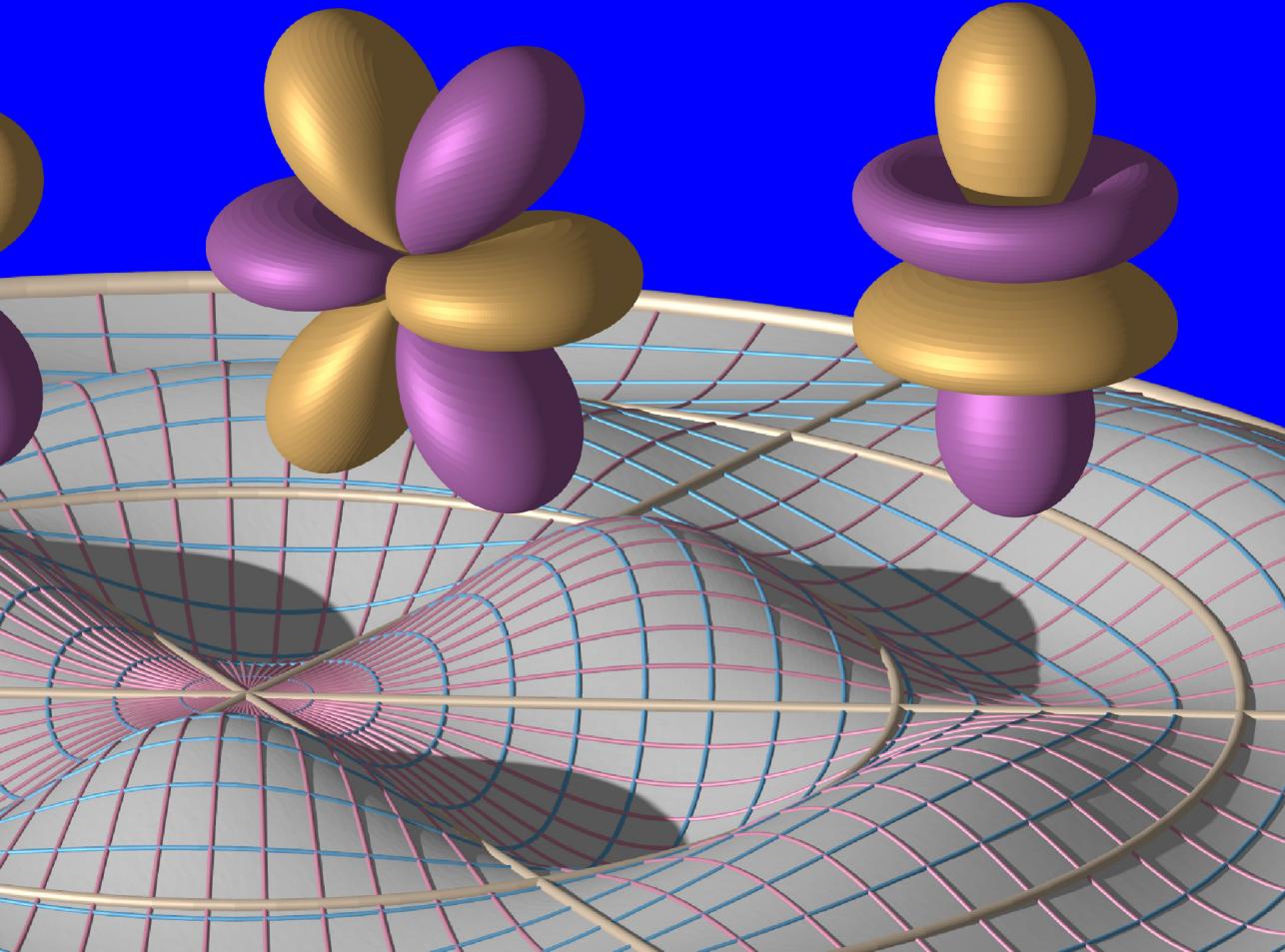


Mathematisches Seminar

# Spezielle Funktionen

Andreas Müller

Joshua Bär, Marc Benz, Manuel Cattaneo, Fabian Dünki  
Enez Erdem, Réda Haddouche, David Hugentobler, Alain Keller  
Yanik Kuster, Marc Kühne, Erik Löffler, Kevin Meili  
Andrea Mozzini Vellen, Patrick Müller, Naoki Pross  
Thierry Schwaller, Tim Tönz





---

Mathematisches Seminar  
Spezielle Funktionen

---

Leitung: Andreas Müller

Joshua Bär, Marc Benz, Manuel Cattaneo, Fabian Dünki  
Enez Erdem, Réda Haddouche, David Hugentobler, Alain Keller  
Yanik Kuster, Marc Kühne, Erik Löffler, Kevin Meili  
Andrea Mozzini Vellen, Patrik Müller, Naoki Pross  
Thierry Schwaller, Tim Tönz

## Inhaltsverzeichnis

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Potenzen und Wurzeln</b>	<b>11</b>
1.1 Polynome . . . . .	11
1.1.1 Polynomdivision, Teilbarkeit und grösster gemeinsamer Teiler . . . . .	12
1.1.2 Faktorisierung und Nullstellen . . . . .	14
1.1.3 Koeffizienten-Vergleich . . . . .	14
1.1.4 Berechnung von Polynom-Werten . . . . .	15
1.2 Lösungen von Polynomgleichungen . . . . .	15
1.2.1 Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	16
1.2.2 Lösbarkeit durch Wurzelausdrücke . . . . .	16
1.2.3 Algebraische Zahlen . . . . .	18
1.3 Die Tschebyscheff-Polynome . . . . .	18
1.3.1 Motivation: Interpolation . . . . .	19
1.3.2 Definition der Tschebyscheff-Polynome . . . . .	20
1.3.3 Rekursionsbeziehungen . . . . .	21
1.4 Rationale Funktionen . . . . .	23
1.5 Potenzreihen . . . . .	23
1.5.1 Definition . . . . .	24
1.5.2 Die geometrische Reihe . . . . .	24
1.5.3 Konvergenzkriterien . . . . .	25
1.5.4 Die Taylor-Reihe . . . . .	27
<b>2 Exponentialfunktion und Exponentialgleichungen</b>	<b>31</b>
2.1 Exponentialfunktion . . . . .	31
2.1.1 Zins und Eulerscher Grenzwert . . . . .	31
2.1.2 Potenzreihe . . . . .	33
2.2 Logarithmen . . . . .	34
2.2.1 Multiplikation . . . . .	35
2.2.2 Die Erfindung der Logarithmen . . . . .	36
2.3 Die Lambert W-Funktion . . . . .	40
2.3.1 Die Definition der Lambert W-Funktion . . . . .	40
2.3.2 Lösung von Exponentialgleichungen . . . . .	44
2.3.3 Numerische Berechnung der Lambert-W-Funktion . . . . .	44

<b>3 Spezielle Funktionen aus der Geometrie</b>	<b>47</b>
3.1 Trigonometrische Funktionen . . . . .	47
3.1.1 Definition der trigonometrischen Funktionen . . . . .	48
3.1.2 Drehungen der Ebene . . . . .	51
3.1.3 Eine Tabelle der Werte der trigonometrischen Funktionen aufstellen . . . . .	53
3.1.4 Trigonometrische Funktionen und Matrixexponentialfunktion . . . . .	56
3.2 Hyperbolische Funktionen . . . . .	56
3.2.1 Das Minkowski-Skalarprodukt in der Ebene . . . . .	58
3.2.2 Matrizen, die das Skalarprodukt invariant lassen . . . . .	58
3.2.3 Hyperbolische Funktionen . . . . .	59
3.3 Bogenlänge . . . . .	62
3.3.1 Berechnung der Bogenlänge . . . . .	62
3.3.2 Kreis . . . . .	65
3.3.3 Kegelschnitte . . . . .	67
3.4 Flächeninhalt . . . . .	72
3.4.1 Berechnung des Flächeninhaltes in kartesischen Koordinaten . . . . .	72
3.4.2 Flächeninhalt von Ellipsen und Hyperbeln . . . . .	74
<b>4 Spezielle Funktionen und Rekursion</b>	<b>81</b>
4.1 Die Gamma-Funktion . . . . .	81
4.1.1 Definition als Grenzwert . . . . .	81
4.1.2 Produktformel . . . . .	85
4.1.3 Integralformel für die Gamma-Funktion . . . . .	86
4.1.4 Der Satz von Bohr-Mollerup . . . . .	90
4.1.5 Integraldarstellung und der Satz von Bohr-Mollerup . . . . .	93
4.2 Die Beta-Funktion . . . . .	94
4.2.1 Beta-Integral . . . . .	94
4.2.2 Ordnungsstatistik und Beta-Funktion . . . . .	96
4.2.3 Die Beta-Verteilung . . . . .	99
4.2.4 Weitere Eigenschaften der Gamma-Funktion . . . . .	102
4.3 Lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	105
4.3.1 Lineare Differenzengleichungen . . . . .	105
4.3.2 Lösung mit Exponentialfunktionen . . . . .	106
4.3.3 Komplexe Fibonacci-Zahlen . . . . .	106
4.4 Hypergeometrische Funktionen . . . . .	108
4.4.1 Quotienten von Binomialkoeffizienten . . . . .	108
4.4.2 Die geometrische Reihe . . . . .	109
4.4.3 Hypergeometrische Reihen . . . . .	110
4.4.4 Beispiele von hypergeometrischen Funktionen . . . . .	112
4.4.5 Ableitung und Stammfunktion hypergeometrischer Funktionen . . . . .	117
4.4.6 TODO . . . . .	118
<b>5 Differentialgleichungen</b>	<b>123</b>
5.1 Beispiele . . . . .	123
5.1.1 Potenzen und Wurzeln . . . . .	124
5.1.2 Exponentialfunktion und ihre Varianten . . . . .	125
5.2 Potenzreihenmethode . . . . .	129

5.2.1	Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich . . . . .	129
5.2.2	Die Newtonsche Reihe . . . . .	130
5.2.3	Lösung mit verallgemeinerten Potenzreihen . . . . .	132
5.3	Bessel-Funktionen . . . . .	136
5.3.1	Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .	136
5.3.2	Bessel-Funktionen erster Art . . . . .	137
5.4	Hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	143
5.4.1	Die Eulersche hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	143
5.4.2	Lösung als verallgemeinerte Potenzreihe . . . . .	145
5.4.3	Verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	146
5.4.4	Differentialgleichung für $x^\varrho \cdot {}_pF_q(a_i; b_j; sx^\nu)$ . . . . .	151
5.4.5	Differentialgleichung der Tschebyscheff-Polynome . . . . .	156
<b>6</b>	<b>Integrale</b>	<b>163</b>
6.1	Die Fehlerfunktion . . . . .	163
6.1.1	Standardisierung . . . . .	164
6.1.2	Laplace-Transformation . . . . .	167
6.1.3	Berechnungsmethoden . . . . .	169
6.2	Integraleigenschaften hypergeometrischer Funktionen . . . . .	170
6.2.1	Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$ . . . . .	171
6.2.2	Integraldarstellung als Integraltransformation . . . . .	172
6.3	Differentialkörper und das Integrationsproblem . . . . .	173
6.3.1	Rationale Funktionen und Funktionenkörper . . . . .	174
6.3.2	Körpererweiterungen . . . . .	175
6.3.3	Differentialkörper und ihre Erweiterungen . . . . .	179
6.3.4	Das Integrationsproblem . . . . .	181
6.3.5	Integration rationaler Funktionen . . . . .	182
6.3.6	Integranden der Form $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ . . . . .	184
6.4	Der Risch-Algorithmus . . . . .	188
6.4.1	Log-Exp-Notation für trigonometrische und hyperbolische Funktionen . . . . .	188
6.4.2	Elementare Funktionen . . . . .	189
<b>7</b>	<b>Orthogonalität</b>	<b>193</b>
7.1	Orthogonale Funktionenfamilien . . . . .	193
7.1.1	Skalarprodukt . . . . .	194
7.1.2	Gram-Schmidt-Orthonormalisierung . . . . .	195
7.1.3	Legendre-Polynome . . . . .	196
7.1.4	Gewichtsfunktionen . . . . .	200
7.2	Drei-Term-Rekursion für orthogonale Polynome . . . . .	205
7.3	Rodrigues-Formeln . . . . .	208
7.3.1	Pearsonsche Differentialgleichung . . . . .	208
7.3.2	Rekursionsformel . . . . .	209
7.3.3	Differentialgleichung . . . . .	210
7.3.4	Beispiel . . . . .	210
7.4	Orthogonale Polynome und Differentialgleichungen . . . . .	215
7.4.1	Legendre-Differentialgleichung . . . . .	215
7.4.2	Laguerre-Differentialgleichung . . . . .	219

7.5	Bessel-Funktionen als orthogonale Funktionenfamilie . . . . .	219
7.6	Das Sturm-Liouville-Problem . . . . .	220
7.6.1	Differentialgleichung . . . . .	221
7.6.2	Das verallgemeinerte Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen . . . . .	221
7.6.3	Der Operator $L_0$ und die Randbedingung . . . . .	222
7.6.4	Skalarprodukt . . . . .	223
7.6.5	Der Vektorraum $H$ . . . . .	224
7.6.6	Der Sturm-Liouville-Differentialoperator . . . . .	224
7.6.7	Beispiele . . . . .	224
7.7	Anwendung: Gauss-Quadratur . . . . .	229
7.7.1	Interpolationspolynome . . . . .	230
7.7.2	Integrationsverfahren auf der Basis von Interpolation . . . . .	230
7.7.3	Integrationsverfahren, die für Polynome exakt sind . . . . .	231
7.7.4	Stützstellen und Orthogonalpolynome . . . . .	232
7.7.5	Fehler der Gauss-Quadratur . . . . .	233
7.7.6	Skalarprodukte mit Gewichtsfunktion . . . . .	235
<b>8</b>	<b>Integraltransformationen</b> . . . . .	<b>239</b>
8.1	Zweidimensionale Fourier-Transformation . . . . .	239
8.1.1	Fourier-Transformation und partielle Differentialgleichungen . . . . .	239
8.1.2	Fourier-Transformation in kartesischen Koordinaten . . . . .	239
8.1.3	Basisfunktionen in Polarkoordinaten . . . . .	239
8.2	Fourier-Transformation und Bessel-Funktionen . . . . .	239
8.2.1	Berechnung der Fourier-Transformation in Polarkoordinaten . . . . .	240
8.2.2	Integraldarstellung der Bessel-Funktion . . . . .	244
<b>9</b>	<b>Funktionentheorie</b> . . . . .	<b>245</b>
9.1	Holomorphe Funktionen . . . . .	245
9.1.1	Komplexe Ableitung . . . . .	246
9.1.2	Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen . . . . .	247
9.2	Analytische Funktionen . . . . .	249
9.2.1	Definition . . . . .	249
9.2.2	Konvergenzradius . . . . .	251
9.3	Cauchy-Integral . . . . .	251
9.3.1	Wegintegrale . . . . .	251
9.3.2	Die Cauchy-Integralformel . . . . .	259
9.4	Analytische Fortsetzung . . . . .	261
9.4.1	Analytische Fortsetzung mit Potenzreihen . . . . .	261
9.4.2	Analytische Fortsetzung mit Differentialgleichungen . . . . .	263
9.5	Anwendungen . . . . .	266
9.5.1	Reflektionsformel für die Gamma-Funktion . . . . .	266
9.5.2	Der Satz von Carlson . . . . .	268
9.5.3	Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit Singularitäten . . . . .	270

<b>10 Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>279</b>
10.1 Gleichungen und Randbedingungen . . . . .	279
10.1.1 Gebiete, Differentialoperatoren, Randbedingungen . . . . .	279
10.2 Separationsmethode . . . . .	281
10.2.1 Separationsansatz . . . . .	281
10.2.2 Eigenwertproblem . . . . .	284
10.3 Rechteckige Membran . . . . .	286
10.3.1 Differentialgleichung und Randbedingungen . . . . .	286
10.3.2 Separation . . . . .	286
10.3.3 Lösung der Differentialgleichungen . . . . .	287
10.3.4 Eigenfrequenzen . . . . .	287
10.4 Kreisförmige Membran . . . . .	288
10.4.1 Differentialgleichung und Randbedingung . . . . .	288
10.4.2 Separation . . . . .	289
10.4.3 Umformung in eine Besselsche Differentialgleichung . . . . .	290
10.4.4 Eigenfrequenzen . . . . .	290
10.5 Kugelfunktionen . . . . .	292
10.5.1 Kugelkoordinaten . . . . .	292
10.5.2 Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten . . . . .	292
10.5.3 Separation . . . . .	293
10.5.4 Kugelfunktionen . . . . .	295
<b>11 Elliptische Funktionen</b>	<b>297</b>
11.1 Elliptische Integrale . . . . .	297
11.1.1 Definition . . . . .	297
11.1.2 Vollständige elliptische Integrale . . . . .	298
11.1.3 Berechnung mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel . . . . .	302
11.1.4 Unvollständige elliptische Integrale . . . . .	305
11.2 Jacobische elliptische Funktionen . . . . .	311
11.2.1 Elliptische Funktionen als Trigonometrie . . . . .	311
11.2.2 Lösungen von Differentialgleichungen . . . . .	322
11.2.3 Das mathematische Pendel . . . . .	330
11.3 Lemniskatischer Sinus . . . . .	334
11.3.1 Lemniskate . . . . .	334
11.3.2 Bogenlänge . . . . .	338
11.3.3 Darstellung als elliptisches Integral . . . . .	338
11.3.4 Bogenlängenparametrisierung . . . . .	339
11.3.5 Der lemniskatische Sinus und Kosinus . . . . .	341
<b>II Anwendungen und weiterführende Themen</b>	<b>351</b>
<b>12 Verfolgungskurven</b>	<b>355</b>
12.1 Was sind Verfolgungskurven? . . . . .	355
12.1.1 Verfolger und Verfolgungsstrategie . . . . .	355
12.1.2 Ziel . . . . .	356
12.2 Beispiel Verfolgungskurve . . . . .	357

<b>13 FM Bessel</b>	<b>363</b>
13.1 AM - FM . . . . .	363
13.2 AM-FM im Frequenzspektrum . . . . .	364
13.3 FM und Besselfunktion . . . . .	364
13.4 Fazit . . . . .	364
<b>14 Parabolische Zylinderfunktionen</b>	<b>365</b>
14.1 Problem . . . . .	365
14.1.1 Laplace Gleichung . . . . .	365
14.1.2 Parabolische Zylinderkoordinaten . . . . .	366
14.1.3 Differentialgleichung . . . . .	367
14.1.4 Lösung der Helmholtz Gleichung im parabolischen Zylinderfunktion . . . . .	367
14.2 Lösung . . . . .	368
14.3 Physik sache . . . . .	368
14.3.1 Elektrisches Feld einer semi-infinitem Platte . . . . .	368
<b>15 Fresnel-Integrale</b>	<b>371</b>
15.1 Definition . . . . .	371
15.2 Euler-Spirale . . . . .	372
15.3 Klohoide . . . . .	375
15.3.1 Krümmung einer ebenen Kurve . . . . .	375
15.3.2 Krümmung der Euler-Spirale . . . . .	376
15.3.3 Eine Kugel schälen . . . . .	376
15.4 Numerische Berechnung der Fresnel-Integrale . . . . .	378
15.4.1 Komplexe Fehlerfunktionen . . . . .	378
15.4.2 Als Lösung einer Differentialgleichung . . . . .	378
15.4.3 Taylor-Reihe integrieren . . . . .	378
15.4.4 Hypergeometrische Reihen . . . . .	379
<b>16 Schwingungen einer kreisförmigen Membran</b>	<b>381</b>
16.1 Einleitung . . . . .	381
16.2 Lösungsmethode 1: Separationsmethode . . . . .	381
16.3 Die Hankel Transformation . . . . .	383
16.3.1 Operative Eigenschaften der Hankel Transformation . . . . .	385
16.4 Lösungsmethode 2: Transformationsmethode . . . . .	386
16.4.1 Vergleich der Lösungen . . . . .	387
<b>17 Thema</b>	<b>389</b>
17.1 Teil 0 . . . . .	389
17.2 Teil 1 . . . . .	389
17.2.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	390
17.3 Teil 2 . . . . .	390
17.3.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	390
17.4 Teil 3 . . . . .	391
17.4.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	391

<b>18 Laguerre-Polynome</b>	<b>393</b>
18.1 Definition . . . . .	393
18.1.1 Analytische Fortsetzung . . . . .	394
18.2 Orthogonalität . . . . .	395
18.3 Gauss-Quadratur . . . . .	396
18.3.1 Gauss-Laguerre-Quadratur . . . . .	397
18.4 Anwendung: Berechnung der Gamma-Funktion . . . . .	399
18.4.1 Gamma-Funktion . . . . .	399
18.4.2 Berechnung mittels Gauss-Laguerre-Quadratur . . . . .	399
<b>19 Riemannsche Zetafunktion</b>	<b>409</b>
19.1 Einleitung . . . . .	409
19.2 Eulerprodukt . . . . .	409
19.3 Zusammenhang mit der Gammafunktion . . . . .	410
19.4 Analytische Fortsetzung . . . . .	411
19.4.1 Fortsetzung auf $\Re(s) > 0$ . . . . .	411
19.4.2 Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ . . . . .	412
19.4.3 Poissonsche Summenformel . . . . .	414
<b>20 Thema</b>	<b>417</b>
20.1 Teil 0 . . . . .	417
20.2 Teil 1 . . . . .	417
20.2.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	418
20.3 Teil 2 . . . . .	418
20.3.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	418
20.4 Teil 3 . . . . .	419
20.4.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	419
<b>21 Sphärische Navigation</b>	<b>421</b>
21.1 Einleitung . . . . .	421
21.2 Warum ist die Erde nicht flach? . . . . .	421
21.3 Sphärische Navigation und Winkelfunktionen . . . . .	422
21.4 Sphärische Trigonometrie . . . . .	423
21.4.1 Das Kugeldreieck . . . . .	423
21.4.2 Rechtwinkliges Dreieck und rechtseitiges Dreieck . . . . .	423
21.4.3 Winkelsumme und Flächeninhalt . . . . .	424
21.4.4 Seiten und Winkelberechnung . . . . .	425
21.5 Das Nautische Dreieck . . . . .	426
21.5.1 Definition des Nautischen Dreiecks . . . . .	426
21.5.2 Das Bilddreieck . . . . .	427
21.6 Standortbestimmung ohne elektronische Hilfsmittel . . . . .	427
21.6.1 Ecke $P$ und $A$ . . . . .	428
21.6.2 Ecke $B$ und $C$ - Bildpunkt von $X$ und $Y$ . . . . .	428
21.6.3 Ephemeriden . . . . .	428
21.6.4 Bestimmung des eigenen Standortes $P$ . . . . .	430
21.7 Beispielrechnung . . . . .	432
21.7.1 Einführung . . . . .	432
21.7.2 Vorgehen . . . . .	433

21.7.3 Ausgangslage . . . . .	433
21.7.4 Koordinaten der Bildpunkte . . . . .	433
21.7.5 Dreiecke definieren . . . . .	433
21.7.6 Dreieck $ABC$ . . . . .	434
21.7.7 Dreieck $BPC$ . . . . .	435
21.7.8 Dreieck $ABP$ . . . . .	436
21.7.9 Längengrad und Breitengrad bestimmen . . . . .	436
21.7.10 Fazit . . . . .	436
<b>22 Transferfunktionen</b>	<b>437</b>
22.1 Teil 0 . . . . .	437
22.2 Teil 1 . . . . .	437
22.2.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	438
22.3 Teil 2 . . . . .	438
22.3.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	438
22.4 Teil 3 . . . . .	438
22.4.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	439
<b>23 Kalman, Riccati und Abel</b>	<b>441</b>
23.1 Teil 0 . . . . .	441
23.2 Teil 1 . . . . .	441
23.2.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	442
23.3 Teil 2 . . . . .	442
23.3.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	442
23.4 Teil 3 . . . . .	443
23.4.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	443
<b>24 Recurrence Relations for Spherical Harmonics in Quantum Mechanics</b>	<b>445</b>
<b>25 Thema</b>	<b>447</b>
25.1 Teil 0 . . . . .	447
25.2 Teil 1 . . . . .	447
25.2.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	448
25.3 Teil 2 . . . . .	448
25.3.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	448
25.4 Teil 3 . . . . .	449
25.4.1 De finibus bonorum et malorum . . . . .	449
<b>26 Elliptische Filter</b>	<b>451</b>
26.1 Einleitung . . . . .	451
26.2 Tschebyscheff-Filter . . . . .	452
26.3 Jacobische elliptische Funktionen . . . . .	455
26.4 Elliptische rationale Funktionen . . . . .	457
26.4.1 Degree Equation . . . . .	459
26.4.2 Polynome? . . . . .	459

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>27 <math>\int P(t)e^{-t^2} dt</math> in geschlossener Form?</b>	<b>461</b>
27.1 Problemstellung . . . . .	461
27.2 Hermite-Polynome . . . . .	462
27.3 Beliebige Polynome . . . . .	462
27.4 Integralbedingung . . . . .	464
<b>Index</b>	<b>465</b>



# Vorwort

Dieses Buch entstand im Rahmen des Mathematischen Seminars im Frühjahrssemester 2022 an der Ostschweizer Fachhochschule in Rapperswil. Die Teilnehmer, Studierende der Studiengänge für Elektrotechnik, Informatik und Bauingenieurwesen der OST, erarbeiteten nach einer Einführung in das Themengebiet jeweils einzelne Aspekte des Gebietes in Form einer Seminararbeit, über deren Resultate sie auch in einem Vortrag informierten.

Im Frühjahr 2022 waren spezielle Funktionen das Thema des Seminars. Ziel war, zu zeigen, wie neben den wohlbekannten Funktionen, die man im elementaren Analysis-Unterricht kennlernt, über die Jahre viele weitere interessante Funktionen und Funktionenfamilien geschaffen wurden, mit denen die unterschiedlichsten Problem auf effiziente Art gelöst werden können.

In einigen Arbeiten wurde auch Code zur Demonstration der besprochenen Methoden und Resultate geschrieben, soweit möglich und sinnvoll wurde dieser Code im Github-Repository dieses Kurses<sup>1</sup> [**buch:repo**] abgelegt. Im genannten Repository findet sich auch der Source-Code dieses Skriptes, es wird hier unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung gestellt.

---

<sup>1</sup><https://github.com/AndreasFMueller/SeminarSpezielleFunktionen.git>



# **Teil I**

# **Grundlagen**



# Einleitung

## Der mathematische Funktionsbegriff

Der moderne mathematische Funktionsbegriff ist die Krönung einer langen Entwicklung. Erste Ansätze sind in der Darstellung voneinander abhängiger Größen in einem Koordinatensystem durch Nikolaus von Oresme im 14. Jahrhundert zu erkennen. Dieser Ansatz, Funktionen einfach nur als Kurven zu betrachten, war bis ins 17. Jahrhundert verbreitet. Der Begriff *Funktion* selbst geht wahrscheinlich auf Leibniz zurück.

Euler verwendete den Begriff oft austauschbar für zwei im Prinzip verschiedene Vorstellungen. Einerseits sah er jeden “analytischen Ausdruck” in einer Variablen  $x$  als eine Funktion an, andererseits betrachtete er eine in einem Koordinatensystem freihändig gezeichnete Kurve als eine Funktion. Heute unterscheiden wir zwischen der Funktion, also der Zuordnung von  $x$  zu den Funktionswerten  $f(x)$  und dem Graphen, also der von Paaren  $(x, f(x))$  gebildeten Kurve in einem Koordinatensystem. Nach letzterer Vorstellung ist auch die Wurzelfunktion, die Umkehrfunktion der Quadratfunktion,  $f(x) = x^2$  eine Funktion. Da zu jedem Argument zwei verschiedene Werte  $\pm \sqrt{x}$  für die Wurzel möglich sind, lässt sich diese “Funktion” nicht durch einen “analytischen Ausdruck” beschreiben. Euler beschrieb diese Situation als *mehrdeutige Funktion*.

Was “analytische Ausdrücke” alles umfassen sollen, ist ebenfalls nicht scharf definiert. Dahinter verbergen sich viele verdeckte Annahmen, zum Beispiel dass Funktionen automatisch stetig und möglicherweise sogar differenzierbar sind. Für Lagrange waren nur Funktionen akzeptabel, die durch Potenzreihen definiert waren, solche Funktionen nennen wir heute *analytisch*. Die Wahl von Potenzreihen zur Definition von Funktion ist einerseits willkürlich, warum nicht Linearkombinationen von trigonometrischen Funktionen? Andererseits gibt es beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren Potenzreihe nicht gegen die Funktion konvergiert.

Im 19. Jahrhundert erfuhr die Analysis eine Reformierung. Ausgehend vom nun präzis gefassten Grenzwertbegriff wurden Stetigkeit und Differenzierbarkeit als eigenständige Eigenschaften von Funktionen erkannt. Eine Funktion war jetzt nur noch eine eindeutige Zuordnung  $x \mapsto f(x)$ . Stetigkeit ist die Eigenschaft, dass der Grenzwert in einem Punkt des Definitionsbereichs existiert und mit dem Funktionswert in diesem Punkt übereinstimmt. Später wurden auch Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit als Eigenschaften von Funktionen erkannt, die vorhanden sein können, aber nicht müssen.

Der nun präzis gefasste Funktionsbegriff ist nur selten direkt anwendbar. In der Physik treten Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen auf. Sie sind also immer mindestens differenzierbar, haben aber typischerweise noch viele weitere Eigenschaften. So sind zum Beispiel die Lösungen der Differentialgleichung  $y'' = -n^2y$  auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  die Funktionen  $\sin(nx)$  und  $\cos(nx)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wie Fourier herausgefunden hat, lässt sich jede stetige  $2\pi$ -periodische Funktion als Linearkombination dieser Funktionen approximieren.

Eine Familie von Differentialgleichungen, die durch wenige Parameter charakterisiert ist, führt auch zu einer Familie von Lösungsfunktionen, die sich durch die gleichen Parameter beschreiben lassen. Sie ist unmittelbar nützlich, da sie jedes Anwendungsproblem löst, welches durch diese Differentialgleichung modelliert werden kann. In diesem Sinne ist eine solche spezielle Funktionenfamilie interessanter als eine beliebige differenzierbare Funktion.

## Spezielle Funktionen

Der abstrakte Funktionsbegriff auferlegt einer Funktion nur ganz wenige Einschränkungen. Damit lässt sich zwar eine mathematische Theorie entwickeln, die klärt, unter welchen Umständen zusätzliche Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu erwarten sind. Allgemeine Berechnungen kann man mit diesem Begriff aber nicht durchführen, seine Anwendbarkeit ist beschränkt. Praktisch nützlich wird der Funktionsbegriff also erst, wenn man ihn einschränkt auf anwendungsrelevante Eigenschaften. Die Mathematik hat in ihrer Geschichte genau dies immer wieder getan, wie im Folgenden kurz skizziert werden soll.

## Polynome und Wurzeln

Eine Polynomgleichung wie etwa

$$p(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

kann manchmal dadurch gelöst werden, dass man die Nullstellen errät und damit eine Faktorisierung  $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  konstruiert. Doch im Allgemeinen wird man die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verwenden, die auf quadratischem Ergänzen basiert. Es erlaubt die Gleichung (1) umzuwandeln in

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Um diese Gleichung nach  $x$  aufzulösen, muss man die inverse Funktion der Quadratfunktion zur Verfügung haben, die Wurzelfunktion. Dies ist wohl das älteste Beispiel einer speziellen Funktion, die man zu dem Zweck eingeführt hat, spezielle algebraische Gleichungen lösen zu können. Sie liefert die bekannte Lösungsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

für die quadratische Gleichung.

## Exponential- und Logarithmusfunktion

Durch die Definition der Wurzelfunktion ist das Problem der numerischen Berechnung der Nullstelle natürlich noch nicht gelöst, aber man hat ein handliches mathematisches Symbol gewonnen, mit dem man die Lösungen übersichtlich beschreiben und algebraisch manipulieren kann. Diese Idee steht hinter allen weiteren in diesem Buch diskutierten Funktionen: wann immer ein wichtiges mathematisches Konzept sich nicht direkt durch die bereits entwickelten Funktionen ausdrücken lässt, erfindet man dafür eine neue Funktion oder Familie von Funktionen. Beispielsweise hat sich die Darstellung von Zahlen  $x$  als Potenzen einer gemeinsamen Basis, zum Beispiel  $x = 10^y$ , als sehr nützlich

herausgestellt, um Multiplikationen auf die von Hand leichter ausführbaren Additionen zurückzuführen. Man braucht also die Fähigkeit, die Abhängigkeit des Exponenten  $y$  von  $x$  auszudrücken, mit anderen Worten, man braucht die Logarithmusfunktion.

Auch die Logarithmusfunktion erlaubt nicht, die Gleichungen  $xe^x = y$  nach  $x$  aufzulösen. Solche Exponentialgleichungen treten in verschiedenster Form auch in Anwendungen auf. Die Lambert- $W$ -Funktion, die in Abschnitt 2.3 eingeführt wird, löst genau diese Aufgabe.

### Geometrisch definierte spezielle Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen entstanden bereits im Altertum um das Problem der Vermessung der Himmelskugel zu lösen. Man kann sie aber auch zur Parametrisierung eines Kreises oder zur Beschreibung von Drehungen mit Drehmatrizen verwenden. Sie stellen auch eine Zusammenhang zwischen der Bogenlänge entlang eines Kreises und der zugehörigen Sehne her. Diese Ideen lassen sich auf eine grössere Klasse von Kurven, nämlich die Kegelschnitte verallgemeinern. Diese werden in Kapitel 3 eingeführt. Die Parametrisierungen der Hyperbeln zum Beispiel führt auf hyperbolische Funktion und macht eine Verbindung zu Exponential- und Logarithmusfunktion sichtbar.

### Lösungen von Differentialgleichungen

Alternativ kann man  $\sin x$  und  $\cos x$  als spezielle Lösungen der Differentialgleichung  $y'' = -y$  verstehen. Viele andere Funktionen wie die hyperbolischen Funktionen oder die Bessel-Funktionen sind ebenfalls Lösungen spezieller Differentialgleichungen.

Auch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, auf die im Kapitel 10 eingegangen wird, gibt Anlass zu interessanten Lösungsfunktionen. Die Separation des Poisson-Problems in Kugelkoordinaten führt zum Beispiel auf die Kugelfunktionen, mit denen sich beliebige Funktionen auf einer Kugeloberfläche analysieren und synthetisieren lassen. Die Lösungen einer linearer gewöhnlicher Differentialgleichung können oft mit Hilfe von Potenzreihen dargestellt werden. So kann man zum Beispiel die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen finden. Die Konvergenz einer Potenzreihe wird aber durch Singularitäten eingeschränkt. Komplexe Potenzreihen ermöglichen aber, solche Stellen zu "umgehen". Die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen bildet einen allgemeinen Rahmen, mit solchen Funktionen umzugehen und ist zum Beispiel nötig, um die Bessel-Funktionen der zweiten Art zu konstruieren, die ebenfalls Lösungen der Bessel-Gleichung sind, aber bei  $x = 0$  eine Singularität aufweisen.

### Stammfunktionen

Die Stammfunktion  $F(x)$  einer gegebenen Funktion  $f(x)$  ist natürlich auch die Lösung der besonders einfachen Differentialgleichung  $F' = f$ . Ein bekanntes Beispiel ist die Stammfunktion der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

der Normalverteilung, für die aber keine geschlossene Darstellung mit bekannten Funktionen bekannt ist. Sie kann aber durch die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

dargestellt werden. Mit dem Risch-Algorithmus kann man nachweisen, dass es tatsächlich keine Möglichkeit gibt, die Stammfunktion in geschlossener Form durch die bereits bekannten Funktionen darzustellen, die Definition einer neuen speziellen Funktion ist also der einzige Ausweg. Die Fehlerfunktion ist heute in der Standardbibliothek enthalten auf gleicher Stufe wie Wurzeln, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen oder Logarithmen.

### Was ist zu erwarten?

Spezielle Funktionen wie die eben angedeuteten werden also zu Bausteinen, die in der Lösung algebraischer oder auch analytischer Probleme verwendet werden können. Die Erfahrung zeigt, dass diese Funktionen immer wieder nützlich sind, es lohnt sich also, ihre Berechnung zum Beispiel in einer Bibliothek zu implementieren. Spezielle Funktionen sind in diesem Sinn eine mathematische Form des informatischen Prinzips des “code reuse”.

Die nachstehenden Kapitel sollen die vielfältigen Arten illustrieren, wie diese Prinzipien zu neuen und nützlichen speziellen Funktionen und ihren Anwendungen führen können. Hier eine kurze Übersicht über ihren Inhalt.

1. Potenzen und Wurzeln: Potenzen und Polynome sind die einfachsten Funktionen, die sich unmittelbar aus den arithmetischen Operationen konstruieren lassen. Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die Wurzelfunktionen, sie lösen gewisse algebraische Gleichungen. Aus den Polynomen lassen sich weiter rationale Funktionen und Potenzreihen konstruieren, die als wichtige Werkzeuge zur Konstruktion spezieller Funktionen in späteren Kapiteln sind.
2. Exponentialfunktion und Exponentialgleichungen. Die Exponentialfunktion entsteht aus dem Zinsproblem durch Grenzwert, die Jost Bürgi zur Berechnung seiner Logarithmentabelle verwendet hat. Hier zeigt sich die Nützlichkeit spezieller Funktionen als Grundlage für die numerische Rechnung: Logarithmentafeln waren über Jahrhunderte das zentrale Werkzeug für die Durchführung numerischer Rechnung. Besonders nützlich ist aber auch die Potenzreihendarstellung der Exponentialdarstellung, die meist für die numerische Berechnung verwendet wird. Die Lambert-W-schliesslich löst gewisse Exponentialgleichungen.
3. Spezielle Funktionen aus der Geometrie. Dieses Kapitel startet mit der langen Geschichte der trigonometrischen Funktionen, den wahrscheinlich wichtigsten speziellen Funktionen für geometrische Anwendungen. Es führt aber auch die Kegelschnitte, die hyperbolischen Funktionen und andere Parametrisierungen der Kegelschnitte ein, die später wichtig werden. Es beginnt auch die Diskussion einiger geometrischer Fragestellungen die sich oft nur durch Definition neuer spezieller Funktionen lösen lassen, wie zum Beispiel das Problem der Kurvenlänge auf einer Ellipse.
4. Spezielle Funktionen und Rekursion. Viele Probleme lassen eine Lösung in rekursiver Form zu. Zum Beispiel lässt sich die Fakultät durch eine Rekursionsbeziehung vollständig definieren. Dieses Kapitel zeigt, wie sich die Fakultät zur Gamma-Funktion  $\Gamma(x)$  erweitern lässt, die für beliebige reelle  $x$  definiert ist. Sie ist aber nur die Spitze eines Eisbergs von weiteren wichtigen Funktionen. Die Beta-Integrale sind ebenfalls durch Rekursionsbeziehungen charakterisiert, lassen sich durch Gamma-Funktionen ausdrücken und haben als Anwendung die Verteilungsfunktionen der Ordnungsstatistiken. Lineare Differenzengleichungen sind Rekursionsgleichungen, die sich besonders leicht mit Potenzfunktionen lösen lassen. Alle diese Funktionen sind Spezialfälle einer sehr viel grösseren Klasse von Funktionen, den hypergeometrischen Funktionen, die sich durch eine Rekursionsbeziehung der Koeffizienten ihrer

Potenzreihenentwicklung auszeichnen. Es wird sich in nächsten Kapitel zeigen, dass sie besonders gut geeignet sind, Lösungen von linearen Differentialgleichungen zu beschreiben.

5. Differentialgleichungen. Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen sind meistens die erste Anwendung, in der man die klassischen speziellen Funktionen kennengelernt. Sie entstehen mit Hilfe der Potenzreihenmethode und können daher als hypergeometrische Funktionen geschrieben werden. Sie sind aber von derart grosser Bedeutung für die Anwendung, dass viele dieser Funktionen als eigenständige Funktionenfamilien definiert worden sind. Die Bessel-Funktionen werden in diesem Zusammenhang eingehend behandelt.
6. Integrale können als Lösungen sehr spezieller Differentialgleichungen betrachtet werden. Eine Stammfunktion  $F(x)$  der Funktion  $f(x)$  hat als Ableitung die ursprüngliche Funktion:  $F'(x) = f(x)$ . Während Ableiten ein einfacher, algebraischer Prozess ist, scheint das Finden einer Stammfunktion sehr viel anspruchsvoller zu sein. Spezielle Funktionen sinnvoll sein, wenn eine Stammfunktion sich nicht mit den bereits definierten Funktionen ausdrücken lässt. Es gibt eine systematische Methode zu entscheiden, ob eine Stammfunktion sich durch “elementare Funktionen” ausdrücken lässt, sie wird oft der Risch-Algorithmus genannt.
7. Orthogonalität. Mit dem Integral lassen sich auch für Funktionen Skalarprodukte definieren. Orthogonalität zwischen Funktionen zeichnet dann Funktionen aus, die sich besonders gut zur Darstellung beliebiger stetiger oder integrierbarer Funktionen eignen. Die Fourier-Theorie und ihre vielen Varianten sind ein Resultat. Besonders einfache orthogonale Funktionenfamilien sind die orthogonalen Polynome, die außerdem zu ausserordentlich genauen numerischen Integrationsverfahren führen.
8. Integraltransformationen. Die trigonometrischen Funktionen sind die Grundlage der Fourier-Theorie. Doch auch andere spezielle Funktionenfamilien können ähnlich nützliche Integraltransformationen hergeben. Die Bessel-Funktionen stellen sich in diesem Zusammenhang als die Polarkoordinaten-Variante der Fourier-Theorie in der Ebene heraus.
9. Funktionentheorie. Einige Eigenschaften der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind allein mit der reellen Analysis nicht zu bewältigen. In der Welt der speziellen Funktionen hat man aber strengere Anforderungen an Funktionen, sie lassen sich immer als Funktionen einer komplexen Variablen verstehen. Dieses Kapitel stellt die wichtigsten Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen zusammen und wendet sie zum Beispiel auf das Problem an, weitere Lösungen der Bessel-Differentialgleichung zu finden.
10. Partielle Differentialgleichungen sind eine der wichtigsten Quellen der gewöhnlichen Differentialgleichungen, die nur mit speziellen Funktionen gelöst werden können. So führen rotationssymmetrische Wellenprobleme in der Ebene ganz natürlich auf die Besselsche Differentialgleichung und damit auf die Bessel-Funktionen als Lösungsfunktionen.
11. Elliptische Funktionen. Einige der in Kapitel 3 angesprochenen Fragestellungen wie der Berechnung der Bogenlänge auf einer Ellipse lassen sich mit keiner der bisher vorgestellten Technik lösen. In diesem Kapitel werden die elliptischen Integrale und die zugehörigen Umkehrfunktionen vorgestellt. Die Jacobischen elliptischen Funktionen verallgemeinern die trigonometrischen Funktionen und können gewisse nichtlineare Differentialgleichungen lösen. Sie finden auch Anwendungen im Design elliptischer Filter (siehe Kapitel 26).

## Einleitung

Natürlich ist damit das weite Gebiet der speziellen Funktionen nur ganz grob umrissen. Weitere Aspekte und Anwendungen werden in den Artikeln im zweiten Teil vorgestellt. Eine Übersicht dazu findet der Leser auf Seite 353.

# Kapitel 1

## Potenzen und Wurzeln

Die einfachsten Funktionen, die man allein mit den arithmetischen Operationen definieren kann, sind Polynome der unabhängigen Variablen. Die Einfachheit, mit der sich die Werte eines Polynoms berechnen lassen, rechtfertigt natürlich nicht, dafür eine spezielle Funktion zu definieren. Es gibt aber mindestens die folgenden drei wichtige Bereiche, in denen Polynome eine besondere Bedeutung zu kommt, die eine tiefergehende Diskussion rechtfertigen.

1. Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion sind viel schwieriger zu berechnen und können als eine besonders einfache Art von speziellen Funktionen betrachtet werden. Die in Abschnitt 1.2 definierten Wurzelfunktionen sind der erste Schritt zur Lösung von Polynomgleichungen.
2. Es lassen sich interessante Familien von Funktionen definieren, die zum Teil aus Polynomen bestehen. Oft zeichnen sie sich durch Besonderheiten aus, die direkt mit der Tatsache zusammenhängen, dass sie Polynom sind. Ein Beispiel einer solchen Funktionenfamilie wird in Abschnitt 1.3 vorgestellt.
3. Alles speziellen Funktionen sind analytisch, sie haben eine konvergente Potenzreihenentwicklung. Die Partialsummen einer Potenzreihenentwicklung sind Approximationen An die wichtigsten Eigenschaften von Potenzreihen wird in Abschnitt 1.5 erinnert.

### 1.1 Polynome

Die wohl einfachsten Funktionen, die sich mit den arithmetischen Operationen konstruieren lassen, sind die Polynome.

**Definition 1.1.** Ein Polynom vom Grad  $n$  ist die Funktion

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei  $a_n \neq 0$  sein muss. Das Polynom heisst normiert, wenn  $a_n = 1$  ist. Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in der Menge  $K$  wird mit  $K[x]$  bezeichnet.

Die Menge  $K[x]$  ist heisst auch der *Polynomring*, weil  $K[x]$  mit der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Polynomen eine algebraische Struktur bildet, die man einen Ring mit 1 nennt. Im Folgenden werden wir uns auf die Fälle  $K = \mathbb{Q}$ ,  $K = \mathbb{R}$  und  $K = \mathbb{C}$  beschränken.

Für den Grad eines Polynoms gelten die bekannten Rechenregeln

$$\begin{aligned}\deg(a(x) + b(x)) &\leq \max(\deg a(x), \deg b(x)) \\ \deg(a(x) \cdot b(x)) &= \deg a(x) + \deg b(x)\end{aligned}$$

für beliebige Polynome  $a(x), b(x) \in K[x]$ .

In Abschnitt 7.1 werden Familien von Polynomen konstruiert werden, die sich durch eine Orthogonalitätseigenschaft auszeichnen. Diese Polynome lassen sich typischerweise auch als Lösungen von Differentialgleichungen finden. Ausserdem werden hypergeometrische Funktionen

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right),$$

die in Abschnitt 4.4 definiert werden, zu Polynomen, wenn mindestens einer der Parameter  $a_k$  negativ ganzzahlig ist. Polynome sind also bereits eine vielfältige Quelle von speziellen Funktionen.

Viele spezielle Funktionen werden aber komplizierter sein und sich nicht als einfache Polynome ausdrücken lassen. Genau diese Unmöglichkeit rechtfertigt ja, neue Funktionen zu definieren. Es bleibt aber immer noch die Notwendigkeit, effiziente Berechnungsverfahren für die speziellen Funktionen zu konstruieren. Dank des folgenden Satzes kann dies immer mit Polynomen geschehen.

**Satz 1.2** (Weierstrass). *Eine auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f(x)$  lässt sich durch eine Folge  $p_n(x)$  von Polynomen gleichmässig approximieren.*

Der Satz sagt in dieser Form nichts darüber aus, wie die Approximationspolynome konstruiert werden sollen. Von Bernstein gibt es konstruktive Beweise dieses Satzes, welche auch explizit eine Folge von Approximationspolynomen konstruieren. In der späteren Entwicklung werden wir für die meisten speziellen Funktionen Potenzreihen entwickeln, deren Partialsummen ebenfalls als Approximationen dienen können. Weitere Möglichkeiten liefern Interpolationsmethoden der numerischen Mathematik.

Diese Betrachtungsweise von Polynomen als Funktionen trägt aber den zusätzlichen algebraischen Eigenschaften des Polynomringes nicht ausreichend Rechnung. Zum Beispiel bedeutet Gleichheit von zwei reellen Funktion  $f(x)$  und  $g(x)$ , dass man  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  nachprüfen muss. Für Polynome reicht es jedoch, die Funktionswerte in nur wenigen Punkten zu vergleichen. Dies äusserst sich zum Beispiel auch im Prinzip des Koeffizientenvergleichs von Satz 1.4. Im Gegensatz zu beliebigen Funktionen kann man daher Aussagen über Polynome immer mit endlich Algorithmen entscheiden. Die nächsten Abschnitte sollen diese algebraischen Eigenschaften zusammenfassen.

### 1.1.1 Polynomdivision, Teilbarkeit und grösster gemeinsamer Teiler

Der schriftliche Divisionsalgorithmus für Zahlen funktioniert auch für die Division von Polynomen. Zu zwei beliebigen Polynomen  $p(x)$  und  $q(x)$  lassen sich also immer zwei Polynome  $a(x)$  und  $r(x)$  finden derart, dass  $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$ . Das Polynom  $a(x)$  heisst der *Quotient*,  $r(x)$  der *Rest* der Division. Das Polynom  $p(x)$  heisst *teilbar* durch  $q(x)$ , geschrieben  $q(x) \mid p(x)$ , wenn  $r(x) = 0$  ist.

#### Grösster gemeinsamer Teiler

Mit dem Begriff der Teilbarkeit geht auch die Idee des grössten gemeinsamen Teilers einher. Ein gemeinsamer Teiler zweier Polynome  $a(x)$  und  $b(x)$  ist ein Polynom  $g(x)$ , welches beide Polynome teilt, also  $g(x) \mid a(x)$  und  $g(x) \mid b(x)$ . Ein Polynom  $g(x)$  heisst *grösster gemeinsamer Teiler* von  $a(x)$

und  $b(x)$ , wenn jeder andere gemeinsame Teiler  $f(x)$  von  $a(x)$  und  $b(x)$  auch ein Teiler von  $g(x)$  ist. Man beachte, dass die skalaren Vielfachen eines grössten gemeinsamen Teilers ebenfalls grösste gemeinsame Teiler sind, der grösste gemeinsame Teiler ist also nicht eindeutig bestimmt.

### Der euklidische Algorithmus

Zur Berechnung eines grössten gemeinsamen Teilers steht wie bei den ganzen Zahlen der euklidische Algorithmus zur Verfügung. Dazu bildet man die Folgen von Polynomen

$$\begin{aligned} a_0(x) &= a(x) & b_0(x) &= b(x) & \Rightarrow & a_0(x) = b_0(x)q_0(x) + r_0(x) \\ a_1(x) &= b_0(x) & b_1(x) &= r_0(x) & \Rightarrow & a_1(x) = b_1(x)q_1(x) + r_1(x) \\ a_2(x) &= b_1(x) & b_2(x) &= r_1(x) & \Rightarrow & a_2(x) = b_2(x)q_2(x) + r_2(x) \\ &&&&\vdots& \\ a_{m-1}(x) &= b_{m-2}(x) & b_{m-1}(x) &= r_{m-2}(x) & \Rightarrow & a_{m-1}(x) = b_{m-1}(x)q_{m-1}(x) + r_{m-1}(x) \quad \text{mit } r_{m-1}(x) \neq 0 \\ a_m(x) &= b_{m-1}(x) & b_m(x) &= r_{m-1}(x) & \Rightarrow & a_m(x) = b_m(x)q_m(x). \end{aligned}$$

Der Index  $m$  ist der Index, bei dem zum ersten Mal  $r_m(x) = 0$  ist. Dann ist  $g(x) = r_{m-1}(x)$  ein grösster gemeinsamer Teiler.

### Der erweiterte euklidische Algorithmus

Die Konstruktion der Folgen  $a_n(x)$  und  $b_n(x)$  kann in Matrixform kompakter geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} a_k(x) \\ b_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k-1}(x) \\ r_{k-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1}(x) \\ b_{k-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Kürzen wir die  $2 \times 2$ -Matrix als

$$Q_k(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k(x) \end{pmatrix}$$

ab, dann ergibt das Produkt der Matrizen  $Q_0(x)$  bis  $Q_m(x)$

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{m-1}(x) \\ r_m(x) \end{pmatrix} = Q_m(x)Q_{m-1}(x) \cdots Q_1(x)Q_0(x) \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung des Produktes der Matrizen  $Q_k(x)$  kann man rekursiv vorgehen mit der Rekursionsformel

$$S_k(x) = Q_k(x)S_{k-1}(x) \quad \text{mit} \quad S_{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ausgeschrieben bedeutet dies Matrixrekursionsformel

$$S_{k-1}(x) = \begin{pmatrix} c_{k-1} & d_{k-1} \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q_k(x)S_{k-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k-1} & d_{k-1} \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_k & d_k \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Daraus lässt sich für die Matrixelemente die Rekursionsformel

$$\left. \begin{array}{l} c_{k+1} = c_{k-1} - q_k(x)c_k(x) \\ d_{k+1} = d_{k-1} - q_k(x)d_k(x) \end{array} \right\} \quad \text{mit Startwerten} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{-1} = 1, \quad c_0 = 0 \\ d_{-1} = 0, \quad d_0 = 1. \end{array} \right.$$

Wendet man die Matrix  $S_m(x)$  auf den Vektor mit den Komponenten  $a(x)$  und  $b(x)$ , erhält man die Beziehungen

$$g(x) = c_{k-1}(x)a(x) + d_{k-1}(x)b(x) \quad \text{und} \quad 0 = c_k(x)a(x) + d_k(x)b(x).$$

Dieser Algorithmus heisst der erweiterte euklidische Algorithmus. Wir fassen die Resultate zusammen im folgenden Satz.

**Satz 1.3.** Zu zwei Polynomen  $a(x), b(x) \in K[x]$  gibt es Polynome  $g(x), c(x), d(x) \in K[x]$  derart, dass  $g(x)$  ein grösster gemeinsamer Teiler von  $a(x)$  und  $b(x)$  ist, und ausserdem

$$g(x) = c(x)a(x) + d(x)b(x)$$

gilt.

### 1.1.2 Faktorisierung und Nullstellen

Ist  $\alpha$  eine Nullstelle des Polynoms  $a(x)$ , also  $a(\alpha) = 0$ . Der Divisionsalgorithmus mit für die Polynome  $a(x)$  und  $b(x) = x - \alpha$  liefert zwei Polynome  $q(x)$  für den Quotienten und  $r(x)$  für den Rest mit den Eigenschaften

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x) \quad \text{mit} \quad \deg r < \deg b(x) = 1.$$

Der Rest  $r(x)$  ist somit eine Konstante. Setzt man  $x = \alpha$  ein, folgt

$$0 = a(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = r(\alpha),$$

der Rest  $r(x)$  muss also verschwinden. Für eine Nullstelle  $\alpha$  von  $a(x)$  ist  $a(x)$  durch  $(x - \alpha)$  teilbar. Daraus folgt auch, dass ein Polynom  $a(x)$  vom Grad  $n = \deg a(x)$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen haben kann.

Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  alle Nullstellen von  $a(x)$ , dann lässt sich  $a(x)$  zerlegen in Faktoren

$$a(x) = (x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k}b(x).$$

Das Polynom  $b(x) \in K[x]$  hat keine Nullstellen in  $K$ .

Wenn zwei Polynome  $a(x)$  und  $b(x)$  eine gemeinsame Nullstelle  $\alpha$  haben, dann ist  $(x - \alpha)$  ein Teiler beider Polynome und somit auch ein Teiler eines grössten gemeinsamen Teilers. Insbesondere sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers gemeinsame Nullstellen von  $a(x)$  und  $b(x)$ .

### 1.1.3 Koeffizienten-Vergleich

Wenn zwei Polynome  $a(x)$  und  $b(x)$  vom Grad  $\leq n$  die gleichen Koeffizienten haben, dann sind sie selbstverständlich gleich. Weniger klar ist, ob zwei Polynome, die die gleichen Werte für beliebige  $x$  haben, auch die gleichen Koeffizienten haben. Wir nehmen also an, dass  $a(x) = b(x)$  gilt für jedes  $x \in K$  und wollen daraus ableiten, dass die Koeffizienten übereinstimmen müssen. Seien  $x_1, \dots, x_n$  verschiedene Elemente in  $K$ , dann hat das Polynom  $p(x) = a(x) - b(x)$ , welches Grad  $\leq n$  hat, die  $n$  Nullstellen  $x_k$  für  $k = 1, \dots, n$ .  $p(x)$  ist also durch alle Polynome  $x - x_k$  teilbar. Weil  $\deg p \leq n$  ist, muss

$$0 = a(x) - b(x) = p(x) = p_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

sein. Ist  $y \in K$  verschieden von den Nullstellen  $x_i$ , dann ist in  $y - x_i \neq 0$  für alle  $i$ . Für das Produkt gilt dann

$$0 = p(y) = p_n \underbrace{(x - x_1)}_{\neq 0} \cdots \underbrace{(x - x_n)}_{\neq 0},$$

so dass  $p_n = 0$  sein muss, was schliesslich dazu führt, dass alle Koeffizienten von  $a(x) - b(x)$  verschwinden. Daraus folgt das Prinzip des Koeffizientenvergleichs:

**Satz 1.4** (Koeffizientenvergleich). *Zwei Polynome  $a(x)$  und  $b(x)$  stimmen genau dann überein, wenn sie die gleichen Koeffizienten haben.*

Man beachte, dass dieses Prinzip nur funktioniert, wenn es genügend viele verschiedene Elemente in  $K$  gibt. Für die endlichen Körper  $\mathbb{F}_p$  gilt dies nicht, denn es gilt

$$a(x) = x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$$

für jede Zahl  $x \in \mathbb{F}_p$ , das Polynom  $a(x)$  mit Grad  $p$  hat also genau  $p$  Nullstellen, es gibt aber keine weitere Nullstelle, mit der man wie oben schliessen könnte, dass  $a(x)$  das Nullpolynom ist.

### 1.1.4 Berechnung von Polynom-Werten

Die naive Berechnung der Werte eines Polynoms  $p(x)$  vom Grad  $n$  beginnt mit der Berechnung der Potenzen von  $x$ . Da alle Potenzen benötigt werden, wird man dazu  $n - 1$  Multiplikationen benötigen. Die Potenzen müssen anschliessend mit den Koeffizienten multipliziert werden, dazu sind weitere  $n$  Multiplikationen nötig. Der Wert des Polynoms kann also erhalten werden mit  $2n - 1$  Multiplikationen und  $n$  Additionen.

Die Anzahl nötiger Multiplikationen kann mit dem folgenden Vorgehen reduziert werden, welches auch als das *Horner-Schema* bekannt ist. Statt erst am Schluss alle Terme zu addieren, addiert man so früh wie möglich. Zum Beispiel multipliziert man  $(a_n x + a_{n-1})$  mit  $x$ , was auf die Multiplikationen beider Terme mit  $x$  hinausläuft. Mit dieser Idee kann man das Polynom als

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0 = ((\dots((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \dots) x + a_1) x + a_0$$

schreiben. Beginnend bei der innersten Klammer sind genau  $n$  Multiplikationen und  $n$  Additionen nötig, man spart mit diesem Vorgehen also  $n - 1$  Multiplikationen.

## 1.2 Lösungen von Polynomgleichungen

Die Berechnung von Polynomen ist sehr einfach, da nur arithmetische Grundoperationen benötigt werden. In vielen Anwendungen sind jedoch die Argumente gefragt, für die ein Polynom einen bestimmten Wert annimmt. Es geht also um die Lösung von Gleichungen der Form

$$p(x) = c$$

für ein Polynom  $p(x)$  und eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$ .

### 1.2.1 Fundamentalsatz der Algebra

In Abschnitt 1.1.2 wurde gezeigt, dass sich jede Nullstellen  $\alpha$  eines Polynoms als Faktor  $x - \alpha$  abspalten lässt. Jedes Polynom liess sich in ein Produkt von Linearfaktoren und einen Faktor zerlegen, der keine Nullstellen hat. Zum Beispiel hat das Polynom  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$  keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$ . Eine solche Nullstelle müsste eine Quadratwurzel von  $-1$  sein. Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  wurden genau mit dem Ziel konstruiert, dass  $i = \sqrt{-1}$  sinnvoll wird. Der Fundamentalsatz der Algebra zeigt, dass  $\mathbb{C}$  alle Nullstellen von Polynomen enthält.

**Satz 1.5** (Gauss). *Jedes Polynom  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$  zerfällt in ein Produkt*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

für Nullstellen  $\alpha_k \in \mathbb{C}$ .

### 1.2.2 Lösbarkeit durch Wurzelausdrücke

Der Fundamentalsatz macht keine Aussage darüber, wie die Nullstellen eines Polynoms gefunden werden können. Selbst für besonders einfache Gleichungen der Form

$$x^n = c \quad \text{oder Polynome der Form} \quad p(x) = x^n - c$$

gibt es keine direkte, nur auf den arithmetischen Operationen basierende Methode, eine Nullstelle oder Faktorisierung in endlich vielen Schritten zu finden. Dies rechtfertigt, für diese einfachen Fälle eine neue, spezielle Funktion zu definieren, die mindestens für reelle Koeffizienten die Nullstelle als Rückgabewert hat.

**Definition 1.6.** *Die inverse Funktion der Potenzfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto y = f(x) = x^n$  heisst die  $n$ -te Wurzel und wird*

$$\sqrt[n]{\cdot} = f^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$$

*geschrieben. Für gerades  $n$  ist der Definitionsbereich der Wurzel nur  $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$ , für ungerades  $n$  ist  $D = \mathbb{R}$ . Für  $n = 2$  wird die Wurzel als  $\sqrt[2]{y} = \sqrt{y}$  geschrieben.*

Mit der Wurzelfunktion ist es jetzt möglich, auch kompliziertere Gleichungen zu lösen:

1. Für negative Argument  $y < 0$  müssen Quadratwurzeln als  $\sqrt{y} = i\sqrt{-y}$  definiert werden.
2. Mindestens der Betrag der Wurzel einer komplexen Zahl lässt sich jetzt sofort mittels  $|\sqrt[n]{c}| = \sqrt[n]{|c|}$  berechnen. Für das Argument sind jedoch die in Abschnitt definierten trigonometrischen Funktionen notwendig.
3. Die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. Für kubische Gleichungen hat Cardano eine Lösung gefunden, die Nur Wurzelausdrücke und arithmetische Operationen verwendet. Die Gleichung  $x^3 + px + q = 0$  hat die Nullstelle

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

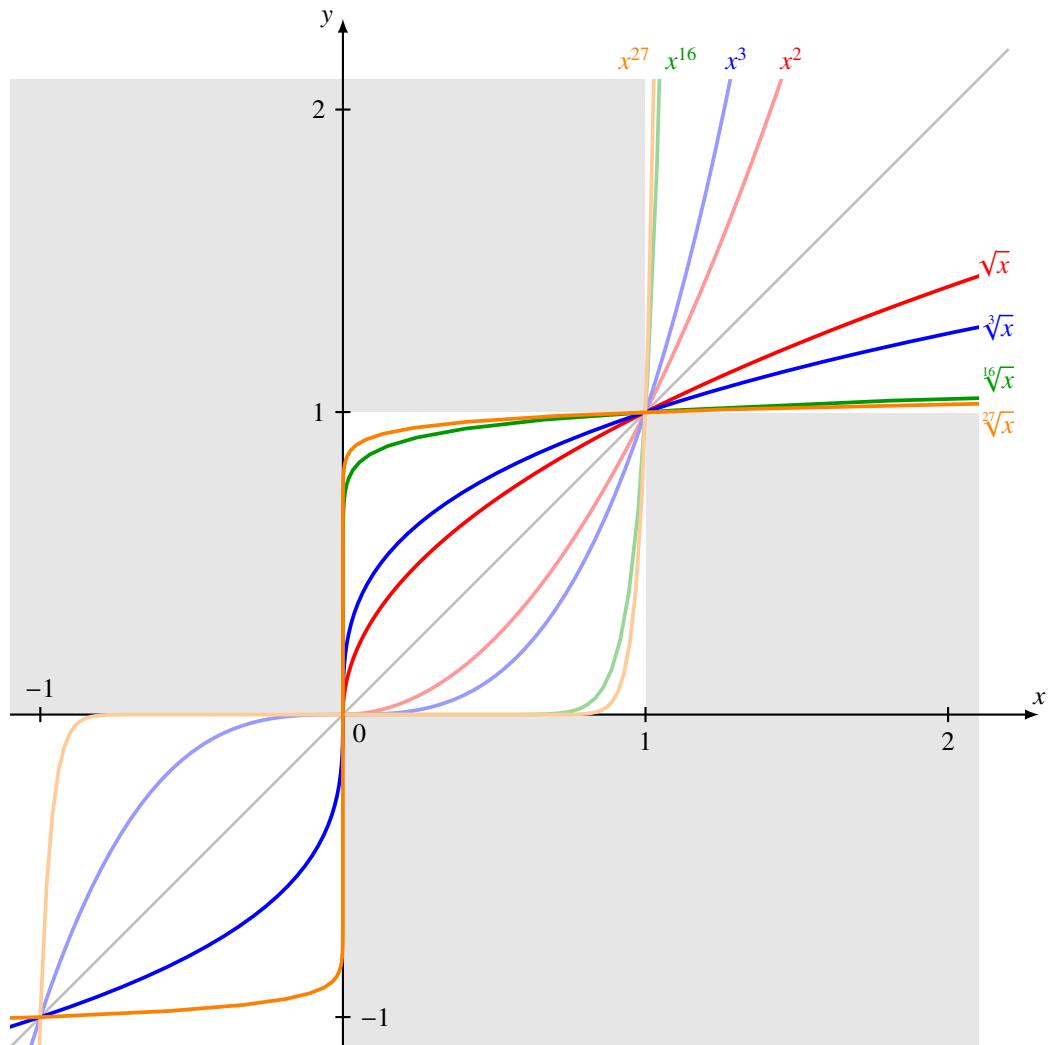


Abbildung 1.1: Graph der Wurzelfunktionen  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  als Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen  $x \mapsto x^n$  für  $n = 2$  (rot),  $n = 3$  (blau),  $n = 16$  (grün) und  $n = 27$  (orange).

Falls das Argument der Quadratwurzel negativ ist, muss eine Kubikwurzel aus einer komplexen Zahl berechnet werden, was wieder über die Möglichkeiten der oben definierten Wurzelfunktionen hinausgeht.

5. Für die Lösung einer Gleichung vierten Grades hat Ferrari eine Formel angegeben, die mit Wurzelausdrücken und arithmetischen Operationen auskommt.

Allerdings ist damit auch bereits ausgeschöpft, was die Wurzelfunktionen zur Lösung von Polynomgleichungen beitragen können. Der folgende Satz von Abel zeigt, dass man für Polynomgleichungen höheren Grades nicht mit einer Lösung durch Wurzelausdrücke rechnen kann.

**Satz 1.7** (Abel). *Für Polynomgleichungen vom Grad  $n \geq 5$  gibt es keine allgemeine Lösung durch Wurzelausdrücke.*

### 1.2.3 Algebraische Zahlen

Die Verwendung der komplexen Zahlen ist für numerische Rechnungen zweckmäßig. In den Anwendungen der Computer-Algebra hingegen erwartet man zum Beispiel exakte Formeln für eine Stammfunktion. Nicht rationale Zahlen können nur exakt verarbeitet werden, wenn Sie sich algebraisch in endlich vielen Schritten charakterisieren lassen. Dies ist zum Beispiel für rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$  möglich. Gewisse irrationale Zahlen kann man charakterisieren durch die Eigenschaft, Nullstelle eines Polynoms  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  mit rationalen Koeffizienten zu sein.

**Definition 1.8.** Eine Zahl  $\alpha$  heisst algebraisch über  $\mathbb{Q}$ , wenn es ein Polynom  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  gibt, welches  $\alpha$  als Nullstelle hat. Eine Zahl heisst transzendent über  $\mathbb{Q}$ , wenn sie nicht algebraisch ist über  $\mathbb{Q}$ .

Die Zahlen  $i = \sqrt{-1}$  und  $\sqrt{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  sind also algebraisch über  $\mathbb{Z}$ . Es ist gezeigt worden, dass  $\pi$  und  $e$  nicht nur irrational sind, sondern sogar transzendent.

Eine Polynomgleichung  $p(\alpha) = 0$  mit  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  hat eine Rechenregel für  $\alpha$  zur Folge. Dazu schreibt man

$$p_n \alpha^n + p_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^n = -\frac{1}{p_n} (p_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0).$$

Diese Regel erlaubt, jede Potenz  $\alpha^k$  mit  $k \geq n$  durch Potenzen von  $\alpha^l$  mit  $l < n$  auszudrücken. Die Zahlen, die sich durch arithmetische Operationen aus  $\alpha$  bilden lassen, lassen sich also sogar durch lineare Operationen aus  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  bilden. Sie bilden einen endlichdimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{Q}$ . Rechnen mit algebraischen Zahlen ist also in einem CAS exakt möglich, wie das in Abschnitt 6.3 für die Berechnung von Stammfunktionen illustriert wird.

## 1.3 Die Tschebyscheff-Polynome

Die Tschbeyscheff-Polynome sind ein Beispiel einer nützlichen Familie von Polynomen, die wegen ihrer Anwendbarkeit durchaus den Rang von speziellen Funktionen im weiteren Sinne verdienen. Sie ermöglichen, Interpolationspolynome mit besonders guten Fehlereigenschaften zu finden, haben aber auch andere Anwendungen zum Beispiel beim Design von Filtern in der Elektronik.

### 1.3.1 Motivation: Interpolation

Nach dem Satz von Weierstrass 1.2 lässt sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch ein Polynom approximieren. Interpolation kann zur Konstruktion solcher approximierender Polynome verwendet werden, wie die folgenden Abschnitte zeigen sollen. Die Optimierung des Approximationsfehlers führt auf die Spezifikation einer interessanten Familie von Polynomen.

#### Lagrange-Interpolationspolynome

Eine mögliche Lösung des Problems, solche approximierenden Polynome der Funktion  $f(x)$  zu finden, besteht darin, ein Polynom  $p(x)$  zu konstruieren, welches in einzelnen, Stützstellen genannten Werten  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  der unabhängigen Variablen mit  $f$  übereinstimmt, also

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Die Konstruktion eines solchen Polynoms geht aus vom Polynom

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

welches an allen Stützstellen verschwindet. Daraus lässt sich für jede Stützstelle ein Polynom

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (\widehat{x - x_j}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (\widehat{x_j - x_j}) \cdots (x_j - x_n)}$$

konstruieren, wobei  $(\widehat{x - x_j})$  bedeutet, dass dieser Faktor weggelassen werden soll. Das Polynom  $l_j(x)$  hat die Werte

$$l_j(x_k) = \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (\widehat{x_k - x_j}) \cdots (x_k - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (\widehat{x_j - x_j}) \cdots (x_j - x_n)} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (1.1)$$

auf den Stützstellen. Für  $j \neq k$  enthält der Zähler von  $l_j(x_k)$  den Faktor  $(x - x_k)$ , der für  $x = x_k$  verschwindet. Daher verschwindet auch  $l_j(x)$  für  $x = x_k$ .

