31

Sturm-Liouville-Probleme und spezielle Funktionen

Im letzten Kapitel wurden wir auf natürliche, gewissermaßen unvermeidliche Weise dazu geführt, bestimmte lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung wie die Legendresche oder die Besselsche Differentialgleichung näher zu betrachten, obwohl diese Gleichungen auf den ersten Blick einen recht willkürlichen Eindruck machen. Die Lösungen von diesen und ähnlichen Differentialgleichungen werden als „Spezielle Funktionen der mathematischen Physik" bezeichnet, und ihre Rolle kann man der der elementaren Funktionen vergleichen – sie bilden sozusagen die zweite Liga der elementaren Funktionen. Wie diese sind sie durchweg analytisch und können als holomorphe Funktionen in der komplexen Ebene gedeutet werden. Manche sind sogar einfach Polynome einer speziellen Bauart. Sie sind sehr gut untersucht, und ihre interessanten Eigenschaften und vielfältigen Beziehungen untereinander füllen dicke Bände, von denen einige in unserem Literaturverzeichnis angegeben sind. Formelsammlungen und Tabellenwerke wie etwa [1, 38, 52] sind für den Praktiker besonders nützlich, werden jedoch heute zunehmend von Datenbanken verdrängt, die über das Internet allgemein zugänglich sind. Die Wichtigkeit der speziellen Funktionen rührt davon her, dass die Lösungen gewisser fundamentaler Problemstellungen der Physik zumindest in den einfachsten Fällen, die dann als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen dienen, mit ihrer Hilfe explizit angegeben und gründlich diskutiert werden können.

Die wichtigsten speziellen Funktionen und ihre Grundeigenschaften gehören daher zum Handwerkszeug des Physikers, und sie sind in diesem Kapitel in Form eines knappen Ergebnisberichts zusammengestellt, in den nur hier und da einige Beweisschritte zur Illustration der Methoden eingeflochten sind und der auch als Nachschlagewerk brauchbar ist. Im letzten Abschnitt greifen wir dann die Diskussion der Anfangs-Randwert-Probleme aus dem vorigen Kapitel wieder auf und führen sie mittels der neu gewonnenen Erkenntnisse zu Ende.

Die Behandlung der speziellen Funktionen sollte aber keineswegs als kunterbuntes Sammelsurium von Einzelergebnissen aufgefasst werden. Vielmehr gibt es eine Reihe mathematischer Leitgedanken, die hier Ordnung und Systematik stiften. Vielleicht der wichtigste davon ist die Theorie der Sturm-Liouville-*Probleme*, die im ersten Abschnitt diskutiert wird. Sie ist in zweierlei Hinsicht bedeutsam – einmal, wie gerade erläutert, als Grundlage für die Betrachtung der speziellen Funktionen, und zum anderen als einfachstes eindimensionales Modell für die *Rand-Eigenwert-Probleme*, die im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen immer wieder auftauchen, und die sowohl für die klassische Physik (Schwingungen und Wellen) als auch für die Quantenphysik (zulässige Energieniveaus) fundamental sind.

A. Allgemeines über Sturm-Liouville-Probleme

Sturm-Liouville-Probleme sind ein spezieller Typ von Randwertproblemen für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die einen Eigenwertparameter λ enthalten. Genauer:

Definitionen 31.1.

a. *Sei* $-\infty < a < b < +\infty$ *und sei* $I = [a, b]$. *Seien*

$$p \in C^1(I) \quad \textit{mit} \quad p(x) > 0\,, \quad a \le x \le b\,, \tag{31.1}$$
$$k \in C^0(I) \quad \textit{mit} \quad k(x) > 0\,, \quad a \le x \le b \tag{31.2}$$

und $q \in C^0(I, \mathbb{R})$ *gegebene reellwertige Funktionen. Ferner seien* α_0, α_1, $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ *gegebene Zahlen mit* $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$. *Schließlich sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ein Parameter. Dann nennt man eine Randwertaufgabe der Form*

$$L\,[u] \equiv (p(x)u')' + q(x)u = -\lambda k(x)u\,, \tag{31.3}$$
$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0\,, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \tag{31.4}$$

ein reguläres Sturm-Liouville-Problem.

b. *Ist* $-\infty \le a < b \le +\infty$, I *das offene Intervall* $]a, b[$, *und verlangen wir (31.1), (31.2) und die Stetigkeit von* q *nur für* $a < x < b$, *so nennt man die Aufgabe (31.3), (31.4) ein* singuläres Sturm-Liouville-Problem. *Dabei sind die Randbedingungen (31.4) im Sinne von Grenzwerten zu verstehen.*

c. *In beiden Fällen nennt man* L *den* Sturm-Liouville-Operator. *Zahlen* $\lambda \in \mathbb{C}$, *zu denen Lösungen* $u \not\equiv 0$ *von (31.3), (31.4) existieren, heißen* Eigenwerte, *die zugehörigen Lösungen* $u(x)$ Eigenfunktionen *des Operators* L *unter den Randbedingungen (31.4).*

d. *Die* Dirichlet*schen (bzw. die* Neumann*schen) Randbedingungen sind der Spezialfall von (31.4) für* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ *(bzw. für* $\alpha_0 = \beta_0 = 0$*). Die* Dirichlet*schen Randbedingungen lauten also*

$$u(a) = u(b) = 0\,,$$

und die Neumann*schen lauten*

$$u'(a) = u'(b) = 0\,.$$

Wir befassen uns nun nur mit regulären STURM-LIOUVILLE-Problemen und geben erst am Schluss ein paar Hinweise, welche Aussagen für singuläre bestehen bleiben und welche nicht. Zur Behandlung solcher Eigenwertprobleme führen wir neben dem L^2-Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \varphi \mid \psi \rangle &= \int_a^b \overline{\varphi(x)}\psi(x)\mathrm{d}x \ , \\ \|\varphi\| &= \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{31.5}$$

das gewichtete Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \varphi \mid \psi \rangle_k &= \int_a^b k(x)\overline{\varphi(x)}\psi(x)\mathrm{d}x \ , \\ \|\varphi\|_k &= \left(\int_a^b k(x)|\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{31.6}$$

ein, das wir auch kurz *k-Skalarprodukt* nennen.

Der STURM-LIOUVILLE-Operator L ist sicher ein linearer Operator in $C^0(I)$ bzw. $L^2(I)$, aber nicht überall definiert, da L nur auf C^2-Funktionen angewandt werden kann. Es sei daher

$$D(L) = \{u \in C^2(I) \mid \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0\} \ . \tag{31.7}$$

Dann ist L auf dem linearen Teilraum $D(L)$ definiert, und die Randbedingungen (31.4) sind für die Funktionen aus $D(L)$ erfüllt.

Die folgenden einfachen Rechnungen bilden den Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen:

Lemma 31.2.

a. *Für $u, v \in C^2(I)$ gilt*

$$\langle L[u] \mid v \rangle - \langle u \mid L[v] \rangle = p(b)W(b) - p(a)W(a)$$

mit

$$W := \bar{u}'v - \bar{u}v' \ .$$

b. *Auf dem Definitionsbereich $D(L)$ ist der Operator L* selbstadjungiert, *d. h. für $u, v \in D(L)$ gilt stets*

$$\langle L[u] \mid v \rangle = \langle u \mid L[v] \rangle \ .$$

Beweis.

a. Da die Koeffizienten p, q nach Voraussetzung reellwertig sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\langle L[u] \mid v\rangle - \langle u \mid L[v]\rangle \\
&= \int_a^b \Big((p\bar{u}')'v - \bar{u}(pv')' \Big) \mathrm{d}t \\
&= p(b)\bar{u}'(b)v(b) - p(a)\bar{u}'(a)v(a) - \int_a^b p\bar{u}'v'\mathrm{d}t \\
&\quad - \left(\bar{u}(b)p(b)v'(b) - \bar{u}(a)p(a)v'(a) - \int_a^b \bar{u}'pv'\mathrm{d}t \right) \\
&= p(b)W(b) - p(a)W(a)\ ,
\end{aligned}$$

wie behauptet.

b. Wir betrachten die $\mathbb{C}^2$-wertigen Funktionen

$$\bar{\boldsymbol{u}} := \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} .$$

Nach (31.4) sind $\bar{\boldsymbol{u}}(a)$ und $\boldsymbol{v}(a)$ beides Lösungen der linearen Gleichung

$$\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 = 0$$

(man beachte, dass α_0, α_1 reell sind!). Da der Lösungsraum dieser homogenen linearen Gleichung eindimensional ist, müssen diese beiden Vektoren also linear abhängig sein. Ebenso sind $\bar{\boldsymbol{u}}(b)$ und $\boldsymbol{v}(b)$ beides Lösungen von

$$\beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 = 0$$

und daher ebenfalls linear abhängig. Aber $W(t) = \det(\boldsymbol{v}(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))$, also folgt $W(a) = W(b) = 0$. Damit folgt die Behauptung aus Teil a.

□

Theorem 31.3. *Für das reguläre* Sturm-Liouville-*Problem (31.3), (31.4) gilt:*

a. Alle Eigenwerte sind einfach, d. h. Eigenfunktionen $u, v \in D(L)$ zu einem Eigenwert λ sind stets linear abhängig.
b. Alle Eigenwerte des Problems sind reell.
*c. Eigenfunktionen $u_1, u_2 \in D(L)$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind k-*orthogonal*, d. h.*

$$\langle u_1 \mid u_2\rangle_k = \int_a^b k(x)\overline{u_1(x)}u_2(x)\mathrm{d}x = 0\ . \tag{31.8}$$

Beweis.

a. Seien u, v Eigenfunktionen zum Eigenwert λ. Wie im Beweis von Lemma 31.2b. erkennt man, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix}$$

dann linear abhängig sind. Beide Funktionen lösen jedoch die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = -\frac{p'(x)}{p(x)} y' - \frac{q(x) + \lambda k(x)}{p(x)} y \, ,$$

d. h. sie lösen Anfangswertaufgaben mit linear abhängigen Anfangsdaten und sind daher linear abhängig.

b. Dies – und auch die dritte Behauptung – wird genauso bewiesen wie die entsprechenden Aussagen für HERMITEsche Matrizen bzw. selbstadjungierte lineare Abbildungen in Satz 7.17. Nach Lemma 31.2b. haben wir für eine Eigenfunktion u zum Eigenwert λ:

$$-\bar{\lambda}\langle u \mid u\rangle_k = \langle L[u] \mid u\rangle = \langle u \mid L[u]\rangle = -\lambda\langle u \mid u\rangle_k \, ,$$

also $(\bar{\lambda} - \lambda)\|u\|_k^2 = 0$ und somit $\lambda = \bar{\lambda}$, da $\|u\|_k^2 > 0$.

c. Wegen $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$ ist nach Lemma 31.2b.

$$-\lambda_1\langle u_1 \mid u_2\rangle_k = \langle L[u_1] \mid u_2\rangle = \langle u_1 \mid L[u_2]\rangle = -\lambda_2\langle u_1 \mid u_2\rangle_k \, ,$$

also $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1 \mid u_2\rangle = 0$, aber $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ nach Voraussetzung. Daraus folgt die k-Orthogonalität (31.8). □

Beispiel: Das vielleicht einfachste STURM-LIOUVILLE-Problem ist das DIRICHLET-Problem

$$u'' = -\lambda u \, , \quad u(0) = u(1) = 0 \, . \tag{31.9}$$

Es stimmt (bis auf das Vorzeichen von λ) mit (30.8), (30.10) überein, und wir haben in Kap. 30 gesehen, wie man seine Eigenwerte $\lambda_n = n^2\pi^2$ und seine Eigenfunktionen $u_n(x) = \sin n\pi x$ mit völlig elementaren Mitteln errechnen kann. Betrachtet man die Differentialgleichung $u'' = -\lambda u$ auf einem beliebigen kompakten Intervall $I = [a, b]$ unter beliebigen STURM-LIOUVILLEschen Randbedingungen (31.4), so lassen sich Eigenwerte und Eigenfunktionen auf ähnliche Weise – nur mit etwas mehr Rechenaufwand – bestimmen (Übung!), und man erkennt, dass auch hier die Eigenwerte eine Folge bilden, die gegen Unendlich divergiert, und dass die Eigenfunktionen Schwingungen beschreiben, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer festen Grundfrequenz sind.

Das allgemeine STURM-LIOUVILLE-Problem (31.3), (31.4) kann physikalisch so interpretiert werden, dass es stehende Wellen in einem hinsichtlich

Massendichte und Elastizitätsmodul inhomogenen Medium beschreibt, und daher ist für Eigenwerte und Eigenfunktionen qualitativ dasselbe Verhalten zu erwarten wie bei der einfachen Schwingungsgleichung $u'' = -\lambda u$. Diese Vermutung wird durch die folgenden fundamentalen Sätze bestätigt:

Theorem 31.4. *Die Eigenwerte eines regulären* Sturm-Liouville-*Problems (31.3), (31.4) bilden stets eine monoton wachsende Folge*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots ,$$

die gegen Unendlich strebt. Ist φ_n Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n $(n \geq 0)$, so hat φ_n in $]a, b[$ genau n Nullstellen. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von φ_n liegt eine Nullstelle von φ_{n+1}.

Theorem 31.5 (*Entwicklungssatz*). *Es sei $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Eigenwerte und $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ die Folge der entsprechenden Eigenfunktionen eines regulären* Sturm-Liouville-*Problems (31.3), (31.4), wobei wir die Eigenfunktionen durch*

$$\|\varphi_n\|_k = 1$$

normiert haben. Dann bilden die Funktionen φ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Orthonormalbasis des Hilbert*raums $L^2(I)$ in Bezug auf das gewichtete Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_k$. D. h. für jedes $f \in L^2(I)$ konvergiert die* Fourier*reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n \mid f \rangle_k \varphi_n \tag{31.10}$$

im Sinne von $\| \cdot \|_k$ gegen f. Ist $f \in C^1(I)$ und erfüllt die Randbedingungen (31.4), so konvergiert die Reihe (31.10) sogar absolut und gleichmäßig gegen f.

Die Beweise würden hier zu weit führen. Die Aussagen über die Nullstellen der Eigenfunktionen lassen sich noch elementar mittels Differentialrechnung herleiten, doch für die Existenz der Eigenwerte und den Entwicklungssatz muss man weiter ausholen. In [65] z. B. findet man Beweise, die mit möglichst wenig höheren Mitteln auskommen.

31.6 Singuläre Sturm-Liouville-Probleme. Praktisch alle speziellen Funktionen, über die in den folgenden Abschnitten berichtet wird, sind Eigenfunktionen von singulären Sturm-Liouville-Problemen, und ihre *Orthogonalitätsrelationen* können daher jedesmal leicht mittels einer entsprechenden Variante von Thm. 31.3 begründet werden. Auf die allgemeine Theorie der singulären Sturm-Liouville-Probleme („Weyl-Kodaira-Theorie"), die eng mit den mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik verknüpft ist, können wir uns hier nicht einlassen, wollen aber doch einige einfache Bemerkungen über Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem regulären und dem singulären Fall machen (vgl. auch Ergänzung 31.58):

(i) Die Datenfunktionen p, q, k können durchaus unbeschränkt sein, denn sie sind ja nur auf dem *offenen* Intervall $I =]a, b[$ definiert und stetig.

(ii) Der Definitionsbereich $D(L)$ des Operators L muss, genau genommen, sehr sorgfältig spezifiziert werden. Auf jeden Fall muss er ein linearer Teilraum von $L^2(I)$ sein, und insbesondere ist jede Eigenfunktion zum Eigenwert λ eine *quadratintegrable* Lösung der Differentialgleichung $L[u] = -\lambda k u$. Mehr noch: Für jedes $u \in D(L)$ muss $v := L[u]$ quadratintegrabel über I sein.

(iii) Die Randbedingungen müssen stets so eingerichtet sein, dass die fundamentale Beziehung

$$\langle L[u] \mid v\rangle = \langle u \mid L[v]\rangle \quad \text{für alle} \quad u, v \in D(L) \tag{31.11}$$

erfüllt ist. Dann lassen sich die Aussagen aus Thm. 31.3 sowie die Aussagen über Nullstellen aus Thm. 31.4 herleiten. Ein *Eigenwert* ist dabei eine Zahl λ, für die es eine Funktion $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ gibt mit $L[u] = -\lambda k u$. Solch eine Funktion heißt natürlich *Eigenfunktion* zum Eigenwert λ.

(iv) Ist $p(a) = 0$ oder $p(b) = 0$, so können die Randbedingungen auf die Forderung reduziert sein, dass u, u' bei Annäherung an a bzw. b beschränkt bleiben sollen. Offenbar folgt ja dann (31.11) sofort aus Lemma 31.2a. (Man wendet dieses Lemma auf kompakte Teilintervalle $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$ an und schickt dann $\alpha \searrow a$, $\beta \nearrow b$.)

