht nur, wenn der Definitionsbereich eine Gruppe ist.

Beispiel: Abbildung $t \to -t$ in der Gruppe $(\mathbb{R},+)$ liefert die Abbildung $f \mapsto \check{f}$, $\check{f}(t) = f(-t)$.
Für $f(t) = e_k(t) = e^{ikt}$ folgt

$$\check{e}_k(t) = e_k(-t) = e^{-ikt} = e_{-k}(t) \Rightarrow \check{e}_k = e_{-k}$$

d.h. lineare Abbildung $f \mapsto \check{f}$ hat hat die zweidimensionalen Unterräume aufgespannt von $e_{\pm k}(t)$ als Eigenräume. ○

Beispiel: Die Funktionen $c_k(x) = \cos kx$ und $s_k(x) = \sin kx$ spannen einen zweidimensionalen Eigenraum des Translationsoperators auf. Ausserdem sind sie Eigenfunktionen der Spiegelung ○

Die Gruppeneigenschaften des Definitionsbereichs führt direkt auf die Faltung:

auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $\quad (f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y)\, dy$

auf $\mathbb{R}$ $\quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy$

auf G $\quad (f*g)(x) = \int_G f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy$

d) Basisfunktionen als Homomorphismen

Besonders erfolgreich sind Basisfunktionen, die Homomorphismen sind, z.B.

$$e_k(x+y) = e_k(x)\, e_k(y)$$

Für solche Funktionen gilt der Faltungssatz. Sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\, f(t)\, dt \quad = c_k(f)$$

die komplexen Fourierkoeffizienten von f, dann gilt

$$c_k(f * g) = c_k(f)\, c_k(g)$$

d.h. aus der Faltung wird ein gewöhnliches Produkt.

Die Fourier-Theorie zeichnet sich also dadurch aus, dass alle diese Eigenschaften zusammen auftreten. Im Allgemeinen muss man auf die eine oder andere Eigenschaft verzichten.

<u>Beispiel:</u> Wavelets bilden eine Basis von Funktionen, die nicht mehr beliebige Translationen zulässt

2. Anwendung ohne Gruppenstruktur/Faltung: Lösung von partiellen Differentialgleichungen

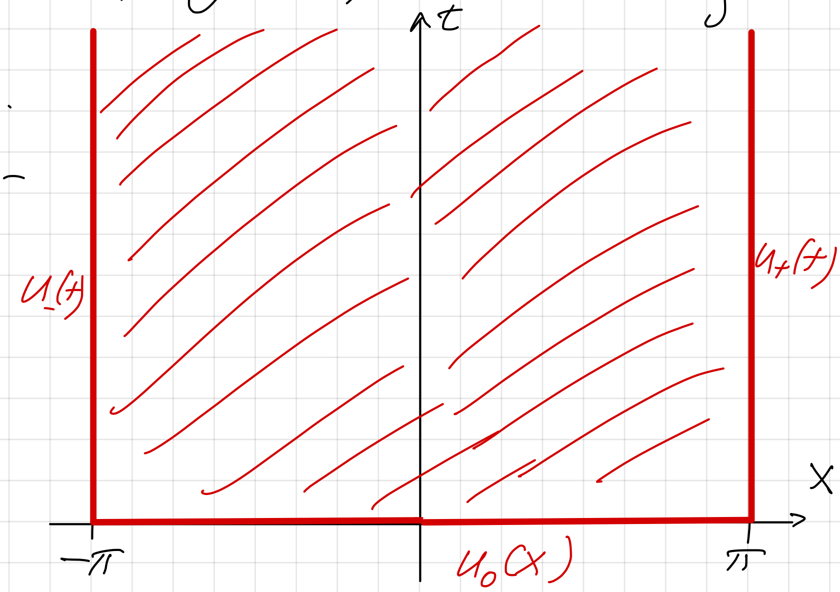
Fourier ist auf die Fouriertheorie im Rahmen des Versuchs gestoßen, die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \; u(t,x) = \text{Temperatur}$$

auf einem Stab $x \in [-\pi, \pi]$ zu lösen.