Das sogenannte *Lagrange-Interpolationspolynom* ist das Polynom

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x).$$

Aus der Eigenschaft (1.1) folgt, dass

$$p(x_k) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x_k) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \delta_{jk} = f(x_k).$$

#### Fehler des Interpolationspolynoms

Der Approximationsfehler des Interpolationspolynoms kann mit der Formel

$$f(x) - p(x) = l(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

für einen geeigneten Wert  $\xi$  mit  $x_0 < \xi < x_n$ . Über die Ableitungen hat man natürlich keine Kontrolle, die einzige Möglichkeit, den Fehler möglichst klein zu halten ist daher, die Stützstellen so zu wählen, dass  $l(x)$  kleine Funktionswerte hat. Stützstellen in gleichen Abständen erweisen sich dafür als ungeeignet, da  $l(x)$  nahe  $x_0$  und  $x_n$  sehr stark oszilliert.

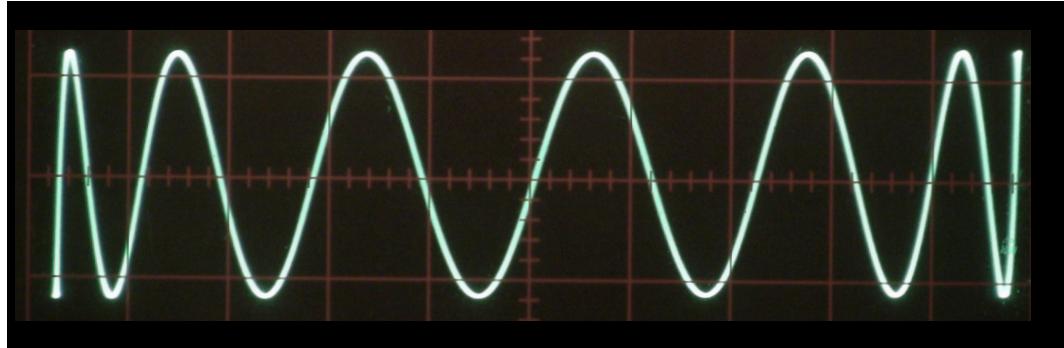
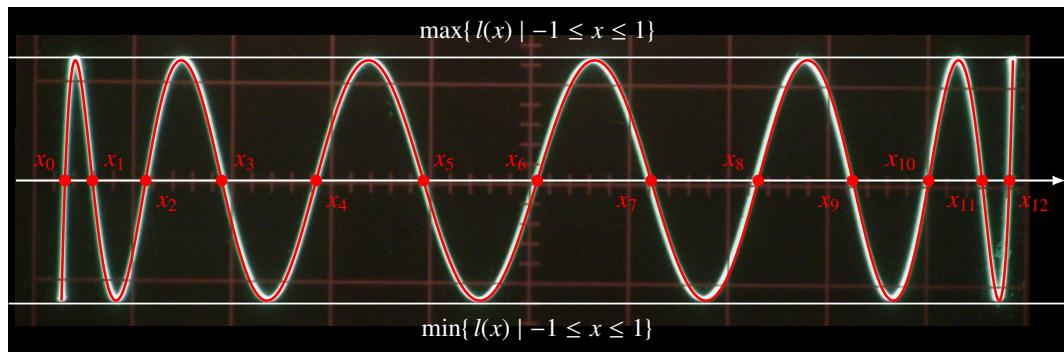
Abbildung 1.2: Lissajous-Figur für zwei Signale  $x = \cos t$  und  $y = \cos 12t$ .

Abbildung 1.3: Das Tschebyscheff-Polynom als Lösung des Interpolationsproblems.

### 1.3.2 Definition der Tschebyscheff-Polynome

Die Aufgabe, geeignete Stützstellen für das Interpolationsproblem zu finden, die den Fehler minimieren, ist als gleichbedeutend damit, ein Polynom zu finden, dessen Betrag beschränkt ist. Eine Lissajous-Figur wie die in Abbildung 1.2 erfüllt diese Bedingung. Sofern sie sich als Polynom ausdrücken lässt, könnte ihre Nullstellen das Interpolationsproblem optimal lösen.

In der Lissajous-Figur in Abbildung 1.2 ist die Funktion  $x = \cos t$  und  $y = \cos 12t$  dargestellt. Wegen  $t = \arccos x$  Als Funktion von  $x$  ist daher

$$y(x) = \cos(nt) = \cos(n \arccos x).$$

Tatsächlich ist aus der Theorie der trigonometrischen Funktionen bekannt, dass die Kosinus eines Vielfachen des Winkels immer als Polynom des Kosinus des Winkels dargestellt werden können.

**Definition 1.9.** *Das Polynom*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

heisst Tschebyscheff-Polynom (erster Art) vom Grad  $n$ .

Die Tschebyscheff-Polynome eignen sich auch hervorragend dafür, Eigenschaften spezieller Funktionenfamilien zu illustrieren. Es wird sich zeigen, dass die Tschebyscheff-Polynome Lösungen

einer speziellen Differentialgleichung sind und bezüglich eines in Kapitel 7 definierten Skalarproduktes von Funktionen orthonormiert sind.

### 1.3.3 Rekursionsbeziehungen

Es ist etwas mühsam, einen Ausdruck von  $T_n(x)$  direkt aus trigonometrischen Identitäten herzuleiten. In diesem Abschnitt soll daher eine Rekursionsbeziehung hergeleitet werden. Später in Abschnitt ?? wird gezeigt, dass solche Rekursionsbeziehungen eine Begleiterscheinung orthogonaler Polynome sind.

#### Drei-Term-Rekursion für die Tschebyscheff-Polynome

Mit der Abkürzung  $y = \arccos(x)$  oder  $x = \cos(y)$  bekommt man aus der Definition der Tschebyscheff-Polynome

$$\begin{aligned} xT_n(x) &= \cos(y) \cdot \cos(ny) \\ &= \frac{1}{2}(\cos((n+1)y) + \cos((n-1)y)) \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Auflösen nach  $T_{n+1}(x)$  ergibt

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{mit Startwerten } T_1(x) = x, \quad T_0(x) = 1. \quad (1.2)$$

Damit können die Tschebyscheff-Polynome sehr effizient berechnet werden:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die Rekursionsformel (1.2) kann auch dazu verwendet werden, Werte der Tschebyscheff-Polynome sehr effizient zu berechnen.

#### Multiplikationsformel

Aus der Definition mit Hilfe trigonometrischer Funktionen lässt sich auch eine Multiplikationsformel ableiten.

**Satz 1.10.** Es gilt

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)) \quad (1.4)$$

$$T_{mn}(x) = T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)) \quad (1.5)$$

für alle natürlichen  $m$  und  $n$ .

In (1.4) können negative Indizes auftreten, wenn  $n > m$  ist. In solchen Fällen ist aber  $T_{-n}(x)$  als

$$T_{-n}(x) = \cos(-n \arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) = T_n(x),$$

da die Kosinus-Funktion gerade ist.

*Beweis.* Zunächst ist wieder mit der Abkürzung  $t = \arccos x$

$$T_m(x)T_n(x) = \cos mt \cos nt = \frac{1}{2}(\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)),$$

dies beweist (1.4).

Für (1.5) rechnet man

$$T_m(T_n(x)) = \underbrace{T_m(\cos(m \arccos(\underbrace{\cos(n \arccos x)}_{T_n(x)})))}_{T_n(x)} = \cos(mn \arccos x) = T_{mn}(x).$$

Damit ist auch (1.5) bewiesen. □

### Tschebyscheff-Differentialgleichung

Die Ableitungen der Tschebyscheff-Polynome sind

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(ny(x)) \\ \frac{d}{dx} T_n(x) &= \frac{d}{dx} \cos(ny(x)) = n \sin(ny(x)) \cdot \frac{dy}{dx} && \text{mit} && \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d^2}{dx^2} T_n(x) &= -n^2 \cos(ny(x)) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + n \sin(ny(x)) \frac{d^2y}{dx^2} && \text{mit} && \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Wir suchen eine verschwindende Linearkombination dieser drei Terme mit Funktionen von  $x$  als Koeffizienten. Wir setzen daher an

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(x)T_n''(x) + \beta(x)T_n'(x) + \gamma(x)T_n(x) \\ &= \left( -\frac{n^2\alpha(x)}{1-x^2} + \gamma(x) \right) \cos(ny(x)) + \left( -\frac{n\alpha(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n\beta(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) \sin(ny(x)) \end{aligned}$$

Die grossen Klammern müssen verschwinden, was nur möglich ist, wenn zu gegebenem  $\alpha(x)$  die anderen beiden Koeffizienten

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{x\alpha(x)}{1-x^2} \\ \gamma(x) &= n^2 \frac{\alpha(x)}{1-x^2} \end{aligned}$$

sind. Die Koeffizienten werden besonders einfach, wenn man  $\alpha(x) = 1-x^2$  wählt. Die Tschebyscheff-Polynome sind Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0. \quad (1.6)$$

Die Differentialgleichung (1.6) heisst *Tschebyscheff-Differentialgleichung*.

## 1.4 Rationale Funktionen

Polynome sind sehr einfach auszuwerten und können auf einem Intervall jede stetige Funktion beliebig gut approximieren. Auf einem unbeschränkten Definitionsbereich wachsen Polynome aber immer unbeschränkt an. Der führende Term  $a_n x^n$  dominiert das Verhalten eines Polynoms für  $x \rightarrow \infty$  wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n = \operatorname{sgn} a_n \cdot \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = (-1)^n \operatorname{sgn} a_n \cdot \infty.$$

Insbesondere kann man nicht erwarten, dass sich eine beschränkte Funktion wie  $\sin x$  durch Polynome auf dem ganzen Definitionsbereich gut approximieren lässt. Der Unterschied  $p(x) - \sin x$  wird für jedes beliebige Polynom  $p(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  unbeschränkt anwachsen.

Eine weitere Einschränkung ist, dass die Menge der Polynome bezüglich der arithmetischen Operationen nicht abgeschlossen ist. Man kann zwar Polynome addieren und multiplizieren, aber der Quotient ist nicht notwendigerweise ein Polynom. Abhilfe schafft nur, wenn man Quotienten von Polynomen zulässt.

**Definition 1.11.** Eine Funktion  $f(x)$  heisst rationale Funktion, wenn sie Quotient zweier Polynome ist, wenn es also Polynome  $p(x), q(x) \in K[x]$  gibt mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Die Menge der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in  $K$  wird mit  $K(x)$  bezeichnet.

Polynome sind rationale Funktionen, deren Nennergrad 1 ist. Rationale Funktionen können ebenfalls zur Approximation von Funktionen verwendet werden. Da sie beschränkt sein können, haben sie das Potential, beschränkte Funktionen besser zu approximieren, als dies mit Polynomen allein möglich wäre. Die Theorie der Padé-Approximation, wie sie zum Beispiel im Buch [**buch:pade**] dargestellt ist, ist zum Beispiel auch in der Regelungstechnik von Interesse, da sich rationale Funktionen mit linearen Komponenten schaltungstechnisch realisieren lassen. Weitere Anwendungen werden in Kapitel 22 gezeigt.

## 1.5 Potenzreihen

Nach dem Satz von Weierstrass können Polynome beliebige stetige Funktionen approximieren. Die Ableitungen werden dabei meistens nicht gut wiedergegeben. Die Partialsummen einer Potenzreihe sind ebenfalls Polynome, die aber nicht nur die Funktion sondern auch alle ihre Ableitungen gut approximieren.

### 1.5.1 Definition

Eine Folge von Polynomen, deren Terme niedrigen Grades sich nicht mehr ändern, bei der also immer nur neue Terme höheren Grades hinzukommen, heisst eine Potenzreihe.

**Definition 1.12.** Eine Potenzreihe an der Stelle  $z_0$  ist eine unendliche Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{R}$  oder  $a_k \in \mathbb{C}$ .

Die Berechnung einer Potenzreihe ist möglich, wenn die Terme höheren Grades an Bedeutung verlieren.

**Definition 1.13.** Eine Potenzreihe heisst konvergent, die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$$

konvergiert. Sie heisst absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k|$$

konvergiert.

Die Koeffizienten  $a_k$  dürfen also nicht schnell anwachsen werden, denn normalerweise wird bei Polynomen das Verhalten von den Termen höheren Grades dominiert. Die Tschebyscheff-Polynome waren ja so konstruiert worden, dass es nicht zu unzweckmässig starken Oszillationen im Intervall  $(-1, 1)$  kommt.

### 1.5.2 Die geometrische Reihe

Die wohl einfachste Potenzreihe ist die Reihe mit Koeffizienten  $a_k = a$  für alle  $k$ , also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} az^k = a + az + az^2 + az^3 + az^4 + \dots$$

Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaft, dass aufeinanderfolgende Reihglieder den konstanten Quotienten  $z$  haben. Diese Idee wird in Abschnitt 4.4 auf Quotienten verallgemeinert, die rationale Funktionen sind. Sie heissen hypergeometrische Funktionen.

Sie ist konvergent für  $|z| < 1$  und divergent für  $|z| \geq 1$ . Sie heisst die *geometrische Reihe*. Sie wird gerne als "Vergleichsreihe" eingesetzt um die Konvergenz oder Divergenz anderer Reihen nachzuweisen.

Die geometrische Reihe lässt sich direkt summieren. Dazu betrachtet man die Differenz der Partialsumme  $s_n$  und  $zs_n$ :

$$\frac{s_n - zs_n}{(1-z)s_n} = \frac{a + az + az^2 + \dots + az^n - (az + az^2 + \dots + az^n + az^{n+1})}{(1-z)a} = \frac{-az^{n+1}}{(1-z)a}.$$

Durch Auflösen nach  $s_n$  erhält man die Summenformel

$$s_n = a \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Für  $|z| < 1$  geht  $z^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , die Partialsummen konvergieren und wir erhalten das Resultat des folgenden Satzes.

**Satz 1.14.** *Die geometrische Reihe  $a + az + az^2 + \dots$  konvergiert für  $|z| < 1$  und hat die Summe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = \frac{a}{1-z}.$$

Für  $|z| \geq 1$  divergiert die geometrische Reihe.

### 1.5.3 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz von Reihen ist oft durch Vergleich mit anderen, bereits als konvergent erkannten Reihen nachweisbar. Dies ist der Inhalt des folgenden, wohlbekannten Majorantenkriteriums.

**Satz 1.15** (Majorantenkriterium). *Seien  $a_k$  und  $b_k$  die Glieder zweier unendlicher Reihen. Es sei zudem  $b_k \geq 0$  für alle  $k$  und die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  sei konvergent. Wenn  $|a_k| \geq b_k$  ist für fast alle  $k$ , dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.*

### Quotienten- und Wurzelkriterium

Der Satz 1.14 ermöglicht, Potenzreihen mit der geometrischen Reihe zu vergleichen und liefert damit einfach anzuwende Kriterien für die Konvergenz.

**Satz 1.16** (Quotientenkriterium). *Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent, wenn es eine Zahl  $q < 1$  gibt derart, dass*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q. \quad (1.7)$$

*Die Reihe ist divergent, wenn für fast alle  $k$*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$$

*gilt.*

*Beweis.* Wenn (1.7) erfüllt ist, dann gilt

$$|a_k| \leq |a_0|q^k$$

und damit ist die Reihe majorisiert durch die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_0|q^k,$$

die unter der gegebenen Voraussetzung konvergiert. □

**Satz 1.17** (Wurzelkriterium). *Falls*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = C < 1 \quad (1.8)$$

ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

*Beweis.* Falls  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ , dann gilt  $|a_k| < q^k$  für alle  $k$ . Somit wird die Reihe majorisiert durch die geometrische Reihe mit Quotient  $q$  und ist damit konvergent.

Das Kriterium (1.8) bedeutet, dass es zu einem gegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  gibt derart, dass  $\sqrt[n]{|a_k|} < C + \varepsilon$  für  $n > N$ . Wählt man  $\varepsilon = (1 - C)/2$  wird  $q = C + \varepsilon = (1 + C)/2 < 1$ , das Reststück der Reihe ab Index  $N$  ist daher wieder majorisiert durch eine konvergente geometrische Reihe.  $\square$

### Konvergenzradius

Das Quotienten- und das Wurzel-Kriterium ist auf beliebige Reihen anwendbar, es berücksichtigt nicht, dass in einer Potenzreihe die Faktoren  $(z - z_0)^k$  für kleine  $|z - z_0|$  das Kleiner werden der Reihenglieder und damit die Konvergenz begünstigen. Diese Eigenschaft wird vom Konvergenzradius eingefangen, der wie folgt definiert ist.

**Definition 1.18.** Der Konvergenzradius einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  um den Punkt  $z_0$  ist

$$\varrho = \sup \left\{ |z - z_0| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

**Satz 1.19.** Der Konvergenzradius  $\varrho$  einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  ist

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}. \quad (1.9)$$

*Beweis.* Wir wenden das Wurzelkriterium auf ein  $z$  mit  $|z - z_0| < \varrho$  an. Es gilt

$$\sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} = |z - z_0| \sqrt[k]{|a_k|} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} = |z - z_0| \underbrace{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}_{= \frac{1}{\varrho}} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium folgt daher, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  absolut konvergent ist.  $\square$

*Beispiel.* Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe  $1 + z + z^2 + \dots$  ist

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Dies deckt sich mit der bereits bekannten Tatsache, dass die geometrische Reihe für  $|z| < 1$  konvergiert. Man beachte auch, dass der Konvergenzradius genau die Entfernung vom Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  und dem Pol der Summe  $1/(1 - z)$  bei  $z = 1$  ist. Auf diese allgemeingültige Eigenschaft wird in Abschnitt 9.2.2 eingegangen.  $\circlearrowright$

Auch das Quotientenkriterium kann zur Berechnung des Konvergenzradius herangezogen werden. Falls  $a_k \neq 0$  ab einem gewissen Index  $k$  ist und der Grenzwert von  $a_k/a_{k+1}$  für  $k \rightarrow \infty$  existiert, dann ist der Grenzwert der Konvergenzradius.

### 1.5.4 Die Taylor-Reihe

Nicht nur der Funktionswert eines Polynoms, sondern auch alle seine Ableitungen sind sehr einfach zu berechnen. Dies macht Potenzreihen besonders nützlich im Zusammenhang mit Lösungen von Differentialgleichungen, wie in Abschnitt 5.2 untersucht werden wird. In diesem Abschnitt wird die Taylor-Reihe motiviert, die sich aus den Ableitungen einer differenzierbaren Funktion konstruieren lässt.

#### Ableitung einer Potenzreihe

Eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  kann gliedweise abgeleitet werden. Die  $k$ -te Ableitung ist

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k},$$

aufeinanderfolgende Terme dieser Reihe haben den Quotienten

$$\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)} \cdot \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{n+1}{n-k+1} \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z|.$$

Da der Quotient  $(n+1)/(n-k+1) \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ , ist das Quotientenkriterium für die Ableitung erfüllt, wenn  $|z|$  klein genug ist und das Kriterium für die Potenzreihe  $f(z)$  erfüllt ist.

#### Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe

Der Konvergenzradius  $\varrho^{(k)}$  der  $k$ -fach abgeleiteten Reihe ist

$$\sqrt[n]{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)|a_{n+k}|} = \sqrt[n]{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)} \cdot \sqrt[n]{|a_{n+k}|}$$

mit Limes superior

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho^{(k)}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)|a_{n+k}|} \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+k}|}}_{\substack{\rightarrow \frac{1}{\varrho}}} = \frac{1}{\varrho}, \end{aligned}$$

die abgeleitete Reihe hat also den gleichen Konvergenzradius wie die Reihe für  $f(z)$ .

#### Berührungs $k$ -ten Grades

Man sagt, die Graphen zweier Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  berühren sich im Punkt  $z = z_0$  vom Grade  $k$ , wenn Funktionswerte und Ableitungen bis zum Grad  $k$  beider Funktionen in  $z_0$  übereinstimmen. Die Ableitungen der Potenzfunktion  $(z - z_0)^n$  sind nacheinander

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z - z_0)^n &= n(z - z_0)^{n-1}, \\ \frac{d^2}{dz^2}(z - z_0)^n &= n(n-1)(z - z_0)^{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3}{dz^3}(z - z_0)^n &= n(n-1)(n-2)(z - z_0)^{n-3}, \\
 &\vdots \\
 \frac{d^k}{dz^k}(z - z_0)^n &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}, \\
 &\vdots \\
 \frac{d^n}{dz^n}(z - z_0)^n &= n!, \\
 \frac{d^l}{dz^l}(z - z_0)^n &= 0 \quad \forall l > n.
 \end{aligned}$$

An der Stelle  $z = 0$  ist nur genau die  $n$ -te Ableitung von 0 verschieden und hat den Wert  $n!$ . Zwei Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$ , die als Potenzreihen im Punkt  $z_0$  geschrieben werden, berühren sich also genau dann vom Grad  $k$ , wenn die Funktionswerte und Ableitungen übereinstimmen, d. h.

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_0)^l \\ g(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_0)^l \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{(l)}(z_0) = g^{(l)}(z_0) \Rightarrow l! a_l = l! b_l \Rightarrow a_l = b_l \quad (1.10)$$

für  $l \leq k$ . Das Taylor-Polynom ist ein Polynom, welches die gegebene Funktion von hohem Grad berührt.

**Definition 1.20.** Sie  $f(z)$  eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Das Taylor-Polynom vom Grad  $n$  von  $f(z)$  an der Stelle  $z_0$  ist die Summe

$$\mathcal{T}_{z_0}^n f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (1.11)$$

Die Taylor-Reihe der Funktion  $f(z)$  ist die Reihe

$$\mathcal{T}_{z_0} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \quad (1.12)$$

## Analytische Funktionen

Das Taylor-Polynom  $\mathcal{T}_{z_0}^n f(z)$  hat an der Stelle  $z_0$  die gleichen Funktionswerte und Ableitungen wie die Funktion  $f(z)$ , dies bedeutet aber nicht, dass die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert. Das Beispiel auf Seite 249 zeigt, dass dies nicht immer zutrifft. Von besonderem Interesse sind die Funktionen, die sich durch eine konvergente Taylor-Reihe ausdrücken lassen.

**Definition 1.21.** Eine Funktion heisst analytisch, wenn sie sich durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lässt.

Die Klasse der analytischen Funktionen umfasst also nicht alle differenzierbaren Funktionen. Da aber Potenzreihen Gleidweise differenziert und integriert werden dürfen, können die meisten Konstruktionen der Analysis bis hin zur Lösung partieller Differentialgleichungen innerhalb der analytischen Funktionen durchgeführt werden. Es ist daher nicht überraschend, dass alle in diesem Buch studierten speziellen Funktionen analytisch sind.

## Übungsaufgaben

**1.1.** Finden Sie eine Potenzreihe für die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  im Punkt  $z_0 \neq 0$ .

*Hinweis.* Berechnen Sie  $1/(z_0 - (z_0 - z))$ .

*Lösung.* Die Funktion im Hinweis kann in die Form einer geometrischen Reihe gebracht werden:

$$\frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{z_0 - z}{z_0})} = \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z_0}\right)^k = \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_0^k} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Die Koeffizienten der gesuchten Potenzreihe sind daher

$$a_k = \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}}.$$
○

**1.2.** Berechnen Sie den Konvergenzradius der Exponentialreihe  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / k!$

*Lösung.* Mit  $a_k = 1/k!$  folgt mit dem Quotientenkriterium

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Der Konvergenzradius ist daher unendlich.

○

**1.3.** Verwenden Sie das Resultat von Aufgabe 1.1, um die  $k$ -te Ableitung der Funktion  $1/z$  an der Stelle  $z_0$  zu berechnen.

*Lösung.* Die Taylor-Reihe von  $f(z) = 1/z$  an der Stelle  $z_0$  ist

$$\mathcal{T}_{z_0} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}} (z - z_0)^k \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(z_0) = k! \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}}.$$
○



# Kapitel 2

## Exponentialfunktion und Exponentialgleichungen

### 2.1 Exponentialfunktion

Mit Hilfe von Potenzen und Wurzeln lassen sich die Potenzen  $a^x$  für beliebige rationale Zahlen  $x = p/q \in \mathbb{Q}$  als

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

definieren. Da  $x \mapsto a^x$  stetig ist, ergibt sich daraus auch eine stetige Funktion  $a^\bullet : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ . Dies ist aber als Basis für eine neue spezielle Funktion nicht wirklich geeignet, da außer  $x$  auch die Basis variiert werden kann. Die arithmetischen Eigenschaften der Potenzfunktion erlauben aber, jede der Funktionen  $a^x$  auf jede andere  $b^x$  zurückzuführen. Ist  $b = a^t$ , dann ist  $b^x = a^{tx}$ . Es stellt sich damit die Frage, ob es eine bevorzugte Basis gibt.

#### 2.1.1 Zins und Eulerscher Grenzwert

Wir ein Kapital  $K_0$  mit dem Jahreszinssatz  $x = 100\%$  verzinst, wächst es jedes Jahr um den Faktor  $1 + x$  an. Teilt man die Zinsperiode in kleiner Intervall, zum Beispiel Monate oder Tage, und passt auch den Zins entsprechend an, dann wächst das Kapital in einem Jahr auf

$$K = \left(1 + \frac{x}{12}\right)^{12} \quad \text{und} \quad K = \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365}$$

an. Für eine Unterteilung in  $n$  Zinsperioden ist der Faktor also

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Diese Beobachtung hat Jacob Bernoulli 1683 dazu geführt, den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

zu studieren, die später mit  $e$  bezeichnet wurde. Später hat Euler gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{2.1}$$

gilt.

Tatsächlich gilt für ganzzahlige  $x$ , dass auch die Teilfolge mit  $n = xm$  konvergiert, dass also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{xm}\right)^{xm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{xm}$$

sein muss. Da die Funktion  $a \mapsto a^x$  stetig ist, folgt weiter

$$= \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right)^x.$$

Ähnlich kann man für einen Bruch  $x = p/q$  vorgehen. Dazu berechnet man die  $q$ -te Potenz, wobei man wieder verwenden kann, dass die Funktion  $a \mapsto a^q$  stetig ist. So bekommt man

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right)^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{p}{qn}\right)^{qn} \right)^q = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m = e^p.$$

Zieht man jetzt die  $q$ -te Wurzel, bekommt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{\frac{p}{q}}.$$

Da auch die Potenzfunktion  $x \mapsto a^x$  stetig ist, folgt schliesslich, dass für beliebige reelle  $x \in \mathbb{R}$  die Formel (2.1) gilt.

### Approximation durch Jost Bürgi

Jost Bürgi, Uhrmacher und Mathematiker aus Lichtensteig, war einer der Erfinder der Logarithmen, für die er allerdings noch keinen Namen hatte. Er berechnete eine Tabelle aller Werte von

$$10^8 \cdot (1 + 10^{-4})^n.$$

Schreibt man

$$(1 + 10^{-4})^n = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{1000 \cdot n \cdot 10^{-4}},$$

dann erkennt man, dass Bürgi die Potenzen der Approximation

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.7181459 \approx 2.7182818$$

von  $e$  berechnet hat. Die Wahl dieser Basis hat keine Auswirkungen auf die Genauigkeit der Anwendung seiner Tabellen, da jede andere Basis genauso.

### Störungen des Eulerschen Grenzwertes

Der Grenzwert (2.1) bleibt unverändert, wenn man den Term  $x$  um einen zusätzlichen Summanden  $x_n$  modifiziert, der schnell genug gegen 0 geht.

**Lemma 2.1.** *Sei  $x_n$  eine Folge  $x_n \in \mathbb{R}$ , die gegen 0 konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + x_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

*Beweis.* Für  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N$  derart, dass  $|x_n| < \varepsilon$  für alle  $n > N$ . Da

$$\left(1 + \frac{x - \varepsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x + x_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x + \varepsilon}{n}\right)^n$$

folgt

$$e^{x-\varepsilon} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + x_n}{n}\right)^n \leq e^{x+\varepsilon}.$$

Da dies für alle  $\varepsilon$  gilt, und die Funktion  $x \mapsto e^x$  stetig ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + x_n}{n}\right)^n = e^x,$$

die Behauptung des Lemmas. □

### Funktionalgleichung

Die Definition der Exponentialfunktion als Potenz  $e^x$  hat automatisch zur Folge, dass für beliebige reelle Zahlen die Funktionalgleichung

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

gilt. Dies kann jedoch auch direkt aus dem Grenzwert (2.1) abgeleitet werden. Dazu rechnet man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y+xy/n}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Der Term  $x_n = xy/n$  konvergiert gegen 0, daher ist nach dem Lemma 2.1

$$= e^{x+y}.$$

Damit ist die Funktionalgleichung bewiesen.

### 2.1.2 Potenzreihe

Die übliche Definition der Exponentialfunktion verwendet eine Potenzreihe.

**Definition 2.2.** *Die Potenzreihe*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert eine Funktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Funktionalgleichung

Auch für die Potenzreihendefinition lässt sich die Funktionalgleichung direkt zu verifizieren. Das Produkt von  $\exp(x)$  und  $\exp(y)$  ist

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}.$$

Fasst man die Terme vom Grad  $n$  zusammen, erhält man

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

Durch Erweitern mit  $n!$  wird daraus

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

Der Quotient von Fakultäten ist der Binomialkoeffizient, so dass die Summe mit dem Binomialsatz vereinfacht werden kann:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y),$$

damit ist die Funktionalgleichung nachgewiesen und es wird klar, dass  $\exp(x)$  eine Funktion der Form  $a^x$  ist.

## $\exp(x)$ und $e^x$

Die Tatsache, dass  $\exp(x)$  die Funktionalgleichung erfüllt, reicht nicht aus um zu zeigen, dass  $\exp(x)$  und  $e^x$  dasselbe sind, da jede beliebige Funktion  $a^x$  diese Eigenschaft hat. Wir können nur schliessen, dass  $\exp(x) = \exp(1)^x$ . Wenn wir zeigen wollen, dass  $\exp(x)$  und  $e^x$  dasselbe sind, dann müssen wir zeigen, dass  $e = \exp(1)$  gilt. Dazu formen wir den Eulerschen Grenzwert wie folgt um:

$$\begin{aligned} e &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{1}}_1 \cdot \underbrace{\frac{n-1}{1}}_1 \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{1}}_1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $e = \exp(1)$  und damit auch  $e^x = \exp(x)$  ist.

## 2.2 Logarithmen

Heutezutage wird die Logarithmusfunktion als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert. Ihren Ursprung hat sie jedoch im Bemühen, eine Methode zur Vereinfachung der numerischen Rechnung zu finden. In diesem Abschnitt soll die Geschichte kurz nachgezeichnet werden.

## 2.2.1 Multiplikation

Die Schwierigkeit besteht vor allem darin, dass Multiplikationen sehr viel aufwendiger sind als Additionen. So braucht man für die Addition zweier  $n$ -stelliger Zahlen genau  $n$  Additionen einstelliger Zahlen mit Übertrag. Für die Multiplikation sind zunächst  $n^2$  einstellige Multiplikationen gefolgt von  $n(n - 1)$  Additionen einstelliger Zahlen mit Übertrag notwendig, um einen Faktor mit jeder Stelle des anderen zu multiplizieren. Anschliessend müssen dann  $(n - 1)^2$  einstellige Multiplikationen gefolgt von einstelligen Additionen mit Übertrag ausgeführt werden, um die Summe zu bilden. Der Aufwand für eine Multiplikation wächst also quadratisch mit der Genauigkeit, während der Aufwand für die Addition nur linear anwächst.

Eine gebräuchlich Methode war die Verwendung der trigonometrischen Identität

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Dies kann mit einer Tabelle nur der Sinus-Werte durchgeführt werden, indem man verwendet, dass  $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ . Dies führt auf die Identität

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(90^\circ - \alpha + \beta) - \sin(90^\circ - \alpha - \beta))$$

Die Multiplikation der Zahlen  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  verlangt daher nur zwei Konsultationen der Sinus-Tabelle, um die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zu bestimmen, zwei Additionen zur Berechnung von  $90^\circ - \alpha + \beta$  und  $90^\circ - \alpha - \beta$ , zwei Konsultationen der Sinus-Tabelle gefolgt von einer Addition und einer Halbierungsoperationen, die sich ähnlich effizient wie Additionen durchführen lässt. Der Aufwand dieser Art der Durchführung der Multiplikation ist also gleich gross wie 4 Additionen und 4 Tabellenkonsultationen.

*Beispiel.* In Abschnitt 3.1.3 ist beschrieben, wie schon im Altertum Tabellen für Sinus-Werte aufgestellt werden konnten. Mit der Tabelle 3.3 kann man zum Beispiel die folgende Multiplikation durchführen. Gesucht ist das Produkt der Zahlen  $x = 0.51503807$  und  $y = 0.80901169$ . Die Berechnung läuft wie folgt ab:

$$\begin{aligned} x = 0.80901169 &\Rightarrow \sin \alpha = x \Rightarrow \alpha \approx 54^\circ \\ y = 0.51503807 &\Rightarrow \sin \beta = y \Rightarrow \beta \approx 31^\circ \\ &\quad \textcolor{red}{\sin \delta_1 = 0.92050485} \Leftarrow \delta_1 = 90^\circ - \alpha + \beta = 67 \\ &\quad \textcolor{blue}{\sin \delta_2 = 0.08715574} \Leftarrow \delta_2 = 90^\circ - \alpha - \beta = 5 \\ &\quad \textcolor{blue}{\sin \delta_1 + \sin \delta_2 = 0.83334911} \\ xy = 0.41667455 &\Leftarrow \frac{1}{2} (\sin \delta_1 + \sin \delta_2) = \textcolor{green}{0.41667455} \end{aligned}$$

Die roten Zahlen sind Resultate von Tabellenkonsultationen, die blauen ergeben sich durch Additionen, grün ist die Halbierungsoperation. Alle acht Stellen des Resultates sind korrekt.  $\bigcirc$

Das Verfahren funktioniert also, hat aber eine ganze Reihe von Nachteilen:

1. Die Zahl der Operationen ist ziemlich gross. Immerhin sind vier Tabellenkonsultationen nötig, drei Additionen und die Halbierungsoperation.

2. Es funktioniert nur für Zahlen zwischen 0 und 1. Für Zahlen ausserhalb dieses Intervalls ist es die Aufgabe des Anwenders, eine Skalierung vorzunehmen und sie später bei der Angabe des Resultates wieder einfließen zu lassen. Das Quadrat von 2 kann berechnet werden als  $2^2 = 100 \cdot 0.2 \cdot 0.2$ , was mit dem Winkel  $\alpha = \beta = 11.537^\circ$  möglich ist. Das Resultat der Multiplikation nach obigem Verfahren ist dann

$$\frac{1}{2}(\sin(90^\circ - \alpha + \beta) - \sin(90^\circ - \alpha - \beta)) = \frac{1}{2}(1 - \sin 66.926^\circ) = \frac{1}{2}(1 - 0.9200) = \frac{1}{2} \cdot 0.08 = 0.04,$$

woraus sich dann das Quadrat von 2 als  $2^2 = 100 \cdot 0.2^2 = 100 \cdot 0.04 = 4$  ergibt. Dieser Nachteil gilt allerdings auch für Rechenverfahren mit Logarithmen oder mit einem Rechenschieber, bei dem ebenfalls nur die Mantisse berechnet wird, der Anwender ist selbst für die Bestimmung des Exponenten verantwortlich.

3. Es kann vorkommen, dass die Winkel  $90^\circ - \alpha + \beta$  und  $90^\circ - \alpha - \beta$  nicht im Intervall zwischen 0 und  $90^\circ$  liegen. In diesem Fall ist eine zusätzliche Reduktion des Winkels nötig. Falls der Winkel negativ ist, muss in den folgenden Schritt zusätzlich das Vorzeichen berücksichtigt werden.

## 2.2.2 Die Erfindung der Logarithmen

Die Lösung des Problems ist die Verwendung von Exponentialfunktionen anstelle von trigonometrischen Funktionen. Um das Produkt von zwei Zahlen  $x$  und  $y$  zu bestimmen, müssen erst die Exponenten  $\xi$  und  $\eta$  bestimmt werden, für die  $x = b^\xi$   $y = b^\eta$  ist. Das Produkt ist dann  $xy = b^{\xi+\eta}$ , es muss also die Summe  $\xi + \eta$  berechnet werden und aus einer Tabelle der Funktion  $b^\bullet$  kann dann das Produkt abgelesen werden. Der Wert der Basis  $b$  ist dabei noch frei und wurde auch von den Erfindern der Logarithmen verschieden angegangen.

### Die arithmetischen Progresstabulen von Jost Bürgi

Der 1552 in Lichtensteig geborene schweizer Uhrmacher und Mathematiker hat in seinem Werk *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen und verstanden werden soll*, welches 1620 in Prag erschien, eine Tabelle aller Werte

$$10^8 \cdot \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^n = 10^8 \left(\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000}\right)^{n \cdot 10^{-4}}$$

für  $n = 0$  bis  $n = 23027$ . Die Abbildung 2.1 zeigt, einen Ausschnitt aus der ersten Seite von Bürgis Tabelle. Die mit 10 multiplizierten Exponenten  $n$  sind durchwegs als **rote** Zahlen dargestellt. In jeder Spalten stehen 40 aufeinanderfolgende Werte, von Spalte zu Spalte nimmt der Wert von  $n$  um 500 zu. Abbildung 2.2 zeigt eine Rekonstruktion der ersten Seite.

Um mit der Bürgischen Tafel eine Multiplikation durchzuführen, hat man also unter den schwarzen Zahlen Werte gesucht, der möglichst nahe an den gegebenen Faktoren sind. Dabei konnte die Genauigkeit noch gesteigert werden, indem zwischen aufeinanderfolgenden Werten interpoliert wurde. Die zugehörigen roten Zahlen wurden dann addiert und mit Hilfe der Tabelle wieder die schwarzen Zahlen ermittelt.

	b	500	1000	1500	2000
10	100000000	100501227	10104906	101511230	102000000
15	.....10000	....11277	....15067	....21381	....
20	....20001	....21328	....25169	....31524	....
30	....30003	....31380	....35271	....41087	....
40	....40006	....41433	....45374	....51841	....
50	....50010	....51487	....55479	....61006	....
60	....60015	....61543	....65584	....71531	....
70	....70021	....71599	....75691	....81309	....
80	....80028	....81656	....85799	....91468	100000000
90	....90036	....91714	....95907	101602627	....
100	100100045	100601773	101106017	....12787	....
110	....10055	....11834	....16127	....22949	....
120	....20066	....21395	....26235	....33111	....
130	....30078	....31957	....36352	....43274	....
140	....40091	....42020	....46465	....51438	....
150	....50105	....52084	....56580	....63604	....
160	....60120	....62150	....66696	....73770	....
170	....70136	....72216	....76812	....83938	....
180	....80153	....82283	....86930	....94106	100000000
190	....90171	....92351	....97049	101704175	....
200	100200190	1007021410	101207169	....14446	....
210	....10210	....12491	....17289	....24617	....
220	....20231	....22562	....27411	....34790	....
230	....30253	....32634	....37533	....44963	....
240	....40270	....42707	....47657	....55138	....
250	....50300	....52782	....57782	....65313	....
260	....60325	....62857	....67908	....75490	....
270	....70351	....72933	....78035	....85667	....
280	....80378	....83011	....88162	....95246	....
290	....90406	....93189	....98291	101806177	....
300	100300435	100803168	101308421	....16206	....
310	....10465	....13242	....18552	....26387	....
320	....20496	....23330	....28684	....36570	....
330	....30528	....33412	....38817	....46754	....
340	....40562	....43496	....48950	....56939	....
350	....50596	....53680	....59085	....67124	....
360	....60631	....63665	....69221	....77311	....
370	....70667	....73752	....79358	....87499	....
380	....80704	....83839	....89496	....97687	....
390	....90742	....93927	....99635	101907877	....
400	100400781	100904017	101409775	....18065	....
410	....10821	....14107	....19916	....28167	....

Abbildung 2.1: Ausschnitt aus der ersten Seite von Jost Bürgis Tabelle der Potenzen von 1.0001

	<b>0</b>	<b>500</b>	<b>1000</b>	<b>1500</b>	<b>2000</b>	<b>2500</b>	<b>3000</b>	<b>3500</b>
<b>0</b>	1000000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	103561790
<b>10</b>	....10000	....11277	....15067	....21381	....30234	....41637	....55603	....72146
<b>20</b>	....20001	....21328	....25168	....31534	....40437	....51891	....65909	....82503
<b>30</b>	....30003	....31380	....35271	....41687	....50641	....62146	....76216	....92861
<b>40</b>	....40006	....41433	....45374	....51841	....60846	....72403	....86523	103603221
<b>50</b>	....50010	....51488	....55479	....61996	....71052	....82660	....96832	....13581
<b>60</b>	....60015	....61543	....65584	....72152	....81259	....92918	103107141	....23942
<b>70</b>	....70021	....71599	....75691	....82310	....91467	102603177	....17452	....34305
<b>80</b>	....80028	....81656	....85798	....92468	102101677	....13438	....27764	....44668
<b>90</b>	....90036	....91714	....95907	101602627	....11887	....23699	....38077	....55033
<b>100</b>	100100045	100601773	101106017	....12787	....22098	....33961	....48391	....65398
<b>110</b>	....10055	....11834	....16127	....22949	....32310	....44225	....58705	....75765
<b>120</b>	....20066	....21895	....26239	....33111	....42523	....54489	....69021	....86132
<b>130</b>	....30078	....31957	....36351	....43274	....52738	....64755	....79338	....96501
<b>140</b>	....40091	....42020	....46465	....53438	....62953	....75021	....89656	103706870
<b>150</b>	....50105	....52084	....56580	....63604	....73169	....85289	....99975	....17241
<b>160</b>	....60120	....62150	....66695	....73770	....83387	....95557	103210295	....27613
<b>170</b>	....70136	....72216	....76812	....83938	....93605	102705827	....20616	....37986
<b>180</b>	....80153	....82283	....86930	....94106	102203824	....16097	....30938	....48359
<b>190</b>	....90171	....92351	....97048	101704275	....14045	....26369	....41261	....58734
<b>200</b>	100200190	100702420	101207168	....14446	....24266	....36642	....51585	....69110
<b>210</b>	....10210	....12491	....17289	....24617	....34488	....46915	....61910	....79487
<b>220</b>	....20231	....22562	....27411	....34790	....44712	....57190	....72237	....89865
<b>230</b>	....30253	....32634	....37533	....44963	....54936	....67466	....82564	103800244
<b>240</b>	....40276	....42707	....47657	....55138	....65162	....77742	....92892	....10624
<b>250</b>	....50300	....52782	....57782	....65313	....75388	....88020	103303221	....21005
<b>260</b>	....60325	....62857	....67908	....75490	....85616	....98299	....13552	....31387
<b>270</b>	....70351	....72933	....78034	....85667	....95844	102808579	....23883	....41770
<b>280</b>	....80378	....83011	....88162	....95846	102306074	....18860	....34216	....52154
<b>290</b>	....90406	....93089	....98291	101806025	....16305	....29142	....44549	....62540
<b>300</b>	100300435	100803168	101308421	....16206	....26536	....39424	....54883	....72926
<b>310</b>	....10465	....13249	....18552	....26388	....36769	....49708	....65219	....83313
<b>320</b>	....20496	....23330	....28684	....36570	....47003	....59993	....75555	....93702
<b>330</b>	....30529	....33412	....38816	....46754	....57237	....70279	....85893	103904091
<b>340</b>	....40562	....43496	....48950	....56939	....67473	....80566	....96232	....14481
<b>350</b>	....50596	....53580	....59085	....67124	....77710	....90854	103406571	....24873
<b>360</b>	....60631	....63665	....69221	....77311	....87948	102901144	....16912	....35265
<b>370</b>	....70667	....73752	....79358	....87499	....98186	....11434	....27254	....45659
<b>380</b>	....80704	....83839	....89496	....97687	102408426	....21725	....37596	....56053
<b>390</b>	....90742	....93927	....99635	101907877	....18667	....32017	....47940	....66449
<b>400</b>	100400781	100904017	101409775	....18068	....28090	....42310	....58285	....76846
<b>410</b>	....10821	....14107	....19916	....28260	....39152	....52604	....68631	....87243
<b>420</b>	....20862	....24199	....30058	....38453	....49396	....62900	....78977	....97642
<b>430</b>	....30904	....34291	....40201	....48647	....59641	....73196	....89325	104008042
<b>440</b>	....40947	....44384	....50345	....58841	....69887	....83493	....99674	....18443
<b>450</b>	....50991	....54479	....60490	....69037	....80134	....93792	103510024	....28844
<b>460</b>	....61037	....64574	....70636	....79234	....90382	103004091	....20375	....39247
<b>470</b>	....71083	....74671	....80783	....89432	102500631	....14391	....30727	....49651
<b>480</b>	....81130	....84768	....90931	....99631	....10881	....24693	....41080	....60056
<b>490</b>	....91178	....94867	101501080	102009831	....21132	....34995	....51435	....70462
<b>500</b>	100501227	101004966	....11230	....20032	....31384	....45299	....61790	....80869

Abbildung 2.2: Rekonstruktion der ersten Seite von Bürgis Tabelle aus [buch:hal]

*Beispiel.* Die erste Seite 2.2 der Bürgischen Tabelle umfasst natürlich nur einen sehr kleinen Teil des ganzen Werkes, trotzdem kann man daran den Gang der Rechnung illustrieren. Um die beiden schwarzen Zahlen  $x = 1.0023$  und  $y = 1.0017$  miteinander zu multiplizieren, sucht man die zugehörigen roten Zahlen in der Tabelle

schwarze Zahl	rote Zahl
$x = 1.0023$	$\Rightarrow \quad 2274$
$y = 1.0017$	$\Rightarrow \quad 1686$
$xy = 1.004039247$	$\Leftarrow \quad 3960$

Das exakte Result ist  $xy = 1.0040391$ . ○

Die roten Zahlen würden in heutiger Terminologie im Wesentlichen Logarithmen zur Basis  $b = 1.0001$  genannt. In der Tabelle werden die Werte von  $b^n$  in Abhängigkeit von  $n$  angegeben, es wurde also direkt die Exponentialfunktion  $b^x$  tabuiert. In heutiger Sprechweise würde man dies als eine Antilogarithmentafel bezeichnen.

### John Napier und die natürlichen Logarithmen

Der schottische Mathematiker John Napier (1550–1617) hat ein ausgeklügeltes Verfahren entwickelt, natürliche Logarithmen mit hoher Genauigkeit von mindestens sieben Stellen zu berechnen. Außerdem hat er den Logarithmen ihren Namen gegeben.

Um die Genauigkeit von sieben Stellen zu erreichen, musste er von einem Wert ausgehen, der nicht weiter als  $10^{-7}$  von 1 entfernt ist. Bürgi hat mit dem Wert  $1 + 10^{-4}$  eine Genauigkeit von vier Stellen erreicht, Napier startete seine Berechnung mit  $1 - 10^{-7}$ . Er hat also eigentlich Logarithmen zur Basis  $1/e$  bestimmt.

Hätte Napier jedoch einfach nur das Verfahren von Bürgi auf die um den Faktor  $10^3$  höhere Genauigkeit angewendet, hätte er auch  $10^3$  mal mehr und somit über 23 Millionen Multiplikationen durchführen müssen, im Laufe derer sich viel zu grosse Rundungsfehler akkumuliert hätten. Napier hat daher das gesamte Intervall in mehrere grössere Intervalle unterteilt, indem er mit statt nur den Faktor  $a = 1 - 10^{-7} = 0.9999999$  auch noch geometrische Folgen mit den Faktoren  $b = 1 - 10^{-5} = 0.99999$  und  $c = 1 - 5 \cdot 10^{-4} = 0.9995$  verwendet hat. Mit 4604 Gliedern der Folge  $c^k$  konnte er tatsächlich das ganze Intervall zwischen 0.1 und 1 geometrisch unterteilen. Innerhalb jedes Teilintervalls kann dann eine Unterteilung mit 50 Gliedern der Folge  $b^k$  aufgeteilt werden. Und schliesslich liefern 100 Glieder der Folge  $a^k$  eine geometrische Unterteilung in jedes dieser Intervalle. Auf diese Art kann erreicht werden, dass jeder Wert mit höchstens 4755 Multiplikationen und damit ohne Kompromittierung der Genauigkeit durch Rundungsfehler berechnet werden kann.

Das Interpolationsverfahren, welches Napier zur Bestimmung seiner Logarithmen entwickelt hat, hat auch die Entwicklung von Rechenschiebern motiviert.

### Dekadische Logarithmen nach Henry Briggs

Henry Briggs (1561–1630) hat die Bedeutung der Napierschen Logarithmen sofort erkannt und vorgeschlagen, statt der Basis  $e$  die Basis 10 zu verwenden. Der Vorteil der Basis 10 ist, dass Zahlen mit der gleichen Mantisse in Gleitkommadarstellung zur Basis 10 Logarithmen haben, die sich nur im eine Ganzzahl unterscheiden, die gleichzeitig der Unterschied der Exponenten ist. Dies macht die Verwendung einer Logarithmentabelle sehr viel intuitiver.

Briggs hat ausserdem die numerische Berechnung der Logarithmen weiterentwickelt und innerhalb von 7 Jahren 30000 Logarithmen mit einer Genauigkeit von 14 Stellen berechnet. Die Methoden von Bürgi und Napier gingen davon aus, das Intervall, in dem die Logarithmen bestimmt werden sollen, durch Konstruktion einer geometrischen Folge zu unterteilen. Zum Beispiel hat Bürgi das Intervall von 1 bis 10 mit Hilfe von 23027 Multiplikationen von 1.0001 zu unterteilen. Briggs fragte sich daher, ob sich eine Unterteilung auch in weniger Schritten erreichen liesse.

Welchen Faktor  $a$  muss man nehmen, wenn man das Intervall von 1 bis 10 geometrisch in zwei Teilintervalle unterteilen will. Der Faktor  $a$  muss  $a^2 = 10$  erfüllen, also  $a = \sqrt{10}$ . Somit haben wir in  $\sqrt{10}$  einen Wert mit einem genau bekannten Zehnerlogarithmus von 0.5 gefunden.

Durch Iteration dieser Idee kann man durch  $n$ -faches wiederholtes Wurzelziehen die Zahlen mit den bekannten Logarithmen  $2^{-n}$  bestimmen. Durch Darstellung eines Logarithmus im Binärsystem kann man dann die zugehörige Zahl durch nur so viele Multiplikationen bestimmen, wie Einsen in der Binärdarstellung des Logarithmus vorkommen. Damit ist der Rechenaufwand für die Berechnung einzelner Logarithmen sehr viel kleiner also in den Methoden von Bürgi und Napier.

Die Briggssche Idee funktioniert besonders gut im Binärsystem, wenn also Logarithmen für Zahlen zwischen 1 und 2 bestimmt werden müssen. Im Binärsystem ist Division durch 2 besonders einfach, sie ist einfach nur eine Verschiebung des Kommas. Auch für die Berechnung der Quadratwurzel gibt es effiziente binäre Algorithmen.

## 2.3 Die Lambert W-Funktion

Exponentialgleichungen wie

$$e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$$

können durch Substitution  $y = e^x$  in eine algebraische Gleichung umgeformt werden, die mit Wurzelfunktionen gelöst werden kann. Eine solche Substitution ist nicht mehr möglich, wenn Produkte der Unbekannten und der Exponentialfunktion, also  $xe^x$  auftreten. Die Lambert W-Funktion ermöglicht, die Lösungen solcher Gleichungen darzustellen.

Als Anwendung der Theorie der Lambert-W-Funktion wird in Kapitel 12 eine Parametrisierung einer Verfolgungskurve mit Hilfe von  $W(x)$  bestimmt.

### 2.3.1 Die Definition der Lambert W-Funktion

Ein Graph der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto xe^x$$

ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Die einzige Nullstelle ist bei  $x = 0$ . Die Funktion  $f$  hat die Ableitung  $f'(x) = e^x + xe^x$ , an der Stelle  $x = 0$  hat der Graph von  $f(x)$  daher die Steigung 1.

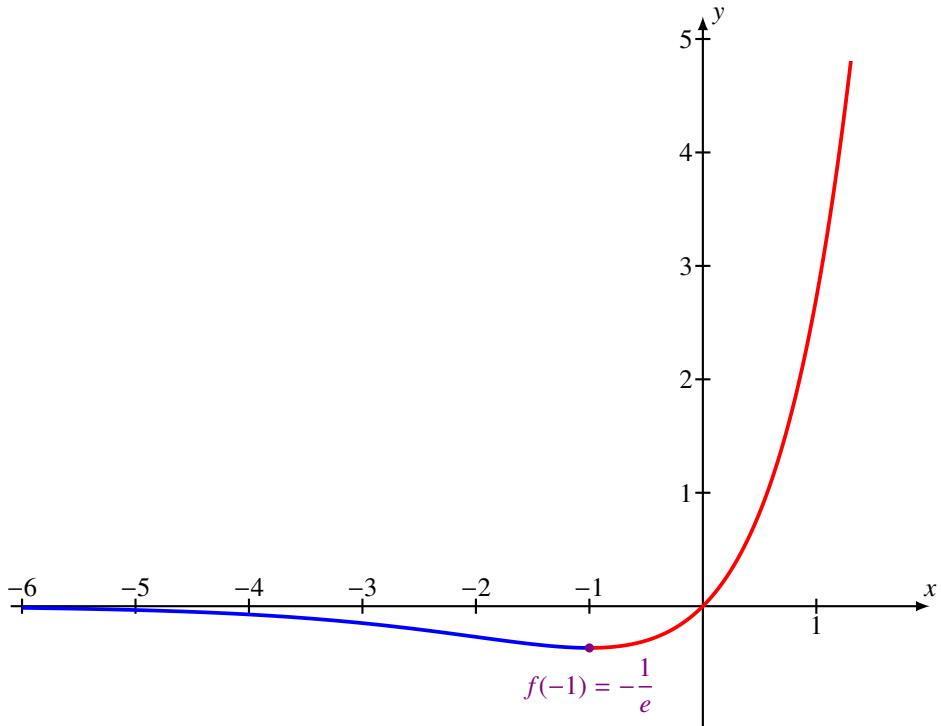
Die Ableitung verschwindet für

$$0 = f'(x) = e^x(1 + x) \quad \Rightarrow \quad x = -1,$$

dort hat die Funktion  $f$  den minimalen Wert  $-1/e$ .

Wegen des Minimums an der Stelle  $x = -1$  ist die Funktion  $f(x)$  nicht umkehrbar. Auf dem Teilintervall  $I_{-1} = (-\infty, -1]$  ist  $f$  streng monoton fallend, auf dem Teilintervall  $I_0 = [-1, \infty)$  ist sie streng monoton wachsen. Die Einschränkung von  $f$  auf diese beiden Intervalle ist also invertierbar.

**Definition 2.3.** Die inverse Funktion der Funktion  $[-1, \infty) \rightarrow [-1/e, \infty) : x \mapsto xe^x = y$  heisst die Lambert W-Funktion, geschrieben  $W(y)$  oder  $W_0(y)$ . Die inverse Funktion der Funktion  $(-\infty, -1) \rightarrow [-1/e, 0)$  wird mit  $W_{-1}$  bezeichnet.

Abbildung 2.3: Graph der Funktion  $f: x \mapsto f(x) = xe^x$ 

Die beiden Funktion  $W_0(x)$  und  $W_{-1}(x)$  sind in Abbildung 2.4 dargestellt. Beide Funktionen sind streng monoton und haben unendlich grosse Steigung an der Stelle  $x = -1/e$ .

Da die  $W$ -Funktionen Umkehrfunktionen der Funktion  $f(x) = xe^x$  sind, erfüllen sie

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

### Ableitung der Funktionen $W(x)$ und $W_{-1}(x)$

Die Umkehrfunktion  $f^{-1}(y)$  einer Funktion  $f(x)$  erfüllt  $f^{-1}(f(x)) = x$ . Ableitung nach  $x$  ergibt mit der Kettenregel

$$\left. \frac{df^{-1}(y)}{dy} \right|_{y=f(x)} \frac{df}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Für die  $W$ -Funktion, also für  $W(y) = x$  oder  $y = f(x) = xe^x$  bedeutet dies

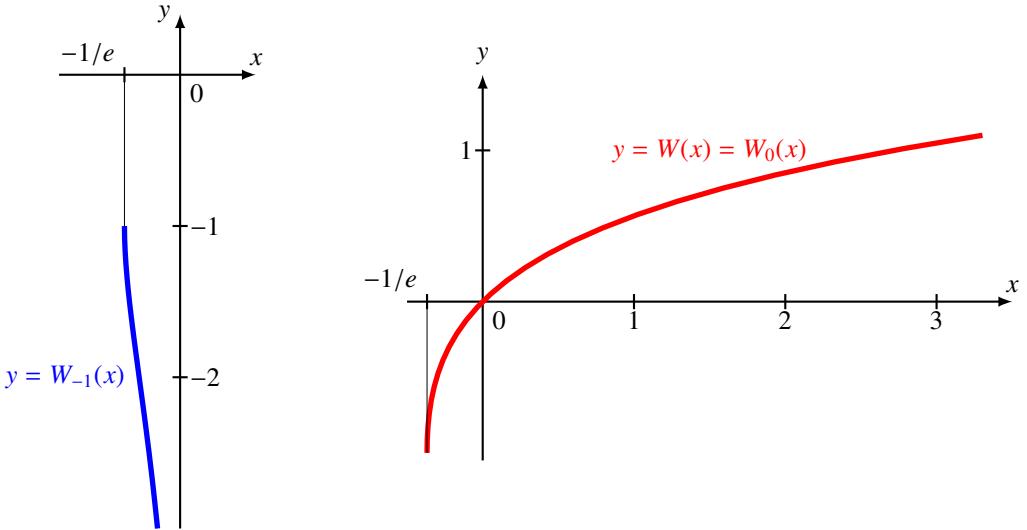
$$W'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(W(y))}.$$

Die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $W(y)$  ist

$$f'(W(y)) = (1 + x)e^x = (1 + W(y))e^{W(y)}.$$

Die Exponentialfunktion von  $W(y)$  ist

$$e^{W(y)} = \frac{y}{W(y)},$$

Abbildung 2.4: Graph der Funktionen  $W_{-1}(x)$  (links) und  $W_0(x)$  (rechts)

womit die Ableitung der  $W$ -Funktion

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y} \cdot \frac{1}{1 + W(y)} = \frac{W(y)}{y(1 + W(y))} \quad (2.2)$$

wird.

Aus der ersten Ableitung kann jetzt mit Hilfe der Quotientenregel auch jede höhere Ableitung berechnet werden. Die zweite Ableitung ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} W(y) &= \frac{d}{dy} W'(y) = \frac{d}{dy} \frac{W(y)}{y(1 + W(y))} \\ &= \frac{W'(y)y(1 + W(y)) - W(y)(1 + W(y) + yW'(y))}{y^2(1 + W(y))^2} \\ &= \frac{W'(y)y - W(y)(1 + W(y))}{y^2(1 + W(y))^2}. \end{aligned}$$

Die Ableitung  $W'(y)$  kann jetzt durch (2.2) ersetzt werden, dies ergibt

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{W(y)}{y(1 + W(y))}y - W(y)(1 + W(y))}{y^2(1 + W(y))^2} \\ &= \frac{W(y) - W(y)(1 + W(y))^2}{y^2(1 + W(y))^3} \\ &= \frac{-2W(y)^2 - W(y)^3}{y^2(1 + W(y))^3} \\ &= -\frac{W(y)^2}{y^2(1 + W(y))^3}(W(y) + 2). \end{aligned}$$

Nach dem selben Muster können beliebig hohe Ableitungen von  $W(y)$  durch  $W(y)$  ausgedrückt werden. Zum Beispiel findet man nach einiger Rechnung für die dritte und vierte Ableitung der  $W$ -Funktion die Ausdrücke

$$\begin{aligned} W'''(x) &= \frac{W(y)^3}{y^3(1+W(y))^4} \cdot (2W(y)^2 + 8W(y) + 9) \\ W''''(x) &= -\frac{W(y)^4}{y^4(1+W(y))^5} \cdot (6W(y)^3 + 36W(y)^2 + 79W(y) + 64). \end{aligned}$$

Mit etwas zusätzlicher Arbeit kann man für die  $n$ -te Ableitung

$$\frac{d^n}{dy^n} W(y) = \frac{(-1)^{n+1} W(y)^n}{y^n(1+W(y))^{n+1}} \cdot P_n(W(y)),$$

wobei die Polynome  $P_n(t)$  die Rekursionsgleichung

$$P_{n+1}(t) = (nt + 3n - 1) \cdot P_n(t) - (t + 1) \cdot P'_n(t)$$

mit  $P_1(t) = 1$ .

### Differentialgleichung und Stammfunktion

Die Ableitungsformel (2.2) bedeutet auch, dass die  $W$ -Funktion eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dW}{dz} = \frac{W}{z(1+W)} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad W(0) = 1$$

ist. Diese Gleichung kann separiert werden in

$$(1+W) \frac{dW}{W} = \frac{dz}{z}.$$

Eine Stammfunktion

$$F(y) = \int W(y) dy$$

von  $W$  kann mit der Substitution  $w = W(y)$  gefunden werden, also  $we^w = y$ . Die Ableitung ist  $dy = (1+w)e^w dw$ , so dass die Stammfunktion

$$\int W(y) dy = \int w(1+w)e^w dw = (w^2 - w + 1)e^w + C$$

wird. Durch Rücksubstitution und mit Hilfe der Relation  $e^{W(y)} = y/W(y)$  findet man jetzt den Ausdruck

$$\begin{aligned} \int W(y) dy &= W(y)^2 e^{W(y)} - W(y) e^{W(y)} + e^{W(y)} + C \\ &= y \left( W(y) - 1 + \frac{1}{W(y)} \right) + C \end{aligned} \tag{2.3}$$

für die Stammfunktion von  $W(y)$ .

### 2.3.2 Lösung von Exponentialgleichungen

Die Lambert W-Funktion kann zur Lösung von Exponentialgleichungen verwendet werden.

**Aufgabe 2.4.** Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$x = a + be^{cx},$$

wobei  $b$  und  $c$  nicht 0 sein dürfen.

*Lösung.* Wir müssen die Gleichung in eine Form bringen, in der das Produkt  $Xe^X$  auftritt. Durch Subtraktion von  $a$  erhalten wir die Gleichung

$$x - a = be^{cx}.$$

Multiplikation mit  $e^{-cx}$  ergibt

$$(x - a)e^{-cx} = b.$$

Im Exponenten steht das Produkt  $cx$ , als Faktor vor der Exponentialfunktion die Differenz  $x - a$ , durch Multiplikation mit  $c$  kann man erreichen, dass in beiden Termen nur die Kombination  $cx$  auftritt. Schreibt man  $X = c(x - a)$  oder  $x = X/c + a$ , kann man die Gleichung in die Form

$$cb = Xe^{-X+ac} = Xe^{-X}e^{ac}$$

bringen. Multiplikation mit  $-e^{-ac}$  führt auf die Form

$$-cbe^{-ac} = -Xe^{-X} = f(-X)$$

wo jetzt auf der rechten Seite die gesuchte Form steht. Mit

$$-X = W(-cbe^{-ac}) = -c(x - a) \quad \Rightarrow \quad x = a - \frac{1}{c}W(-cbe^{-ac})$$

Die Gleichung hat eine Lösung wenn  $-cbe^{-ac} > -1/e$  ist. □

### 2.3.3 Numerische Berechnung der Lambert-W-Funktion

Die  $W$ -Funktionen sind nur dann nützlich, wenn man sie effizient berechnen kann. Leider ist sie nicht Teil der C- oder C++-Standardbibliothek, man muss sich also mit einer spezialisierten Bibliothek oder einer eigenen Implementation behelfen.

#### Berechnung mit dem Newton-Algorithmus

Für  $x > -1$  ist die Funktion  $W(x)$  die Umkehrfunktion der streng monoton wachsenden und konvexen Funktion  $f(x) = xe^x$ . In dieser Situation konvergiert der Newton-Algorithmus zur Bestimmung der Nullstelle  $x = W_0(y)$  von  $f(x) - y$  für alle Werte von  $y > -1/e$ . Für  $W_{-1}(y)$  ist die Situation etwas komplizierter, da für  $x < -1$  die Funktion  $f(x)$  nicht konvex ist.

Ausgehend vom Startwert  $x_0$  ist die Iterationsfolge definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - y}{(1 + x_n) e^{x_n}}.$$

Die Theorie verspricht, dass die Folge quadratisch konvergiert, wenn der Startwert  $x_0$  genügend genau ist. Für  $W_0(y)$  scheint  $x_0 = \log(1 + y)$  ein guter Startwert zu sein, für  $W_{-1}(y)$  funktioniert  $x_0 = \log(-y)$ .

Die Steigung des Graphen der Funktion  $f(x)$  ist für grosse positive Werte von  $x$  sehr gross und für grosse negative Werte von  $x$  sehr klein, was die Konvergenz stark beeinträchtigen kann. An der Stelle  $x = -1$  mit dem Wert  $f(-1) = -1/e$  ist die Steigung 0 und die Konvergenz des Newton-Algorithmus ist nur noch linear. Für mittelgrosse Werte von  $y$  weg von  $-1/e$  kann  $W_0(y)$  oder  $W_{-1}(y)$  mit einer Genauigkeit  $10^{-15}$  innert weniger als 10 Iterationen bestimmt werden.

### GNU scientific library

Die Lambert  $W$ -Funktionen  $W_0(x)$  und  $W_{-1}(x)$  sind auch in der GNU scientific library [**buch:library:gsl**] implementiert.

## Übungsaufgaben

**2.1.** Man finde  $x \in \mathbb{R}$  derart, dass  $3^x = 2x + 2$ .

*Lösung.* Die Definition der  $W$ -Funktion verwendet die Exponentialfunktion, wir schreiben daher zunächst  $3^x = e^{x \log 3}$  und erhalten so die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{x \log 3} &= 2x + 2 \\ \frac{1}{3} e^{(x+1) \log 3} &= 2(x+1) \\ \frac{\log 3}{2 \cdot 3} e^{(x+1) \log 3} &= \log 3(x+1) = X \\ -\frac{\log 3}{6} &= -Xe^{-X}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht ein Ausdruck der Form  $ze^z$ , der mit der  $W$ -Funktion invertiert werden kann, es ist also

$$W\left(-\frac{\log 3}{6}\right) = -X \quad \Rightarrow \quad X = -W\left(-\frac{\log 3}{6}\right) = (x+1) \log 3$$

Durch Auflösen nach  $x$  findet man

$$x = -1 - \frac{1}{\log 3} W\left(-\frac{\log 3}{6}\right).$$

Die numerische Auswertung mit  $W_0$  und  $W_{-1}$  liefert zwei mögliche Lösungen, nämlich

$$x = \begin{cases} -1 - \frac{1}{\log 3} W_0\left(-\frac{\log 3}{6}\right) & = -0.79011 \\ -1 - \frac{1}{\log 3} W_{-1}\left(-\frac{\log 3}{6}\right) & = 1.44456. \end{cases}$$

Beide Lösungen kann man leicht durch Einsetzen überprüfen. ○

**2.2.** Finde die Lösungen der Gleichung  $x^x = 27$  mit Hilfe der Lambert W-Funktion.

*Lösung.* Wegen der speziellen Form  $27 = 3^3$  der rechten Seite kann man zwar die Lösung  $x = 3$  der Gleichung sofort erraten, für andere Werte der rechten Seite wird es dagegen schwieriger, so dass man keine andere Wahl hat, als die folgende Umformung zu verwenden.

Wir schreiben zunächst die Gleichung mit Hilfe der Exponentialfunktion als

$$e^{x \log x} = 27 \quad \Rightarrow \quad x \log x = \log 27$$

und substituieren  $t = \log x$ , also  $x = e^t$ . So entsteht die Gleichung

$$te^t = \log 27.$$

Auf der linken Seite steht ein Ausdruck, der mit der Lambert W-Funktion invertiert werden kann, es ist also

$$t = W(\log 27) \quad \Rightarrow \quad x = e^{W(\log 27)}.$$

Für  $W(\log 27)$  findet man

$$W(\log 27) = 1.098612 \quad \Rightarrow \quad x = 3. \quad \text{○}$$

**2.3.** Finden Sie  $x$  derart, dass  $(\tan x)^{\tan x} = 2$

*Lösung.* Zunächst setzen wir  $y = \tan x$ , dann wird die Gleichung zu  $y^y = 2$ . Der Logarithmus davon ist  $y \log y = \log 2$ . Mit der Bezeichnung  $t = \log y$  wird daraus die Gleichung

$$te^t = \log 2,$$

die mit der Lambert-W-Funktion gelöst werden kann, die Lösung ist  $t = W(\log 2)$ . Darus kann man jetzt wieder  $y = e^t = e^{W(\log 2)}$  bekommen. So finden wir die Lösung  $x = \arctan e^{W(\log 2)} \approx 1.00064239632968$ . Durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  erhält man weitere Lösungen. ○

# Kapitel 3

## Spezielle Funktionen aus der Geometrie

Die ältesten geometrisch definierten speziellen Funktionen sind die Wurzeln. Sie haben ermöglicht, die Kantenlänge eines Quadrates mit vorgegebenem Flächeninhalt zu bestimmen. Die Formel von Pythagoras über die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks ermöglicht, mit Hilfe von Quadratwurzeln aus zwei Seiten die dritte zu berechnen. Der Strahlensatz schliesslich reduziert alle rechtwinkligen Dreiecke auf spezielle Dreiecke, deren eine Seite Einheitslänge hat. Die Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck hängen nur vom Winkel ab. Dies führt auf eine neue Klasse von speziellen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen, die ebenfalls bereits im Altertum bekannt waren.

Mindestens ebenso wichtig wie die Berechnung ebener Dreiecke war im Altertum aber die Berechnung von Dreiecken am Himmel. Auf einer Kugeloberfläche funktioniert Ähnlichkeit nicht mehr, der Strahlensatz muss durch den Satz von Menelaos ersetzt werden. Es ergibt sich eine Methode, beliebige Dreiecke auf einer Kugeloberfläche ganz analog zum Vorgehen bei ebenen Dreiecken zu berechnen. Diese sphärische Trigonometrie ist die Basis der Navigation (siehe Kapitel 21) und aller astrometrischer Berechnungen.

Die Analysis hat die Möglichkeit geschaffen, die Länge von Kurven zu definieren und zu berechnen, wie auch den Flächeninhalt von Gebieten, die von Kurven berandet sind. Es stellt sich heraus, dass bereits anscheinend einfache Aufgaben wie die Berechnung der Länge von Ellipsen- oder Hyperbelbögen auf die Notwendigkeit führt, neue spezielle Funktionen zu definieren.