(v) Eigenwerte, wie sie in (iii) definiert wurden, gibt es nicht immer, und auch wenn sie existieren, müssen sie nicht gegen Unendlich streben, sondern können eine beschränkte Folge bilden. Entsprechend gilt auch der Entwicklungssatz nicht immer in der Form von Thm. 31.5. All das hängt vom Verhalten der Datenfunktionen p, q, k ab. Wenn die Eigenwerte eine gegen Unendlich divergierende Folge bilden und der Entwicklungssatz gilt, so sagen wir, das Problem habe *rein diskretes Spektrum.* Dies ist bei allen Problemen der Fall, die in den nachstehenden Abschnitten betrachtet werden, wie z. B. in [60], Bd. I, [33] oder [63] exakt bewiesen wird.

B. Legendre-Polynome und Kugelfunktionen

Beweise für die hier zusammengestellten Resultate finden sich z. B. in [25, 33, 36, 37, 39, 50, 58], teilweise auch in [63].

Die Legendresche Differentialgleichung

Die sog. Legendre-Differentialgleichung lautet:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \;, \tag{31.12}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger reeller Parameter ist. Gleichung (31.12) ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'' - a(x)y' - b(x)y = 0 \tag{31.13}$$

mit analytischen Koeffizienten

$$a(x) = \frac{2x}{1-x^2}\,, \quad b(x) = \frac{-\lambda}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{31.14}$$

Nach Satz 17.12 hat dann (31.12) analytische Lösungen der Form

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad \text{für} \quad |x| < 1\,, \tag{31.15}$$

wobei die c_m durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden können. Für die Anfangswerte $(c_0, c_1) = (1, 0)$ ergibt sich dabei eine gerade, für $(c_0, c_1) = (0, 1)$ eine ungerade Funktion. Hat λ die Form $\lambda = n(n+1)$, so erhält man für geeignete Anfangswerte c_0, c_1 eine Folge (c_m) mit $c_m = 0$ für alle $m > n$. Dann hat die Differentialgleichung (31.12) ein Polynom n-ten Grades als spezielle Lösung. Die Bedeutung solcher Polynomlösungen liegt darin, dass Polynome auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und analytisch sind, während die Potenzreihenlösungen nur für $|x| < 1$ analytisch sind. Man kann zeigen, dass jede Potenzreihenlösung, die kein Polynom ist, für $x = 1$ divergiert. Polynomlösungen existieren jedoch nur für $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir fassen zusammen:

Satz 31.7.

a. *Die* LEGENDRE-*Differentialgleichung (31.12) besitzt ein für $|x| < 1$ reell-analytisches Fundamentalsystem*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k}\,, \quad y_1(0) = 1\,, \quad y_1'(0) = 0\,, \\ y_2(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}\,, \quad y_2(0) = 0\,, \quad y_2'(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{31.16}$$

b. *Ist $y(x)$ eine nicht abbrechende Potenzreihenlösung von (31.12), so gilt*

$$\lim_{x \longrightarrow \pm 1} |y(x)| = +\infty\,. \tag{31.17}$$

c. *(31.12) besitzt dann und nur dann eine auf ganz $[-1, 1]$ definierte und stetige Lösung, wenn*

$$\lambda = n(n+1) \quad \textit{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ist. Diese Lösung ist bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt und ist ein Polynom n-ten Grades.

Beweisskizze: Geht man mit dem Potenzreihenansatz (31.15) in die Differentialgleichung (31.12), so liefert der Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel

$$c_{m+2} = \frac{m(m+1)-\lambda}{(m+1)(m+2)} c_m \tag{31.18}$$

woraus sich alle Koeffizienten nach Vorgabe von c_0 und c_1 berechnen lassen. Dies liefert das in a. angegebene Fundamentalsystem (31.16). Hat nun der Parameter λ die spezielle Form

$$\lambda = n(n+1) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

so folgt aus (31.18)

$$c_{n+2} = c_{n+4} = \cdots = 0$$

d. h. die Potenzreihe bricht ab und als Lösung ergibt sich ein Polynom n-ten Grades, wie in c. behauptet. Nehmen wir aber z. B. an, die Potenzreihe $y_1(x)$ in (31.16) bricht nicht ab. Für irgendeinen festen Index $m = 2k$ ergibt sich dann aus (31.18) die folgende Formel für den Quotienten zweier aufeinander folgender Koeffizienten

$$\frac{c_{2k+2m+2}}{c_{2k+2m}} = \frac{k+m}{k+m+1} - \frac{\lambda}{(2k+2m+2)(2k+2m+1)}$$

für $m = 0, 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{N}$ fest. Das zeigt, dass sich die Summanden der Reihe $y_1(1)$ wie die Summanden der divergenten harmonischen Reihe verhalten, was die Aussage (31.17) in b. begründet. □

LEGENDRE-Polynome

Die Polynomlösung $y = P_n(x)$ der speziellen LEGENDREschen Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{31.19}$$

wird so normiert, dass

$$P_n(1) = 1 \tag{31.20}$$

gilt, und dieses Polynom bezeichnet man als das LEGENDRE-*Polynom* n-ten Grades. Berechnet man seine Koeffizienten explizit, so ergibt sich die folgende äquivalente Definition, in der wir die Abkürzung

$$[n/2] := \begin{cases} n/2\,, & n \text{ gerade,} \\ (n-1)/2\,, & n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{31.21}$$

verwenden:

Definition 31.8. *Das Polynom n-ten Grades*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k} \tag{31.22}$$

heißt das Legendre-*Polynom n-ten Grades. Dieses ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (31.19).*

Für kleines n ist es eine leichte Übung, die P_n zu berechnen:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,,\\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,,\\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,, \quad \ldots\,. \end{aligned}$$

Für praktische Zwecke ist die Formel (31.22) wenig geeignet. Daher notieren wir:

Satz 31.9. *Für die* Legendre-*Polynome gilt die* Formel von Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \{(x^2 - 1)^n\}\,. \tag{31.23}$$

Beweis. Nach der binomischen Formel gilt

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}\,.$$

Differenziert man diesen Ausdruck n-mal, so fallen auf der rechten Seite alle Summanden der Ordnung

$$2n - 2k < n$$

weg, so dass die Summe nur noch bis $[n/2]$ läuft. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big[(x^2-1)^n\big] &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(n-2k+1)x^{n-2k}\\ &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}\,. \end{aligned}$$

Vergleich mit (31.22) zeigt die Behauptung. □

Zugeordnete LEGENDRE-Funktionen

In den Anwendungen stößt man noch auf die sogenannte zugeordnete LEGENDRE-Differentialgleichung

$$\left[(1-x^2)y'\right]' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0 \tag{31.24}$$

(vgl. etwa Abschn. 30B.), die eng mit der LEGENDRE-Differentialgleichung

$$\left[(1-x^2)u'\right]' + n(n+1)u = 0 \tag{31.25}$$

zusammenhängt. (Die letzte Gleichung ist offensichtlich äquivalent zu (31.19).) Natürlich kann man (31.24) ebenfalls durch einen Potenzreihenansatz lösen. Man kann jedoch (31.24) auch direkt auf (31.25) zurück führen, und zwar mittels der Substitution

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} v(x) \; . \tag{31.26}$$

Hierbei gehen Lösungen y von (31.24) über in Lösungen v der m-fach differenzierten Gleichung (31.25). So gelangt man zum

Satz 31.10.

a. Die zugeordnete LEGENDRE-*Differentialgleichung*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0 \tag{31.24}$$

hat als spezielle Lösung die zugeordnete LEGENDRE-Funktion erster Art vom Index n der Ordnung m

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n(x) \\ &= \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} \left[(x^2-1)^n\right] \end{aligned} \tag{31.27}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = 0, 1, \ldots, n$.

b. Die Funktionen

$$P_n^{-m}(x) := \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}} \left[(x^2-1)^n\right] \tag{31.28}$$

sind für $m = 1, \ldots, n$ ebenfalls Lösungen von (31.24).

Erzeugende Funktion und Rekursionsformeln

Wir notieren als erstes eine Darstellungsformel, die in der Physik bei der *Multipolentwicklung* eine wichtige Rolle spielt.

Satz 31.11. *Für* $|x| < 1$, $|t| < 1$ *gilt folgende Darstellung durch eine* erzeugende Funktion

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \ . \tag{31.29}$$

Beweis. Die erzeugende Funktion

$$f(t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

ist für alle $|x| < 1$ im Kreis $|t| < 1$ eine analytische Funktion und kann daher in eine konvergente Potenzreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) t^n \ , \quad |t| < 1$$

mit x-abhängigen Koeffizienten $Q_n(x)$ entwickelt werden. Um die Koeffizienten $Q_n(x)$ zu bestimmen, setzen wir

$$z = -2xt + t^2 \ .$$

Mit der binomischen Reihe folgt dann

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} z^n \quad \text{mit} \quad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{-3}{2})\cdots(\frac{1}{2}\cdots)}{n!} \ ,$$

wobei nach der binomischen Formel

$$z^n = (-2xt + t^2)^n = t^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-2x)^{n-l} t^l$$

ist. Zusammen ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} t^n \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-2x)^{n-l} t^l \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\frac{m}{2} \le j \le m} \binom{-1/2}{j} \binom{j}{m-j} (-2x)^{2j-m} \right) t^m \ ,\end{aligned}$$

wobei wir $m = n + l$, $j = m - l = n$ gesetzt haben. Die Koeffizienten $Q_m(x)$ sind dann

$$\begin{aligned}Q_m(x) &= \sum_{\frac{m}{2} \le j \le m} \binom{-1/2}{j} \binom{j}{m-j} (-2x)^{2j-m} \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{\frac{m}{2} \le j \le m} (-1)^{3j-m} \frac{(2j)!}{j!(m-j)!(2j-m)!} x^{2j-2m} \ .\end{aligned}$$

Setzt man noch $k := m-j$, so liefert der Vergleich mit (31.22) die Behauptung (31.29). □

Hieraus folgert man

Satz 31.12. *Für die* LEGENDRE-*Polynome gelten die folgenden* Rekursionsformeln

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \ , \tag{31.30}$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \ , \tag{31.31}$$

$$(x^2-1)P'_n(x) = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)) \ . \tag{31.32}$$

Beweis. Wir leiten (31.30) mit Hilfe von (31.29) her. Die übrigen Rekursionsformeln können ähnlich als Übung bewiesen werden. Differenzieren wir (31.29) nach t, multiplizieren anschließend mit $(1-2xt+t^2)$ und verwenden dann wieder (31.29), so bekommen wir

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \ .$$

Multipliziert man beide Seiten aus und ordnet das Ergebnis nach Potenzen von t, so folgt

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(xP_n(x) - P_{n-1}(x))t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)\right)t^n \ .\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann sofort (31.30). □

Das Orthogonalsystem der LEGENDRE-Polynome

Schreibt man die LEGENDRE-Differentialgleichung in der Form

$$((1-x^2)y')' = -\lambda y \ , \tag{31.33}$$

so erkennt man, dass es sich um eine singuläre STURM-LIOUVILLE-Gleichung (31.3) handelt, und zwar mit

$$p(x) = 1-x^2\,, \quad q(x) = 0\,, \quad k(x) = 1 \ . \tag{31.34}$$

Wir erkennen die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ als die Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$:

Satz 31.13. *Die* LEGENDRE-*Polynome* $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *sind die Eigenfunktionen des* STURM-LIOUVILLE-*Operators*

$$L\,[y] := ((1-x^2)y')' \tag{31.35}$$

zu den Eigenwerten $\lambda_n = n(n+1)$. *Dabei sind die Randbedingungen gegeben durch die Forderung, dass* y *und* y' *für* $x \to \pm 1$ *beschränkt bleiben.*

Damit können die Behauptungen von Thm. 31.3 ganz ähnlich wie bei regulären Sturm-Liouville-Problemen hergeleitet werden. Genauere Untersuchungen zeigen, dass die Analogie noch viel weiter geht, nämlich:

Satz 31.14.

a. *Die* Legendre-*Polynome $P_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ bilden ein Orthogonalsystem in* $L^2([-1,1])$ *mit dem* Normierungsfaktor

$$\|P_n\|^2 \equiv \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \; . \tag{31.36}$$

b. *Das Orthogonalsystem $\{P_n(x) \mid n = 0, 1, \ldots\}$ ist vollständig in $L^2([-1,1])$, d. h. für jedes $f \in L^2([-1,1])$ konvergiert die* Fourier-Legendre-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{31.37}$$

mit

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \mathrm{d}x \tag{31.38}$$

im quadratischen Mittel gegen f.

c. *Für $f \in C^0([-1,1])$ ist die Konvergenz der Reihe (31.38) gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $]-1,1[$.*

Als eine Anwendung der Darstellungsformel (31.29) leiten wir den Normierungsfaktor (31.36) her, wobei wir die Orthogonalität der Legendre-Polynome benutzen. Quadriert man die Darstellungsformel

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

mit Hilfe der Cauchy-Produktformel aus Satz 17.6, so ergibt sich

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(x) P_k(x) \right) t^n \; .$$

Integrieren wir diese Gleichung bezüglich x von -1 bis 1, so bekommen wir auf der linken Seite

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 - 2xt + t^2} = \frac{1}{t} \ln \frac{1-t}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}$$

und auf der rechten Seite

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(x) t^n \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} \int_{-1}^{1} P_k(x) P_{n-k}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \mathrm{d}x \ .$$

Koeffizientenvergleich liefert dann (31.36).

Orthogonalsysteme von zugeordneten LEGENDRE-Funktionen

Die zugeordnete LEGENDRE-Differentialgleichung (31.24) kann auf zweierlei Weise als STURM-LIOUVILLE-Gleichung in $I :=]-1, 1[$ aufgefasst werden:

(i) Für festes $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$p(x) := 1 - x^2 \,, \quad q(x) := m^2/(1 - x^2) \,, \quad k(x) \equiv 1 \ .$$

Dann sind die zugeordneten LEGENDRE-Funktionen P_n^m für $n \geq |m|$ Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_n := n(n + 1)$, und es ergeben sich entsprechende Orthogonalitätsrelationen. Genauer gesagt kann man beweisen:

Satz 31.15. *Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest.*

a. Die zugeordneten LEGENDRE-*Funktionen*

$$P_n^m(x) \,, \quad n = |m|, |m| + 1, \ldots$$

bilden ein Orthogonalsystem in $L^2([-1, 1])$, und es gilt:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_r^m(x) \mathrm{d}x = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{nr} \quad \textit{für} \quad n, r \geq |m| \,. \tag{31.39}$$

b. Das Orthogonalsystem $\{P_n^m \mid n \geq |m|\}$ ist vollständig in $L^2([-1, 1])$, d. h. für jedes $f \in L^2([-1, 1])$ konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=|m|}^{\infty} c_{nm} P_n^m(x) \tag{31.40}$$

mit

$$c_{nm} = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) \mathrm{d}x \,, \tag{31.41}$$

und für $f \in C^2([-1, 1])$ ist die Konvergenz der Reihe (31.40) absolut und gleichmäßig auf $[-1, 1]$.

(ii) Für festes $n \geq 0$ setzen wir

$$p(x) := 1 - x^2\,, \quad q(x) \equiv n(n+1)\,, \quad k(x) := 1/(1-x^2)\,.$$

Die $P_n^m(x)$, $-n \leq m \leq n$ sind dann Eigenfunktionen des entsprechenden singulären Sturm-Liouville-Problems zu den Eigenwerten $\mu_m := -m^2$. Man beachte, dass diese Eigenwerte für $m \neq 0$ nicht mehr einfach sind, denn P_n^m und P_n^{-m} sind linear unabhängige Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert. Dies hängt damit zusammen, dass die zugeordneten Legendre-Funktionen sich am Rand von $(-1,1)$ singulär verhalten dürfen. Jedoch erhält man immer noch die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^m(x) P_n^s(x)}{1-x^2} \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für} \quad m \neq s\,, \quad |m|, |s| \leq n\,. \tag{31.42}$$

Kugelfunktionen

Die in Satz 30.6b. angegebenen speziellen Lösungen $u_{n,m}(r,\varphi,\theta)$ der Potentialgleichung sind von grundsätzlicher Bedeutung und geben Anlass zu der folgenden Definition:

Definition 31.16. *Die für*

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

und $n \geq 0$, $-n \leq m \leq n$ definierten Funktionen

$$Y_n^m(\varphi,\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{31.43}$$

heißen normierte Kugelflächenfunktionen.