Randbedingungen:

- $u(0,x) = u_0(x)$ Anfangstemperaturverteilung



- Vorgegebene Temp. am Rand (Thermostat)

$$u(t,-\pi) = u_-(t)$$
$$u(t,\pi) = u_+(t)$$

oder

- Vorgegebener Wärmefluss durch die Stabenden (Heizung mit vorgegebener Leistung):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,-\pi) = u_-(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = u_+(t)$$

Lösung für periodische Randbedingungen: $u(t,x)$ kann für jeden Zeitpunkt t als Fourier-Reihe geschrieben werden:

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(t) \cos kx + b_k(t) \sin kx \right)$$

Lösungsidee: Gleichungen für die Koeffizienten aufstellen und lösen

Diese Vorgehensweise ist bekannt als Transformationsmethode.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dot{a}_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{a}_k(t) \cos kx + \dot{b}_k(t) \sin kx \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(t)\, k^2 \cos kx + b_k\, k^2 \sin kx \right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\dot{a}_0(t) = 0 \implies a_0(t) = a_0(0)$$

$$\dot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t) \implies a_k(t) = a_k(0)\, e^{-k^2 t}$$

$$\dot{b}_k(t) = -k^2 b_k(t) \implies b_k(t) = b_k(0)\, e^{-k^2 t}$$

$$\implies u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(0) \cos kx + b_k(0) \sin kx \right) e^{-k^2 t}$$

Hochfrequente Komponenten verschwinden exponentiell schnell.

3. Verallgemeinerung: ohne Randbedingungen

Wärmeleitungsgleichung auf einem unendlich langen Stab:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \qquad (*)$$

Anfangsbedingung: $u(0,x) = u_0(x)$, Anfangstemperaturverteilung.

Spezielle periodische Lösungen mit Anfangstemperaturverteilung

$$u_0(x) = e^{ikx}.$$

Versuch mit einem Ansatz der Form $c_k(t)$:

$$u(t,x) = c_k(t) e^{ikx}$$

in die DGl $(*)$ einsetzen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}_k(t) e^{ikx} \overset{?}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c_k(0)\,(-k^2) e^{ikx}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\dot{c}_k(t) = -k^2 c_k(t) \Longrightarrow c_k(t) = c_k(0) e^{-k^2 t}$$

$$\Rightarrow u(t,x) = c_k(0)\, e^{-k^2 t} e^{ikx}$$

Die Differentialgleichung (*) ist linear, d.h. beliebige Linearkombinationen von Lösungen sind auch wieder Lösungen:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-k^2 t} c_k(0)\, dk$$

Die Anfangsbedingung wird erfüllt, wenn für $t=0$ die ursprüngliche Funktion $u_0(x)$ gefunden wird:

$$u_0(x) = u(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} c_k(0)\, dk \qquad (**)$$

Normierungsfaktor so wählen, dass später eine sog. unitäre Transformation entsteht.

Folgerungen:

1. $c_k(0)$ beschreibt, wie "stark" jede Wellenzahl k in der Funktion $u_0(x)$ vertreten ist.

2. (**) sieht aus wie die Fourier-Reihenformel mit Integral statt Summe. Das passt: die Randbedingung hat die Beschränkung auf ganzzahlige k auferlegt → weggefallen

3. Die Funktion $e^{-k^2 t}$ scheint eine besondere Rolle zu spielen.

4. Fouriertransformation

Definition: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine integrierbare Funktion, dann heisst

$$\hat{f}(k) = (\mathcal{G}f)(k) = \mathcal{F}f\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

die Fourier-Transformierte von f. Die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ heisst Fourier-Transformation.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

