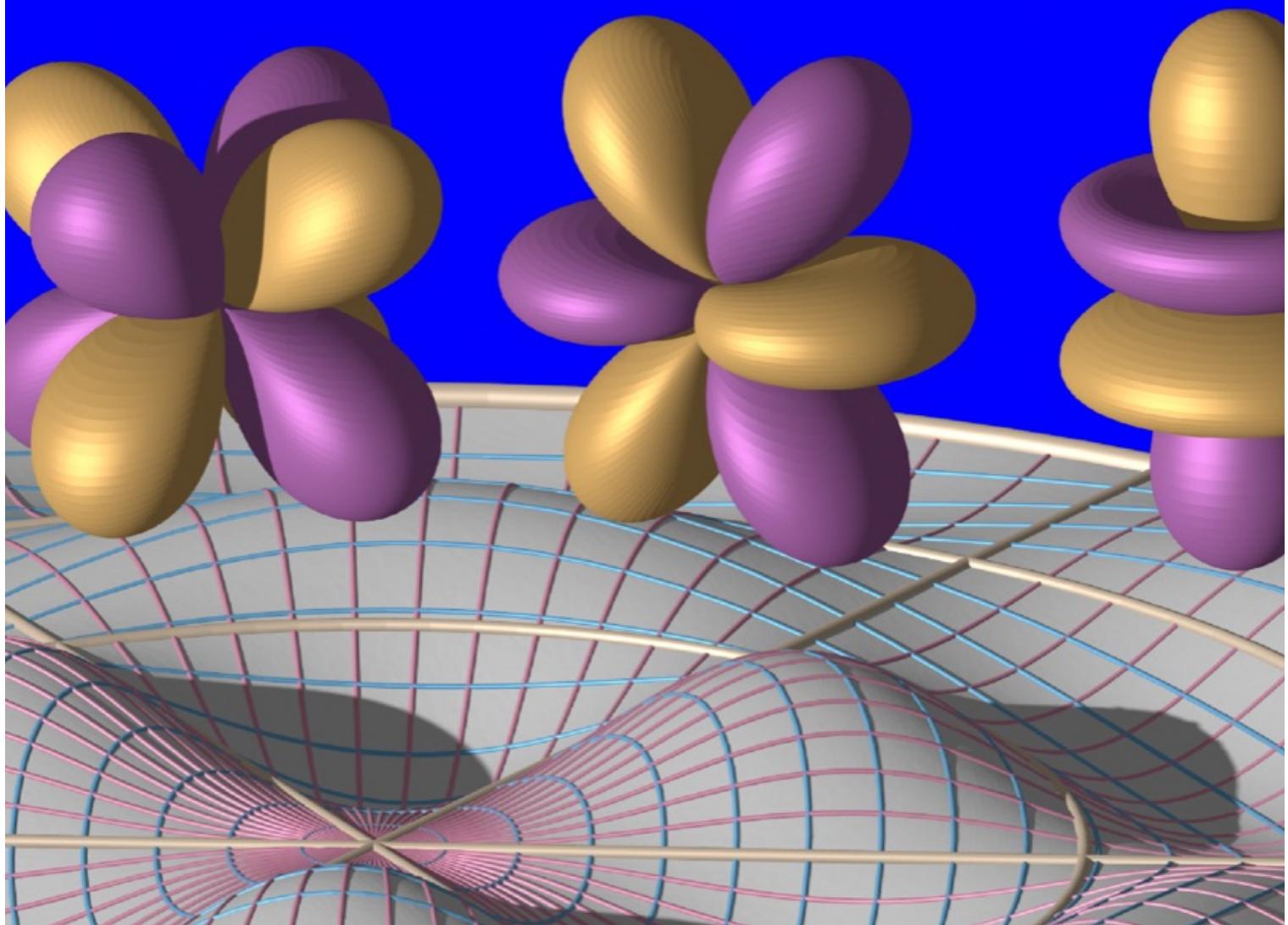


Mathematisches Seminar

# Spezielle Funktionen

## 2. Gamma- und Beta-Funktionen



## Inhalt

1. Problemstellung:  $n!$  und  $\Gamma$  erweitern
2. Pochhammer - Symbole
3. Grenzwert - Definition der Gamma - Funktion
4. Der Satz von Bohr-Mollerup
5. Die eulersche Integralformel
6. Der Wert von  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
7. Analytische Fortsetzung auf  $\mathbb{C}$
8. Beta - Verteilung und Beta - Integrale
9. Rekursionsformeln für  $B(x,y)$
10.  $B(x,y)$  und die Gamma - Funktion
11. Spiegelungssatz für  $\Gamma(x)$