Die Kugelflächenfunktionen sind für die Kugel das, was die Funktionen aus dem trigonometrischen Orthogonalsystem für den Kreis sind. Das erkennt man aus dem folgenden Satz, den man aus unseren Ergebnissen über zugeordnete Legendre-Funktionen herleiten kann:

Satz 31.17. *Es sei $S := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre, beschrieben durch Kugelkoordinaten (φ,θ).*

a. $\{Y_n^m \mid n = 0, 1, \ldots, -n \leq m \leq n\}$ *bildet ein vollständiges Orthonormalsystem im* Hilbert*raum $L^2(S)$, d. h. es gelten die* Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Y_l^k(\varphi,\theta)}\, Y_n^m(\varphi,\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \delta_{nl}\delta_{mk}\,, \tag{31.44}$$

und für jedes $f \in L^2(S)$ *gilt die* PARSEVALsche Gleichung

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(\varphi,\theta)\mid^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \left| \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{Y_n^m(\varphi,\theta)} f(\varphi,\theta)\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \right|^2 .\end{aligned} \tag{31.45}$$

b. Für $f \in C^1(S,\mathbb{C})$ *konvergiert die* FOURIER*entwicklung von* f *nach den Kugelflächenfunktionen gleichmäßig auf* S *gegen* f*, d. h.*

$$f(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \gamma_n^m Y_n^m(\varphi,\theta) \tag{31.46}$$

mit

$$\gamma_n^m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{Y_n^m(\varphi',\theta')} f(\varphi',\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\theta' . \tag{31.47}$$

Bemerkung: Die in Def. 31.16 angegebene Formel eignet sich zwar gut zum Rechnen, doch sollte man sich die Kugelflächenfunktionen als Funktionen vorstellen, die wirklich auf der Kugeloberfläche S definiert sind. Die Funktion Y_n^m ordnet also dem durch die Kugelkoordinaten (φ,θ) beschriebenen Punkt aus S die Zahl $Y_n^m(\varphi,\theta)$ zu. Entsprechend besteht der HILBERTraum $L^2(S)$ aus den messbaren Funktionen $f : S \to \mathbb{C}$, für die

$$\int_S |f(x,y,z)|^2 \mathrm{d}\sigma < \infty$$

ist, und zwei solche Funktionen f_1, f_2 geben genau dann ein und dasselbe Element von $L^2(S)$ wieder, wenn

$$\int_S |f_1 - f_2| \mathrm{d}\sigma = 0$$

ist. Hierbei ist $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächenelement auf S, wie wir es in den Kapiteln 12 und 22 diskutiert haben. Das Skalarprodukt in $L^2(S)$ ist gegeben durch

$$\langle f \mid g\rangle = \int_S \overline{f(x,y,z)} g(x,y,z)\mathrm{d}\sigma . \tag{31.48}$$

In Kugelkoordinaten ist das Oberflächenelement gegeben durch

$$\mathrm{d}\sigma = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi ,$$

und somit lautet (31.48) in Kugelkoordinaten

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\varphi, \theta)} g(\varphi, \theta) \sin \theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \ . \tag{31.49}$$

Natürlich ist hier $f(\varphi, \theta)$ eine Abkürzung für $f(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$, und ebenso für g. Formel (31.44) lautet also einfach

$$\langle Y_l^k \mid Y_n^m \rangle = \delta_{nl} \delta_{mk} \ ,$$

und die anderen Formeln aus dem letzten Satz sind als Spezialfälle der entsprechenden Formeln aus Abschn. 29A. zu erkennen.

C. Hermite-Polynome und Hermite-Funktionen

Beweise für die hier berichteten Tatsachen finden sich z. B. in [33, 36, 46, 50, 58, 63].

Die Hermitesche Differentialgleichung

Die sogenannte Hermite-Differentialgleichung lautet

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0, \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{31.50}$$

Man stößt auf sie z. B. bei der Separation der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator. Ihre Koeffizienten $a(x) = 2x$, $b(x) = -2\lambda \in \mathbb{R}$ sind analytische Funktionen in ganz $\mathbb{R}$. Nach Satz 17.12 sind ihre Lösungen daher ebenfalls analytisch und können durch Potenzreihenansatz bestimmt werden. Es ergibt sich:

Satz 31.18. *Die* Hermite-*Differentialgleichung (31.50) hat ein auf ganz* $\mathbb{R}$ *analytisches Fundamentalsystem der Form*

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k}, \quad y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \tag{31.51}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_{2k+2} &= 2^k \frac{(2k - \lambda)(2k - 2 - \lambda) \cdots (2 - \lambda)(-\lambda)}{(2k+2)!} \ , \\ c_{2k+1} &= 2^k \frac{(2k - 1 - \lambda)(2k - 3 - \lambda) \cdots (1 - \lambda)}{(2k+1)!} \ . \end{aligned} \tag{31.52}$$

Für $|x| \longrightarrow \infty$ verhalten sich diese Lösungen wie die Funktion $y(x) = \mathrm{e}^{2x^2}$, es sei denn, die Koeffizientenfolge bricht ab. Wegen dieses starken Anwachsens der Potenzreihenlösungen sind diese Lösungen für viele Anwendungen unbrauchbar, so dass Polynomlösungen wichtig sind. Wie man an der Koeffizientenformel (31.52) erkennt, kann es eine solche nur geben, wenn

$$\lambda = n \in \mathbb{N}_0 \tag{31.53}$$

ist. In diesem Fall ist y_1 oder y_2 ein Polynom, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Wir haben also:

Satz 31.19. *Die* HERMITE-*Differentialgleichung*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{31.54}$$

hat für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ die (bis auf skalare Vielfache) eindeutige Polynomlösung

$$H_n(x) := n! \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \,. \tag{31.55}$$

Sie ist ein Polynom n-ten Grades und heißt das HERMITE-Polynom *n-ten Grades.*

Hierbei ist $[n/2]$ durch (31.21) gegeben.

RODRIGUEZ-Formel

Wie bei den LEGENDRE-Polynomen gibt es auch für die HERMITE-Polynome eine RODRIGUEZ-Formel:

Satz 31.20. *Für die* HERMITE-*Polynome gilt die* Formel von RODRIGUEZ

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{31.56}$$

Erzeugende Funktion und Rekursionsformeln

Zur Herleitung von Rekursionsformeln für die HERMITE-Polynome ist die Darstellung durch eine erzeugende Funktion wichtig:

Satz 31.21. *Für die* HERMITE-*Polynome gilt folgende Darstellung durch eine* erzeugende Funktion

$$w(x,t) := \mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \,. \tag{31.57}$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert die speziellen Werte

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\,, \quad H_{2n+1}(0) = 0\,. \tag{31.58}$$

Und nun zu den angekündigten Rekursionsformeln, die man aus (31.57) folgern kann:

Satz 31.22. *Für die* HERMITE-*Polynome gelten folgende Rekursionsformeln:*

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,, \tag{31.59}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{31.60}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0\,. \tag{31.61}$$

HERMITE-Funktionen

Die Funktion

$$h_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x) \tag{31.62}$$

ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0\,, \tag{31.63}$$

was sich durch leichte Rechnung aus der HERMITEschen Differentialgleichung ergibt. Man nennt $h_n(x)$ die *n-te* HERMITE-*Funktion*.

Die Rekursionsformel (31.61) ergibt

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - h_n'(x)\,, \tag{31.64}$$

und (31.60) ergibt

$$xh_n(x) + h_n'(x) = 2nh_{n-1}(x)\,. \tag{31.65}$$

In der Quantenmechanik führt man den *Abstiegsoperator* A und den *Aufstiegsoperator* A^+ ein durch

$$A[u](x) := \left(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) u(x)\,, \quad A^+[u](x) := \left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) u(x) \tag{31.66}$$

für gegebene C^∞-Funktionen u. In dieser Schreibweise lauten die zwei letzten Rekursionsformeln

Satz 31.23. *Für die* HERMITE*funktionen* h_n *gilt*

$$h_{n+1} = A^+[h_n]\,, \quad A[h_n] = 2nh_{n-1}\,.$$

Insbesondere entsteht h_n *durch* n*-maliges Anwenden des Aufstiegsoperators* A^+ *auf* $h_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$*. Ferner ist* $A[h_0] = 0$*.*

Statt von Auf- und Abstiegsoperatoren spricht der Physiker auch von *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren*. Diese Terminologie ist von der quantenmechanischen Theorie des harmonischen Oszillators inspiriert.

Das Orthogonalsystem der HERMITE-Polynome

Multiplizieren wir die HERMITEsche Differentialgleichung (31.50) mit e^{-x^2}, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{e}^{-x^2} y')' + \lambda \mathrm{e}^{-x^2} y = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ &y(x) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \pm\infty\,. \end{aligned} \tag{31.67}$$

Vergleich mit (31.3) zeigt, dass (31.67) ein singuläres STURM-LIOUVILLE-Problem mit

$$p(x) = k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\,, \quad q(x) = 0$$

ist, so dass die HERMITE-Polynome $H_n(x)$ die Eigenfunktionen des Problems zu den Eigenwerten $\lambda_n = 2n$ sind. Man bekommt also Orthogonalitätsrelationen bezüglich eines entsprechend gewichteten Skalarprodukts, und man kann zeigen, dass das Problem rein diskretes Spektrum hat. Für die HERMITEfunktionen $h_n(x)$ ergeben sich daraus Orthogonalitätsrelationen und ein Entwicklungssatz in Bezug auf das übliche Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$. Insgesamt hat man:

Satz 31.24.

a. *Für die* HERMITE-*Polynome $H_n(x)$ gelten die folgenden* Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \textit{für} \quad m \neq n\,, \tag{31.68}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)^2 \mathrm{d}x = 2^n n! \sqrt{\pi}\,. \tag{31.69}$$

b. *Das System der* normierten HERMITE-Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{31.70}$$

bildet ein vollständiges Orthonormalsystem im HILBERT*raum $L^2(\mathbb{R})$ der quadratintegrablen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit dem üblichen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm, d. h. für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ konvergiert die* FOURIER*reihe*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\,, \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) \mathrm{d}x \tag{31.71}$$

bezüglich der Norm von $L^2(\mathbb{R})$.

c. Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$\|f\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x) \mathrm{d}x < \infty \tag{31.72}$$

konvergiert die FOURIER-HERMITE-Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \tag{31.73}$$

bezüglich der Norm (31.72) und außerdem punktweise in jedem Stetigkeitspunkt von $f(x)$ *gegen* $f(x)$. *Dabei ist*

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x) H_n(x) \mathrm{d}x \, . \tag{31.74}$$

D. LAGUERRE-Polynome

Die Theorie der LAGUERRE-Polynome verläuft in gewissem Umfang parallel zu der der HERMITE-Polynome. Für die Einzelheiten kann dieselbe Literatur herangezogen werden wie im Falle der HERMITEschen Polynome.

Die LAGUERRE-Differentialgleichung

Bei der Separation der SCHRÖDINGER-Gleichung für radialsymmetrische Potentiale tritt die sogenannte LAGUERRE-*Differentialgleichung*

$$xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0 \, , \quad \nu \in \mathbb{R} \tag{31.75}$$

auf. Bei dieser Differentialgleichung haben die Koeffizienten die Form

$$a(x) = \frac{1-x}{x} \, , \quad b(x) = \frac{\nu}{x} \, ,$$

was bedeutet, dass $x = 0$ ein regulärer singulärer Punkt im Sinne von Definition 17.13 ist. Nach Satz 17.14 hat daher (31.75) eine Lösung der Form

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \, , \tag{31.76}$$

die für $x > 0$ konvergiert. Durchführung der Methode von FROBENIUS aus Kap. 17 führt nun zu folgendem Ergebnis:

Satz 31.25. *Die* LAGUERRE-*Differentialgleichung (31.75) hat eine für $x > 0$ analytische Lösung der Form*

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{1}{k!} x^k \ . \tag{31.77}$$

Diese Lösung verhält sich – sofern sie kein Polynom ist – für $x \longrightarrow +\infty$ asymptotisch wie die Funktion $x^\nu \mathrm{e}^x$. Dies macht die nicht abbrechende Potenzreihenlösung der LAGUERRE-Differentialgleichung für viele Anwendungen unbrauchbar. Deshalb untersucht man auch bei der LAGUERRE-Differentialgleichung die Möglichkeit von Polynomlösungen. Dabei zeigt sich, dass diese nur für $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ existieren können und dann folgende Gestalt haben:

Satz 31.26.

a. Die LAGUERRE-*Differentialgleichung*

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{31.78}$$

hat als spezielle Lösung das LAGUERRE-Polynom n-ten Grades

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} \ . \end{aligned} \tag{31.79}$$

b. Es gilt die Formel von RODRIGUEZ

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (\mathrm{e}^{-x} x^n) \ . \tag{31.80}$$

Erzeugende Funktion und Rekursionsformeln

Für die LAGUERRE-Polynome gibt es ebenso wie für die LEGENDRE- und HERMITE-Polynome eine Darstellung durch eine erzeugende Funktion:

Satz 31.27. *Für die* LAGUERRE-*Polynome gilt die folgende Darstellung durch eine erzeugende Funktion*

$$w(x,t) := \frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n\,, \quad |t| < 1 \ . \tag{31.81}$$

Wie bei den anderen Polynomen liefert die Darstellungsformel (31.81) eine Reihe von Rekursionsformeln für $L_n(x)$:

Satz 31.28. *Für die* Laguerre-*Polynome* $L_n(x)$ *gelten die folgenden Rekursionsformeln*

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0\,, \tag{31.82}$$

$$(x-n-1)L_n'(x) + (n+1)L_{n+1}'(x) + (2n+2-x)L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) = 0\,, \tag{31.83}$$

$$xL_n'(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0\,. \tag{31.84}$$

Das Orthogonalsystem der Laguerre-Polynome

Multiplizieren wir die Laguerre-Differentialgleichung (31.75) mit e^{-x}, so bekommen wir die Sturm-Liouville-Gleichung

$$(x\mathrm{e}^{-x}y')' + \nu\mathrm{e}^{-x}y = 0\,. \tag{31.85}$$

Hier ist

$$p(x) = x\mathrm{e}^{-x} > 0\,, \quad k(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0 \quad \text{für} \quad x > 0\,, \quad q(x) = 0\,.$$

Satz 31.26a. sagt dann gerade, dass die Laguerre-Polynome $L_n(x)$ die Eigenfunktionen der Gleichung (31.85) zu den Eigenwerten $\nu_n = n$ sind. Auch hier gelten wieder entsprechende Varianten der Theoreme 31.3, 31.4 und 31.5, und so kommen wir analog zu Satz 31.24 für die Hermite-Polynome zu folgender Aussage für die Laguerre-Polynome:

Satz 31.29.

a. Für die Laguerre-*Polynome gilt die* Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}L_m(x)L_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}\,. \tag{31.86}$$

b. Das System der Funktionen

$$\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}L_n(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{31.87}$$

bildet ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbert*raum* $L^2([0,\infty[)$ *der quadratintegrablen Funktionen* $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *mit dem üblichen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm, d. h. für jede Funktion* $f \in L^2([0,\infty[)$ *konvergiert die* Fourier*reihe*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n\psi_n(x) \quad \textit{mit} \quad a_n = \int_0^\infty f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

bezüglich der Norm von $L^2([0,\infty[)$.

c. Für jede Funktion $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$\|f\|^2 := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \tag{31.88}$$

konvergiert die FOURIER-LAGUERRE-*Entwicklung*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x) \quad mit \quad c_n = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f(x) L_n(x) \mathrm{d}x \tag{31.89}$$

bezüglich der Norm (31.88) gegen f.

Bemerkung: Kriterien für die punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Entwicklungen nach LEGENDRE-, HERMITE- und LAGUERRE-Polynomen sind besonders in [50] ausführlich besprochen.

E. BESSELfunktionen erster Art

Die hier berichteten Ergebnisse – und vieles mehr – sind z. B. in [24, 33, 36, 47, 66] bewiesen. Eine besonders sorgfältige Diskussion des Entwicklungssatzes für BESSELfunktionen findet sich wieder in [63]. Wie in Abschn. B. sind einige wenige Beweise hier zwecks Illustration ausgeführt oder angedeutet.