### 3.1 Trigonometrische Funktionen

Die Navigation zur See wie auch die Landvermessung hängen davon ab, dass man Winkel zwischen Himmelskörpern, Landmarken oder dem Horizont messen kann. Aus solchen Messungen können dann mittels bekannter Beziehungen zwischen den Winkeln und Seitenlängen in Dreiecken weitere Seitenlängen und Winkel berechnet werden. Schon in rechtwinkligen Dreiecken sind die Beziehungen zwischen Winkel und Seitenlängen von einer Art, die sich nicht durch algebraische Ausdrücke berechnen lässt. Es ist daher notwendig, neue spezielle Funktionen zu definieren, die trigonometrischen Funktionen.

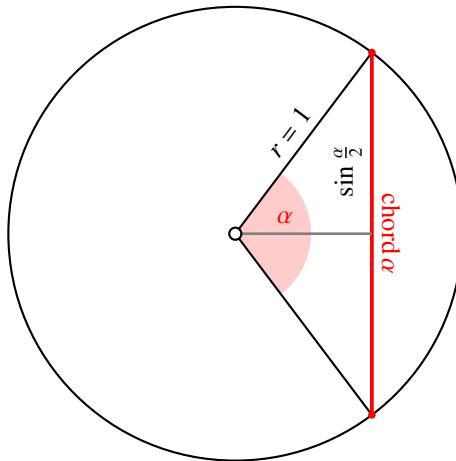


Abbildung 3.1: Definition der Chord-Funktion  $\text{chord } \alpha$  am Einheitskreis.

### 3.1.1 Definition der trigonometrischen Funktionen

Eines der ältesten Messgeräte für Winkel ist der Jakobsstab, dargestellt in Abbildung ???. Der Querstab kann entlang des Stabs verschoben werden. Die beiden Punkte, deren Zwischenwinkel bestimmt werden soll, werden so anvisiert, dass sie sich auf den Enden des Querstabs zu befinden scheinen. Abgelesen wird dann die Strecke  $l$  zwischen dem Auge des Beobachters und dem Querstab. Daraus und aus der Länge  $l_Q$  des Querstabes lässt sich jetzt der Winkel mit der Formel

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{l_Q}{2l}$$

berechnen. Um nun einen numerischen Wert für  $\alpha$  zu bekommen, braucht man eine Tabelle der Funktionswerte der Funktion auf der linken Seite.

Die älteste bekannt Tabelle von Funktionswerten trigonometrischer Funktionen stammt von Hipparchus aus dem 2. Jahrhundert BCE und enthält Werte der sogenannten Chord-Funktion  $\text{chord } \alpha$ , welche die Länge der Sehne eines Bogens  $\alpha$  des Einheitskreises berechnet. Aus der Abbildung 3.1 ergibt sich

$$\text{chord } \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Die Verwendung der Chord-Funktion war bis ins 19. Jahrhundert in der Landvermessung üblich. Neben der Chord-Funktion waren auch noch andere heute weitgehend vergessene Funktionen im Einsatz wie zum Beispiel der Sinus versus

$$\text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

oder der Semiversus

$$\text{sem } \alpha = \frac{\text{vers } \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

der besonders nützlich bei der Berechnung der Entfernung zweier in geographischer Länge und Breite gegebener Punkte auf der Erdoberfläche ist und daher in der Navigation lange üblich war.

Eine neue spezielle Funktion sollte sowohl möglichst universell einsetzbar sein als auch gut und effizient berechnet werden können. Aus dieser Forderung haben sich die Funktion  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  und  $\tan \alpha$  als die nützlichsten herausgestellt. Mit ihnen lassen sich a

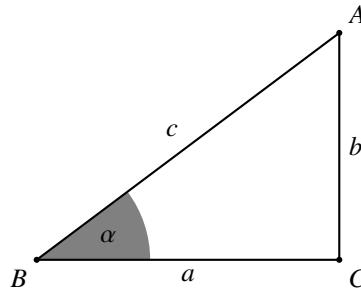


Abbildung 3.2: Rechtwinkliges Dreieck zur Definition der trigonometrischen Funktionen.

### Rechtwinklige Dreiecke

Ähnliche Dreiecke haben gleiche Seitenverhältnisse und Winkel. Rechtwinklige Dreiecke sind daher bis auf Ähnlichkeit vollständig durch die Angabe eines Winkels beschrieben. Die Seitenverhältnisse müssen daher aus den Winkeln berechnet werden können. Genau dies ist die Aufgabe, die die trigonometrischen Funktionen lösen.

**Definition 3.1.** In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , sind die Seitenverhältnisse gegeben durch die trigonometrischen Funktionen, die wie folgt definiert sind:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkatete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankatete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkatete}}{\text{Ankatete}} = \frac{b}{a}$$

mit den Kehrwerten

$$\sec \alpha = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkatete}} = \frac{c}{b}, \quad \csc \alpha = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankatete}} = \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \cot \alpha = \frac{\text{Ankatete}}{\text{Gegenkatete}} = \frac{a}{b}$$

(siehe auch Abbildung 3.2).

Aus der Definition und dem Satz von Pythagoras kann eine grosse Zahl von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen abgeleitet werden. Zum Beispiel folgt sofort

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Insbesondere lässt sich  $\sin \alpha$  durch  $\cos \alpha$  ausdrücken und umgekehrt:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Da sich alle Funktionen durch  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  ausdrücken lassen, können alle auch nur durch eine ausgedrückt werden. Durch Umkehrung dieser Beziehung kann man jede der trigonometrischen Funktionen durch jede andere ausdrücken, wie dies in Tabelle 3.3 zusammengestellt ist.

Diese Definition 3.1 ist auf spitze Winkel und damit auf nichtnegative Werte der trigonometrischen Funktionen beschränkt.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sec \alpha}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}{\csc \alpha}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$	$\frac{1}{\csc \alpha}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}$
$\cot \alpha$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$	$\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$
$\sec \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$	$\sec \alpha$	$\frac{\csc \alpha}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}$
$\csc \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$	$\frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\csc \alpha$

Abbildung 3.3: Darstellung aller trigonometrischen Funktionen durch jede beliebige andere Funktion. Für Winkel außerhalb des 1. Quadranten müssen die Vorzeichen der Quadratwurzeln so gewählt werden, dass die Funktion das richtige Vorzeichen erhält.

## Einheitskreis

Im vorangegangen Abschnitt wurden die rechtwinkligen Dreiecke durch einen Winkel charakterisiert und die trigonometrischen Funktionen als Verhältnis von Seiten des Dreiecks abgeleitet. Dabei wurde die Schwierigkeit übergangen, wie überhaupt der Winkel definiert werden soll. Ein Winkel war im Wesentlichen durch die Eigenschaft definiert, dass ähnliche Dreiecke den gleichen Winkel haben. Die Definition 3.1 ist in diesem Licht nichts anderes als eine Namenskonvention für die Seitenverhältnisse einer Klasse von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken.

Eine alternative Charakterisierung rechtwinkliger Dreiecke geht von Punkten auf dem Einheitskreis aus. Die Lote von einem Punkt  $P$  auf dem Einheitskreis definieren zwei ähnliche Dreiecke, mit dem Ursprung  $O$ , dem Punkt  $P$  und dem Fußpunkt des Lotes. Die Koordinaten des Punktes  $P$  können im Gegensatz zu den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung 3.2 auch negativ sein. Ein Punkt im zweiten Quadranten hat zum Beispiel eine negative  $x$ -Koordinate. Die trigonometrischen Funktionen können nun analog zu Definition 3.1 aber unter Verwendung der Koordinaten  $x$  und  $y$ .

Auch das Argument  $\alpha$  der trigonometrischen Funktionen kann jetzt auf natürlichere Art und Weise definiert werden. Es ist die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen dem Punkt  $(1, 0)$  und  $P$ . Damit lassen sich die trigonometrischen Funktionen jetzt für beliebige Winkel  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren.

**Definition 3.2.** *Die trigonometrischen Funktionen des Winkels  $\alpha$  zwischen der  $x$ -Achse und der*

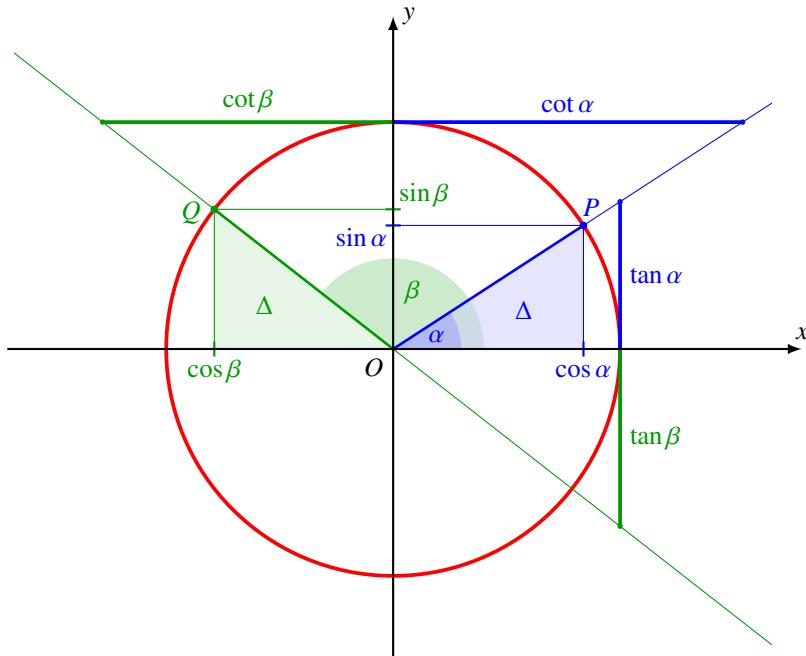


Abbildung 3.4: Definition der trigonometrischen Funktion mit Hilfe des Einheitskreises

Richtung durch den Punkt  $P$  sind

$$\sin \alpha = x, \quad \cos \alpha = y \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

mit den Kehrwerten

$$\sec \alpha = \frac{1}{x}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{x}{y}.$$

(siehe auch Abbildung 3.4).

Die Beziehungen der Tabelle 3.3 zwischen den trigonometrischen Funktionen bleibt auch für diese erweiterten Funktionen gültig, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzel falls vorhanden geeignet gewählt wird.

### 3.1.2 Drehungen der Ebene

Die Funktionen  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  sind in den Anwendungen besonders nützlich, weil sich damit die Kreisbewegung parametrisieren lässt. Etwas allgemeiner kann man damit Drehungen der Ebene beschreiben. Damit entstehen die Funktion als Nebenprodukt einer Parametrisierung der Drehgruppe  $\text{SO}(2)$ . Daraus werden sich später Ableitungseigenschaften und Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen ableiten lassen.

## Drehmatrizen und Additionstheoreme

Eine Drehung der Ebenen  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\alpha$  bildet die Standardbasisvektoren auf die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ab. Die Abbildungsmatrix der Drehung ist daher

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  ist wieder eine Drehung um den Winkel  $\alpha + \beta$ , es gilt also

$$D_{\alpha+\beta} = D_\alpha D_\beta,$$

oder in Matrizenform

$$\begin{aligned} D_{\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \\ &= D_\alpha D_\beta = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der beiden Matrizen liest man die Additionstheoreme.

**Satz 3.3.** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

Ein besonders einfacher Spezialfalls ist  $\alpha = \beta$ , es ergeben sich die Doppelwinkelformeln

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

In der Formel für  $\cos 2\alpha$  kann die rechte Seite durch nur eine Winkelfunktion ausdrücken:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Beide Ausdrücke lassen sich leicht nach den Funktionen auf der rechten Seite auflösen, so erhält man die Halbwinkelformeln

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Der letzte Ausdruck ist auch bekannt als der Semiversus.

## Funktionen für mehrfache Winkel

Die Additionstheoreme können dazu verwendet werden, Formeln für die Werte der trigonometrischen Funktionen mehrfacher Winkel zu finden. Die Berechnung kann etwas vereinfacht werden, wenn man die Drehmatrix mit Hilfe der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als

$$D_\alpha = E \cos \alpha + J \sin \alpha$$

schreiben. Die Potenzen von  $J$  sind

$$J^2 = -E, \quad J^3 = -J \quad \text{und} \quad J^4 = E.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{n\alpha} &= (D_\alpha)^n = (E \cos \alpha + J \sin \alpha)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \alpha \sin^k \alpha J^k \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l} \alpha \sin^{2l} \alpha - J \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1} \alpha \sin^{2l+1} \alpha \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Matrix  $D_{n\alpha}$  findet man die Formeln für die Funktionen des  $n$ -fachen Winkels:

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{n}{2l} \cos^{n-2l} \alpha \sin^{2l} \alpha \\ \sin n\alpha &= - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \cos^{n-2l-1} \alpha \sin^{2l+1} \alpha \end{aligned}$$

Für kleine Werte von  $n$  sind die Formeln einigermassen übersichtlich, zum Beispiel für  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Indem man diese Formeln als kubische Gleichungen für die Unbekannte  $\cos \alpha$  bzw.  $\sin \alpha$  betrachtet, kann man durch Lösung der Gleichung zum Beispiel mit der Formel von Cardano zu gegebenen Werten von  $\cos 3\alpha$  und  $\sin 3\alpha$  die Werte von  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  durch rein algebraische Operationen bestimmen.

### 3.1.3 Eine Tabelle der Werte der trigonometrischen Funktionen aufstellen

Die älteste Tabelle der Werte trigonometrischer Funktionen stammt aus der Feder von Hipparchos aus dem zweiten Jahrhundert BCE. Sie hatte eine Auflösung von  $1^\circ$ . Wie kann man eine solche Tabelle mit den Mitteln der damaligen Zeit, also insbesondere ganz ohne Dezimalbrüche, zusammenstellen?

Aus speziellen Dreiecken kann man die einige wenige bekannte Winkel finden und die zugehörigen Werte der trigonometrischen Funktionen bestimmen. In einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck liest man

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

ab. Ein gleichseitiges Dreieck erlaubt

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{1}{2} & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

zu bestimmen. Mit Hilfe der Halbwinkelformeln werden daraus die Werte von  $15^\circ$ :

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme kann man jetzt auch noch die Werte für den Winkel  $75^\circ$  bestimmen. Damit sind die Werte der Sinus- und Kosinus-Funktion für alle Vielfachen von  $15^\circ$  bekannt.

Etwas spezieller ist die Situation eines Fünfecks, welches den Zentriwinkel  $72^\circ$  hat, damit kann man die Werte

$$\begin{aligned}\sin 36^\circ &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} & \text{und} \quad \cos 36^\circ &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} \\ \sin 72^\circ &= 2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{5 + \sqrt{5}} & \cos 72^\circ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{8} - \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

Mit den Halbwinkelformeln kann man dies nochmals teilen, bis man die Winkel

$$\sin 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}} \quad \text{und} \quad \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}}$$

sowie

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}}} \quad \text{und} \quad \cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}}}$$

ausgewertet hat.

Ausgehend von bereits behandelten Vielfachen von  $15^\circ$  kann man jetzt mit Hilfe der Additionstheoreme durch Addition und Subtraktion der bereits behandelten Winkel jeden Winkel bekommen, der ein Vielfaches von  $3^\circ$  ist, sie sind in der Tabelle 3.1 zusammengestellt.

$\alpha$	$90^\circ - \alpha$		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$0^\circ$			0.00000000	1.00000000
$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$	$87^\circ = 72^\circ + 15^\circ$		0.05233596	0.99862953
$6^\circ = 15^\circ - 9^\circ$	$84^\circ = 75^\circ + 9^\circ$		0.10452846	0.99452190
$9^\circ$	$81^\circ = 90^\circ - 9^\circ$		0.15643447	0.98768834
$12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$	$78^\circ = 60^\circ + 18^\circ$		0.20791169	0.97814760
$15^\circ$	$75^\circ$		0.25881905	0.96592583
$18^\circ$	$72^\circ$		0.30901699	0.95105652
$21^\circ = 30^\circ - 9^\circ$	$69^\circ = 60^\circ + 9^\circ$		0.35836795	0.93358043
$24^\circ = 15^\circ + 9^\circ$	$66^\circ = 75^\circ - 9^\circ$		0.40673664	0.91354546
$27^\circ = 45^\circ - 18^\circ$	$63^\circ = 45^\circ + 18^\circ$		0.45399050	0.89100563
$30^\circ$	$60^\circ$		0.50000000	0.86600254
$33^\circ = 45^\circ - 12^\circ$	$57^\circ = 45^\circ + 12^\circ$		0.54463903	0.83867057
$36^\circ$	$54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$		0.58778525	0.80901699
$39^\circ = 30^\circ + 9^\circ$	$51^\circ = 60^\circ - 9^\circ$		0.62932039	0.77714596
$42^\circ = 30^\circ + 12^\circ$	$48^\circ = 60^\circ - 12^\circ$		0.66913060	0.74314483
$45^\circ$			0.70710678	0.70710678

Tabelle 3.1: Tabelle der Werte der trigonometrischen für Winkel, die ganzzahlige Vielfache von  $3^\circ$  sind. Für die Winkel in der Spalte  $90^\circ - \alpha$  sind die Sinus- und Kosinus-Werte zu vertauschen.

Zum Beispiel ergeben sich für den Winkel  $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$  mit den Additionstheoremen die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) \\
&= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}} \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \\
&= 0.05233595624294377, \\
\cos 3^\circ &= \cos(18^\circ - 15^\circ) \\
&= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}} \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \\
&= 0.998629534754574.
\end{aligned}$$

Wie man es auch dreht und wendet, es scheint keine rein geometrische Möglichkeit zu geben, einen die Werte der Sinus- und Kosinus-Funktion von  $1^\circ$  zu bestimmen, mit denen man die bisher erhaltene Tabelle auf diese Auflösung verfeinern könnte. Da man aber bereits die Werte für  $\sin 3^\circ$  und  $\cos 3^\circ$  bestimmt hat, kann man die kubischen Gleichungen für  $c = \cos 1^\circ$  und  $s = \sin 1^\circ$

$$\begin{aligned}
\cos 3^\circ &= 4c^3 - 3c &\Rightarrow c^3 - 3c - \cos 3^\circ &= 0 \\
\sin 3^\circ &= -4s^3 + 3s &\Rightarrow 4s^3 - 3s + \sin 3^\circ &= 0
\end{aligned}$$

zu lösen versuchen. Es stellt sich allerdings heraus, dass die Gleichung drei reelle Lösungen hat,

$i$	$s_i$	$c_i$
0	0.01745329251994330	0.9998476796893682
1	0.01745240643722863	0.9998476951563915
2	0.01745240643728351	0.9998476951563912
3	0.01745240643728351	0.9998476951563913
	$\sin 1^\circ$	$\cos 1^\circ$

Tabelle 3.2: Newton-Iteration zur Bestimmung von  $\sin 1^\circ$  und  $\cos 1^\circ$ 

nämlich

$$c = \cos 1^\circ, \cos 121^\circ, \cos 241^\circ \quad \text{und} \quad s = \sin 1^\circ, \sin 121^\circ, \sin 241^\circ.$$

Dies bedeutet, dass der *casus irreducibilis* für die Lösung der kubischen Gleichung vorliegt, der nur mit Hilfe komplexer Zahlen behandelt werden kann. Dazu muss die dritte Wurzel aus einer komplexen Zahl gezogen werden, was wieder gleichbedeutend mit der Bestimmung der Sinus- und Kosinus-Werte von  $1^\circ$  ist. Damit bleibt für den Winkel  $1^\circ$  nur ein numerisches Verfahren. Zum Beispiel kann man das Newton-Verfahren verwenden mit dem Startwert  $s_0 = \pi/180$  für die Iteration, die  $\sin 1^\circ$  liefern soll, und  $c_0 = \sqrt{1 - s_0^2}$  für die Kosinus-Iteration. Die Konvergenz ist sehr schnell, bereits nach zwei Iterationen hat man einen auf 16 Stellen genauen Wert, wie man in Tabelle 3.2 sieht. Mit einer einzigen Anwendung des Additionstheorems kann man jetzt aus den Werten der Tabelle 3.1 die Werte von Sinus und Kosinus für jedes ganzzahlige Vielfache von  $1^\circ$  berechnen. Das Skript 3.bc im Repository führt dies durch und demonstriert, dass für die Berechnung aller Werte nur die arithmetischen Operationen und Quadratwurzeln nötig sind.

### 3.1.4 Trigonometrische Funktionen und Matrixexponentialfunktion

Die Exponentialfunktion erfüllt auf ganz natürlich Art eine Additionsgesetz, es ist  $\exp(t_1 + t_2) = \exp(t_1) \exp(t_2)$ . Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn man als Argumente der Potenzreihe Matrizen verwendet, wenigstens wenn diese Matrizen vertauschen. Insbesondere gilt

$$\exp(\alpha J + \beta J) = \exp(\alpha J) \exp(\beta J).$$

Setzt man  $\alpha J$  in die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein, bekommt man

$$\begin{aligned} \exp(\alpha J) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} J^k \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2j}}{(2j)!} (-1)^j \right) E + \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2j+1}}{(2j+1)!} (-1)^j \right) J, \end{aligned}$$

somit folgt

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\alpha^{2j}}{(2j)!} \\ \sin \alpha &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\alpha^{2j+1}}{(2j+1)!} \end{aligned}$$

Tabelle 3.3: Verfeinerte Tabelle für die Sinus- und Kosinuswerte für ganzzahlige Vielfache von  $1^\circ$ , berechnet auf 32 Nachkommastellen mit Hilfe eines Skripts, welches das Kommandozeilenprogramm bc verwendet. Die erreichte Genauigkeit ist grösser, als was die in gegenwärtig handelsüblichen Allzweckprozessoren verfügbare Floatingpoint-Arithmetik ermöglicht.

## 3.2 Hyperbolische Funktionen

Drehmatrizen werden durch die Eigenschaft charakterisiert, dass sie Längen von und Winkel zwischen Vektoren in der Ebene nicht ändern. Die trigonometrischen Funktionen ermöglichen, alle Drehungen zu parametrisieren.

### 3.2.1 Das Minkowski-Skalarprodukt in der Ebene

**Definition 3.4.** Das Minkowski-Skalarprodukt in der Ebene ist definiert als

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1$$

für  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Das Minkowski-Skalarprodukt ist nicht definit, es gibt Vektoren, die ‘‘Länge’’ 0 haben, zum Beispiel ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1,$$

es ist daher nicht einfach möglich, eine Vektorlänge mit  $\sqrt{\langle x, x \rangle}$  zu definieren. Die Gram-Matrix des Skalarproduktes ist

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_0, e_0 \rangle & \langle e_0, e_1 \rangle \\ \langle e_1, e_0 \rangle & \langle e_1, e_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei  $e_0$  und  $e_1$  die Standardbasisvektoren der Ebene sind.

### 3.2.2 Matrizen, die das Skalarprodukt invariant lassen

In Anlehnung an das Vorgehen bei den Drehmatrizen suchen wir jetzt nach Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix},$$

die das Minkowski-Skalarprodukt nicht ändern.

#### Gleichungen für A

Erhaltung des Skalarproduktes bedeutet, dass

$$AGA^t = G$$

gelten muss. Durch Ausmultiplizieren findet man

$$\begin{aligned} AG &= \begin{pmatrix} -a_{00} & a_{01} \\ -a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}, \\ AGA^t &= \begin{pmatrix} -a_{00} & a_{01} \\ -a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{00}^2 + a_{01}^2 & -a_{00}a_{10} + a_{01}a_{11} \\ -a_{00}a_{10} + a_{01}a_{11} & -a_{10}^2 + a_{11}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Koeffizienten der Matrix A

$$-1 = -a_{00}^2 + a_{01}^2$$

$$0 = -a_{00}a_{10} + a_{01}a_{11}$$

$$0 = -a_{00}a_{10} + a_{01}a_{11}$$

$$1 = -a_{10}^2 + a_{11}^2$$

Die beiden Gleichungen in der linken unteren und der rechten oberen Ecke sind identisch. Aus der Gleichung in der linken oberen Ecke folgt, dass  $|a_{00}| \geq 1$  sein muss. Ebenso folgt aus der Gleichung in der rechten unteren Ecke, dass  $|a_{11}| \geq 1$  sein muss. Insbesondere kann man die anderen beiden Gleichungen durch die  $a_{00}a_{11}$  teilen und erhält

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{a_{01}}{a_{00}} \quad (3.1)$$

### Orientierungstreue Abbildungen

Wir verlangen jetzt zusätzlich, dass  $\det A = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 1$  ist. Löst man (3.1) nach  $a_{10}$  aus und setzt in die Determinante ein, erhält man

$$1 = a_{00}a_{11} - a_{01} \frac{a_{01}a_{11}}{a_{00}} = \frac{a_{00}^2 - a_{01}^2}{a_{00}} a_{11} = \frac{a_{11}}{a_{00}},$$

woraus  $a_{00} = a_{11}$  folgt, wir schreiben dafür zur Abkürzung  $c = a_{00}$ . Durch Umstellen der Gleichung (3.1) folgt jetzt auch

$$\frac{a_{01}}{a_{10}} = \frac{a_{11}}{a_{00}} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{01} = a_{10},$$

wir schreiben dafür  $s = a_{01} = a_{10}$ . Die Gleichungen reduzieren sich jetzt auf

$$1 = c^2 - s^2, \quad (3.2)$$

die anderen Gleichungen sind automatisch erfüllt.

### Erhaltung der Zeitrichtung

In der speziellen Relativitätstheorie spielt das Minkowski-Skalarprodukt eine besondere Rolle. Die Koordinaten  $x_0$  hat darin die Bedeutung der Zeit, man weiss aus Experimenten wie dem Michelson-Morley-Experiment, dass die Grösse  $\langle x, x \rangle$  eine Invariante ist. Die Transformationen mit der Matrix  $A$  beschreiben also zulässige Koordinatentransformationen, die Invariante erhalten.

Für Transformationen, die zusätzlich die Zeitrichtung erhalten sollen, muss  $a_{00} = a_{11} = c > 0$  verlangt werden.

### Parametrisierung mit $t = s/c$

Unter der Annahme  $c > 0$  lässt sich die Matrix vollständig durch den Parameter  $t = s/c$  beschreiben. Dividiert man (3.2) durch  $c^2$ , kann  $c$  durch  $t$  ausdrücken:

$$\frac{1}{c^2} = 1 - \frac{s^2}{c^2} = 1 - t^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Daraus kann man jetzt auch

$$s = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

bestimmen. Wir schreiben

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Formeln erinnern natürlich an die Formeln, mit denen der hyperbolische Sinus und Kosinus aus dem hyperbolischen Tangens berechnet werden kann. Dieser Zusammenhang und soll im nächsten Abschnitt hergestellt werden.

### 3.2.3 Hyperbolische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen ermöglichen eine Parametrisierung der Drehmatrizen  $D_\alpha$  derart, dass  $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha D_\beta$ . Die Parametrisierung der Matrizen  $H_t$  mit  $t = s/c$  erfüllt diese Bedingung nicht.

#### Additionstheoreme

Die Additionsregeln für  $t$ ,  $s$  und  $c$  ergeben sich, indem die Matrizen  $H_{t_1}$  und  $H_{t_2}$  ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned} H_{t_1} H_{t_2} &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 c_2 + s_1 s_2 & c_1 s_2 + s_1 c_2 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & s_1 s_2 + c_1 c_2 \end{pmatrix} = H_t. \end{aligned}$$

Für die Parameter der Matrix  $H_t$  folgt damit

$$\left. \begin{array}{l} c = c_1 c_2 + s_1 s_2 \\ s = c_1 s_2 + s_1 c_2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{c_1 s_2 + s_1 c_2}{c_1 c_2 + s_1 s_2} = \frac{\frac{s_2}{c_2} + \frac{s_1}{c_1}}{1 + \frac{s_1}{c_1} \frac{s_2}{c_2}} = \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}.$$

Auch diese Formel ist aus der Theorie der hyperbolischen Funktionen als das Additionstheorem für den hyperbolischen Tangens bekannt.

#### Matrixexponentialform

Die Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen in Abschnitt 3.1.4 hat gezeigt, dass eine Lösung für die Drehmatrix, die das Additionstheorem erfüllt, besonders einfach mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion gefunden werden kann. Die Grundlage dafür war die Matrix  $J$ .

Für die hyperbolischen Funktionen verwenden wir die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

damit lässt sich  $H_t$  als

$$H_t = cE + sK = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} E + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} K$$

schreiben. Die Matrix  $K$  hat die Potenzen

$$E = K^2 = K^4 = \cdots = K^{2j} \quad \text{und} \quad K = K^3 = K^5 = \cdots = K^{2j+1},$$

für  $j \in \mathbb{N}$ .

Die Exponentialreihe von  $\tau K$  ist

$$\exp(\tau K) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} K^k$$

$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j}}{(2j)!} \right) E + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) K$$

Dies ist eine Matrix der Form  $H_t$ , wenn man

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ c(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j}}{(2j)!} \end{aligned} \tag{3.4}$$

schreibt.

### Definition der hyperbolischen Funktionen

Die beiden Reihen (3.4) kann man auch direkt aus der Exponentialfunktion bekommen. Wir definieren

**Definition 3.5.** *Die Funktionen*

$$\sinh(\tau) = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(\tau) = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2}.$$

heissen der hyperbolische Sinus und der hyperbolische Kosinus. Die Quotienten

$$\tanh \tau = \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau} \quad \text{und} \quad \coth \tau = \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau}$$

heissen der hyperbolische Tangens und der hyperbolische Kotangens.

**Satz 3.6.** *Die orientierungserhaltenden  $2 \times 2$ -Matrizen, die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen und die Zeitrichtung erhalten, lassen sich mit den hyperbolischen Funktionen als*

$$H_\tau = \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix}$$

parametrisieren.

### Elementare Eigenschaften

Es ist nachzuprüfen, dass  $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$  ist. Das kann man ebenfalls direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau &= \left( \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2\tau} + 2 + e^{-2\tau} - e^{2\tau} - 2 + e^{-2\tau}) = 1. \end{aligned}$$

Damit liefern die Funktionen  $\cosh \tau$  und  $\sinh \tau$  tatsächlich eine Parametrisierung der Matrizen

$$\tau \mapsto H_\tau = \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix},$$

die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen.

## Additionstheoreme

Für die Definition 3.5 kann man die Additionstheoreme auch direkt verifizieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \cosh(\tau_1 + \tau_2) &= \frac{e^{\tau_1 + \tau_2} + e^{-\tau_1 - \tau_2}}{2} \\
 &= \frac{e^{\tau_1}e^{\tau_2} + e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}}{2} \\
 &= \frac{2e^{\tau_1}e^{\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + 2e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}}{4} \\
 &= \frac{(e^{\tau_1}e^{\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}) + (e^{\tau_1}e^{\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{-\tau_1}e^{-\tau_2})}{4} \\
 &= \frac{(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1})(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + (e^{\tau_1} - e^{-\tau_1})(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2})}{4} \\
 &= \frac{e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}}{2} \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \frac{e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}}{2} \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} \\
 &= \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 + \sinh \tau_1 \sinh \tau_2 \\
 \sinh(\tau_1 + \tau_2) &= \frac{e^{\tau_1 + \tau_2} - e^{-\tau_1 - \tau_2}}{2} \\
 &= \frac{e^{\tau_1}e^{\tau_2} - e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}}{2} \\
 &= \frac{2e^{\tau_1}e^{\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - 2e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}}{4} \\
 &= \frac{(e^{\tau_1}e^{\tau_2} - e^{\tau_1}e^{-\tau_2} + e^{-\tau_1}e^{\tau_2} - e^{-\tau_1}e^{-\tau_2}) + (e^{\tau_1}e^{\tau_2} + e^{\tau_1}e^{-\tau_2} - e^{-\tau_1}e^{\tau_2} - e^{-\tau_1}e^{-\tau_2})}{4} \\
 &= \frac{(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1})(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + (e^{\tau_1} - e^{-\tau_1})(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2})}{4} \\
 &= \frac{e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}}{2} \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \frac{e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}}{2} \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} \\
 &= \cosh \tau_1 \sinh \tau_2 + \sinh \tau_1 \cosh \tau_2.
 \end{aligned}$$

Damit sind die Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen bewiesen.

## 3.3 Bogenlänge

Die Möglichkeit, die Länge einer Kurve zu definieren und zu bestimmen, ist eine der Leistungen der Infinitesimalrechnung. In einigen Fällen lässt sich die Länge auch auf elementare Art und Weise bestimmen oder mit Integralen, die leicht auflösbar sind. Bereits bei der Bogenlänge entlang einer Ellipse sieht die Lage jedoch ganz anders aus.

### 3.3.1 Berechnung der Bogenlänge

In diesem Abschnitt sollen ein paar Methoden zusammengestellt werden, mit denen die Länge einer Kurve berechnet werden kann.

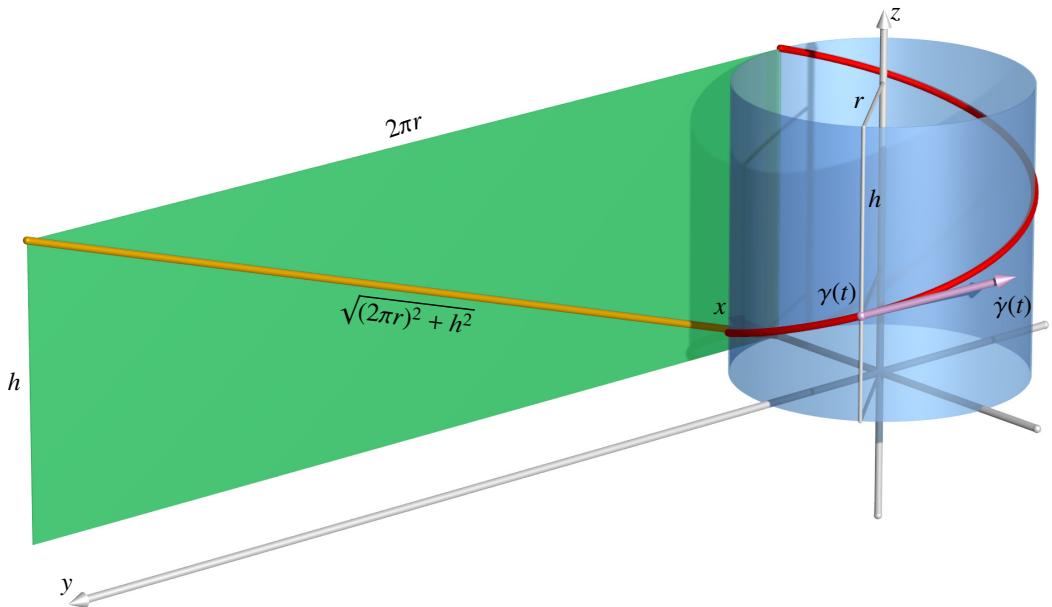


Abbildung 3.5: Schraubenlinie mit der Parameterdarstellung (3.5) und Abrollung zur Berechnung der Länge der Kurve.

### Länge einer parametrisierten Kurve

Beispiele wie die Kochsche Schneeflockenkurve, deren Länge schwer zu definieren ist, zeigen, dass der Begriff einer Kurve für die Zwecke dieses Abschnittes genügend eng gefasst werden muss. Die folgende Definition tut dies.

**Definition 3.7.** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Kurve ist eine differenzierbare Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Beispiel.* Die Abbildung 3.5 zeigt

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ th/2\pi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

beschreibt eine Schraubenlinie oder Helix. Die Abbildung ist ganz offensichtlich differenzierbar und hat die Ableitung

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h/2\pi \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Die Länge dieser Schraubenlinie lässt sich direkt berechnen. Die Schraubenlinie liegt auf dem Mantel eines Zylinders mit Radius  $r$  und Höhe  $h$ . Durch Abrollen des Zylinders erkennt man, dass die Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten  $2\pi r$  und  $h$  ist. Die Länge  $l$  der Schraubenlinie ist daher

$$l = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} \quad (3.7)$$

nach dem Satz von Pythagoras.



Unterteilt man das Intervall  $I$  in den Teilpunkten  $t_i$  mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

dann ist die Summe

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

eine Approximation für die Länge der Kurve. Die Differenz auffeinanderfolgender Punkte kann mit Hilfe der Ableitung als

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \approx \dot{\gamma}(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

approximiert werden. Damit wird die Summe  $L$  approximiert durch

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} |\dot{\gamma}(t_i)| \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Dies ist eine Riemannsche Summe für das Integral

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

wir definieren die Bogenlänge einer Kurve daher wie folgt.

**Definition 3.8.** Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Kurve im Sinne der Definition 3.7. Dann ist die Bogenlänge entlang der Kurve zwischen dem Punkt  $\gamma(a)$  und  $\gamma(t)$  definiert durch das Integral

$$l(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau.$$

*Beispiel.* Die Helix mit der Parametrisierung (3.5) hat die Kurvenlänge

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{r^2 \sin^2 \tau + r^2 \cos^2 \tau + (h/2\pi)^2} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{r^2 + (h/2\pi)^2} d\tau = t \sqrt{r^2 + (h/2\pi)^2}. \end{aligned}$$

Für eine ganze Umdrehung, also für  $t = 2\pi$  finden wir  $l(2\pi) = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$ , was mit dem elementaren Resultat (3.7) übereinstimmt.



## Länge eines Graphen

Der Graph einer auf dem Intervall  $I = [a, b]$  definierte Funktion  $y = f(x)$  kann als Parametrisierung einer Kurve

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Nach Definition 3.3.1 ist Länge dieser Kurven zwischen den Punkten  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$  durch das Integral

$$l(x) = \int_a^x \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(\xi) \end{pmatrix} \right\| d\xi = \int_a^x \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi$$

gegeben.

*Beispiel.* Die auf dem Intervall  $I = [0, b]$  definierte quadratische Funktion  $f(x) = cx^2$  mit  $b > 0$  und  $c > 0$  hat die Bogenlänge

$$\begin{aligned} l(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi = \int_0^x \sqrt{1 + 4c^2\xi^2} d\xi = \left[ \frac{\operatorname{arsinh} 2c\xi}{4c} + \frac{\xi\sqrt{4c^2\xi^2 + 1}}{2} \right]_0^x \\ &= \frac{\operatorname{arsinh}(2cx)}{4c}. \end{aligned}$$

Die Stammfunktion wurde mit einem Computeralgebraprogramm gefunden.  $\circlearrowright$

### Kurvenlänge in Polarkoordinaten

Eine Kurve kann in Polarkoordinaten in der Ebene durch eine Funktion  $r = r(\varphi)$  beschrieben werden. Dies führt auf eine Parametrisierung

$$\varphi \mapsto \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

durch den Polarwinkel  $\varphi$ . Die Kurvenlänge kann gemäss Definition braucht die Ableitung der Parametrisierung, also die Funktion

$$\dot{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Länge von  $\dot{\gamma}$  ist

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(\varphi)|^2 &= (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 \\ &= r'(\varphi)^2 \cos^2 \varphi - 2r(\varphi)r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r(\varphi)^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + r'(\varphi)^2 \sin^2 \varphi + 2r(\varphi)r'(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + r(\varphi)^2 \cos^2 \varphi \\ &= r'(\varphi)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r(\varphi)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi). \\ &= r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2. \end{aligned}$$

Dies führt auf das Integral

$$l(\alpha) = \int_a^\alpha \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi \tag{3.8}$$

für die Länge der Kurve.

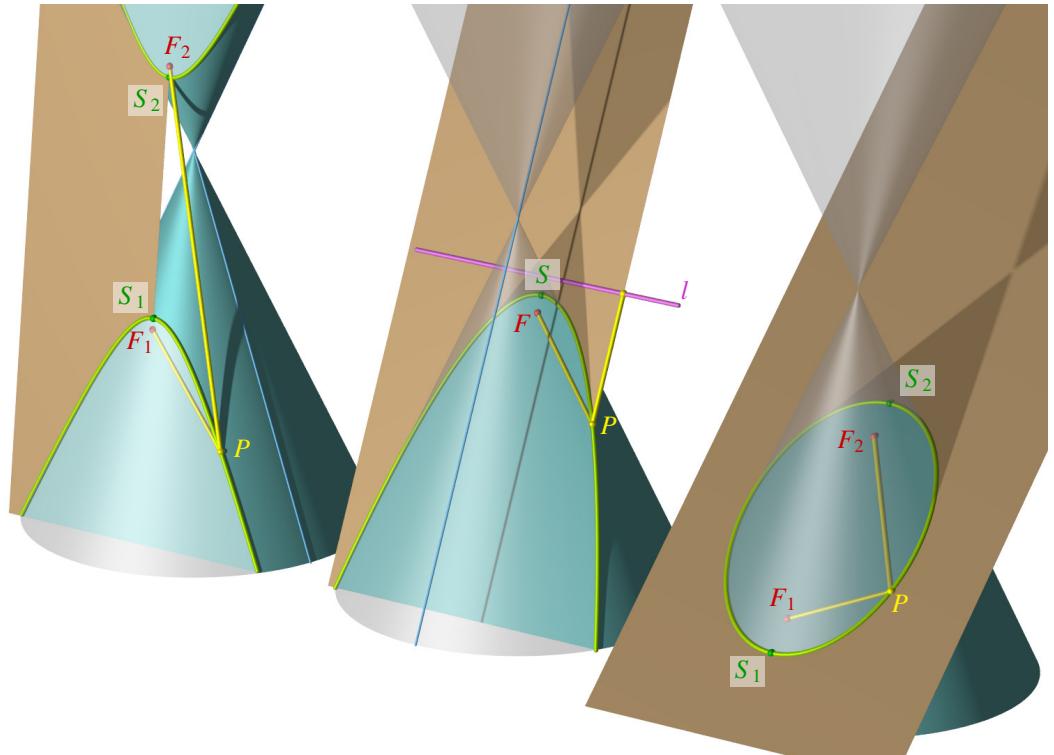
#### 3.3.2 Kreis

Die Länge eines Bogens auf dem Einheitskreis zwischen dem Punkt  $(1, 0)$  und  $P = (x, y)$  mit  $x^2 + y^2 = 1$  ist nach Definition der Winkel  $\alpha$  zwischen der  $x$ -Achse und  $P$ . Es gilt also

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Der Kreis kann auch als Graph  $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  parametrisiert werden, in der die Länge des Bogens

$$l(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} dt = \int_x^1 \sqrt{\frac{1 - t^2 + t^2}{1 - t^2}} dt = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$



Hyperbel:  $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \text{const}$

Parabel:  $\overline{FP} = \overline{lP}$

Ellipse:  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \text{const}$

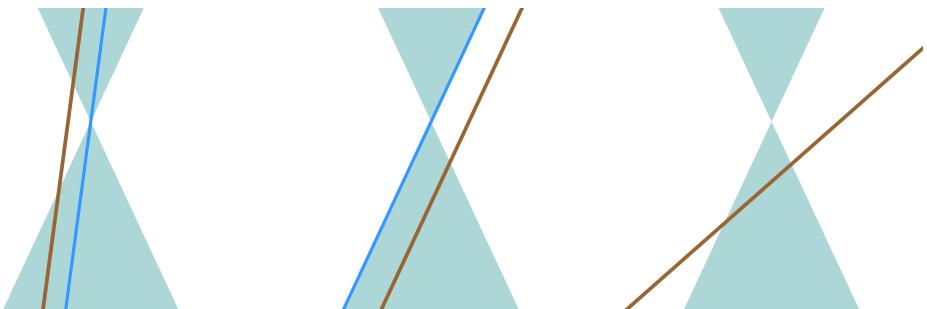


Abbildung 3.6: Hyperbeln, Parabeln und Ellipsen sind die Schnittkurven einer Ebene mit einem Kegel. Der Winkel zwischen der Achse des Kegels und der Schnittebene bestimmt, welche Art von Schnittkurve entsteht. Wenn keine der Mantellinien des Kegels parallel ist zur Ebene, dann entsteht eine Ellipse (rechts). In der Mitte ist genau eine Mantellinie (hellblau) parallel zur Ebene, es entsteht eine Parabel und links gibt es genau zwei verschiedene Mantellinien des Kegels (hellblau), die zur Ebene parallel sind, es entsteht eine Hyperbel.

Aus dem bekannten Wert der Länge des Bogens erhalten wir jetzt die Formel

$$\arcsin \sqrt{1-x^2} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (3.9)$$

Tatsächlich ist die Ableitung davon

$$\frac{d}{dx} \arcsin \sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

was mit der Integralformel 3.9 übereinstimmt.

### 3.3.3 Kegelschnitte

Kegelschnitte sind die Schnittkurven eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene (Abbildung 3.6). Der Kreis ist der Spezialfall des Schnittes mit einer horizontalen Ebene. Im Gegensatz zum Kreis lässt sich aber die Kurvenlänge nicht mehr in geschlossener Form berechnen.

#### Koordinatengleichung

Aus der in Abbildung 3.6 dargestellten Geometrie kann man die folgende Charakterisierung von Ellipsen und Hyperbeln ableiten.

**Definition 3.9.** *Gegeben sind die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  in der Ebene, sie heissen die Brennpunkte. Die Punkte in der Ebene, deren Abstandssumme von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist, bilden eine Ellipse. Die Punkte in der Ebene, deren Abstands differenz von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist, bilden eine Hyperbel.*

Aus der Definition 3.9 soll jetzt eine Koordinatengleichung für Ellipsen und Hyperbeln hergeleitet werden. Die Brennpunkte haben die Koordinaten  $F_1 = (e, 0)$  und  $F_2 = (-e, 0)$ . Die Grösse  $e$  heisst auch die *lineare Exzentrizität*. Die Abstandssumme bzw. -differenz wird mit  $2a$  bezeichnet

Die Punkte  $A_+ = (a, 0)$  und  $A_- = (-a, 0)$  sind Punkte der gesuchten Kurven, denn die Summe bzw. Differenz der Entfernungen von  $A_\pm$  zu den beiden Brennpunkten ist

$$\overline{A_\pm F_2} \pm \overline{A_\pm F_1} = \begin{cases} (a-e) + (a+e) = 2a & \text{Ellipse} \\ (e+a) - (e-a) = 2a & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

In Abbildung 3.7 ist diese Situation für eine Hyperbel dargestellt, in Abbildung 3.8 für eine Ellipse. Für eine Ellipse ist  $e < a$ , für eine Hyperbel ist  $e > a$ , wir schreiben

$$b^2 = \begin{cases} a^2 - e^2 & \text{Ellipse} \\ e^2 - a^2 & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

Die Zahlen  $a$  und  $b$  heissen die *grosse bzw. kleine Halbachse* der Ellipse bzw. Hyperbel.

Für einen beliebigen Punkt  $P = (x, y)$  in der Ebene wird die Bedingung an die Abstände zu

$$\overline{PF_2} \pm \overline{PF_1} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Hier und in der folgenden Rechnung gilt das obere Zeichen jeweils für die Ellipse, das untere für die Hyperbel. Quadrieren ergibt

$$4a^2 = (x+e)^2 + y^2 \pm 2 \sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)} + (x-e)^2 + y^2$$

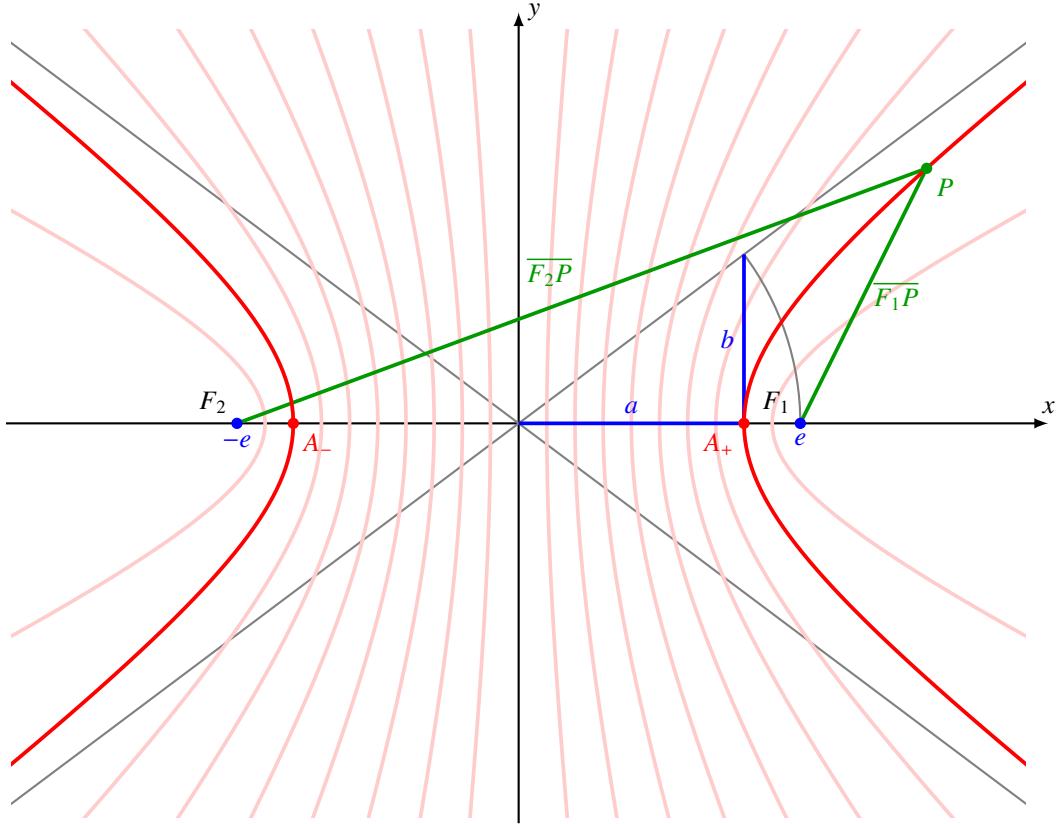


Abbildung 3.7: Geometrie einer Hyperbel in der Ebene. Die Hyperbel besteht aus den Punkten  $P$  der Ebene, deren Entfernungsdifferenz  $\overline{F_1P} - \overline{F_2P}$  von zwei vorgegebenen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist. Die Differenz  $\pm 2a$  führt auf die Hyperbeln mit Halbachsen  $a$  und  $b$ .

$$\begin{aligned} 2a^2 - x^2 - e^2 - y^2 &= \pm \sqrt{y^4 + y^2((x+e)^2 + (x-e)^2) + (x^2 - e^2)^2} \\ &= \pm \sqrt{y^4 + 2y^2(x^2 + e^2) + x^4 - 2x^2e^2 + e^4}. \end{aligned}$$

Erneutes Quadrieren bringt auch die Wurzel auf der rechten Seiten zum Verschwinden:

$$\begin{aligned} 4a^4 + x^4 + e^4 + y^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + e^2) + 2y^2(x^2 + e^2) + 2x^2e^2 &= y^4 + 2y^2(x^2 + e^2) + x^4 - 2x^2e^2 + e^4 \\ 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + e^2) + 2x^2e^2 &= -2x^2e^2 \\ a^4 + x^2e^2 &= a^2(x^2 + y^2 + e^2) \\ x^2(e^2 - a^2) &= a^2(e^2 - a^2) + a^2y^2. \end{aligned}$$

Die Differenz  $e^2 - a^2$  ist bis auf das Vorzeichen identisch mit  $b^2$ , genauer gilt

$$\mp x^2b^2 = \mp a^2b^2 + a^2y^2.$$

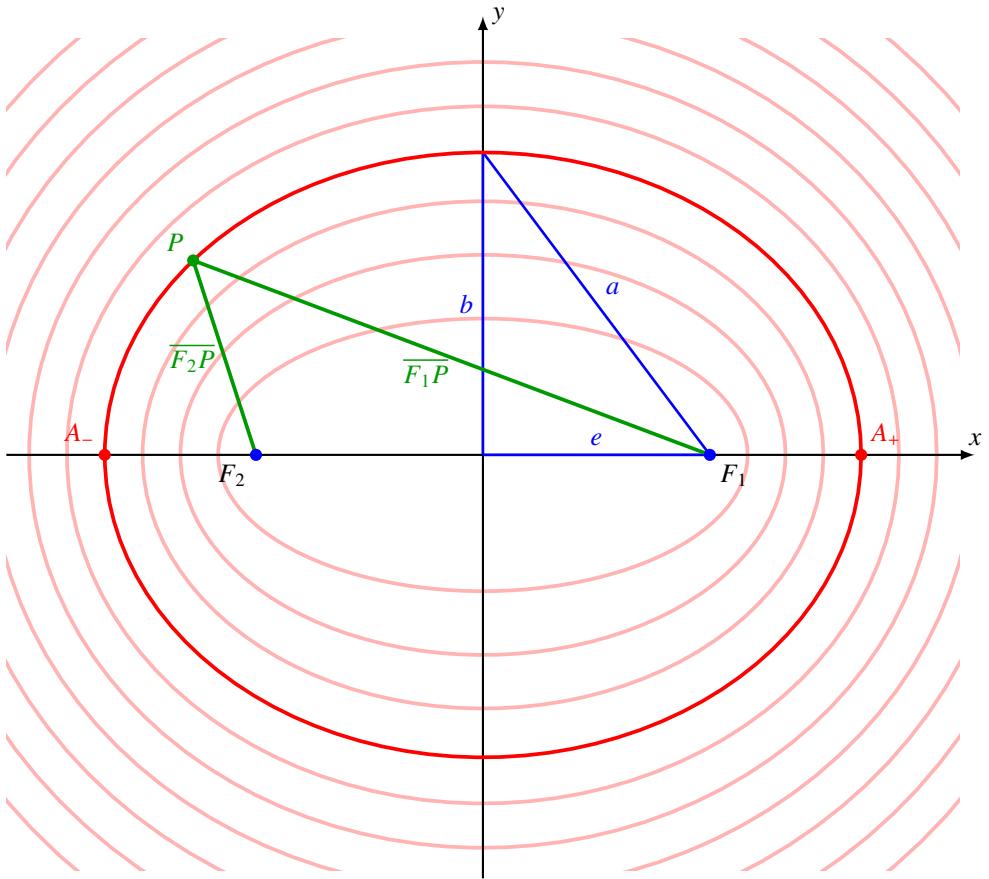


Abbildung 3.8: Geometrie einer Ellipse in der Ebene. Die Ellipse besteht aus den Punkten  $P$  der Ebene, deren Entfernungssumme  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$  zu zwei vorgegebenen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist. Die Summe  $\pm 2a$  führt auf die Ellipsen mit Halbachsen  $a$  und  $b$ .

Nach Division durch  $\mp a^2 b^2$  bleibt

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \mp \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.10)$$

die Koordinatengleichung einer Ellipse bzw. Hyperbel.

## Hyperbeln

Die Hyperbeln können auch als Graphen einer Funktion von  $x$  gefunden werden. Dazu wird die Gleichung (3.10) nach  $y$  aufgelöst:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Die rechte Seite hat für  $|x| < a$  keine reellen Werte. Ebenso kann die Hyperbel als Graph der Funktion

$$y \mapsto x = \pm a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$$

dargestellt werden, die für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist und nur Werte mit Betrag  $\geq a$  hat.

Ein besonders einfacher Spezialfall ist  $a = b = 1$ , genannt eine *gleichseitige Hyperbel*. In diesem Fall ist  $x^2 - y^2 = 1$  und  $e^2 = 2$ .

### Länge eines gleichseitigen Hyperbelbogens

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$  beschreibt eine gleichseitige Hyperbel, die gegenüber der Situation in Abbildung 3.7 an den Winkelhalbierenden des ersten Quadranten gespiegelt ist. Die Bogenlänge zwischen dem Punkt  $(0, 1)$  und  $(x, y)$  auf der Hyperbel ist gegeben durch das Integral:

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} dt.$$

Dieses Integral ist nicht in geschlossener Form lösbar. Natürlich können auch andere Parametrisierungen für die Hyperbel verwendet werden, die entstehenden Integrals, dies ändert jedoch nichts an der Schwierigkeit, einen Ausdruck für den Wert des Integrals anzugeben.

### Parametrisierung mit hyperbolischen Funktionen

Etwas allgemeiner wird eine Hyperbel durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.11)$$

beschrieben. Die hyperbolischen Funktionen parametrisieren alle Paare von Zahlen  $(X, Y) = (\cosh t, \sinh t)$  mit der Eigenschaft  $X^2 - Y^2 = 1$ . Aus (3.11) folgt daher, dass

$$\frac{x}{a} = \cosh t, \quad \frac{y}{b} = \sinh t \quad \Rightarrow \quad x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t.$$

Somit ist

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der Hyperbel. Für die Länge eines Hyperbelbogens zwischen zwei Parameterwerten  $t_0$  und  $t_1$  wird dann

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2(1 + \sinh^2 t)} dt \\ &= b \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2}{b^2} \sinh^2 t} dt = b \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{e^2}{b^2} \sinh^2 t} dt. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nicht mit elementaren Funktionen ausführbar und rechtfertigt die Definition neuer spezieller Funktionen. Die Kurvenlänge auf einer Hyperbel kann mit den in Kapitel 11 beschriebenen elliptischen Integralen beschrieben werden.

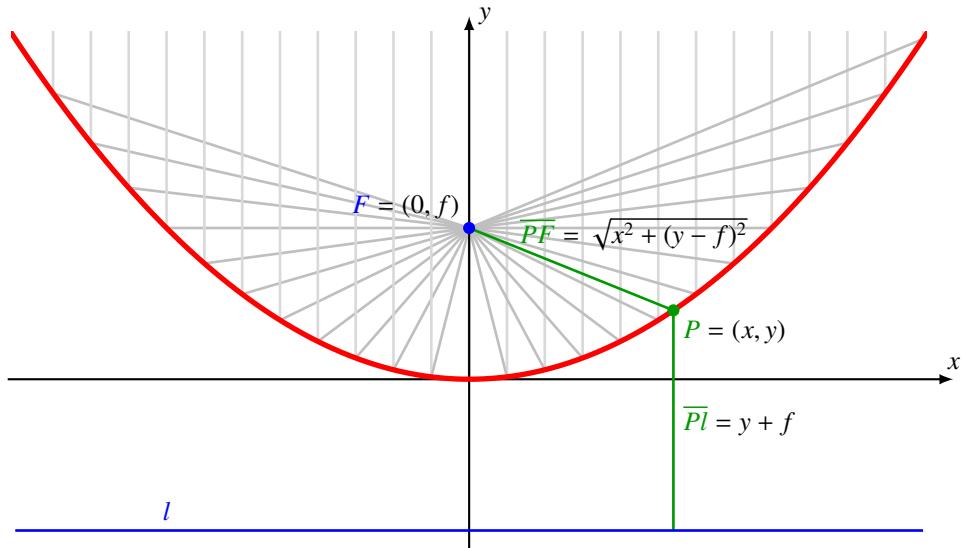


Abbildung 3.9: Eine Parabel ist die Menge der Punkte, die von der Geraden  $l$  und dem Brennpunkt  $F$  gleichen Abstand haben.

## Ellipsen

Sei  $(x, y)$  ein Punkt, der die Ellipsengleichung (3.10) erfüllt. Dann erfüllt  $(X, Y) = (x/a, y/b)$  die Gleichung  $X^2 + Y^2 = 1$ , ein Punkt auf einem Kreis. Insbesondere gibt es ein  $t \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t \quad \Rightarrow \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Somit ist

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der Ellipse. Die Länge eines Ellipsenbogens zwischen den Winkelargumenten  $\alpha$  und  $\beta$  ist dann

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= a \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = a \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Auch dieses Integral ist nicht in geschlossener Form lösbar. Dies motiviert in Kapitel 11 die Definition 11.1 der sogenannten elliptischen Integrale als neue spezielle Funktionen. Auf Seite 301 wird gezeigt, dass der Umfang einer Ellipse  $4aE(\varepsilon)$  ist, wobei  $\varepsilon = e/a$  und  $e^2 = a^2 - b^2$  (siehe auch Abbildung 11.1).

## Parabeln

Aus der Geometrie der Kegelschnitte (Abbildung 3.9) kann auch die folgende Charakterisierung einer Parabel abgeleitet werden.

**Definition 3.10.** Sei  $F$  ein Punkt in der Ebene  $l$  eine Gerade, die  $F$  nicht enthält.  $F$  heißt Brennpunkt,  $l$  heißt Leitgerade der Parabel. Die Menge aller Punkte  $P$ , die von  $F$  und  $l$  den gleichen Abstand haben, heißt Parabel. Die Brennweite  $f$  ist der halbe Abstand von  $F$  zu  $l$ , also  $\overline{Fl} = 2f$ .

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man  $F = (0, f)$  und  $l$  als die Gerade  $y = -f$  annehmen (siehe Abbildung 3.9). Ein Punkt  $P = (x, y)$  liegt genau dann auf der Parabel, wenn

$$\begin{aligned}\overline{Pl} &= \overline{PF} \\ (y + f)^2 &= x^2 + (y - f)^2 \\ y^2 + 2yf + f^2 &= x^2 + y^2 - 2yf + f^2 \\ 4yf &= x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4f}x^2.\end{aligned}$$

Eine Parabel ist also der Graph einer quadratischen Funktion.

Parabeln haben erhebliche praktische Bedeutung, weil sie parallel zur Achse einfallende Strahlen im Brennpunkt  $F$  fokussieren.

### Bogenlänge einer Parabel

Die Länge eines Parabelbögens zwischen  $x_1$  und  $x_2$  ist

$$l(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2f}x\right)^2} dx$$

Mit der Substitution  $x = 2ft$  wird das Integral zu

$$l(x_1, x_2) = 2f \int_{x_1/2f}^{x_2/2f} \sqrt{1 + t^2} dt = f \left[ \operatorname{arsinh} t + t \sqrt{1 + t^2} \right]_{x_1/2f}^{x_2/2f} = \left[ f \operatorname{arsinh} \frac{x}{2f} + \frac{x}{4f} \sqrt{4f^2 + x^2} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Während also Ellipsen- und Hyperbelbögen nicht in geschlossener Form berechnet werden können, ist dies für Parabelbögen sehr wohl möglich.

## 3.4 Flächeninhalt

Die elementare Definition des Integrals versucht, den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion  $y = f(x)$  zu definieren. Die Erfahrung zeigt, dass es nicht immer einfach ist, ein Integral in geschlossener Form zu berechnen. Solche Integrale können auf sinnvolle neue spezielle Funktionen führen.

### 3.4.1 Berechnung des Flächeninhaltes in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur die Berechnung des Flächeninhaltes von Teilgebieten der Ebene  $\mathbb{R}^2$  aus ihrer Berandung. Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve und

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n = b$$

eine Unterteilung des Intervalls. Die Kurve muss außerdem geschlossen sein, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Die Punkte  $\gamma(t_i)$  sind die Ecken eines Polygons, das die gesuchte Fläche approximiert.

Der Flächeninhalt des Polygons kann mit der Schuhbändelformel [buch:linalg] berechnet werden.

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(t_i) & y(t_i) \\ x(t_{i+1}) & y(t_{i+1}) \end{vmatrix} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{vmatrix} x(t_i) & y(t_i) \\ x(t_{i+1}) - x(t_i) & y(t_{i+1}) - y(t_i) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{vmatrix} x(t_i) & y(t_i) \\ \dot{x}(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i) & \dot{y}(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{vmatrix} x(t_i) & y(t_i) \\ \dot{x}(t_{i+1}) & \dot{y}(t_{i+1}) \end{vmatrix} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Die letzte Summe kann als Riemann-Summe und damit als Approximation für das Integral

$$F \approx \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \end{vmatrix} dt$$

gesehen werden. Der Flächeninhalt des Gebietes, welches von der Kurve  $\gamma$  berandet wird, ist daher

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t) dt. \quad (3.12)$$

Die Formel (3.12) gilt auch für nicht geschlossene Kurven. Sie berechnet dann den Flächeninhalt eines Gebietes, welches von der Strecke vom Ursprung zu  $\gamma(a)$ , der Kurve von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  und von der Strecke von  $\gamma(b)$  zurück zum Nullpunkt berandet wird.

*Beispiel.* Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit Öffnungswinkel  $\alpha$  ist kann mit Hilfe der Parametrisierung

$$\gamma: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Das Integral (3.12) wird dann zu

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha r \cos t \cdot r \cos t - r \sin t \cdot (-r \sin t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} \int_0^\alpha \cos^2 t + \sin^2 t dt = \frac{r^2 \alpha}{2}, \end{aligned}$$

wie erwartet. ○

## Flächeninhalt in Polarkoordinaten

Ist die Kurve in Polarkoordinaten durch die Funktion  $\varphi \mapsto r(\varphi)$  gegeben, dann kann man  $\varphi$  als Parameter verwenden. Die Determinante in der Flächenformel wird

$$\begin{vmatrix} x(t_i) & y(t_i) \\ \dot{x}(t_i) & \dot{y}(t_i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r(\varphi) \cos \varphi & r(\varphi) \sin \varphi \\ -r(\varphi) \sin \varphi + r'(\varphi) \cos \varphi & r(\varphi) \cos \varphi + r'(\varphi) \sin \varphi \end{vmatrix}.$$

Der Integrand in der Flächenformel wird dann

$$\frac{1}{2} (r(\varphi)^2 \cos^2 \varphi + r(\varphi)r'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r(\varphi)^2 \sin^2 \varphi - r(\varphi)r'(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{r(\varphi)^2}{2}$$

und die Fläche kann mit

$$F(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi$$

berechnet werden.

### 3.4.2 Flächeninhalt von Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsen und Hyperbeln sind besonders einfach zu parametrisieren und damit ist auch die Fläche, die von Ellipsen oder Hyperbeln berandet wird, besonders einfach zu berechnen. Der Flächeninhalt eines Ellipsensektors hat eine besondere Bedeutung für die Formulierung der Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung.

#### Ellipse

Für die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kann man mit der Parametrisierung

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

beschreiben. Einen Sektor zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$

$$\begin{aligned} F &= \int_{\alpha}^{\beta} a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t) dt \\ &= ab \int_{\alpha}^{\beta} \cos^2 t + \sin^2 t dt = ab(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist auch rein geometrisch leicht nachzuvollziehen: Der Sektor entsteht dadurch, dass man ein Kreissektor mit Radius  $a$  entlang der  $y$ -Achse um den Faktor  $b/a$  gestaucht wird. Aus dem Flächeninhalt  $a^2(\beta - \alpha)$  des Kreissektors wird dann der Flächeninhalt  $a^2(\beta - \alpha) \cdot \frac{b}{a} = ab(\beta - \alpha)$ .

#### Hyperbel

Die hyperbolischen Funktionen geben eine einfache Parametrisierung der in Abbildung 3.10 dargestellten Hyperbel mit der Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$ . Der in der Abbildung blau hervorgehobene Flächeninhalt ist der Wert des Integrals

$$F(t) = \int_0^t \begin{vmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{vmatrix} ds = \int_0^t \cosh^2 s - \sinh^2 s ds = \int_0^t ds = t.$$

Das Argument  $t$  der hyperbolischen Funktionen ist also der Flächeninhalt des von der Hyperbel krummlinig berandeten Dreiecks. Daher heißen die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen  $\text{arsinh } y$  und  $\text{arcosh } y$ , Abkürzung für *area cuius sinus hyperbolicus y est*, Fläche, deren zugehöriger Wert des Sinus hyperbolicus  $y$  ist.

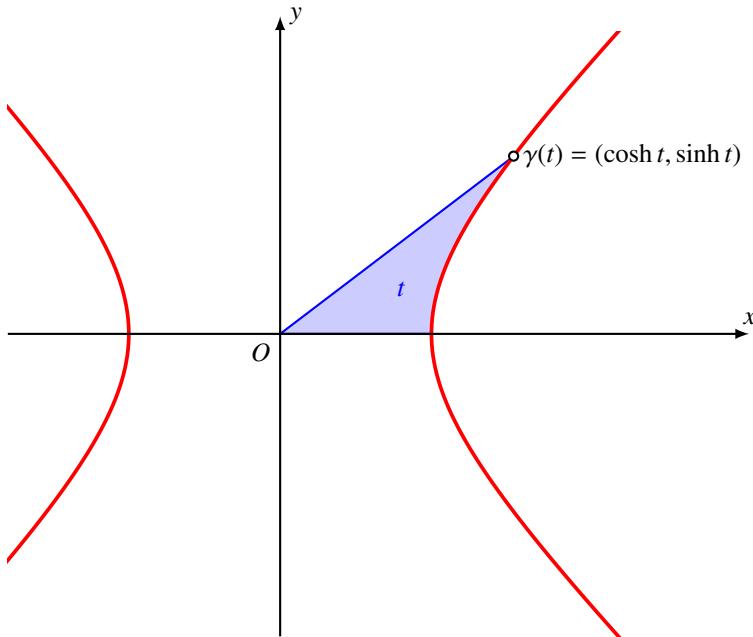


Abbildung 3.10: Das Argument  $t$  der hyperbolischen Funktionen ist der Inhalt des krummlinig berandeten Dreiecks, bestehend aus der Strecke vom Nullpunkt  $O$  zum Punkt  $(1, 0)$ , dem Hyperbelbogen bis zum Punkt  $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$  und schliesslich der Strecke von  $\gamma(t)$  zurück zum Nullpunkt.

### Fokalgleichung in Polarkoordinaten

Das zweite Keplersche Gesetz über Planetenbahnen besagt, dass sich ein Planet auf seiner elliptischen Bahn um die Sonne so bewegt, dass sein Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreich. Die bisher verwendete Parametrisierung hat den Mittelpunkt der Ellipse im Nullpunkt, nach dem ersten Keplerschen Gesetz ist aber müssen wir eine Parametrisierung verwenden so, dass der Brennpunkt im Ursprung liegt. In Polarkoordinaten ist

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.13)$$

die sogenannte *Polargleichung* für die Kegelschnitte. Für  $\varepsilon = 0$  wird  $r(\varphi) = p$  konstant, die Gleichung beschreibt in diesem Fall einen Kreis. Für  $\varepsilon = 1$  entsteht eine Parabel. Werte zwischen 0 und 1 parametrisieren Ellipsen mit verschiedener Exzentrizität, Werte grösser als 1 führen auf Hyperbeln. Abbildung 3.11 zeigt alle vier Fälle.

Die zwischen den Polarwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  überstrichene Fläche wird durch das Integral

$$F(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{p^2}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi$$

Das Integral kann in geschlossener Form angegeben werden, die Formeln sind aber ziemlich kompliziert und für uns hier nicht weiter nützlich.