1. Fakultät  $x!$  für  $x \in \mathbb{R}$ ?

Definition: die Fakultäts-Funktion

$$\cdot! : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n!$$

Ist rekursiv definiert durch

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad n > 0$$

$$0! = 1$$

Es folgt:  $1! = 1 \cdot 0! = 1$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 24$$

↓  
exponentielles  
Wachstum

Näherungsformel von Stirling:  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$   
für grosse  $n$ , i.e.  $n!$  wächst wie  $n^n$ .

Anwendungen:

a) Kombinatorik: Anzahl von Permutationen

von  $n$  Objekten:  $|S_n| = n!$

l Symmetrische Gruppe  
Permutationsgruppe

b) Taylor-Reihen:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

c) Brnomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Anzahl Auswahl von  $k$  Elementen aus  $n$   
 (Matlab: nchoosek(n,k))

d) Brnomialreihe:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k}_{=: \binom{\alpha}{k}}$$

$=: \binom{\alpha}{k}$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig!

verallgemeinerte Brnomialkoeffizienten

$$\text{z.B.: } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

- Fragen:
1. Verallgemeinerung  $n! \rightarrow x!, x \in \mathbb{R}$   
 Rekursionsformel soll erhalten bleiben  
 $\rightarrow$  Gamma-Funktion
  2. Verallgemeinerung der Brnomialreihe  
 $\rightarrow$  Pochhammer-Symbole  
 $\rightarrow$  Beta-Funktion

## 2. Pochhammer - Symbole

Fakultät :  $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}_{\substack{\uparrow \\ n \text{ aufsteigende} \\ \text{Faktoren}}}$   
 Start : 1

veralgemeinert :

$$n! = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot \dots \cdot (1+n-1)$$

$$(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)$$

Definition: Pochhammer - Symbol

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)$$

$n$  aufsteigende Faktoren

Spezialfall:  $(1)_n = n!$

Anwendung: verallgemeinerte Binomialkoeffizient:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2) \cdots (-\alpha+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(\alpha)_k}{k!} \end{aligned}$$

Rekursionsformel:

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

$$(a)_0 = 1$$

$$\Rightarrow (a)_1 = (a)_{0+1} = (a+0)(a)_0 = a$$

$$(a)_2 = (a)_{1+1} = (a+1)(a)_1 = (a+1)a$$

:

Man macht auch die Ähnlichkeit zur Funktionalgleichung der Fakultät:

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1) n!$$

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$$

→ passt nicht, Argument verschieben  $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

→ passt!

Übungsaufgaben:

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

$$2. (-n)_k = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$3. \text{ Schreibe } \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (k+2)(k+3)} \text{ mit}$$

Pochhammer-Symbole (wie in 1. und 2.)

### 3. Gamma-Funktion als Grenzwert

Aufgabe: finde eine Funktion  $\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) & (n+1)! &= (n+1)n! \\ \Gamma(1) &= 1 & 0! &= 1\end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$

Heuristische Beobachtungen:

1. Es werden viele Faktore nötig um
2. Endliche Anzahl wird nicht werden, beim Sprung zur nächsten Anzahl würde sich die Funktion auf unbestimmt oder nicht diff'bar ist ändern
3. Ohne einen Grenzprozess geht es nicht!

Strategie:

- "große" Fakultät  $n!$ ,  $n \rightarrow \infty$  bane
- überzählige Faktore  $> x$  mit Pochhammer-Symbolen weglassen.
- $n \rightarrow \infty$
- $x \in \mathbb{R}$  zu lassen

Durchführung dieser Strategie:

$$\begin{aligned}
 x^! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \cdot (x+1) \cdots (x+n)}{(x+1) \cdots (x+n)} \\
 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (n+x)}{(x+1) \cdots (x+n)} \\
 &= \frac{n! (n+1)_x}{(x+1)_n} \quad \text{← nur für ganzzahliges } x \text{ definiert} \\
 "Dich" &= \frac{n! n^x}{(x+1)_n} \frac{(n+1)_x}{\underbrace{n^x}_{\text{→}}}
 \end{aligned}$$