1. Translation: $\mathcal{F}\, T_\delta f = e^{-k\delta} \mathcal{F}f$

$$\widehat{T_\delta f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-kx}\, T_\delta f(x)\,dx \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = x-\delta \\ x = z+\delta \\ dx = dz \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-kz} e^{-k\delta} f(z)\,dz$$

$$= e^{-k\delta} \hat{f}(k)$$

Translation wird Multiplikation mit $e^{-k\delta}$

2. Skalierung: $(D_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(x/a)$ so gewählt damit $\|D_a f\|_2 = \|f\|_2$

$$\widehat{D_a f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x/a) \frac{dx}{\sqrt{a}} \qquad \begin{array}{l} z = x/a \\ dz = dx/a \\ x = az \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iakz} f(z) \frac{1}{\sqrt{a}}\, a\,dz$$

$$= \sqrt{a}\, \hat{f}(ak)$$

Kontrolle der Norm-Eigenschaft:

$$\|D_a f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x/a)^2 \frac{1}{a} dx \qquad z = x/a,\ x = az$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z)^2 \frac{1}{a} a\, dz = \|f\|_2^2$$

3. <u>Spiegelung:</u> $Sf(x) = f(-x)$

$$\mathcal{F}Sf(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} Sf(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(-x)\, dx \qquad \begin{aligned} z &= -x \\ dz &= -dx \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i(-k)z} f(z)\, dz = \mathcal{F}f(-k)$$

4. <u>Faltungsformel</u> aus Gelfand-Transformation

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

5. <u>Adjungierte:</u> f, g integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(k)\, g(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx\, g(k)\, dk$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} g(k)\, dk\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{F}g(x)\, dx$$

6. <u>Eigenfunktionen:</u> $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

Ableitung nach k:

$$(\mathcal{F}\varphi)'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix\, e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} dx$$

partiell integrieren:

$$= \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ikx} e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ik\, e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

$$= -k\, (\mathcal{F}\varphi)(k)$$

d.h. $(\mathcal{F}\varphi)(k)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -xy \qquad \text{Separation:} \quad \frac{y'}{y} = -x$$

$$\Longrightarrow \quad \log y = -\frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow \quad y = Ce^{-x^2/2}$$

oder im vorliegenden Fall

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) = C e^{-k^2/2} \qquad = e^{-k^2/2}$$

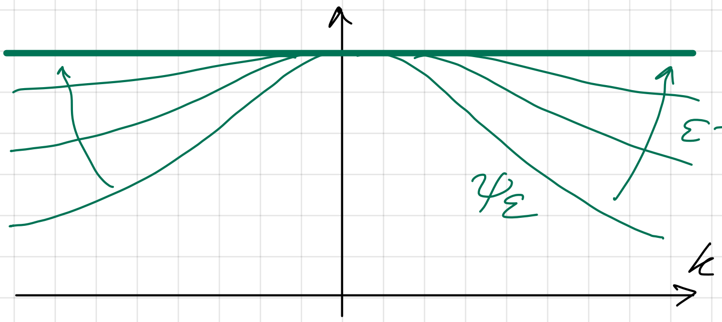
C aus $k=0$: $(\mathcal{F}\varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx = 1$

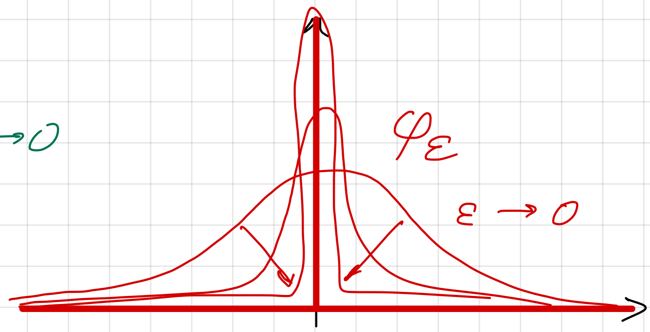
5. Fourier-Inversionsformel

Satz: für stetige Funktionen derart, dass $\hat{f}(k)$ stetig, gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk \qquad (*)$$