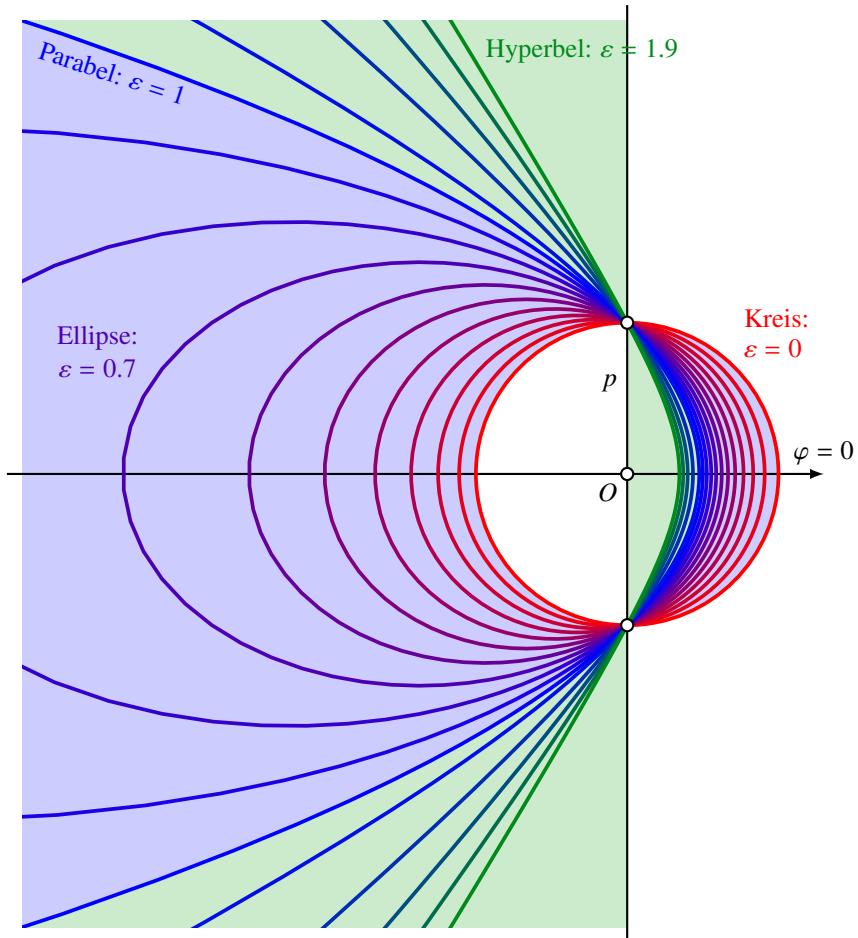


Abbildung 3.11: Polargleichung der Kegelschnitte mit konstantem Wert für den Parameter  $p$  und verschiedene Werte der Exzentrizität  $\varepsilon$ . Der Kreis (rot) hat Exzentrizität  $\varepsilon = 0$ , die Parabel (blau) hat  $\varepsilon = 1$ . Für  $0 < \varepsilon < 1$  entstehen Ellipsen, die im blauen Bereich liegen, für  $\varepsilon > 1$  entstehen Hyperbeln, die im grün hinterlegten Teil der Ebene liegen.

## Übungsaufgaben

**3.1.** Berechnen Sie  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  für den Winkel  $\alpha = 5^5/8^\circ$  exakt.

*Lösung.* Der Winkel  $\alpha = 5^5/8^\circ$  ist  $\alpha = (\frac{45}{8})^\circ$ , also ein Sechzehntel eines rechten Winkels. Den Wert von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  erhält man also, indem man dreimal die Halbwinkelformeln

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

auf  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$  anwendet:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{45}{2}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \\ &= 0.382683432365090\end{aligned}\quad \begin{aligned}\cos\left(\frac{45}{2}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \\ &= 0.923879532511287\end{aligned}$$

auf  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$  anwendet:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{45}{4}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}} \\ &= 0.195090322016128\end{aligned}\quad \begin{aligned}\cos\left(\frac{45}{4}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}} \\ &= 0.980785280403230\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{45}{8}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}}} \\ &= 0.098017140329560\end{aligned}\quad \begin{aligned}\cos\left(\frac{45}{8}\right)^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}}} \\ &= 0.995184726672197\end{aligned}$$

○

**3.2.** Finden Sie  $x$  so, dass  $\sin x = 2$ .

*Lösung.* Es ist klar, dass die Lösung nicht reell sein kann, da reelle Argumente immer nur Sinus-Werte zwischen  $-1$  und  $1$  ergeben kann. Die Darstellung der Sinus-Funktion als Linearkombination von Exponentialfunktionen ergibt

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = 2.$$

Wir schreiben  $y = e^{ix}$  und multiplizieren die Gleichung mit  $y$ , so entsteht die quadratische Gleichung

$$y^2 - 4iy - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$y_{\pm} = 2i \pm \sqrt{-4 + 1} = 2i \pm \sqrt{-3} = (2 \pm \sqrt{3})i = (2 \pm \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Davon muss jetzt der Logarithmus bestimmt werden. Der Realteil des Logarithmus ist der Betrag von  $y_{\pm}$ :

$$|y_{\pm}| = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\arg y_{\pm} = \frac{\pi}{2}.$$

Daraus bekommt man

$$x_{\pm} = \frac{1}{i} \log y_{\pm} = \frac{1}{i} (\log |y_{\pm}| + i \arg y_{\pm}) = \frac{\pi}{2} - i \log(2 \pm \sqrt{3}) \approx \begin{cases} 1.5707963 - 1.3169579i \\ 1.5707963 + 1.3169579i \end{cases}$$

Weitere Lösungen erhält man natürlich durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ .  $\circ$

**3.3.** Die Funktion cas definiert durch  $\text{cas } x = \cos x + \sin x$  hat einige interessante Eigenschaften. Wie die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  ist  $\text{cas } x$   $2\pi$ -periodisch. Die Ableitung und das Additionstheorem benötigen bei den gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen aber beide Funktionen, im Gegensatz zu den im folgenden hergeleiteten Formeln, die nur die Funktion  $\text{cas } x$  brauchen.

a) Drücken Sie die Ableitung von  $\text{cas } x$  allein durch Werte der cas-Funktion aus.

b) Zeigen Sie, dass

$$\text{cas } x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

c) Beweisen Sie das Additionstheorem für die cas-Funktion

$$\text{cas}(x+y) = \frac{1}{2}(\text{cas}(x)\text{cas}(y) + \text{cas } x \text{cas}(-y) + \text{cas}(-x)\text{cas}(y) - \text{cas}(-x)\text{cas}(-y)) \quad (3.14)$$

Youtuber Dr Barker hat die Funktion cas im Video <https://www.youtube.com/watch?v=bn38o3u0lDc> vorgestellt.

*Lösung.* a) Die Ableitung ist

$$\frac{d}{dx} \text{cas } x = \frac{d}{dx}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x = \sin(-x) + \cos(-x) = \text{cas}(x).$$

b) Die Additionstheoreme angewendet auf die trigonometrischen Funktionen auf der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x) \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x & &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cas } x & &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cas } x. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $\sqrt{2}$  ergibt die behaupteten Relationen.

c) Substituiert man die Definition von  $\text{cas}(x)$  auf der rechten Seite von (3.14) und multipliziert aus, erhält man

$$(3.14) = \frac{1}{2}((\cos x + \sin x)(\cos y + \sin y) + (\cos x + \sin x)(\cos y - \sin y))$$

$$\begin{aligned}
& + (\cos x - \sin x)(\cos y + \sin y) - (\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y)) \\
= & \frac{1}{2}(\cos x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y + \sin x \sin y \\
& + \cos x \cos y - \cos x \sin y + \sin x \cos y - \sin x \sin y \\
& + \cos x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y - \sin x \sin y) \\
& - \frac{1}{2}(\cos x \cos y - \cos x \sin y - \sin x \cos y + \sin x \sin y) \\
= & \cos x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

Die äussersten zwei Terme passen zum Additionstheorem für den Kosinus, die beiden inneren Terme dagegen zum Sinus. Fasst man sie zusammen, erhält man

$$\begin{aligned}
& = (\sin x \cos y + \cos x \sin y) + (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\
& = \sin(x + y) + \cos(x + y) = \text{cas}(x + y).
\end{aligned}$$

Damit ist das Additionstheorem für die Funktion cas bewiesen. ○



# Kapitel 4

## Spezielle Funktionen und Rekursion

Die Fakultät  $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$  ist eine ersten Funktionen, für die man normalerweise auch eine rekursive Definition kennenlernt. Rekursion ist eine besonders gut der numerischen Berechnung zugängliche Art, spezielle Funktionen zu definieren. In diesem Kapitel sollen daher in Abschnitt 4.1 zunächst die Gamma-Funktion als Verallgemeinerung konstruiert und charakterisiert werden. Die Beta-Funktion in Abschnitt 4.2 verallgemeinert diese Rekursionsbeziehungen. Abschnitt 4.3 erinnert an die Methoden, mit denen lineare Rekursionsgleichungen gelöst werden können. Erfüllten die Koeffizienten einer Potenzreihe eine spezielle Rekursionsbeziehung, entsteht die besonders vielfältige Familie der hypergeometrischen Funktionen, die in Abschnitt 4.4 eingeführt werden.

### 4.1 Die Gamma-Funktion

Die Fakultät  $x!$  kann rekursiv durch

$$x! = x \cdot (x - 1)! \quad \text{und} \quad 0! = 1$$

für alle natürlichen Zahlen  $x \in \mathbb{N}$  definiert werden. Äquivalent damit ist eine Funktion

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1. \tag{4.1}$$

Kann man eine reelle oder komplexe Funktion finden, die die Funktionalgleichung (4.1) erfüllt und damit die Fakultät auf beliebige Argumente ausdehnt?

#### 4.1.1 Definition als Grenzwert

Die Fakultät  $n!$  ist ein Produkt von  $n$  Faktoren, es ist daher natürlich zu versuchen, auch  $x!$  als ein Produkt zu schreiben. Allerdings kann es nicht möglich sein, dies mit einer endlichen Anzahl von Faktoren zu machen, denn wenn  $x$  grösser wird, muss auch die Zahl der Faktoren grösser werden. Mit jedem zusätzlichen Faktor ist ein Sprung der Werte zu erwarten. Wir erwarten daher entweder ein unendliches Produkt oder einen Ausdruck, bei dem die “Anzahl”  $x$  der Faktoren im Exponenten steht. In diesem Abschnitt soll zunächst eine solcher Ausdruck gefunden werden. Dieser ist jedoch für die numerische Berechnung absolut ungeeignet, so dass er später in ein unendliches Produkt umgeformt werden muss.

## Fakultät als Bruch

Euler hat das Problem, die Fakultät auf beliebige reelle oder komplexe Zahlen auszudehnen, wie folgt angepackt. Zunächst hat er bemerkt, dass für ganzzahlige  $x$  und natürliche  $n$

$$\begin{aligned} x! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x \cdot (x+1)(x+2) \cdots (x+n)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+x)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)(n+2) \cdots (n+x)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

gilt. Der Plan ist, dies so umzuformen, dass man für  $x$  eine beliebige komplexe Zahl einsetzen kann.

## Pochhammer-Symbol

Die spezielle Form des Nenners und des zweiten Faktors im Zähler von (4.2) rechtfertigt die folgende Definition.

**Definition 4.1** (Pochhammer). Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  heisst das Produkt

$$(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+n-1)$$

das Pochhammer-Symbol oder die verschobene Fakultät.

Die verschobene Fakultät  $(a)_n$  hat also genau  $n$  Faktoren, deren erster 1 ist. Die gewöhnliche Fakultät hat  $n$  Faktoren, deren erster 1 ist, also ist  $n! = (1)_n$ .

Der Ausdruck (4.2) für  $x!$  wird unter Verwendung des Pochhammer-Symbols zu

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n}. \quad (4.3)$$

Leider ist dieser Ausdruck ebenfalls nicht auf beliebige  $x$  verallgemeinerungsfähig, denn  $(n)_x$  ist nur natürliche  $x$  definiert. Der Faktor  $(n+1)_x$  enthält  $x$  Faktoren beginnend bei  $n$ . Für grosses  $n$  sind diese Faktoren nahe beieinander, man sollte also  $(n+1)_x$  durch  $n^x$  approximieren können. Wir erweitern daher (4.3) mit  $n^x$  und erhalten

$$x! = \frac{n! n^x}{(x+1)_n} \cdot \frac{(n+1)_x}{n^x}. \quad (4.4)$$

Der erste Faktor in diesem Ausdruck enthält jetzt nur noch Dinge, die für beliebige  $x \in \mathbb{C}$  definiert sind.

## Grenzwertdefinition

Der zweite Bruch in (4.4) besteht aus Termen, die zwar nur für natürliches  $x$  definiert sind, wir vermuten aber, dass er für grosses  $n$  gegen 1 konvergiert. Tatsächlich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{n+2}{n}}_{\rightarrow 1} \cdots \underbrace{\frac{n+x}{n}}_{\rightarrow 1} = 1,$$

da  $(n+x)/n = 1 + x/n \rightarrow 1$  für grosses  $n$ . Dies würde die folgende Definition rechtfertigen.

**Definition 4.2.** Die Gamma-Funktion  $\Gamma(x)$  einer Zahl  $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ist der Grenzwert

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}.$$

### Rekursionsgleichung für $\Gamma(x)$

Es ist aus der Herleitung klar, dass  $\Gamma(n) = (n-1)!$  sein muss. Wir sollten dies aber auch direkt aus der Definition 4.2 ableiten können. Dazu müssen wir nur überprüfen, ob  $\Gamma(1) = 0! = 1$  ist und ob die Rekursionsformel  $\Gamma(n) = n\Gamma(n-1)$  gilt.

Den Wert  $\Gamma(1)$  kann man direkt berechnen:

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(1)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!} = 1$$

wegen  $(1)_n = n!$ .

Für die Rekursionsformel muss man den Grenzwert für  $x$  und  $x+1$  miteinander vergleichen. Aus dem Term  $(x+1)_n$  im Nenner muss man einen Term  $(x)_n$  machen, dies ist möglich, indem man mit  $x$  erweitert:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)_n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)_n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}}.$$

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass der Grenzwert auf der rechten Seite gegen  $\Gamma(x)$  konvergiert, in dessen Definition aber die Potenz  $n^{x-1}$  vorkommt. Wir müssen also einen Faktor  $n$  los werden und gleichzeitig aus  $n$  überall  $n+1$  machen, damit der Nenner wieder passt. Dabei wird

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^{x-1}}{(x)_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\rightarrow 1} \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(n+1)! (n+1)^{x-1}}{(x)_{n+1}}}_{\rightarrow \Gamma(x)} \cdot \frac{n^{x-1}}{(n+1)^{x-1}} \\ &= x \Gamma(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{x-1} = x \Gamma(x), \end{aligned}$$

Weil  $n/(n+1) \rightarrow 1$  ist und die Funktion  $z \mapsto z^{x-1}$  für alle nach der Definition zulässigen Werte von  $x$  eine stetige Funktion ist.

### Gamma-Funktion und Pochhammer-Symbol

Durch Iteration der Rekursionsformel für  $\Gamma(x)$  folgt jetzt

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\ &= \underbrace{(x+n-1)(x+n-2) \cdots (x-1)x}_{n \text{ Faktoren}} \Gamma(x) \\ &= (x)_n \Gamma(x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$\log_{10} n$	$n$	$n!n^{x-1}/(x)_n$	Fehler
1	10	1.7947392559855804	0.0222854050800643
2	100	1.7746707942830697	0.0022169433775536
3	1000	1.7726754214755178	0.0002215705700017
4	10000	1.7724760067171375	0.0000221558116213
5	100000	1.7724560664742375	0.0000022155687214
6	1000000	1.7724540724623101	0.0000002215567940
7	10000000	1.7724538730613721	0.0000000221558560
8	100000000	1.7724538531233258	0.0000000022178097
9	1000000000	1.7724538511320680	0.0000000002265519
10	10000000000	1.7724538509261316	0.0000000000206155
11	100000000000	1.7724538514549788	0.0000000005494627
	$\infty$	1.7724538509055161	

Tabelle 4.1: Numerische Berechnung mit der Grenzwertdefinition und rekursiver Berechnung von  $n!/(x)_n$  mit Hilfe der Folge (4.5). Die Konvergenz ist sehr langsam, die Anzahl korrekter Stellen wächst logarithmisch mit  $n$ .

**Satz 4.3.** Die Rekursionsformel für die Gamma-Funktion kann geschrieben werden als

$$\Gamma(x + n) = (x)_n \Gamma(x).$$

Das Pochhammer-Symbol  $(x)_n$  ist für alle natürlichen  $n$  gegeben durch

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x + n)}{\Gamma(x)}.$$

### Numerische Unzulänglichkeiten der Grenzwertdefinition

Die Grenzwertdefinition 4.2 ist zwar zweifellos richtig, kann aber nicht für die numerische Berechnung der Gamma-Funktion verwendet werden. Die Existenz des Grenzwertes verwendet, dass  $x \ll n$  sein muss, damit  $(n+x)/n$  gegenüber 1 vernachlässigt werden kann. Die Grenzwertdefinition beginnt also erst, vernünftige Approximationen von  $\Gamma(x)$  zu geben, wenn  $n$  viel grösser als  $x$  ist. Andererseits wächst  $n!$  sehr schnell an, schon für  $n = 171$  ist das Resultat grösser als was der double-Datentyp fassen kann. Dies ist aber viel zu kleine, um gute Approximationen auch für kleine Werte von  $x$  zu geben. So findet man zum Beispiel für  $x = \frac{1}{2}$  und  $n = 170$  mit Octave

$$\frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} = \frac{170!}{\sqrt{170} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{339}{2}} = \frac{7.2574 \cdot 10^{307}}{13.308 \cdot 3.1381 \cdot 10^{305}} = 1.7738.$$

Andererseits werden wir später sehen, dass

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516$$

ist. Die Approximation mit Hilfe der Grenzwertdefinition kann also grundsätzlich nicht mehr als zwei korrekte Nachkommastellen liefern.

Den Quotienten  $n!/(x)_n$  kann man mit Hilfe der Rekursionsformel

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{n}{x+n-1}, \quad p_0 = 0 \quad (4.5)$$

etwas effizienter berechnen. Insbesondere umgeht man damit das Problem, dass  $n!$  den Wertebereich des `double` Datentyps sprengt. Der Wert der Gamma-Funktion kann dann durch  $p_n n^{x-1}$  approximiert werden. Die Tabelle 4.1 fasst die Resultate zusammen und zeigt, dass die Konvergenz logarithmisch ist: die Anzahl korrekter Nachkommastellen ist  $\log_{10} n$ .

## 4.1.2 Produktformel

Ein möglicher Ausweg aus den numerischen Schwierigkeiten mit der Grenzwertdefinition ist, den schnell wachsenden Faktor  $n!$  in den Zähler zu bringen, so dass er der Konvergenz etwas nachhilft. Wir berechnen daher den Kehrwert  $1/\Gamma(x)$ .

**Satz 4.4.** *Der Kehrwert der Gamma-Funktion kann geschrieben werden als*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, \quad (4.6)$$

wobei  $\gamma$  die Euler-Mascheronische Konstante

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

ist.

*Beweis.* Es sind zwei Dinge nachzuprüfen. Zunächst muss nachgewiesen werden, dass das unendliche Produkt überhaupt konvergiert. Wenn das gesichert ist, muss noch gezeigt werden, dass der Grenzwert tatsächlich  $1/\Gamma(x)$  ist.

Für die Konvergenz beachtet man, dass die Faktoren des Produkts die Form

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x^3}{3!n^3} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{n^2} + \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(\frac{x^2}{2n^2} - \dots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{n^2} + \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^3\right) \end{aligned}$$

haben. Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$$

konvergent ist, konvergiert auch das Produkt.

Um die Übereinstimmung der Produktformel mit  $1/\Gamma(x)$  zu zeigen, berechnen wir

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x)_n}{n! n^{x-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot n^{x-1}}$$

$k$	$n$	$\Gamma(\frac{1}{2}, n)$	$\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2}, n)$
1	10	1. <u>7518166478</u>	-0.0206372031
2	100	1. <u>7702543372</u>	-0.0021995137
3	1000	1. <u>7722324556</u>	-0.0002213953
4	10000	1. <u>7724316968</u>	-0.0000221541
5	100000	1. <u>7724516354</u>	-0.0000022156
6	1000000	1. <u>7724536293</u>	-0.0000002216
$\infty$		1. <u>7724538509</u>	

Tabelle 4.2: Werte  $\Gamma(\frac{1}{2}, n)$  von  $\Gamma(\frac{1}{2})$  berechnet mit  $n = 10^k$  Faktoren der Produktformel (4.6) und der zugehörige Fehler. Die korrekten Nachkommastellen sind unterstrichen. Die Konvergenz ist genau gleich langsam wie in der Berechnung mit Hilfe der Grenzwert-Definition in Tabelle 4.1.

$$\begin{aligned}
&= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x+2}{2} \cdots \frac{x+n-1}{n-1} \cdot n^{-x} \\
&= x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{n-1}\right) \cdot e^{-x \log n} \\
&= x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} e^{\frac{x}{k}} e^{-x \log n} \\
&= x \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n)} \right)
\end{aligned}$$

Der Klammerausdruck im Exponent des letzten Faktors auf der rechten Seite konvergiert nach Definition der Euler-Mascheronischen Konstanten gegen  $\gamma$ , somit folgt

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}},$$

wie behauptet. Damit ist Satz 4.4 vollständig bewiesen.  $\square$

Um zu zeigen, dass die Produktform tatsächlich besser geeignet ist, sind in der Tabelle 4.2 die Resultate der numerischen Rechnung bis  $n = 1000000$  zusammengestellt. Die Produktformel kann gute Werte von  $\Gamma(x)$  auch für derart grosse Werte von  $n$  problemlos berechnen.

Der Fehler der numerischen Approximation ist von der Größenordnung  $O(1/n)$  wie das auf Grund des verwendeten Konvergenzkriteriums zu erwarten war. Die Anzahl zu berücksichtigender Terme wächst daher exponentiell mit der Anzahl gewünschter Stellen an, was für praktische Zwecke zu langsam ist. Für die numerische Berechnung der Gamma-Funktion ist die Produktformel daher im Allgemeinen nicht geeignet.

### 4.1.3 Integralformel für die Gamma-Funktion

Euler hat die folgende Integraldefinition der Gamma-Funktion gegeben.

**Definition 4.5.** Die Gamma-Funktion ist die Funktion

$$\Gamma: \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Man beachte, dass das Integral für  $x = 0$  nicht definiert ist, eine Potenzreihenentwicklung um einen Punkt  $x_0$  auf der positiven reellen Achse kann also höchstens den Konvergenzradius  $\varrho = |x_0|$  haben.

Die Definition 4.5 wird erst später in (4.23) auf Seite 96 gegeben. Im Folgenden wird zunächst verifiziert, dass die Integraldarstellung die richtigen Werte für natürliche Argumente hat, es wird aber auch gezeigt, dass dies nicht ausreicht um zu schliessen, dass die Integralformel mit der früher definierten Gamma-Funktion übereinstimmt.

### Funktionalgleichung für die Integraldefinition

Tatsächlich ist es einfach nachzuprüfen, dass die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion auch für die Definition 4.5 korrekt ist. Dazu ist zunächst nachzurechnen, dass mindestens ein Wert der neuen Definition übereinstimmt mit der alten Definition, zum Beispiel der Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^\infty = 1.$$

Ausserdem muss die Funktionalgleichung erfüllt sein, also

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty \underbrace{t^{z-1}}_{\uparrow} \underbrace{e^{-t}}_{\downarrow} dt = \underbrace{\left[ \frac{1}{z} t^z e^{-t} \right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

Dies beweist aber nur, dass die beiden Definitionen für positiv ganzzahlige Argumente übereinstimmen. Der folgende Abschnitt macht deutlich, dass es sehr viele Funktionen gibt, die ebenfalls die Funktionalgleichung erfüllen. Eine vollständige Rechtfertigung für diese Definition wird später in Abschnitt 4.2.1 in Formel (4.23) auf Seite 96 gegeben.

### Der Wert $\Gamma(\frac{1}{2})$

Die Integraldarstellung kann dazu verwendet werden,  $\Gamma(\frac{1}{2})$  zu berechnen. Dazu verwendet man die Substitution  $t = s^2$  in der Integraldefinition der Gamma-Funktion und berechnen

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty s^{-1} e^{-s^2} \cdot 2s ds = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}. \quad (4.7)$$

Der Integrand im letzten Integral ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung, deren Integral wohlbekannt ist.

### Alternative Lösungen der Funktionalgleichung 4.1

Die Funktion  $\Gamma(z)$  ist nicht die einzige Funktion, die natürlichen Zahlen die Werte  $\Gamma(n+1) = n!$  der Fakultät annimmt. Indem man eine beliebige Funktion  $f(z)$  addiert, die auf alle natürlichen Zahlen verschwindet, also  $f(n) = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ , erhält man eine weitere Funktion, die auf natürlichen Zahlen die Werte der Fakultät annimmt. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist

$$z \mapsto f(z) = \Gamma(z) + \sin \pi z, \quad (4.8)$$

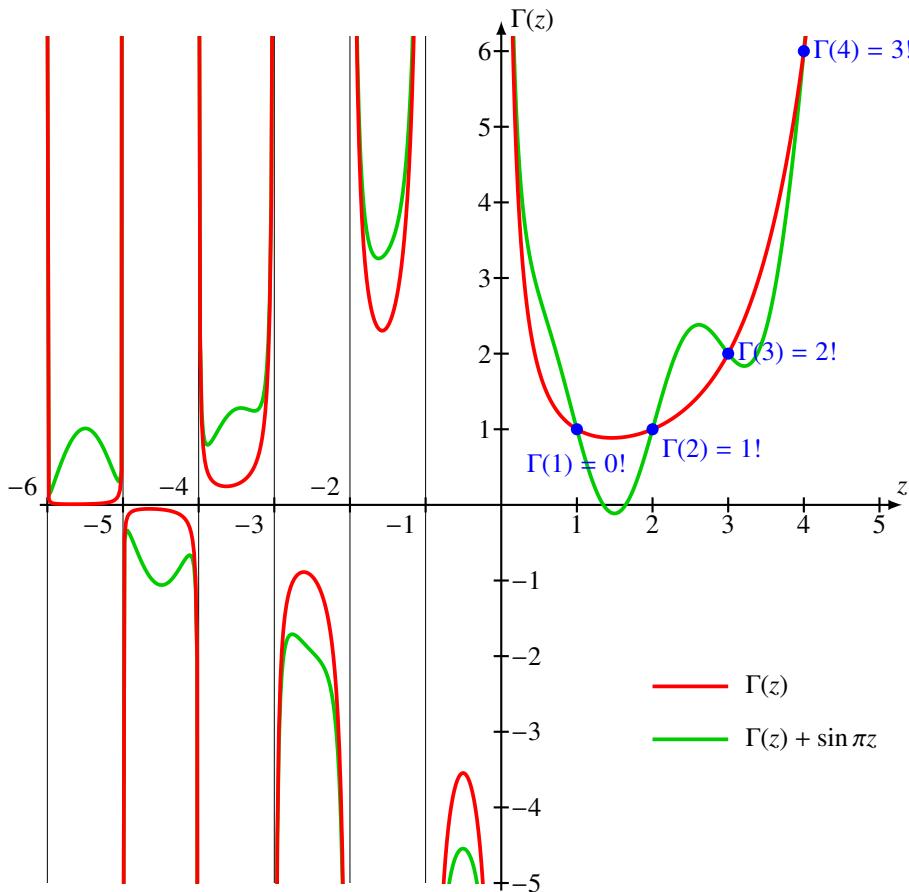


Abbildung 4.1: Graph der Gamma-Funktion  $z \mapsto \Gamma(z)$  und der alternativen Funktion  $\Gamma(z) + \sin(\pi z)$ , die für ganzzahlige Argumente ebenfalls die Werte der Fakultät annimmt.

die Funktion  $f(z) = \sin \pi z$  verschwindet sogar auf allen ganzen Zahlen.

In Abbildung 4.1 ist die Gamma-Funktion in rot geplottet, die Funktion (4.8) in grün. Die Punkte  $(n, (n-1)!)$  sind in blau bezeichnet, sie sind beiden Graphen gemeinsam.

In Abschnitt 9.5.2 wird mit Mitteln der komplexen Funktionentheorie gezeigt, dass eine Funktion, die für ganzzahlige Argument mit  $\Gamma(x)$  zusammenfällt und sich im Rest der rechten Halbebene nur durch eine beschränkte Funktion von  $\Gamma(x)$  unterscheidet, mit  $\Gamma(x)$  identisch sein muss. Von Wielandt stammt das folgende, noch etwas speziellere Resultat, welches hier nicht bewiesen wird.

**Satz 4.6** (Wielandt). *Ist  $f(z)$  eine für  $\operatorname{Re} z > 0$  definierte Funktion mit den folgenden drei Eigenschaften*

1.  $f(1) = 1$
2.  $f(z+1) = zf(z)$  für  $\operatorname{Re} z > 0$
3.  $f(z)$  ist beschränkt im Streifen  $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$

Dann ist  $f(z) = \Gamma(z)$ .

### Laplace-Transformierte der Potenzfunktion

Die Integraldarstellung der Gamma-Funktion erlaubt jetzt auch, die Laplace-Transformation der Potenzfunktion zu berechnen.

**Satz 4.7.** Die Laplace-Transformierte der Potenzfunktion  $f(t) = t^\alpha$  ist

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s^\alpha} \Gamma(\alpha + 1).$$

*Beweis.* Die Laplace-Transformierte ist das Integral

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt$$

Durch die Substitution  $st = u$  oder  $t = \frac{u}{s}$  wird daraus

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u} du = \frac{1}{s^\alpha} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{1}{s^\alpha} \Gamma(\alpha + 1). \quad \square$$

### Pol erster Ordnung bei $z = 0$

Wir haben zu prüfen, dass sowohl der Wert  $\Gamma(1)$  korrekt ist als auch die Rekursionsformel (4.1) gilt. Der Wert für  $z = 1$  ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^\infty = 1.$$

Für die Rekursionsformel kann mit Hilfe von partieller Integration bekommen:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^{z+1-1} e^{-t} dt = \left[ -t^z e^{-t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z). \end{aligned}$$

Für  $0 < z < \varepsilon$  für eine  $\varepsilon > 0$  folgt aus der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}.$$

Da  $\Gamma(1) = 1$  ist und  $\Gamma$  eine in einer Umgebung von 1 stetige Funktion ist, kann sie in der Form  $\Gamma(1+z) = \Gamma(1) + zf(z)$  schreiben, wobei  $f(z)$  eine differenzierbare Funktion ist mit  $f'(1) = \Gamma'(1)$ . Daraus ergibt sich für  $\Gamma(z)$  der Ausdruck

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{z} + f(z) = \frac{1}{z} + f(z).$$

Die Gamma-Funktion hat daher an der Stelle  $z = 0$  einen Pol erster Ordnung.

$k$	$n = 10^k$	$y(n)$	$y(n) - \Gamma(\frac{5}{3})$
1	10	0.0000000000	-0.9027452930
2	100	0.3319129461	-0.5708323468
3	1000	<u>0.9025209490</u>	-0.0002243440
4	10000	0.9027451207	-0.0000001723
5	100000	<u>0.9027450962</u>	-0.0000001968
6	1000000	<u>0.9027450962</u>	-0.0000001968
	$\infty$	<u>0.9027452929</u>	

Tabelle 4.3: Resultate der Berechnung von  $\Gamma(\frac{5}{3})$  mit Hilfe der Differentialgleichung (4.9). Die korrekten Stellen sind unterstrichen. Es sind immerhin sechs korrekte Stellen gefunden, wobei nur 337 Auswertungen des Integranden notwendig waren.

### Ausdehnung auf $\operatorname{Re} z < 0$

Die Integralformel konvergiert nicht für  $\operatorname{Re} z \leq 0$ . Durch analytische Fortsetzung, wie sie im Abschnitt 9.4 beschrieben wird, kann die Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  ausgedehnt werden, mit Ausnahme einzelner Pole. Die Funktionalgleichung gilt natürlich für alle  $z \in \mathbb{C}$ , für die  $\Gamma(z)$  definiert ist, nicht nur für diejenigen  $z$ , für die das Integral konvergiert. Wir können Sie daher verwenden, um das Argument in den Bereich zu bringen, wo das Integral zur Berechnung verwendet werden kann. Dazu berechnen wir

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}.$$

Dies gilt für jedes natürlich  $n$ . Für  $n$  gross genug, genauer für  $n \geq |\operatorname{Re} z|$ , ist  $\operatorname{Re}(z+n) = \operatorname{Re} z + n > 0$  und damit kann  $\Gamma(z+n)$  mit der Integralformel berechnet werden.

Die Gamma-Funktion hat keine Nullstellen, aber in der Nähe von  $z = -n$  hat der Nenner eine Nullstelle erster Ordnung. Somit hat  $\Gamma(z)$  Pole erster Ordnung bei den negativen ganzen Zahlen und bei 0, wie sie in Abbildung 4.1 gezeigt werden.

### Numerische Berechnung

Im Prinzip könnte die Integraldefinition der numerischen Berechnung entgegenkommen. Um diese Hypothese zu prüfen, berechnen wir das Integral für  $z = \frac{5}{3}$  mit Hilfe der äquivalenten Differentialgleichungen

$$\dot{y}(t) = t^{\frac{2}{3}} e^{-t} \quad \text{mit Anfangsbedingung } y(0) = 0. \quad (4.9)$$

Der gesuchte Wert ist der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ . In der Tabelle 4.3 sind die Werte von  $y(10^k)$  sowie die Differenzen  $y(10^k) - \Gamma(\frac{5}{3})$  zusammengefasst. Die Genauigkeit erreicht sechs korrekte Nachkommastellen mit nur 337 Auswertungen des Integranden.

Eine noch wesentlich effizientere Auswertung des  $\Gamma$ -Integrals mit Hilfe der Gauss-Laguerre-Quadratur wird in Kapitel 18 von Patrick Müller dargestellt.

#### 4.1.4 Der Satz von Bohr-Mollerup

Die Integralformel und die Grenzwertdefinition für die Gamma-Funktion zeigen beide, dass das Problem der Ausdehnung der Fakultät zu einer Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Lösung hat, aber es ist noch

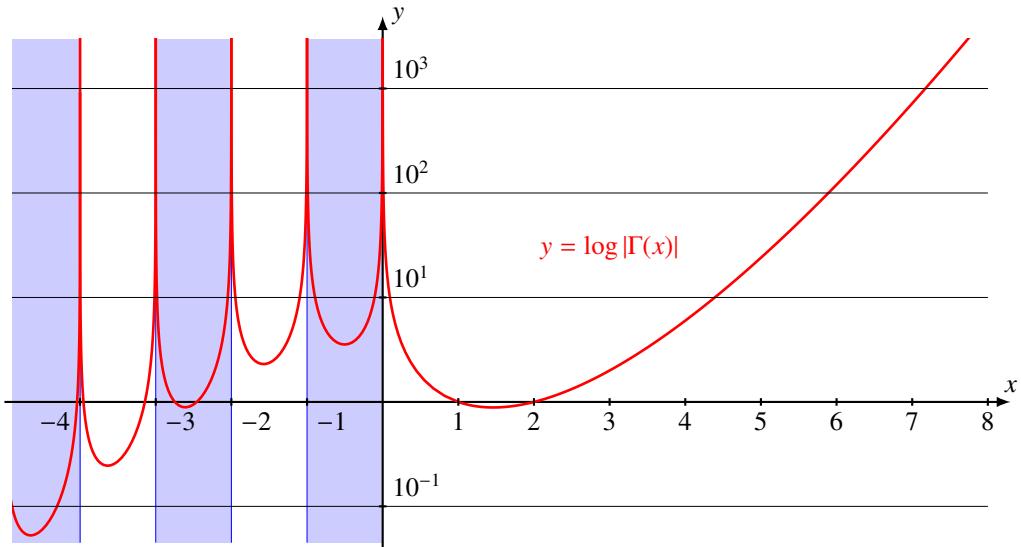


Abbildung 4.2: Der Graph der Funktion  $\log |\Gamma(x)|$  ist für  $x > 0$  konvex. Die blau hinterlegten Bereiche zeigen an, wo die Gamma-Funktion negative Werte annimmt.

nicht klar, in welchem Sinn dies die einzige mögliche Lösung ist. Der Satz von Bohr-Mollerup gibt darauf eine Antwort.

Der Graph in Abbildung 4.2 zeigt, dass die Werte der Gamma-Funktion für  $x > 0$  so schnell anwachsen, dass sogar die Funktion  $\log |\Gamma(x)|$  konvex ist. Der Satz von Bohr-Mollerup besagt, dass diese Eigenschaft zur Charakterisierung der Gamma-Funktion verwendet werden kann.

**Satz 4.8.** Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- i)  $f(1) = 1$ ,
- ii)  $f(x + 1) = xf(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  und
- iii) die Funktion  $\log f(t)$  ist konvex

ist die Gamma-Funktion:  $f(t) = \Gamma(t)$ .

Für den Beweis verwenden wir die folgende Eigenschaft einer konvexen Funktion  $g(x)$ . Sei

$$S(y, x) = \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \quad \text{für } y > x \quad (4.10)$$

die Steigung der Sekante zwischen den Punkten  $(x, g(x))$  und  $(y, g(y))$  des Graphen von  $g$ . Da  $g$  konvex ist, ist  $S(y, x)$  eine monoton wachsende Funktion der beiden Variablen  $x$  und  $y$ , solange  $y > x$ .

*Beweis.* Wir halten zunächst fest, dass die Bedingungen i) und ii) zur Folge haben, dass  $f(n+1) = n!$  ist für alle positiven natürlichen Zahlen. Für die Steigung einer Sekante der Funktion  $g(x) = \log f(x)$  kann damit für natürliche Argumente bereits berechnet werden, es ist

$$S(n, n+1) = \frac{\log n! - \log(n-1)!}{n+1-n} = \frac{\log n + \log(n-1)! - \log(n-1)!}{1} = \log n$$

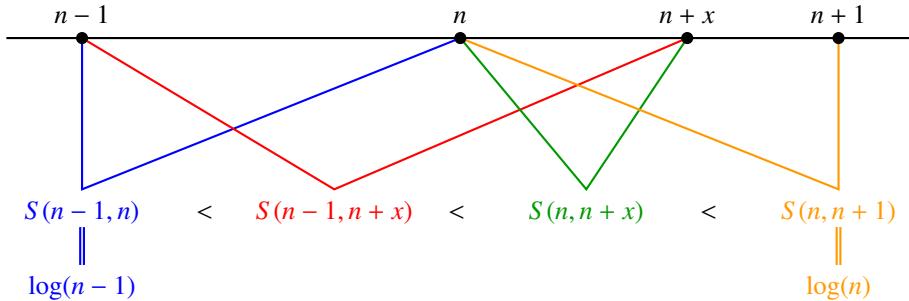


Abbildung 4.3: Für den Beweis des Satzes von Bohr-Mollerup wird die Sekantensteigung  $S(x, y)$  für die Argumente  $n - 1, n, n + x$  und  $n + 1$  verwendet.

und entsprechend auch  $S(n - 1, n) = \log(n - 1)$ .

Wir wenden jetzt die eben erwähnte Tatsache, dass  $S(x, y)$  monoton wachsend ist, auf die Punkte  $n - 1, n, n + x$  und  $n + 1$  wie in Abbildung 4.3 an, wobei  $0 < x < 1$  ist.

Die linke Ungleichung in Abbildung 4.3 ist

$$\begin{aligned} \log(n-1) &< S(n-1, n+x) = \frac{\log f(n+x) - \log(n-2)!}{n+x-n+1} \\ (x+1)\log(n-1) + \log(n-2)! &< \log f(n+x), \\ x\log(n-1) + \log(n-1)! &< \log f(n+x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

sie schätzt  $\log f(n+x)$  nach unten ab. Die Exponentialfunktion ist monoton wachsen, wendet man sie auf (4.11) an, erhält man

$$(n-1)^x(n-1)! < f(n+x). \quad (4.12)$$

Ganz ähnlich folgt aus der Ungleichung rechts in Abbildung 4.3

$$\begin{aligned} \frac{\log f(n+x) - \log(n-1)!}{n+x-n} &< \log n \\ \log f(n+x) - \log(n-1)! &< x \log n \\ \log f(n+x) &< x \log n + \log(n-1)! \end{aligned}$$

und nach Anwendung der Exponentialfunktion

$$f(n+x) < n^x(n-1)! \quad (4.13)$$

Die Funktion  $f(n+x)$  können wir jetzt mit der Funktionalgleichung ii) durch  $f(x)$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} f(n+x) &= (x+n-1)f(n+x-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)f(n+x-2) \\ &\vdots \\ &= (x+n-1)(x+n-2) \dots x f(x) = (x)_n f(x). \end{aligned}$$

Zusammen mit den Ungleichungen (4.12) und (4.13) erhalten wir

$$(n-1)^x(n-1)! < (x)_n f(x) < n^x(n-1)!$$

oder nach Division durch  $(x)_n$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x)_n} < f(x) < \frac{n^x(n-1)!}{(x)_n} = \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} \cdot \frac{x+n}{n}.$$

Der Ausdruck ganz links und der erste Bruch rechts konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  beide gegen  $\Gamma(x)$  und der Bruch ganz rechts konvergiert gegen 1. Daher muss auch  $f(x) = \Gamma(x)$  sein.  $\square$

### 4.1.5 Integraldarstellung und der Satz von Bohr-Mollerup

Die Integralformel

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

für die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion. Aus dem Satz von Bohr-Mollerup 4.8 folgt, dass  $f(x) = \Gamma(x)$ , wenn gezeigt werden kann, dass  $\log f(x)$  konkav ist. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

#### Logarithmische Ableitung

Die Ableitungen der Funktion  $\log f(x)$  sind die erste und zweite logarithmische Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log f(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \frac{d^2}{dx^2} \log f(x) &= \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch Ableiten unter dem Integralzeichen können die Ableitungen von  $f$  als

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^\infty \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt \\ f''(x) &= \int_0^\infty \log(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

bestimmt werden. Um nachzuweisen, dass  $\log f(x)$  konkav ist, muss nur gezeigt werden, dass die zweite logarithmische Ableitung von  $f(x)$  positiv ist, was gemäss (4.14) mit

$$f''(x)f(x) - f'(x)^2 = \int_0^\infty \log(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - \left( \int_0^\infty \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \geq 0 \quad (4.15)$$

gleichbedeutend ist.

#### Skalarprodukt

Die Integral in (4.15) können als Werte eines Skalarproduktes von Funktionen auf  $\mathbb{R}^+$  gelesen werden. Dazu definieren wir

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(t)v(t) t^{x-1} e^{-t} dt \quad (4.16)$$

$$\|u\|^2 = \int_0^\infty u(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt,$$

für alle Funktionen  $u$  und  $v$ , für die die Integrale definiert sind.

### Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das Skalarprodukt (4.16) für die Funktion  $u(t) = 1$  und  $v(t) = \log(t)$  lautet

$$|\langle u, v \rangle|^2 = \left| \int_0^1 \log(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 = \int_0^\infty 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty \log(t)^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Daraus folgt aber durch Umstellen unmittelbar die Ungleichung (4.15). Damit ist gezeigt, dass  $\log f(t)$  konvex ist und nach dem Satz 4.8 folgt nun, dass  $f(x) = \Gamma(x)$ .

## 4.2 Die Beta-Funktion

Die Eulersche Integralformel für die Gamma-Funktion in Definition 4.5 wurde in Abschnitt 4.1.5 mit dem Satz 4.8 von Bohr-Mollerup gerechtfertigt. Man kann Sie aber auch als Grenzfall der Beta-Funktion verstehen, die in diesem Abschnitt dargestellt wird.

### 4.2.1 Beta-Integral

In diesem Abschnitt wird das Beta-Integral eingeführt, eine Funktion von zwei Variablen, welches eine Integral-Definition mit einer reichhaltigen Menge von Rekursionsbeziehungen hat, die sich direkt auf die Gamma-Funktion zurückführen lassen. Daraus wird sich dann ein Beweis für die Integralformel für die Gamma-Funktion ergeben.

**Definition 4.9.** Das Beta-Integral ist das Integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

für  $\operatorname{Re} x > 0$ ,  $\operatorname{Re} y > 0$ .

Aus der Definition kann man sofort ablesen, dass  $B(x, y) = B(y, x)$ . Für  $y = 1$  folgt außerdem

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[ \frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}. \quad (4.17)$$

Speziell gilt  $B(1, 1) = 1$ .

### Rekursionsformeln für das Beta-Integral

Aus der Definition folgt direkt

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y+1-1} dt = \int_0^1 (1-t) t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt \\
&= B(x, y) - B(x+1, y)
\end{aligned}$$

oder

$$B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1). \quad (4.18)$$

Durch partielle Integration kann man eine weitere Rekursionsformel finden. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned}
B(x, y+1) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\
&= \left[ \frac{t^x}{x} (1-t)^y \right]_0^1 + \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt \\
&= \frac{y}{x} B(x+1, y).
\end{aligned} \quad (4.19)$$

Durch Gleichsetzen (4.18) und (4.19) entsteht die Rekursionsformel

$$B(x, y) - B(x, y+1) = B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$$

oder

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1). \quad (4.20)$$

### Beta-Funktion und Gamma-Funktion

Die Rekursionsbeziehung (4.20) kann jetzt dazu verwendet werden, eine Darstellung der Beta-Funktion durch die Gamma-Funktion zu finden. Durch  $n$ -fache Anwendung von (4.20) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= \frac{x+y}{y} B(x, y+1) = \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} B(x, y+2) \\
&= \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} \cdot \dots \cdot \frac{x+y+n-1}{y+n-1} B(x, y+n) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n)
\end{aligned}$$

Die Beta-Funktion auf der rechten Seite kann als Integral geschrieben werden:

$$= \frac{(x+y)_n}{(y)_n} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt.$$

Wir halten dieses Zwischenresultat für spätere Verwendung fest.

**Lemma 4.10.** Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$B(x, y+n) = \frac{(y)_n}{(x+y)_n} B(x, y).$$

Wir streben an, mit dem Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  aus den Pochhammer-Symbolen Gamma-Funktionen zu machen, dazu müssen gemäss Definition 4.2 weitere Faktoren  $1/(n! n^{x-1})$  vorhanden sein. Wir erweitern geeignet und nehmen die übrig bleibenden Faktoren in das Integral. So ergibt sich

$$B(x, y) = \frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-1}} \frac{n! n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^1 n^x t^{x-1} (1-t)^{y+n-1} dt.$$

Mit der Substitution  $s/n = t$  wird das Integral zu einem Integral über das Intervall  $[0, n]$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-1}} \frac{n! n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^n n^x \left(\frac{s}{n}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{y+n-1} \frac{ds}{n}. \\ &= \frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-1}} \frac{n! n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^n n^{x-1} \left(\frac{s}{n}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{y+n-1} ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  wird daraus

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{(x+y)_n}{n! n^{x+y-1}}}_{\rightarrow 1/\Gamma(x+y)} \underbrace{\frac{n! n^{y-1}}{(y)_n}}_{\rightarrow \Gamma(y)} \int_0^n s^{x-1} \underbrace{\left(1 - \frac{s}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-s}} \underbrace{\left(1 - \frac{s}{n}\right)^{y-1}}_{\rightarrow 1} ds. \\ &\rightarrow \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Das Integral im letzten Ausdruck ist die Integraldarstellung für die Gamma-Funktion von Definition 4.5, die bis anhin noch nicht gerechtfertigt wurde.

In (4.17) ist gezeigt worden, dass  $B(x, 1) = 1/x$ . Andererseits zeigt (4.24) für  $y = 1$ , dass

$$\frac{1}{x} = B(x, 1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds.$$

Wegen  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  finden wir nach Multiplikation mit  $x\Gamma(x)$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds, \quad (4.23)$$

was die Integraldarstellung von Definition 4.5, der Gamma-Funktion beweist. Durch Einsetzen der Integralformel im Ausdruck (4.24) folgt der folgende Satz.

**Satz 4.11.** *Die Beta-Funktion kann aus der Gamma-Funktion nach*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (4.24)$$

berechnet werden.

## 4.2.2 Ordnungsstatistik und Beta-Funktion

In diesem Abschnitt ist  $X$  eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ , und  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sei ein Stichprobe von unabhängigen Zufallsvariablen, die wie  $X$  verteilt sind. Ziel ist, die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichte des grössten, zweitgrössten,  $k$ -t-grössten Wertes in der Stichprobe zu finden. Wir schreiben  $[n] = \{1, \dots, n\}$  für die Menge der natürlichen Zahlen von zwischen 1 und  $n$ .

**Verteilung von  $\max(X_1, \dots, X_n)$  und  $\min(X_1, \dots, X_n)$**

Die Verteilungsfunktion von  $\max(X_1, \dots, X_n)$  hat den Wert

$$F_{\max(X_1, \dots, X_n)}(x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_1 \leq x \wedge \dots \wedge X_n \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x) \\
&= P(X \leq x)^n = F_X(x)^n.
\end{aligned}$$

Für die Gleichverteilung ist

$$F_{\text{equi}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

In diesem Fall ist Verteilung des Maximums

$$F_{\max(X_1, \dots, X_n)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

Mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi_{\max(X_1, \dots, X_n)} = \frac{d}{dx} F_{\max(X_1, \dots, X_n)}(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kann man zum Beispiel den Erwartungswert

$$E(\max(X_1, \dots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_{X_1, \dots, X_n}(x) dx = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1} dt = \left[ \frac{n}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

berechnen.

Ganz analog kann man auch die Verteilungsfunktion von  $\min(X_1, \dots, X_n)$  bestimmen. Sie ist

$$\begin{aligned}
F_{\min(X_1, \dots, X_n)}(x) &= P(x \leq X_1 \vee \dots \vee x \leq X_n) \\
&= 1 - P(x > X_1 \wedge \dots \wedge x > X_n) \\
&= 1 - (1 - P(x \leq X_1)) \cdot \dots \cdot (1 - P(x \leq X_n)) \\
&= 1 - (1 - F_X(x))^n,
\end{aligned}$$

Im Speziellen für im Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte  $X_i$  ist die Verteilungsfunktion des Minimums

$$F_{\min(X_1, \dots, X_n)}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi_{\min(X_1, \dots, X_n)} = \frac{d}{dx} F_{\min(X_1, \dots, X_n)} = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Erwartungswert

$$\begin{aligned}
E(\min(X_1, \dots, X_n)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_{\min(X_1, \dots, X_n)}(x) dx = \int_0^1 x \cdot n(1-x)^{n-1} dx \\
&= [-x(1-x)^n]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[ -\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich daraus als natürlich Verallgemeinerung die Frage nach der Verteilung des zweitgrößten oder zweitkleinsten Wertes unter den Werten  $X_i$ .

## Der $k$ -t-grösste Wert

Sie wieder  $X_i$  eine Stichprobe von  $n$  unabhängigen wie  $X$  verteilten Zufallsvariablen. Diese werden jetzt der Grösse nach sortiert, die sortierten Werte werden mit

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{(n-1):n} \leq X_{n:n}$$

bezeichnet. Die Grössen  $X_{k:n}$  sind Zufallsvariablen, sie heissen die  $k$ -ten Ordnungsstatistiken. Die in Abschnitt 4.2.2 behandelten Zufallsvariablen  $\min(X_1, \dots, X_n)$  und  $\max(X_1, \dots, X_n)$  sind die Fälle

$$X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Um den Wert der Verteilungsfunktion von  $X_{k:n}$  zu berechnen, müssen wir die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass  $k$  der  $n$  Werte  $X_i$   $x$  nicht übersteigen. Der  $k$ -te Wert  $X_{k:n}$  übersteigt genau dann  $x$  nicht, wenn mindestens  $k$  der Zufallswerte  $X_i$   $x$  nicht übersteigen, also

$$P(X_{k:n} \leq x) = P(|\{i \in [n] | X_i \leq x\}| \geq k).$$

Das Ereignis  $\{X_i \leq x\}$  ist eine Bernoulli-Experiment, welches mit Wahrscheinlichkeit  $F_X(x)$  eintritt. Die Anzahl der Zufallsvariablen  $X_i$ , die  $x$  übertreffen, ist also Binomialverteilt mit  $p = F_X(x)$ . Damit haben wir gefunden, dass mit Wahrscheinlichkeit

$$F_{X_{k:n}}(x) = P(X_{k:n} \leq x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F_X(x)^i (1 - F_X(x))^{n-i} \quad (4.25)$$

mindestens  $k$  der Zufallsvariablen den Wert  $x$  überschreiten.

## Wahrscheinlichkeitsdichte der Ordnungsstatistik

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Ordnungsstatistik kann durch Ableitung von (4.25) gefunden, werden, sie ist

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{k:n}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{X_{k:n}}(x) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (i F_X(x)^{i-1} \varphi_X(x) (1 - F_X(x))^{n-i} - F_X(x)^k (n-i) (1 - F_X(x))^{n-i-1} \varphi_X(x)) \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \varphi_X(x) F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i-1} (i F_X(x) - (n-i)(1 - F_X(x))) \\ &= \varphi_X(x) \left( \sum_{i=k}^n i \binom{n}{i} F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i} - \sum_{j=k}^n (n-j) \binom{n}{j} F_X(x)^j (1 - F_X(x))^{n-j-1} \right) \\ &= \varphi_X(x) \left( \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i} - \sum_{i=k+1}^{n+1} (n-i+1) \binom{n}{i-1} F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i} \right) \\ &= \varphi_X(x) \left( k \binom{n}{k} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \left( i \binom{n}{i} - (n-i+1) \binom{n}{i-1} \right) F_X(x)^{i-1} (1 - F_X(x))^{n-i} \right) \end{aligned}$$

Mit den wohlbekannten Identitäten für die Binomialkoeffizienten

$$i \binom{n}{i} - (n-i+1) \binom{n}{i-1} = n \binom{n-1}{i-1} - n \binom{n-1}{i-1} = 0$$

folgt jetzt

$$\varphi_{X_{k:n}}(x) = \varphi_X(x) k \binom{n}{k} F_X(x)^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k}.$$

Im Speziellen für gleichverteilte Zufallsvariablen  $X_i$  ist

$$\varphi_{X_{k:n}}(x) = k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k}.$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Betaverteilung

$$\beta(k, n-k+1)(x) = \frac{1}{B(k, n-k+1)} x^{k-1} (1-x)^{n-k}.$$

Tatsächlich ist die Normierungskonstante

$$\frac{1}{B(k, n-k+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}. \quad (4.26)$$

Andererseits ist

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!},$$

in Übereinstimmung mit (4.26). Die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichte der Ordnungsstatistik sind in Abbildung 4.4 dargestellt.

### 4.2.3 Die Beta-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, die im Abschnitt 4.2.2 gefunden worden ist, ist nicht nur für ganzzählige Exponenten definiert.

**Definition 4.12.** *Die Beta-Verteilung ist die Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$\beta_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Beta-Funktion ist also die Normierungskonstante der Beta-Verteilung. Die wichtigsten Kennzahlen der Beta-Verteilung wie Erwartungswert und Varianz lassen sich alle ebenfalls als Werte der Beta-Funktion ausdrücken.

#### Erwartungswert

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte kann man jetzt auch den Erwartungswerte der  $k$ -ten Ordnungsstatistik bestimmen. Die Rechnung ergibt:

$$E(X_{k:n}) = \int_0^1 x \cdot k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx = k \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

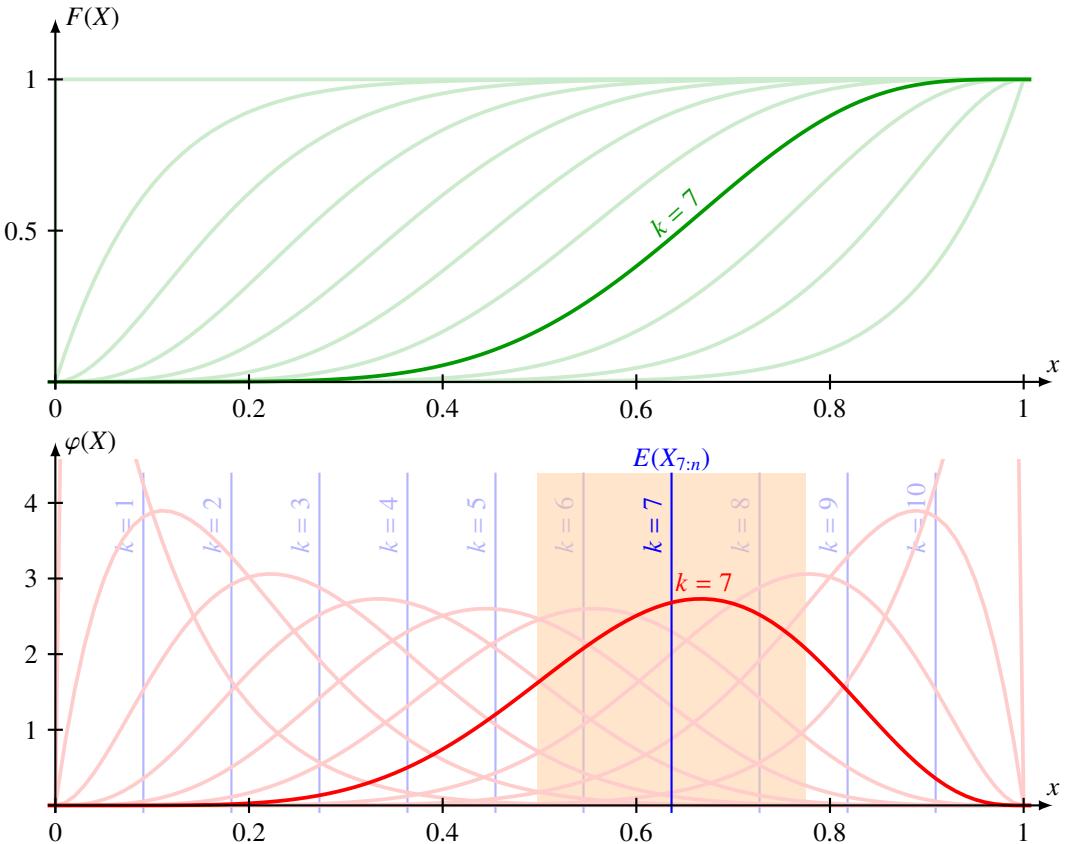


Abbildung 4.4: Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte der Ordnungsstatistiken  $X_{k:n}$  einer gleichverteilung Zufallsvariable mit  $n = 10$ .

Dies ist das Beta-Integral

$$= k \binom{n}{k} B(k+1, n-k+1)$$

welches man durch Gamma-Funktionen bzw. durch Fakultäten wie in

$$= k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{n+2} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}$$

ausdrücken kann. Die Erwartungswerte haben also regelmässige Abstände, sie sind in Abbildung 4.4 als blaue vertikale Linien eingezeichnet.

Für die Beta-Verteilung lässt sich die Rechnung noch allgemeiner durchführen. Der Erwartungswert einer  $\beta_{a,b}$ -verteilten Zufallsvariablen  $X$  ist

$$E(X) = \int_0^1 x \beta_{a,b}(x) dx = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x \cdot x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} = \frac{a}{a+b}.$$

Durch Einsetzen von  $a = k+1$  und  $b = n-k+1$  lassen sich die für die Ordnungsstatistik berechneten Werte wiederfinden.

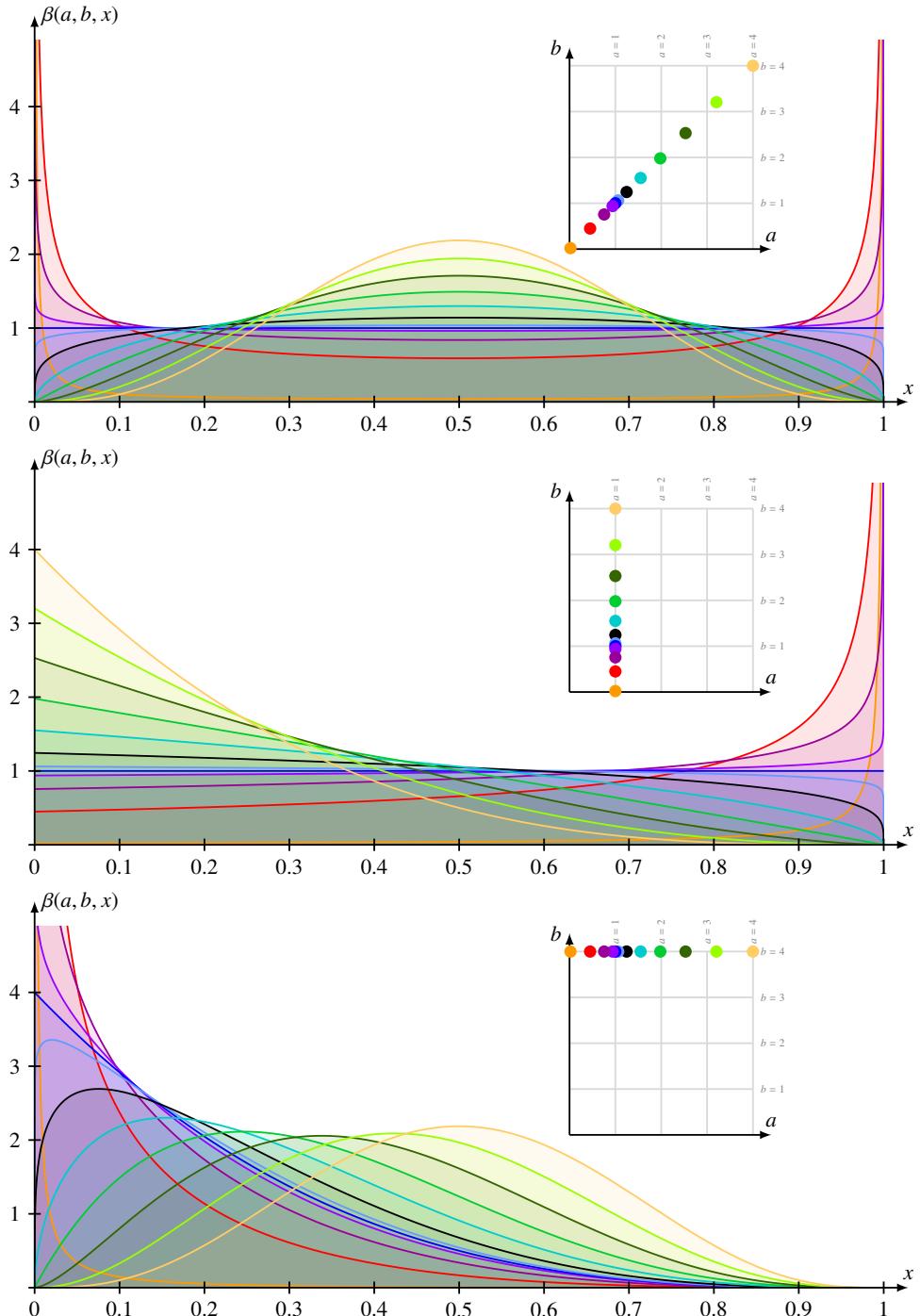


Abbildung 4.5: Wahrscheinlichkeitsdichte der Beta-Verteilung  $\beta(a, b, x)$  für verschiedene Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . Die Werte des Parameters für einen Graphen einer Beta-Verteilung sind im kleinen Quadrat rechts im Graphen als Punkt mit der gleichen Farbe dargestellt.

## Varianz

Auch die Varianz lässt sich einfach berechnen, dazu muss zunächst der Erwartungswert von  $X_{k:n}^2$  bestimmt werden. Er ist

$$E(X_{k:n}^2) = \int_0^1 x^2 \cdot k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx = k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{n-k} dx.$$

Auch dies ist ein Beta-Integral, nämlich

$$= k \binom{n}{k} B(k+2, n-k+1) = k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Die Varianz wird damit

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{k:n}) &= E(X_{k:n}^2) - E(X_{k:n})^2 \\ &= \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2} = \frac{k(k+1)(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

In Abbildung 4.4 ist die Varianz der Ordnungsstatistik  $X_{k:n}$  für  $k = 7$  und  $n = 10$  als orangenes Rechteck dargestellt.

Auch die Varianz kann ganz allgemein für die Beta-Verteilung bestimmt werden. Dazu berechnen wir zunächst

$$E(X^2) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^2 \cdot x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)}.$$

Daraus folgt dann

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{B(a+2,b)B(a,b) - B(a+1,b)^2}{B(a,b)^2}.$$

Die Formel (4.27) besagt auch, dass die Varianz proportional ist zu  $k((n+1)-k)$ . Dieser Ausdruck ist am grössten für  $k = (n+1)/2$ , die Varianz ist also grösser für die “mittleren” Ordnungstatistiken als für die extremen  $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$  und  $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ .

### 4.2.4 Weitere Eigenschaften der Gamma-Funktion

Die nahe Verwandtschaft der Gamma- mit der Beta-Funktion ermöglicht nun, weitere Eigenschaften der Gamma-Funktion mit Hilfe der Beta-Funktion herzuleiten.

#### Nochmals der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$ ?

Der Wert von  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  wurde bereits in (4.7) direkt mit Hilfe der Integraldefinition berechnet. Hier wird eine alternative Berechnungsmöglichkeit mit Hilfe der Beta-Funktion vorgestellt.

Als Anwendung der Formel (4.24) untersuchen wir den Fall  $y = 1 - x$ . In diesem Fall wird der Nenner zu  $\Gamma(x + 1 - x) = \Gamma(1) = 1$  und damit

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-x} dt. \quad (4.28)$$

Sofern man in der Lage ist, das Integral auf der rechten Seite von (4.28) auszuwerten, kann man eine einfache Beziehung zwischen zwei Werten der Gamma-Funktion an Stellen, die durch eine Spiegelung an der Geraden  $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$  auseinander hervorgehen. Für  $x = \frac{1}{2}$  wird der Ausdruck besonders einfach:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

Mit der Substitution  $t = \sin^2 s$  wird daraus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 s(1-\sin^2 s)}} 2 \sin s \cos s ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \pi,$$

wobei wir  $dt = 2 \sin s \cos s ds$  verwendet haben. Somit folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (4.29)$$

Matt Parker hat auf seinem Youtube-Kanal *Stand-up Maths* dieses Resultat sogar zum Titel eines Videos<sup>1</sup> gemacht: *What is the factorial of  $-1/2$ ?* Die Antwort ist natürlich nur möglich, indem man  $(-\frac{1}{2})!$  als Wert

$$(-\frac{1}{2})! = \Gamma(-\frac{1}{2} + 1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

der Gamma-Funktion interpretiert.

### Alternative Parametrisierungen

Die Substitution  $t = \sin^2 s$  hat im vorangegangenen Abschnitt ermöglicht,  $\Gamma(\frac{1}{2})$  zu ermitteln. Die Substitution erlaubt aber auch, das Beta-Integral in eine alternative Form zu bringen. Aus der Definition 4.9 wird damit

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)} s \cdot (1 - \sin^2 s)^{y-1} \cdot \sin s \cos s ds \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} s \cos^{2y-1} s ds. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Formel (4.24), die die Beta-Funktion durch Gamma-Funktionen auszudrücken erlaubt, findet man die Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} s \cos^{2y-1} s ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

für ein bestimmtes Integral von Potenzen von Sinus- und Kosinus-Funktionen.

Die alternative Substitution  $t = s/(s+1)$  verwandelt das Beta-Integral  $B(x, y)$  in ein Integral über die positive Halbachse ab:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

---

<sup>1</sup><https://youtu.be/dGnIJFzkLI4>

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-1}} \frac{1}{(s+1)^{y-1}} \frac{ds}{(s+1)^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} ds,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

wobei wir

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{s}{s+1} = \frac{(s+1)-s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

verwendet haben. Diese Darstellung des Beta-Integrals wird später in Satz 9.21 dazu verwendet, die Spiegelungsformel für die Gamma-Funktion herzuleiten.

Eine weitere mögliche Parametrisierung verwendet  $t = (1+s)/2$  mit  $dt = \frac{1}{2}ds$ . Damit wird das Beta-Integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{y-1} ds = 2^{1-x-y} \int_{-1}^1 (1+s)^{x-1} (1-s)^{y-1} ds. \tag{4.31}$$

### Die Verdoppelungsformel von Legendre

Die trigonometrische Substitution kann dazu verwendet werden, die Legendresche Verdoppelungsformel für die Gamma-Funktion herzuleiten.

**Satz 4.13** (Legendre).

$$\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2}) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

*Beweis.* Der Wert  $\Gamma(2x)$  entsteht, wenn man  $B(x, x)$  mit Hilfe der Gamma-Funktion als

$$B(x, x) = \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)}$$

schreibt. Das Ziel ist,  $B(x, x)$  auf einem alternativen Weg zu berechnen.

Mit Hilfe von (4.31) kann man das Beta-Integral zu

$$B(x, x) = 2^{1-2x} \int_{-1}^1 (1+s)^{x-1} (1-s)^{x-1} ds = 2^{1-2x} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{x-1} ds$$

vereinfachen. Der Integrand ist gerade, es folgt

$$B(x, x) = 2^{1-2x} \cdot 2 \int_0^1 (1-s^2)^{x-1} ds.$$

Das Integral kann mit der Substitution  $s^2 = t$  wieder in die Form eines Beta-Integrals gebracht werden:

$$2 \int_0^1 (1-s^2)^{x-1} ds = \int_0^1 (1-t)^{x-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{x-1} dt = B(\frac{1}{2}, x).$$

In der Substitution haben wir  $2s \, ds = dt$  oder  $2 \, ds = dt / \sqrt{t}$  verwendet. Das letzte Beta-Integral kann man nun wieder mit Gamma-Funktionen schreiben, nämlich als

$$B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}.$$

Setzt man alles zusammen, erhält man jetzt

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)} &= \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} \\ \Rightarrow \quad \Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2}) &= 2^{1-2x}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x), \end{aligned}$$

wobei wir den bekannten Wert  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  verwendet haben.  $\square$

Setzt man  $x = \frac{1}{2}$  in die Verdoppelungsformel ein, erhält man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2^{1-2\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(1) \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

in Übereinstimmung mit dem aus (4.29) bereits bekannten Wert.

## 4.3 Lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten

Die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion, die im Abschnitt 4.1 untersucht wurde, hat die Form einer linearen Rekursionsgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1.$$

Gleichungen, die Werte einer Funktion für verschiedene Argumente in Beziehung setzen, heißen *Funktionalgleichungen*. Es war überraschend schwierig, eine Lösung für Funktionalgleichung der Gamma-Funktion für beliebige komplexe  $x$  zu finden. In diesem Abschnitt soll daher eine Klasse von Rekursionsgleichungen näher untersucht werden, für die einfache Lösungen möglich sind.