(\*)

auch für  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$   
 definiert! → 1 für  $x \in \mathbb{N}$  (Hoffnung)

### Definition

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}$$

Grenzwert -  
Definition der  
 $\Gamma$ -Funktion

Zu überprüfen:

- |                    |                            |
|--------------------|----------------------------|
| ① Rekursionsformel | $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ |
| ② Startwert        | $\Gamma(1) = 1$            |
| ③ Konvergenz       | —                          |

Lemma :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)_x}{n^x} &= \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+x)}{n \cdot n \cdots n} \\ &= \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}\right) \left(1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\rightarrow 0}\right) \cdots \left(1 + \underbrace{\frac{x}{n}}_{\rightarrow 0}\right) \\ &\rightarrow 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 \end{aligned}$$

Grenzübergang zulässig, da nur endlich viele ( $x = \text{const}$ ) Faktoren vorhanden  $\square$

Satz: Für  $x \in \mathbb{N}$  gilt  $\Gamma(x) = (x-1)!$

Beweis: unmittelbar aus der Definition und den "Trick" (\*)  $\square$

Ist damit die Aufgabe gelöst?

Anfangsbedingung:

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{1-1}}{(1)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 1}{n!} = 1 \quad \checkmark$$

$$\Gamma(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{2-1}}{(2)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot n}{2 \cdots n \cdot (n+1)} = 1 \quad \checkmark$$

# Funktionalgleichung?

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1-1}}{(x+1)_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$$

$$= x \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} \cdot \frac{n}{(x+n)}}_{= \Gamma(x)} = x \Gamma(x)$$

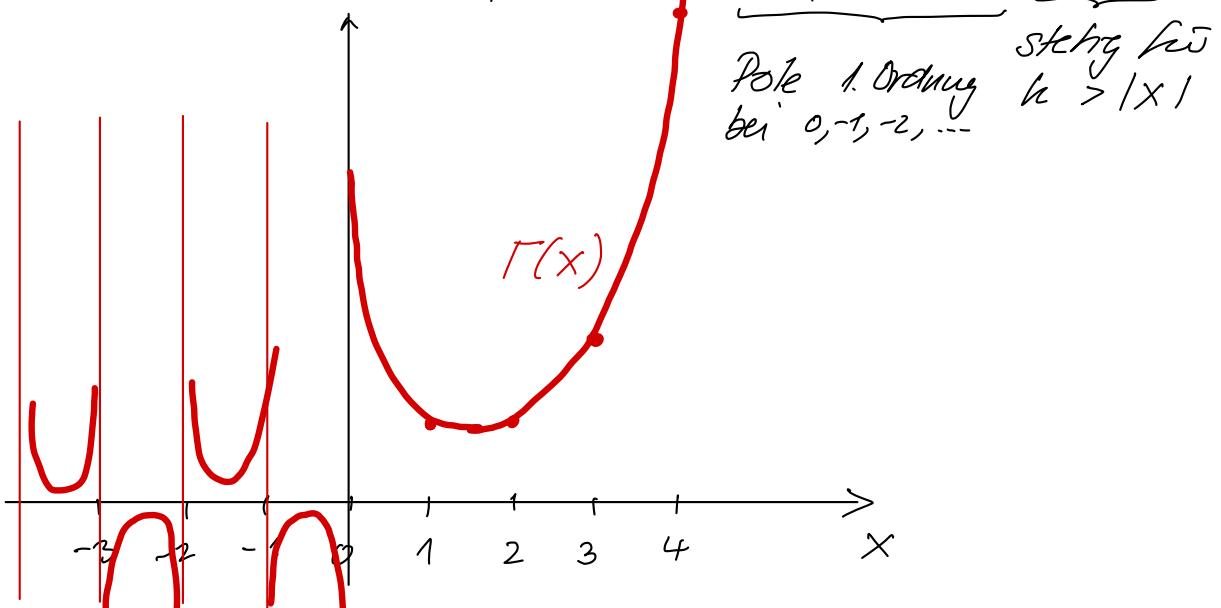
□

Die Grenzwertdefinition liefert also eine Lösung der gegebene Funktionalgleichung.