Die BESSELsche Differentialgleichung mit ganzzahligem Index

Die BESSEL*sche Differentialgleichung* zum ganzzahligen *Index* $\nu = n$ lautet

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{31.90}$$

Sie kann mit der erweiterten Potenzreihenmethode nach Satz 17.14 gelöst werden. Wie man sieht, ist $x = 0$ ein regulärer singulärer Punkt gemäß Definition 17.13. Daher hat (31.90) nach dem Satz 17.14 eine Lösung der Form

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\lambda}\,, \tag{31.91}$$

wobei die Potenzreihe in ganz $\mathbb{R}$ konvergiert. Setzen wir (31.91) in die Differentialgleichung (31.90) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&(\lambda + n)(\lambda - n)c_0 + (\lambda + n + 1)(\lambda - n + 1)c_1 x \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} [(\lambda + n + k)(\lambda - n + k)c_k + c_{k-2}]x^k = 0\,.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Der erste Summand ergibt mit

$$(\lambda + n)(\lambda - n) = 0$$

die Bestimmungsgleichung für λ mit den Lösungen

$$\lambda = n\,, \quad \lambda = -n\,.$$

Im Falle $\lambda = n$ folgt aus $(*)$

$$(2n+1)c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(2n+k)c_k + c_{k-2}]x^k = 0\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel

$$c_k = -\frac{1}{k(2n+k)} c_{k-2}\,, \quad k = 2, 3, \ldots$$

und außerdem $c_1 = 0$, also auch $c_{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Setzt man speziell

$$c_0 = \frac{1}{2^n n!}\,,$$

so bekommt man als Ergebnis die Besselfunktion $J_n(x)$. Genauer:

Satz 31.30. *Die* Bessel*sche Differentialgleichung*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{31.90}$$

hat die spezielle Lösung

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\,, \tag{31.92}$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, und Besselfunktion 1. Art vom Index n *heißt. Jede von J_n linear unabhängige Lösung ist bei $x = 0$ singulär. Es gilt*

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)\,. \tag{31.93}$$

Insbesondere liefert der Fall $n = 0$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots\,.$$

Vergleicht man mit

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\,,$$

so erkennt man, dass die Besselfunktionen 1. Art gewisse Ähnlichkeiten mit den trigonometrischen Funktionen haben.

Rekursionsformeln

Von Nützlichkeit sind die folgenden Rekursionsformeln, die man direkt aus der Potenzreihendarstellung folgern kann:

Satz 31.31. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ (bzw. alle $x \neq 0$) gilt:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \ , \tag{31.94}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \ , \tag{31.95}$$

$$xJ_n'(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n-1}(x) \ , \tag{31.96}$$

$$-nJ_n(x) + J_n'(x) = -xJ_{n+1}(x) \ , \tag{31.97}$$

$$xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x) \ . \tag{31.98}$$

Erzeugende Funktionen und Integralformeln

Auch für die BESSELfunktionen gibt es eine *erzeugende Funktion*:

Satz 31.32. *Für die* BESSEL*funktionen $J_n(x)$ gilt folgende Darstellung durch eine erzeugende Funktion:*

$$w(x,t) := \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[t^n + (-1)^n t^{-n}\right] \ , \tag{31.99}$$

welche für alle komplexen $t \neq 0$ konvergiert.

Beweisskizze: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}$$

für $|t| > 0$ analytisch in t. Daher kann $w(x,t)$ mit $t = 0$ in eine LAURENTreihe

$$w(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) t^n$$

entwickelt werden. Die Koeffizienten dieser Entwicklung können wegen

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{x\frac{t}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2t}}$$

durch Multiplikation der beiden Reihen

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x\frac{t}{2}} &= 1 + \frac{(x/2)}{1!}t + \frac{(x/2)^2}{2!}t^2 + \cdots \\
\mathrm{e}^{-\frac{x}{2t}} &= 1 - \frac{(x/2)}{1!}t^{-1} + \frac{(x/2)^2}{2!}t^{-2} - \cdots
\end{aligned}$$

nach der CAUCHYproduktformel aus Satz 17.6 bestimmt werden. Wir verzichten auf die Durchführung der Rechnung. Man bekommt

$$\begin{aligned} c_n(x) &= J_n(x) && \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \dots\ , \\ c_n(x) &= (-1)^n J_{-n}(x) && \text{für} \quad n = -1, -2, \dots\ , \end{aligned}$$

was dann (31.99) liefert. □

Setzt man hier speziell

$$t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

so wird

$$t - t^{-1} = 2\mathrm{i}\sin\theta$$

und damit

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} = \cos(x\sin\theta) + \mathrm{i}\sin(x\sin\theta)\ .$$

Ferner wird

$$t^n + (-1)^n t^{-n} = \begin{cases} 2\cos(2k\theta)\,, & n = 2k \quad \text{gerade,} \\ 2\mathrm{i}\sin(2k-1)\theta\,, & n = 2k-1 \quad \text{ungerade.} \end{cases}$$

Einsetzen in (31.99) liefert dann

$$\begin{aligned} &\cos(x\sin\theta) + \mathrm{i}\sin(x\sin\theta) \\ &= \left\{ J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta \right\} + \mathrm{i}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta \right\}\ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

Satz 31.33. *Für die* BESSEL*funktionen gelten folgende Reihenentwicklungen*

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos n\theta\ , \tag{31.100}$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta\ . \tag{31.101}$$

Für festes x können wir diese Reihen als trigonometrische FOURIERreihen der links stehenden Funktionen ansehen. Nach den EULERschen Formeln in Satz 29.6b. gilt daher:

Satz 31.34. *Für die* BESSEL*funktionen $J_n(x)$ gelten folgende Integraldarstellungen:*

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2n\theta \cos(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta \,, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \,, \tag{31.102}$$

$$J_{2n-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2n-1)\theta \sin(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta \,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{31.103}$$

Nullstellen der BESSELfunktionen

Die schon erwähnte Verwandtschaft der BESSELfunktionen mit den trigonometrischen Funktionen wird auch durch das folgende Resultat unterstrichen:

Satz 31.35. *Für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ bildet die Menge der positiven Lösungen der Gleichung*

$$J_n(x) = 0$$

eine monoton wachsende Folge $(\alpha_{n,k})$ mit

$$\alpha_{n,k} \longrightarrow +\infty \quad \textit{für} \quad k \longrightarrow \infty \,.$$

Wie wir gleich sehen werden, ist Satz 31.35 entscheidend für die Diskussion von STURM-LIOUVILLE-Problemen, die mit der BESSELschen Differentialgleichung zusammenhängen.

Beweis.

a. Wir zeigen im ersten Schritt, dass $J_0(x)$ eine monoton wachsende Folge $(\alpha_{0,k})$ von positiven Nullstellen

$$\alpha_{0,k} \longrightarrow +\infty \quad \text{für} \quad k \longrightarrow \infty$$

hat. Dazu gehen wir aus von der Integraldarstellung (31.102)

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta \,,$$

die mit der Substitution $t = x \sin\theta$ in

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} \mathrm{d}t \tag{$*$}$$

übergeht. Setzen wir $c_0 := 0$ und

$$c_k := k\pi - \frac{\pi}{2} \,, \quad k = 1, 2, \ldots \,,$$

so ist die Funktion

$$y_k(t) := \begin{cases} \dfrac{\cos t}{\sqrt{c_k^2 - t^2}}\,, & 0 \le t < c_k\,, \\ 0\,, & t = c_k \end{cases}$$

stetig auf $[0, c_k]$. Es sei

$$F_j := \int\limits_{c_{j-1}}^{c_j} |y_k(t)| \mathrm{d}t\,, \quad j = 1, \dots, k$$

der absolute Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $y_k(t)$ und dem Intervall $[c_{j-1}, c_j]$ auf der t-Achse. Dann gilt

$$F_1 < F_2 < \cdots < F_k$$

weil $|\cos t|$ die Periode π hat und $\sqrt{c_k^2 - t^2} \searrow 0$ für $t \nearrow c_k$. Da ferner

$$\cos t \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad c_{2j} < t < c_{2j+1}\,, \\ < 0 & \text{für} \quad c_{2j+1} < t < c_{2j+2} \end{cases}, \quad j = 0, 1, \dots$$

folgt aus (*)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} J_0(c_k) &= \int\limits_0^{c_k} y_k(t) \mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} F_1 + (F_3 - F_2) + \cdots + (F_k - F_{k-1}) > 0\,, & k \text{ ungerade} \\ -(F_2 - F_1) - (F_4 - F_3) - \cdots - (F_k - F_{k-1}) < 0\,, & k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz 2.11 hat daher $J_0(x)$ eine Nullstelle $\alpha_{0,k}$ mit

$$c_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < \alpha_{0,k} < c_{k+1} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\,, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

was die Behauptung für $J_0(x)$ beweist, da die Nullstellen der analytischen Funktion $J_0(x)$ nach Satz 16.14 isoliert liegen.

b. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

können wir nun durch Induktion nach n zeigen, dass $J_n(x)$ ebenfalls eine unendliche Folge $\alpha_{n,k} \longrightarrow +\infty$ von positiven Nullstellen hat, wobei die Behauptung für den Induktionsanfang $n = 0$ nach a. richtig ist. Sei also die Behauptung für $J_n(x)$, $n \ge 0$, richtig und seien $\alpha < \beta$ zwei aufeinander folgende Nullstellen von $J_n(x)$, d. h.

$$J_n(\alpha) = 0 = J_n(\beta)\,, \quad \alpha < \beta\,.$$

Dann verschwindet auch $x^{-n}J_n(x)$ in diesen Punkten, so dass nach dem Satz von Rolle 2.22a. ein γ, $\alpha < \gamma < \beta$, existiert mit

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-n}J_n(x)\right)\Big|_{x=\gamma} = -x^n J_{n+1}(x)\Big|_{x=\gamma}\,,$$

d. h. es ist $J_{n+1}(\gamma) = 0$, so dass zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von $J_n(x)$ immer eine Nullstelle von $J_{n+1}(x)$ liegt. Die Behauptung gilt also auch für $J_{n+1}(x)$.

□

Orthogonalsysteme von Besselfunktionen

Die Besselsche Differentialgleichung (31.90) lässt sich offenbar umformen zu

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}y = -xy\,.$$

Die entsprechende Eigenwertgleichung

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}y = -\lambda xy \tag{31.104}$$

ist vom Sturm-Liouvilleschen Typ (31.3), und zwar mit

$$p(x) = x\,, \quad q(x) = -n^2/x\,, \quad k(x) = x\,,$$

und wir betrachten sie auf Intervallen der Form $I := [0, R]$ zusammen mit der Randbedingung

$$y(R) = 0\,. \tag{31.105}$$

Da $p(0) = 0$ ist, brauchen wir am linken Randpunkt nur die Forderung, dass y und y' beschränkt bleiben sollen.

Der Besselsche Differentialoperator

$$L[y] := (xy')' - \frac{n^2}{x}y$$

hat nun die folgende bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft: Ist $L[y] = -\lambda xy$ und setzen wir $z(x) := y(\beta x)$ für eine feste reelle Zahl $\beta \neq 0$ („Streckung der x-Achse um den Faktor β“), so ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$L[z] = -\lambda\beta^2 xz\,.$$

Nun ist $y = J_n(x)$ (bis auf skalare Vielfache) die einzige Lösung der Gleichung $L[y] = -xy$, die bei $x = 0$ regulär ist (vgl. Satz 31.30). Also sind die Eigenfunktionen des singulären STURM-LIOUVILLE-Problems (31.104), (31.105) einfach die Funktionen

$$u_{n,k}(x) := J_n\left(\frac{\alpha_{n,k}}{R}x\right) ,$$

wobei die $\alpha_{n,k}$ wieder die positiven *Nullstellen* von J_n bezeichnen, und die entsprechenden Eigenwerte sind

$$\lambda_k := \alpha_{n,k}^2/R^2 , \quad k = 1, 2, \dots .$$

Satz 31.36. *Seien $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ fest vorgegeben.*

a. Die Funktionen

$$u_k(x) = J_n\left(\frac{\alpha_{n,k}}{R}x\right) , \quad k = 1, 2, \dots$$

sind Eigenfunktionen des STURM-LIOUVILLE-*Problems (31.104), (31.105) zu den Eigenwerten $\lambda_{nk} = \frac{\alpha_{n,k}^2}{R^2}$, $k = 1, 2, \dots$, wobei $\alpha_{n,k}$ die positiven Nullstellen von $J_n(x)$ sind.*

b. Die Funktionen $u_k(x)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für das Skalarprodukt

$$\langle f \mid g \rangle_x := \int_0^R x\overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x \tag{31.106}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$\|u_k\|_x^2 = \int_0^R x\left(J_n\left(\frac{\alpha_{n,k}}{R}x\right)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{R^2}{2}J_{n+1}(\alpha_{n,k})^2 . \tag{31.107}$$

c. Für jedes $f \in L^2([0, R])$ konvergiert die FOURIER-BESSELentwicklung

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n J_n\left(\frac{\alpha_{nk}}{R}x\right) \tag{31.108}$$

mit

$$c_k^n = \frac{2}{R^2 J_{n+1}(\alpha_{n,k})^2} \int_0^R x f(x) J_n\left(\frac{\alpha_{n,k}}{R}x\right) \mathrm{d}x \tag{31.109}$$

im gewichteten quadratischen Mittel gegen f. Für $f \in C^1([0, R])$ ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis. Es ist noch zu zeigen, dass der Normierungsfaktor die in (31.107) angegebene Form hat. Dazu multiplizieren wir die BESSELsche Differentialgleichung (31.90) mit $2x^2y'$ und bekommen nach einer leichten Umformung

$$[x^2(y')^2]' + [(x^2 - n^2)y^2]' - 2xy^2 = 0 \ .$$

Da $y = J_n(x)$ eine Lösung ist, gilt also

$$2x[J_n(x)]^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x^2[J_n'(x)]^2 + (x^2 - n^2)J_n(x)^2\right\} \ .$$

Integration dieser Gleichung bezüglich x von 0 bis λR, $\lambda > 0$ liefert

$$2\int\limits_0^{\lambda R} xJ_n(x)^2\mathrm{d}x = x^2J_n'(x)^2\Big|_0^{\lambda R} + (x^2 - n^2)J_n(x)^2\Big|_0^{\lambda R} \ ,$$

woraus sich mit der Substitution $x \longmapsto \lambda x$

$$2\lambda^2\int\limits_0^{R} xJ_n(\lambda x)^2\mathrm{d}x = \lambda^2R^2J_n'(\lambda R)^2 + (\lambda^2R^2 - n^2)J_n(\lambda R)^2$$

ergibt. Setzen wir nun speziell

$$\lambda := \frac{\alpha_{n,k}}{R} \ ,$$

wobei $\alpha_{n,k}$ die k-te positive Nullstelle von $J_n(x)$ ist, so folgt

$$\int\limits_0^{R} xJ_n\left(\frac{\alpha_{n,k}}{R}x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{R}{2}J_n'(\alpha_{n,k})^2 \ .$$

Daraus folgt dann (31.107) mit der Rekursionsformel (31.96). – Für die Konvergenzaussagen verweisen wir, wie immer, auf die Literatur. □

F. Weitere Zylinderfunktionen

Wir berichten nun über BESSELfunktionen mit nicht-ganzzahligem Index sowie über weitere Lösungen der BESSELschen Differentialgleichung zu beliebigem Index $\nu \in \mathbb{C}$. Diese werden unter der Bezeichnung „Zylinderfunktionen" zusammengefasst, weil sie vorwiegend bei Problemen mit Zylindersymmetrie auftreten. Die im letzten Abschnitt aufgeführte Literatur kann auch hier zur Vertiefung herangezogen werden.

Zur Vorbereitung müssen wir unsere Kenntnisse über die EULERsche Gammafunktion (vgl. Abschn. 15D.) noch etwas erweitern:

Analytische Fortsetzung der Γ-Funktion

Wir wollen nun die Funktion $\Gamma(x)$, die bisher nur für positive reelle x definiert war, auf die ganze komplexe Ebene $\mathbb{C}$ fortsetzen. Zunächst ist klar, dass das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ existiert und eine komplex-analytische Funktion darstellt, die wir ebenfalls $\Gamma(z)$ nennen. Denn ist $z = x + \mathrm{i}y$, so ist

$$t^{z-1} = t^{x-1} t^{\mathrm{i}y} = t^{x-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y \ln t} ,$$

so dass

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \tag{31.110}$$

nach dem Satz aus Ergänzung 28.23 für $\operatorname{Re} z > 0$ existiert und holomorph ist. Die fundamentale Beziehung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{31.111}$$

bleibt dabei gültig, denn die Funktion $g(z) := \Gamma(z+1) - z\Gamma(z)$ ist in der rechten Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ holomorph und verschwindet auf der positiven reellen Achse, muss also nach Satz 17.9 identisch verschwinden. Nun setzen wir Γ Schritt für Schritt auf die Halbebenen $D_n := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ fort, indem wir setzen:

$$\Gamma(z) := \Gamma(z+1)/z . \tag{31.112}$$

Dies definiert zunächst auf D_1 eine meromorphe Funktion, die in $z = 0$ einen Pol erster Ordnung hat, ansonsten holomorph ist, und (31.111) auf ganz D_1 erfüllt. Wegen der Gültigkeit von (31.111) liefert (31.112) nun auch eine meromorphe Fortsetzung auf D_2, und diese hat Pole erster Ordnung in $z = 0$ und $z = -1$, ist ansonsten holomorph, und erfüllt (31.111). Indem man dieses Verfahren iteriert, erhält man schließlich per Induktion die gewünschte Fortsetzung von Γ auf ganz $\mathbb{C}$, und auch diese Funktion wird als die Eulersche Gammafunktion bezeichnet. Die Konstruktion zeigt, dass sie meromorph ist, Pole erster Ordnung in den Punkten $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$ und keine weiteren Singularitäten besitzt und dass sie (31.111) auf ihrem gesamten Definitionsbereich erfüllt.