### 4.3.1 Lineare Differenzengleichungen

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch die lineare Rekursionsgleichung

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_1 = 1, \quad F_0 = 0. \quad (4.32)$$

Ganz ähnlich wie bei der Gamma-Funktion kann man auch hier die Frage stellen, ob es eine Funktion  $F(z)$  von komplexen Argumenten gibt derart, dass

$$F(z+1) = F(z) + F(z-1), \quad F(1) = 1, \quad F(0) = 0. \quad (4.33)$$

**Aufgabe 4.14.** Gibt es eine Funktion

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

derart, dass

$$F(z+1) = F(z) + F(z-1)?$$

Sind  $F_1(z)$  und  $F_2(z)$  Lösungen der Differenzengleichung, dann sind beliebige Linearkombinationen  $\lambda F_1(z) + \mu F_2(z)$  ebenfalls Lösungen. Außerdem ist  $e^{2k\pi i} F(z)$  eine Lösung der Differenzengleichung, es gibt also unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

### 4.3.2 Lösung mit Exponentialfunktionen

Gesucht ist eine ganze Funktion, also eine Funktion  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die Lösung einer Differenzengleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k F(z+n) = 0, \quad (4.34)$$

mit  $a_n \neq 1$ . Ist ein erfolgversprechender Ansatz  $F(z) = e^{bz} = (e^b)^z$ , da die Exponentialfunktion eine ganze Funktion ist. Die Differenzengleichung führt auf

$$0 = \sum_{k=0}^n a_k F(z+n) = \sum_{k=0}^n a_k e^{b(z+n)} = e^{bz} \sum_{k=0}^n a_k (e^b)^n.$$

Gesucht ist also  $a \in \mathbb{C}$  derart, dass  $e^a$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynomes

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

der Differenzengleichung ist. Die Zahl  $a$  ist nicht eindeutig, denn wenn  $e^a$  eine Nullstelle ist, dann ist  $e^{a+2\pi i} = e^a$  eine Nullstelle. Dies sind die einzigen Lösungen der Differenzengleichung.

Seien also  $\lambda_j$  die Nullstellen von  $p(x)$  mit  $1 \leq j \leq n$ . Dann gibt es komplexe Zahlen  $b_j$  mit  $-\pi < \operatorname{Im} b_j < \pi$  derart, dass  $e^{b_j} = \lambda_j$ . Die Funktionen

$$F_{jk}(z) = e^{2k\pi iz} e^{b_j z}$$

sind Lösungen der Differenzengleichung.

### 4.3.3 Komplexe Fibonacci-Zahlen

Matt Parker vom Youtube-Kanal Stand-up Maths hat in einem Video<sup>2</sup> die Lösungsfunktionen für die Differenzengleichung der Fibonacci-Zahlen für beliebige reelle und komplexe Argumente visualisiert. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}, \end{cases}$$

dabei ist  $\varphi$  das Verhältnis des goldenen Schnittes. Die Anfangsbedingungen  $F(0) = 0$  und  $F(1) = 1$  bedeutet, dass

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^z - \frac{1}{\sqrt{5}} (-\varphi)^z \quad (4.35)$$

Dies ist die Funktion, die Matt Parker in seinem Video visualisiert hat. Abbildung (4.6) zeigt die Abbildung  $z \mapsto F(z)$ . Allerdings sind die Funktionen

$$F_{kl}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^z e^{2k\pi iz} - \frac{1}{\sqrt{5}(-\varphi)^z} e^{2l\pi iz}$$

ebenfalls Lösungen der Differenzengleichung mit den gleichen Anfangswerten.

<sup>2</sup><https://youtu.be/ghxQA3vvhsk>

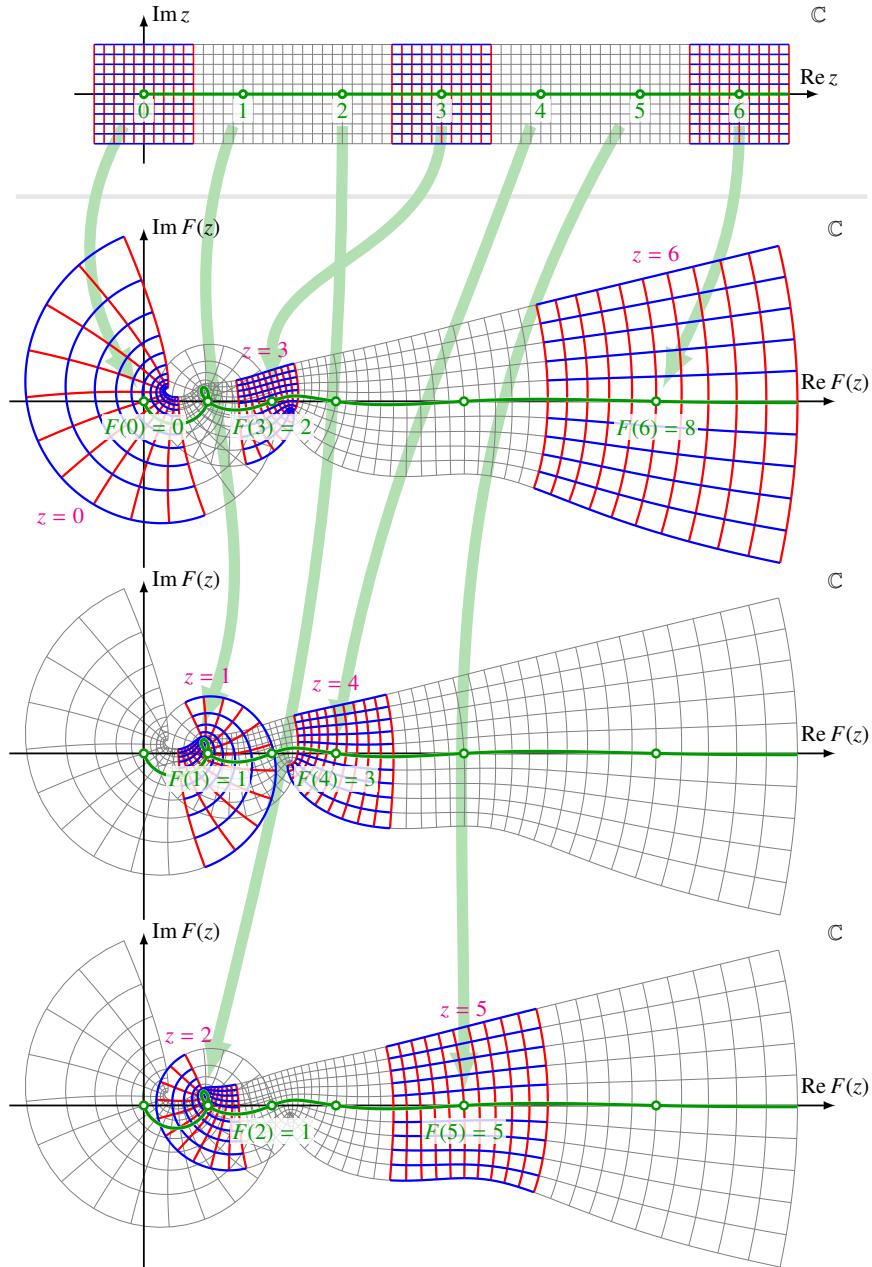


Abbildung 4.6: Komplexe Fibonacci-Zahlen-Funktion  $F(z)$  von (4.35) dargestellt als Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die ganzzahligen  $z$  werden auf die wohlbekannten Fibonacci-Zahlen abgebildet. Zur besseren Lesbarkeit wird der Wertebereich dreimal dargestellt, damit die Bilder der einzelnen reellen Teilintervalle in verschiedene Wertebereich-Bilder verteilt werden können.  $x$ -Werte zwischen  $3k - \frac{1}{2}$  und  $3k + \frac{1}{2}$  werden im obersten Bildbereich dargestellt, solche zwischen  $3k + \frac{1}{2}$  und  $3k + \frac{3}{2}$  im mittleren und schliesslich solche zwischen  $3k + \frac{3}{2}$  und  $3k + \frac{5}{2}$  im untersten. Die reelle Achse wird auf die grüne Kurve abgebildet.

## 4.4 Hypergeometrische Funktionen

Kann man eine Formel für die Lösung  $S_n$  der lineare Differenzengleichung

$$n^3 S_n = 16(n - \frac{1}{2})(2n^2 - 2n + 1)S_{n-1} - 256(n - 1)^3 S_3$$

mit Anfangswerten  $S_0 = 1$  und  $S_1 = 8$  angeben? Dies scheint auf den ersten Blick unmöglich kompliziert, man kann aber zeigen, dass

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k}^2 \quad (4.36)$$

gilt ([buch:ab]). Die Lösung ist also eine Summe von Summanden, die sehr viel einfacher aussehen und vor allem die besondere Eigenschaft haben, dass die Quotienten aufeinanderfolgender Terme rationale Funktionen von  $k$  sind.

**Definition 4.15.** Ein Folge heisst hypergeometrisch, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Terme eine rationale Funktion des Folgenindex ist.

Die Terme der Reihenentwicklungen aller bisher behandelten speziellen Funktionen waren hypergeometrisch. Im aktuellen Abschnitt soll daher die Klasse der sogenannten hypergeometrischen Funktionen untersucht werden, die durch diese Eigenschaft charakterisiert sind.

In Abschnitt 4.4.1 wird klar, dass Folgen, deren Terme aus Fakultäten und Binomialkoeffizienten immer hypergeometrisch sind. Die Untersuchung der geometrischen Reihe in Abschnitt 4.4.2 motiviert die Namensgebung. Abschnitt 4.4.3 definiert den Begriff der hypergeometrischen Reihe und zeigt, wie sie in eine Standardform gebracht werden können. In Abschnitt 4.4.4 schliesslich wird an Hand von Beispielen gezeigt, wie bekannte Funktionen als hypergeometrische Funktionen interpretiert werden können.

### 4.4.1 Quotienten von Binomialkoeffizienten

Aufeinanderfolgende Terme der Summe (4.36) sollen als Quotienten eine rationale Funktion haben. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Folgen, die durch Fakultäten oder Binomialkoeffizienten definiert sind, wie die beiden folgenden Sätze zeigen.

**Satz 4.16.** Der Quotient aufeinanderfolgender Folgenglieder der Folge  $c_k = (a + bk)!$  ist der ein Polynom vom Grad  $b$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{c_{k+1}}{c_k} &= \frac{(a + b(k+1))!}{(a + bk)!} = \frac{(a + bk + b)!}{(a + b)!} \\ &= (a + bk + 1)(a + bk + 2) \cdots (a + bk + b) = (a + bk + 1)_b \end{aligned}$$

Das Pochhammer-Symbol hat  $b$  Faktoren, es ist ein Polynom vom Grad  $b$ . □

**Satz 4.17.** Die Quotienten aufeinanderfolgender Werte der Binomialkoeffizienten

$$f_k = \binom{a + bk}{c + dk}$$

ist eine rationale Funktion von  $k$  mit Zähler- und Nennergrad  $b$ .

*Beweis.* Indem man die Binomialkoeffizienten mit Fakultäten als

$$\binom{a+bk}{c+dk} = \frac{(a+bk)!}{(c+dk)!(a-c+(b-d)k)!}$$

ausschreibt, findet man mit Satz 4.16 für die Quotienten

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{(a+bk+1)_b}{(c+dk+1)_d \cdot (a-c+(b-d)k+1)_{b-d}} \quad (4.37)$$

Die Pochhammer-Symbole sind Polynome vom Grad  $b$ ,  $d$  bzw.  $b-d$ . Insbesondere ist auch das Nenner-Polynom vom Grad  $d+(b-d)=b$ .  $\square$

Aus den Sätzen 4.16 und 4.17 folgt jetzt sofort, dass auch der Quotient aufeinanderfolgender Summanden der Summe (4.36) eine rationale Funktion von  $k$  ist.

#### 4.4.2 Die geometrische Reihe

Die Reihe

$$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

heisst die *geometrische Reihe* ist besonders einfache Reihe mit einer hypergeometrischen Folge von Termen. Die Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=0}^n aq^k$$

können aus der Differenz

$$(1-q)S_n = S_n - qS_n = \sum_{k=0}^n aq^k - \sum_{k=1}^{n+1} aq^k = a - aq^{n+1} \quad (4.38)$$

berechnet werden, die man nach

$$S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (4.39)$$

auflösen kann. Für  $q < 1$  geht  $q^n \rightarrow 0$  und damit konvergiert  $S_n$  gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a \frac{1}{1-q}.$$

Die geometrische Reihe ist charakterisiert dadurch, dass aufeinanderfolgende Terme den gleichen Quotienten

$$\frac{aq^{k+1}}{aq^k} = q$$

haben. Die Berechnung der Summe in (4.38) beruht darauf, dass die Multiplikation mit  $q$  einen “anderen” Teil der Summe ergibt, der sich in der Differenz weghebt.

### 4.4.3 Hypergeometrische Reihen

Es ist plausibel, dass eine etwas lockerere Bedingung an die Quotienten aufeinanderfolgender Terme einer Reihe immer noch ermöglichen wird, interessante Aussagen über die durch die Reihe beschriebenen Funktionen zu machen.

**Definition 4.18.** Eine durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

definierte Funktion  $f(x)$  heisst hypergeometrisch, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Koeffizienten eine rationale Funktion von  $k$  ist, wenn also

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p(k)}{q(k)}$$

mit Polynomen  $p(k)$  und  $q(k)$  ist.

#### Beispiele von hypergeometrischen Funktionen

Die geometrische Reihe ist natürlich eine hypergeometrische Reihe, wobei  $p(k)/q(k) = 1$  ist. Etwas interessanter ist die Exponentialfunktion, die durch die Taylor-Reihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

dargestellt werden kann. Der Quotient aufeinanderfolgender Koeffizienten ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1},$$

eine rationale Funktion mit Zählergrad 0 und Nennergrad 1.

Die Kosinus-Funktion wird durch die Taylor-Reihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

dargestellt. Als Potenzreihe in  $x$  kann die Kosinus-Reihe nicht hypergeometrisch sein, die ungeraden Koeffizienten verschwinden und damit undefinierte Quotienten haben. Als Reihe in  $z = x^2$  ist aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

hypergeometrisch, weil der Quotient aufeinanderfolgender Koeffizienten

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(-1)^k} = -\frac{1}{(2k+2)(2k+1)},$$

eine rationale Funktion mit Zählergrad 0 und Nennergrad 2. Es gibt also eine hypergeometrische Reihe  $f(z)$  derart, dass  $\cos x = f(x^2)$  ist.

## Die hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q$

Die Definition 4.18 einer hypergeometrischen Funktion wie auch die Verschiedenartigkeit der Beispiele können den Eindruck vermitteln, dass die diese Klasse von Funktionen unübersichtlich gross sein könnte. Dem ist jedoch nicht so. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass alle hypergeometrischen Funktionen durch die in Definition 4.19 definierten Funktionen  ${}_pF_q$  ausgedrückt werden. Die hypergeometrischen Funktionen können also vollständig parametrisiert werden.

Zu diesem Zweck sie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine hypergeometrische Funktion und seien  $p(k)$  und  $q(k)$  zwei Polynome derart, dass

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p(k)}{q(k)}.$$

Daraus lässt sich der Koeffizient  $a_{k+1}$  als

$$a_{k+1} = \frac{p(k)}{q(k)} \cdot a_k = \frac{p(k)}{q(k)} \cdot \frac{p(k-1)}{q(k-1)} \cdot a_{k-1} = \dots = \frac{p(k)}{q(k)} \frac{p(k-1)}{q(k-1)} \cdots \frac{p(1)}{q(1)} \frac{p(0)}{q(0)} a_0 \quad (4.40)$$

berechnen. Alle Koeffizienten haben also den Faktor  $a_0 = f(0)$  gemeinsam.

Die Produkte von Quotienten  $p(k)/q(k)$  sollen jetzt weiter vereinfacht werden. Sei  $n$  der Grad von  $p(k)$  und  $m$  der Grad von  $q(k)$ . Dazu nehmen wir an, dass  $a_i, i = 1, \dots, n$  die Nullstellen von  $p(k)$  sind und  $b_j, j = 1, \dots, m$  die Nullstellen von  $q(k)$ , dass man also die Polynome als

$$\begin{aligned} p(k) &= s(k - a_1)(k - a_2) \cdots (k - a_n) \\ q(k) &= (k - b_1)(k - b_2) \cdots (k - b_m) \end{aligned}$$

schreiben kann. Der Faktor  $s$  ist nötig, weil die Polynome  $p(k)$  und  $q(k)$  nicht notwendigerweise normiert sind.

Um das Produkt der Quotienten zu vereinfachen, nehmen wir für den Moment an, dass Zähler und Nenner vom Grad  $n = m = 1$  ist. Dann ist nach (4.40)

$$a_k = s^k \frac{(k-1-a_1) \cdots (2-a_1)(1-a_1)(0-a_1)}{(k-1-b_1) \cdots (2-b_1)(1-b_1)(0-b_1)} = \frac{(-a_1)_k}{(-b_1)_k} s^k.$$

Die Koeffizienten können daher als Quotienten von Pochhammer-Symbolen geschrieben werden. Für Polynome  $p(k)$  und  $q(k)$  höheren Grades sind die Koeffizienten von der Form

$$a_k = \frac{(-a_1)_k (-a_2)_k \cdots (-a_n)_k}{(-b_1)_k (-b_2)_k \cdots (-b_m)_k} s^k a_0.$$

Jede hypergeometrische Funktion kann daher in der Form

$$f(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a_1)_k (-a_2)_k \cdots (-a_n)_k}{(-b_1)_k (-b_2)_k \cdots (-b_m)_k} s^k x^k$$

geschrieben werden.

**Definition 4.19.** Die hypergeometrische Funktion  ${}_pF_q$  ist definiert durch die Reihe

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) = {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Da  $(1)_k = k!$  hätte die Definition den Nenner  $k!$  in der Reihe auch durch eines der Pochhammer-Symbole ausdrücken können. Wird dieser Nenner nicht gebraucht, kann man ihn durch einen zusätzlichen Faktor  $(1)_k$  im Zähler des Bruchs von Pochhammer-Symbolen kompensieren, wodurch sich der Grad  $p$  des Zählers natürlich um 1 erhöht.

Die oben analysierte Summe für  $f(x)$  kann mit der Definition 4.19 als

$$f(x) = a_0 \cdot {}_{n+1}F_m \left( \begin{matrix} -a_1, -a_2, \dots, -a_n, 1 \\ -b_1, -b_2, \dots, -b_m \end{matrix}; sx \right)$$

beschrieben werden.

### Elementare Rechenregeln

Die Funktionen  ${}_pF_q$  sind nicht alle unabhängig. In Abschnitt 4.4.5 wird gezeigt werden, dass Ableitung und Stammfunktion einer hypergeometrischen Funktion durch Manipulation der Parameter  $a_k$  und  $b_k$  bestimmt werden können. Viel einfacher sind jedoch die folgenden, aus Definition 4.19 offensichtlichen Regeln:

**Satz 4.20** (Permutationsregel). *Sei  $\pi$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $1, \dots, p$  und  $\sigma$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $1, \dots, q$ , dann ist*

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) = {}_pF_q \left( \begin{matrix} a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(p)} \\ b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(q)} \end{matrix}; x \right). \quad (4.41)$$

**Satz 4.21** (Kürzungsformel). *Stimmt einer der Koeffizienten  $a_k$  mit einem der Koeffizienten  $b_i$  überein, dann können sie weggelassen werden:*

$${}_{p+1}F_{q+1} \left( \begin{matrix} c, a_1, \dots, a_p \\ c, b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) = {}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right). \quad (4.42)$$

### 4.4.4 Beispiele von hypergeometrischen Funktionen

Viele der bekannten Reihenentwicklungen häufig verwendeter Funktionen lassen sich durch die hypergeometrischen Funktionen von Definition 4.19 ausdrücken. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele dazu gegeben.

#### Die geometrische Reihe

In der geometrischen Reihe fehlt der Nenner  $k!$ , es braucht daher einen Term  $(1)_k$  im Zähler, um den Nenner zu kompensieren. Somit ist die geometrische Reihe

$$\frac{a}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{k!} x^k = a \cdot {}_1F_0(1, x).$$

#### Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist die Reihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

In diesem Fall werden keine Quotienten von Pochhammer-Symbolen benötigt, es ist daher

$$e^x = {}_0F_0(x).$$

## Wurzelfunktionen

Die Wurzelfunktion  $x \mapsto \sqrt{x}$  hat keine Taylor-Entwicklung in  $x = 0$ , aber die Funktion  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  hat die Taylor-Reihe

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

Um die Verbindung zu einer hypergeometrischen Funktion herzustellen, müssen wir den Term  $x^k/k!$  abspalten. Dann wird

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1!} - \frac{1 \cdot 1}{2^2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2^3} \frac{x^3}{3!} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Es ist noch etwas undurchsichtig, warum die ersten beiden Terme das gleiche Vorzeichen haben und warum der Faktor  $\frac{1}{2}$  in jedem Term zweimal vorkommt. Diese Unklarheit kann jedoch beseitigt werden, wenn man den ersten Faktor als  $-\frac{1}{2}$  schreibt:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x}{1!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-x}{1!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-x)^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(-x)^3}{3!} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{(-x)^4}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind aufsteigende Produkte mit  $k$  Faktoren, die alle bei  $-\frac{1}{2}$  beginnen, sie können daher als Pochhammer-Symbole  $(-\frac{1}{2})_k$  geschrieben werden. Die Wurzelfunktion ist daher die hypergeometrische Funktion

$$\sqrt{1 \pm x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)_k \frac{(\pm x)^k}{k!} = {}_1F_0\left(-\frac{1}{2}; \mp x\right).$$

Mit der Newtonschen Binomialreihe, die in Abschnitt 5.2.2 hergeleitet wird, kann man ganz analog jede beliebige Wurzelfunktion

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!} x^k = {}_1F_0\left(\underline{\underline{\alpha}}; -x\right)$$

durch  ${}_1F_0$  ausdrücken. Dieses Resultat ist der Inhalt von Satz 5.2

## Logarithmusfunktion

Für  $x \in (-1, 1)$  konvergiert die Taylor-Reihe

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

der Logarithmusfunktion im Punkt  $x = 0$ . Die Reihe beginnt nicht mit einem konstanten Term, daher klammern wir zunächst einen Faktor  $x$  aus:

$$\log(1+x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right)$$

Um dies in die Form einer hypergeometrischen Funktion zu bringen, muss zunächst wieder der Nenner  $k!$  hergestellt werden.

$$\log(1+x) = x \cdot \left( 1 - \frac{1!}{2} \frac{x}{1!} + \frac{2!}{3} \frac{x^2}{2!} - \frac{3!}{4} \frac{x^3}{3!} + \dots \right).$$

Den Nenner  $k+1$  kann man als Quotienten  $k!/(k+1)!$  erhalten, also

$$\log(1+x) = x \cdot \left( 1 - \frac{(1!)^2}{2!} \frac{x}{1!} + \frac{(2!)^2}{3!} \frac{x^2}{2!} - \frac{(3!)^2}{4!} \frac{x^3}{3!} + \dots \right).$$

## Die Fakultät

$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1) = 2 \cdot (2+1) \cdot (2+2) \cdot \dots \cdot (2+k-2) \cdot (2+k-1) = (2)_k$$

ist auch ein Pochhammer-Symbol, so dass die Logarithmusfunktion zur hypergeometrischen Funktion

$$\log(1+x) = x \cdot \left( 1 + \frac{(1)_1(1)_1}{(2)_1} \frac{(-x)}{1!} + \frac{(1)_2(1)_2}{(2)_2} \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(1)_3(1)_3}{(2)_2} \frac{(-x)^3}{3!} + \dots \right) = x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix}; -x\right).$$

## Trigonometrische Funktionen

Die Kosinus-Funktion wurde bereits als hypergeometrische Funktion erkannt, im Folgenden soll dies auch noch für die Sinus-Funktion durchgeführt werden. Die Taylor-Reihe der Sinus-Funktion im Punkt 0 ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

In dieser Reihe fehlen die geraden Potenzen, wir Klammern daher einen Faktor  $x$  aus und schreiben den Rest als eine Funktion von  $-x^2$

$$\sin x = x \left( 1 + \frac{-x^2}{3!} + \frac{(-x^2)^2}{5!} - \frac{(-x^2)^3}{7!} + \dots \right) = xf(-x^2).$$

Die Funktion  $f(z)$  soll jetzt als hypergeometrische Funktion geschrieben werden. Dazu muss zunächst wieder der Nenner  $k!$  wiederhergestellt werden:

$$f(z) = 1 + \frac{1!}{3!} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{2!}{5!} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{3!}{7!} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Die Koeffizienten  $k!/(2k+1)!$  müssen jetzt durch Pochhammer-Symbole mit jeweils  $k$  Faktoren ausgedrückt werden. Dazu muss die Fakultät  $(2k+1)!$  in zwei Produkte

$$(2k+1)! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+1) = \underbrace{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k)}_{\text{gerade Faktoren}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+1))}_{\text{ungerade Faktoren}}$$

aufgespalten werden. Diese Produkte haben zwar jeweils  $k$  Faktoren, aber sie sind keine Pochhammer-Symbole, weil die Differenz aufeinanderfolgender Faktoren jeweils 2 ist. Wir dividieren sowohl die geraden Faktoren wie auch die ungeraden Faktoren durch 2, damit sich das Produkt nicht ändert, müssen wird mit  $2^{2k}$  kompensieren:

$$(2k+1)! = 2^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k) \cdot 2^k \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k+1}{2} \right)$$

$$= 4^k \cdot (1)_k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)_k$$

Setzt man dies in die Reihe ein, wird

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{(1)_k \cdot (\frac{3}{2})_k \cdot 4^k} z^k = {}_1F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{z}{4}\right) = {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{z}{4}\right). \quad (4.43)$$

Im letzten Schritt wurde die Kürzungsregel (4.42) von Satz 4.21 angewendet. Damit lässt sich die Sinus-Funktion als

$$\sin x = x \cdot {}_1F_2\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) = x \cdot {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) \quad (4.44)$$

durch eine hypergeometrische Funktion ausdrücken.

## Hyperbolische Funktionen

Die für die Sinus-Funktion angewendete Methode lässt sich auch auf die Funktion

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \dots\right)$$

Die Reihe in der Klammer lässt sich mit der Funktion  $f$  von (4.43) schreiben als

$$= x f(-x^2) = x \cdot {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right).$$

Bis auf das Vorzeichen des Arguments der hypergeometrischen Funktion ist diese Darstellung identisch mit der von  $\sin x$ . Dies illustriert die Rolle der hypergeometrischen Funktionen als “grosse Vereinheitlichung” der bekannten speziellen Funktionen.

## Tschebyscheff-Polynome

Man kann zeigen, dass auch die Tschebyscheff-Polynome sich durch die hypergeometrischen Funktionen

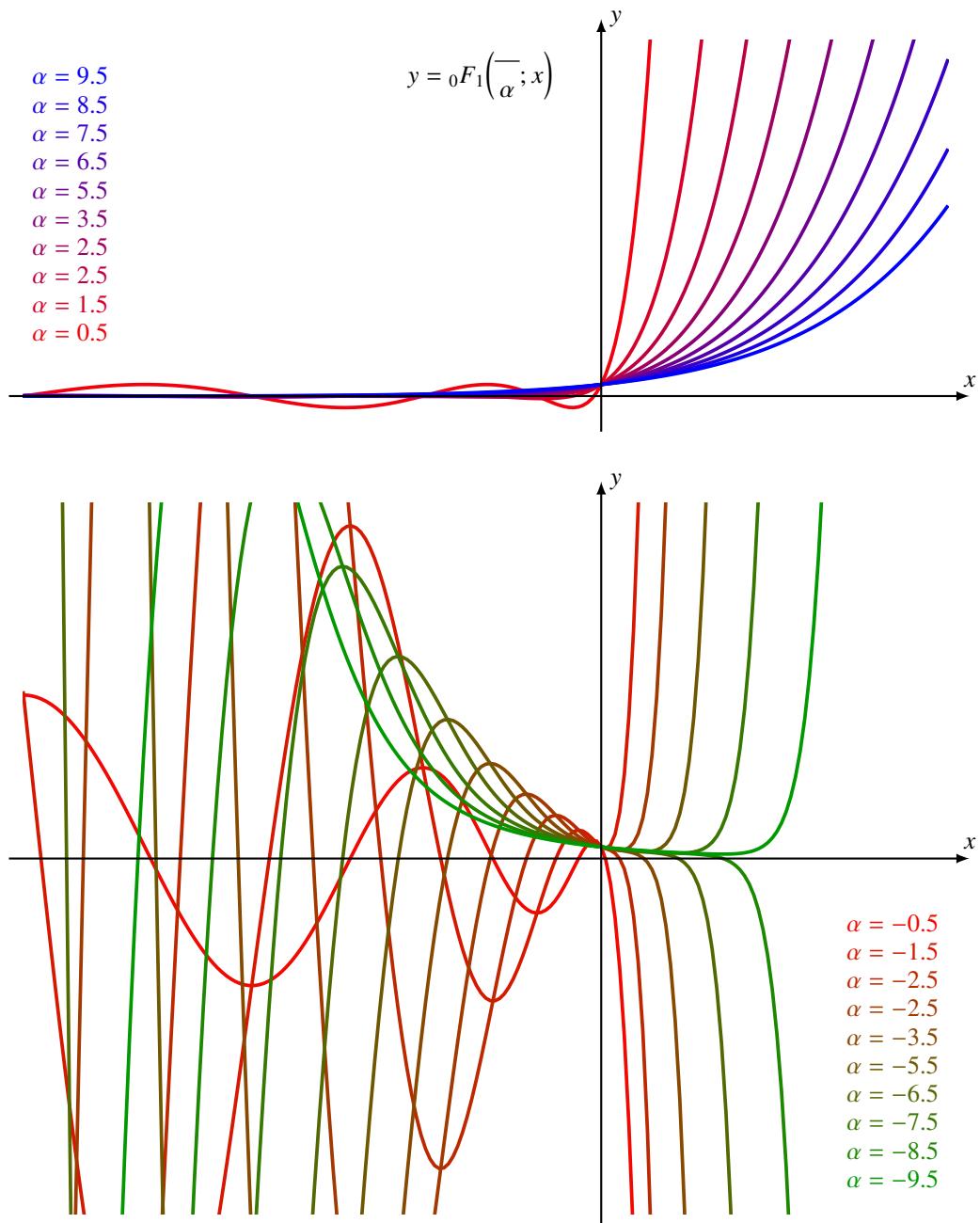
$$T_n(x) = {}_2F_1\left(\frac{-n, n}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(1-x)\right) \quad (4.45)$$

ausdrücken lassen. Beweisen kann man diese Beziehung zum Beispiel mit Hilfe der Differentialgleichungen, denen die Funktionen genügen. Diese Methode wird in Abschnitt 5.4 von Kapitel 5 vorgestellt.

Die Tschebyscheff-Polynome sind nicht die einzigen Familien von Polynomen, die sich durch  ${}_pF_q$  ausdrücken lassen. Für die zahlreichen Familien von orthogonalen Polynomen, die in Kapitel 7 untersucht werden, trifft dies auch zu. Ein Funktion

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z\right)$$

ist genau dann ein Polynom, wenn mindestens einer der Parameter  $a_k$  eine negative ganze Zahl ist. Der Grad des Polynoms ist der kleinste Betrag der negativ ganzzahligen Werte unter den Parametern  $a_k$ .

Abbildung 4.7: Graphen der Funktionen  ${}_0F_1(-; \alpha; x)$  für verschiedene Werte von  $\alpha$ .

## Die Funktionen ${}_0F_1$

Die Funktionen  ${}_0F_1$  sind in den Beispielen mit der beschränkten trigonometrischen Funktion  $\sin x$  und mit der exponentiell unbeschränkten Funktion  $\sinh x$  mit dem gleichen Wert des Parameters und nur einem Wechsel des Vorzeichens des Arguments verbunden worden. Die Graphen der Funktionen  ${}_0F_1$ , die in Abbildung 4.7 dargestellt sind, machen dieses Verhalten plausibel. Es wird sich später zeigen, dass  ${}_0F_1$  auch mit den Bessel- und den Airy-Funktionen verwandt sind.

### 4.4.5 Ableitung und Stammfunktion hypergeometrischer Funktionen

Sowohl Ableitung wie auch Stammfunktion einer hypergeometrischen Funktion lässt sich immer durch hypergeometrische Reihen ausdrücken.

#### Ableitung

Wir gehen aus von der Funktion

$$f(x) = {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix}; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot \dots \cdot (a_n)_k}{(b_1)_k \cdot \dots \cdot (b_m)_k} \frac{x^k}{k!}. \quad (4.46)$$

Die Ableitung von  $f(x)$  ist

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot \dots \cdot (a_n)_k}{(b_1)_k \cdot \dots \cdot (b_m)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1)_{k+1} \cdot \dots \cdot (a_n)_{k+1}}{(b_1)_{k+1} \cdot \dots \cdot (b_m)_{k+1}} \frac{x^k}{k!}.$$

Der Koeffizient besteht zwar aus lauter Pochhammer-Symbolen, aber sie haben jeweils zu einen Faktor zuviel. Indem man den jeweils ersten Faktor ausklammert, kann man die Terme wieder in die Form einer hypergeometrischen Reihe bringen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1(a_1)_k \cdot \dots \cdot a_n(a_n)_k}{b_1(b_1)_k \cdot \dots \cdot b_m(b_m)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot \dots \cdot b_m} \frac{(a_1 + 1)_k \cdot \dots \cdot (a_n + 1)_k}{(b_1 + 1)_k \cdot \dots \cdot (b_m + 1)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot \dots \cdot b_m} {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{matrix}; x\right). \end{aligned}$$

*Beispiel.* Die Kosinus-Funktion

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

kann wie folgt als hypergeometrische Funktion geschrieben werden. Der Nenner hat  $2k$  Faktoren, er muss also aus zwei Pochhammer-Symbolen zusammengesetzt werden. Dazu muss er erst um den Faktor  $2^{2k}$  gekürzt werden, was

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k}{2} = (\tfrac{1}{2})_k \cdot k!.$$

Damit kann jetzt die Kosinus-Funktion als

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)!} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2})_k} \frac{1}{k!} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^k = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)$$

geschrieben werden kann.

Die Ableitung der Kosinus-Funktion ist daher

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{2} {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = -x \cdot {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)$$

Dies stimmt mit der in (4.44) gefundenen Darstellung der Sinusfunktion mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion  ${}_0F_1$  überein, es ist also wie erwartet

$$= -\sin x.$$

○

## Stammfunktion

Eine Stammfunktion kann man auf die gleiche Art und Weise wie die Ableitung finden. Termweises Integrieren der Funktion (4.46) ergibt

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Wieder muss man die Pochhammer-Symbole durch solche mit einem zusätzlichen Faktor schreiben. Dies ist möglich, wenn keiner der Parameter  $a_i = 1$  und  $b_j = 1$  ist. Die Stammfunktion wird daher

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1 - 1)(a_1)_k \cdots (a_n - 1)(a_n)_k}{(b_1 - 1)(b_1)_k \cdots (b_m - 1)(b_m)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1 - 1)_{k+1} \cdots (a_n - 1)_{k+1}}{(b_1 - 1)_{k+1} \cdots (b_m - 1)_{k+1}} \frac{x^k}{k!} \\ &= {}_nF_m\left(a_1 - 1, \dots, a_n - 1; b_1 - 1, \dots, b_m - 1; x\right) - \frac{(a_1 - 1) \dots (a_n - 1)}{(b_1 - 1) \dots (b_m - 1)}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Der Term auf der rechten Seite kompensiert den konstanten Term, der in der hypergeometrischen Funktion  ${}_nF_m$  vorkommt, aber nicht in der Summe (4.47).

## 4.4.6 TODO

- Hypergeometrische Transformationen
- Gaußscher Kettenbruch [https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s\\_continued\\_fraction](https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s_continued_fraction)

## Übungsaufgaben

**4.1.** Finden Sie einen einfachen Ausdruck für  $(\frac{1}{2})_n$ , der nur Fakultäten und andere elementare Funktionen verwendet.

*Lösung.* Das Pochhammer-Symbol  $(\frac{1}{2})_n$  kann wie folgt durch bekantere Funktionen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2})_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} + 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} + n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^{2n}}. \end{aligned}$$

○

#### 4.2. Berechnen Sie

a)  $\Gamma(\frac{5}{2})$

b)  $\frac{\Gamma(\frac{16}{3})}{\Gamma(\frac{10}{3})}$

*Lösung.* a) Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion findet man

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

b) Ebenfalls unter Verwendung der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion findet man

$$\Gamma(\frac{16}{3}) = \frac{13}{3} \cdot \Gamma(\frac{13}{3}) = \frac{13}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot \Gamma(\frac{10}{3}) \Rightarrow \frac{\Gamma(\frac{16}{3})}{\Gamma(\frac{10}{3})} = \frac{13}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{130}{9} \approx 14.4444. \quad \text{○}$$

#### 4.3. Finden Sie eine Formel für $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$ für $n \in \mathbb{N}$ .

*Lösung.* Die Funktionalgleichung für die Gamma-Funktion bedeutet

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2} + n) &= (\frac{1}{2} + n - 1) \Gamma(\frac{1}{2} + n - 1) \\ &= (\frac{1}{2} + n - 1) (\frac{1}{2} + n - 2) \Gamma(\frac{1}{2} + n - 2) \\ &= (\frac{1}{2} + n - 1) (\frac{1}{2} + n - 2) \dots (\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \dots (\frac{1}{2} + n - 1) = \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})_n = \sqrt{\pi} \cdot (\frac{1}{2})_n. \end{aligned}$$

Mit dem Resultat von Aufgaben 4.1 kann jetzt das Pochhammer-Symbol durch bekantere Funktionen dargestellt und somit der gesuchte  $\Gamma$ -Funktionswert als

$$\Gamma(\frac{1}{2} + n) = \frac{(2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 2^{2n}}$$

geschrieben werden. ○

**4.4.** Schreiben Sie die Funktion

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1$ .

*Lösung.* Zunächst betrachten wir die Produkte

$$p_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}.$$

Durch Kürzen mit  $2^k$  erhalten wir Produkte im Zähler und im Nenner, deren Faktoren in Einerschritten ansteigen:

$$p_k = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + 1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} + k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{(\frac{1}{2})_k}{(1)_k} = \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!}$$

Damit haben wir den ersten Faktor mit Pochhammer-Symbolen geschrieben. Den Nenner können wir für den obligatorischen Nenner  $k!$  verwenden, der in einer hypergeometrischen Reihe vorkommt.

Den verbleibenden Teil muss jetzt in der Form  $qz^k$  geschrieben werden, wobei  $q$  ein Quotient von Pochhammer-Symbolen sein muss. Da die Potenzen von  $x$  in Zweierschritten ansteigen, müssen wir als Argument  $z = x^2$  verwenden und einen gemeinsamen Faktor  $x$  aus der Funktion ausklammern.

Im Faktor  $1/(2k+1)$  nimmt der Nenner in Zweierschritten zu, wir schreiben ihn daher zunächst als

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2} + k - 1}.$$

Den zweiten Bruch können wir jetzt als Quotienten von Pochhammer-Symbolen schreiben, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{3}{2} + k - 1} &= \frac{\frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 1) \cdot (\frac{3}{2} + 2) \cdots (\frac{3}{2} + k - 2)}{\frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 1) \cdot (\frac{3}{2} + 2) \cdots (\frac{3}{2} + k - 2) \cdot (\frac{3}{2} + k - 1)} \\ &= 2 \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 1) \cdot (\frac{3}{2} + 2) \cdots (\frac{3}{2} + k - 2)}{\frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 1) \cdot (\frac{3}{2} + 2) \cdots (\frac{3}{2} + k - 2) \cdot (\frac{3}{2} + k - 1)} \\ &= 2 \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k}. \end{aligned}$$

Damit wird die Reihe

$$\arcsin x = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(1)_k} \cdot \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} \cdot (x^2)^k = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k (\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} \cdot \frac{(x^2)^k}{k!} = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right). \quad \circlearrowright$$

**4.5.** Schreiben Sie die Potenzreihe

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

als

$$\arctan x = x \left( \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} (-x^2)^0 + \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} (-x^2)^1 + \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} (-x^2)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 + 1} (-x^2)^3 \right) = x f(-x^2),$$

mit der Funktion

$$f(z) = 1 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{5}z^2 + \frac{1}{7}z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} z^k.$$

Schreiben Sie  $f(z)$  mit Hilfe der hypergeometrischen Reihe  ${}_2F_1$ .

*Hinweis.* Verwenden Sie dazu  $(\frac{1}{2})_k$  und  $(\frac{3}{2})_k$ .

*Lösung.* Gemäss dem Hinweis betrachtet man

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2})_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2} \\ (\frac{3}{2})_k &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k+1}{2}. \end{aligned}$$

Da beide Pochhammer-Symbole jeweils  $k$  Faktoren 2 im Nenner haben, kürzen sich diese im Quotienten alle weg. Der Quotient ist daher

$$\frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} = \frac{1}{2k+1},$$

also genau der Nenner, den wir für die Potenzreihe von  $f(z)$  brauchen. Somit ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} z^k.$$

Man könnte versucht sein zu schliessen, dass  $f(z) = {}_1F_1(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z)$  sei, dies ist aber nicht korrekt, da in der hypergeometrischen Reihe immer auch ein Nenner  $k!$  vorkommt. Wir brauchen daher einen zusätzlichen Faktor  $(a_2)_k$ , der sich gegen  $k!$  wegkürzen lässt, oder

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k (a_2)_k z^k}{(\frac{3}{2})_k k!}.$$

Dies geht natürlich nur, wenn  $(a_2)_k = k!$ , also  $a_2 = 1$ . Somit ist die gesuchte Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k (1)_k z^k}{(\frac{3}{2})_k k!} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right).$$

Damit kann man jetzt den Arkustangens schreiben als

$$\arctan x = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

○



# Kapitel 5

## Differentialgleichungen

Allgemeine Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen garantieren für fast jeder einigermassen vernünftige Gleichung mindestens für kurze Zeit eine eindeutige Lösung für fast jede Anfangsbedingung. Die Konstruktion solcher Lösungen stellt sich jedoch als deutlich schwieriger heraus.

Für einzelne Kategorien von Differentialgleichungen sind gut funktionierende Lösungsverfahren gefunden worden, zum Beispiel für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Damit konnten auch Gleichungen gelöst werden, die sich zum Beispiel durch eine Variablentransformation auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten reduzieren lassen, wie die Eulersche Differentialgleichung.

Die Methode der Separation der Variablen liefert führt die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung auf die Bestimmung zweier Stammfunktionen und deren Invertierung zurück. Dieses Verfahren ist jedoch nicht auf Vektordifferentialgleichungen oder auf Differentialgleichungen höherer Ordnung verallgemeinerungsfähig.

Daneben gibt es eine Reihe von “Spezialfällen” wie die Clairaut-Differentialgleichung oder die damit verwandte Lagrangesche Differentialgleichung, deren Lösung eine sehr spezielle Form haben.

Sehr viele Differentialgleichungen in den Anwendungen können aber mit keinem der genannten Verfahren gelöst werden. Hier bleibt nichts anderes übrig, als neue spezielle Funktionen zu definieren, die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind. Dabei ist man bestrebt, möglichst universell einsetzbare Funktionen zu definieren, die ein breites Anwendungsfeld haben.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst gezeigt, dass viele der bereits bekannten speziellen Funktionen ebenfalls als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten werden können. Die numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist oft keine effizientes Vorgehen zur Bestimmung von einzelnen Werten, daher wird in Abschnitt 5.2 eine universelle Methode vorgestellt, mit der eine Potenzreihenentwicklung gefunden werden kann. Eine Potenzreihendarstellung ermöglicht nicht nur die Berechnung einzelner Werte, sondern auch beliebiger Ableitungen und die analytische Untersuchung der Funktion mit den Methoden der komplexen Analysis. Als Beispiel für dieses Verfahren werden in Abschnitt 5.3 die Bessel-Funktionen erster Art vorgestellt.

### 5.1 Beispiele

Viele der bisher betrachteten speziellen Funktionen können durch gewöhnliche Differentialgleichungen charakterisiert werden, als deren Lösungen sie auftreten.

### 5.1.1 Potenzen und Wurzeln

Die Potenzfunktionen und die zugehörigen Wurzeln als die ältesten speziellen Funktionen bieten bereits eine erste kleine Schwierigkeit. Die Differentialgleichung, die man aus einem naiven Ansatz ableitet, ist singulär.

#### Differentialgleichung in $(0, \infty)$

Die Ableitung einer Potenzfunktion  $x \mapsto y(x) = x^\alpha$  ist

$$y'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \alpha \neq -1 \\ \log x & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Folgenden wollen wir uns auf den Fall  $\alpha \neq -1$  konzentrieren. Die Ableitungsoperation läuft in diesem Fall darauf hinaus, dass der Grad um 1 reduziert wird. Dies könnte man mit einem Faktor  $x$  komponieren. Wir fragen daher nach der allgemeinen Lösung der linearen Differentialgleichung der Form

$$xy' = \alpha y. \quad (5.1)$$

Diese Gleichung ist separierbar, die Separation von  $x$  und  $y$  liefert die Integrale

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha \int \frac{dx}{x} + C.$$

Die Durchführung der Integration liefert

$$\log |y| = \alpha \log |x| + C.$$

Wendet man die Exponentialfunktion an, erhält man wieder

$$y = Dx^\alpha, \quad D = \exp C.$$

Die Differentialgleichung (5.1) hat aber eine schwerwiegenden Mangel. Ihre explizite Form lautet

$$y' = \frac{\alpha}{x} \cdot y. \quad (5.2)$$

Dies ist zwar durchaus eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, aber der Koeffiziente  $\alpha/x$  wächst für  $x \rightarrow 0$  über alle Grenzen. Man kann daher den Wert der Potenzfunktion im Nullpunkt gar nicht aus der Differentialgleichung erhalten, es ist dazu mindestens noch ein Grenzübergang  $x \rightarrow 0+$  nötig.

#### Differentialgleichung in der Nähe von $x = 1$

Um dem Problem des singulären Koeffizienten der Differentialgleichung (5.2) aus dem Weg zu gehen, verwenden wir die Variable  $t$  mit  $x = 1 + t$  und versuchen eine Differentialgleichung für die Potenzfunktion  $(1+t)^\alpha$  zu finden. Es gilt natürlich

$$\frac{d}{dt}(1+t)^\alpha = \alpha(1+t)^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad (1+t)\dot{y} = \alpha y. \quad (5.3)$$

Diese Differentialgleichung kann natürlich auch wieder mit Separation gelöst werden, es ist

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha \int \frac{dt}{1+t} + C \quad \Rightarrow \quad \log |y| = \alpha \log |1+t| + C \quad (5.4)$$

und daraus die Potenzfunktion

$$y = D(1 + t)^\alpha$$

wie vorhin. Der Vorteil der Form (5.3) wird sich später bei dem Versuch zeigen, die Funktion  $y(t)$  direkt als Potenzreihenlösung der Differentialgleichung zu finden.

## 5.1.2 Exponentialfunktion und ihre Varianten

In Kapitel 2 wurde die Exponentialfunktion auf algebraische Weise definiert, die Berechnung wurde ermöglicht mit Hilfe von Grenzwerten und Potenzreihen. Dabei blieb die Ableitung der Exponentialfunktion aussen vor. Die Exponentialfunktion lässt sich aber natürlich auch über Differentialgleichungen charakterisieren.

### Die Ableitung der Exponentialfunktion

Aus der Potenzreihendarstellung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

folgt sofort, dass die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}(k-1)! = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x),$$

wobei  $l = k - 1$  gesetzt wurde. Die Exponentialfunktion ist also ihre eigene Ableitung.

### Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Mit der Exponentialfunktion lassen sich beliebige homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen. Sei die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

gegeben. Mit dem Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  ergibt sich die Gleichung

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \cdots + a_2\lambda^2e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

Da  $e^{\lambda x} \neq 0$  ist, kann  $y(x)$  nur dann eine Lösung sein, wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

ist.

### Ableitungen der trigonometrische Funktionen

Die Drehmatrix

$$D_{\omega t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung der Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Der Punkt  $(r, 0)$  beschreibt unter dieser Drehung eine Kreisbahn parametrisiert durch

$$t \mapsto \gamma(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t).$$

Der Geschwindigkeitsvektor zur Zeit  $t$  ist natürlich

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \end{pmatrix},$$

zu einer späteren Zeit  $t$  ist er

$$\vec{v}(t) = D_{\omega t} \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Gleichzeitig ist  $\vec{v}'(t)$  natürlich auch die Ableitung von  $\gamma(t)$ , also

$$\dot{\gamma}(t) = r \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t \\ \frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t \end{cases}$$

Dies bedeutet, dass die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin t &= \cos t \\ \frac{d}{dt} \cos t &= -\sin t \end{aligned} \tag{5.5}$$

### Differentialgleichung für trigonometrische Funktionen

Aus den Ableitungen (5.5) folgt, dass die trigonometrischen Funktionen  $\sin t$  und  $\cos t$  Lösungen der Differentialgleichung  $y'' = -y$  sind. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$y_{\pm}(t) = e^{\pm it}.$$

Da eine Differentialgleichung zweiter Ordnung nur zwei linear unabhängige Lösungen haben kann, müssen sich  $\sin t$  und  $\cos t$  durch  $e^{\pm it}$  ausdrücken lassen.

Die Kosinus-Funktion zeichnet sich dadurch aus, dass  $\cos 0 = 1$  und  $\cos' 0 = 0$  ist. Gesucht ist also eine Lösung der Linearkombination der Lösungen  $y_{\pm}$  der Differentialgleichung mit diesen Anfangswerten. Zunächst halten wir fest, dass  $y_{\pm}(0) = e^{\pm i \cdot 0} = 1$ . Für die Ableitungen von  $y^{\pm it}$  gilt

$$\frac{d}{dt} e^{\pm it} = e^{\pm it} = \pm ie^{\pm it} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} y_{\pm}(0) = \pm i.$$

Die Linearkombination  $Ay_+(t) + By_-(t)$  hat die Anfangswerte

$$\begin{aligned} Ay_+(0) + By_-(0) &= A + B \\ Ay'_+(0) + By'_-(0) &= Ai - Bi. \end{aligned}$$

Damit die Linearkombination  $\cos t = Ay_+(t) + By_-(t)$  ist, müssen  $A$  und  $B$  Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} A + & B = 1 \\ iA - & iB = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A + & B = 1 \\ A - & B = 0 \end{array}$$

Die Summe und Differenz der beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned} 2A = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ 2B = 1 & \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Andererseits hat die Sinus-Funktion die Anfangswerte  $\sin 0 = 0$  und  $\sin' 0 = 1$ , dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} A + B = 0 \\ iA - iB = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{i} \end{array}$$

Diesemal führen Summe und Differenz der beiden Gleichungen auf

$$\begin{array}{rcl} 2A = \frac{1}{i} \\ 2B = -\frac{1}{i} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A = \frac{1}{2i} \\ B = -\frac{1}{2i} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

### Potenzreihen für $\sin t$ und $\cos t$

Aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion kann man jetzt auch Potenzreihen für  $\sin t$  und  $\cos t$  ableiten. Zunächst ist

$$\begin{aligned} y_+(t) &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \dots \\ y_-(t) &= 1 - it - \frac{t^2}{2!} + \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{it^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen können daraus linear kombiniert werden, zum Beispiel ist die Kosinus-Funktion

$$\cos t = \frac{y_+(t) + y_-(t)}{2} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Auf die gleiche Art findet man für die Sinus-Funktion

$$\sin t = \frac{y_+(t) - y_-(t)}{2i} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

### Hyperbolische Funktionen

Die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen sind

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t \\ \frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \sinh t = \sinh t \\ \frac{d^2}{dt^2} \cosh t = \cosh t \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Man beachte die Ähnlichkeit zu den entsprechenden Formeln (5.5) für die trigonometrischen Funktionen. Die hyperbolischen Funktionen sind also linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y = 0. \quad (5.7)$$

Das charakteristische Polynom von (5.7) ist

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

mit den Nullstellen  $\pm 1$ . Die Lösungen von (5.7) müssen also Linearkombinationen von  $y_{\pm}(x) = e^{\pm x}$  sein. Wir schreiben  $y(x) = Ay_+(x) + By_-(x)$ .

Die Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_+(0) & y_-(0) \\ y'_+(0) & y'_-(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

kann mit Hilfe der inversen Matrix aufgelöst werden.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

Für die Standardbasisvektoren als Anfangswerte findet man jetzt wie bei den trigonometrischen Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow y(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Die Ableitung der Matrix  $H_\tau$  von Satz 3.6 ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} H_\tau &= \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh \tau & \cosh \tau \\ \cosh \tau & \sinh \tau \end{pmatrix} \\ \left. \frac{d}{d\tau} H_\tau \right|_{\tau=0} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K, \end{aligned}$$

wobei die Matrix von (3.3) ist.

## 5.2 Potenzreihenmethode

Die Potenzreihenmethode versucht die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung als Potenzreihe um die Anfangsbedingung zu entwickeln. Wir gehen in diesem Abschnitt von einer Differentialgleichung der Form

$$b_n(x)y^{(n)}(x) + b_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y(x) = f(x) \quad (5.8)$$

mit der Randbedingung  $y(0) = y_0$  aus. Schon im einfachsten Fall einer homogenen Differentialgleichung erster Ordnung ergibt sich die Beziehung

$$b_1(x)y'(x) = b_0(x)y(x),$$

wobei wir uns  $y(x)$  und damit auch  $y'(x)$  als Potenzreihe vorstellen. Insbesondere ist

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = \frac{y(x)}{y'(x)}$$

ein Quotient von Potenzreihen, den man natürlich wieder als Potenzreihe schreiben kann. Da es nur auf den Quotienten ankommt, kann man sich auf den Fall beschränken, dass die Koeffizienten Potenzreihen sind. Tatsächlich gilt der folgende sehr viel allgemeinere Satz von Cauchy und Kowalevskaja:

**Satz 5.1** (Cauchy-Kowalevskaja). *Eine partielle Differentialgleichung der Ordnung  $k$  für eine Funktion  $u(x_1, \dots, x_n, t) = u(x, t)$  in expliziter Form*

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} = G\left(x, t, \frac{\partial^j \partial^\alpha}{\partial t^j \partial x^\alpha}\right) \quad \text{mit } j < k \text{ und } |\alpha| + j \leq k$$

mit einer Funktion  $G$ , die analytisch ist in allen Variablen und der Randbedingung

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, 0) = \varphi_j(x) \quad \text{für } k = 0, \dots, k-1$$

mit analytischen Funktion  $\varphi_j$  hat eine in einer Umgebung von  $t = 0$  eindeutige analytische Lösung.

Im folgenden werden wir daher weitere einschränkende Annahmen über die Koeffizienten  $b_k(x)$  machen.

### 5.2.1 Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich

In Abschnitt 5.1 wurde von einer grossen Zahl interessanter Funktionen gezeigt, dass sie einerseits eine Lösungen einer Differentialgleichung sind, andererseits aber auch eine Potenzreihendarstellung sind. Der Satz von Cauchy-Kowalevskaja hat gezeigt, dass dies das zu erwartende Resultat ist.

Da wir bei einer linearen Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten eine analytische Lösungsfunktion erwarten dürfen, können wir auch versuchen, die Lösung der Differentialgleichung von Anfang an als Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

anzusetzen. Die Ableitungen von  $y(x)$  sind gleichermassen als Potenzreihen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)_n a_k x^{k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)_n a_{l+n} x^l \end{aligned}$$

darstellbar.

Der Ansatz für  $y(x)$  und seine Ableitungen kann jetzt in die Differentialgleichung eingesetzt werden. Durch Ausmultiplizieren wird die Differentialgleichung zu einer Identität von Potenzreihen. Zwei Potenzreihen können nur dann übereinstimmen, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen. So entsteht eine Menge von linearen Gleichungen für die Koeffizienten  $a_k$ . Die Koeffizienten  $a_0$  bis

$a_{n-1}$  werden gegeben durch die Anfangswerte der Funktion und der ersten  $n - 1$  Ableitungen, die ebenfalls nötig sind, um die Lösungsfunktion eindeutig festzulegen. Durch Lösen des linearen Gleichungssystems können jetzt die Koeffizienten und damit die Lösung bestimmt werden.

Setzt man zum Beispiel voraus, dass  $b_n(0) \neq 0$  ist, dann ist der konstante Term

$$b_n(0)n!a_n + b_{n-1}(0)(n-1)!a_{n-1} + \cdots + b_2(0)2!a_2 + b_1(0)a_1 + b_0(0)a_0 = 0. \quad (5.9)$$

Diese Gleichung ermöglicht, nach  $a_n$  aufzulösen:

$$a_n = -\frac{1}{b_n(0)n!}(b_{n-1}(0)(n-1)!a_{n-1} + \cdots + b_2(0)2!a_2 + b_1(0)a_1 + b_0(0)a_0).$$

Falls jedoch der Koeffizient  $b_n(x)$  eine Nullstelle bei  $x = 0$  hat, ist es mit Gleichung (5.9) allein nicht möglich,  $a_n$  zu bestimmen.

Ein besonders einfacher Fall ist jener, in dem alle Koeffizienten der Differentialgleichung konstant sind. In diesem Fall führen die Koeffizienten von  $x^k$  auf die Gleichung

$$b_n n! a_{n+k} + b_{n-1}(n-1)! a_{n-1+k} + \cdots + b_2 2! a_{2+k} + b_1 a_{1+k} + b_0 a_k = 0. \quad (5.10)$$

für alle  $k$ . Die Gleichungen sind also immer lösbar und ergeben

$$a_{n+k} = -\frac{1}{b_n n!}(b_{n-1}(n-1)! a_{n-1+k} + \cdots + b_2 2! a_{2+k} + b_1 a_{1+k} + b_0 a_k).$$

### 5.2.2 Die Newtonsche Reihe

Wir lösen die Differentialgleichung (5.3) mit der Anfangsbedingung  $y(t) = 1$  mit der Potenzreihenmethode. Wir setzen daher für die Lösung die Potenzreihe an

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_k t^k + \dots$$

Die Ableitung ist

$$\dot{y}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + k a_k t^{k-1} + \dots$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (5.3) liefert

$$(1+t)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + k a_k t^{k-1} + \dots) = \alpha(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_k t^k + \dots) \\ a_1 + (a_1 + 2a_2)t + (2a_2 + 3a_3)t^2 + (3a_3 + 4a_4)t^3 + \dots = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \alpha a_3 t^3 + \dots$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha a_0 \\ a_1 + 2a_2 &= \alpha a_1 \quad \Rightarrow \quad 2a_2 = (\alpha - 1)a_1 \\ 2a_2 + 3a_3 &= \alpha a_2 \quad \Rightarrow \quad 3a_3 = (\alpha - 2)a_2 \\ 3a_3 + 4a_4 &= \alpha a_3 \quad \Rightarrow \quad 4a_4 = (\alpha - 3)a_3 \\ 4a_4 + 5a_5 &= \alpha a_4 \quad \Rightarrow \quad 5a_5 = (\alpha - 4)a_4 \\ &\vdots \\ (k+1)a_{k+1} &= (\alpha - k)a_k \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1}a_k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Rekursionsformel (5.11) gilt auch im Fall  $k = 0$ . Aus der Anfangsbedingung folgt  $a_0 = 1$ . Durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformel (5.11) erhalten wir jetzt die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \alpha \\ a_2 &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} \\ a_3 &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ a_4 &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!}. \end{aligned}$$

Für ganzzahliges  $\alpha$  ist  $a_k$  der Binomialkoeffizient

$$a_k = \binom{\alpha}{k}$$

und  $a_k = 0$  für  $k > \alpha$ . Für nicht ganzzahliges  $\alpha$  sind alle Koeffizienten  $a_k \neq 0$ .

Die Lösung der Differentialgleichung (5.3) ist daher die Reihe

$$(1 + t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} t^k. \quad (5.12)$$

Für ganzzahliges  $\alpha$  wird daraus die binomische Formel

$$(1 + t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} t^k.$$

### Lösung als hypergeometrische Funktion

Die Newtonreihe verwendet ein absteigendes Produkt im Zähler. Man kann sie aber in eine Form bringen, die besser zu den aufsteigenden Produkten bringen, die wir im Zusammenhang mit der Gamma-Funktion angetroffen und als Pochhammer-Symbole formalisiert haben.

Eine hypergeometrische Funktion zeichnet sich dadurch aus, dass die Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten der Reihe rationale Funktionen von  $k$  sind. Der Quotient ist nach (5.11)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{k + 1}.$$

Der Nenner wird nie 0, aber das Zählerpolynom hat genau die Nullstelle  $-\alpha$ . Die Newtonsche Reihe muss sich daher als Wert der hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_0$  schreiben lassen.

Das Produkt im Zähler von  $a_k$  hat  $k$  Faktoren, indem wir jeden Faktor mit  $-1$  multiplizieren, erhalten wir

$$\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1) = (-\alpha)(-\alpha + 1)(-\alpha + 2) \dots (-\alpha + k - 1)(-1)^k$$

$$= (-\alpha)_k (-1)^k.$$

Indem wir den Faktor  $-1$  in der Variablen absorbieren, erhalten wir die Darstellung

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)_k \frac{(-t)^k}{k!}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz gezeigt.

**Satz 5.2.** *Die Newtonsche Reihe für  $(1-t)^\alpha$  ist der Wert*

$$(1-t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)_k \frac{t^k}{k!} = {}_1F_0(-\alpha; t)$$

der hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_0$ .

### 5.2.3 Lösung mit verallgemeinerten Potenzreihen

In vielen Anwendungsfällen hat die Differentialgleichung die Form

$$x^2 y'' + p(x)xy' + q(x)y = 0, \quad (5.13)$$

gesucht ist eine Lösung  $y(x)$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Für die folgende Diskussion nehmen wir an, dass sich die Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  in konvergente Potenzreihen

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

entwickeln lassen.

#### Die Potenzreihenmethode funktioniert nicht

Für die Differentialgleichung (5.13) funktioniert die Potenzreihenmethode oft nicht. Sind die Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  zum Beispiel Konstante  $p(x) = p_0$  und  $q(x) = q_0$ , dann führt der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

auf die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} + p_0 x \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} + q_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + p_0 k + q_0) a_k x^k &= 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt dann, dass für jedes  $k$  mindestens eine der Gleichungen

$$k(k-1) + p_0 k + q_0 = k^2 + (p_0 - 1)k + q_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_k = 0$$

erfüllt sein muss. Die erste Gleichung ist eine quadratische Gleichung in  $k$ , es gibt also höchstens zwei Koeffizienten, für die die erste Gleichung erfüllt sein kann, für die also auch die Koeffizienten  $a_k \neq 0$  sein können. Sind die Lösungen nicht ganzzahlig, dann müssen alle Koeffizienten  $a_k = 0$  sein, die einzige Potenzreihe ist die triviale Funktion  $y(x) = 0$ .

### Verallgemeinerte Potenzreihe

Für Differentialgleichungen der Art (5.13) ist also ein anderer Ansatz nötig. Ursache für das Versagen des Potenzreihenansatzes ist, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung bei  $x = 0$  eine Singularität haben. Ist ist daher damit zu rechnen, dass auch die Lösung  $y(x)$  an dieser Stelle singuläres Verhalten zeigen wird. Die Terme einer Potenzreihe um den Punkt  $x = 0$  sind nicht singulär, können eine solche Singularität also nicht wiedergeben. Der neue Ansatz sollte ähnlich einfach sein, aber auch gewisse "einfache" Singularitäten darstellen können. Die Potenzfunktionen  $x^\varrho$  mit  $\varrho < 1$  erfüllen beide Anforderungen.

**Definition 5.3.** Eine verallgemeinerte Potenzreihe ist eine Funktion der Form

$$y(x) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k} \quad (5.14)$$

mit  $a_0 \neq 0$ .

Die Forderung  $a_0 \neq 0$  kann nötigenfalls durch Modifikation des Exponenten  $\varrho$  immer erreicht werden.

Wir verwenden also eine verallgemeinerte Potenzreihe der Form (5.14) als Lösungsansatz für die Differentialgleichung (5.13). Wir berechnen die Ableitungen von  $y(x)$  und um sie in der Differentialgleichung einzusetzen, versehen wir sie auch gleich mit den benötigten Potenzen von  $x$ . So erhalten wir

$$\begin{aligned} xy'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k) a_k x^{\varrho+k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\varrho + k - 1) a_{k-1} x^{\varrho+k} \\ x^2 y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k)(\varrho + k - 1) a_k x^{\varrho+k}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke setzen wir jetzt in die Differentialgleichung (5.13) ein, die dadurch zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k)(\varrho + k - 1) a_k x^{\varrho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (\varrho + k) p_l a_k x^{\varrho+k+l} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} q_l a_k x^{\varrho+k+l} = 0 \quad (5.15)$$

wird.

Ausgeschrieben geben die einzelnen Terme

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho(\varrho - 1)a_0 x^\varrho + (\varrho + 1)\varrho a_1 x^{\varrho+1} + (\varrho + 2)(\varrho + 1)a_2 x^{\varrho+2} + (\varrho + 3)(\varrho + 2)a_3 x^{\varrho+3} + \dots \\ &\quad + \varrho p_0 a_0 x^\varrho + ((\varrho + 1)a_1 p_0 + \varrho a_0 p_1)x^{\varrho+1} + ((\varrho + 2)a_2 p_0 + (\varrho + 1)a_1 p_1 + \varrho a_0 p_2)x^{\varrho+2} + \dots \end{aligned}$$

$$+ q_0 a_0 x^\varrho + (q_0 a_1 + q_1 a_0) x^{\varrho+1} + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0) x^{\varrho+2} + (q_0 a_3 + q_1 a_2 + q_2 a_1 + q_3 a_0) x^{\varrho+3} + \dots$$

Fasst man die Terme mit gleichem Exponenten zusammen, findet man

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0)a_0 x^\varrho \\ &+ (((\varrho + 1)\varrho + (\varrho + 1)p_0 + q_0)a_1 + (\varrho p_1 + q_1)a_0)x^{\varrho+1} \\ &+ (((\varrho + 2)(\varrho + 1) + (\varrho + 2)p_0 + q_0)a_2 + (\varrho + 1)p_1 a_1 + \varrho p_2 a_0 + q_1 a_1 + q_2 a_0)x^{\varrho+2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0)a_0 \\ 0 &= ((\varrho + 1)\varrho + \varrho p_0 + q_0)a_1 + (\varrho p_1 + q_1)a_0 \\ 0 &= ((\varrho + 2)(\varrho + 1) + \varrho p_0 + q_0)a_2 + ((\varrho + 1)p_1 + q_1)a_1 + (\varrho p_2 + q_0)a_0 \end{aligned}$$

Diese Rechnung kann man auch allgemein durchführen. Für den Koeffizientenvergleich müssen die Terme in (5.15) mit gleicher Potenz  $x^{\varrho+n}$  zusammengefasst werden. Dazu schreiben wir zunächst die Summen alle so, dass die Potenz von  $x$  in der Form  $x^{\varrho+n}$  auftritt. So entsteht die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varrho + n)(\varrho + n - 1)a_n x^{\varrho+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n (\varrho + n - l)p_{n-l}a_l \right) x^{\varrho+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n q_{n-l}a_l \right) x^{\varrho+n} = 0$$

Jetzt kann der Koeffizientenvergleich durchgeführt werden. Der Koeffizient von  $x^{\varrho+n}$  ist

$$(\varrho + n)(\varrho + n - 1)a_n x^{\varrho+n} + \sum_{l=0}^n (\varrho + n - l)p_{n-l}a_l + \sum_{l=0}^n q_{n-l}a_l.$$

Alle diese Koeffizienten müssen verschwinden. Indem wir die Terme in den beiden Summen über  $l$  zusammenfassen, erhalten wir die Gleichungen

$$((\varrho + n)(\varrho + n - 1) + \varrho p_0 + q_0)a_n + \sum_{l=0}^{n-1} ((\varrho + n - l)p_{n-l} + q_{n-l})a_l = 0, \quad (5.16)$$

die für jedes  $n$  erfüllt sein müssen.

### Indexgleichung

Die Gleichungen (5.16) müssen erfüllt sein, wenn eine Lösung in Form einer verallgemeinerten Potenzreihe existieren soll. Der Koeffizient  $a_n$  mit dem grössten  $n$  in jeder Gleichung hat den gemeinsamen Faktor  $F(\varrho + n)$  für das Polynom

$$F(X) = X(X + 1) + Xp_0 + q_0.$$

Da wir in der Definition einer verallgemeinerten Potenzreihe vorausgesetzt haben, dass  $a_0 \neq 0$  sein muss, ist der Ansatz überhaupt nur dann erfolgreich, wenn

$$F(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0 = 0 \quad (5.17)$$

gilt. Die Gleichung (5.17) heisst die *Indexgleichung*. Der Exponent  $\varrho$  muss also eine Nullstelle der Indexgleichung sein.

Die Indexgleichung ist eine quadratische Gleichung und hat daher im allgemeinen zwei Lösungen. Wir bezeichnen die beiden Nullstellen mit  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Wenn  $p_0$  und  $q_0$  reell sind, sind die Nullstellen entweder reell oder konjugiert komplex.

### Rekursive Bestimmung der $a_n$

Der Koeffizient  $a_n$  kann nur dann aus den vorangegangene Koeffizienten  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$  bestimmt werden, wenn  $F(\varrho + n) \neq 0$  ist. In diesem Fall gilt

$$a_n = \frac{1}{F(\varrho + n)} \sum_{l=0}^{n-1} ((\varrho + n - l)p_{n-l} + q_{n-l})a_l. \quad (5.18)$$

Dies funktioniert aber nur, wenn  $F(\varrho + n) \neq 0$  für alle natürlichen  $n > 0$  gilt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Differenz  $\varrho_1 - \varrho_2$  keine ganze Zahl ist.

- Fall 1:  $\varrho_1 - \varrho_2$  ist keine ganze Zahl. In diesem Fall lassen sich zwei Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y_2(x) &= x^{\varrho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \end{aligned}$$

bestimmen, wobei die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  für  $k > 0$  durch die Rekursionformel (5.18) aus  $a_0$  und  $b_0$  bestimmt werden müssen.

- Fall 2:  $\varrho$  ist eine doppelte Nullstelle ( $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$ ). In diesem Fall kann nur eine Lösung als verallgemeinerte Potenzreihe gefunden werden. Um eine zweite Lösung zu finden, muss die Technik der analytischen Fortsetzung verwendet werden, die in Kapitel 9 dargestellt werden.
- Fall 3:  $\varrho_1 - \varrho_2$  ist eine positive ganze Zahl. In diesem Fall ist im Allgemeinen nur eine Lösung in Form einer verallgemeinerten Potenzreihe möglich. Auch hier müssen Techniken der Funktionentheorie aus Kapitel 9 verwendet werden, um eine zweite Lösung zu finden.

Wenn  $\varrho_1 - \varrho_2$  eine negative ganze Zahl ist, kann man die beiden Nullstellen vertauschen.