Erste Werte:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$   $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$
- $\lim_{x \rightarrow n^-} \Gamma(x) = \pm\infty$   $\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$

Warum?  $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \underbrace{\frac{1}{x} \frac{1}{x+1} \cdots \frac{1}{x+k}}_{\text{stetig f.W.}} \underbrace{\Gamma(x+k)}_{\text{Pole 1. Ordnung bei } 0, -1, -2, \dots}$

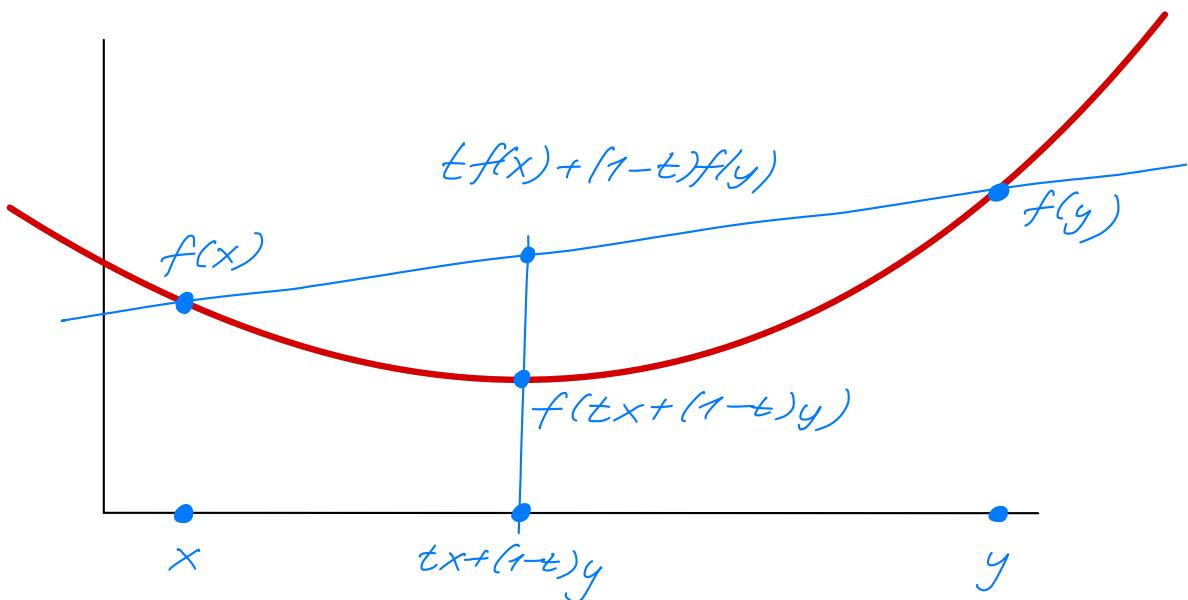


## 4. Der Satz von Bohr-Mollerup

Die Grenzwertdefinition ist die einzige mögliche Erweiterung der Fakultät auf  $\mathbb{R}$ , wenn man zusätzlich Konvexität von  $\log \Gamma(x)$  fordert.

Definition:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$
 gilt.



Folgerung: Steigung eines Segments

$$s(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad y > x$$

ist monoton wachsend in  $x$  und  $y$

Beachte: eine konvexe Funktion kann keine Sprünge machen!

Satz (Bohr - Mollerup): Ist  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $f(x+1) = xf(x)$   $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- $f(1) = 1$
- $\log f(x)$  ist konvex,  
dann ist  $f(x) = T(x)$ .