Man kann aber auch geschlossene Formeln für sie angeben, z. B.

Satz 31.37. *Durch die Gleichung*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \tag{31.113}$$

wird eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion definiert, die außer den einfachen Polen $z = 0, -1, -2, \ldots$ holomorph ist und für positives reelles z mit der Euler*schen Gammafunktion übereinstimmt. $\Gamma(z)$ heißt die* komplexe Gammafunktion*, und für sie gilt die Funktionalgleichung (31.111). Schließlich hat $\Gamma(z)$ keine Nullstelle.*

Die logarithmische Ableitung der Γ-Funktion

Ist f eine differenzierbare Funktion, so ist $(\ln f)' = f'/f$ auf jeder offenen Teilmenge, auf der $\ln f$ definiert ist. Daher nennt man f'/f die *logarithmische Ableitung* von f. Speziell für die Gammafunktion definiert man:

Definitionen 31.38.

a. *Die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ holomorphe Funktion*

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

heißt die logarithmische Ableitung *der Γ-Funktion.*

b. *Die Zahl*

$$C := -\psi(1) = -\Gamma'(1) \approx 0.577\ldots$$

heißt Euler-Mascheroni*sche Konstante.*

Für die Funktion $\psi(z)$ gibt es diverse explizite Darstellungen durch Integrale oder Reihen. Für unsere Zwecke ist die folgende am günstigsten:

Satz 31.39. *Für die logarithmische Ableitung $\psi(z)$ der Γ-Funktion gilt die folgende Reihendarstellung*

$$\psi(z) = -C + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) ,$$

die für $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ gültig ist. Insbesondere ist $\psi(z)$ eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Besselfunktionen zweiter Art (Neumann-Funktionen)

Wir gehen aus von der Bessel schen Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 , \tag{31.114}$$

die wir nun für beliebiges $\nu \in \mathbb{C}$ betrachten. Wie bei Satz 31.30 findet man mit Hilfe der erweiterten Potenzreihenmethode als spezielle Lösung die Bessel*funktion 1. Art vom Index ν*

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu + 2k} , \tag{31.115}$$

die für $x \neq 0$ und beliebiges $\nu \in \mathbb{C}$ definiert ist, weil die Γ-Funktion keine Nullstellen besitzt. Man erkennt außerdem sofort, dass sich sämtliche Rekursionsformeln aus Satz 31.31 auf $J_\nu(x)$ übertragen lassen, weil bei der Herleitung an keiner Stelle benutzt wird, dass ν ganzzahlig ist.

Das Verhalten für $x \to 0+$ lässt erkennen, dass $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ nicht proportional sein können, wenn ν nicht ganzzahlig ist. Sie sind dann also linear unabhängig und bilden daher ein *Fundamentalsystem* für Gl. (31.114). Auch für $\nu = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist (31.115) sinnvoll und definiert eine Lösung $J_{-n}(x)$ von (31.114), wenn man $1/\Gamma(-m)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ als Null auffasst. Aber man kann leicht folgendes errechnen:

Satz 31.40. *Für ganzes $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$(-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x) \ , \tag{31.116}$$

d. h. $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ sind linear abhängig.

Man legt jedoch großen Wert darauf, eine ν-abhängige Funktionenschar zu haben, die für *jedes* $\nu \in \mathbb{C}$ ein Fundamentalsystem für die entsprechende Gleichung (31.114) darstellt. Daher definiert man

Definitionen 31.41.

a. *Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ heißt die Funktion*

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left\{ J_\nu(x) \cdot \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x) \right\} \tag{31.117}$$

BESSEL*funktion 2. Art vom Index ν oder* NEUMANN-*Funktion vom Index ν.*

b. *Für ganzzahligen Index $n \in \mathbb{Z}$ definiert man die* NEUMANN-*Funktion durch*

$$N_n(x) = \lim_{\nu \longrightarrow n} N_\nu(x) \ . \tag{31.118}$$

Die Existenz des Grenzwerts (31.118) kann mit den Regeln von DE L'HOSPITAL nachgewiesen werden. Nach längerer Rechnung, in die Satz 31.39 eingeht, ergibt sich dann auch eine Formel für den Wert dieses Limes, nämlich:

Satz 31.42. *Die* BESSEL*funktion 2. Art von ganzzahligem Index n hat die Form*

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) J_n(x) \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left\{ \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+n+1} \frac{1}{l} \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \ , \end{aligned} \tag{31.119}$$

wobei C die EULER-MASCHERONI*sche Konstante bezeichnet.*

Tatsächlich bildet nun $\{J_\nu, N_\nu\}$ für jedes $\nu \in \mathbb{C}$ ein Fundamentalsystem für die BESSELsche Differentialgleichung vom Index ν. Die Zylinderfunktionen sind damit genau die Linearkombinationen von J_ν und N_ν für festes, aber beliebiges ν.

Setzt man die Rekursionsformeln für $J_\nu(x)$ aus Satz 31.31 in die Definitionsgleichung (31.117) in Definition 31.41 ein, so bekommt man Rekursionsformeln für die NEUMANN-Funktionen:

Satz 31.43. *Für die* NEUMANN-*Funktionen gelten die Rekursionsformeln:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu N_\nu(x)) = x^\nu N_{\nu-1}(x) \,, \tag{31.120}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu} N_\nu(x)) = -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x) \,, \tag{31.121}$$

$$N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} N_\nu(x) \,, \tag{31.122}$$

$$N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) = 2N'_\nu(x) \,. \tag{31.123}$$

Bemerkung: Die Formeln (31.115), (31.117) und (31.119) können offensichtlich auch auf *komplexe* Argumente z ausgedehnt werden. Wegen des Auftretens von Logarithmus und allgemeiner Potenz muss jedoch als Definitionsbereich eine *geschlitzte* Ebene festgelegt werden. Wir wählen hier und im folgenden dazu die negative reelle Achse als Schlitz, also den Definitionsbereich $D = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ für J_ν und N_ν und damit für alle Zylinderfunktionen. Die Zylinderfunktionen sind dann holomorph auf D, und für festes $z \in D$ sind $J_\nu(z)$ und $N_\nu(z)$ auch *holomorphe* Funktionen der komplexen Variablen ν. Die Rekursionsformeln aus den Sätzen 31.31 und 31.43 gelten wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung auch für jedes $z \in D$.

BESSELfunktionen 3. Art (HANKELfunktionen)

Wie wir gesehen haben, bildet $\{J_\nu,\ N_\nu\}$ für jedes $\nu \in \mathbb{C}$ ein Fundamentalsystem für die BESSELsche Differentialgleichung. Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig durch Bildung passender Linearkombinationen zu einem anderen Fundamentalsystem überzugehen.

Definition 31.44. *Die für alle* $\nu \in \mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ *definierten Funktionen*

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + \mathrm{i}N_\nu(z) \,, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - \mathrm{i}N_\nu(z) \end{aligned} \tag{31.124}$$

heißen BESSEL*funktionen 3. Art oder* HANKEL*funktionen vom Index* ν*.*

Diese Funktionen bilden offensichtlich ein Fundamentalsystem der BESSELschen Differentialgleichung, das jedoch auch für reelles x komplex ist. Aus den Rekursionsformeln für $J_\nu(x)$ in 31.31 und $N_\nu(x)$ in 31.43 ergeben sich mit (31.124) direkt die entsprechenden Rekursionsformeln für die HANKELfunktionen:

Satz 31.45. *Für die* Hankel*funktionen* $H_\nu^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$, *gelten die folgenden Rekursionsformeln*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu H_\nu^{(j)}(z)) = z^\nu H_{\nu-1}^{(j)}(z)\,, \tag{31.125}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-\nu} H_\nu^{(j)}(z)) = -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(j)}(z)\,, \tag{31.126}$$

$$H_{\nu-1}^{(j)}(z) + H_{\nu+1}^{(j)}(z) = \frac{2\nu}{z} H_\nu^{(j)}(z)\,, \tag{31.127}$$

$$H_{\nu-1}^{(j)}(z) - H_{\nu+1}^{(j)}(z) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H_\nu^{(j)}(z)\,. \tag{31.128}$$

Mittels (31.117) errechnet man:

Satz 31.46. *Zwischen den* Bessel*funktionen erster und dritter Art besteht folgender Zusammenhang:*

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi\mathrm{i}} J_\nu(z)}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}\,, \tag{31.129}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu\pi\mathrm{i}} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}\,, \tag{31.130}$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi\mathrm{i}} H_\nu^{(1)}(z)\,, \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}} H_\nu^{(2)}(z)\,. \tag{31.131}$$

Modifizierte Besselfunktionen

In den Anwendungen treten häufig Funktionen auf, die eng mit den Besselfunktionen zusammen hängen. Diese wollen wir kurz betrachten.

Definitionen 31.47.

a. *Die für alle* $\nu \in \mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ *definierte Funktion*

$$I_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{31.132}$$

heißt modifizierte Besselfunktion erster Art *vom Index* ν.

b. *Die für alle* $\nu \in \mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ *definierte Funktion*

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}\,, \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,, \tag{31.133}$$

$$K_n(z) := \lim_{\nu \longrightarrow n} K_\nu(z)\,, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{31.134}$$

heißt modifizierte Besselfunktion zweiter Art *vom Index* ν *oder* MacDonaldsche Funktion.

Vergleicht man die Definitionsgleichung (31.132) für $I_\nu(z)$ mit der (auf komplexe Argumente ausgedehnten) Definitionsgleichung (31.115) für die Besselfunktionen 1. Art, so sieht man, dass der Unterschied gerade in dem alternierenden Vorzeichen besteht. Daher ergibt sich nach kurzer Rechnung:

Satz 31.48. *Zwischen den* BESSEL*funktionen und den modifizierten* BESSEL*funktionen bestehen folgende Transformationsgleichungen*

$$J_\nu(\mathrm{i}z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2} I_\nu(z)\,, \quad I_\nu(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2} J_\nu(-\mathrm{i}z)\,, \tag{31.135}$$

$$H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}z) = \frac{2}{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2} K_\nu(z)\,, \tag{31.136}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}z) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2} H_\nu^{(2)}(-\mathrm{i}z)\,. \tag{31.137}$$

Es ist klar, dass die Rekursionsformeln in den Sätzen 31.31 und 31.45 zusammen mit den obigen Transformationsgleichungen entsprechende Rekursionsformeln für die modifizierten BESSELfunktionen liefern, die wir jedoch nicht explizit angeben wollen.

Die durch (31.115) gegebene BESSELfunktion $J_\nu(z)$ ist bekanntlich Lösung der BESSELschen Differentialgleichung

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0\,. \tag{31.138}$$

Ersetzen wir in dieser Differentialgleichung gemäß (31.135) z durch iz, setzen also

$$u(z) := y(\mathrm{i}z)\,,$$

so bekommen wir sofort

Satz 31.49. *Die modifizierten* BESSEL*funktionen sind spezielle Lösungen der folgenden Differentialgleichung*

$$z^2 u'' + z u' - (z^2 + \nu^2) u = 0\,, \tag{31.139}$$

welche modifizierte BESSELsche Differentialgleichung *heißt.*

BESSELfunktionen mit halbganzem Index

Eine spezielle Klasse von BESSELfunktionen lässt sich durch elementare Funktionen beschreiben:

Satz 31.50. *Für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} x^{n+1/2} \left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\sin x}{x}\,. \tag{31.140}$$

Insbesondere gilt:

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x\,, \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x\,, \tag{31.141}$$

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)\,. \tag{31.142}$$

Man beweist das für $J_{1/2}$ und $J_{-1/2}$ durch Umrechnung der Potenzreihen und folgert (31.140) daraus mittels Rekursionsformeln.

Es ist klar, dass man aus den jeweiligen Definitionsgleichungen entsprechende Formeln für die übrigen BESSELfunktionen bekommt. Wir geben einige an. Alle anderen bekommt man dann mit Hilfe der Rekursionsformeln:

Satz 31.51.

$$\begin{aligned}
N_{1/2}(x) &= -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x \,, \\
H^{(1)}_{1/2}(x) &= -\mathrm{i}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \,, \quad H^{(2)}_{1/2}(x) = \mathrm{i}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \,, \\
I_{1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sinh x \,, \quad I_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cosh x \,, \\
K_{1/2}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-x} \,.
\end{aligned}$$

G. Anwendungen auf die Anfangs-Randwert-Probleme

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angekündigt, wollen wir nun noch zeigen, wie die berichteten Resultate über Kugel- und BESSELfunktionen genutzt werden können, um die Separationsansätze aus Kap. 30 zum vollen Erfolg zu führen. HERMITE- und LAGUERRE-Polynome spielen, wie schon erwähnt, für die SCHRÖDINGERgleichung eine ähnliche Rolle wie Kugel- und BESSELfunktionen für die Wellengleichung oder die LAPLACEgleichung. Andere spezielle Funktionen können in ähnlicher Weise benutzt werden, um Randwertprobleme oder Rand-Anfangswert-Probleme für andere wichtige spezielle Gleichungen zu lösen.

Anwendung auf Potentialprobleme

In 30.5 haben wir gezeigt, dass die kugelsymmetrische, φ-unabhängige Potentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot u_\theta) = 0 \tag{31.143}$$

als Lösungen die Funktionen

$$u_n(r,\theta) = r^n P_n(\cos\theta)\,, \quad 0 \le r < R\,, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{31.144}$$

hat. Um das Potentialproblem in 30.4 a. zu lösen, muss noch die Randbedingung

$$u(R,\theta) = f(\theta)\,, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{31.145}$$

erfüllt werden. Dazu machen wir den Ansatz

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\theta) \ , \tag{31.146}$$

wobei die Koeffizienten c_n so zu bestimmen sind, dass die Randbedingung (31.145) erfüllt wird. Einsetzen von (31.146) in (31.145) ergibt

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n P_n(\cos\theta) \ . \tag{31.147}$$

Dies ist eine Fourier-Legendre-Entwicklung der Funktion $f(\theta)$, auf die wir Satz 31.14 anwenden können. Beachten wir, dass die Reihe (31.146) zweimal gliedweise differenzierbar sein muss, damit (31.143) erfüllt wird, so haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 31.52. *Die Randwertaufgabe (31.143), (31.145) hat eine eindeutige Lösung der Form*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{31.146}$$

in $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, *mit*

$$c_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^{1} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \ , \tag{31.148}$$

falls $f \in C^2([0,\pi])$ *und*

$$f(0) = f(\pi)\,, \quad f'(0) = f'(\pi)\,, \quad f''(0) = f''(\pi) \tag{31.149}$$

vorausgesetzt wird.

Für die allgemeine kugelsymmetrische Potentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \cdot u_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} = 0 \tag{31.150}$$

haben wir in Satz 30.6b. gezeigt, dass diese die Lösungen

$$u_{nm}(r,\varphi,\theta) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{31.151}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots, -n \le m \le n$, besitzt. Um die zugehörige Randbedingung

$$u(R,\varphi,\theta) = f(\varphi,\theta) \tag{31.152}$$

zu erfüllen, könnten wir auch hier den Ansatz

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} c_{nm} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} P_n^m(\cos\theta) \tag{31.153}$$

machen und die Koeffizienten c_{nm} mit (31.152) bestimmen. Es ist jedoch praktischer, mit dem in Definition 31.16 eingeführten Orthonormalsystem der *Kugelflächenfunktionen* Y_n^m zu arbeiten. Wir können dann nach Satz 30.6 sagen, dass die kugelsymmetrische Potentialgleichung (31.150) die Lösungen

$$u_{nm}(r,\varphi,\theta) = r^n Y_n^m(\varphi,\theta) \tag{31.154}$$

hat. Zur Erfüllung der Randbedingungen (31.152) machen wir dann den Ansatz

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_n^m r^n Y_n^m(\varphi,\theta)\ , \tag{31.155}$$

woraus mit (31.152) die Bedingung

$$u(R,\varphi,\theta) = f(\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_n^m R^n Y_n^m(\varphi,\theta) \tag{31.156}$$

folgt. Anwendung von Satz 31.17 liefert dann:

Satz 31.53. *Die Randwertaufgabe (31.150), (31.152) hat eine eindeutige Lösung der Form*

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\sum_{m=-n}^{n} \gamma_n^m Y_n^m(\varphi,\theta) \right) \tag{31.157}$$

für $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, *und zwar mit*

$$\gamma_n^m = \frac{1}{R^n} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi,\theta) \overline{Y_n^m(\varphi,\theta)} \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta\ , \tag{31.158}$$

falls $f \in C^3(S)$ *gegeben ist.*

Anwendung auf die kreisförmige Membran

Wir kommen nun auf das Problem der kreisförmigen Membran zurück, also auf die Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right) \tag{31.159}$$

für $0 \le r < R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, mit der Randbedingung

$$u(R,\varphi,t) = 0\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad t \ge 0 \tag{31.160}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(r,\varphi,0) = f_0(r,\varphi)\,, \quad u_t(r,\varphi,0) = f_1(r,\varphi) \tag{31.161}$$

für $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Mit dem Separationsansatz

$$u(r,\varphi,t) = g(t)w(r)q(\varphi) \tag{31.162}$$

wurde (31.159) unter Berücksichtigung von (31.160) auf die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zurück geführt:

$$g''(t) + (\nu c)^2 g(t) = 0\ , \tag{31.163}$$

$$q''(\varphi) + m^2 q(\varphi) = 0\ , \tag{31.164}$$

$$r^2 w''(r) + r w'(r) + (\nu^2 r^2 - m^2) w(r) = 0\ , \tag{31.165}$$

wobei $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $\nu \in \mathbb{R}$ noch beliebig war.