## 5.3 Bessel-Funktionen

Die Besselsche Differentialgleichung erlaubt Wellen mit zylindrischer Symmetrie und die Strömung in einem zylindrischen Rohr zu beschreiben. Die Auflösung eines optischen Systems wird durch die Beugung limitiert, die Helligkeitsverteilung des Bildes einer Punktquelle ist zylindersymmetrisch und kann mit Hilfe von Lösungen der Besselschen Differentialgleichung beschrieben werden. Die Besselsche Differentialgleichung hat im Allgemeinen keine Lösung, die sich durch bekannte Funktionen ausdrücken lassen, es ist also nötig, eine neue Familie von speziellen Funktionen zu definieren, die Bessel-Funktionen.

### 5.3.1 Die Besselsche Differentialgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung ist die Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (5.19)$$

zweiter Ordnung für eine auf dem Intervall  $[0, \infty)$  definierte Funktion  $y(x)$ . Der Parameter  $\alpha$  ist eine beliebige komplexe Zahl  $\alpha \in \mathbb{C}$ , die Lösungsfunktionen hängen daher von  $\alpha$  ab.

## Eigenwertproblem

Die Besselsche Differentialgleichung (5.19) kann man auch als Eigenwertproblem für den Bessel-Operator

$$B = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 \quad (5.20)$$

schreiben. Eine Lösung  $y(x)$  der Gleichung (5.19) erfüllt

$$By = x^2 y'' + xy' + x^2 y = \alpha^2 y,$$

ist also eine Eigenfunktion des Bessel-Operators zum Eigenwert  $\alpha^2$ .

## Indexgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Art (5.13) mit

$$p(x) = 1 \quad \text{und} \quad q(x) = x^2 - \alpha^2.$$

Nach den Ausführungen von Abschnitt 5.2.3, muss die Lösung in der Form einer verallgemeinerten Potenzreihe gesucht werden. Dazu muss zunächst die Indexgleichung

$$0 = X(X - 1) + Xp_0 + q_0 = X(X - 1) + X - \alpha^2 = X^2 - \alpha^2 = (X - \alpha)(X + \alpha)$$

gelöst werden. Die Nullstellen sind offenbar  $\varrho_1 = \alpha$  und  $\varrho_2 = -\alpha$ .

Die beiden Vorzeichen der Nullstellen der Indexgleichung führen auf die gleiche Differentialgleichung. Der Lösungsraum der Differentialgleichung ist natürlich trotzdem zweidimensional, so dass es immer noch möglich ist, den beiden Nullstellen der Indexgleichung verschiedene Lösungen zuzuordnen. Die Diskussion in Abschnitt 5.2.3 hat Kriterien ergeben, unter denen zwei linear unabhängige Lösungen mit Hilfe einer verallgemeinerten Potenzreihe gefunden werden können. Falls nur eine solche Lösung gefunden werden kann, wird sie der grössten der beiden Zahlen  $\alpha$  und  $-\alpha$  zugeordnet (oder 0, falls  $\alpha = -\alpha = 0$ ). Eine weitere Lösung kann mit Hilfe analytischer Fortsetzung gefunden werden, wie später gezeigt wird.

Für nicht reelles  $\alpha$  kann  $\varrho_1 - \varrho_2 = 2\alpha$  keine Ganzzahl sein, es ist also garantiert, dass zwei linear unabhängig Lösungen der Form

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \quad (5.21)$$

existieren.

Für reelles  $\alpha \in \mathbb{R}$  gibt es zwei Lösungen der Form (5.21) genau dann, wenn  $\varrho_1 - \varrho_2$  keine Ganzzahl ist. Nur eine Lösung kann man finden, wenn

$$\alpha - (-\alpha) = 2\alpha \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ist.

### 5.3.2 Bessel-Funktionen erster Art

Für  $\alpha \geq 0$  gibt es immer mindestens eine Lösung der Besselgleichung als verallgemeinerte Potenzreihe mit  $\varrho = \alpha$ . Die Funktion  $q(x) = x^2 - \alpha^2$  ist ein Polynom, die einzigen von 0 verschiedenen Koeffizienten sind  $q_0 = -\alpha^2$  und  $q_2 = 1$ . Für den ersten Koeffizienten  $a_0$  gibt es keine Einschränkungen, wir wählen  $a_0 = 1$ .

Die Rekursionsformel für  $n = 1$  ist

$$F(\varrho + 1)a_1 = (\varrho p_1 + q_1)a_0,$$

aber die Koeffizienten  $p_1$  und  $q_1$  verschwinden beide und damit die ganze rechte Seite. Da  $F(\varrho + 1) \neq 0$  ist, folgt dass  $a_1 = 0$  sein muss.

#### Der allgemeine Fall

Für die höheren Potenzen  $n > 1$  wird die Rekursionsformel für die Koeffizienten  $a_n$  der verallgemeinerten Potenzreihe

$$a_n = -\frac{q_2 a_{n-2}}{F(\varrho + n)} = -\frac{a_{n-2}}{(\varrho + n)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_{n-2}}{\varrho^2 + 2\varrho n + n^2 - \alpha^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2\varrho)}.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass  $\varrho = \pm\alpha$  und damit  $\varrho^2 = \alpha^2$  ist. Daraus folgt wegen  $a_1 = 0$ , dass auch  $a_{2k+1} = 0$  für alle  $k$ . Damit können wir jetzt die Reihe hinschreiben:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^\varrho \left( 1 - \frac{1}{2(2 + 2\varrho)} x^2 + \frac{1}{2(2 + 2\varrho)4(4 + 2\varrho)} x^4 - \frac{1}{2(2 + 2\varrho)4(4 + 2\varrho)6(6 + 2\varrho)} x^6 + \dots \right) \\ &= x^\varrho \left( 1 + \frac{(-x^2/4)}{1 \cdot (1 + \varrho)} + \frac{(-x^2/4)^2}{1 \cdot 2 \cdot (1 + \varrho) \cdot (2 - \varrho)} + \frac{(-x^2/4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + \varrho) \cdot (2 + \varrho) \cdot (3 + \varrho)} + \dots \right) \\ &= x^\varrho \left( 1 + \frac{1}{(\varrho + 1)} \frac{(-x^2/4)}{1!} + \frac{1}{(\varrho + 1)(\varrho + 2)} \frac{(-x^2/4)^2}{2!} + \frac{1}{(\varrho + 1)(\varrho + 2)(\varrho + 3)} \frac{(-x^2/4)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\varrho + 1)_k} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = x^\varrho \cdot {}_0F_1\left(; \varrho + 1; -\frac{x^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Wir finden also zwei Lösungsfunktionen

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + 1)_k} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = x^\alpha \cdot {}_0F_1\left(; \alpha + 1; -\frac{x^2}{4}\right), \quad (5.22)$$

$$y_2(x) = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-\alpha + 1)_k} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = x^{-\alpha} \cdot {}_0F_1\left(; -\alpha + 1; -\frac{x^2}{4}\right). \quad (5.23)$$

Man beachte, dass die zweite Lösung für ganzzahliges  $\alpha > 0$  nicht definiert ist. Man kann auch direkt nachrechnen, dass diese Funktionen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind.

#### Bessel-Funktionen

Da die Besselsche Differentialgleichung linear ist, ist auch jede Linearkombination der Funktionen (5.22) und (5.23) eine Lösung. Satz 4.3 ermöglicht, das Pochhammer-Symbol durch Werte der Gamma-Funktion wie in

$$(\alpha + 1)_n = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

auszudrücken. Damit wird

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = \Gamma(\alpha+1) 2^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (5.24)$$

Nur gerade der Faktor  $2^\alpha \Gamma(\alpha+1)$  ist von  $k$  und  $x$  unabhängig, daher ist die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 5.4.** Die Funktion

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

heisst Bessel-Funktion erster Art der Ordnung  $\alpha$ .

Die Bessel-Funktion  $J_\alpha(x)$  der Ordnung  $\alpha$  unterscheidet sich nur durch einen Normierungsfaktor von der Lösung  $y_1(x)$ . Dasselbe gilt für  $J_{-\alpha}(x)$  und  $y_2(x)$ :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) &= \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \cdot y_1(x) \\ J_{-\alpha}(x) &= \frac{1}{2^{-\alpha} \Gamma(-\alpha+1)} \cdot y_2(x). \end{aligned}$$

### Besselfunktionen ganzzahliger Ordnung

Man beachte, dass diese Definition für beliebige ganzzahlige  $\alpha$  funktioniert. Ist  $\alpha = -n < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dann hat der Nenner Pole an den Stellen  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Die Summe beginnt also erst bei  $k=n$  oder

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{m! (l+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(l+n)-n} = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{m! \Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Insbesondere unterscheiden sich  $J_n(x)$  und  $J_{-n}(x)$  nur durch ein Vorzeichen.

Als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung erwarten wir noch eine zweite, linear unabhängige Lösung. Diese kann jedoch nicht allein mit der Potenzreihenmethode, dazu sind die Methoden der Funktionentheorie nötig. Im Abschnitt 9.5.3 wird gezeigt, wie dies möglich ist und auf Seite 275 werden die damit zu findenden Bessel-Funktionen 0-ter Ordnung und zweiter Art vorgestellt.

### Erzeugende Funktion

Die erzeugende Funktion der Bessel-Funktionen ist die Summe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n. \quad (5.25)$$

Die rote Summe entspricht den vertikalen roten Streifen in Abbildung 5.1 oben. Die grau hinterlegten Punkte in der Abbildung gehören zu verschwindenden Termen. Wir schreiben  $m = k+n$  und drücken alle Terme durch  $k$  und  $m$  aus:

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k} z^{n+k} z^{-k}$$

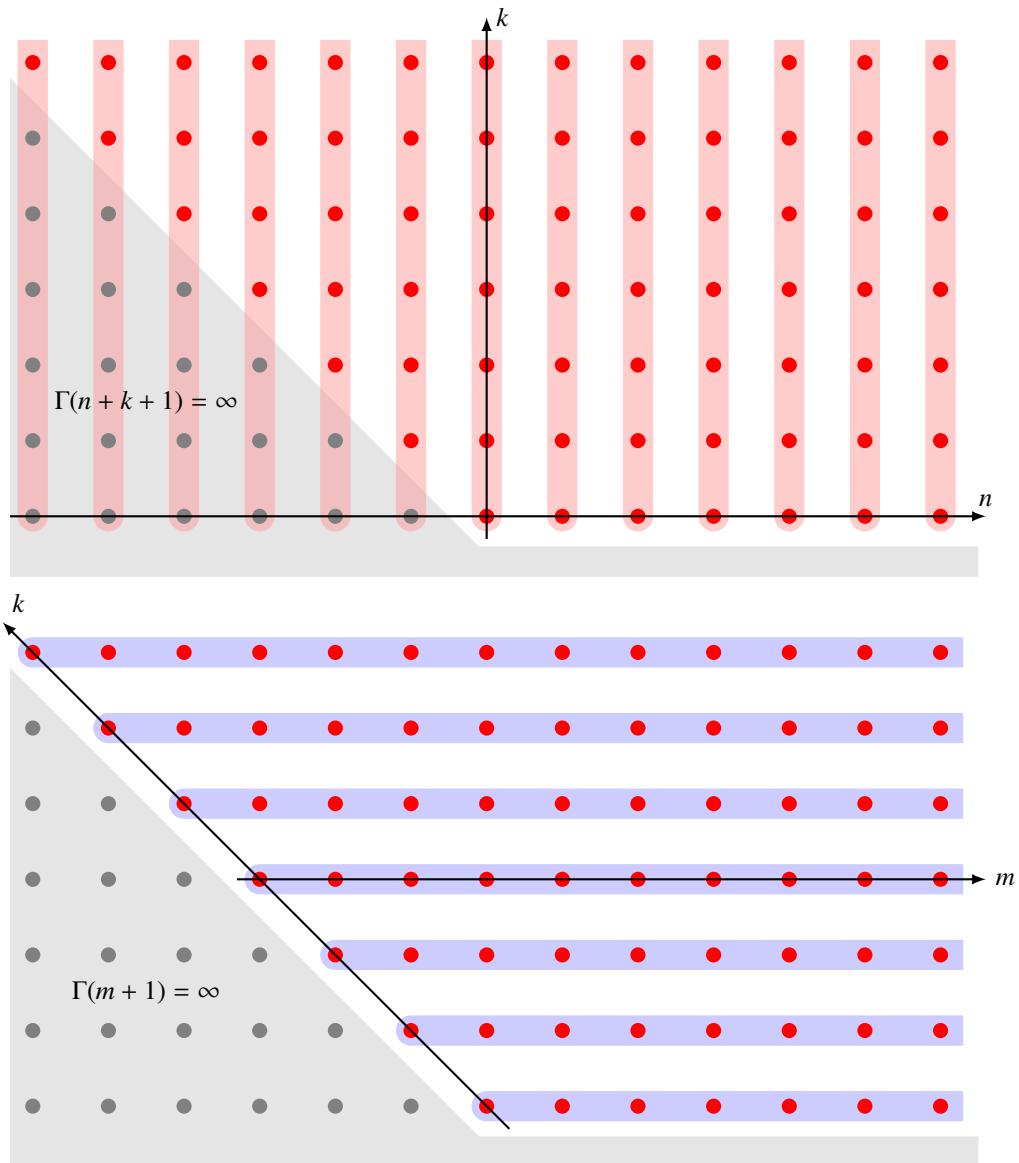


Abbildung 5.1: Indexmenge für Herleitung der erzeugenden Funktion der Besselfunktionen. Die rote Summe in (5.25) entspricht den vertikalen roten Streifen oben, die blaue Summe in (5.26) den horizontalen Streifen in der Abbildung unten. Alle Terme enthalten  $\Gamma(n + k + 1)$  im Nenner, im grau hinterlegten Gebiet verschwinden sie.

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m z^{n+k}$$

Auch in dieser Summe fallen wieder die Terme mit  $m < 0$  wegen  $\Gamma(m+1) = \infty$  weg. Die Grenzen der Summation über  $k$  hängen nicht von  $m$  ab, daher können wir die Summationsreihenfolge vertauschen. Die Summation über  $m$  entspricht den horizontalen blauen Streifen in Abbildung 5.1 unten. Es ergibt sich die Summe

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m z^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m z^m. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Beide Reihen sind Exponentialreihen, was man besser sehen kann, wenn man die Gamma-Funktion in der zweiten Summe wieder als die Fakultät  $\Gamma(m+1) = m!$  schreibt. Die beiden Exponentialreihen sind

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z})}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z \frac{x}{2})^m}{m!} = \exp\left(\frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{z}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2} \cdot z\right) = \exp\left(\frac{x}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

### Additionstheorem

Die erzeugende Funktion kann dazu verwendet werden, das Additionstheorem für die Besselfunktionen zu beweisen.

**Satz 5.5.** Für  $l \in \mathbb{Z}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$J_l(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{l-m}(y).$$

*Beweis.* Die Koeffizienten der erzeugenden Funktion der Bessel-Funktionen für das Argument  $x+y$  ist

$$\exp\left(\frac{x+y}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) z^n.$$

Wir verwenden die Exponentialgesetze auf der linken Seite und erhalten

$$= \exp\left(\frac{x}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{y}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

Beide Faktoren sind erzeugende Funktionen von Bessel-Funktionen, wir können sie also als

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) z^m \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) z^k$$

schreiben. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen mit gleichem Exponenten finden wir

$$= \sum_{m,k} J_m(x) J_k(y) z^{k+m} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{l-m}(y) \right) z^l.$$

Daraus folgt schliesslich mit Koeffizientenvergleich das Additionstheorem

$$J_l(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{l-m}(y)$$

für alle  $l$ . □

### Der Fall $\alpha = 0$

Im Fall  $\alpha = 0$  hat das Indexpolynom eine doppelte Nullstelle, wir können daher nur eine Lösung erwarten. Im Fall  $\alpha = 0$  wird das Produkt im Nenner zu  $n!$ , so dass die Lösungsfunktion

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

geschrieben werden kann.

### Der Fall $\alpha = p$ , $p \in \mathbb{N}$ , $p > 0$

In diesem Fall kann nur die erste Lösung (5.3.2) verwendet werden. Damit erhält die Lösungsfunktion die Form

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}.$$

### Der Fall $\alpha = n + \frac{1}{2}$ , $n \in \mathbb{N}$

Obwohl  $2\alpha$  eine Ganzzahl ist, sind die beiden Lösungen und linear unabhängig.

Man kann zeigen, dass sich die Lösungsfunktionen in diesem Fall durch bereits bekannte elementare Funktionen ausdrücken lassen. Wir rechnen dies für  $n = 0$  nach. Zunächst drücken wir die Pochhammer-Symbole im Nenner anders aus. Es ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + 1\right)_k &= \left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{1}{2^k} (3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)) = \frac{(2k+1)!}{2^{2k} \cdot k!} \\ \left(-\frac{1}{2} + 1\right)_k &= \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} + 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} + k\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + 0\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1\right) = \frac{1}{2^k} (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2(k-1)+1)) = \frac{(2k-1)!}{2^{2k-1} \cdot (k-1)!} \end{aligned}$$

Damit können jetzt die Reihenentwicklungen der Lösung wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+1)_k} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{(2k+1)!} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \\ y_2(x) &= x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-\alpha+1)_k} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k-1} \cdot (k-1)!}{(2k-1)!} \frac{(-x^2/4)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k-1)! \cdot 2k} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x.$$

Die Bessel-Funktionen verwenden aber eine andere Normierung. Die Gleichung (5.24) zeigt, dass die Bessel-Funktionen durch Division der Funktion  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  durch  $2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)$  erhalten werden können. Dies ergibt

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} + 1)} y_1(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{2}{x}} \sin x, \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}} \Gamma(-\frac{1}{2} + 1)} y_2(x) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{2}{x}} \cos x. \end{aligned}$$

Wegen  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  sind die halbzahligen Bessel-Funktionen daher

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \sin x \quad \text{und} \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cos x.$$

### Direkte Verifikation der Lösungen für $\alpha = \pm \frac{1}{2}$

Tatsächlich führt die Anwendung des Bessel-Operators auf die beiden Funktionen auf

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} B J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( x^2 J_{\frac{1}{2}}''(x) + x J_{\frac{1}{2}}'(x) + x^2 J_{\frac{1}{2}}(x) \right) \\ &= x^2 (x^{-\frac{1}{2}} \sin x)'' + x (x^{-\frac{1}{2}} \sin x)' + x^2 (x^{-\frac{1}{2}} \sin x) \\ &= x^2 (x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x)' + x (x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x) + x^{\frac{3}{2}} \sin x \\ &= x^2 (-x^{-\frac{1}{2}} \sin x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cos x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cos x + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \sin x) + x^{\frac{1}{2}} \cos x + x^{-\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2}) \sin x \\ &= (-x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}) \sin x = \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} \sin x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \\ B J_{\frac{1}{2}}(x) &= \left( \frac{1}{2} \right)^2 J_{\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  tatsächlich eine Eigenfunktion des Bessel-Operators zum Eigenwert  $\alpha^2 = \frac{1}{4}$  ist. Analog kann man die Lösung  $y_2(x)$  für  $-\frac{1}{2}$  verifizieren.

## 5.4 Hypergeometrische Differentialgleichung

Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  wurde in Abschnitt 4.4 als Potenzreihe mit sehr speziellen Koeffizienten, die sich aus Pochhammer-Symbolen. Es stellt sich aber heraus, dass man sie auch als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung bekommen kann, die bereits Euler studiert hat.

### 5.4.1 Die Eulersche hypergeometrische Differentialgleichung

Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  ist eine Lösung der *Eulerschen hypergeometrischen Differentialgleichung* (zu unterscheiden von der Eulerschen Differentialgleichung, die sich immer

auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten reduzieren lässt)

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \frac{dy}{dx} - aby = 0 \quad (5.27)$$

Wir prüfen dies nach, indem wir die Definition der hypergeometrischen Funktion

$$y(x) = {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \end{aligned}$$

einsetzen. Die Gleichung, die sich ergibt, ist

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + (c - (a+b+1)x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-2)!} + c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\quad - (a+b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-1)!} - ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{x^k}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-2)!} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{x^k}{k!} \\ &\quad - (a+b+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{(k-1)!} - ab \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Zum konstanten Koeffizienten für  $k = 0$  tragen nur die dritte und letzte Summe bei, dies sind die Terme

$$c \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} - ab \frac{(a)_0 (b)_0}{(c)_0} = c \frac{ab}{c} - ab \frac{1 \cdot 1}{1} = 0.$$

Für den linearen Term  $k = 1$  kommen je ein Term aus der ersten und vierten Summe hinzu, dies ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} + c \frac{(a)_2 (b)_2}{(c)_2} - (a+b+1) \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} - ab \frac{(a)_1 (b)_1}{(c)_1} \\ &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} (1+c) - (ab+a+b+1) \frac{ab}{c} \\ &= \frac{a(a+1)b(b+1)}{c} - (a+1)(b+1) \frac{ab}{c} = 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir für  $k \geq 2$

$$0 = \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{1}{(k-2)!} + c \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned}
& - (a + b + 1) \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{1}{(k-1)!} - ab \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{1}{k!} \\
& = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_{k+1}} \frac{1}{k!} \left( (a+k)(b+k)k - (c+k)(k-1)k + c(a+k)(b+k) \right. \\
& \quad \left. - (a+b+1)(c+k)k - ab(c+k) \right).
\end{aligned}$$

Der zweite, vierte und fünfte Term können zu

$$= \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_{k+1}} \frac{1}{k!} \left( (a+k)(b+k)k + c(a+k)(b+k) - (ab + ak + bk + k^2)(c+k) \right)$$

zusammengefasst werden. Der Faktor  $(ab + ak + bk + k^2)$  kann als Produkt  $(a+k)(b+k)$  faktorisiert werden, der dann als gemeinsamer Faktor aus allen Termen ausgeklammert werden kann:

$$\begin{aligned}
& = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_{k+1}} \frac{1}{k!} \left( (a+k)(b+k)k + c(a+k)(b+k) - (a+k)(b+k)(c+k) \right) \\
& = \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{1}{k!} \left( k + c - (c+k) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Die hypergeometrische Reihe kann auch direkt mit Hilfe der Potenzreihenmethode als Lösung der Differentialgleichung gefunden werden.

### 5.4.2 Lösung als verallgemeinerte Potenzreihe

Da die hypergeometrische Reihe eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer Singularität bei  $x = 0$  ist, kann man versuchen eine zweite, linear unabhängige Lösung mit Hilfe der Methode der verallgemeinerten Potenzreihen zu finden. Dazu setzt man die Lösung in der Form

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k} \quad \Rightarrow \quad y'_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k) a_k x^{\varrho+k-1} \\
y''_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k)(\varrho+k-1) a_k x^{\varrho+k-2}
\end{aligned}$$

an, wobei  $a_0 \neq 0$  sein soll. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= x(1-x)y''_2(x) + (c - (a+b+1)x)y'_2(x) - aby_2(x) \\
&= x(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k)(\varrho+k-1) a_k x^{\varrho+k-2} + (c - (a+b+1)x) \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k) a_k x^{\varrho+k-1} - abx^{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k} \\
&= - \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k)(\varrho+k-1) a_k x^{\varrho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k)(\varrho+k-1) a_k x^{\varrho+k-1} + c \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k) a_k x^{\varrho+k-1} \\
&\quad - (a+b+1) \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho+k) a_k x^{\varrho+k} - ab \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k}.
\end{aligned}$$

Durch Verschiebung des Summationsindex in der zweiten und dritten Summe wird der Koeffizientenvergleich etwas einfacher

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k)(\varrho + k - 1)a_k x^{\varrho+k} + \sum_{k=-1}^{\infty} (\varrho + k + 1)(\varrho + k)a_{k+1} x^{\varrho+k} + c \sum_{k=-1}^{\infty} (\varrho + k + 1)a_{k+1} x^{\varrho+k} \\
&\quad - (a + b + 1) \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k)a_k x^{\varrho+k} - ab \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k} \\
&= - \sum_{k=0}^{\infty} (\varrho + k)(\varrho + k - 1)a_k x^{\varrho+k} + \sum_{k=-1}^{\infty} (\varrho + k + 1)(\varrho + k + c)a_{k+1} x^{\varrho+k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} ((\varrho + k)(a + b + 1) + ab)a_k x^{\varrho+k} \\
&= (\varrho(\varrho - 1) + c\varrho)x^{\varrho-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-(\varrho + k)(\varrho + k - 1)a_k + (\varrho + k + 1)(\varrho + k + c)a_{k+1} \\
&\quad - ((\varrho + k)(a + b + 1) + ab)a_k)x^{\varrho+k}.
\end{aligned}$$

Aus dem ersten Term kann man die Indexgleichung

$$0 = \varrho(\varrho - 1) + c\varrho = \varrho(\varrho - 1 + c)$$

ablesen, die die Nullstellen  $\varrho = 0$  und  $\varrho = 1 - c$  hat. Die Nullstelle  $\varrho = 0$  ergibt natürlich die bereits gefundene hypergeometrische Reihe.

Nach Einsetzen der zweiten Lösung der Indexgleichung in der Summe legt der Koeffizientenvergleich eine Beziehung

$$0 = (-(k - c + 1)(k - c) - (k - c + 1)(a + b + 1) + ab)a_k + (k - c + 2)(k + 1)a_{k+1}$$

zwischen  $a_k$  und  $a_{k+1}$  fest. Daraus kann man den Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten als

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{-(k - c + 1)(k - c) - (k - c + 1)(a + b + 1) + ab}{(k - c + 2)(k + 1)} \\
&= \frac{(a - c + 1 + k)(b - c + 1 + k)}{(2 - c + k)(k + 1)}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

finden. Setzt man  $a_0 = 1$ , ist die zweite Lösung ist also wieder eine hypergeometrische Funktion. Diese Lösung ist aber nur möglich, wenn in (5.28) der Nenner nicht verschwindet, d. h.  $2 - c + k \neq 0$  oder  $c \neq k + 2$  für all natürlichen  $k$ .  $c$  darf also kein natürliche Zahl  $\geq 2$  sein. Wir fassen die Resultate dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammen.

**Satz 5.6.** *Die eulersche hypergeometrische Differentialgleichung*

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a + b + 1)x) \frac{dy}{dx} - aby = 0 \tag{5.29}$$

hat die Lösung

$$y_1(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right).$$

Falls  $c - 2 \notin \mathbb{N}$  ist, ist

$$y_2(x) = x^{1-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a - c + 1, b - c + 1 \\ 2 - c \end{matrix}; x\right)$$

eine zweite, linear unabhängige Lösung.

### 5.4.3 Verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung

Die Ableitungsformel für die hypergeometrischen Funktionen

$$w(z) = {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix}; z\right)$$

drückt die Ableitung  $w'(z)$  durch einen Wert einer hypergeometrischen Funktion mit ganz anderen Parametern aus, nämlich

$$w'(z) = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot \dots \cdot b_m} {}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 \end{matrix}; z\right).$$

Dies erlaubt aber noch nicht, eine Differentialgleichung für  $w(z)$  aufzustellen, da auf der rechten Seite alle Parameter inkrementiert worden sind. Um eine Differentialgleichung zu erhalten, muss man den gleichen Effekt auf einem anderen Weg erreichen.

#### Operatoren, die genau ein $a_i$ inkrementieren

Wir suchen einen Operator, der in der hypergeometrischen Funktion  ${}_nF_m$  nur genau den Parameter  $a_i$  inkrementiert. Der folgende Operator schafft dies:

$$\begin{aligned} \left(z \frac{d}{dz} + a_i\right) {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix}; z\right) &= \left(z \frac{d}{dz} + a_i\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} a_i \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (\widehat{a_i})_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} (k(a_i)_k + a_i(a_i)_k) \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (\widehat{a_i})_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \underbrace{\frac{(a_i)_k (a_i+k)}{a_i(a_i+1)_k}}_{k!} \frac{z^k}{k!} \\ &= a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_i+1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \underbrace{\frac{(a_i)_k (a_i+k)}{a_i(a_i+1)_k}}_{k!} \frac{z^k}{k!} \\ &= a_i \cdot {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix}; z\right). \end{aligned}$$

Durch Anwendung aller Operatoren

$$D_{a_i} = z \frac{d}{dz} + a_i$$

kann man jetzt die Inkrementierung der  $a_i$ , die in der Ableitung von  $w(z)$  zu beobachten war, in Einzelschritten erreichen:

$$D_{a_1} D_{a_2} \cdots D_{a_n} w(z) = a_1 a_2 \cdots a_n {}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_n + 1 \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix}; z\right).$$

### Operatoren, die genau ein $b_j$ dekrementieren

Die Rechnung für die Operatoren  $D_{a_i}$  ist nicht direkt auf die  $b_i$  übertragbar, wir versuchen daher erneut:

$$\begin{aligned}
 D_{b_{j-1}} {}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) &= \left( z \frac{d}{dz} + b_j - 1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{(k-1)!} + (b_j - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (\widehat{b_j}_k) \cdots (b_m)_k} \left( \frac{k}{(b_j)_k} + \frac{b_j - 1}{(b_j)_k} \right) \frac{z^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (\widehat{b_j}_k) \cdots (b_m)_k} \frac{b_j + k - 1}{(b_j)_k} \frac{z^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (\widehat{b_j}_k) \cdots (b_m)_k} \frac{b_j - 1}{(b_j - 1)_k} \frac{z^k}{k!} \\
 &= (b_j - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_j - 1)_k \cdots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \\
 &= (b_j - 1) {}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_j - 1, \dots, b_m; z).
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung aller Operatoren  $D_{b_{j-1}}$  kann also jeder  $b$ -Parameter dekrementiert werden, es gilt also

$$D_{b_1-1} D_{b_2-1} \cdots D_{b_m-1} w = (b_1 - 1)(b_2 - 1) \cdots (b_m - 1) {}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1 - 1, \dots, b_m - 1; z).$$

### Die Differentialgleichung

Aus den Operatoren  $D_{a_i}$  und  $D_{b_{j-1}}$  kann jetzt eine Differentialgleichung für die Funktion  $w(z)$  konstruiert werden. Durch Anwendung von aller Operatoren  $D_{b_{i-1}}$  werden die  $b$ -Parameter dekrementiert und die Faktoren  $(b_i - 1)$  kommen hinzu. Leitet man dies ab, werden alle Parameter inkrementiert:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} {}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) &= \frac{a_1 \cdots a_n}{(b_1 - 1) \cdots (b_m - 1)} (b_1 - 1) \cdots (b_m - 1) {}_nF_m(a_1 + 1, \dots, a_n + 1; b_1, \dots, b_m; z) \\
 &= a_1 \cdots a_n {}_nF_m(a_1 + 1, \dots, a_n + 1; b_1, \dots, b_m; z)
 \end{aligned}$$

Dies ist aber die gleiche Operation, wie alle Operatoren  $D_{a_i}$  anzuwenden. Es folgt daher die Differentialgleichung

$$D_{a_1} \cdots D_{a_n} w = \frac{d}{dz} D_{b_1-1} \cdots D_{b_m-1} w$$

für die Funktion  $w(z)$ .

*Beispiel.* Im Spezialfall  ${}_0F_0$  gibt es keine Operatoren  $D_{a_i}$  oder  $D_{b_{j-1}}$  anzuwenden, so dass nur die Differentialgleichung

$$w = \frac{d}{dz} w$$

stehen bleibt. Dies ist natürlich die Differentialgleichung der Exponentialfunktion.  $\circlearrowright$

### Die Differentialgleichungen für ${}_1F_0$

In diesen Fällen gibt es nur jeweils einen einzigen Operator anzuwenden. Wir betrachten zunächst den Fall  $w(z) = {}_1F_0(a; z)$  und finden direkt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \left( z \frac{d}{dz} + a \right) w &= \frac{d}{dz} w \\ zw' + aw &= w' \\ (1 - z)w' &= aw. \end{aligned}$$

*Beispiel.* Wir bestimmen die Differentialgleichung für die als hypergeometrische Reihe darstellbare Funktion

$$f(x) = \sqrt{1+x} = {}_1F_0(-\frac{1}{2}; -x).$$

Zunächst erfüllt die hypergeometrische Funktion  $w(z) = {}_1F_0(-\frac{1}{2}; z)$  die Differentialgleichung

$$(1 - z)w'(z) = -\frac{1}{2}w(z).$$

Jetzt setzen wir  $z = -x$  in die Funktion ein. Wegen  $f(x) = w(-x)$  folgt  $f'(x) = -w'(-x)$

$$-f'(x)(1 + x) = -\frac{1}{2}f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x)}{2(1 + x)}.$$

Tatsächlich ist die Ableitung der Wurzelfunktion  $f(x)$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} = \frac{f(x)}{2(1+x)},$$

sie erfüllt also die genannte Differentialgleichung. ○

### Die Differentialgleichungen für ${}_0F_1$

Für die Funktion  ${}_0F_1$  setzen wir  $w(z) = {}_0F_1(; b; z)$ . In diesem Fall gibt es keine Operatoren  $D_{a_i}$  anzuwenden, die linke Seite der Differentialgleichung ist also einfach die Funktion  $w$ . Für die rechte Seite ist der Operator  $D_{b-1}$  anzuwenden, was auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} w &= \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + b - 1 \right) w \\ w &= \frac{d}{dz} (zw' + bw - w) \\ w &= zw'' + w' + bw' - w' \\ 0 &= zw'' + bw' - w \end{aligned} \tag{5.30}$$

führt.

*Beispiel.* Die Kosinus-Funktion kann durch die hypergeometrische Funktion  ${}_0F_1$  ausgedrückt werden. Wir schreiben

$$w(z) = {}_0F_1\left(\frac{-}{2}; z\right),$$

$w(z)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$zw''(z) + w'(z) - \frac{3}{2}w(z) = 0.$$

Die Kosinus-Funktion als Funktion von  $w(z)$  ist

$$f(x) = \cos x = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) = w\left(-\frac{x^2}{4}\right),$$

es muss also  $z = -x^2/4$  gesetzt werden. Wir müssen die Ableitungen von  $w$  durch die Ableitungen von  $f$  ausdrücken. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{2}w'\left(-\frac{x^2}{4}\right) & \Rightarrow & \quad w'\left(-\frac{x^2}{4}\right) = -\frac{2}{x}f'(x) \\ f''(x) &= \frac{x^2}{4}w''\left(-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2}w'\left(-\frac{x^2}{4}\right) & \Rightarrow & \quad w''\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \frac{4}{x^2}f''(x) + \frac{2}{x^2}w'\left(-\frac{x^2}{4}\right) \\ & & & = \frac{4}{x^2}f''(x) - \frac{4}{x^3}f'(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung von  $w(z)$  ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= zw'' + \beta w' - w = -\frac{x^2}{4}\left(\frac{4}{x^2}f''(x) - \frac{4}{x^3}f'(x)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}f'(x)\right) - f(x) \\ &= -f''(x) - f(x), \end{aligned}$$

was gleichbedeutend ist mit der Differentialgleichung  $f'' = -f$ , die tatsächlich die Kosinus-Funktion als Lösung hat.  $\circlearrowright$

### Die Differentialgleichung für ${}_1F_1$

Wir setzen wieder  $w(z) = {}_1F_1(a; b; z)$ . Es sind die Operatoren  $D_a$  und  $D_{b-1}$  anzuwenden. Es ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \left(z\frac{d}{dz} + a\right)w &= \frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + b - 1\right)w \\ zw' + aw &= \frac{d}{dz}(zw' + bw - w) \\ zw' + aw &= zw'' + w' + bw' - w' \\ 0 &= zw'' + (b - z)w' - aw. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Die hypergeometrische Funktion  ${}_1F_1$  ist eine Lösung den Anfangsbedingungen  $w(0) = 1$ ,  $w'(0) = a/b$ . Eine zweite, linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung (5.31) kann als verallgemeinerte Potenzreihe  $w(z) = z^\varrho v(z)$  gefunden werden. Die Ableitungen dieses Ansatzes sind

$$\begin{aligned} w'(z) &= \varrho z^{\varrho-1}v(z) + z^\varrho v'(z) \\ w''(z) &= \varrho(\varrho-1)z^{\varrho-2}v(z) + 2\varrho z^{\varrho-1}v'(z) + z^\varrho v''(z). \end{aligned}$$

Einsetzen derselben in (5.31) ergibt die Gleichung

$$z(\varrho(\varrho-1)z^{\varrho-2}v + 2\varrho z^{\varrho-1}v' + z^\varrho v'') + (b-z)(\varrho z^{\varrho-1}v + z^\varrho v') - az^\varrho v = 0$$

$$\begin{aligned} z^{\varrho+1}v'' + z^\varrho(2\varrho + b - z)v' + (\varrho(\varrho - 1)z^{\varrho-1} + (b - z)\varrho z^{\varrho-1} - az^\varrho)v &= 0 \\ z^{\varrho+1}v'' + z^\varrho(2\varrho + b - z)v' + (\varrho(\varrho - 1 + b)z^{\varrho-1}v + (\varrho - a)z^\varrho v &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird wieder zu einer Differentialgleichung der Form (5.31), wenn der erste der Koeffizienten von  $v$  verschwindet, wenn also  $\varrho - 1 + b = 0$  ist, oder  $\varrho = 1 - b$ . Setzt man diesen Wert ein, entsteht die Differentialgleichung

$$zv'' + (2(1 - b) + b - z)v' - (a + b - 1)v = 0 \quad \Rightarrow \quad zv'' + (2 - b - z)v' - (a + b - 1)v = 0.$$

Dies ist eine hypergeometrische Differentialgleichung für  ${}_1F_1$  mit den Parametern  $2 - b$  und  $1 - b - a$ . Es folgt, dass

$$w_2(z) = z^{1-b} {}_1F_1\left(\frac{a+b-1}{2-b}; z\right).$$

Falls  $2 - b$  keine negative ganze Zahl ist, ist die hypergeometrische Funktion wohldefiniert.

Wir fassen diese Resultat zusammen:

**Satz 5.7.** *Die Differentialgleichung*

$$zw'' + (b - z)w' - aw = 0$$

hat die Funktion

$$w_1(z) = {}_1F_1\left(\frac{a}{b}; z\right)$$

als Lösung. Falls  $b - 2 \notin \mathbb{N}$  ist, ist

$$w_2(z) = z^{1-b} \cdot {}_1F_1\left(\frac{a+b-1}{2-b}; z\right)$$

eine zweite Lösung. Für  $b = 1$  ist  $w_2(z) = w_1(z)$ .

**Die Differentialgleichung für  ${}_2F_1$**

Für die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  ist die Differentialgleichung von der Form

$$\left(z \frac{d}{dz} + a\right)\left(z \frac{d}{dz} + b\right)w = \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz} + c - 1\right)w.$$

Durchführen der Ableitungen auf beiden Seiten ergibt für die linke Seite

$$\begin{aligned} \left(z \frac{d}{dz} + a\right)\left(z \frac{d}{dz} + b\right)w &= \left(z \frac{d}{dz} + a\right)(zw' + bw) \\ &= z^2w'' + zw' + bz w' + a(zw' + bw) \\ &= z^2w'' + (1 + a + b)zw' + baw \end{aligned}$$

und die rechte Seite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz} + c - 1\right)w &= \frac{d}{dz}(zw' + cw - w) \\ &= zw'' + w' + cw' - w' \end{aligned}$$

$$= zw'' + cw'.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} z^2 w'' + (1 + a + b)zw' + abw &= zw'' + cw' \\ 0 &= z(1 - z)w'' + (c - z(1 + a + b))w' - abw \end{aligned}$$

Dies ist die früher definierte hypergeometrische Differentialgleichung.

#### 5.4.4 Differentialgleichung für $x^{\varrho} \cdot {}_pF_q(a_i; b_j; sx^{\nu})$

In verschiedenen Beispielen ist gezeigt worden, wie sich wohlbekannte Funktionen durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken lassen. Aus der Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktionen muss sich daher auch eine Differentialgleichung für die gesuchten Funktionen ergeben. Zum Beispiel lassen sich die Besselfunktionen durch hypergeometrische Funktionen des Argumentes  $-x^2/4$  schreiben, es muss also auch möglich sein, die besselsche Differentialgleichung wieder aus der eulerschen hypergeometrischen Differentialgleichung zu gewinnen.

#### Gerade und ungerade

Hypergeometrische Funktionen, deren Reihe mehr als einen Term enthalten, enthalten immer mindestens eine gerade und eine ungerade Potenz der unabhängigen Variable. Sie können also grundsätzlich weder gerade noch ungerade sein. Andererseits haben die Differentialgleichungen  $y'' + y = 0$  oder  $y'' - y = 0$  besonders praktische Lösungen, die sich zusätzlich durch besondere Symmetrien auszeichnen. Die Differentialgleichung  $y'' + y = 0$  hat zum Beispiel die gerade Lösung  $\cos x$  und die ungerade Lösung  $\sin x$ . Auch die Differentialgleichung  $y'' - y = 0$  hat eine gerade Lösung,  $\cosh x$ , und eine ungerade Lösung,  $\sinh x$ .

#### Symmetrien der eulerschen hypergeometrischen Differentialgleichung

Hat die hypergeometrische Differentialgleichung gerade und ungerade Lösungen? Wenn es eine gerade Lösung  $y(x)$  gibt, dann sollte die Substitution  $x \rightarrow -x$  eine neue Differentialgleichung geben, die ebenfalls  $y(x)$  als Lösung hat.

$$\begin{aligned} x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c + (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby &= 0 \\ -x(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} - (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby &= 0 \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist

$$\begin{aligned} 2x\frac{d^2y}{dx^2} + 2c\frac{dy}{dx} &= 0 & \Rightarrow & \frac{d}{dx} \log \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x} \\ & & \Rightarrow & \log \frac{dy}{dx} = -c \log x \\ & & \Rightarrow & \frac{dy}{dx} = x^{-c} \\ & & \Rightarrow & y(x) = \frac{1}{-c+1} x^{-c+1} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die hypergeometrische Differentialgleichung im allgemeinen keine geraden oder ungeraden Lösungen hat.

## Zusammengesetzte Funktionen

Die gerade oder ungeraden Funktionen, die in früheren Beispielen als hypergeometrische Funktionen dargestellt wurden, konnten also nicht Lösungen der hypergeometrische Differentialgleichung sein. Die Potenzreihenentwicklung einer geraden Funktion enthält nur gerade Potenzen der unabhängigen Variablen, bei einer ungeraden Funktion sind es nur die ungeraden Potenzen. Die einzige Möglichkeit, eine gerade Funktion  $g(x)$  oder eine ungerade Funktion  $u(x)$  als eine hypergeometrische Funktion darzustellen, ist die Verwendung eines quadratischen Arguments, also in der Form

$$g(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x^2\right) \quad \text{und} \quad u(x) = x \cdot {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x^2\right).$$

Viele wohlbekannte Funktionen  $f(x)$  können aus einer hypergeometrischen Funktion  $w(z)$  als  $g(x) = w(\pm x^2)$  oder  $u(x) = xw(\pm x^2)$  erhalten werden. Für die hypergeometrische Funktion  $w(z)$  ist eine definierende Differentialgleichung bekannt. Im Folgenden soll daraus eine Differentialgleichung für  $f(x)$  abgeleitet werden.

Der Fall  $w(-x^2)$  könnte natürlich auch durch Verwendung eines imaginären Arguments wie in  $w(ix^2)$  auf den Fall  $w(x^2)$  zurückgeführt werden. Um aber die Differentialgleichungen reell zu belassen, schreiben wir  $g(x) = w(sx^2)$  für eine gerade Funktion beziehungsweise  $u(x) = xw(sx^2)$  für eine ungerade Funktion. Der Faktor  $s$  kann außerdem dazu verwendet werden, das Argument zu skalieren, wie es zum Beispiel in der Darstellung der Kosinus-Funktion als  $\cos x = {}_0F_1\left(;\frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)$  nötig ist.

Um die Differentialgleichung für  $g$  oder  $u$  zu finden, berechnen wir die Ableitungen von  $g$  und  $u$ , drücken die Ableitungen von  $w$  durch die Ableitungen  $g$  und  $u$  aus und setzen sie in die Differentialgleichung für  $w$  ein. Wir wollen dies im Folgenden nur für ein paar Beispiele niedrigerer Ordnung tun.

### Differentialgleichungen für $g(x) = w(sx^2)$ für $w = {}_2F_1$

Die Ableitungen von  $g$  sind

$$\begin{aligned} g(x) &= w(sx^2) \\ g'(x) &= 2sxw'(sx^2) \\ g''(x) &= 2sw'(sx^2) + 4s^2x^2w''(sx^2) \end{aligned}$$

Dies sind lineare Gleichungssysteme für die Ableitungen von  $w$ , die wir nach  $w'$  und  $w''$  auflösen können. Dies wird einfacher, wenn wir das Gleichungssystem in Matrixschreibweise darstellen mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \\ g''(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2sx & 0 \\ 0 & 2s & 4s^2x^2 \end{pmatrix}}_{= A_g} \begin{pmatrix} w(sx^2) \\ w'(sx^2) \\ w''(sx^2) \end{pmatrix} \Rightarrow A_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2sx} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4s^2x^3} & \frac{1}{4s^2x^2} \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich jetzt die Ableitungen von  $w$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} w(sx^2) &= g(x) \\ w'(sx^2) &= \frac{1}{2sx}g'(x) \end{aligned}$$

$$w''(sx^2) = \frac{1}{4s^2x^3}g'(x) + \frac{4}{4s^2x^2}g''(x)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die eulersche hypergeometrische Differentialgleichung (5.29) finden wir jetzt die Differentialgleichungen für  $g(x)$  wie folgt:

$$x(1 - sx^2)g''(x) + (2c - 1 - (2a + 2b + 1)sx^2)g'(x) - 4absxg(x) = 0. \quad (5.32)$$

### Differentialgleichung von $x^\varrho w(sx^\nu)$

Die Methode der verallgemeinerten Potenzreihen zeigt, dass eine gewöhnliche Potenzreihe, wie  ${}_pF_q$  eine ist, manchmal nicht reicht, um eine Lösung einer Differentialgleichung darzustellen. Die Beselsche Differentialgleichung ist von dieser Art. Eine verallgemeinerte Potenzreihe erhält man mit Hilfe eines zusätzlichen Faktors der Form  $x^\varrho$ . Der Fall  $\varrho = 1$  deckt auch die früher vorgeschlagene Funktion  $u(x) = x \cdot {}_pF_q(sx^2)$  ab.

In den bisherigen Beispielen haben wir als Argument für eine hypergeometrische Funktion  ${}_pF_q$  einen Ausdruck der Form  $sx^2$  verwendet, was für die Beispiele gereicht hat, aber zum Beispiel für die später untersuchten Airy-Funktionen nicht genügt. Daher soll jetzt für eine Funktion  $f(x) = x^\varrho \cdot {}_pF_q(sx^\nu)$  eine Differentialgleichung aus der Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion abgeleitet werden. Dabei soll der im vorangegangenen Abschnitt behandelte Fall  $\varrho = 0$  und  $\nu = 2$  als Leitlinie dienen.

Wie vorhin beginnen wir damit, die Ableitungen von  $f(x)$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\varrho w(sx^\nu) \\ f'(x) &= \varrho x^{\varrho-1} w(sx^\nu) + \nu s x^{\varrho+\nu-1} w'(sx^\nu) \\ f''(x) &= (\varrho - 1)\varrho x^{\varrho-2} w(sx^\nu) + \nu(2\varrho + \nu - 1) s x^{\varrho+\nu-2} w'(sx^\nu) + \nu^2 s^2 x^{\varrho+2\nu-2} w''(sx^\nu) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, welches in Matrixform geschrieben werden kann als

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^\varrho & 0 & 0 \\ \varrho x^{\varrho-1} & \nu s x^{\varrho+\nu-2} & 0 \\ (\varrho - 1)\varrho x^{\varrho-2} & \nu(2\varrho + \nu - 1) s x^{\varrho+\nu-2} & \nu^2 s^2 x^{\varrho+2\nu-2} \end{pmatrix}}_{= A_f} \begin{pmatrix} w(sx^\nu) \\ w'(sx^\nu) \\ w''(sx^\nu) \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix  $A_f$  ist

$$A_f^{-1} = \frac{1}{x^\varrho} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\varrho}{\nu s} x^{-\nu} & \frac{1}{\nu s} x^{-\nu+1} & 0 \\ \frac{\varrho^2 + \nu\varrho}{\nu^2 s^2} x^{-2\nu} & -\frac{2\varrho + \nu - 1}{\nu^2 s^2} x^{-2\nu+1} & \frac{1}{\nu^2 s^2} x^{-2\nu+2} \end{pmatrix}$$

Damit kann man jetzt die Funktion  $w(sx^\nu)$  und die Ableitungen  $w'(sx^\nu)$  und  $w''(sx^\nu)$  durch  $f$  und die Ableitungen davon ausdrücken als

$$\begin{aligned} w(sx^\nu) &= \frac{1}{x^\varrho} f(x) \\ w'(sx^\nu) &= -\frac{\varrho}{\nu s} x^{-\varrho-\nu} f(x) + \frac{1}{\nu s} x^{-\varrho-\nu+1} \\ w''(sx^\nu) &= \frac{\varrho^2 + \nu\varrho}{\nu^2 s^2} x^{-\varrho-2\nu} - \frac{2\varrho + \nu - 1}{\nu^2 s^2} x^{-\varrho-2\nu+1} + \frac{1}{\nu^2 s^2} x^{-\varrho-2\nu+2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1$  liefert die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} sx^4(x^2 - 1)f'' - (((-2\varrho - \nu + 1)sx^5 + x^\nu(b + a + 1)\nu sx^3 - cvx) + (2\varrho + \nu - 1)x^3)f' \\ - (ab\nu^2 sx^{2\nu} + \varrho(\varrho + \nu)sx^4 + x^\nu((-b - a - 1)\nu\varrho sx^2 + cv\varrho) - \varrho(\varrho + \nu)x^2)f = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

für die Funktion

$$f(x) = x^\varrho \cdot {}_2F_1\left(\frac{a, b}{c}; sx^\nu\right).$$

Die Differentialgleichung (5.34) ist etwas unübersichtlich, daher soll sie in einem Beispiel illustriert werden.

*Beispiel.* Früher in Aufgabe 4.4 auf Seite 120 wurde gezeigt, dass

$$\arcsin x = x {}_2F_1\left(\frac{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}; x^2\right) = x^\nu \cdot {}_2F_1\left(\frac{a, b}{c}; sx^\nu\right)$$

ist. Die Arkus-Sinus-Funktion ist daher Lösung der Differentialgleichung (5.34) mit

$$\varrho = 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{2}, \quad s = 1, \quad \nu = 2,$$

also

$$-\frac{x^2 - 1}{x} f'' - f' = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - x^2)f'' = xf'. \quad (5.35)$$

Tatsächlich ist

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dx^2} \arcsin x = \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und nach Einsetzen in die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \cdot \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} - x \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Die Arkus-Sinus-Funktion ist also tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (5.35).  $\circlearrowright$

### Differentialgleichung für Funktionen, die aus ${}_0F_1$ zusammengesetzt sind

Die Substitutionen (5.33) angewendet auf die Differentialgleichung (5.30) der Funktion  ${}_0F_1$  liefert

$$x^2 f'' + (-2\varrho + (\beta - 1)\nu + 1)x f' + (-\nu^2 sx^\nu + \varrho^2 - (\beta - 1)\nu\varrho)f = 0. \quad (5.36)$$

Die nächsten zwei Abschnitte sollen zeigen, wie sich daraus für die Bessel-Funktionen wie auch die Airy-Funktionen, die sich durch  ${}_0F_1$  ausdrücken, die Besselsche und die Airysche Differentialgleichung wiedergewonnen werden kann.

*Beispiel.* Die hyperbolische Funktion

$$\sinh x = x \cdot {}_0F_1\left(\frac{-}{2}; \frac{x^2}{4}\right)$$

hat die Differentialgleichung (5.36) mit den Parametern

$$\varrho = 1, \quad s = \frac{1}{4}, \quad \nu = 2, \quad b = \frac{3}{2}.$$

Einsetzen der Parameter in (5.36) liefert

$$0 = x^2 f'' + \left( -2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \right) x f' + \left( -2^2 \frac{1}{4} x^2 + 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) f = x^2 f'' - x^2 f$$

Daraus ergibt sich die bekannte Differentialgleichung  $y'' - y = 0$  der hyperbolischen Funktionen.  $\circlearrowright$

### Besselsche Differentialgleichung

Die Besselfunktionen lassen sich in der Form

$$J_\alpha(x) = \frac{(x/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1\left(\alpha+1; -\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha \cdot {}_0F_1\left(\frac{-}{b}; sx^\nu\right) \quad (5.37)$$

schreiben. Somit sollte sich aus der Differentialgleichung (5.30) der Funktion  ${}_0F_1$  die Besselsche Differentialgleichung (5.19) rekonstruieren lassen. Dazu substituieren wir die aus (5.37) abgelesenen Parameter

$$\varrho = \alpha, \quad \nu = 2, \quad s = -\frac{1}{4}, \quad b = \alpha + 1$$

in (5.36) und erhalten die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0. \quad (5.38)$$

Dies ist tatsächlich die Besselsche Differentialgleichung.

### Die Airy-Differentialgleichung

Die in Aufgabe 5.2 untersuchte Airy-Differentialgleichung  $y'' - xy = 0$  hat die Funktionen

$$y_1(x) = {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{x^3}{9}\right) = x^\varrho \cdot {}_0F_1\left(\frac{-}{b}; sx^\nu\right) \quad \text{mit } \varrho = 0, \nu = 3, s = \frac{1}{9}, b = \frac{2}{3},$$

und

$$y_2(x) = x \cdot {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{x^3}{9}\right) = x^\varrho \cdot {}_0F_1\left(\frac{-}{b}; sx^\nu\right) \quad \text{mit } \varrho = 1, \nu = 3, s = \frac{1}{9}, b = \frac{4}{3},$$

als Lösungen. Die Differentialgleichung von  ${}_0F_1$  sollte sich in diesem Fall also auf die Airy-Differentialgleichung reduzieren lassen.

Bei der Substitution der Parameter in die Differentialgleichung (5.36) beachten wird, dass die beiden möglichen Werte für  $b$  auf  $b - 1 = \pm \frac{1}{3}$  führen, mit dem positiven Zeichen für den zweiten Fall, in dem  $\varrho = 1$  ist. So ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x^2 y'' + (-2\varrho \pm \frac{1}{3} \cdot 3 + 1)xy' + (-x^\nu + \varrho^2 \mp \frac{1}{3} \cdot 3\varrho)y &= 0 \\ x^2 y'' + (-2\varrho \pm 1 + 1)xy' + (-x^3 + \varrho^2 \mp \varrho)y &= 0 \\ x^2 y'' - x^3 y &= 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - xy = 0. \end{aligned}$$

Dies ist wie erwartet die Airy-Differentialgleichung.

### 5.4.5 Differentialgleichung der Tschebyscheff-Polynome

Die Tschebyscheff-Polynome erster Art haben die Darstellung

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) \\ T''_n(x) &= -\frac{n^2}{1-x^2} T_n(x) + n \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(n \arccos x) \end{aligned}$$

Multipliziert man  $T''_n(x)$  mit  $(1-x^2)$  und subtrahiert man  $xT'_n(x)$ , fällt der Term  $\sin(n \arccos x)$  weg und es bleibt

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) = -n^2 T_n(x),$$

die Tschebyscheff-Polynome sind also Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad (5.39)$$

sie heisst die *Tschbeyscheff-Differentialgleichung*.

### Tschebyscheff-Differentialgleichung und hypergeometrische Differentialgleichung

Die hypergeometrische Differentialgleichung hat eine ähnliche Struktur wie die Tschebyscheff-Differentialgleichung (5.39). Der Koeffizient der zweiten Ableitung hat jedoch die Nullstellen  $\pm 1$  bei der Tschebyscheff-Differentialgleichung, während es bei der hypergeometrischen Differentialgleichung die Nullstellen 0 und 1 sind. Wir verwenden daher die Substitution  $z = \frac{1}{2}(1-x)$  und  $w(z) = y(1-2z)$  und formen damit die hypergeometrische Differentialgleichung um. Der Faktor  $z(1-z)$  wird damit zu

$$z(1-z) = \frac{1}{2}(1-x)\left(1 - \frac{1}{2}(1-x)\right) = \frac{1}{2}(1-x)\frac{1}{2}(1+x) = \frac{1}{4}(1-x^2).$$

Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} w'(z) &= -2y'(1-2z) \\ w''(z) &= 4y''(1-2z), \end{aligned}$$

wir setzen sie in die hypergeometrische Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} 0 &= z(1-z)w'(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) \\ &= \frac{1}{4}(1-x^2)4y''(x) - 2\left(c - (a+b+1)\frac{1}{2}(1-x)\right)y'(x) - aby(x). \\ &= (1-x^2)y'' + (a+b+1 - 2c - (a+b+1)x)y' - aby \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung kann tatsächlich in die Form der Tschebyscheff-Differentialgleichung gebracht werden, wenn man setzt

$$\left. \begin{aligned} a &= n \\ b &= -n \\ c &= \frac{a+b+1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1-x^2)y'' + \underbrace{\left(a+b+1 - 2\frac{a+b+1}{2}\right)}_{=0} y' - \underbrace{(n-n+1)x}_{=1} y' - n(-n)y = 0. \quad (5.40)$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit (5.39). Die beiden Parameter  $a$  und  $b$  dürfen natürlich auch vertauscht werden.

### Tschebyscheff-Polynome als hypergeometrische Funktionen

Aus der Umformung der eulerschen hypergeometrischen Differentialgleichung in die Tschebyscheff-Differentialgleichung kann man jetzt ablesen, dass eine Lösung der Tschebyscheff-Differentialgleichung auch mit der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1$  geschrieben werden kann, nämlich

$$y(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} n, -n \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Wegen  $b = -n$  ist diese Funktion ein Polynom mit den Werten

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y'(1) &= n^2, \end{aligned}$$

den gleichen Werten, die auch das Tschbescheff-Polynom  $T_n(x)$  annimmt. Es folgt daher

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} n, -n \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; \frac{1-x}{2}\right). \quad (5.41)$$

Auch die Tschebyscheff-Polynome lassen sich also mit Hilfe einer hypergeometrischen Funktion schreiben, wie schon in (4.45) bemerkt wurde.

## Übungsaufgaben

**5.1.** Lösen Sie die Differentialgleichung  $y'' + y = 0$  der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes. Finden Sie Lösungen  $s(t)$  mit  $s(0) = 0$  und  $s'(0) = 1$  und  $c(t)$  mit  $c(0) = 1$  und  $c'(0) = 0$ .

*Lösung.* Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

hat die Ableitungen

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$y''(x) + y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + (k+1)(k+2) a_{k+2}) x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} a_k$$

für die Koeffizienten  $a_k$ . Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  sind bestimmt durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Für die Funktion  $s(t)$  ist  $a_0 = s(0) = 0$  und  $s'(0) = a_1 = 1$ , daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\frac{1}{1 \cdot 2} a_0 = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{2 \cdot 3} a_1 = -\frac{1}{3!} \\ a_4 &= -\frac{1}{3 \cdot 4} a_2 = 0 \\ a_5 &= -\frac{1}{4 \cdot 5} a_1 = \frac{1}{3! \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

also

$$s(t) = 1 - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots = \sin t.$$

Für die Funktion  $c(t)$  ist  $a_0 = c(0) = 1$  und  $a_1 = c'(0) = 0$ , daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{1 \cdot 2} a_1 = -\frac{1}{2!} \\ a_3 &= -\frac{1}{2 \cdot 3} a_2 = 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{3 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{2! \cdot 3} = \frac{1}{4!} \\ a_5 &= -\frac{1}{4 \cdot 5} a_4 = 0 \\ a_6 &= -\frac{1}{5 \cdot 6} a_5 = -\frac{1}{4! \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{1}{6!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

und damit

$$c(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots = \cos t. \quad \circlearrowright$$

## 5.2. Finden Sie eine Lösung der Airy Differentialgleichung

$$y'' - xy = 0$$

mit Anfangsbedingungen  $y(0) = a$  und  $y'(0) = b$ .

*Lösung.* An der Stelle  $x = 0$  folgt aus der Differentialgleichung, dass  $y''(0) = 0$  gelten muss. In einem Potenzreihenansatz der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k & \Rightarrow & & y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} \\ & & & & y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \end{aligned}$$

kann man daher  $a_2 = 0$  setzen und damit die Summation in der Reihenentwicklung für  $y''(x)$  erst bei  $k = 3$  beginnen.

Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - xy(x) \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)a_{k+3} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((k+3)(k+2)a_{k+3} - a_k) x^{k+1}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert jetzt die Rekursionsbeziehungen

$$a_{k+3} = \frac{1}{(k+3)(k+2)} a_k.$$

Da  $a_2 = 0$  ist folgt daraus auch, dass  $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$  ist.

Aus den Anfangsbedingungen liest man ab dass  $a_0 = a$  und  $a_1 = b$ , daraus kann man jetzt die Lösung konstruieren, es ist

$$y(x) = a \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots \right) + b \left( x + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \right). \quad \circlearrowright$$

**5.3.** Schreiben Sie die in Aufgabe 5.2 gefundenen Lösungen der Airy-Differentialgleichung als hypergeometrische Funktionen.

*Lösung.* Die Lösung für  $a = 1$  und  $b = 0$  hat die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot 3k} x^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3k-1)} \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 3k} x^{3k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k \cdot \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3}+1) \cdot \dots \cdot (\frac{2}{3}+k-1)} \frac{1}{3^k \cdot k!} (x^3)^k \end{aligned}$$

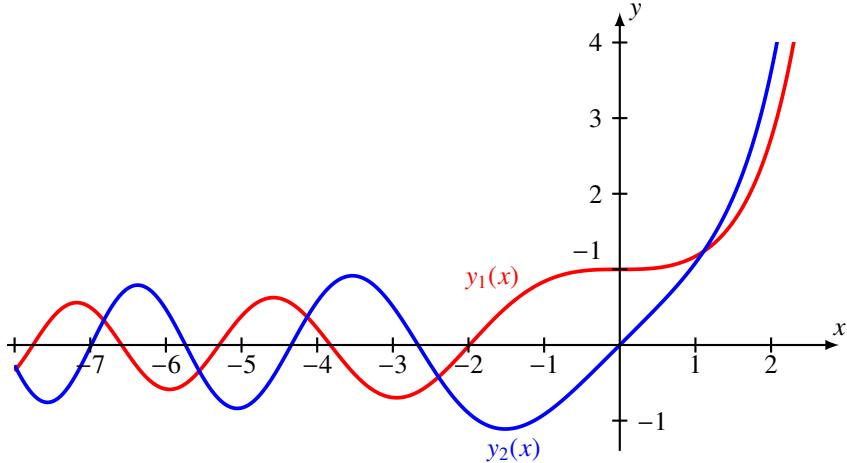


Abbildung 5.2: Plot der Lösungen der Airy-Differentialgleichung  $y'' - xy = 0$  zu den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 0$  in rot und  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$  in blau.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{2}{3})_k} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^3}{9}\right)^k = {}_0F_1\left(\frac{-}{\frac{2}{3}}; \frac{x^3}{9}\right).$$

Aus der zweiten Lösung für  $a = 0$  und  $b = 1$  muss erst der gemeinsame Faktor  $x$  ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3k \cdot (3k+1)} x^{3k} \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k+1)} \frac{1}{3^k} \frac{(x^3)^k}{k!} \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot (\frac{4}{3}+1) \cdot (\frac{4}{3}+2) \cdot \dots \cdot \frac{4}{3}+k-1} \frac{1}{(3^2)^k} \frac{(x^3)^k}{k!} \\ &= x \cdot {}_0F_1\left(\frac{-}{\frac{4}{3}}; \frac{x^3}{9}\right). \end{aligned}$$
○

**5.4.** Verwenden Sie die Funktion `gsl_sf_hyperv_0F1` oder ein Programm, welches die Reihenentwicklung der hypergeometrischen Funktion  ${}_0F_1$  direkt berechnet, um die in Aufgabe 5.2 gefundenen Lösungen der Airy-Differentialgleichung zu plotten.

*Lösung.* Die Implementation der hypergeometrische Funktion  ${}_0F_1$  in der GNU Scientific Library führt  ${}_0F_1$  auf Bessel-Funktionen zurück, was für  $c = \frac{2}{3}$  nicht möglich ist. In diesem Fall ist also eine eigene Implementation nötig. Die Plots sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

○

# Kapitel 6

## Integrale

Der Analysis-Unterricht vermittelt manchmal den Eindruck, dass sich für jede einigermassen anständige Funktion eine Stammfunktion gefunden werden kann, wenn man nur genügend schlau ist und den nötigen Fleiss in die Lösung des Problems investiert. Die Realität ist leider eine ganz andere, Ableiten ist zwar einfach, eine Stammfunktion finden ist oft viel schwieriger und manchmal schlicht unmöglich.

Der Ausweg aus dieser unangenehmen Situation ist, solche Integrale als neue spezielle Funktionen zu definieren. Eines der berühmtesten Beispiele für diesen Weg aus der Krise ist die Fehlerfunktion, die im Abschnitt 6.1 besprochen wird. Auch geometrische Anwendungen führen auf solche Integrale. Die Länge eines Ellipsenbogens kann mit Hilfe eines Integrals berechnet werden, doch scheint es nicht möglich zu sein, für den Umfang der Ellipse eine einfache Formel anzugeben, wie dies beim Kreis möglich ist. Dieses Problem führt auf eine ganze Familie von Integranden, die nicht in geschlossener Form integriert werden können, nämlich die elliptischen Funktionen. Sie werden in Kapitel 11 erklärt.

Doch wie entscheidet man, ob ein Integral tatsächlich nicht in geschlossener Form dargestellt werden kann oder ob die Versuche einfach an mangelnden eigenen Fähigkeiten gescheitert sind? Denn warum soll man eine neue spezielle Funktion definieren, wenn es dafür bereits eine gute Darstellung in geschlossener Form gibt? Der Risch-Algorithmus von Abschnitt 6.4 gibt darauf eine Antwort.

### 6.1 Die Fehlerfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer normalverteilten Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.1)$$

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable ist dann durch das Integral

$$f(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (6.2)$$

gegeben. Die Erfahrung zeigt, dass es nicht möglich ist, das Integral (6.2) in geschlossener Form auszuwerten. Die Funktion  $F_X(x)$  ist offenbar eine in Anwendungen nützliche und häufig gebrauchte

Funktion, die es verdient, in eine Standardbibliothek von Funktion aufgenommen zu werden. Dabei soll auch berücksichtigt werden, dass die neu zu definierende spezielle Funktion möglichst auch für andere Anwendungen verwendet werden kann, wie zum Beispiel die Berechnung gewisser Laplace-Transformierter. Im Folgenden soll gezeigt werden, in welcher Form genau dies geschehen kann.

### 6.1.1 Standardisierung

Die Formel 6.2 enthält die zwei Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ , sie ist daher als Basis für eine neue spezielle Funktion nicht geeignet. In diesem Abschnitt sollen sie eliminiert werden mit dem Ziel, ein neues, einfacheres Integral zu definieren, aus dem sich 6.2 leicht berechnen lässt.

#### Elimination der Parameter $\mu$ und $\sigma$

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass zu einer Zufallsvariablen  $X$  mit Erwartungswert  $E(X) = \mu$  und Varianz  $\text{var}(X) = \sigma^2$  immer eine Zufallsvariable gefunden werden kann mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Tatsächlich bekommt man für die standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (6.3)$$

die Werte

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0 \\ \text{und} \quad \text{var}(Z) &= \text{var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\text{var}(X)}{\sigma^2} = 1, \end{aligned}$$

wie versprochen. Dies bedeutet, dass sich das Integral 6.2 durch ein Integral ausdrücken lassen muss, in der die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  nicht mehr vorkommen.

Die Standardisierungsformel (6.3) deutet auch bereits an, wie man das Integral 6.2 vereinfachen kann. Dazu führen wir die Substitution  $z = (t - \mu)/\sigma$  aus und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Das Integral auf der rechten Seite enthält die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  nur noch in der Integrationsgrenze. Es kann durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (6.4)$$

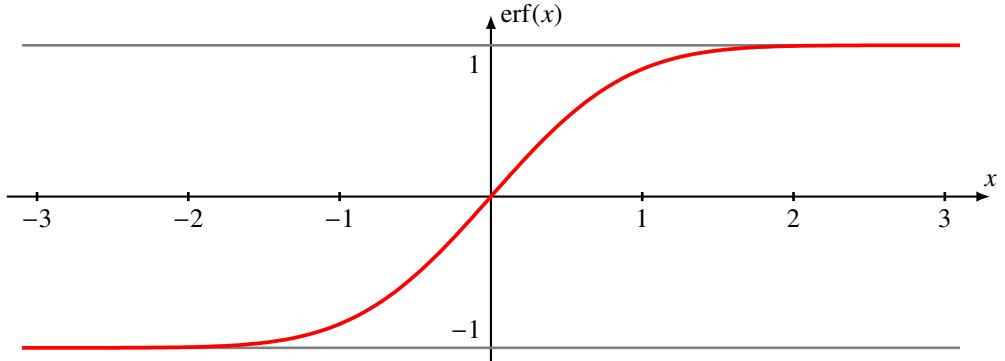
ausgedrückt werden, es ist

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Die Funktion  $\Phi(x)$  ist daher in guter Kandidate für eine neue spezielle Funktion.

#### Die Funktion $\text{erf}(x)$

Die Funktion (6.4) hat einige Nachteile, die sich als Barriere für die numerische Berechnung der Funktionswerte herausstellen könnte.

Abbildung 6.1: Graph der Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$ 

Zunächst ist  $\Phi(x)$  als ein uneigentliches Integral definiert. Eine direkte numerische Integration muss daher über ein sehr grosses Intervall erstreckt werden, um die Genauigkeit garantieren zu können. Jedoch ist bekannt, dass  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ , denn

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=1} = \frac{1}{2}.$$

Man kann daher schreiben

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (6.5)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist ein gewöhnliches Integral und ist damit viel einfacher zu berechnen.

Am Integral in (6.5) ist aber noch etwas unerfreulich, dass der Exponent komplizierter ist als nötig. Mit Hilfe der Variablentransformation  $u = z/\sqrt{2}$  erhalten wir aus dem Integral in (6.5)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2} \sqrt{2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2} du.$$

Damit sind wir bei einer Funktion angekommen, die sich gut als spezielle Funktion eignet.