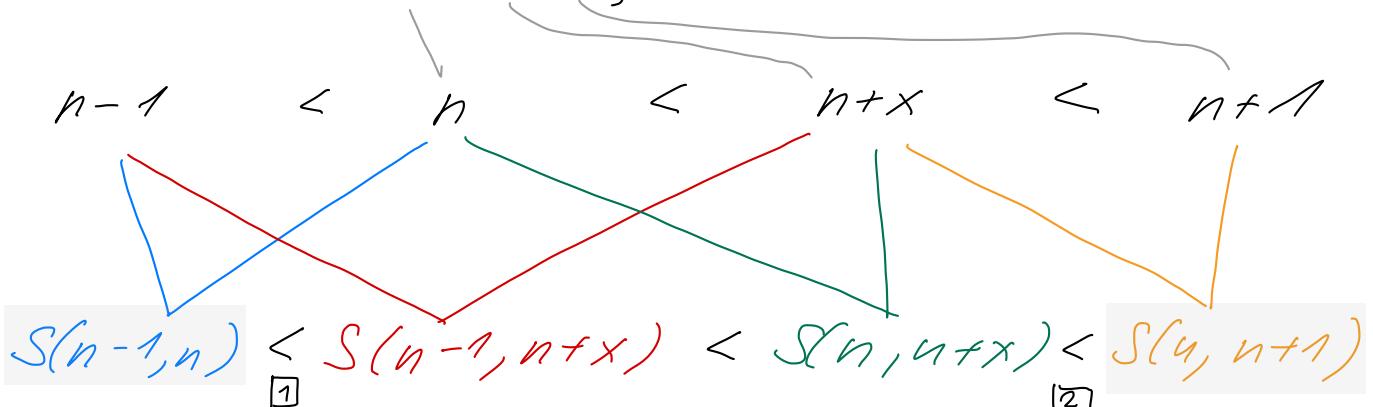
Vorbemerkung: aus a) und b) folgt sofort

$$f(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. Werte auf ganzzahligen Argumenten sind bereits festgelegt.

Beweis: Da  $\log f(x)$  konvex ist, ist  
 $S(x,y) = (\log f(y) - \log f(x))/(y-x)$   
monoton in  $x$  und  $y$ ,  $y > x$ .

Behachte  $0 < x < 1$ , dann ist



Werte Ungleichungen 1 und 2 separat aus.

$S(a,b)$  mit  $a,b \in \mathbb{N}$  ist nach Vorbemerkung  
bekannt!

Hilfsformel:

$$S(n, n+1) = \frac{\log n! - \log(n-1)!}{n+1-n} = \log \frac{n!}{(n-1)!}$$
$$= \log n$$

① ergibt

$$\log(n-1) < \frac{\log f(n+x) - \log(n-2)!}{\cancel{n+x} - \cancel{n+1}}$$

$$(x+1) \log(n-1) < \log f(n+x) - \log(n-2)!$$

$$x \log(n-1) + \log(n-1)! < \log f(n+x)$$

$$(n-1)^x \cdot (n-1)! < f(n+x)$$

② ergibt

$$\frac{\log f(n+x) - \log(n-1)!}{\cancel{n+x} - \cancel{n}} < \log n$$

$$\log f(n+x) - \log(n-1)! < x \log n$$

$$\log f(n+x) < x \log n + \log(n-1)!$$

$$f(n+x) < n^x \cdot (n-1)!$$

Kombiniert:

$$(n-1)^x \cdot (n-1)! < f(n+x) < n^x \cdot (n-1)! \quad (*)$$

Funktionalgleichung auf  $f(n+x)$  anwenden:

$$\begin{aligned}
 f(n+x) &= (n+x-1)f(n+x-1) \\
 &= (n+x-1)(n+x-2)f(n+x-2) \\
 &\quad \vdots \\
 &= (n+x-1)(n+x-2) \cdots x f(x) \\
 &= (x)_n f(x)
 \end{aligned}$$

Zusammen mit der Ungleichung (\*):

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x)_n} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{(x)_n}$$

||

$$\frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{x+n}{n}}_{\rightarrow 1 \text{ (n)}}, \quad \rightarrow 1 \text{ (n)}$$

die für alle  $n$  gilt, folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} = \Gamma(x)$$

□

## 5. Eulersche Integralformel

Definition: (Euler)

$$\Gamma : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Nachprüfen:

- Startwert:  $\Gamma(1) = \int_0^\infty \underbrace{t^{1-1}}_{=1} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^\infty = 1 \quad \checkmark$
- Funktionalgleichung.

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\stackrel{\text{part. Integration}}{=} \underbrace{\left[ \frac{1}{x} t^x e^{-t} \right]_0^\infty}_{} + \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt}_{\Gamma(x+1)} \\ &\quad - \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

Minus vor der Ableitung  $\frac{d}{dt} e^{-t}$

Aber: damit ist nur gezeigt, dass die Integralformel für  $1, 2, 3, \dots$  gilt!

$\Rightarrow$  mehr Arbeit nötig!

Idee: zeigen, dass  $\log \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  konvex ist, dann folgt die Gleichheit aus dem Satz von Bohr-Mollerup

Satz: Die Funktion

$$x \mapsto \log \underbrace{\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt}_{f(x)}$$

Ist konvex.