Jedoch hatten wir schon gezeigt, dass $w\left(\frac{r}{\nu}\right)$ eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung vom Index m sein muss, d. h. die Lösung der Differentialgleichung (31.165) hat die spezielle Gestalt

$$w(r) = J_m(\nu r)\ . \tag{31.166}$$

Die Randbedingung (31.160) ergibt für die Lösungen $w(r)$ der Radialgleichung (31.165) die Forderung

$$w(R) = J_m(\nu R) = 0\ . \tag{31.167}$$

Nach Satz 31.36a. kann diese Gleichung nur für

$$\nu = \nu_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}\ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{31.168}$$

erfüllt werden, wobei α_{mn} die n-te positive Nullstelle von J_m ist. Gehen wir mit diesen ν-Werten in die t-abhängige Differentialgleichung (31.163), so kommen wir mit dem Ansatz (31.162) zu folgendem Zwischenergebnis:

Lemma 31.54. *Die Funktionen*

$$u_{mn}(r,\varphi,t) := (a_{mn}\cos\lambda_{mn}t + b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} r\right) \tag{31.169}$$

sind Lösungen der 2-dimensionalen Wellengleichung (31.159) in Polarkoordinaten und erfüllen die Randbedingung

$$u_{mn}(R,\varphi,t) = 0\ , \quad t \geq 0\ , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$$

Dabei ist

$$\lambda_{mn} = c\frac{\alpha_{mn}}{R}\ , \tag{31.170}$$

und die a_{mn}, b_{mn} sind beliebige Konstanten.

Die λ_{mn} bezeichnet man als die *Eigenfrequenzen* und die $u_{mn}(r,\varphi,t)$ als die *Eigenfunktionen* der Membran.

Das weitere Vorgehen ist dann klar. Um die Anfangsbedingungen (31.161) zu erfüllen, machen wir den Reihenansatz

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(r,\varphi,t) \tag{31.171}$$

und bekommen dann aus (31.161) mit (31.169) folgende Gleichungen:

$$f_0(r,\varphi)=\sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}a_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)\ , \tag{31.172}$$

$$f_1(r,\varphi)=\sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}\lambda_{mn}b_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)\ . \tag{31.173}$$

Dies sind Kombinationen aus trigonometrischen Fourierentwicklungen und Fourier-Bessel-Entwicklungen. Wenden wir Satz 29.15 und Satz 31.36 auf diese Reihen an, so erhalten wir schließlich folgendes Gesamtergebnis:

Satz 31.55. *Die Anfangs-Randwertaufgabe*

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right) \tag{31.159}$$

für $0\le r<R$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $t>0$,

$$u(R,\varphi,t)=0 \quad \textit{für} \quad 0\le\varphi\le 2\pi\,, \quad t\ge 0\,, \tag{31.160}$$

$$u(r,\varphi,0)=f_0(r,\varphi)\,, \quad u_t(r,\varphi,0)=f_1(r,\varphi) \tag{31.161}$$

für $0\le r\le R$, $0\le\varphi\le 2\pi$, *der kreisförmigen schwingenden Membran hat eine eindeutig bestimmte Lösung der Form*

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)\ , \tag{31.171}$$

wenn die Koeffizienten gemäß

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi R^2J_{m+1}(\alpha_{mn})}\int_0^{2\pi}\int_0^R f_0(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\ ,$$

$$b_{mn}=\frac{1}{c\pi RJ_{m+1}(\alpha_{mn})}\int_0^{2\pi}\int_0^R f_1(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

bestimmt werden, wobei

$$\lambda_{mn} = \frac{c\alpha_{mn}}{R}$$

und α_{mn} *die* n*-te positive Nullstelle von* J_m *ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Anfangsfunktionen folgende Bedingungen erfüllen:*

$$f_0 \in C^3 \quad \textit{und} \quad f_1 \in C^2,$$

$$f_0(R,\varphi) = f_1(R,\varphi) = 0\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$f_0(r,0) = f_0(r,2\pi)\,, \quad f_1(r,0) = f_1(r,2\pi),$$

$$f_{0,r}(r,0) = f_{0,r}(r,2\pi),$$

$$f_{0,\varphi}(r,0) = f_{0,\varphi}(r,2\pi).$$

Ergänzungen zu §31

Die Beweise der fundamentalen Sätze über reguläre – und erst recht über singuläre – STURM-LIOUVILLE-Probleme erfordern die Entwicklung eigener Methoden, was hier definitiv zu weit führen würde. Hingegen können gewisse Teilresultate verhältnismäßig einfach bewiesen werden, und diese Tatsache wollen wir ausnutzen, um wenigstens einen gewissen Einblick zu geben. Zunächst beweisen wir, dass die Eigenwerte eines regulären STURM-LIOUVILLE-Problems sich nicht im Endlichen häufen können, und dann erläutern wir für den Fall der DIRICHLETschen Randbedingungen die Verbindungen zur *Variationsrechnung*, wodurch man wesentlich tiefere Einsicht in die Natur des Problems und insbesondere in die physikalische Bedeutung der Eigenwerte gewinnt. Schließlich werden wir die wenigen Bemerkungen über singuläre Probleme aus 31.6 noch etwas ergänzen und dabei ein explizites Beispiel diskutieren, von dem wir hoffen, dass es die notgedrungen vagen Andeutungen durch greifbare Vorstellungen erhellt.

31.56 Die Eigenwerte eines regulären STURM-LIOUVILLE-Problems können sich nicht häufen. Angenommen, die Eigenwerte eines regulären STURM-LIOUVILLE-Problems (31.3), (31.4) hätten einen Häufungspunkt $\lambda^* \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass es eine unendliche Folge (λ_m) von *verschiedenen* Eigenwerten gibt, die gegen λ^* konvergiert. Wir normieren die entsprechenden Eigenfunktionen u_m so, dass

$$|\xi_m|^2 + |\eta_m|^2 = 1$$

ist für $\xi_m := u_m(a)$, $\eta_m := u_m'(a)$. Dies ist auf jeden Fall möglich, denn wenn $u_m(a) = u_m'(a) = 0$ wäre, so müsste nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF $u_m \equiv 0$ sein. (Man beachte, dass die Sätze über Anfangswertaufgaben aus

Kap. 20 hier anwendbar sind, weil die Sturm-Liouville-Gleichung (31.3) zu einer expliziten linearen Differentialgleichung 2. Ordnung äquivalent ist, wie wir im Beweis von Thm. 31.3a. gesehen haben.) Die Menge

$$K := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1\}$$

ist jedoch beschränkt und abgeschlossen, somit also *kompakt* (vgl. Thm. 13.15). Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir daher annehmen, dass ein Punkt $(\xi^*, \eta^*) \in K$ existiert mit

$$\xi^* = \lim_{m \to \infty} \xi_m \,, \quad \eta^* = \lim_{m \to \infty} \eta_m \,.$$

Die Anfangswertaufgabe

$$(p(x)u')' + q(x)u = -\lambda^* k(x)u \,, \quad u(a) = \xi^* \,, \quad u'(a) = \eta^*$$

hat nun eine eindeutige Lösung u, und wegen $|\xi^*|^2 + |\eta^*|^2 = 1$ ist $u \not\equiv 0$. Die Sätze über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern (vgl. Theoreme 20.9 und 20.10) sagen uns nun, dass die u_m *gleichmäßig* auf I gegen u konvergieren. Daraus folgt

$$\|u - u_m\|_k^2 = \int_a^b k(x)|u(x) - u_m(x)|^2 \mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

für $m \to \infty$, also nach der Schwarzschen Ungleichung (Thm. 6.11) auch

$$|\langle u - u_m \mid u - u_{m+1}\rangle_k| \le \|u - u_m\|_k \cdot \|u - u_{m+1}\|_k \longrightarrow 0$$

für $m \to \infty$. Da aber die Eigenwerte λ_m alle voneinander verschieden sind, sind die u_m zueinander k-orthogonal (Thm. 31.3c.), und damit ergibt sich

$$\langle u - u_m \mid u - u_{m+1}\rangle_k = \|u\|_k^2 - \langle u_m \mid u\rangle_k - \langle u \mid u_{m+1}\rangle_k + \underbrace{\langle u_m \mid u_{m+1}\rangle_k}_{=0} \,,$$

und das konvergiert für $m \to \infty$ gegen $-\|u\|_k^2 < 0$. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. □

Kommentar: Wenn man weiß, dass das Problem unendlich viele Eigenwerte besitzt, so zeigt unsere Behauptung, dass die Menge der Eigenwerte *unbeschränkt* sein muss, denn anderenfalls würde der Satz von Bolzano-Weierstrass die Existenz eines Häufungspunktes von Eigenwerten nach sich ziehen. Wenn man weiter weiß, dass die Eigenwerte eine untere Schranke besitzen (was wir für Dirichletsche Randbedingungen in der nächsten Ergänzung beweisen werden), so ergibt sich nun die Aussage, dass sie eine aufsteigende, gegen Unendlich divergierende Folge bilden.

31.57 Variationeller Charakter des Dirichlet-Problems. Sturm-Liouville-Probleme können als Variationsprobleme aufgefasst werden, und dies bietet nicht nur die Möglichkeit zu eleganten Beweisen der Theoreme 31.4 und 31.5, sondern liefert auch zusätzliche qualitative Informationen über die Eigenwerte. Allerdings passt nur das Dirichlet-Problem genau in den bescheidenen Rahmen, in dem wir die Variationsrechnung in Kap. 23 entwickelt haben, aber wegen seiner Wichtigkeit verdient dies durchaus eine genauere Erläuterung.

Wir schreiben unser Dirichlet-Problem in der Form

$$L[u] := -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \, , \tag{31.174}$$

$$u(a) \; = \; u(b) = 0 \, , \tag{31.175}$$

wobei $p, q, k : I := [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die in Def. 31.1 a. genannten Voraussetzungen erfüllen. (Hier ist q aus (31.3) durch $-q$ ersetzt, was für die Theorie absolut unerheblich ist, die Formeln aber eingängiger macht.) Der Definitionsbereich des entsprechenden Operators L ist also

$$D(L) := \{u \in C^2(I) \mid u(a) = u(b) = 0\} \, .$$

Für die Variationsrechnung benötigt man außerdem den linearen Teilraum

$$V(L) := \{u \in C^1(I) \mid u(a) = u(b) = 0\} \, , \tag{31.176}$$

wie wir noch sehen werden.

Setzen wir zunächst den Entwicklungssatz als bekannt voraus, so können wir klären, was die Eigenwerte mit Variationsrechnung zu tun haben. Dazu führen wir nun eine äußerst wichtige Größe ein:

Definition. *Für $u \in C^1(I)$ heißt*

$$E(u) = \int_a^b \left[p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\right] \mathrm{d}x \tag{31.177}$$

das Energieintegral[1] *von L, und*

$$E(u, v) = \int_a^b [p(x)\bar{u}'(x)v'(x) + q(x)\bar{u}(x)v(x)] \, \mathrm{d}x \tag{31.178}$$

heißt das polarisierte Energieintegral *von L, wobei $u, v \in C^1(I)$.*

[1] Diese Bezeichnung sollte man nicht zu wörtlich nehmen. Bei einer quantenmechanischen Interpretation könnte man $E(u)$ zwar als Energie deuten, doch ist das etwas weit hergeholt.

Zunächst halten wir fest:

Satz 1.

a. *Für* $u \in D(L)$ *und* $v \in V(L)$ *ist*

$$\langle L[u] \mid v \rangle = E(u, v) \; . \tag{31.179}$$

b. *Ist* λ *ein Eigenwert mit zugehöriger Eigenfunktion* $u(x)$ *von* L*, so ist*

$$E(u, \varphi) = \lambda \langle u \mid \varphi \rangle_k \quad \text{für} \quad \varphi \in V(L) \; . \tag{31.180}$$

c. Insbesondere gilt für die Eigenwerte λ_m und zugehörigen Eigenfunktionen $u_m(x)$ von L:

$$E(u_m, u_n) = \lambda_m \|u_m\|_k^2 \delta_{mn} \; , \quad m, n \geq 0 \; . \tag{31.181}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Sturm-Liouville-Gleichung

$$-(p\bar{u}')' + q\bar{u} = \lambda k \bar{u}$$

mit $v \in V(L)$ und integrieren, so folgt

$$\begin{aligned} \lambda \langle u \mid v \rangle_k &= \langle Lu \mid v \rangle \\ &= \int_a^b (p\bar{u}'v' + q\bar{u}v) \mathrm{d}x - \left[p(x)\bar{u}'(x)v(x) \right]_a^b \\ &= E(u, v) \end{aligned}$$

Daraus folgt a. und als Spezialfälle dann auch b. und c. □

Nun ist es nicht schwer, für E und die Eigenwerte untere Schranken zu finden:

Satz 2. *Mit den Größen*

$$q_0 := \min_{x \in I} q(x) \; , \quad k_0 := \min_{x \in I} k(x) \; , \quad k_1 := \max_{x \in I} k(x)$$

haben wir:

a. *Für alle* $\varphi \in C^1(I)$ *ist*

$$E(\varphi) \geq q_0 \|\varphi\|^2 \; .$$

b. *Für jeden Eigenwert* λ *des Problems (31.174), (31.175) gilt*

$$\lambda \geq \begin{cases} q_0/k_1 \; , & \text{falls} \quad q_0 \geq 0 \; , \\ q_0/k_0 \; , & \text{falls} \quad q_0 < 0 \; . \end{cases}$$

Beweis. Teil a. erhält man sofort durch Integrieren der trivialen punktweisen Ungleichung

$$p(x)|\varphi'(x)|^2 + q(x)|\varphi(x)|^2 \geq q_0|\varphi(x)|^2 \; .$$

Setzt man nun für φ eine Eigenfunktion u zum Eigenwert λ ein, so ergibt sich mit Satz 1:

$$\lambda\|u\|_k^2 \geq q_0\|u\|^2 \; .$$

Wegen $k_0\|u\|^2 \leq \|u\|_k^2 \leq k_1\|u\|^2$ folgt hieraus Behauptung b. □

Bisher haben wir den Entwicklungssatz noch gar nicht benutzt. Für das jetzt folgende Hauptresultat benötigen wir ihn jedoch.