Idee: Funktionen $\psi_\varepsilon(k)$ wählen, die gegen 1 konvergieren und für die $\varphi_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon$ gegen einen "Einheits-Peak" (Dirac-δ-Distribution konvergiert).





$$\psi_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon^2 k^2/2} \qquad\qquad \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$$

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2} dx \qquad z = \frac{x}{\varepsilon}, \quad dx = \varepsilon\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon k z} \frac{1}{\varepsilon} e^{-z^2/2} \varepsilon\, dz$$

$$= e^{-\varepsilon^2 k^2/2} = \psi_\varepsilon(k)$$

Lemma: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon * f \right)(x) = f(x)$

Definition: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon$ heisst Approximation der Einheit

Beweis des Lemmas: Aus der Definition der Faltung folgt:

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Da $\varphi_\varepsilon(y)$ für y weit weg von 0 sehr klein ist das Integral

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \approx \int_{-S(\varepsilon)}^{S(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\, dy$$

Es kommt also vor allem auf die Werte von f nahe bei x an. Da f stetig ist sind diese für ε und damit S genügend klein alle nahe bei $f(x)$. Also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-y^2/2\varepsilon^2} dy}_{=1}\, f(x)$$

$$= f(x) \qquad \square$$

Beweis der Fourier-Umkehrformel:

1. Schritt: wegen $\psi_\varepsilon \to 1$ kann das Integral $(*)$ als Grenzwert $\varepsilon \to 1$ von

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(k) e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^2 k^2/2 + ikx} (\mathcal{F}f)(k)\, dk$$

berechnet werden.

2. Schritt: Im Integral kann der $\mathcal{F}$-Operator auf den anderen Faktor geschoben werden:

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi_\varepsilon\, e^{ikx})(y)\; f(y)\, dy$$

3. Schritt: Der Faktor e^{ikx} entspricht einer Verschiebung um x, d.h. es reicht $\mathcal{F}\varphi_\varepsilon$ zu berechnen.

$$(\mathcal{F}\varphi_\varepsilon)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\varepsilon^2/2}\, e^{-iky}\, dk \qquad \ell = k\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\ell^2/2}}_{\varphi(\ell)}\, e^{-i\ell y/\varepsilon}\, \frac{1}{\varepsilon}\, d\ell$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\ell)\, e^{-i\ell \frac{y}{\varepsilon}}\, d\ell$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \varphi_\varepsilon(y)$$

4. Schritt mit dem Faktor e^{ikx} folgt

$$(\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon e^{ikx}))(y) = \varphi_\varepsilon(y-x) = \varphi_\varepsilon(x-y)$$

5. Damit wird $(*_\varepsilon)$ zu

$$(*_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_\varepsilon * f\right)(x) \longrightarrow f(x)$$

nach dem Lemma $\square$

6. Wärmeleitungsgleichung und $\mathcal{F}$

Fouriertransformation und Ableitung

$$(\mathcal{F}f')(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f'(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{-ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= ik\,\mathcal{F}f(k)$$

Ableitung der Fouriertransformierten:

$$(\mathcal{F}f)'(k) = \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$= \mathcal{F}(-ixf)(k)$$

Transformation der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}u(k) = -k^2 \mathcal{F}u(k)$$

ist eine Familie von gewöhnlichen Differential-gleichungen in t mit Lösungen:

$$(\mathcal{F}u)(t,k) = e^{-k^2 t} (\mathcal{F}u)(0,k)$$

Mit Anfangsbedingung $u(t,x) = u_0(x)$ folgt $(\mathcal{F}u)(0,k) = (\mathcal{F}u_0)(k)$

Mit der Fourier-Inversionsformel kann man jetzt die Lösung in geschlossener Form schreiben:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - k^2 t} (\mathcal{F}u_0)(k)\, dk$$