Plan: zweit Ableitung  $> 0 \Rightarrow$  konvex

① Logarithmische Ableitung:

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log f(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} > 0 \quad ??$$

② Ableitung von  $f(x)$ :

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \Rightarrow \frac{d}{dx} t^{x-1} = \log(t)^k t^{x-1}$$

$$f'(x) = \int_0^\infty \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \log(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(x) = \int_0^\infty 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt$$

↑                           ↑  
gemeinsam

③  $u, v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, dann ist

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(t) v(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

ein **Skalarprodukt** von Funktionen

( $L^2(\mu)$ ) mit  $\mu(t) = t^{x-1} e^{-t} \underbrace{\lambda(t)}_{\text{Lebesgue-Mass}}$ )  
mit Norm

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty u(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Rightarrow$  Cauchy-Schwarz-Gleichung

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad \forall u, v$$

④ Spezialfall  $u = 1, v = \log(t)$

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty 1 t^{x-1} e^{-t} dt = f(x)$$

$$\|v\|^2 = \int_0^\infty (\log(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt = f''(x)$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty 1 \cdot \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt = f'(x)$$

Cauchy-Schwarz

$$(f'(x))^2 \leq f(x) f''(x)$$

$$\Rightarrow f''(x)f(x) - f'(x)^2 \geq 0 \quad !!!$$

□

## 6. Der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$

Mit der eulerschen Integralformel für die Gamma-Funktion kann man jetzt die Werte von  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  berechnen.

Integralformel:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

Substitution:  $t = s^2 \Rightarrow dt = 2s ds = 2\sqrt{t} dt$

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-s^2} 2s ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Mit der Funktionalgleichung kann man jetzt weitere Werte bestimmen:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2} + 1) = \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2} + k) &= \frac{2k-1}{2} \Gamma(\frac{2k-1}{2}) = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2^k} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= (\frac{1}{2})_k \Gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})_k \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

## 2. Analytische Fortsetzung

Die Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion ist

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (*)$$

Schreibt man  $z = x + iy$ , dann kann der Integrand abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} |t^{z-1}| &= t^{x-1} |t^{iy}| \\ &= t^{x-1} |e^{iy \cdot \log t}| = t^{x-1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$$

Fällt für  $t \rightarrow \infty$  sehr schnell ab, so dass die oben Obergrenze des Integrals nicht zu Konvergenzproblemen führt. Da  $e^{-t} \rightarrow 1$  für  $t \rightarrow 0$  darf  $t^{x-1}$  nicht zu schnell anwachsen.

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left[ \frac{1}{x} t^x \right]_0^1 = \frac{1}{x} (1 - 0) = \frac{1}{x}$$

d.h. das Integral konvergiert für  $x > 0$ .

Satz: Die Eulersche Integralformel (\*) liefert eine in  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  holomorphe Funktion

Berechnung der Ableitung: Ableitung unter dem Integral

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dz} (t^{z-1} e^{-t}) dt \\ &= \int_0^\infty \log(t) t^{z-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

konvergiert für  $\operatorname{Re} z > 1$ , d.h. als Methode zur Berechnung der Ableitung nicht für ganz  $\mathbb{C}$  geeignet.

$\Rightarrow \Gamma(z)$  und  $\Gamma'(z)$  berechenbar als Integral für  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .

Für  $\operatorname{Re} z \leq 1$ : Funktionalgleichung verwenden:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= (z+n-1) \cdots z \Gamma(z) = (z)_n \Gamma(z)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Integral konvergiert } \operatorname{Re} z \geq -n \\ \leftarrow \text{Polynom in } z \\ (\text{Grad } n) \end{array}$$

## Das Pochhammer-Symbol

$$(z)_n = z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)$$

hat die Nullstellen  $0, -1, -2, \dots, -n+1$ ,  
daher sind die negativen ganzen Zahlen und 0  
Pole der Gamma-Funktion.