Theorem. *Es sei* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ *die aufsteigende Folge der Eigenwerte des* Dirichlet-*Problems (31.174), (31.175) und* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *die Folge der entsprechenden Eigenfunktionen, normiert durch*

$$\|u_n\|_k = 1 \; .$$

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ *setzen wir außerdem*

$$V_n(L) := \{\varphi \in V(L) \mid \langle u_j \mid \varphi\rangle_k = 0 \quad \textit{für} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\} \; .$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt dann*

$$\lambda_n = \min_{\substack{\varphi \in V_n(L) \\ \|\varphi\|_k = 1}} E(\varphi) \tag{31.182}$$

und insbesondere

$$\lambda_0 = \min_{\substack{\varphi \in V(L) \\ \|\varphi\|_k = 1}} E(\varphi) \; . \tag{31.183}$$

Beweis. Wir betrachten ein festes $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Eigenfunktionen u_j ein k-Orthonormalsystem bilden, ist $u_n \in V_n(L)$, und mit Satz 1 ist klar, dass $E(u_n) = \lambda_n$ ist. Also brauchen wir nur noch zu zeigen, dass

$$E(\varphi) \geq \lambda_n\|\varphi\|_k^2 \quad \forall \varphi \in V_n(L) \tag{$*$}$$

gilt. Betrachten wir also ein beliebiges $\varphi \in V_n(L)$. Es seien $c_j = \langle u_j \mid \varphi\rangle_k$, $j \geq 0$ seine Fourierkoeffizienten. Nach Definition des Raums $V_n(L)$ haben wir dann $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, und die Fourierentwicklung von φ lautet

$$\varphi = \sum_{j=n}^{\infty} c_j u_j \; .$$

Entsprechend lautet die Parsevalsche Gleichung:

$$\|\varphi\|_k^2 = \sum_{j=n}^{\infty} |c_j|^2 \; . \tag{31.184}$$

Nun gilt allgemein

$$E(v+w) = E(v) + E(v,w) + E(w,v) + E(w) = E(v) + 2\mathrm{Re}E(v,w) + E(w) ,$$

wie man aus der Definition des (polarisierten) Energieintegrals sofort abliest. Wir verwenden dies für

$$v = v_N := \sum_{j=n}^{N} c_j u_j , \quad w = w_N := \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j u_j ,$$

wobei $N > n$ beliebig ist. Man beachte, dass $v_N \in D(L)$ ist. Die Definition von w_N zeigt, dass $w_N \in V_{N+1}(L)$ ist, und damit finden wir unter Verwendung von Satz 1 und der Linearität des Operators L

$$E(v_N, w_N)\langle L[v_N] \mid w_N\rangle = \sum_{j=n}^{N} c_j \lambda_j \langle u_j \mid w_N\rangle = 0 .$$

Wir haben offenbar $v_N + w_N = \varphi$, also

$$E(\varphi) = E(v_N) + E(w_N) .$$

Beide Terme können wir nach unten abschätzen: Da die Folge der Eigenwerte aufsteigend ist, bekommen wir mit Satz 1

$$\begin{aligned} E(v_N) = \langle L[v_N] \mid v_N\rangle &= \left\langle \sum_{j=n}^{N} c_j \lambda_j u_j \,\middle|\, \sum_{m=n}^{N} c_m u_m \right\rangle \\ &= \sum_{j=n}^{N} \lambda_j |c_j|^2 \geq \lambda_n \sum_{j=n}^{N} |c_j|^2 . \end{aligned}$$

Nach Satz 2 ist außerdem $E(w_N) \geq q_0 \|w_N\|_k^2$, also insgesamt

$$E(\varphi) \geq \lambda_n \sum_{j=n}^{N} |c_j|^2 + q_0 \|w_N\|_k^2 .$$

Wegen der Konvergenz der Fourierreihe ist $\lim_{N\to\infty} \|w_N\|_k = 0$. Also folgt $(*)$, wenn wir noch die Parsevalsche Gleichung (31.184) beachten. □

Damit können wir nun die Eigenfunktionen als Lösungen entsprechender Variationsprobleme mit isoperimetrischen Nebenbedingungen gewinnen. Betrachten wir nämlich das Funktional

$$J(\varphi) := \int_a^b \left(\frac{p(x)}{2} |\varphi'(x)|^2 + \frac{q(x)}{2} |\varphi(x)|^2 \right) \mathrm{d}x , \qquad (31.185)$$

so ist die zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung (23.36), wie man sofort nachrechnet, nichts anderes als die Gleichung

$$-L[y] = 0 \,.$$

Stellt man hier $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ als Randbedingung, so hat man den in (31.176) definierten Raum $V(L)$ sowohl als Klasse der zulässigen Vergleichsfunktionen als auch als Klasse der zulässigen Variationen. Das entsprechende Variationsproblem ist aber uninteressant, denn im Falle $q_0 \geq 0$ hat es die triviale Lösung $y \equiv 0$, und im Fall $q_0 < 0$ ist das Funktional J sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt, so dass es keinen Sinn hat, nach Extrema zu suchen. Stellen wir jedoch die isoperimetrische Nebenbedingung

$$K[\varphi] := \int\limits_a^b k(x)|\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1 \,, \tag{31.186}$$

so haben wir nach Satz 23.18 die Differentialgleichung

$$-L[y] - 2\mu k(x) y = 0$$

als notwendige Bedingung für ein Extremum. Dabei ist $\mu \in \mathbb{R}$ der entsprechende LAGRANGE-Multiplikator. Damit ist u Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = -2\mu$, und für den Wert des Funktionals ergibt sich

$$J(u) = \frac{1}{2} E(u) = \frac{1}{2} \langle L[u] \mid u \rangle = -\mu \|u\|_k^2 = -\mu \,.$$

Wenn J bei u sein absolutes Minimum unter der Nebenbedingung (31.185) annimmt, so muss dieser Eigenwert gerade der kleinste Eigenwert λ_0 sein, wie das Theorem zeigt. Die Existenz eines solchen Minimierers u kann tatsächlich bewiesen werden, aber hierzu sind höhere Mittel aus der Funktionalanalysis denn doch unumgänglich.

Auch die Eigenfunktionen zu höheren Eigenwerten lassen sich als Lösungen von Variationsproblemen mit Nebenbedingungen bestimmen. Sind die normierten Eigenfunktionen $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ zu den Eigenwerten $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1}$ bekannt, so betrachten wir das Problem, das Funktional J unter der Nebenbedingung (31.186) sowie den zusätzlichen Nebenbedingungen

$$K_j[\varphi] := \int\limits_a^b k(x)\overline{u_{j-1}(x)}\varphi(x) \mathrm{d}x = 0 \,, \quad j = 1, \ldots, n \tag{31.187}$$

zu minimieren. Wieder kann man beweisen, dass dieses Problem eine Lösung $u_n \in D(L)$ besitzt. Bei u_n sind die Nebenbedingungen unabhängig, weil $u_0, u_1, \ldots, u_n$ auf Grund der gestellten Nebenbedingungen k-orthogonal sind.

Also haben wir LAGRANGE-Multiplikatoren $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$, für die gilt:

$$L[u_n] + 2\mu k u_n + \mu_1 k u_0 + \cdots + \mu_n k u_{n-1} = 0 \,.$$

Bildet man hier für $j \leq n$ das Skalarprodukt mit u_{j-1}, so findet man unter Beachtung von Lemma 31.2b.

$$-\mu_j = \langle L[u_n] \mid u_{j-1} \rangle = \langle u_n \mid L[u_{j-1}] \rangle = \lambda_{j-1} \langle u_n \mid u_{j-1} \rangle = 0 \,,$$

also $\mu_j = 0$. Es folgt $L[u_n] = -2\mu k u_n$, und dieselbe, auf dem Theorem fußende Argumentation wie vorher zeigt, dass -2μ der Eigenwert λ_n ist.

So fortfahrend, kann man die gesamte Folge der Eigenwerte und Eigenfunktionen gewinnen, und nach der vorigen Ergänzung wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ ist. Dabei gilt jetzt (31.182) nach Konstruktion. Wäre das so entstandene k-orthogonale System $(u_n)_{n\geq 0}$ nun nicht vollständig, so könnte man – ähnlich wie beim Lösen der Variationsprobleme – einen Vektor $0 \neq u_\infty \in V(L)$ finden, der zu allen u_n k-orthogonal ist. Für diesen wäre wegen (31.182) dann aber

$$E(u_\infty) \geq \lambda_n \quad \forall n \,,$$

was absurd ist. Diesen Gedankengang kann man wirklich zu einem Beweis des Entwicklungssatzes ausbauen.

Bemerkungen: (i) Man kann (31.182) auch ohne die Nebenbedingung $\|\varphi\|_k = 1$ formulieren. Dazu verwendet man den sog. RAYLEIGH-*Quotienten*

$$R(\varphi) := \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_k^2} \,. \tag{31.188}$$

Wegen der Homogenität $E(\beta\varphi) = \beta^2 E(\varphi) (\beta > 0)$ ist klar, dass (31.182) äquivalent ist zu

$$\lambda_n = \min_{\substack{\varphi \in V_n(L) \\ \varphi \neq 0}} R(\varphi) \,. \tag{31.189}$$

(ii) Das obige Theorem und sein Beweis können so modifiziert werden, dass die folgende *variationelle Charakterisierung der Eigenwerte* entsteht:

$$\lambda_n = \sup_{v_1,\ldots,v_n \in V(L)} \left(\inf_{\substack{\varphi \in V(L;v_1,\ldots,v_n) \\ \varphi \neq 0}} R(\varphi) \right) \,, \tag{31.190}$$

wobei

$$\begin{aligned} V(L; v_1, \ldots, v_n) &:= \mathrm{LH}(v_1, \ldots, v_n)^\perp \cap V(L) \\ &= \{\varphi \in V(L) \mid \langle v_j \mid \varphi \rangle = 0 \,, \quad j = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

gesetzt wurde. (Für $n = 0$ ist das wieder (31.183).) Diese Beschreibung der Eigenwerte hat den Vorteil, dass keine festen Funktionen darin vorkommen, die vom jeweiligen Problem abhängen. Dadurch ermöglicht sie den Vergleich der Eigenwerte verschiedener Probleme und somit die Diskussion der Abhängigkeit der Eigenwerte von den Problemdaten. Formel (31.190) hat einen sehr grundsätzlichen Charakter und gilt z. B. auch für mehrdimensionale Rand-Eigenwert-Probleme. Daher ermöglicht sie es, auch in sehr komplizierten Situationen, wo an eine explizite Berechnung der Eigenwerte nicht mehr zu denken ist, noch qualitative Aussagen über die Eigenwerte zu machen. Bei stehenden Wellen sind diese Eigenwerte im wesentlichen die Quadrate der zulässigen Schwingungsfrequenzen, wie wir in Kap. 30 an einigen Beispielen gesehen haben. So wird es möglich, viele Schwingungsphänomene aus Akustik, Elastomechanik und Elektrodynamik theoretisch zu erfassen, obwohl Geometrie und Materialeigenschaften in der betreffenden Situation eine explizite Lösung unmöglich machen. Das beginnt mit so alltäglichen Beobachtungen wie dass der Ton einer Saite höher wird, wenn die Saite verkürzt oder straffer gespannt wird, oder dass eine große Trommel einen tieferen Ton hat als eine kleine. Dass solche Regeln über die Tonhöhe in großer Allgemeinheit gelten, völlig unabhängig von den genauen Gegebenheiten, liegt gerade an der variationellen Charakterisierung der Eigenwerte. Mehr darüber findet man z. B. in [8], Bd. I.

31.58 Ausblick: Spektraltheorie der singulären Sturm-Liouville-Probleme. Für jedes (reguläre oder singuläre) Sturm-Liouville-Problem auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt in Wirklichkeit ein Entwicklungssatz. Allerdings treten bei der Entwicklung eines beliebigen $f \in L^2(I)$ nach Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Operators L im singulären Fall i. A. nicht nur die Terme einer Fourierreihe auf, sondern zusätzlich ein sog. *Spektralintegral*, bei dem der reelle Parameter λ als Integrationsvariable fungiert und dabei kontinuierlich variiert. Sein Laufbereich wird als das *kontinuierliche Spektrum* von L bezeichnet. (Der Operator L, von dem hier die Rede ist, ist nicht nur durch die linke Seite der Differentialgleichung (31.3) festgelegt, sondern auch durch präzise Angabe seines Definitionsbereichs. Dadurch werden die Randbedingungen des Problems bei der Definition von L berücksichtigt.)

Für λ-Werte aus dem kontinuierlichen Spektrum sind die Lösungen $u(x) = \psi(x; \lambda)$ der Differentialgleichung (31.3), die im Spektralintegral auftauchen, allerdings keine echten Eigenfunktionen des Problems, denn sie sind i. A. nicht quadratintegrabel über I und müssen auch die singulären Randbedingungen nicht in einem wörtlichen Sinn erfüllen. Jedoch müssen sie so gewählt sein, dass ihre durch das Spektralintegral gegebenen Überlagerungen auch über noch so kurze λ-Intervalle zum Definitionsbereich von L gehören, also insbesondere quadratintegrabel sind und die Randbedingungen erfüllen. Solche Überlagerungen sind dann näherungsweise Lösungen des Eigenwertproblems für L, und die $\psi(\cdot; \lambda)$ selbst werden als *verallgemeinerte Eigenfunktionen* bezeichnet. Bei all dem ist noch zu beachten, dass die Spektralintegrale sog. Stieltjes-*Integrale* sind, so dass man zu ihrer detaillierten Behandlung die Integrationstheorie aus Kap. 28 noch etwas verallgemeinern müsste. All das führt hier viel zu weit, und wir beschränken uns darauf, die angesprochenen Phänomene an einem einfachen Beispiel zu demonstrieren. Eine knappe, aber exakte Behandlung des allgemeinen Entwicklungssatzes findet sich in [7], und die beiden Klassiker [43, 60] erörtern dieses Thema in großer Ausführlichkeit. Letzten Endes handelt es sich beim Entwicklungssatz jedoch um einen Spezialfall des allgemeinen *Spektralsatzes* aus der Funktionalanalysis.

Beispiel: Auf $I :=]0,\infty[$ betrachten wir das singuläre STURM-LIOUVILLE-Problem

$$u'' = -\lambda u\,, \quad u(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0\,. \tag{31.191}$$

Da die Lösungen der Differentialgleichung explizit bekannt sind, kann man dieses Problem auch ohne höhere Theorie leicht diskutieren. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ hat man eine bis auf skalare Vielfache eindeutige Lösung $u(x) = \psi(x;\lambda)$ der Differentialgleichung $u'' = -\lambda u$, die auch die reguläre Randbedingung $u(0) = 0$ erfüllt, nämlich

$$\psi(x;\lambda) := \begin{cases} \sin\sqrt{\lambda}x\,, & \lambda > 0\,, \\ x\,, & \lambda = 0\,, \\ \sinh\sqrt{-\lambda}x\,, & \lambda < 0\,. \end{cases} \tag{31.192}$$

Keine dieser Funktionen gehört zu $L^2(I)$, also hat das Problem keine echten Eigenwerte – mit anderen Worten, sein diskretes Spektrum ist leer. Sein kontinuierliches Spektrum ist jedoch das ganze Intervall $[0,\infty[$. Um dies einzusehen, führen wir für die Spektralintegrale $\omega := \sqrt{\lambda}$ als neue Integrationsvariable ein (dadurch vermeiden wir die STIELTJES-Integrale), bilden also Überlagerungen der Form

$$u(x) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\omega x \mathrm{d}\omega = \frac{\cos\omega_0 x - \cos\omega_1 x}{x} \tag{31.193}$$

für beliebige $0 \le \omega_0 < \omega_1$. Die Singularität dieser Funktion in $x = 0$ ist offensichtlich hebbar. Potenzreihenentwicklung um $x = 0$ zeigt also, dass u, u', u'' in $x = 0$ stetig ergänzt werden können, und zwar durch die Werte

$$u(0) = 0\,, \quad u'(0) = \omega_1^2 - \omega_0^2\,, \quad u''(0) = 0\,.$$

Also erfüllt u die Randbedingungen, und u, u', u'' bleiben in einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt. Um sicherzustellen, dass u, u' und u'' über ganz $I =]0,\infty[$ quadratintegrabel sind, brauchen wir daher nur noch Integrale der Form

$$\int_\varepsilon^\infty u(x)^2 \mathrm{d}x\,, \quad \int_\varepsilon^\infty u'(x)^2 \mathrm{d}x\,, \quad \int_\varepsilon^\infty u''(x)^2 \mathrm{d}x$$

abzuschätzen, wobei $\varepsilon > 0$ ist. Dazu berechnet man u', u'' explizit und schätzt dann die in den Zählern auftretenden trigonometrischen Funktionen durch 1 ab. Die in den Nennern auftretenden x-Potenzen sorgen nun dafür, dass diese

Integrale endlich bleiben. Damit folgt $u, u', u'' \in L^2(I)$, d. h. die $\psi(x;\lambda)$ sind für $\lambda \geq 0$ tatsächlich verallgemeinerte Eigenfunktionen. Somit gehört jedes $\lambda \geq 0$ zum kontinuierlichen Spektrum.

Versucht man aber im Intervall $-\infty < \lambda < 0$ eine analoge Konstruktion, so scheitert die Quadratintegrabilität der entstehenden Überlagerungen am exponentiellen Wachstum der Hyperbelfunktionen. Wir setzen hier $\omega = \sqrt{-\lambda}$ und bilden Funktionen der Form

$$v(x) := \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sinh \omega x \mathrm{d}\omega = \frac{\cosh \omega_1 x - \cosh \omega_0 x}{x}$$

für $0 < \omega_0 < \omega_1$. Bei $x = 0$ haben wir dann dasselbe Verhalten wie vorher, aber für $x \to \infty$ setzt sich das exponentielle Wachstum durch, und es ist $\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty$. Diese Überlagerungen sind also niemals quadratintegrabel, und daher sind die $\psi(\cdot;\lambda)$ für $\lambda < 0$ keine verallgemeinerten Eigenfunktionen.