**Definition 6.1.** Die Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  ist die Funktion

$$\text{erf}: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \text{erf}(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Die Funktion  $\text{erf}$  nimmt Werte zwischen  $-1$  und  $1$  an, wie man in Abbildung 6.1 sehen kann. Die horizontalen Geraden  $y = \pm 1$  sind Asymptoten. Die exakte Berechnung von  $\text{erf}(x)$  für sehr grosse Werte des Argumentes gestaltet sich schwierig, da es zur starker Auslöschung kommen kann. Da die Funktionswerte  $\text{erf}(x)$  sehr nahe bei  $1$  sind, lohnt es sich, nicht  $\text{erf}(x)$ , sondern  $1 - \text{erf}(x)$  zu berechnen.

**Definition 6.2.** Die komplementäre Fehlerfunktion ist die Funktion

$$\text{erfc}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 2] : x \mapsto \text{erfc}(x) := 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du.$$

Die verallgemeinerte Fehlerfunktion ist definiert als

$$\operatorname{erf}(a, b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-u^2} du.$$

Mit der Fehlerfunktion kann die Standardnormalverteilungsfunktion jetzt als

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

ausdrücken. Die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  kann ebenfalls mit

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

berechnet werden. Die Fehlerfunktion ist also eine “gute” spezielle Funktion, die die Berechnung von Wahrscheinlichkeitswerten von normalverteilten Zufallsvariablen vereinfacht.

### Fehlerfunktion als hypergeometrische Funktion

Die Fehlerfunktion ist eine Stammfunktion von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right).$$

Durch gliedweises Integrieren erhält man

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \dots\right)$$

Ein gemeinsamer Faktor  $x$  kann ausgeklammert werden. Die alternierenden Vorzeichen und die in Zweierschritten ansteigenden Potenzen bedeuten, dass der Klammerausdruck als Reihe

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-x^2)^1}{1!} + \frac{1}{5} \cdot \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{1}{7} \cdot \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{1}{9} \cdot \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots + \frac{1}{2k+1} \frac{(-x^2)^k}{k!} + \dots\right)$$

in  $-x^2$  geschrieben werden kann. Der Koeffizient  $1/(2k+1)$  muss jetzt noch mit Pochhammer-Symbolen geschrieben werden. Dazu wird er zunächst als  $\frac{1}{2} \cdot 1/(k+\frac{1}{2})$  geschrieben, weil der Nenner dann in Einerschritten anwächst, wie dies für Pochhammer-Symbole benötigt wird. Das Pochhammer-Symbol  $(\frac{3}{2})_k$  hat den korrekten letzten Faktor  $k + \frac{1}{2}$ , aber es hat viele zusätzliche Faktoren, nämlich alle Faktoren in  $(\frac{1}{2})_k$  ausser dem ersten. Mit einem geeigneten Zähler können diese wieder zum Verschwinden gebracht werden. So erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot (k + \frac{1}{2})} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \frac{(-x^2)^k}{k!} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot (k - \frac{1}{2})}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot (k - \frac{1}{2}) \cdot (k + \frac{1}{2})} \frac{(-x^2)^k}{k!} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot (k - \frac{1}{2})}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot (k - \frac{1}{2}) \cdot (k + \frac{1}{2})} \frac{(-x^2)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (-x^2)^k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; -x^2\right)$$

der Fehlerfunktion als hypergeometrische Funktion.

### 6.1.2 Laplace-Transformation

Wir berechnen die Laplace-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

Nach Definition der Laplace-Transformation ist dies die Funktion

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx dt.$$

Das Integrationsgebiet  $G$  ist der Teil des ersten Quadranten der  $t$ - $x$ -Ebene, für den die Ungleichung  $x \leq a/2\sqrt{t}$  gilt. Dies ist gleichbedeutend mit  $t \leq a^2/4x^2$ . Vertauscht man die Integrationsreihenfolge, erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_G e^{-st} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx dt = \int_0^\infty \int_0^{\frac{a^2}{4x^2}} e^{-st} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dt dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \int_0^{\frac{a^2}{4x^2}} e^{-st} dt dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\frac{a^2}{4x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{1}{s} \left( 1 - e^{-\frac{sa^2}{4x^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{sa^2}{4x^2}} dx \\ &= \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) - \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{sa^2}{4x^2}\right)} dx. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Der Grenzwert im ersten Term ist 1, nach Definition der Fehlerfunktion. Schreiben wir  $b = a\sqrt{s}/2$ , dann wird das Integral im zweiten Term

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{sa^2}{4x^2}\right)} dx = \int_0^\infty \exp\left(-\left(x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)\right) dx. \quad (6.7)$$

Den Exponenten im Integranden kann man wie folgt als quadratischen Ausdruck in  $x \pm a/x$  schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b^2}{x^2} &= \left(x + \frac{b}{x}\right)^2 - 2b \\ &= \left(x - \frac{b}{x}\right)^2 + 2b. \end{aligned}$$

Man kann also das Integral  $I(b)$  auf die eine oder andere Art als

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^\infty \exp\left(-\left(x + \frac{b}{x}\right)^2 + 2b\right) dx \\ \text{oder} \quad &= \int_0^\infty \exp\left(-\left(x - \frac{b}{x}\right)^2 - 2b\right) dx \end{aligned} \quad (6.8)$$

schreiben. Die Faktoren  $e^{\pm 2b}$  können aus dem Integral genommen werden. Trotzdem kann man das Integral nicht einfach ausführen.

Die Substitution  $y = x \pm \frac{b}{x}$  vereinfacht den Integranden (6.8) zwar zu  $e^{-y^2}$ , aber die Substitution für  $dx$  liefert

$$y = x \pm \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad dy = \left(1 \mp \frac{b}{x^2}\right) dx. \quad (6.9)$$

Dies kann für die Berechnung von  $I(b)$  verwendet werden. Zunächst folgt aus (6.8), dass jede konvexe Kombination der beiden Integrale mit Koeffizienten, die sich zu 1 summieren, wieder  $I(b)$  eribt. Wählen wir die Koeffizienten

$$\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{b}{x^2}\right),$$

dann heben sich die Terme mit  $b/x^2$  weg, wir erhalten die konvexe Kombination

$$I(b) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(1 - \frac{b}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x + \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \cdot e^{2b}}_{= I_+(b)} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty \left(1 + \frac{b}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \cdot e^{-2b}}_{= I_-(b)},$$

die aus zwei Integralen besteht, die einfacher berechnet werden können.

Im Integral  $I_-(b)$  können wir die Substitution (6.9) und erhalten

$$I_-(b) = \int_{-\infty}^\infty \left(1 + \frac{b}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

nach Definition der Fehlerfunktion.

Das erste Integral  $I_+(b)$  ist etwas schwieriger zu berechnen. Die Substitution  $z = b/x$  bildet das Integrationsintervall auf sich selbst ab, aber die Integrationsrichtung kehrt um. Mit

$$dz = -\frac{b}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{z^2}{b} dz$$

erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} I_+(b) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{b}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x + \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \\ &= \int_\infty^0 \left(1 - \frac{b}{b^2/z^2}\right) \exp\left(-\left(\frac{b}{z} + z\right)^2\right) \left(-\frac{b}{z^2}\right) dz \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{b}{b^2/z^2}\right) \exp\left(-\left(\frac{b}{z} + z\right)^2\right) \frac{b}{z^2} dz \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{b}{z^2} - 1\right) \exp\left(-\left(\frac{b}{z} + z\right)^2\right) dz = -I_-(b). \end{aligned}$$

Indem man auf beiden Seiten  $I_+(b)$  addiert erhält man nun  $2I_+(b) = 0$ , also auch  $I_+(b) = 0$ . Das Integral  $I_+(b)$  verschwindet also,  $I_+(b) = 0$ .

Nach all diesen Zwischenrechnungen können wir jetzt das Integral  $I(b)$  zusammensetzen. Wir finden

$$I(b) = \frac{1}{2} e^{2b} I_+(b) + \frac{1}{2} e^{-2b} I_-(b)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-a\sqrt{s}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Einsetzen in (6.6) gibt jetzt das Resultat für die Laplace-Transformierte von  $f(t)$ , sie ist

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} I(b) = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-a\sqrt{s}} \right).$$

**Satz 6.3.** Die Laplace-Transformierte der Fehlerfunktion mit Argument  $a/2\sqrt{t}$  ist

$$f(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad \circledast \quad \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-a\sqrt{s}} \right). \quad (6.10)$$

### 6.1.3 Berechnungsmethoden

Die Fehlerfunktion kann natürlich mit numerischen Integrationsmethoden berechnet werden. Diese verlangen jedoch typischerweise die Auswertung des Integranden an einer grossen Zahl von Stützstellen. Im vorliegenden Falle müsste die transzendente Exponentialfunktion sehr häufig berechnet werden, was zu sehr langer Laufzeit führt. Gefragt sind daher Berechnungsverfahren, die möglichst nur arithmetische Operationen verwenden, die sehr schnell in Hardware ausgeführt werden können.

#### Taylorreihe

Die Fehlerfunktion ist das Integral einer Exponentialfunktion, die mit Hilfe einer Potenzreihe für beliebige Argumente berechnet werden kann. Aus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

erhalten wir die Potenzreihe

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}, \quad (6.11)$$

die für alle Werte von  $t$  konvergiert.

Da die Reihe (6.11) absolut konvergiert, darf man sie gliedweise integrieren und erhält

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}. \quad (6.12)$$

Diese Reihenentwicklung ist sehr effizient für kleine Werte von  $x$ . Für grosse Werte von  $x$  entstehen aber sehr grosse Zwischenterme in der Reihe, was zu Auslöschung und damit zu Genauigkeitsverlust führt.

#### Hypergeometrische Funktion

Die Taylor-Reihe (6.12) der Fehlerfunktion kann auch mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen geschrieben werden. Da nur ungerade Potenzen vorkommen, klammern wir zunächst einen gemeinsamen Faktor  $x$  aus:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{(-x^2)^k}{k!}.$$

Der Bruch  $1/(2k + 1)$  muss jetzt noch mit Hilfe von Pochhammer-Symbolen geschrieben werden. Dazu beachten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{3}{2} + k - 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1)(\frac{3}{2} + 2) \dots (\frac{3}{2} + k - 2)}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1)(\frac{3}{2} + 2) \dots (\frac{3}{2} + k - 2)(\frac{3}{2} + k - 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + 2)(\frac{1}{2} + 3) \dots (\frac{1}{2} + k - 1)}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1)(\frac{3}{2} + 2) \dots (\frac{3}{2} + k - 2)(\frac{3}{2} + k - 1)} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k}. \end{aligned}$$

Somit ist die Fehlerfunktion als hypergeometrische Funktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

gegeben.

### Kettenbruchentwicklung

Besonders für grosse  $x$  interessiert man sich mehr für  $\operatorname{erfc}(x)$  als für  $\operatorname{erf}(x)$ . Die Potenzreihe (6.12) ist dafür wegen der bereits erwähnten Auslöschung besonders ungeeignet. Man kann aber die Kettenbruchentwicklung

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2ze^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \cfrac{1}{z + \cfrac{\frac{1}{2}}{z + \cfrac{\frac{2}{2}}{z + \cfrac{\frac{3}{2}}{z + \cfrac{\frac{4}{2}}{z + \cfrac{\frac{5}{2}}{z + \cfrac{\frac{6}{2}}{z + \dots}}}}}} \quad (6.13)$$

finden, die in [buch:pade] dargestellt wird. Für grosse  $z$  liefert dieser Kettenbruch besonders schnell konvergierende Näherungsbrüche für  $\operatorname{erfc}(z)$ .

### Interpolation

Die GNU Scientific Library [buch:library:gsl] verwendet eine Reihe von Tschebyscheff-Approximationen, die für die Intervalle, in denen sie definiert sind, besonders effizient zu berechnende Approximation mit Maschinengenauigkeit ergeben.

## 6.2 Integraleigenschaften hypergeometrischer Funktionen

Die hypergeometrischen Funktionen wurden bisher einerseits als Reihen mit einer speziellen Rekursionsrelation der Reihenglieder und als Lösungen einer speziellen Art von Differentialgleichung

erkannt. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob man sie auch durch Integrale definieren kann.

### 6.2.1 Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$

Das Integral

$$f(x) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt$$

kann im allgemeinen nicht in geschlossener Form evaluiert werden. Es wäre daher naheliegend, es als neues spezielle Funktion zu definieren. Die folgende Rechnung soll aber zeigen, dass es sich durch die bereits bekannte hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$  ausdrücken lässt.

Die Newtonsche binomische Reihe ermöglicht, den  $x$  enthaltenden Faktor als

$$(1-xt)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k t^k$$

zu schreiben. Setzt man dies ins Integral ein, erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{k+b-1} (1-t)^{c-b-1} t^k dt.$$

Das Integral ist die Beta-Funktion  $B(k+b, c-b)$  und kann daher mit Hilfe der Gamma-Funktion geschrieben werden. Es gilt

$$B(k+b, c-b) = \frac{\Gamma(k+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)}.$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion kann man

$$\begin{aligned} \Gamma(u+k) &= \Gamma(u+k-1)(u+k-1) = \Gamma(u+k-2)(u+k-2)(u+k-1) \\ &= \dots \\ &= \Gamma(u)u(u+1)\cdots(u+k-2)(u+k-1) \end{aligned}$$

schreiben, womit das Integral zu

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \frac{\Gamma(k+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \frac{\Gamma(b)(b)_k\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)(c)_k} \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} x^k = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; x) \end{aligned}$$

vereinfacht werden kann. Damit ist das Integral bestimmt. Durch Auflösung nach der hypergeometrischen Funktion bekommt man die folgende Integraldarstellung.

**Satz 6.4** (Euler). *Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$  kann durch das Integral*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (6.14)$$

dargestellt werden.

## Alternative Parametrisierungen

Die Substitution  $t = \sin^2 s$  ermöglicht eine alternative Parametrisierung der Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion. Wenden wir sie auf (6.14) an, erhalten wir wegen  $dt = 2 \cos s \sin s ds$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(b-1)}(s) (1 - \sin^2 s)^{c-b-1} (1 - z \sin^2 s)^{-a} \cos s \sin s ds \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b-1}(s) \cos^{2c-2b-1}(s) (1 - z \sin^2 s)^{-a} ds. \end{aligned}$$

Die Substitution  $t = s/(s+1)$  wird das Integral zu einem Integral über  $[0, \infty)$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \left(\frac{s}{s+1}\right)^{b-1} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{c-b-1} \left(\frac{1+s-zs}{s+1}\right)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{s^{b-1}}{(s+1)^{c-a}} (1+s-zs)^{-a} dt \end{aligned}$$

### 6.2.2 Integraldarstellung als Integraltransformation

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, wie sich die Funktion  ${}_2F_1$  als ein Integral des Integranden

$$t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a}$$

ausdrücken lässt. Der letzte Faktor  $(1-xt)^{-a}$  kann mit der Binomialreihe

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \\ &= 1 + \frac{-\alpha}{1}(-x) + \frac{-\alpha(-\alpha+1)}{2!}(-x)^2 + \frac{-\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)}{3!}(-x)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{k!} (-x)^k = {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ -\alpha \end{matrix}; -x\right) \end{aligned}$$

als hypergeometrische Funktion geschrieben werden. Die Integraldarstellung von  ${}_2F_1$  kann daher auch als

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} {}_0F_1(; a; zt) dt$$

Eine gewisse Ähnlichkeit zur Laplace-Transformation ist dieser Formel nicht abzusprechen. Die Funktion  $t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}$  wird statt mit der Exponentialfunktion  $e^{xt} = {}_0F_0(xt)$  mit der hypergeometrischen Funktion  ${}_0F_1(; a; xt)$  multipliziert und integriert. Dies suggeriert, dass sich möglicherweise jede der hypergeometrischen Funktionen  ${}_p+1F_{q+1}$  durch ein Integral, dessen Integrand  ${}_pF_q$  enthält, ausdrücken lässt.

**Satz 6.5.** Es gilt die sogenannte Euler-Transformationsformel

$${}_p+1F_{q+1}\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_{q+1} \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(b_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1}-a_{p+1})} \int_0^1 t^{a_{p+1}-1} (1-t)^{b_{q+1}-a_{p+1}-1} {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; zt\right) dt$$

*Beweis.* Sei  $I$  das Integral auf der rechten Seite. Wir setzen die Reihenentwicklung der Funktion  ${}_pF_q$  in die Integralformel ein und erhalten

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t^{a_{p+1}-1} (1-t)^{b_{q+1}-a_{p+1}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{(zt)^k}{k!} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 t^{a_{p+1}+k-1} (1-t)^{b_{q+1}-a_{p+1}-1} dt. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite ist das Beta-Integral  $B(a_{p+1} + k, b_{q+1} - a_{p+1})$ :

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} B(a_{p+1} + k, b_{q+1} - a_{p+1}).$$

Mit der Rekursionsformel aus Lemma 4.10 für das Beta-Integral folgt

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} \frac{(a_{p+1})_k}{(b_{q+1})_k} B(a_{p+1}, b_{q+1} - a_{p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_{p+1})_k}{(b_1)_k \cdots (b_{q+1})_k} \frac{z^k}{k!} \frac{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})}{\Gamma(b_{q+1})} \\ &= \frac{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})}{\Gamma(b_{q+1})} {}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_{q+1} \end{matrix}; z\right). \end{aligned}$$

Auflösen nach  ${}_{p+1}F_{q+1}$  ergibt die behauptete Formel.  $\square$

Auch die Euler-Transformation lässt sich mit Hilfe der Substitution  $t = \sin^2 s$  in eine alternative Parametrisierung umschreiben. Sie ist

$$\begin{aligned} {}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_{q+1} \end{matrix}; z\right) &= \frac{2\Gamma(b_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})} \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a_{p+1}-2}(s) \cos^{2b_{q+1}-2a_{p+1}-2}(s) {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \sin^2 s\right) \sin s \cos s ds \\ &= \frac{2\Gamma(b_{q+1})}{\Gamma(a_{p+1})\Gamma(b_{q+1} - a_{p+1})} \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a_{p+1}-1}(s) \cos^{2b_{q+1}-2a_{p+1}-1}(s) {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \sin^2 s\right) ds. \end{aligned}$$

## 6.3 Differentialkörper und das Integrationsproblem

Die Einführung einer neuen Funktion  $\text{erf}(x)$  wurde durch die Behauptung gerechtfertigt, dass es für den Integranden  $e^{-x^2}$  keine Stammfunktion in geschlossener Form gäbe. Die Fehlerfunktion ist bei weitem nicht die einzige mit dieser Eigenschaft. Doch woher weiß man, dass es keine solche Funktion gibt, und was heißt überhaupt “Stammfunktion in geschlossener Form”? In diesem Abschnitt wird daher ein algebraischer Rahmen entwickelt, in dem diese Frage sinnvoll gestellt werden kann. Das ultimative Ziel, welches aber erst in Abschnitt 6.4 in Angriff genommen wird, ist ein Computer-Algorithmus, der Integrale in geschlossener Form findet oder beweist, dass dies für einen gegebenen Integranden nicht möglich ist.

### 6.3.1 Rationale Funktionen und Funktionenkörper

Welche Funktionen sollen als Antwort auf die Frage nach einer Stammfunktion akzeptiert werden? Polynome in der unabhängigen Variablen  $x$  sollten sicher dazu gehören, also alles, was man mit Hilfe der Multiplikation, Addition und Subtraktion aus Koeffizienten zum Beispiel in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und der unabhängigen Variablen aufbauen kann. Doch welche weiteren Operationen sollen zugelassen werden und was lässt sich über die entstehende Funktionenmenge aussagen?

#### Körper

Die kleinste Zahlenmenge, in der alle arithmetischen Operationen soweit sinnvoll durchgeführt werden können, ist die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen. Etwas formaler ist eine solche Menge, in der die Arithmetik uneingeschränkt ausgeführt werden kann, ein Körper gemäss der folgenden Definition.

**Definition 6.6.** Eine Körper ist eine Menge  $K$  mit zwei Verknüpfungen  $+$ , die Addition, und  $\cdot$ , die Multiplikation, welche die folgenden Eigenschaften haben.

Addition:

A.1) assoziativ:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  für alle  $a, b, c \in K$

A.2) kommutativ:  $a + b = b + a$  für alle  $a, b \in K$

A.3) Neutrales Element der Addition: es gibt ein Element  $0 \in K$  mit der Eigenschaft  $a + 0 = a$  für alle  $a \in K$

A.4) Additiv inverses Element: zu jedem Element  $a \in K$  gibt es das Element  $-a$  mit der Eigenschaft  $a + (-a) = 0$ .

Ausserdem gilt das Distributivgesetz: für alle  $a, b, c \in K$  gilt  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ . Die Menge  $K^*$  heisst auch die Einheitengruppe oder die Gruppe der invertierbaren Elemente des Körpers.

Das Assoziativgesetz A.1 besagt, dass Summen mit beliebig vielen Termen ohne Klammern geschrieben werden kann, weil es nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge die Additionen ausgeführt werden. Ebenso für das Assoziativgesetz M.1 der Multiplikation. Die Kommutativgesetze A.2 und M.2 implizieren, dass man nicht auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren achten muss. Das Distributivgesetz schliesslich besagt, dass man Produkte ausmultiplizieren oder gemeinsame Faktoren ausklammern kann, wie man es in der Schule gelernt hat.

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bilden ebenfalls einen Körper, die von den rationalen Zahlen geerbten Eigenschaften der Verknüpfungen setzen sich auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  fort. Es lassen sich allerdings auch Zahlkörper zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  konstruieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

*Beispiel.* Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Die Rechenoperationen haben alle verlangten Eigenschaften, wenn gezeigt werden kann, dass Produkte und Quotienten von Zahlen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  wieder in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  sind. Dazu rechnet man

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} &= \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \cdot \frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd+(-ad+bc)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} \\ &= \underbrace{\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{-ad+bc}{c^2-2d^2}\sqrt{2}}_{\in \mathbb{Q}} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned} \quad \circlearrowright$$

## Rationalen Funktionen

Die als Antworten auf die Frage nach einer Stammfunktion akzeptablen Funktionen sollten alle rationalen Zahlen sowie die unabhängige Variable  $x$  enthalten. Außerdem sollte man beliebige arithmetische Operationen mit diesen Ausdrücken durchführen können. Mit Addition, Subtraktion und Multiplikation entstehen aus den rationalen Zahlen und der unabhängigen Variablen die Polynome  $\mathbb{Q}[x]$  (siehe auch Abschnitt 1.1).

**Definition 6.7.** *Die Menge*

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x] \wedge q(x) \neq 0 \right\},$$

*bestehend aus allen Quotienten von Polynomen, deren Nenner nicht das Nullpolynom ist, heisst der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ .*

Die Definition erlaubt, dass der Nenner Nullstellen hat, die sich in Polen der Funktion äussern. Die Eigenschaften eines Körpers sind sicher erfüllt, wenn wir uns nur davon überzeugen können, dass die arithmetischen Operationen nicht aus dieser Funktionsmenge herausführen. Dazu muss man nur verstehen, dass die Operation des gleichnamig Machens zweier Brüche auch für Nenner funktioniert, die Polynome sind, und die Summe zweier Brüche von Polynomen wieder in einen Bruch von Polynomen umwandelt.

## Warum die Beschränkung auf rationale Zahlen?

Aus mathematischer Sicht gibt es gute Gründe, Analysis im Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  zu betreiben. Da Ableitung und Integral als Grenzwerte definiert sind, stellt diese Wahl des Körpers sicher, dass die Grenzwerte auch tatsächlich existieren. Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert, dass über  $\mathbb{C}$  jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegt werden kann.

Der Einfachheit der Analyse in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  steht die Schwierigkeit gegenüber, beliebige Elemente von  $\mathbb{R}$  in einem Computer exakt darzustellen. Für Brüche in  $\mathbb{Q}$  gibt es eine solche Darstellung durch Paare von Ganzzahlen, wie sie die GNU Multiprecision Arithmetic Library [**buch:gmp**] realisiert. Irrationale Zahlen dagegen können nur exakt gehandhabt werden, wenn man im wesentlichen symbolisch mit ihnen rechnet. Die Grundlage dafür wird in Abschnitt 6.3.2 gelegt.

### 6.3.2 Körpererweiterungen

Das Beispiel des Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  auf Seite 174 illustriert eine Möglichkeit, einen kleinen Körper zu vergrössern. Das Prinzip ist verallgemeinerungsfähig und soll in diesem Abschnitt erarbeitet werden.

## Algebraische Erweiterungen

Der Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  entsteht aus dem Körper  $\mathbb{Q}$  dadurch, dass man die Zahl  $\sqrt{2}$  hinzufügt und alle erlaubten arithmetischen Operationen zulässt. Die Darstellung von Elementen von  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  als  $a+b\sqrt{2}$  ist möglich, weil die Zahl  $\alpha = \sqrt{2}$  die algebraische Relation

$$\alpha^2 - 2 = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$$

erfüllt. Voraussetzung für diese Aussage ist, dass es die Zahl  $\sqrt{2}$  in einem geeigneten grösseren Körper gibt. Die reellen oder komplexen Zahlen bilden einen solchen Körper. Wir verallgemeinern diese Situation wie folgt.

**Definition 6.8.** Ist  $K$  ein Körper, dann heisst ein Körper  $L$  mit  $K \subset L$  ein Erweiterungskörper von  $K$ .

**Definition 6.9.** Sei  $K \subset L$  eine Körpererweiterung. Das Element  $\alpha \in L$  heisst algebraisch über  $K$ , wenn es ein Polynom  $p(x) \in K[x]$  gibt derart, dass  $\alpha$  eine Nullstelle von  $p(x)$  ist, also gilt mit  $p(\alpha) = 0$ . Das normierte Polynom  $m(x)$  geringsten Grades, welches  $m(\alpha) = 0$  erfüllt, heisst das Minimalpolynom von  $\alpha$ .

Man sagt auch  $\alpha$  ist algebraisch vom Grad  $n$ , wenn das Minimalpolynom den Grad  $n$  hat. Wenn  $\alpha \neq 0$  algebraisch ist, dann ist auch  $1/\alpha$  algebraisch, wie das folgende Argument zeigt. Für das Minimalpolynom  $m(x)$  von  $\alpha$ , ist  $m(\alpha) = 0$ . Teilt man diese Gleichung durch  $\alpha^n$  teilt, erhält man

$$m_0 \frac{1}{\alpha^n} + m_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \dots + m_{n-1} \frac{1}{\alpha} + 1 = 0,$$

das Polynom

$$\hat{m}(x) = m_0 x^n + m_1 x^{n-1} + \dots + m_{n-1} x + 1 \in K[x]$$

hat also  $\alpha^{-1}$  als Nullstelle. Das Polynom  $\hat{m}(x)$  beweist daher, dass  $\alpha^{-1}$  algebraisch ist.

Die Zahl  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  ist also algebraisch über  $\mathbb{Q}$  und jede andere Quadratwurzel von Elementen von  $\mathbb{Q}$  ist ebenfalls algebraisch über  $\mathbb{Q}$ . Auch der Körper  $\mathbb{Q}(\alpha)$  kann für jede andere Quadratwurzel auf die genau gleiche Art wie für  $\sqrt{2}$  konstruiert werden.

**Definition 6.10.** Sei  $K \subset L$  eine Körpererweiterung und  $\alpha \in L$  ein algebraisches Element mit Minimalpolynom  $m(x) \in K[x]$ . Dann heisst die Menge

$$K(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n \mid a_i \in K\} \quad (6.15)$$

mit  $n = \deg m(x) - 1$  der durch Adjunktion oder Hinzufügen von  $\alpha$  erhaltene Erweiterungskörper.

Wieder muss nur überprüft werden, dass jedes Produkt oder jeder Quotient von Ausdrücken der Form (6.15) wieder in diese Form gebracht werden kann. Dazu sei

$$m(x) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

das Minimalpolynom von  $\alpha$ . Die Gleichung  $m(\alpha) = 0$  kann nach  $\alpha^n$  aufgelöst werden und liefert

$$\alpha^n = -m_0 - m_1 \alpha - m_2 \alpha^2 - \dots - m_{n-1} \alpha^{n-1}.$$

Damit kann jede Potenz von  $\alpha$  mit einem Exponenten grösser als  $n$  in eine Linearkombination von Potenzen mit kleineren Exponenten reduziert werden. Ein Polynom in  $\alpha$  kann also immer auf die Form (6.15) gebracht werden.

Es muss aber noch gezeigt werden, dass auch der Kehrwert eines Elements der Form (6.15) in dieser Form geschrieben werden kann. Sei also  $a(\alpha)$  so ein Element, dann sind die beiden Polynome  $a(x)$  und  $m(x)$  teilerfremd, der grösste gemeinsame Teiler ist 1. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus kann man zwei Polynome  $s(x)$  und  $t(x)$  finden derart, dass  $s(x)a(x) + t(x)m(x) = 1$ . Setzt man  $\alpha$  für  $x$  ein, verschwindet das Minimalpolynom und es bleibt

$$s(\alpha)a(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad s(\alpha) = \frac{1}{a(\alpha)}.$$

Damit ist  $s(\alpha)$  eine Darstellung von  $1/a(\alpha)$  in der Form (6.15).

## Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit  $i$  hat die Eigenschaft, dass  $i^2 = -1$ , insbesondere ist sie Nullstelle des Polynoms  $m(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ . Die Menge  $\mathbb{Q}(i)$  ist daher eine algebraische Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}$  bestehend aus den komplexen Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil.

## Transzendenten Erweiterungen

Nicht alle Zahlen in  $\mathbb{R}$  sind algebraisch. Lindemann bewies 1882 einen allgemeinen Satz, aus dem folgt, dass  $\pi$  und  $e$  nicht algebraisch sind, es gibt also kein Polynom mit rationalen Koeffizienten, welches  $\pi$  oder  $e$  als Nullstelle hat.

**Definition 6.11.** Eine Zahl  $\alpha \in L$  in einer Körpererweiterung  $K \subset L$  heisst transzendent, wenn  $\alpha$  nicht algebraisch ist, wenn es also kein Polynom in  $K[x]$  gibt, welches  $\alpha$  als Nullstelle hat.

Die Zahlen  $\pi$  und  $e$  sind also transzendent. Eine andere Art, diese Eigenschaft zu beschreiben ist zu sagen, dass die Potenzen

$$1 = \pi^0, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots$$

linear unabhängig sind. Gäbe es nämlich eine lineare Abhängigkeit, dann gäbe es Koeffizienten  $l_i$  derart, dass

$$l_0 + l_1\pi^1 + l_2\pi^2 + \dots + l_{n-1}\pi^{n-1} + l_n\pi^n = l(\pi) = 0,$$

und damit wäre dann ein Polynom gefunden, welches  $\pi$  als Nullstelle hat.

Selbstverständlich kann man zu einem transzententen Element  $\alpha$  immer noch einen Körper konstruieren, der alle Zahlen enthält, welche man mit den arithmetischen Operationen aus  $\alpha$  bilden kann. Man kann ihn schreiben als

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \mid p(x), q(x) \in K[x] \wedge p(x) \neq 0 \right\},$$

aber die Vereinfachungen zur Form (6.15), die bei einem algebraischen Element  $\alpha$  möglich waren, können jetzt nicht mehr durchgeführt werden.  $K \subset K(\alpha)$  ist zwar immer noch eine Körpererweiterung, aber  $K(\alpha)$  ist nicht mehr ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die Körpererweiterung  $K \subset K(\alpha)$  heisst *transzendent*.

## Rationale Funktionen als Körpererweiterung

Die unabhängige Variable wird bei Rechnen so behandelt, dass die Potenzen alle linear unabhängig sind. Dies ist die Grundlage für den Koeffizientenvergleich. Der Körper der rationalen Funktion  $K(x)$  ist also eine transzendenten Körpererweiterung von  $K$ .

## Algebraische Funktionen

Für das Integrationsproblem möchten wir nicht nur rationale Funktionen verwenden können, sondern auch Wurzelfunktionen. Wir möchten also zum Beispiel auch mit der Funktion  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  und allem, was man mit arithmetischen Operationen daraus machen kann, arbeiten können. Eine Körpererweiterung, die  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  enthält, enthält auch alles, was man daraus bilden kann. Doch wie bekommen wir die Funktion  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  in den Körper?

Die Art und Weise, wie man Wurzeln in der Schule kennengelernt ist als eine neue Operation, die zu einer Zahl die Quadratwurzel liefert. Diese Idee, den Körper mit einer weiteren Funktion anzureichern, führt über nicht auf eine nützliche neue algebraische Struktur. Wir dürfen daher  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  nicht als die Zusammensetzung einer einzelnen neuen Funktion  $\sqrt{\phantom{x}}$  mit einem Polynom betrachten.

Die Wurzel  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ist aber auch die Nullstelle des Polynoms

$$p(z) = z^2 - [ax^2 + bx + c] \in K(x)[z]$$

mit Koeffizienten in  $K(x)$ . Die eckigen Klammern sollen helfen, die Koeffizienten in  $K(x)$  zu erkennen. Die Funktion  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ist also algebraisch über  $K(x)$ . Einen Funktionenkörper, der die Funktion enthält, kann man also erhalten, indem man den Körper  $K(x)$  um das über  $K(x)$  algebraische Element  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  zu  $K(x, y) = K(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  erweitert. Wurzelfunktionen werden daher nicht als Zusammensetzungen, sondern als algebraische Erweiterungen eines Funktionenkörpers betrachtet.

## Konjugation

Die komplexen Zahlen sind die algebraische Erweiterung der reellen Zahlen um die Nullstelle  $i$  des Polynoms  $m(x) = x^2 + 1$ . Die Zahl  $-i$  ist aber auch eine Nullstelle von  $m(x)$ , die mit algebraischen Mitteln nicht von  $i$  unterscheidbar ist. Die komplexe Konjugation  $a + bi \mapsto a - bi$  vertauscht die beiden Nullstellen des Minimalpolynoms.

Ähnliches gilt für die Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$  sind beide Nullstellen des Minimalpolynoms  $m(x) = x^2 - 2$ , die mit algebraischen Mitteln nicht unterscheidbar sind. Sie haben zwar verschiedene Vorzeichen, doch ohne eine Ordnungsrelation können diese nicht unterschieden werden. Eine Ordnungsrelation zwischen rationalen Zahlen lässt sich zwar definieren, aber die Zahl  $\sqrt{2}$  ist nicht rational, es braucht also eine zusätzliche Annahme, zum Beispiel die Identifikation von  $\sqrt{2}$  mit einer reellen Zahl in  $\mathbb{R}$ , wo der Vergleich möglich ist.

Auch in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  ist die Konjugation  $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$  eine Selbstabbildung, die die Körperoperationen respektiert.

Das Polynom  $m(x) = x^2 - x - 1$  hat die Nullstellen

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}. \end{cases}$$

Sie erfüllen die gleiche algebraische Relation  $x^2 = x + 1$ . Sie sind sowohl im Vorzeichen wie auch im absoluten Betrag verschieden, beides verlangt jedoch eine Ordnungsrelation als Voraussetzung, die uns fehlt. Aus beiden kann man mit rationalen Operationen  $\sqrt{5}$  gewinnen, denn

$$\sqrt{5} = 4\varphi - 1 = -4\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\varphi) = \mathbb{Q}(-1/\varphi).$$

Die Abbildung  $a + b\varphi \mapsto a - b/\varphi$  ist eine Selbstabbildung des Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , welche die beiden Nullstellen vertauscht.

Dieses Phänomen gilt für jede algebraische Erweiterung. Die Nullstellen des Minimalpolynoms, welches die Erweiterung definiert, sind grundsätzlich nicht unterscheidbar. Mit der Adjunktion einer Nullstelle enthält der Erweiterungskörper auch alle anderen. Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei Nullstellen des Minimalpolynoms, dann definiert die Abbildung  $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$  eine Selbstabbildung, die die Nullstellen permutiert.

Die algebraische Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  ist nicht unterscheidbar von  $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(x, -\sqrt{ax^2 + bx + c})$ . Für das Integrationsproblem bedeutet dies, dass alle Methoden so formuliert werden müssen, dass die Wahl der Nullstellen auf die Lösung keinen Einfluss haben.

### 6.3.3 Differentialkörper und ihre Erweiterungen

Die Ableitung wird in den Grundvorlesungen der Analysis jeweils als ein Grenzprozess eingeführt. Die praktische Berechnung von Ableitungen verwendet aber praktisch nie diese Definition, sondern fast ausschließlich die rein algebraischen Ableitungsregeln. So wie die Wurzelfunktionen im letzten Abschnitt als algebraische Körpererweiterungen erkannt wurden, muss jetzt auch für die Ableitung eine rein algebraische Definition gefunden werden. Die entstehende Struktur ist der Differentialkörper, der in diesem Abschnitt definiert werden soll.

#### Derivation

Für die praktische Berechnung der Ableitung einer Funktion verwendet man in erster Linie die bekannten Rechenregeln. Dazu gehören für zwei Funktionen  $f$  und  $g$

- Linearität:  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$  für Konstanten  $\alpha, \beta$ .
- Produktregel:  $(fg)' = f'g + fg'$ .
- Quotientenregel:  $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ .

Die ebenfalls häufig verwendete Kettenregel  $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$  für zusammengesetzte Funktionen wird später kaum benötigt, da wir Verkettungen durch Körpererweiterungen ersetzen wollen. Die Ableitung hat somit die rein algebraischen Eigenschaften einer Derivation gemäss folgender Definition.

**Definition 6.12.** Sei  $\mathcal{F}$  ein Körper. Eine Derivation ist eine lineare Abbildung  $D: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Eigenschaft

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg).$$

Ein Differentialkörper ist ein Körper mit einer Derivation.

Die Ableitung in einem Funktionenkörper ist eine Derivation, die sich zusätzlich dadurch auszeichnet, dass  $Dx = x' = 1$ . Sie wird weiterhin mit dem Strich bezeichnet.

#### Ableitungsregeln

Die Definition einer Derivation macht keine Aussagen über Quotienten, diese kann man aber aus den Eigenschaften einer Derivation sofort ableiten. Wir schreiben  $q = f/g$  für  $f, g \in \mathcal{F}$ , dann ist

$f = qg$ . Nach der Kettenregel gilt  $f' = q'g + qg'$ . Substituiert man darin  $q = f/g$  und löst nach  $q'$  auf, erhält man

$$f' = q'g + \frac{fg'}{g} \quad \Rightarrow \quad q' = \frac{1}{g} \left( f' - \frac{fg'}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

### Konstantenkörper

Die Ableitung einer Konstanten verschwindet. Beim Hinzufügen von Funktionen zu einem Funktionskörper können weitere Konstanten hinzukommen, ohne dass dies auf den ersten Blick sichtbar wird. Zum Beispiel enthält  $\mathbb{Q}(x, \sqrt{x+\pi})$  wegen  $(\sqrt{x+\pi})^2 - x = \pi$  auch die Konstante  $\pi$ . Eine Derivation ermöglicht dank des nachfolgenden Satzes auch, solche Konstanten zu erkennen.

**Satz 6.13.** Sei  $\mathcal{F}$  ein Körper und  $D$  eine Derivation in  $\mathcal{F}$ . Dann ist die Menge  $C = \{a \in \mathcal{F} \mid Da = 0\}$  ein Körper.

*Beweis.* Es muss gezeigt werden, dass Summe und Produkt von Element von  $C$  wieder in  $C$  liegen. Wenn  $Da = Db = 0$ , dann ist  $D(a+b) = Da + Db = 0$ , also ist  $a+b \in C$ . Für das Produkt gilt  $D(ab) = (Da)b + a(Db) = 0b + a0 = 0$ , also ist auch  $ab \in C$ .  $\square$

Die Menge  $C$  heisst der *Konstantenkörper* von  $\mathcal{F}$ .

### Ableitung und algebraische Körpererweiterungen

Die Rechenregeln in einem Differentialkörper  $\mathcal{F}$  legen auch die Ableitung eines algebraischen Elements fest. Sei  $m(z) = m_0 + m_1z + \dots + m_{n-1}z^{n-1} + z^n$  das Minimalpolynom eines über  $\mathcal{F}$  algebraischen Elements  $f$ . Aus  $m(f) = 0$  folgt durch Ableiten

$$0 = m(f)' = m'_0 + (m'_1f + m_1f') + (m'_2f + m_12f'f) + \dots + (m'_{n-1}f^{n-1} + m_{n-1}(n-1)f'f^{n-2}) + nf'f^{n-1}.$$

Zusammenfassen der Ableitung  $f'$  auf der linken Seite liefert die Gleichung

$$f'(m_1 + 2m_2f + \dots + (n-1)m_{n-1}f^{n-2} + nf^{n-1}) = m'_0 + m'_1f + m'_2f^2 + \dots + m'_{n-1}f^{n-1} + f^n,$$

aus der

$$f' = \frac{m'_0 + m'_1f + m'_2f^2 + \dots + m'_{n-1}f^{n-1} + f^n}{m_1 + 2m_2f + \dots + (n-1)m_{n-1}f^{n-2} + nf^{n-1}}$$

als Element von  $\mathcal{F}(g)$  berechnet werden kann. Die Ableitungsoperation lässt sich somit auf die Körpererweiterung  $\mathcal{F}(f)$  fortsetzen.

*Beispiel.* Das über  $\mathbb{Q}(x)$  algebraische Element  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  hat das Minimalpolynom

$$m(z) = z^2 - [ax^2 + bx + c] \in \mathbb{Q}(x)[z]$$

mit Koeffizienten  $m_0 = ax^2 + bx + c$ ,  $m_1 = 0$  und  $m_2 = 1$ . Es hat die Ableitung

$$y' = \frac{m'_0}{2m_2y} = \frac{2ax + b}{2y} \in \mathbb{Q}(x, y)$$

wegen  $m'_0 = 2ax + b$ .  $\circlearrowright$

**Definition 6.14.** Eine differentielle Körpererweiterung ist eine Körpererweiterung  $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$  von Differentialkörpern derart, dass die Ableitungen  $D_{\mathcal{K}}$  in  $\mathcal{K}$  und  $D_{\mathcal{F}}$  in  $\mathcal{F}$  übereinstimmen:  $D_{\mathcal{K}}g = D_{\mathcal{F}}g$  für alle  $g \in \mathcal{K}$ .

## Logarithmus und Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus sind nicht algebraisch über  $\mathbb{Q}(x)$ , sie lassen sich nicht durch eine algebraische Gleichung charakterisieren. Sie zeichnen sich aber durch besondere Ableitungseigenschaften aus. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen garantiert, dass eine Funktion durch eine Differentialgleichung und Anfangsbedingungen festgelegt ist. Für die Exponentialfunktion und der Logarithmus haben die Ableitungseigenschaften

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{und} \quad x \log'(x) = 1.$$

In der algebraischen Beschreibung eines Funktionenkörpers gibt es das Konzept des Wertes einer Funktion an einer bestimmten Stelle nicht. Somit können keine Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Da die Gleichung für  $\exp$  linear sind, sind Vielfache einer Lösung wieder Lösungen, insbesondere ist mit  $\exp(x)$  auch  $a \exp(x)$  eine Lösung. Die Gleichung für  $\log$  ist nicht linear, aber es ist  $\log'(x) = 1/x$ ,  $\log$  ist eine Stammfunktion von  $1/x$ , die nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Tatsächlich gilt

$$x(\log(x) + a)' = x \log(x) + xa' = x \log(x) = 1,$$

die Funktion  $\log(x) + a$  ist also auch eine Lösung für den Logarithmus.

Die Eigenschaft, dass die Exponentialfunktion die Umkehrfunktion des Logarithmus ist, lässt sich mit den Mitteln eines Differentialkörpers nicht ausdrücken.

### 6.3.4 Das Integrationsproblem

Die Ableitung ist ein einem Differentialkörper mit Hilfe der Ableitungsregeln immer ausführbar, ganz ähnlich wie die Berechnung von Potenzen in einem Körper immer ausführbar ist. Die Umkehrung, also eine sogenannte Stammfunktion zu finden, ist dagegen deutlich schwieriger.

**Definition 6.15.** Eine Stammfunktion einer Funktion  $f \in \mathcal{K}$  im Funktionenkörper  $\mathcal{K}$  ist eine Funktion  $F \in \mathcal{K}$  derart, dass  $F' = f$ . Wir schreiben auch  $F = \int f$ .

Zwei Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  einer Funktion  $f \in \mathcal{K}$  haben die Eigenschaft

$$\left. \begin{array}{l} F'_1 = f \\ F'_2 = f \end{array} \right\} \Rightarrow (F_1 - F_2)' = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 \in \mathcal{C},$$

die beiden Stammfunktionen unterscheiden sich daher nur durch eine Konstante.

### Stammfunktion von Polynomen

Für Polynome ist das Problem leicht lösbar. Aus der Ableitungsregel

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

folgt, dass

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

eine Stammfunktion von  $x^n$  ist. Da  $\int$  linear ist, ergibt sich damit auch eine Stammfunktion für ein beliebiges Polynom

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_n x^n = \sum_{k=0}^n g_k x^k \in \mathbb{Q}(x)$$

angeben:

$$\int g(x) = g_0x + \frac{1}{2}g_1x^2 + \frac{1}{3}g_2x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}g_nx^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{g_k}{k+1}x^{k+1}. \quad (6.16)$$

## Körpererweiterungen

Obwohl die Ableitung in einem Differentialkörper immer ausgeführt werden kann, gibt es keine Garantie, dass es eine Stammfunktion im gleichen Körper gibt. Im kleinsten denkbaren Funktionenkörper  $\mathbb{Q}(x)$  haben die negativen Potenzen linearer Funktionen die Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{(-k+1)(x-\alpha)^{k-1}}$$

für  $k \neq 1$ , sind also wieder in  $\mathbb{Q}(x)$ . Für  $k = 1$  ist aber

$$\int \frac{1}{x-\alpha} = \log(x-\alpha),$$

es braucht also eine Körpererweiterung um  $\log(x-\alpha)$ , damit  $(x-\alpha)^{-1}$  eine Stammfunktion in  $\mathbb{Q}(x, \log(x-\alpha))$  hat.

### 6.3.5 Integration rationaler Funktionen

Für die Integration der rationalen Funktionen lernt man in einem Analysis-Kurs üblicherweise ein Lösungsverfahren. Dies zeigt zunächst, dass rationale Funktionen immer eine Stammfunktion in einem geeigneten Erweiterungskörper haben. Es deutet aber auch an, dass Stammfunktionen eine ziemlich spezielle Form haben, die später als Satz von Liouville ?? ein besondere Rolle spielen wird.

#### Aufgabenstellung

In diesem Abschnitt ist eine rationale Funktion  $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$  gegeben, deren Stammfunktion bestimmt werden soll. Als rationale Funktion kann sie als Bruch

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (6.17)$$

mit Polynomen  $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$  geschrieben werden. Gesucht ist ein Erweiterungskörper  $\mathcal{K} \supset \mathbb{Q}(x)$  derart und eine Stammfunktion  $F \in \mathcal{K}$  von  $f$ , also  $F' = f$ .

#### Polynomdivision

Der Quotient (6.17) kann durch Polynomdivision mit Rest vereinfacht werden in einen polynomialem Teil und einen echten Bruch:

$$f(x) = g(x) + \frac{a(x)}{b(x)} \quad (6.18)$$

mit Polynomen  $g(x), a(x), b(x) \in [Q](x)$  und  $\deg a(x) < \deg b(x)$ . Für den ersten Summanden liefert (6.16) eine Stammfunktion. Im Folgenden bleibt also nur noch der zweite Term zu behandeln.

## Partialbruchzerlegung

Zur Berechnung des Integral des Bruchs in (6.18) wird die Partialbruchzerlegung benötigt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir den Körper  $\mathbb{Q}(x)$  mit alle Nullstellen  $\beta_i$  des Nenner-Polynoms  $b(x)$  zu einem Körper  $\mathcal{K}$  erweitert haben, in dem Nenner in Linearfaktoren zerfällt. Unter diesen Voraussetzungen hat die Partialbruchzerlegung die Form

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{ik}}{(x - \beta_i)^k}, \quad (6.19)$$

wobei  $k_i$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\beta_i$  ist. Die Koeffizienten  $A_{ik}$  können zum Beispiel mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

Um eine Stammfunktion zu finden, muss man also Stammfunktionen für jeden einzelnen Summanden bestimmen. Für Exponenten  $k > 1$  im Nenner eines Terms der Partialbruchzerlegung (6.19) kann dazu die Regel

$$\int \frac{A_{ik}}{(x - \beta_i)^k} = \frac{A_{ik}}{(-k + 1)(x - \beta_i)^{k-1}}$$

verwendet werden. Diese Stammfunktion liegt wieder in  $\mathcal{K}(x)$  liegt.

## Körpererweiterung

Für  $k = 1$  ist eine logarithmische Erweiterung um die Funktion

$$\int \frac{A_{i1}}{x - \alpha_i} = A_{i1} \log(x - \alpha_i) \quad (6.20)$$

nötig. Es gibt also eine Stammfunktion in einem Erweiterungskörper, sofern er zusätzlich alle logarithmischen Funktionen in 6.20 enthält. Sie hat die Form

$$\sum_{i=1}^m A_{i1} \log(x - \beta_i),$$

wobei  $A_{i1} \in \mathcal{K}$  ist.

Setzt man alle vorher schon gefundenen Teile der Stammfunktion zusammen, kann man sehen, dass die Stammfunktion die Form

$$F(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^m c_i \log v_i(x) \quad (6.21)$$

haben muss. Dabei ist  $v_0(x) \in \mathcal{K}(x)$  und besteht aus der Stammfunktion des polynomiellen Teils und den Stammfunktionen der Terme der Partialbruchzerlegung mit Exponenten  $k > 1$ . Die logarithmischen Terme bestehen aus den Konstanten  $c_i = A_{i1}$  und den Logarithmusfunktionen  $v_i(x) = x - \beta_i \in \mathcal{K}(x)$ . Die Funktion  $f(x)$  muss daher die Form

$$f(x) = v'_0(x) + \sum_{i=1}^m c_i \frac{v'_i(x)}{v_i(x)}$$

gehabt haben. Die Form (6.21) der Stammfunktion ist nicht eine Spezialität der rationalen Funktionen. Sie wird auch bei grösseren Funktionenkörpern immer wieder auftreten und ist als Satz von Liouville bekannt.

## Minimale algebraische Erweiterung

XXX Rothstein-Trager

### 6.3.6 Integranden der Form $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Für rationale Funktionen lässt sich immer eine Stammfunktion in einem Erweiterungskörper angeben, der durch hinzufügen einzelner logarithmischer Funktionen entsteht. Die dabei verwendeten Techniken lassen sich verallgemeinern. Zur Illustration und Motivation des später beschriebenen Risch-Algorithmus stellen wir uns in diesem Abschnitt der Aufgabe, Integrale mit einem Integranden zu berechnen, der eine rationale Funktion von  $x$  und  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ist.

#### Aufgabenstellung

Eine rationale Funktion von  $x$  und  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ist ein Element des Differentialkörpers, den man aus  $\mathbb{Q}(x)$  durch hinzufügen des Elementes

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

erhält. Eine Funktion  $f \in \mathbb{Q}(x, y)$  kann geschrieben werden als Bruch

$$f = \frac{\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 y + \cdots + \tilde{p}_n y^n}{\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 y + \cdots + \tilde{q}_m y^m} \quad (6.22)$$

mit rationalen Koeffizienten  $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i \in \mathbb{Q}(x)$ . Gesucht ist eine Stammfunktion von  $f$ .

#### Algebraische Vereinfachungen

Da  $x^2 = ax^2 + bx + c$  ein Polynom ist, sind auch alle geraden Potenzen von  $y$  Polynome in  $\mathbb{Q}(x)$ , und die ungeraden Potenzen von  $y$  lassen sich als Produkt aus einem Polynom und dem Faktor  $y$  schreiben. Der Integrand (6.22) lässt sich daher vereinfachen zu einem Bruch der Form

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1 y}{q_0 + q_1 y}, \quad (6.23)$$

wobei  $p_i$  und  $q_i$  rationale Funktionen in  $\mathbb{Q}(x)$  sind.

#### Rationalisieren

Unschön an der Form (6.23) ist die Tatsache, dass  $y$  sowohl im Nenner wie auch im Zähler auftreten kann. Da aber  $y$  die quadratische Identität  $y^2 = ax^2 + bx + c$  erfüllt, kann das  $y$  im Nenner durch Erweitern mit  $q_0 - q_1 y$  zum verschwinden gebracht werden. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{p_0 + p_1 y}{q_0 + q_1 y} &= \frac{p_0 + p_1 y}{q_0 + q_1 y} \cdot \frac{q_0 - q_1 y}{q_0 - q_1 y} = \frac{(p_0 + p_1 y)(q_0 - q_1 y)}{q_0^2 - q_1^2 y^2} \\ &= \frac{p_0 q_0 - p_1 q_1 (ax^2 + bx + c)}{q_0^2 - q_1^2 (ax^2 + bx + c)} + \frac{q_0 p_1 - q_1 p_0}{q_0^2 - q_1^2 (ax^2 + bx + c)} y. \end{aligned}$$

Die Quotienten enthalten  $y$  nicht mehr, sind also in  $\mathbb{Q}(x)$ . In der späteren Rechnung stellt sich heraus, dass es praktischer ist, das  $y$  im Nenner zu haben, was man durch erweitern mit  $y$  wieder unter

Ausnutzung von  $y^2 = ax^2 + bx + c$  erreichen kann. Die zu integrierende Funktion kann also in der Form

$$f(x) = W_1 + W_2 \frac{1}{y} \quad (6.24)$$

geschrieben werden mit rationalen Funktionen  $W_1, W_2 \in \mathbb{Q}(x)$ . Eine Stammfunktion von  $W_1$  kann mit der Methode von Abschnitt 6.3.5 gefunden werden. Im Folgenden kümmern wir uns daher nur noch um  $W_2$ .

### Polynomdivision

Die Funktion  $W_2$  in (6.24) ist eine rationale Funktion  $W_2 \in \mathbb{K}(x)$ , also ein Bruch mit Polynomen in  $x$  als Zähler und Nenner. Durch Polynomdivision mit Rest können wir  $W_2$  schreiben als

$$W_1 = \varphi + W_3,$$

wobei  $\varphi$  ein Polynom in  $x$  ist und  $W_3$  eine rationale Funktion, deren Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad. Zur Bestimmung der Stammfunktion bleibt jetzt nur noch

$$\int W_2 \frac{1}{y} = \int \frac{\varphi}{y} + \int W_3 \frac{1}{y} \quad (6.25)$$

zu berechnen.

### Integranden der Form $\varphi(x)/y$

Der erste Term in (6.25) ist ein Integral eines Quotienten eines Polynoms geteilt durch  $y$ . Solche Integrale können, wie im Folgenden gezeigt werden soll, reduziert werden auf das Integral von  $1/y$ . Genauer gilt der folgende Satz.

**Satz 6.16.** Sei  $\varphi \in \mathcal{K}(x)$  ein Polynom in  $x$ , dann gibt es ein Polynom  $\psi \in \mathcal{K}(x)$  vom Grad  $\deg \psi < \deg \varphi$ , und  $A \in \mathcal{K}$  derart, dass

$$\int \frac{\varphi}{y} = \psi y + A \int \frac{1}{y}. \quad (6.26)$$

*Beweis.* Wir schreiben die Polynome in der Form

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_m x^m + \varphi_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \varphi_2 x^2 + \varphi_1 x + \varphi_0 \\ \psi &= \psi_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \psi_2 x^2 + \psi_1 x + \psi_0 \end{aligned}$$

mit der Ableitung

$$\psi' = \psi_{m-1} (m-1) x^{m-2} + \cdots + 2\psi_2 x + \psi_1.$$

Wir leiten die Gleichung (6.26) nach  $x$  ab und erhalten

$$\frac{\varphi}{y} = \psi' y + \psi y' + \frac{A}{y} = \psi' y + \psi \frac{ax + b/2}{y} + \frac{A}{y}.$$

Durch Multiplikation mit  $y$  wird die Gleichung wesentlich vereinfacht zu

$$\varphi = \psi' y^2 + \psi y' y + A = \psi' \cdot (ax^2 + bx + c) + \psi \cdot (ax + b/2) + A.$$

Auf beiden Seiten stehen Polynome, man kann daher versuchen, die Koeffizienten von  $\psi$  mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs zu bestimmen. Dazu müssen die Produkte auf der rechten Seite ausmultipliziert werden. So ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \varphi_m &= (m-1)\psi_{m-1}a + & + \psi_{m-1}a \\
 \varphi_{m-1} &= (m-2)\psi_{m-2}a + (m-1)\psi_{m-1}b & + \psi_{m-2}a + \psi_{m-1}\frac{b}{2} \\
 \varphi_{m-2} &= (m-3)\psi_{m-3}a + (m-2)\psi_{m-2}b + (m-1)\psi_{m-1}c + \psi_{m-3}a + \psi_{m-2}\frac{b}{2} \\
 &\vdots & \\
 \varphi_2 &= \psi_1 a + 2\psi_2 b + 3\psi_3 c + \psi_1 a + \psi_2 \frac{b}{2} \\
 \varphi_1 &= \psi_1 b + 2\psi_2 c + \psi_0 a + \psi_1 \frac{b}{2} \\
 \varphi_0 &= \psi_1 c + \psi_0 \frac{b}{2} + A
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

In jeder Gleichung kommen höchstens drei der Koeffizienten von  $\psi$  vor. Fasst man sie zusammen und stellt die Terme etwas um, erhält man die einfacheren Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \varphi_m &= (m-0)\psi_{m-1}a \\
 \varphi_{m-1} &= (m-1+\frac{1}{2})\psi_{m-1}b + (m-1)\psi_{m-2}a \\
 \varphi_{m-2} &= (m-1)\psi_{m-1}c + (m-2+\frac{1}{2})\psi_{m-2}b + (m-2)\psi_{m-3}a \\
 &\vdots \\
 \varphi_2 &= 3\psi_3 c + (2+\frac{1}{2})\psi_2 b + 2\psi_1 a \\
 \varphi_1 &= 2\psi_2 c + (1+\frac{1}{2})\psi_1 b + \psi_0 a \\
 \varphi_0 &= \psi_1 c + (0+\frac{1}{2})\psi_0 b + A
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Die erste Gleichung kann wegen  $a \neq 0$  nach  $\psi_{m-1}$  aufgelöst werden, dadurch ist  $\psi_{m-1}$  bestimmt. In allen folgenden Gleichungen taucht jeweils ein neuer Koeffizient von  $\psi$  auf, der rot hervorgehoben ist. Wieder wegen  $a \neq 0$  kann die Gleichung immer nach dieser Variablen aufgelöst werden. Die Gleichungen zeigen daher, dass die Koeffizienten des Polynoms  $\psi$  in absteigender Folge und die Konstanten  $A$  eindeutig bestimmt werden.  $\square$

Mit diesem Satz ist das Integral über den Teil  $\varphi/y$  auf den Fall des Integrals von  $1/y$  reduziert. Letzteres wird im nächsten Abschnitt berechnet.

### Das Integral von $1/y$

Eine Stammfunktion von  $1/y$  kann mit etwas Geschick mit den Interationstechniken gefunden werden, die man in einem Analysis-Kurs lernt. Durch Ableitung der Funktion

$$F = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{y}{\sqrt{a}}\right)$$

kann man nachprüfen, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $1/y$  ist, also

$$\int \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{y}{\sqrt{a}}\right). \tag{6.29}$$

## Partialbruchzerlegung

In der rationalen Funktion  $W_3$  in (6.25) hat der Zähler kleineren Grad als der Nenner, sie kann daher wieder in Partialbrüche

$$W_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{ik}}{(x - \alpha_i)^k}$$

mit den Nullstellen  $\alpha_i$  des Nenners von  $W_3$  mit Vielfachheiten  $k_i$  zerlegt werden. Die Stammfunktion von  $W_3/y$  wird damit zu

$$\int W_3 \frac{1}{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} A_{ik} \int \frac{1}{(x - \alpha_i)^k y} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} A_{ik} \int \frac{1}{(x - \alpha_i)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (6.30)$$

Die Stammfunktion ist damit reduziert auf Integrale der Form

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (6.31)$$

mit  $k > 0$ .

### Integrale der Form (6.31)

Die Integrale (6.31) können mit Hilfe der Substitution

$$t = \frac{1}{x - \alpha} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{t} + \alpha$$

In ein Integral verwandelt werden, für welches bereits eine Berechnungsmethode entwickelt wurde. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} y^2 &= a\left(\frac{1}{t} + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t} + \alpha\right) + c \\ &= a\left(\frac{1}{t^2} + 2\frac{\alpha}{t} + \alpha^2\right) + \frac{b}{t} + b\alpha + c = \frac{1}{t^2} \underbrace{(a + (2a\alpha + b)t + (a\alpha^2 + c)t^2)}_{= Y^2} \end{aligned}$$

und damit

$$y = \frac{Y}{t}.$$

Führt man die Substitution  $dx = -dt/t^2$  im Integral aus, erhält man

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k y} = - \int t^k \cdot \frac{t}{Y} \frac{dt}{t^2} = - \int \frac{t^{k-1}}{Y} dt.$$

Das letzte Integral ist wieder von der Form, die in Satz 6.16 behandelt wurde. Insbesondere gibt es ein Polynom  $\psi$  vom Grad  $k - 2$  und eine Konstante  $A$  derart, dass

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^k y} = \psi Y + A \int \frac{1}{Y}$$

ist. Damit ist das Integral von  $R(x, y)$  vollständig bestimmt.

## Beobachtungen

Die eben dargestellte Berechnung des Integrals von  $R(x, y)$  zeigt einige Gemeinsamkeiten mit der entsprechenden Rechnung für rationale Integranden, aber auch einige wesentliche Unterschiede. Wieder zeigt sich, dass Polynomdivision und Partialbruchzerlegung die zentralen Werkzeuge sind, mit denen der Integrand zerlegt und leichter integrierbare Funktionen umgeformt werden kann. Andererseits ist der in Satz 6.16 zusammengefasste Schritt eine wesentliche zusätzliche Vereinfachung, die keine Entsprechung bei rationalen Integranden hat.

Die gefunden Form der Stammfunktion hat jedoch die allgemeine Form

$$\int R(x, y) = v_0 + C \log\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{y}{\sqrt{a}}\right) + \sum_{i=1}^n c_i \log v_i,$$

die ganz der bei rationalen Integranden gefunden Form entspricht. Darin ist  $v_0$  die Summe der angefallenen rationalen Teilintegrale, also  $v_0 \in \mathcal{K}(x, y)$ . Die  $v_i \in \mathcal{K}(x, y)$  sind die entsprechenden Logarithmusfunktionen, die bei der Berechnung der Integrale (6.31) auftreten. Insbesondere liefert die Rechnung eine Körpererweiterung von  $\mathcal{K}(x, y)$  um die logarithmische Funktionen  $\log(x + b/2a + y/\sqrt{a})$  und  $\log v_i$ , in der  $R(x, y)$  eine Stammfunktion hat.

## 6.4 Der Risch-Algorithmus

Die Lösung des Integrationsproblems für  $\mathbb{Q}(x)$  und für  $\mathbb{Q}(x, y)$  mit  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  hat gezeigt, dass ein Differentialkörper genau die richtige Bühne für dieses Unterfangen sein dürfte. Die Stammfunktionen konnten in einem Erweiterungskörper gefunden werden, der ein paar Logarithmen hinzugefügt worden sind. Tatsächlich lässt sich in diesem Rahmen sogar ein Algorithmus formulieren, der in einem noch zu definierenden Sinn ‘‘elementare’’ Funktionen als Stammfunktionen finden kann oder beweisen kann, dass eine solche nicht existiert. Dieser Abschnitt soll einen Überblick darüber geben.

### 6.4.1 Log-Exp-Notation für trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Die Integration rationaler Funktionen hat bereits gezeigt, dass eine Stammfunktion nicht immer im Körper der rationalen Funktionen existiert. Es kann notwendig sein, dem Körper logarithmische Erweiterungen der Form  $\log(x - \alpha)$  hinzuzufügen.

Es können jedoch noch ganz andere neue Funktionen auftreten, wie die folgende Zusammenstellung einiger Stammfunktionen zeigt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x, \\ \int \cos x \, dx &= \sin x, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x, \\ \int \operatorname{arcosh} x \, dx &= x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

In der Stammfunktion treten Funktionen auf, die auf den ersten Blick nichts mit den Funktionen im Integranden zu tun haben.

### Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen in (6.32) lassen sich alle durch Exponentialfunktionen ausdrücken. So gilt

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), & \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), & \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).\end{aligned}\tag{6.33}$$

Nach Multiplikation mit  $e^{ix}$  bzw.  $e^x$  entsteht eine quadratische Gleichung in  $e^{ix}$  bzw.  $e^x$ . Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen erlaubt daher,  $e^{ix}$  bzw.  $e^x$  zu finden und damit auch die Umkehrfunktionen. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\arcsin y &= \frac{1}{i} \log(iy \pm \sqrt{1 - y^2}), & \arccos y &= \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}), \\ \text{arsinh } y &= \log(y \pm \sqrt{1 + y^2}), & \text{arcosh } y &= \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).\end{aligned}\tag{6.34}$$

Alle Funktionen, die man aus dem elementaren Analysisunterricht kennt, können also mit Hilfe von Exponentialfunktionen und Logarithmen geschrieben werden. Man nennt dies die log-exp-Notation der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen.

#### log-exp-Notation

Wendet man die Substitutionen (6.33) und (6.34) auf die Integrale (6.32) an, entstehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{2}i(\log(1-ix) - \log(1+ix)), \\ \int (\frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}) &= -\frac{1}{2}ie^{ix} + \frac{1}{2}ie^{-ix}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= -i \log(ix + \sqrt{1-x^2}), \\ \int \log(x + \sqrt{x^2-1}) &= x \log(x + \sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}\tag{6.35}$$

Die in den Stammfunktionen auftretenden Funktionen treten entweder schon im Integranden auf oder sind Logarithmen von solchen Funktionen. Zum Beispiel hat der Nenner im ersten Integral die Faktorisierung  $1+x^2 = (1+ix)(1-ix)$ , in der Stammfunktion findet man die Logarithmen der Faktoren.

### 6.4.2 Elementare Funktionen

Etwas allgemeiner kann man sagen, dass in den Beispielen (6.35) algebraische Erweiterungen von  $\mathbb{Q}(x)$  und Erweiterungen um Logarithmen oder Exponentialfunktionen vorgekommen sind. Die Stammfunktionen verwenden dieselben Funktionen oder höchstens Erweiterungen um Logarithmen von Funktionen, die man schon im Integranden gesehen hat.

## Exponentielle und logarithmische Funktionen

In Abschnitt 6.3.3 haben wir bereits die Exponentialfunktion  $e^x$  und die Logarithmusfunktion  $\log x$  charakterisiert als eine Körpererweiterung durch Elemente, die der Differentialgleichung

$$\exp' = \exp \quad \text{und} \quad \log' = \frac{1}{x}$$

genügen. Für die Stammfunktionen, die in Abschnitt 6.4.1 gefunden wurden, sind aber Logarithmusfunktionen nicht von  $x$  sondern von beliebigen über  $\mathbb{Q}$  algebraischen Elementen nötig. Um zu verstehen, wie wir diese Funktion als Körpererweiterung erhalten könnten, betrachten wir die Ableitung einer Exponentialfunktion  $\vartheta(x) = \exp(f(x))$  und eines Logarithmus  $\psi(x) = \log(f(x))$ , wie man sie mit der Kettenregel berechnet hätte:

$$\vartheta'(x) = \exp(f(x)) \cdot f'(x) \quad \psi'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\psi'(x) = f'(x).$$

Dies motiviert die folgende Definition

**Definition 6.17.** Sei  $\mathcal{F}$  ein Differentialkörper und  $f \in \mathcal{F}$ . Ein Exponentialfunktion von  $f$  ist ein  $\vartheta \in \mathcal{F}$  mit  $\vartheta' = \vartheta f'$ . Ein Logarithmus von  $f$  ist ein  $\vartheta \in \mathcal{F}$  mit  $f\vartheta' = f'$ .

Für  $f = x$  mit  $f' = 1$  reduziert sich die Definition 6.17 auf die Definition der Exponentialfunktion  $\exp(x)$  und Logarithmusfunktion  $\log(x)$  auf Seite 181.

## Transzendente Körpererweiterungen

Die Wurzelfunktionen haben wir früher als algebraische Erweiterungen eines Differentialkörpers erkannt. Die logarithmischen und exponentiellen Elemente gemäss Definition 6.17 sind nicht algebraisch.

**Definition 6.18.** Sei  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  eine Körpererweiterung und  $\vartheta \in \mathcal{G}$ .  $\vartheta$  heisst transzendent, wenn  $\vartheta$  nicht algebraisch ist.

**Beispiel.** Die Funktion  $f = e^x + e^{2x} + e^{x/2}$  ist sicher transzendent, in diesem Beispiel zeigen wir, dass es mindestens drei verschiedene Möglichkeiten gibt, eine Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}(x)$  zu konstruieren, die  $f$  enthält.

Erste Möglichkeit:  $f = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$  mit  $\vartheta_1 = e^x$ ,  $\vartheta_2 = e^{2x}$  und  $\vartheta_3 = e^{x/2}$ . Jedes der Elemente  $\vartheta_i$  ist exponentiell über  $\mathbb{Q}(x)$  und  $f$  ist in

$$\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(x, \vartheta_1) \subset \mathbb{Q}(x, \vartheta_1, \vartheta_2) \subset \mathbb{Q}(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \ni f.$$

Jede dieser Körpererweiterungen ist transzendent.

Zweite Möglichkeit:  $\vartheta_1 = e^x$  ist exponentiell über  $\mathbb{Q}(x)$  und  $\mathbb{Q}(x, \vartheta_1)$  enthält wegen

$$(\vartheta_1^2)' = 2\vartheta_1\vartheta_1' = 2\vartheta_1^2,$$

somit ist  $\vartheta_1^2 = \vartheta_2$  eine Exponentialfunktion von  $2x$  über  $\mathbb{Q}(x)$ . Das Element  $\vartheta_3 = e^{x/2}$  ist zwar auch exponentiell über  $\mathbb{Q}(x)$ , es ist aber auch eine Nullstelle des Polynoms  $m(z) = z^2 - [\vartheta_1]$ . Die Erweiterung  $\mathbb{Q}(x, \vartheta_1) \subset \mathbb{Q}(x, \vartheta_1, \vartheta_3)$  ist eine algebraische Erweiterung, die  $f = \vartheta_1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_3$  enthält.

Dritte Möglichkeit:  $\vartheta_3 = e^{x/2}$  ist exponentiell über  $\mathbb{Q}(x)$ . Die transzendente Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(x, \vartheta_3)$$

enthält das Element  $f = \vartheta_3^4 + \vartheta_3^2 + \vartheta_3$ . ○

Das Beispiel zeigt, dass man nicht sagen kann, dass eine Funktion ausschliesslich in einer algebraischen oder transzendenten Körpererweiterung zu finden ist. Vielmehr gibt es für die gleiche Funktion möglicherweise verschiedene Körpererweiterungen, die alle die Funktion enthalten können.