Die Formel  $\Gamma(z) = \Gamma(z+n) / (z)_n$   
 liefert die analytische Fortsetzung der  
Gamma-Funktion auf

$$\mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}.$$

### Residuum in den Polstellen

In der Nähe von  $-n$  ist für  $k > n$

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+k)}{(z)_k} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\ &= \frac{1}{z+n} \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \quad \text{Residuum}\end{aligned}$$

für  $z = -n$ :

$$\frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

## 8. Beta-Verteilung und Beta-Integrale

Motivation: Binomialverteilung  $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Verallgemeinerung: Beta-Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$B(x,y) = t^{x-1} (1-t)^{y-1}, t \in (0,1) \quad \begin{matrix} x=y=1: \\ \text{Gleichverteilung} \end{matrix}$$

Normierungskonstante

Definition: Beta-Integral oder Beta-Funktion:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Kann nicht in geschlossener Form ausgewertet werden.

- Ziel:
- Rekursionsformel für  $B(x,y)$
  - Zusammenhang zwischen  $B(x,y)$  und  $\Gamma(x) \dots$
  - Symmetrie von  $B(x,y) = B(y,x)$   
Wiefest Symmetrie erzeugen schaffen der Gamma-Funktion  
(Ähnlich wie bei der  $\zeta(z)$ -Funktion)

## 9. Rekursionsformel für $B(x,y)$

Startwerte:  $B(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1-1} dt = \int_0^1 dt = 1$

$$\begin{aligned} B(x,1) &= B(1,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[ \frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

### Rekursionsformel 1: Partielle Integration

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \underbrace{\left[ \frac{t^x}{x} (1-t)^y \right]_0^1}_{=0} + \underbrace{\frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt}_{\text{innere Ableitung}} \\ &= \frac{y}{x} B(x+1, y) \end{aligned}$$

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y). \quad (R_1)$$

### Rekursionsformel 2: Faktorisierung

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t) (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt - \int t^x (1-t)^{y-1} dt \end{aligned}$$

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y) \quad (R_2)$$

Abgeleitete Rekursionsformeln:

$$(R_1^*) \quad B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$$

$$(R_2^*) \quad B(x+1, y) = B(x, y) - B(x, y+1)$$

$$(R_1^*) = (R_2^*):$$

$$B(x, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) + B(x, y+1) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1)$$

Iteration:

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1)$$

$$= \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x+y+1}{y+1} B(x, y+2)$$

⋮

$$= \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} \dots \frac{x+y+n-1}{y+n-1} B(x, y+n)$$

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

## 10. Beta-Funktion und Gamma-Funktion

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)$$

Verbindung zur Gamma-Funktion: Erweiterungsschick

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-n}} \frac{n! n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^1 n^x t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt \\ &\quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \parallel \text{Substitution } t = \frac{s}{n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(x+y)} \cdot \Gamma(y) \int_0^n n^x \left(\frac{s}{n}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{y+n-1} \frac{ds}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n s^{x-1} \underbrace{\left(1 - \frac{s}{n}\right)^{y-1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{s}{n}\right)^n}_{e^{-s}} dt \\ &= \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

Satz:  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Anwendung:  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Satz (Legendre): Verdoppelungssatz

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Beweis:  $B(z, z)$  ausrechnen, nach  $\Gamma(2z)$  auflösen

$$B(z, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \Rightarrow \Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)^2}{B(z, z)}$$

$$= \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt$$

"Symmetrischer" Integrand:  $t = \frac{1+s}{2}$ ,  $s \in (-1, 1)$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{z-1} \frac{ds}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1} ds}_{s^2 = u} \quad s^2 = u$$

$$2sds = du$$

$$2ds = u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= 2 \int_0^1 (1-s^2)^{z-1} ds$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, z\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(2z) = \cancel{\Gamma(z)^2} 2^{2z-1} \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

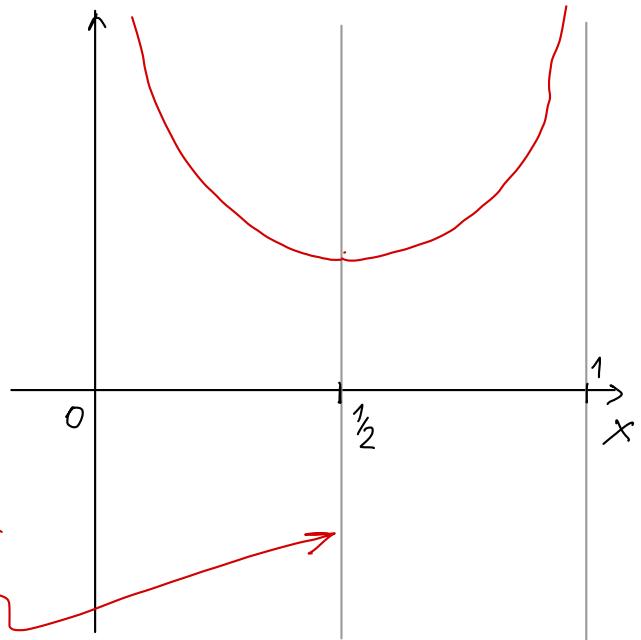
Kontrolle:  $z = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(1) \stackrel{?}{=} \frac{2^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) \quad \checkmark$