Der Entwicklungssatz nimmt in diesem Beispiel die folgende Gestalt an: Jedes $f \in L^2(I)$ hat eine Darstellung in der Form

$$f(x) = \int_0^\infty \widehat{f}(\omega) \sin \omega x \mathrm{d}\omega \ , \tag{31.194}$$

wobei die messbare Funktion $\widehat{f}$ bis auf Abänderung auf einer Nullmenge eindeutig bestimmt ist, zu $L^2([0,\infty[)$ gehört und die Parseval*sche Gleichung*

$$\int_0^\infty |\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty |f(x)|^2 \mathrm{d}x \tag{31.195}$$

erfüllt. Wenn f zum Definitionsbereich von L gehört, ist Gl. (31.194) punktweise erfüllt, doch für allgemeines $f \in L^2(I)$ gilt die Formel nur in dem abgeschwächten Sinn

$$\lim_{m\to\infty} \|f - g_m\|_2 = 0$$

für die Funktionen

$$g_m(x) := \int_0^m \widehat{f}(\omega) \sin \omega x \mathrm{d}\omega \ .$$

Solche und ähnliche Aussagen werden im übernächsten Kapitel noch näher besprochen und teilweise auch bewiesen. – Etwas irreführend an diesem Beispiel ist die Tatsache, dass sowohl x als auch ω im Intervall $[0,\infty[$ variieren. Dies ist eine sozusagen rein zufällige Eigentümlichkeit unseres speziellen Beispiels, und man sollte die Intervalle $0 \leq x < \infty$ und $0 \leq \omega < \infty$ als völlig verschiedene Dinge betrachten. Im Allgemeinen hat die Integrationsvariable λ des Spektralintegrals ja als Laufbereich das jeweilige kontinuierliche Spektrum von L.

Dass die durch (31.193) gegebenen Überlagerungen für kleine $\delta := \omega_1 - \omega_0$ „beinahe Eigenfunktionen" sind, lässt sich mit Hilfe der PARSEVALschen Gleichung leicht bestätigen. Vergleich von (31.193) und (31.194) zeigt nämlich, dass $\widehat{u} = \chi_J$ ist, die charakteristische Funktion des Intervalls $J := [\omega_0, \omega_1]$. Nach (31.195) ist also $\|u\|_2 = \sqrt{2/\pi}\|\chi_J\|_2 = \sqrt{2\delta/\pi}$. Nun wählen wir $\beta \in J$ beliebig und messen die Abweichung der Funktion $L[u]$ von $-\beta^2 u$ durch die Größe

$$q(\delta) := \frac{\|L[u] + \beta^2 u\|_2}{\|u\|_2} \,.$$

Für $w := L[u] + \beta^2 u = u'' + \beta^2 u$ haben wir die Entwicklung

$$w(x) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\beta^2 - \omega^2) \sin \omega x \mathrm{d}\omega \;,$$

da man in (31.193) unter dem Integralzeichen differenzieren darf. Damit ergibt sich $\widehat{w}(\omega) = (\beta^2 - \omega^2)\chi_J(\omega)$, also

$$\|\widehat{w}\|_2^2 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\beta^2 - \omega^2)^2 \mathrm{d}\omega \;.$$

Dieses Integral könnte man explizit berechnen, aber das ist unpraktisch. Vielmehr beachten wir, dass $|\beta - \omega| < \delta$ und $|\beta + \omega| < 2\omega_0 + \delta$ ist für $\omega \in J$, so dass der Integrand in der Form

$$(\beta^2 - \omega^2)^2 = (\beta - \omega)^2(\beta + \omega)^2 < \delta^2(2\omega_0 + \delta)^2$$

abgeschätzt werden kann. Das ergibt $\|\widehat{w}\|_2^2 < \delta^3(2\omega_0 + \delta)^2$, also nach der PARSEVALschen Gleichung $\|w\|_2 < \sqrt{2/\pi}\delta^{3/2}(2\omega_0 + \delta)$ und damit schließlich

$$q(\delta) < \frac{\delta^{3/2}(2\omega_0 + \delta)}{\delta^{1/2}} = \delta(2\omega_0 + \delta) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \to 0 \,,$$

was unsere Behauptung beweist.

Bemerkung: Singuläre STURM-LIOUVILLE-Probleme für Gleichungen der Form

$$u'' + q(x)u = -\lambda u$$

können als Beschreibung der quantenmechanischen Bewegung eines Teilchens auf dem Intervall I unter dem Einfluss des Kraftfelds $q'(x)$ gedeutet werden. Die Lösung $u(x)$ spielt dabei die Rolle der Wellenfunktion, der Parameter λ die Rolle der Energie. Echte Eigenfunktionen entsprechen *gebundenen Zuständen*, bei denen das Teilchen in einem endlichen Teilbereich von I lokalisiert ist, und die entsprechenden Eigenwerte sind die dabei auftretenden scharfen Energieniveaus. Die verallgemeinerten Eigenfunktionen $\psi(x; \lambda)$ zu Werten λ aus dem kontinuierlichen Spektrum hingegen entsprechen *Streuzuständen*, bei denen das Teilchen sich mehr oder weniger frei bewegt. Die Streuzustände selbst sind unphysikalisch, da die verallgemeinerten Eigenfunktionen eben nicht zu dem fundamentalen HILBERTraum $L^2(I)$ gehören, ihr Quadrat also nicht als Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens interpretiert werden kann. Die durch Spektralintegrale gegebenen Überlagerungen von Streuzuständen jedoch entsprechen wieder echten physikalischen Zuständen des Systems. Allerdings hat die Energie in solchen Zuständen keinen scharfen Wert mehr.

Natürlich ist solch eine „eindimensionale Quantenmechanik“ nicht sehr realistisch – man spricht von einem „Spielzeugmodell“ – aber ihre Diskussion stellt eine gute Einführung dar, denn was sich bei SCHRÖDINGERgleichungen für realistische Systeme im dreidimensionalen Raum abspielt, ist prinzipiell nicht sehr verschieden davon.

Aufgaben zu §31

31.1. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das STURM-LIOUVILLE-Problem

$$u'' = -\lambda u$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Randbedingungen

a. $u(0) = u'(0)\,, \quad u(1) = 0,$
b. $u(0) = u'(0)\,, \quad u(1) = u'(1).$

Insbesondere zeige man, dass im Fall a. $\lambda_n = \omega_n^2$ mit

$$\omega_n = \pi/2 + n\pi + \beta_n\,, \quad n \geq 0\,,$$

wobei $\beta_n \searrow 0$ für $n \to \infty$.

31.2. Man löse das Eigenwertproblem

$$(xu')' = -(\lambda/x)u\,, \quad u'(1) = 0\,, \quad u'(\mathrm{e}^{2\pi}) = 0\,.$$

Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert?

31.3. (STURMscher Vergleichssatz): Sei J ein beliebiges Intervall, $p \in C^1(J)$ eine positive Funktion, $Q_0, Q_1 \in C^0(J)$, $u, v \in C^2(J; \mathbb{R})$. Seien $x_0, x_1 \in J$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von v, und es sei $(p(x)u')' = Q_0(x)u$, $(p(x)v')' = Q_1(x)v$, wobei $Q_0 \leq Q_1$ punktweise. Dann sind u, v zueinander proportional, oder u hat in $]x_0, x_1[$ eine Nullstelle.

Man beweise dies in den folgenden Schritten:

a. Für $W := uv' - u'v$ gilt

$$(pW)' = (Q_1 - Q_0)uv\,.$$

b. Wenn u keine Nullstelle in $]x_0, x_1[$ hat, so muss in diesem Intervall $pW \equiv 0$ sein. (*Hinweis:* Man kann sich auf den Fall beschränken, dass $u(x) > 0$ und $v(x) > 0$ für $x_0 < x < x_1$ ist (wieso?). Dann untersuche man das Monotonieverhalten der Funktion pW im Intervall $]x_0, x_1[$ sowie ihr Vorzeichen in den Randpunkten.)
c. Wenn u im Intervall $]x_0, x_1[$ keine Nullstelle hat, so ist u/v konstant.

31.4. Es seien $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ zwei aufeinanderfolgende Eigenwerte eines Sturm-Liouville-Problems, und es seien u_n, u_{n+1} entsprechende Eigenfunktionen. Man folgere aus Aufg. 31.3, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von u_n eine Nullstelle von u_{n+1} liegt.

31.5. Die Funktionen p, q mögen die Voraussetzungen aus 31.1a. erfüllen. Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$$

sich durch eine Parametertransformation $x = \xi(t)$ in die Differentialgleichung

$$v_{tt} + a(t)v = b(t)$$

überführen lässt, wobei

$$a(t) := p(\xi(t))q(\xi(t)), \quad b(t) := p(\xi(t))f(\xi(t))$$

ist. (*Hinweis:* Man setze

$$t = \tau(x) := \int \frac{\mathrm{d}y}{p(y)}$$

und betrachte die Umkehrfunktion $\xi := \tau^{-1}$. Wieso existiert diese?)

31.6. Seien $a_0 \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ und $a_1 \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Wir definieren einen linearen Operator $\Lambda : C^2([a, b], \mathbb{R}) \to C^0([a, b], \mathbb{R})$ durch

$$\Lambda[y] := y'' + a_1 y' + a_0 y \ .$$

Sei $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ strikt positiv und sei $q \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Wir definieren den linearen Operator $L : C^2([a, b], \mathbb{R}) \to C^0([a, b], \mathbb{R})$ durch

$$L[u] := (pu')' + qu \ .$$

Seien schließlich $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren $R_1, R_2 : C^1([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a), \quad R_2[y] := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) \ .$$

a. Sei $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ und seien $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass das Randwertproblem

$$\Lambda[y] = g, \quad R_1[y] = \rho_1, \quad R_2[y] = \rho_2$$

äquivalent zu einem Randwertproblem von der Gestalt

$$L[u] = f, \quad S_1[u] = \rho_1, \quad S_2[u] = \rho_2,$$

ist, wobei $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ und wobei S_1, S_2 ebenso definiert sind wie R_1, R_2, aber mit neuen Koeffizienten.
Hinweis: Man betrachte die Gleichung $\Lambda\left[u(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x a_1(x')\mathrm{d}x'\right)\right] = f(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x a_1(x')\mathrm{d}x'\right)$.

b. Die Funktionen $u_1, u_2 \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ mögen ein Fundamentalsystem für die homogene gewöhnliche Differentialgleichung $L[u] = 0$ bilden. Nehmen wir an, dass es ein u_p so gibt, dass $L[u_p] = f$. Man zeige, dass das Randwertproblem

$$L[u] = f, \quad R_1[u] = \rho_1, \quad R_2[u] = \rho_2$$

genau dann eindeutig lösbar ist, wenn

$$\begin{vmatrix} R_1[u_1] & R_1[u_2] \\ R_2[u_1] & R_2[u_2] \end{vmatrix} \neq 0 \,.$$

31.7. Man bringe die folgenden Randwertaufgaben in die Form

$$L[u] = f, \quad R_1[u] = \rho_1, \quad R_2[u] = \rho_2$$

(Bezeichnungen wie in Aufg. 31.6!) und diskutiere ihre Lösbarkeit:

a. $u'' - u = 0$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$;
b. $u'' + x^2 = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$;
c. $u'' - u' - 2u = 0$, $u(0) + u'(0) = 1$, $u(1) = 0$.

31.8. Seien L, R_1, R_2 wie in Aufg. 31.6, und sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der Gleichung $L[u] = 0$.

a. Wir setzen $W(u_1, u_2) := u_1 u_2' - u_2 u_1'$. Man zeige, dass die Funktion $p(x)W(u_1, u_2)(x)$ auf $[a,b]$ konstant ist.
b. Wir nehmen nun an, dass gilt:

$$R_1[u_1], R_2[u_2] = 0\,, \quad R_1[u_2], R_2[u_1] \neq 0\,.$$

Man zeige mit Hilfe von Teil a. und dem Ansatz

$$u(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)\,, \quad C_1'(x)u_1(x) + C_2'(x)u_2(x) = 0$$

(„Variation der Konstanten"), dass $u(x) := \int_a^b G(x,y)f(y)\mathrm{d}y$, wobei

$$G(x,y) = \frac{1}{p(a)W(u_1,u_2)(a)} \begin{cases} u_1(x)u_2(y)\,, & x \leq y, \\ u_1(y)u_2(x)\,, & y \leq x \end{cases}$$

die (eindeutig lösbare) Randwertaufgabe

$$L[u] = f\,, \quad R_1[u] = R_2[u] = 0$$

löst. Eine solche Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt GREEN*sche Funktion* des Randwertproblems.

31.9. Man bestimme die GREENschen Funktionen (vgl. Aufg. 31.8) der folgenden Randwertaufgaben:

a. $u'' = f$, $u(0) = u(1) = 0$;
b. $u'' = f$, $u(0) = u'(1) = 0$;
c. $u'' = f$, $u(0) = su(1) + u'(1) = 0$, $s > 0$;
d. $(xu')' = f$, $u(1) = u(\mathrm{e}) = 0$.

31.10. Für die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ zeige man mittels mehrfacher partieller Integration und der Formel von RODRIGUEZ

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\mathrm{d}x = 0$ für $m < n$,

b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$ für $m \neq n$.

31.11. Für die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ zeige man mit Hilfe passender Rekursionsformeln

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 2$,

b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P'_n(x)P'_m(x)\mathrm{d}x = 0$ für $m \neq n$.

31.12. Man zeige, dass die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ und $P_{n-1}(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

31.13. Mit Hilfe der erzeugenden Funktion der LEGENDRE-Polynome zeige man:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} P_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
(*Hinweis:* Man integriere (31.29) zwischen $t = 0$ und $t = x$.)

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\sin\theta/2}\,, \quad 0 < \theta < 2\pi$. (*Hinweis:* Man betrachte die Konvergenz der Reihe als erwiesen.)

31.14. Man zeige, dass die zugeordneten LEGENDRE-Funktionen die folgende Rekursionsformel erfüllen:

$$P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) = (2n+1)\sqrt{1-x^2}\,P_n^m(x) \ .$$

31.15. Man zeige, dass die zugeordneten LEGENDRE-Funktionen $P_n^m(x)$ für festes m die folgende Darstellung durch eine erzeugende Funktion haben

$$\frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^{n-m} \ .$$

31.16. Für $m = 2$ entwickle man die Funktion $1 - x^2$ nach den Funktionen $P_n^m(x)$, $n \geq m$, d. h. man bestimme die Koeffizienten a_n der Entwicklung

$$1 - x^2 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n^2(x) \ .$$

Hier ist P_n^2 die zugeordnete LEGENDREfunktion P_n^m für $m = 2$.

31.17. Die Einheitssphäre $S \subseteq \mathbb{R}^3$ liege auf dem Potential

$$f(\varphi, \theta) = 3\sin^2\theta\cos 2\varphi \quad \text{(Kugelkoordinaten!)}$$

Man bestimme das Potential $u(r, \varphi, \theta)$ im Innern (d. h. für $0 \leq r < 1$) und im Äußeren (d. h. für $r > 1$) der Kugel. Mit anderen Worten: man löse die Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq r < 1\,, \quad u = f \quad \text{für} \quad r = 1$$

bzw.

$$\Delta u = 0 \quad \text{für} \quad r > 1\,, \quad u = f \quad \text{für} \quad r = 1\ .$$

Dieses Potential soll für $|x| \to \infty$ beschränkt bleiben.
(*Hinweis:* Man verwende das Ergebnis der vorigen Aufgabe.)

31.18. Für die BESSELfunktionen $J_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, zeige man:

a. $\displaystyle J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x) = \cos x,$

b. $\displaystyle J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots = \frac{1}{2}\sin x.$

31.19. Durch Induktion nach n zeige man:

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n J_0(x) \ .$$

31.20. a. Für $n = 2, 3, 4, \ldots$ zeige man

$$J_n''(x) = \frac{1}{4}(J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)) .$$

b. Man bestimme eine Stammfunktion

$$\int x^4 J_1(x)\mathrm{d}x .$$

31.21. Mit Hilfe der Substitution $t = \mathrm{e}^x$ zeige man, dass die Differentialgleichung

$$y'' + \mathrm{e}^{2x} y = 0$$

als spezielle Lösung $y(x) = J_0(\mathrm{e}^x)$ hat.

31.22. Unter Verwendung des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}$$

zeige man mit Hilfe der Reihenentwicklung von $J_0(x)$, $J_1(x)$:

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\sin x}{x},$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1-\cos x}{x}.$

31.23. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, zeige man

$$\int_0^1 x J_n(px) J_n(qx)\mathrm{d}x = \frac{J_n(q)J_n'(p) - J_n(p)J_n'(q)}{q^2 - p^2} .$$

31.24. Man zeige:

a. Ist α_m die m-te positive Nullstelle von $J_0(x)$, so gilt:

$$\frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_m x)}{\alpha_m J_1(\alpha_m)} , \quad 0 < x < 1 .$$

b. Ist α_m die m-te positive Nullstelle von $J_1(x)$, so gilt

$$x = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_m x)}{\alpha_m J_2(\alpha_m)} , \quad 0 < x < 1 .$$