□

## 11. Spiegelungssatz

Satz: Für  $0 < x < 1$  gilt

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$



symmetrisch bezüglich der Geraden  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = B(x, 1-x)$ , d.h. es ist nur der Wert von  $B(x, 1-x)$  zu berechnen.

$$B(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-x} dt$$

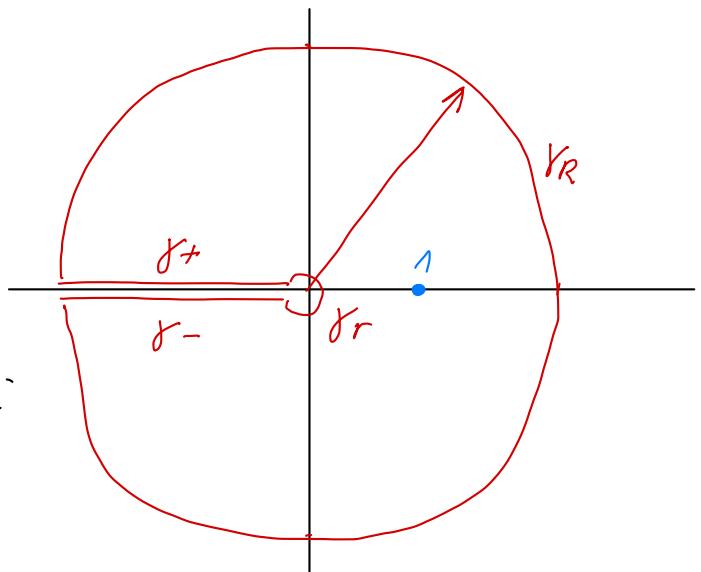
Substitution:  $t = \frac{s}{s+1}$ ,  $s \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} B(x, 1-x) &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-1}} \frac{1}{(s+1)^{-x}} \frac{1}{(s+1)^{2-x}} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1} ds \end{aligned}$$

Dieses Integral kann mit Cauchys Integralformel aus

$$-\oint_{\gamma} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = 2\pi i$$

berechnet werden.



Berechnung der einzelnen Pfadteile mit der Parametrisierung  $z(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} I_R &= \oint_{\gamma_R} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{it(x-1)}}{1 - R e^{it}} i R e^{it} dt \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^x e^{itx}}{1 - R e^{it}} dt \end{aligned}$$

Für  $R \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} I_R &= i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{itx}}{\underbrace{1/R}_{\rightarrow 0} - e^{it}} dt \quad 0 < x < 1 \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-1)} dt \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} R^{x-1} \stackrel{< 0}{=} 0 \end{aligned}$$

Für  $r \rightarrow \infty$ :

$$I_r = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^x e^{itx}}{1 - r e^{it}} dt \xrightarrow{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 0}} 0$$

Die Segmente  $\gamma_{\pm}$ :  $z^{x-1}$  muss für  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  verschiedene berechnet werden:

$$\gamma_{\pm}(t) = t e^{\pm i \pi} \quad z^{x-1} = t^{x-1} e^{\pm i \pi(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\pm}} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz &= - \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} e^{\pm i \pi(x-1)}}{1 - t e^{\pm i \pi}} dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot e^{\pm i \pi(x-1)} \end{aligned}$$

$\gamma_1$  wird von  $-\infty$  nach 0 durchlaufen  
 $\gamma_2$  von 0 nach  $-\infty$ , d.h.

$$\oint \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = + \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot e^{i\pi(x-1)}$$

$$- \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt e^{-i\pi(x-1)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \left( e^{i\pi(x-1)} - e^{-i\pi(x-1)} \right)$$

$$= - \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \quad 2i \cdot \underbrace{\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}}_{\sin \pi x}$$

$$= -1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = - \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

□

Anwendung:  $z = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$