### Elementare Funktionen

Die Stammfunktionen (6.35) können aufgebaut werden, indem man dem Körper  $\mathbb{Q}(x)$  schrittweise sowohl algebraische wie auch transzendente Elemente hinzufügt, wie in der folgenden Definition, die dies für abstrakte Differentialkörpererweiterungen formuliert.

**Definition 6.19.** Eine Körpererweiterung  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  heisst transzendent elementare Erweiterung, wenn  $\mathcal{G} = \mathcal{F}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$  und jedes der Element  $\vartheta_i$  transzendent und logarithmisch oder exponentiell ist über  $\mathcal{F}_{i-1} = \mathcal{F}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{i-1})$ . Die Körpererweiterung  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  heisst elementare Erweiterung, wenn  $\mathcal{G} = \mathcal{F}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$  und jedes Element  $\vartheta_i$  ist entweder logarithmisch, exponentiell oder algebraisch über  $\mathcal{F}_{i-1}$ .

Die Funktionen, die als akzeptable Stammfunktionen für das Integrationsproblem in Betracht kommen, sind also jene, die in einer geeigneten elementaren Erweiterung des von  $\mathbb{Q}(x)$  liegen. Außerdem können auch noch weitere Konstanten nötig sein, sowohl algebraische Zahlen wie auch Konstanten wie  $\pi$  oder  $e$ .

**Definition 6.20.** Sei  $\mathcal{K}(x)$  der Differentialkörper der rationalen Funktionen über dem Konstantenkörper  $\mathcal{K} \supset \mathbb{Q}$ , der in  $\mathbb{C}$  enthalten ist. Ist  $\mathcal{F} \supset \mathcal{K}(x)$  eine transzendent elementare Erweiterung von  $\mathcal{K}(x)$ , dann heisst  $\mathcal{F}$  ein Körper von transzenten elementaren Funktionen. Ist  $\mathcal{F}$  eine elementare Erweiterung von  $\mathcal{K}(x)$ , dann heisst  $\mathcal{F}$  ein Körper von elementaren Funktionen.

### Das Integrationsproblem

Die elementaren Funktionen enthalten alle Funktionen, die sich mit arithmetischen Operationen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen und damit auch mit trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen aus den rationalen Zahlen, der unabhängigen Variablen  $x$  und möglicherweise einigen zusätzlichen Konstanten aufbauen lassen. Sei also  $f$  eine Funktion in einem Körper von elementaren Funktionen

$$(F) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)(x, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n).$$

Eine elementare Stammfunktion ist eine Funktion  $F = \int f$  in einer elementaren Körpererweiterung

$$\mathcal{G} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_{l+k})(x, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \dots, \vartheta_{n+m})$$

mit  $F' = f$ . Das Ziel ist,  $F$  mit Hilfe eines Algorithmus zu bestimmen.

## Übungsaufgaben



# Kapitel 7

## Orthogonalität

In der linearen Algebra lernt man, dass orthonormierte Basen für die Lösung vektorgeometrischer Probleme, bei denen auch das Skalarprodukt involviert ist, besonders günstig sind. Die Zerlegung eines Vektors in einer Basis verlangt normalerweise nach der Lösung eines linearen Gleichungssystems, für orthonormierte Basisvektoren beschränkt sie sich auf die Berechnung von Skalarprodukten.

Oft dienen spezielle Funktionen als Basis der Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung (siehe Kapitel 10). Die Randbedingungen müssen dazu in der gewählten Basis von Funktionen zerlegt werden. Fourier ist es gelungen, die Idee des Skalarproduktes und der Orthogonalität auf Funktionen zu verallgemeinern und so zum Beispiel das Wärmeleitungsproblem zu lösen.

Der Orthonormalisierungsprozess von Gram-Schmidt wird damit auch auf Funktionen anwendbar (Abschnitt 7.1), der Nutzen führt aber noch viel weiter. Da  $K[x]$  ein Vektorraum ist, führt er von der Basis der Monome  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  auf orthonormierte Polynome. Diese haben jedoch eine ganze Reihe weiterer nützlicher Eigenschaften. So wird in Abschnitt 7.2 gezeigt, dass sich die Werte aller Polynome einer solchen Familie mit einer Rekursionsformel effizient berechnen lassen, die höchstens drei Terme umfasst. In Abschnitt 7.3 werden die Rodrigues-Formeln vorgeführt, die Polynome durch Anwendung eines Differentialoperators hervorbringen. In Abschnitt 7.4 schliesslich wird gezeigt, dass diese Polynome auch Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Operators sind. Da man in der linearen Algebra auch lernt, dass die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, ist die Orthogonalität plötzlich nicht mehr überraschend.

Die Bessel-Funktionen von Abschnitt 5.3 sind auch Eigenfunktionen eines Differentialoperators. Abschnitt 7.5 findet das zugehörige Skalarprodukt, welches andeutet, dass auch für andere Funktionenfamilien eine entsprechende Konstruktion möglich ist. Das in Abschnitt 7.6 präsentierte Sturm-Liouville-Problem führt sie durch. Das Kapitel schliesst mit dem Abschnitt 7.7 über die Gauss-Quadratur, welche die Eigenschaften orthogonaler Polynome für einen besonders effizienten numerischen Integrationsalgorithmus ausnutzt.

### 7.1 Orthogonale Funktionenfamilien

Die Fourier-Theorie basiert auf der Idee, Funktionen durch Funktionenreihen mit Summanden zu bilden, die im Sinne eines Skalarproduktes orthogonal sind, welches mit Hilfe eines Integrals definiert sind. Solche Funktionenfamilien treten jedoch auch als Lösungen von Differentialgleichungen auf. Besonders interessant wird die Situation, wenn die Funktionen Polynome sind. In diesem Ab-

schnitt soll zunächst das Skalarprodukt definiert und an Hand von Beispielen gezeigt werden, wie verschiedenartige interessante Familien von orthogonalen Polynomen gewonnen werden können.

### 7.1.1 Skalarprodukt

Der reelle Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  trägt das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_i y_k,$$

welches viele interessante Anwendungen ermöglicht. Eine orthonormierte Basis macht es zum Beispiel besonders leicht, eine Zerlegung eines Vektors in dieser Basis zu finden. In diesem Abschnitt soll zunächst an die Eigenschaften erinnert werden, die zu einem nützlichen

#### Eigenschaften eines Skalarproduktes

Das Skalarprodukt erlaubt auch, die Länge eines Vektors  $v$  als  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  zu definieren. Dies funktioniert natürlich nur, wenn die Wurzel auch immer definiert ist, d. h. das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst darf nicht negativ sein. Dazu dient die folgende Definition.

**Definition 7.1.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle.$$

heisst positiv definit, wenn für alle Vektoren  $v \in V$  mit  $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$ . Die Norm eines Vektors  $v$  ist  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

Damit man mit dem Skalarprodukt sinnvoll rechnen kann, ist außerdem erforderlich, dass es eine einfache Beziehung zwischen  $\langle x, y \rangle$  und  $\langle y, x \rangle$  gibt.

**Definition 7.2.** Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine positiv definite, symmetrische bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle.$$

Das Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle = u^t v$  auf dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  erfüllt die Definition ganz offensichtlich, sie führt auf die Komponentendarstellung

$$\langle u, v \rangle = u^t v = \sum_{k=1}^n u_i v_i.$$

Weitere Skalarprodukte ergeben sich mit jeder symmetrischen, positiv definiten Matrix  $G$  und der Definition  $\langle u, v \rangle_G = u^t G v$ . Ein einfacher Spezialfall tritt auf, wenn  $G$  eine Diagonalmatrix  $\text{diag}(w_1, \dots, w_n)$  mit positiven Einträgen  $w_i > 0$  auf der Diagonalen ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\langle u, v \rangle_w = u^t \text{diag}(w_1, \dots, w_n) v = \sum_{k=1}^n u_i v_i w_i$$

und nennen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  das *gewichtete Skalarprodukt mit Gewichten  $w$* .

### Skalarprodukte auf Funktionenräumen

Das Integral ermöglicht jetzt, ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum der stetigen Funktionen auf einem Intervall zu definieren.

**Definition 7.3.** Sei  $V$  der reelle Vektorraum  $C([a, b])$  der reellwertigen, stetigen Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$ . Dann ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

ein Skalarprodukt.

Die Definition ist offensichtlich symmetrisch in  $f$  und  $g$  und aus den Eigenschaften des Integrals ist klar, dass das Produkt bilinear ist:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))g(x) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)g(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)g(x) dx \\ &= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

Ausserdem ist es positiv definit, denn wenn  $f(x_0) \neq 0$  ist, dann gibt es wegen der Stetigkeit von  $f$  eine Umgebung  $U = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , derart, dass  $|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|$  ist für alle  $x \in U$ . Somit ist das Integral

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{4} |f(x_0)|^2 dx = \frac{1}{4} |f(x_0)|^2 \cdot 2\varepsilon = \frac{|f(x_0)|^2 \varepsilon}{2} > 0,$$

was beweist, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit und damit ein Skalarprodukt ist.

Die Definition kann noch etwas verallgemeinert werden, indem die Funktionswerte nicht überall auf dem Definitionsbereich gleich gewichtet werden.

**Definition 7.4.** Sei  $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine positive, stetige Funktion, dann ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_w: C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x) w(x) dx.$$

das gewichtete Skalarprodukt mit Gewichtsfunktion  $w(x)$ .

#### 7.1.2 Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

In einem reellen Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kann aus einer beliebigen Basis  $b_1, \dots, b_n$  mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens immer eine orthonormierte Basis  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$  Basis gewonnen werden. Es stellt sicher, dass für alle  $k \leq n$  gilt

$$\langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k \rangle.$$

Zur Vereinfachung der Formeln schreiben wir  $v^0 = v/|v|$  für einen zu  $v$  parallelen Einheitsvektor. Die Vektoren  $\tilde{b}_i$  können mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= (b_1)^0 \\ \tilde{b}_2 &= (b_2 - \langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle \tilde{b}_1)^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_3 &= (b_3 - \langle \tilde{b}_1, b_3 \rangle \tilde{b}_1 - \langle \tilde{b}_2, b_3 \rangle \tilde{b}_2)^0 \\ &\vdots \\ \tilde{b}_n &= (b_n - \langle \tilde{b}_1, b_n \rangle \tilde{b}_1 - \langle \tilde{b}_2, b_n \rangle \tilde{b}_2 - \cdots - \langle \tilde{b}_{n-1}, b_n \rangle \tilde{b}_{n-1})^0\end{aligned}$$

iterativ berechnet werden. Dieses Verfahren lässt sich auch auf Funktionenräume anwenden.

Die Normierung ist nicht unbedingt nötig und manchmal unangenehm, da die Norm unschöne Quadratwurzeln einführt. Falls es genügt, eine orthogonale Basis zu finden, kann darauf verzichtet werden, bei der Orthogonalisierung muss aber berücksichtigt werden, dass die Vektoren  $\tilde{b}_i$  jetzt nicht mehr Einheitslänge haben. Die Formeln

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0 &= b_0 \\ \tilde{b}_1 &= b_1 - \frac{\langle b_1, \tilde{b}_0 \rangle}{\langle \tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \rangle} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, \tilde{b}_0 \rangle}{\langle \tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \rangle} \tilde{b}_0 - \frac{\langle b_2, \tilde{b}_1 \rangle}{\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \rangle} \tilde{b}_1 \\ &\vdots \\ \tilde{b}_n &= b_n - \frac{\langle b_n, \tilde{b}_0 \rangle}{\langle \tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \rangle} \tilde{b}_0 - \frac{\langle b_n, \tilde{b}_1 \rangle}{\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \rangle} \tilde{b}_1 - \cdots - \frac{\langle b_n, \tilde{b}_{n-1} \rangle}{\langle \tilde{b}_{n-1}, \tilde{b}_{n-1} \rangle} \tilde{b}_{n-1}.\end{aligned}$$

berücksichtigen dies.

### 7.1.3 Legendre-Polynome

Der Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsprozess kann für jedes beliebige Skalarprodukt aus der Folge  $1, x, x^2, \dots$  der Monome ein Folge von orthogonalisierten Polynomen machen. In diesem Abschnitt rechnen wir den Fall konstanter Gewichtsfunktion  $w(x) = 1$  durch, er führt auf die sogenannten *Legendre-Polynome*.

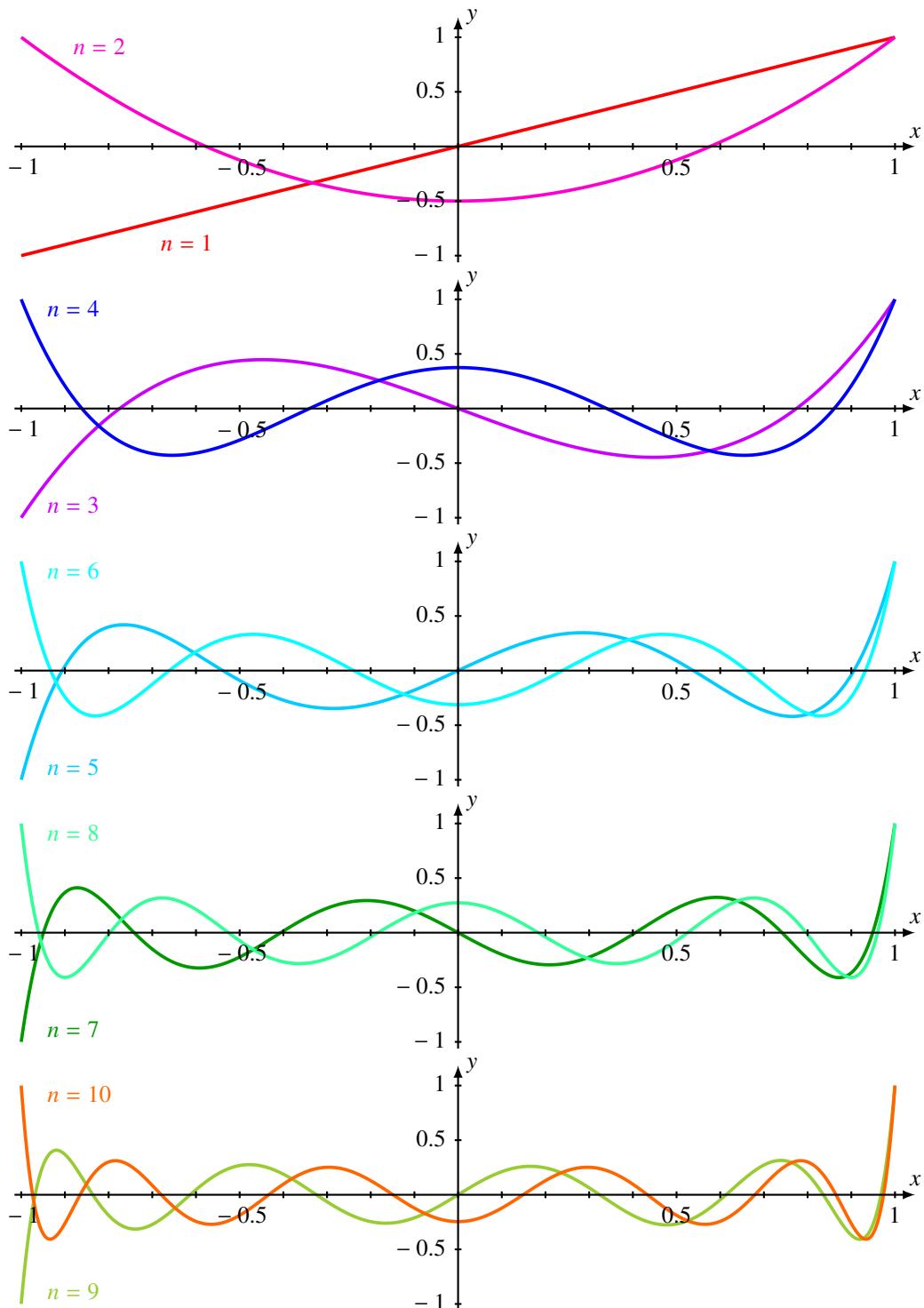
Da wir auf die Normierung verzichten, brauchen wir ein anderes Kriterium, welches die Polynom eindeutig festlegen kann. Wir bezeichnen das Polynom vom Grad  $n$ , das bei diesem Prozess entsteht, mit  $P_n(x)$  und legen willkürlich aber traditionskonform fest, dass  $P_n(1) = 1$  sein soll.

#### Symmetrieeigenschaften

Das Skalarprodukt berechnet ein Integral eines Produktes von zwei Polynomen über das symmetrische Intervall  $[-1, 1]$ . Ist die eine gerade und die andere ungerade, dann ist das Produkt eine ungerade Funktion und das Skalarprodukt verschwindet. Sind beide Funktionen gerade oder ungerade, dann ist das Produkt gerade und das Skalarprodukt ist im Allgemeinen von 0 verschieden. Dies zeigt, dass es tatsächlich etwas zu Orthogonalisieren gibt.

Die ersten beiden Funktionen sind das konstante Polynom 1 und das Polynom  $x$ . Nach obiger Beobachtung ist das Skalarprodukt  $\langle 1, x \rangle = 0$ , also ist  $P_1(x) = x$ . Die Graphen der entstehenden Polynome sind in Abbildung 7.1 dargestellt.

**Lemma 7.5.** *Die Polynome  $P_{2n}(x)$  sind gerade, die Polynome  $P_{2n+1}(x)$  sind ungerade Funktionen von  $x$ .*

Abbildung 7.1: Graphen der Legendre-Polynome  $P_n(x)$  für  $n = 1, \dots, 10$ .

*Beweis.* Wir verwenden vollständige Induktion nach  $n$ . Wir wissen bereits, dass  $P_0(x) = 1$  und  $P_1(x) = x$  die verlangten Symmetrieeigenschaften haben. Im Sinne der Induktionsannahme nehmen wir daher an, dass die Symmetrieeigenschaften für  $P_k(x)$ ,  $k < n$ , bereits bewiesen sind.  $P_n(x)$  entsteht jetzt durch Orthogonalisierung nach der Formel

$$P_n(x) = x^n - \langle P_{n-1}, x^n \rangle P_{n-1}(x) - \langle P_{n-2}, x^n \rangle P_{n-2}(x) - \cdots - \langle P_1, x^n \rangle P_1(x) - \langle P_0, x^n \rangle P_0(x).$$

Die Skalarprodukte  $\langle P_{n-1}, x^n \rangle$ ,  $\langle P_{n-2}, x^n \rangle$ ,  $\dots$  verschwinden alle, so dass  $P_n(x)$  eine Linearkombination der Funktionen  $x^n$ ,  $P_{n-2}(x)$ ,  $P_{n-4}(x)$  ist, die die gleiche Parität wie  $x^n$  haben. Also hat auch  $P_n(x)$  die gleiche Parität, was das Lemma beweist.  $\square$

### Orthogonalisierung mit Gram-Schmidt

Die Orthogonalisierung von  $x^2$  liefert daher

$$p(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0(x) = x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = x^2 - \frac{1}{3}$$

Dieses Polynom erfüllt die Standardisierungsbedingung noch nicht den  $p(1) = \frac{2}{3}$ . Daraus leiten wir ab, dass

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

ist.

Für  $P_3(x)$  brauchen wir nur die Skalarprodukte

$$\left. \begin{array}{l} \langle x^3, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} \\ \langle P_1, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow p(x) = x^3 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Die richtige Standardisierung ergibt sich, indem man durch  $p(1) = \frac{2}{5}$  dividiert, also

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Die Berechnung weiterer Polynome verlangt, dass Skalarprodukte  $\langle x^n, P_k \rangle$  berechnet werden müssen, was wegen der zunehmend komplizierteren Form von  $P_k$  etwas mühsam ist. Wir berechnen den Fall  $P_4$ . Dazu muss das Polynom  $x^4$  um eine Linearkombination von  $P_2$  und  $P_0(x) = 1$  korrigiert werden. Die Skalarprodukte sind

$$\langle x^4, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$\langle x^4, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 dx = \left[ \frac{3}{14}x^7 - \frac{1}{10}x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{6}{14} - \frac{1}{5} = \frac{8}{35}$$

$$\langle P_2, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(3x^2 - 1)^2 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(9x^4 - 6x^2 + 1) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{18}{5} - 4 + 2 \right) = \frac{2}{5}.$$

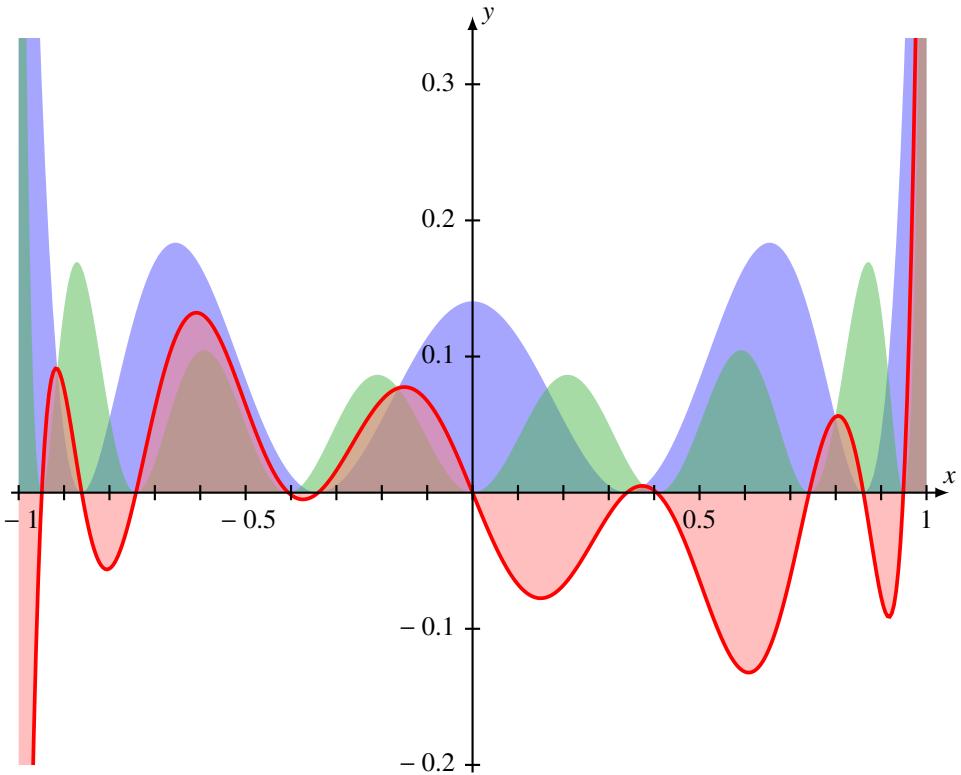


Abbildung 7.2: Orthogonalität der Legendre-Polynome  $P_4(x)$  (blau) und  $P_7(x)$  (grün). Die blaue Fläche ist die Fläche unter dem Graphen von  $P_4(x)^2$ ,  $P_4(x)$  muss durch die Wurzel aus diesem Flächeninhalt geteilt werden, um ein Polynom mit Norm 1 zu erhalten. Für die grüne Fläche ist es  $P_7(x)$ . Die rote Kurve ist der Graph der Funktion  $P_4(x) \cdot P_7(x)$ , die rote Fläche ist deren Integral, sie ist 0, d. h. die beiden Funktionen sind orthogonal.

Daraus folgt für  $p(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - \frac{\langle x^4, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} P_2(x) - \frac{\langle x^4, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0(x) \\ &= x^4 - \frac{4}{7} P_2(x) - \frac{1}{5} P_0(x) \\ &= x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35} \end{aligned}$$

mit  $p(1) = \frac{8}{35}$ , so dass man

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

setzen muss.

Die so konstruierten Polynome heißen die *Legendre-Polynome*. Durch weitere Durchführung des Verfahrens liefert die Polynome in Tabelle 7.1. Die Graphen sind in Abbildung 7.1 dargestellt.

$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

Tabelle 7.1: Die Legendre-Polynome  $P_n(x)$  für  $n = 0, 1, \dots, 10$  sind orthogonale Polynome vom Grad  $n$ , die den Wert  $P_n(1) = 1$  haben.

Abbildung 7.2 illustriert, dass die beiden Polynome  $P_4(x)$  und  $P_7(x)$  orthogonal sind. Das Produkt  $P_4(x) \cdot P_7(x)$  hat Integral = 0.

### 7.1.4 Gewichtsfunktionen

Das Standardskalarprodukt auf dem Raum der Funktionen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  ist das Skalarprodukt mit der Gewichtsfunktion  $w(x) = 1$ , es führt auf die Legendre-Polynome. Die Wahl einer anderen Gewichtsfunktion ändert natürlich das Resultat der Orthogonalisierung. Nullstellen und Pole der Gewichtsfunktion ändern die Menge der Funktionen, für die das Skalarprodukt definiert. Diesem Zusammenhang soll im ersten Unterabschnitt nachgegangen werden. Danach sollen verschiedene für die Praxis relevante Gewichtsfunktionen vorgestellt werden.

#### Pole und Nullstellen

Das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  ist nur sinnvoll für Funktionen  $f(x)$ , für die die Norm  $\|f\|_w$  definiert ist. An einer Nullstelle  $x_0$  der Gewichtsfunktion  $w$  darf die Funktion  $f$  einen Pol haben. Solange  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  nicht zu schnell divergiert, kann das Produkt  $|f(x)|^2 w(x)$  immer noch integrierbar sein.

Um dies etwas genauer zu quantifizieren, nehmen wir an, dass  $w(x)$  an der Stelle  $x_0$  eine Nullstelle vom Grad  $\alpha$  hat. Dies bedeutet, dass  $w(x) \approx C|x - x_0|^\alpha$  ist für eine geeignete Konstante  $C$  und für  $|x - x_0| < \varepsilon$ . Ein Pol von  $f$  vom Grad  $a$  an der Stelle  $x_0$  führt entsprechend auf eine Abschätzung  $|f(x)| \approx D|f(x)|^{-a}$  für  $|x - x_0| < \varepsilon$ . Dann ist

$$|f(x)|^2 w(x) \approx CD|x - x_0|^{\alpha-2a}.$$

Für das Integral in der Nähe von  $x_0$  ist

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|^2 w(x) dx \approx CD \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |x - x_0|^{\alpha-2a} dx$$

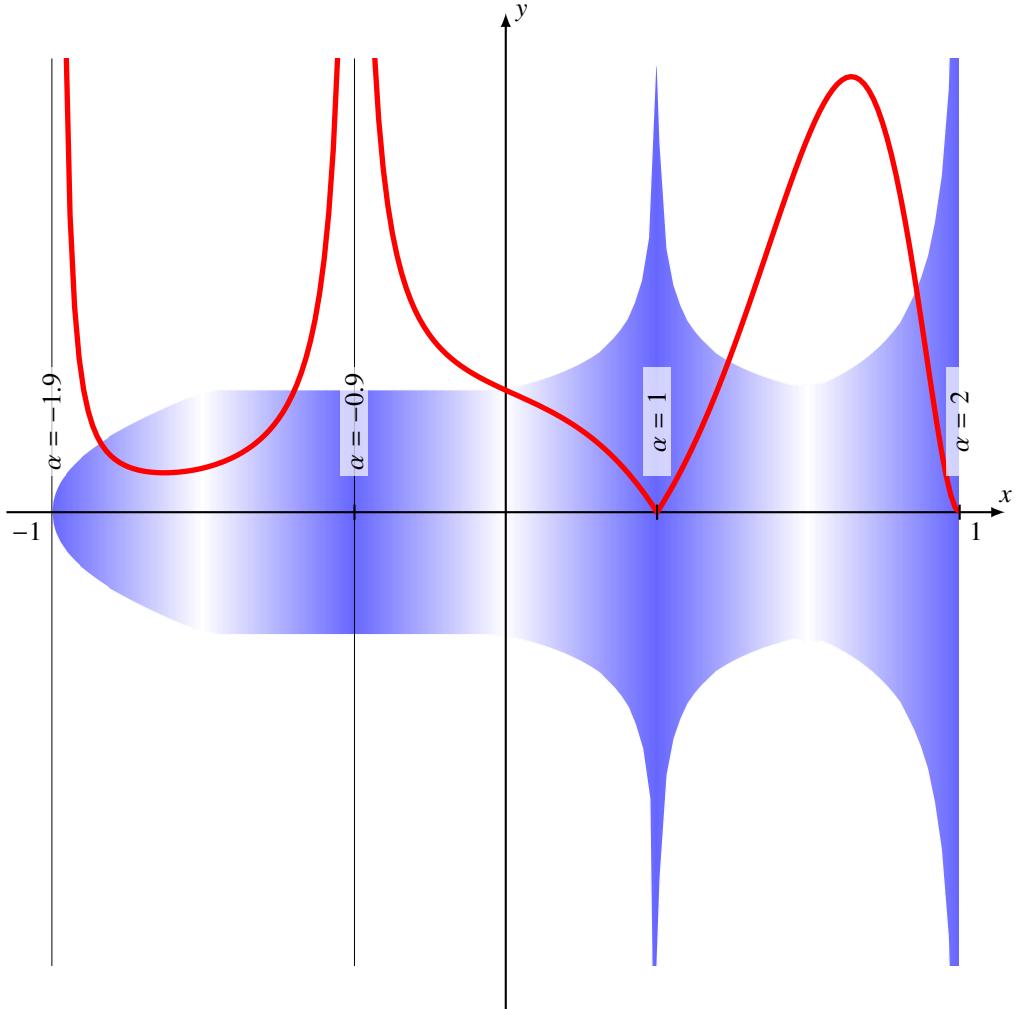


Abbildung 7.3: Nullstellen und Pole der Gewichtsfunktion (rot) legen Ort und Grad von Polen und Nullstellen der Funktionen fest, die beschränkte  $\|\cdot\|_w$ -Norm haben. An den Stellen  $\pm 1$  und  $\pm \frac{1}{2}$  hat die Gewichtsfunktion Pole bzw. Nullstellen mit Grad  $\alpha$ . Der blaue Bereich deutet an, wie schnell die Funktion  $f$  in diesem Bereich anwachsen kann, bzw. wie schnell nahe der Polstelle gegen 0 gehen muss.

$$= 2CD \int_0^\varepsilon t^{\alpha-2a} dt = 2CD \begin{cases} \left[ \frac{t^{\alpha-2a+1}}{\alpha-2a+1} \right]_0^\varepsilon & \alpha - 2a \neq -1 \\ \left[ \log t \right]_0^\varepsilon & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Zähler  $t^{\alpha-2a+1}$  divergiert für  $t \rightarrow 0$  genau dann, wenn  $\alpha - 2a + 1 < 0$  oder  $\alpha < 2a - 1$ . Auch im zweiten Fall, für  $\alpha - 2a + 1 = 0$ , divergiert das Integral. Damit die Norm  $\|f\|_w$  definiert ist, muss also  $a < \frac{1}{2}(\alpha + 1)$  sein.

Ganz ähnlich führt eine Polstelle von  $w$  vom Grad  $\alpha$  an der Stelle  $x_0$  dazu, dass  $f$  dort eine Nullstelle vom Grad  $a$  haben muss. Das Normintegral konvergiert nur, wenn  $2a - \alpha > -1$  ist oder  $a > \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ .

Pole der Gewichtsfunktion schränken also ein, welche Funktionen überhaupt der Untersuchung mit Hilfe des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  zugänglich sind (Abbildung 7.3). Ist die Ordnung  $\alpha$  des Poles grösser als 1, dann müssen die Funktionen eine Nullstelle mindestens vom Grad  $\frac{1}{2}(\alpha + 1)$  haben. Nullstellen der Gewichtsfunktion erweitern die Klasse der Funktionen. Ist die Ordnung der Nullstelle  $\alpha$ , dann dürfen die Funktionen einen Pol der Ordnung kleiner als  $\frac{1}{2}(\alpha + 1)$  haben.

**Lemma 7.6.** Sei  $w(x) \geq 0$  auf dem Intervall  $(a, b)$ . Der Vektorraum  $H_w$  von auf  $(a, b)$  definierten Funktionen sei

$$H_w = \left\{ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right\}.$$

Die Funktionen  $f \in H_w$  haben folgende Eigenschaften

1. Ist  $\xi \in [a, b]$  eine Nullstelle vom Grad  $\alpha$  der Funktion  $w(x)$ , dann
2. Ist  $\xi \in [a, b]$  eine Polstelle vom Grad  $a$  der Funktion  $w(x)$ , dann hat  $f$  eine Nullstelle mindestens vom Grad

### Jacobische Gewichtsfunktion

Die Gewichtsfunktion für die Legendre-Polynome war  $w(x) = 1$ , alle Punkte im Intervall  $(-1, 1)$  hatten das gleiche Gewicht. Diese soll jetzt ersetzt werden durch eine Gewichtsfunktion, die den Punkten an den Intervallenden mehr oder weniger Gewicht gibt, wobei auch zugelassen sein soll, dass die Gewichtung nicht symmetrisch ist.

**Definition 7.7.** Die Jacobi-Gewichtsfunktion ist die Funktion

$$w^{(\alpha, \beta)}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Das Skalarprodukt zugehörige Skalarprodukt wird auch als

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{w^{(\alpha, \beta)}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{(\alpha, \beta)}$$

bezeichnet und die zugehörige Norm mit

$$\|f\|_{(\alpha, \beta)} = \langle f, f \rangle_{(\alpha, \beta)} = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 w^{(\alpha, \beta)}(x) dx.$$

**Definition 7.8.** Die Jacobi-Polynome  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  sind Polynome vom Grad  $n$ , die bezüglich des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{w^{(\alpha,\beta)}}$  orthogonal sind und mit

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$$

normiert sind.

In Abbildung 7.4 ist die Abhängigkeit der Jacobi-Polynome von den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  illustriert. Für  $\alpha = \beta = 0$  entsteht die Gewichtsfunktion  $w^{(0,0)}(x) = 1$ , die Legendre-Polynome sind also der Spezialfall  $\alpha = \beta = 0$  der Jacobi-Polynome.

Der Exponent  $\alpha$  in der Gewichtsfunktion  $w^{(\alpha,\beta)}(x)$  steuert das Gewicht, welches Punkte am rechten Rand des Intervalls erhalten. Für positive Werte von  $\alpha$  hat  $w^{(\alpha,\beta)}(x)$  eine Nullstelle vom Grad  $\alpha$  an der Stelle  $x = 1$ , nach Lemma 7.6 dürfen die Funktionen einen Pole der Ordnung  $< \frac{1}{2}(\alpha - 1)$  haben. Je grösser  $\alpha$  ist, desto weniger Gewicht haben die Punkte am rechten Rand des Intervalls und desto schneller darf eine Funktion für  $x \rightarrow 1$  divergieren.

Für negative Werte von  $\alpha$  hat  $w^{(\alpha,\beta)}(x)$  einen Pol vom Grad  $-\alpha$  an der Stelle  $x = 1$ . Funktionen müssen daher also ein Nullstelle mindestens vom Grad  $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$  haben.

### Jacobi-Gewichtsfunktion und Beta-Verteilung

Die Jacobi-Gewichtsfunktion entsteht aus der Wahrscheinlichkeitsdichte der Beta-Verteilung, die in Abschnitt 4.2.3 eingeführt wurde mit Hilfe der Variablen-Transformation  $x = 2t - 1$  oder  $t = (x+1)/2$ . Das Integral mit der Jacobi-Gewichtsfunktion  $w^{(\alpha,\beta)}(x)$  kann damit umgeformt werden in

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx &= \int_0^1 f(2t - 1) w^{(\alpha,\beta)}(2t - 1) 2 dt \\ &= \int_0^1 f(2t - 1)(1 - (2t - 1))^{\alpha} (1 + (2t - 1))^{\beta} 2 dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 f(2t - 1) t^{\beta} (1 - t)^{\alpha} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha + 1, \beta + 1) \int_0^1 f(2t - 1) \frac{t^{\beta} (1 - t)^{\alpha}}{B(\alpha + 1, \beta + 1)} dt. \end{aligned}$$

Auf der letzten Zeile steht ein Integral mit der Wahrscheinlichkeitsdichte der Beta-Verteilung. Orthogonale Funktionen bezüglich der Jacobischen Gewichtsfunktion  $w^{(\alpha,\beta)}$  werden mit der genannten Substitution also zu orthogonalen Funktionen bezüglich der Beta-Verteilung mit Parametern  $\beta + 1$  und  $\alpha + 1$ .

### Tschebyscheff-Gewichtsfunktion

Es wird später gezeigt werden, dass die Tschebyscheff-Polynome von Abschnitt 1.3 eine Familie orthogonaler Polynome sein. Das zugehörige Skalarprodukt hat die Gewichtsfunktion

$$w_{\text{Tschebyscheff}}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)}} = (1 - x)^{-\frac{1}{2}} (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = w^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x).$$

Die *Tschebyscheff-Gewichtsfunktion* ist also ein Spezialfall der Jacobi-Gewichtsfunktion.

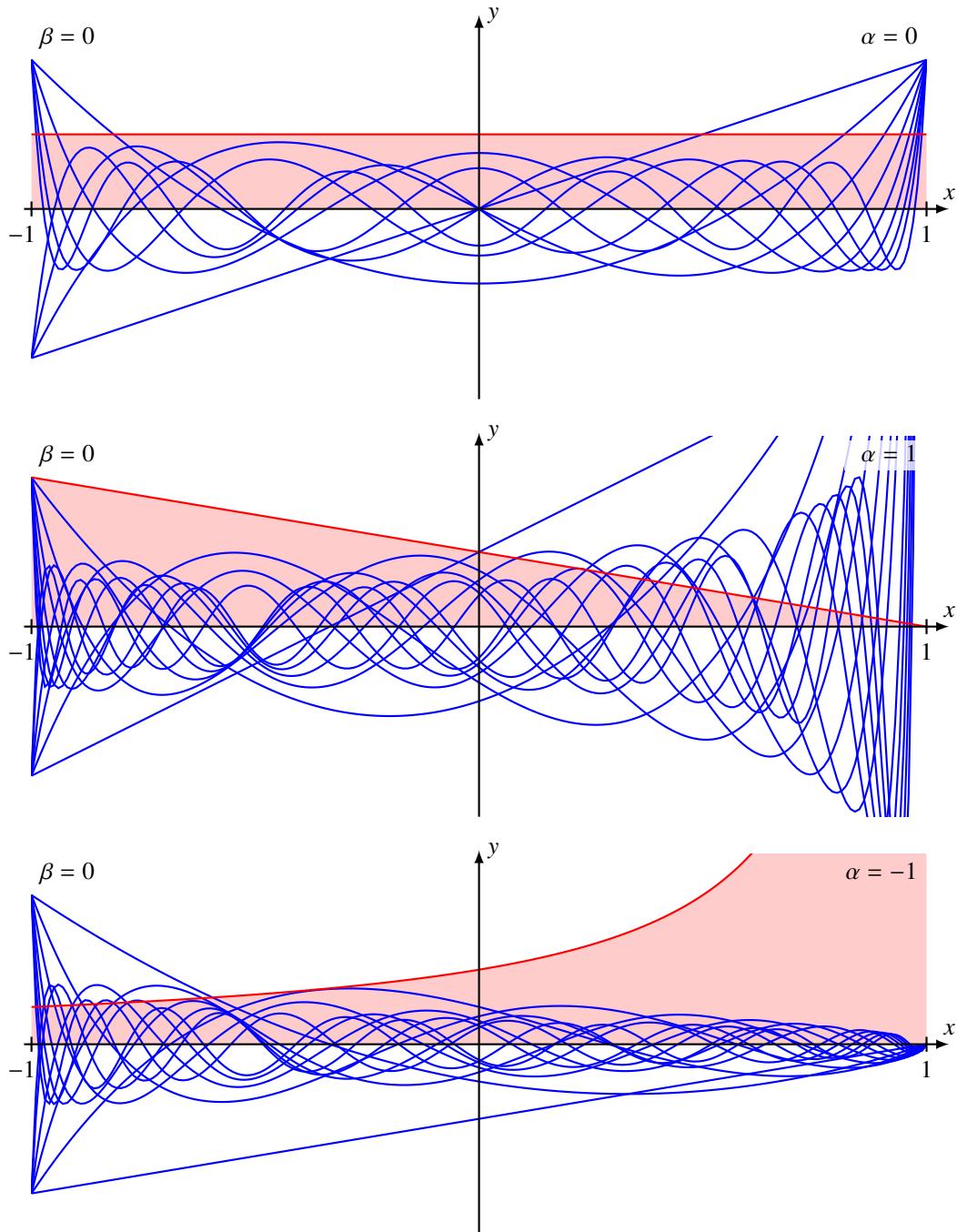


Abbildung 7.4: Jacobi-Polynome vom Grad 1 bis 14 für verschiedene Werte der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ . Je grösser  $\alpha$ , desto weniger Gewicht bekommen die Funktionswerte am rechten Rand und desto grösser werden die Funktionswerte. Für negative  $\alpha$  müssen die Polynome dagegen eine Nullstelle am rechten Rand haben.

### Hermite-Gewichtsfunktion

Die Gewichtsfunktion

$$w_{\text{Hermite}}(x) = w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

heisst die *Hermite-Gewichtsfunktion*. Sie hat keine Nullstellen und geht für  $x \rightarrow \pm\infty$  so schnell gegen 0, dass für alle Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty$$

ist. Als Definitionsintervall kann daher die ganze reelle Achse verwendet werden, also  $a = -\infty$  und  $b = \infty$ . Die mit dieser Gewichtsfunktion konstruierten Polynome heissen bei geeigneter Normierung die *Hermite-Polynome*.

### Laguerre-Gewichtsfunktion

Ähnlich wie die Hermite-Gewichtsfunktion ist die *Laguerre-Gewichtsfunktion*

$$w_{\text{Laguerre}}(x) = e^{-x}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, und sie geht für  $x \rightarrow \infty$  wieder sehr rasch gegen 0. Für  $x \rightarrow -\infty$  hingegen wächst sie so schnell an, dass für alle Polynome  $p(x)$  das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-x} dx$$

unbeschränkt ist. Die Laguerre-Gewichtsfunktion ist daher nur geeignet für den Definitionsbereich  $(0, \infty)$ . Die bezüglich der Laguerre-Gewichtsfunktion orthogonalen Polynome heissen bei geeigneter Normierung die *Laguerre-Polynome*.

## 7.2 Drei-Term-Rekursion für orthogonale Polynome

Die Berechnung der Legendre-Polynome mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens ist wenig hilfreich, wenn es darum geht, Werte der Polynome zu berechnen. Glücklicherweise erfüllen orthogonale Polynome automatisch eine Rekursionsbeziehung mit nur drei Termen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass für die Legendre-Polynome die Relation

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x), \quad \forall n \geq 2,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_0(x) = 1.$$

Mit so einer Rekursionsbeziehung ist es sehr einfach, die Funktionswerte für alle  $P_n(x)$  zu berechnen.

**Definition 7.9.** Eine Folge von Polynomen  $p_n(x)$  heisst orthogonal bezüglich des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ , wenn

$$\langle p_n, p_m \rangle_w = h_n \delta_{nm}$$

für alle  $n, m$ .

### Allgemeine Drei-Term-Rekursion für orthogonale Polynome

Die Multiplikation mit  $x$  macht aus einem Polynom vom Grad  $n$  ein Polynom vom Grad  $n + 1$ . Das Polynom  $xp_n(x)$  lässt sich daher als Linearkombination der Polynome  $p_k(x)$  mit  $k \leq n + 1$  schreiben. Es muss also eine lineare Beziehung zwischen den Polynomen  $p_k(x)$  und  $xp_n(x)$  geben, die man nach  $p_{n+1}(x)$  auflösen kann, um eine lineare Darstellung von  $p_{n+1}(x)$  durch die  $p_k(x)$  und  $p_n(x)$  zu bekommen. A priori muss man damit rechnen, dass sehr viele Summanden nötig sind. Der folgende Satz besagt, dass  $p_n(x)$  eine Rekursionsbeziehung mit nur drei Termen erfüllt.

**Satz 7.10.** Eine Folge bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  orthogonaler Polynome  $p_n$  mit dem Grade  $\deg p_n = n$  erfüllt eine Rekursionsbeziehung der Form

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x) \quad (7.1)$$

für  $n \geq 0$ , wobei  $p_{-1}(x) = 0$  gesetzt wird. Die Zahlen  $A_n$ ,  $B_n$  und  $C_n$  sind reell und es ist  $A_{n-1}A_nC_n \geq 0$  für  $n > 0$ . Wenn  $k_n > 0$  der Leitkoeffizient von  $p_n(x)$  ist, dann gilt

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{h_{n+1}}{h_n}. \quad (7.2)$$

Die Rekursionsbeziehung (7.1) bedeutet, dass sich die Werte  $p_n(x)$  für alle  $n$  ausgehend von  $p_1(x)$  und  $p_0(x)$  mit nur  $O(n)$  Operationen ermitteln lassen.

### Multiplikationsoperator mit $x$

Man kann die Relation (7.1) auch nach dem Produkt  $xp_n(x)$  auflösen, dann wird sie

$$xp_n(x) = \frac{1}{A_n} p_{n+1}(x) - \frac{B_n}{A_n} p_n(x) + \frac{C_n}{A_n} p_{n-1}(x). \quad (7.3)$$

Die Multiplikation mit  $x$  ist eine lineare Abbildung im Raum der Funktionen, die wir weiter unten auch  $M_x$  abkürzen. Die Relation (7.3) besagt, dass diese Abbildung in der Basis der Polynome  $p_k$  tridiagonale Form hat. Ein Beispiel dafür ist im nächsten Abschnitt in (7.4)

### Drei-Term-Rekursion für die Tschebyscheff-Polynome

Eine Relation der Form (7.3) wurde bereits in Abschnitt 1.3.3 hergeleitet. In der Form (7.1) geschrieben lautet sie

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x),$$

also  $A_n = 2$ ,  $B_n = 0$  und  $C_n = 1$ . Die Matrixdarstellung des Multiplikationsoperators  $M_x$  in der Basis der Tschebyscheff-Polynome hat wegen (7.3) die Form

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

### Beweis von Satz 7.10

Die Relation (7.3) zeigt auch, dass der Beweis die Koeffizienten  $\langle xp_k, p_j \rangle_w$  berechnen muss. Dabei wird wiederholt der folgende Trick verwendet. Für jede beliebige Funktion  $f$  mit  $\|f\|_w^2 < \infty$  ist

$$\langle fp_k, p_j \rangle_w = \langle p_k, fp_j \rangle_w.$$

Für  $f(x) = x$  kann man weiter verwenden, dass  $xp_k(x)$  ein Polynom vom Grad  $k+1$  ist. Die Gleichheit  $\langle xp_k, p_j \rangle_w = \langle p_k, xp_j \rangle_w$  ermöglicht also, den Faktor  $x$  dorthin zu schieben, wo es nützlicher ist.

*Beweis des Satzes.* Multipliziert man die rechte Seite von (7.1) aus, dann ist der einzige Term vom Grad  $n+1$  der Term  $A_nxp_n(x)$ . Der Koeffizient  $A_n$  ist also dadurch festgelegt, dass

$$b(x) = p_{n+1}(x) - A_nxp_n(x) \quad (7.5)$$

Grad  $\leq n$  hat. Dazu müssen sich die Terme vom Grad  $n+1$  in den Polynomen wegheben, d. h.  $k_{n+1} - A_nk_n = 0$ , woraus die erste Beziehung in (7.2) folgt.

Die Polynome  $p_k$  sind durch Orthogonalisierung der Monome  $1, x, \dots, x^k$  entstanden. Dies bedeutet, dass  $\langle p_n, x^k \rangle_w = 0$  für alle  $k < n$  gilt und daher auch  $\langle p_n, Q \rangle_w = 0$  für jedes Polynom  $Q(x)$  vom Grad  $< n$ .

Das Polynom  $b(x)$  ist vom Grad  $\leq n$ , es lässt sich also als Linearkombination

$$b(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$

der  $p_k$  mit  $k \leq n$  schreiben. Die Koeffizienten  $b_j$  kann man erhalten, indem man (7.5) Skalar mit  $p_j$  multipliziert. Dabei erhält man

$$h_j b_j = \langle b, p_j \rangle_w = \langle p_{n+1}, p_j \rangle_w - A_n \langle xp_n, p_j \rangle_w.$$

Für  $j \leq n$  verschwindet der erste Term nach der Definition einer Folge von orthogonalen Polynomen. Den zweiten Term kann man umformen in

$$\langle xp_n, p_j \rangle_w = \langle p_n, xp_j \rangle_w.$$

Darin ist  $xp_j$  ein Polynom vom Grad  $j+1$ . Für  $n > j+1$  folgt, dass der zweite Term verschwindet. Somit sind alle  $b_j = 0$  mit  $j < n-1$ , nur der Term  $j = n-1$  bleibt bestehen. Mit  $B_n = b_n$  und  $C_n = b_{n-1}$  bekommt man die somit die Rekursionsbeziehung (7.1).

Indem man das Skalarprodukt von (7.1) mit  $p_{n-1}$  bildet, findet man

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle p_{n+1}, p_{n-1} \rangle_w}_{=0} &= \langle (A_n x + B_n)p_n + C_n p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_w \\ 0 &= A_n \langle xp_n, p_{n-1} \rangle_w + B_n \underbrace{\langle p_n, b_{n-1} \rangle_w}_{=0} - C_n \|p_{n-1}\|_w^2 \\ 0 &= A_n \langle p_n, xp_{n-1} \rangle_w - C_n \|p_{n-1}\|_w^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Indem man  $xp_n$  als

$$xp_{n-1}(x) = \frac{k_{n-1}}{k_n} p_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k p_k(x)$$

schreibt, bekommt man

$$\langle p_n, xp_{n-1} \rangle_w = \left\langle p_n, \frac{k_{n-1}}{k_n} p_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k p_k \right\rangle_w = \frac{k_{n-1}}{k_n} h_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \underbrace{\langle p_n, p_k \rangle_w}_0 = 0$$

Eingesetzt in (7.6) erhält man

$$A_n \frac{k_{n-1}}{k_n} h_n = C_n h_{n-1} \quad \Rightarrow \quad C_n = A_n \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{h_n}{h_{n-1}},$$

damit ist auch die zweite Beziehung von (7.2).  $\square$

## 7.3 Rodrigues-Formeln

Die Drei-Term-Rekursionsformel ermöglicht Werte orthogonaler Polynome effizient zu berechnen. Die Rekursionsformel erhöht den Grad eines Polynoms, indem mit  $x$  multipliziert wird. Mit der Ableitung kann man den Grad aber auch senken, man könnte daher auch nach einer Rekursionsformel fragen, die bei einem Polynom hohen Grades beginnt und mit Hilfe von Ableitungen zu geringeren Graden absteigt. Solche Formeln heißen *Rodrigues-Formeln* nach dem Entdecker Olindo Rodrigues, der eine solche Formel als erster für Legendre-Polynome gefunden hat.

In diesem Abschnitt sei  $p_n(x)$  eine bezüglich des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  auf dem Intervall  $[a, b]$  orthogonale Familie von Polynomen mit genau dem Grad  $\deg p_n = n$ . Die Skalarprodukte sollen

$$\langle p_n, p_m \rangle_w = h_n \delta_{nm}$$

sein.

### 7.3.1 Pearsonsche Differentialgleichung

Die *Pearsonsche Differentialgleichung* ist die Differentialgleichung

$$B(x)y' - A(x)y = 0, \tag{7.7}$$

wobei  $B(x)$  ein Polynom vom Grad höchstens 2 ist und  $A(x)$  ein höchstens lineares Polynom. Die Gleichung (7.7) kann gelöst werden, wenn  $y$  und  $B(x)$  keine Nullstellen haben. Dann kann man die Gleichung umstellen in

$$\frac{y'}{y} = (\log y)' = \frac{A(x)}{B(x)} \quad \Rightarrow \quad y = \exp\left(\int \frac{A(x)}{B(x)} dx\right).$$

Im Folgenden nehmen wir zusätzlich an, dass an den Intervallenden

$$\lim_{x \rightarrow a^+} w(x)B(x) = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} w(x)B(x) = 0 \tag{7.8}$$

gilt.

Falls  $w(x)$  an den Intervallenden einen von 0 verschiedenen Grenzwert hat, bedeutet dies, dass  $B(a) = B(b) = 0$  sein muss. Falls  $w(x)$  am Intervallende divergiert, muss  $B(x)$  dort eine Nullstelle höherer Ordnung haben, was aber für ein Polynom zweiten Grades nicht möglich ist.

### 7.3.2 Rekursionsformel

Multiplikation mit  $B(x)$  wird den Grad eines Polynomes typischerweise um 2 erhöhen, die Ableitung wird ihn wieder um 1 reduzieren. Etwas formeller kann man dies wie folgt formulieren:

**Satz 7.11.** Für alle  $n \geq 0$  ist

$$q_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} B(x)^n w(x) \quad (7.9)$$

ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .

*Beweis.* Wenn  $r_0(x)$  irgend eine differenzierbare Funktion ist, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} r_0(x) B(x)^n w(x) &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{d}{dx} r_0(x) B(x)^n w(x) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (r'_0(x) B(x) + n r_0(x) B'(x) B(x)^{n-1} w(x) + r_0(x) B(x)^n w'(x)) \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \underbrace{(r'_0(x) B(x) + n r_0(x) B'(x) + r_0(x) A(x)) B(x)^{n-1} w(x)}_{= r_1(x)} \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} r_1(x) B^{n-1}(x) w(x). \end{aligned}$$

Iterativ lässt sich eine Folge von Funktionen  $r_k(x)$  definieren, für die Rekursionsformel

$$r_k(x) = r'_{k-1}(x) B(x) + ((n+1-k)B'(x) + A(x)) r_{k-1}(x) \quad (7.10)$$

gilt. Wenn  $r_0(x)$  ein Polynom ist, dann sind alle Funktionen  $r_k(x)$  ebenfalls Polynome. Aus der Konstruktion kann man schliessen, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} r_0(x) B(x)^n w(x) = r_n(x) w(x).$$

Insbesondere folgt für  $r_0(x) = 1$ , dass die  $n$ -te Ableitung den Faktor  $w(x)$  enthält und dass somit  $r_n(x) = q_n(x)$  ein Polynom ist.

Wir müssen auch noch den Grad von  $r_k(x)$  bestimmen, wobei wir wieder von  $r_0(x) = 1$  ausgehen. Wir behaupten, dass  $\deg r_k(x) \leq k$  ist, und beweisen dies mit vollständiger Induktion. Für  $k = 0$  ist  $\deg r_0(x) = 0 \leq k$  die Induktionsverankerung.

Wir nehmen jetzt also an, dass  $\deg r_{k-1}(x) \leq k-1$  ist und verwenden (7.10) um den Grad zu berechnen:

$$\begin{aligned} \deg r_k(x) &= \max(\underbrace{\deg(r'_{k-1}(x) B(x))}_{(k-1)-1+2}, \underbrace{\deg(r_{k-1}(x) B'(x))}_{\leq (k-1)+1}, \underbrace{\deg(r_{k-1}(x) A(x))}_{\leq (k-1)+1}) \leq k. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt und  $\deg r_k(x) \leq k$  bewiesen. Damit ist auch gezeigt, dass  $\deg q_n(x) \leq n$ .  $\square$

Die Rodrigues-Formel (7.9) produziert eine Folge von Polynomen aufsteigenden Grades, es ist aber noch nicht klar, dass diese Polynome bezüglich des gewählten Skalarproduktes orthogonal sind. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 7.12.** Es gibt Konstanten  $c_n$  derart, dass

$$p_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (B(x)^n w(x))$$

gilt.

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Polynome orthogonal sind auf allen Monomen von geringerem Grad.

$$\begin{aligned} \langle q_n, x^k \rangle_w &= \int_a^b q_n(x) x^k w(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{w(x)} \left( \frac{d^n}{dx^n} (B(x)^n w(x)) \right) x^k w(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} (B(x)^n w(x)) x^k dx \\ &= \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (B(x)^n w(x)) x^k \right]_a^b - \int_a^b \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (B(x)^n w(x)) k x^{k-1} dx \end{aligned}$$

Durch  $n$ -fache Iteration wird das Integral auf 0 reduziert. Es bleiben nur die eckigen Klammern stehen, doch wenn man die Produktregel auswertet, bleibt immer mindestens ein Produkt  $B(x)w(x)$  stehen, nach den Voraussetzungen an den Grenzwert dieses Produktes an den Intervallenden verschwinden diese Terme alle. Damit sind die  $q_n(x)$  Polynome, die  $w$ -orthogonal sind auf allen  $x^k$  mit  $k < n$ .

Die Polynome  $q_k(x)$  mit  $k < n$  haben Grad  $< n$  und sind daher Linearkombinationen von Monomen vom Grad  $< n$ . Soeben wurde gezeigt, dass  $q_n(x)$  orthogonal auf diesen Monomen ist, also auch auf  $q_k(x)$  mit  $k < n$ . Damit ist gezeigt, dass Polynome  $q_n(x)$  eine orthogonale Familie von Polynomen bilden. Durch Normierung müssen sich daraus die Polynome  $p_n(x)$  ergeben.  $\square$

### 7.3.3 Differentialgleichung

Man kann auch zeigen (siehe z. B. [buch:pearsondg]), dass die orthogonalen Polynome, die die Rodrigues-Formel liefert, einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, deren möglicherweise nicht konstante Koeffizienten sich direkt aus  $A(x)$ ,  $B(x)$  und  $w(x)$  bestimmen lassen.

### 7.3.4 Beispiel

Im folgenden zeigen wir, wie sich für viele der früher eingeführten Gewichtsfunktionen Rodrigues-Formeln für die zugehörigen orthogonalen Polynome konstruieren lassen.

#### Legendre-Polynome

Legendre-Polynome sind orthogonale Polynome zum Standardskalarprodukt mit  $w(x) = 1$ . Die Pearsonsche Differentialgleichung ist für  $A(x) = 0$  immer erfüllt. Die Randbedingung bedeutet wegen  $w(x) = 1$ , dass  $B(x)$  an den Endpunkten des Intervalls verschwinden muss. Da  $B(x)$  ein Polynom höchstens vom Grad 2 ist, muss  $B(x)$  ein Vielfaches von  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$  sein. Die Rodrigues-Formel für die Legendre-Polynome hat daher die Form

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

darin müssen die Konstanten  $c_n$  noch bestimmt werden. In der für die Legendre-Polynome gewählten Normierung ist

$$c_n = \frac{1}{2^n n!} \quad \text{und damit} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

### Hermite-Polynome

Die Hermite-Polynome sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und verwenden die Gewichtsfunktion

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Für jedes beliebige Polynom  $B(x)$ , auch für höheren Grad als 2, ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} B(x)w(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} B(x)e^{-x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} B(x)w(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} B(x)e^{-x^2} = 0,$$

die Randbedingung der Pearson'schen Differentialgleichung ist also immer erfüllt.

Die Ableitung der Gewichtsfunktion ist

$$w'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Eingesetzt in die Pearson'sche Differentialgleichung findet man

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{-2xe^{-x^2}}{e^{-x^2}} = \frac{-2x}{1}$$

und daher

$$A(x) = -2x \quad \text{und} \quad B(x) = 1.$$

Die Gradbedingung ist also immer erfüllt und es folgt die Rodrigues-Formel für die Hermite-Polynome

$$H_n(x) = c_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (7.11)$$

Die Hermite-Polynome können mit der Rodrigues-Formel berechnet werden, aber die Form (7.11) ist dazu nicht gut geeignet. Zur Vereinfachung dient die Berechnung

$$-\frac{d}{dx}(e^{-x^2} f(x)) = 2xe^{-x^2} f(x) - e^{-x^2} f'(x) = e^{-x^2} \left( -\frac{d}{dx} + 2x \right) f(x),$$

nach der der Ableitungsoperator mit dem Faktor  $e^{-x^2}$  vertauscht werden kann, wenn er durch die grosse Klammer auf der rechten Seite ersetzt wird. Die Rodrigues-Formel bekommt daher die Form

$$H_n(x) = \left( 2x - \frac{d}{dx} \right)^n \cdot 1.$$

### Jacobi-Gewichtsfunktion

Die Jacobi-Gewichtsfunktion

$$w(x) = w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

hat die Ableitung

$$w'(x) = \beta(1-x)^\alpha (1+x)^{\beta-1} - \alpha(1-x)^{\alpha-1} (1+x)^\beta$$

und für die linke Seite der Pearsonschen Differentialgleichung findet man

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{\beta(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta-1} - \alpha(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^\beta}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} = \frac{\beta - \alpha - (\alpha + \beta)x}{1 - x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

Die Polynome

$$A(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta)x \quad \text{und} \quad B(x) = 1 - x^2$$

erfüllen die Gradvoraussetzungen für eine Lösung der Pearsonschen Differentialgleichung, die Anlass zu einer Rodrigues-Formel gibt. Die Randbedingungen sind noch zu prüfen:  $B(x)$  hat eine Nullstelle erster Ordnung bei  $\pm 1$ , also ist

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\mp} B(x)w(x) = 0$$

genau dann, wenn  $\alpha > -1$  und  $\beta > -1$  gilt. Für  $\alpha > -1$  und  $\beta > -1$  gibt es daher auch für die Jacobi-Polynome eine Rodriguez-Formel der Art

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{c_n}{w^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n w^{(\alpha, \beta)}(x)).$$

Die Konstanten  $c_n$  werden durch die Normierung festgelegt.

### Die Tschebyscheff-Gewichtsfunktion

Die Tschebyscheff-Gewichtsfunktion ist der Spezialfall  $a = b = -\frac{1}{2}$  der Jacobi-Gewichtsfunktion. Die Rodrigues-Formel für die Tschebyscheff-Polynome lautet daher

$$T_n(x) = c_n \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}},$$

wobei wir den korrekten Wert von  $c_n$  nicht nachgewiesen haben.

### Die Laguerre-Gewichtsfunktion

Die Laguerre-Gewichtsfunktion

$$w_{\text{Laguerre}}(x) = w(x) = e^{-x}$$

hat die Ableitung

$$w'(x) = -e^{-x},$$

die Pearsonsche Differentialgleichung ist daher

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{-1}{1}.$$

Dies suggeriert  $A(x) = -1$  und  $B(x) = 1$  als Zähler und Nenner der rechten Seite, aber daraus produziert die Rodrigues-Formel immer nur die konstante Funktion. Außerdem ist die Randbedingung an der Stelle  $x = 0$  nicht erfüllt.  $B(x)$  muss so gewählt werden, dass

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} w(x)B(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}B(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = B(0).$$

Die Annahme einer konstanten Funktion  $B(x)$  widerspricht dem. Aus der Pearsonschen Differentialgleichung folgt  $A(x) = -B(x)$ . Da  $A(x)$  höchstens vom Grad 1 sein kann und  $B(x)$  mindestens vom Grad 1 muss, folgt

$$B(x) = x \quad \text{und} \quad A(x) = -x.$$

Die Rodrigues-Formel liefert dann die Laguerre-Polynome als

$$L_n(x) = c_n e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}.$$

Die Werte von  $c_n$  hängen von der gewählten Normierung ab.

Mit der Rodrigues-Formel können die Laguerre-Polynome bis auf die Normierung recht direkt berechnen. Dazu versuchen wir die Ableitungen von  $f(x)e^{-x}$  dadurch zu berechnen, dass wir den Gewichtsfaktor  $e^{-x}$  möglichst weit nach links verschieben wie in

$$\frac{d}{dx} e^{-x} f(x) = e^{-x} (-f(x) + f'(x)) = e^{-x} \left( -1 + \frac{d}{dx} \right) f.$$

Daraus kann man ablesen, dass die Ableitung nach  $x$  mit dem Faktor  $e^{-x}$  vertauscht werden kann, wenn man die Ableitung durch  $-1 + d/dx$  ersetzt. Damit kann jetzt auch die  $n$ -te Ableitung bestimmen:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x} f(x) = e^{-x} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^n f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} f(x)$$

Dies muss jetzt auf  $f(x) = x^n$  angewendet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^n &= e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)(n-2) \cdots (k+1) x^k \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{n!}{k!} x^k \\ &= e^{-x} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n+1)(-n+2) \cdots (-n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \frac{x^k}{k!} \\ &= e^{-x} n! \cdot {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ 1 \end{matrix}; x\right). \end{aligned}$$

Die übliche Normierung für die Laguerre-Polynome ist  $L_n(0) = 1$ , die übereinstimmt mit dem Wert der hypergeometrischen Funktion an der Stelle 0. Wir fassen die Resultate im folgenden Satz zusammen.

**Satz 7.13.** *Die Laguerre-Polynome vom Grad  $n$  haben die Form*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ 1 \end{matrix}; x\right). \quad (7.12)$$

Laguerre-Polynome sind als spezielle hypergeometrische Funktionen, für  $n \leq 7$  sind sie in Tabelle 7.2 zusammengestellt. In Abbildung 7.5 sind die Laguerre-Polynome vom Grad 0 bis 9 dargestellt.

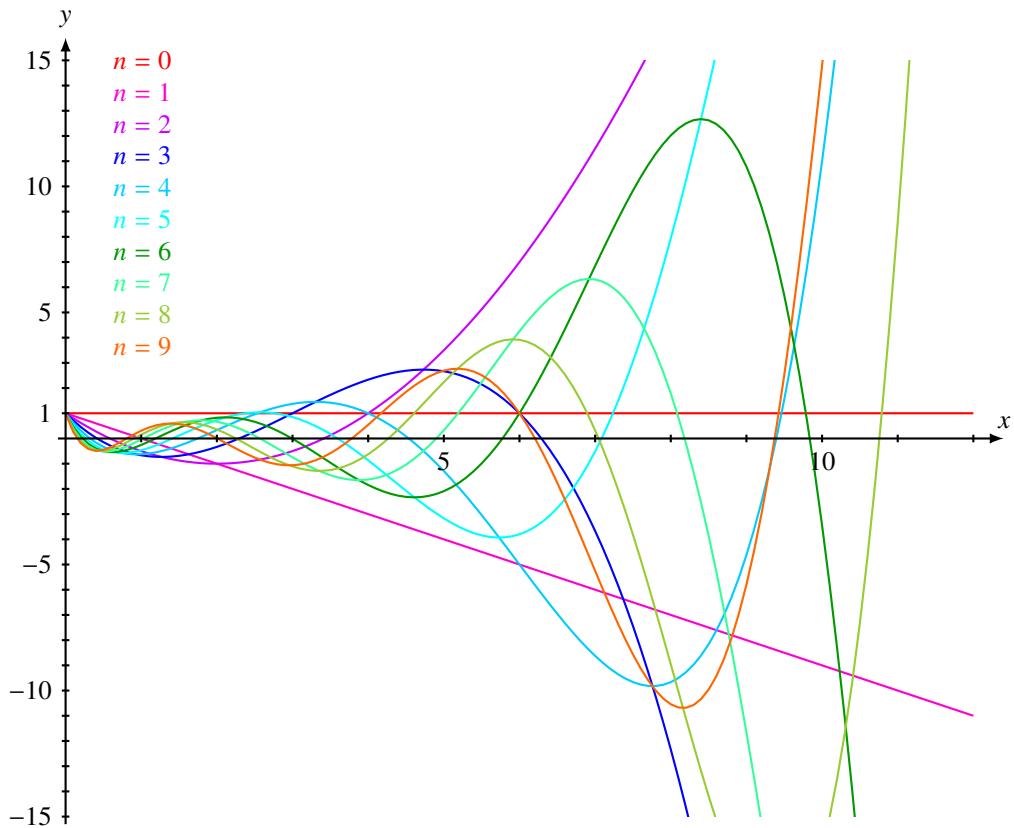


Abbildung 7.5: Laguerre-Polynome vom Grad 0 bis 9

$n$	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2!}(-x^2 + 4x + 2)$
3	$\frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{5!}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 60x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{6!}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$
7	$\frac{1}{7!}(-x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040)$
8	$\frac{1}{8!}(x^8 - 64x^7 + 1568x^6 - 18816x^5 + 117600x^4 - 376320x^3 + 564480x^2 - 322560x + 40320)$

Tabelle 7.2: Laguerre-Polynome  $L_n(x)$  für  $n = 0, \dots, 8$

## 7.4 Orthogonale Polynome und Differentialgleichungen

Legendre hat einen ganz anderen Zugang zu den nach ihm benannten Polynomen gefunden. Er hat sie gefunden als die Lösungen einer speziellen Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt sollen diese Funktionen mit der Potenzreihen-Methode wiedergefunden werden. Dabei stellt sich heraus, dass diese Polynome auch Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Differentialoperator sind. Die Orthogonalität wird dann aus einer Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft folgen, dass Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

### 7.4.1 Legendre-Differentialgleichung

Die *Legendre-Differentialgleichung* ist die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \quad (7.13)$$

für eine Funktion  $y(x)$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$ .

Sei  $y(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung (7.13). Setzt man  $y_s(x) = y(-x)$  in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$(1 - x^2)y_s''(x) - 2xy_s'(x) + n(n + 1)y_s(x) = (1 - x^2)y''(-x) + 2xy(-x) + n(n + 1)y(-x).$$

Ersetzt man  $t = -x$ , dann wird daraus

$$(1 - t^2)y''(t) - 2ty(t) + n(n + 1)y(t) = 0$$

aus der Differentialgleichung (7.13). Insbesondere ist die gespiegelte Funktion  $y_s(x)$  ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung.

Ist  $y(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung ist, dann lässt sie sich in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion

$$\left. \begin{array}{l} y_g(x) = \frac{y(x) + y(-x)}{2} \\ y_u(x) = \frac{y(x) - y(-x)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = y_g(x) + y_u(x)$$

zerlegen, die als Linearkombinationen der beiden Lösungen  $y(x)$  und  $y_s(x)$  ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung sind.

#### Potenzreihenlösung

Wir suchen eine Lösung in Form einer Potenzreihe um  $x = 0$  und verwenden dazu den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1} + n(n + 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k + 2)(k + 1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^k + n(n + 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten zur Potenz  $k$  sind daher

$$\begin{aligned}
 k = 0 : \quad & 0 = 2a_2 + n(n+1)a_0 \\
 & a_2 = -\frac{n(n+1)}{2}a_0 \\
 k = 1 : \quad & 0 = 6a_3 - 2a_1 + n(n+1)a_1 \\
 & a_3 = \frac{2-n(n+1)}{6}a_1 \\
 k > 1 : \quad & 0 = (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + n(n+1)a_k \\
 & a_{k+2} = \frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Wenn  $a_1 = 0$  und  $a_0 \neq 0$  ist, dann ist die Funktion  $y(x)$  gerade, alle ungeraden Koeffizienten verschwinden. Ebenso verschwinden alle geraden Koeffizienten, wenn  $a_0 = 0$  und  $a_1 \neq 0$ . Für jede Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung ist  $y_g(x)$  eine Lösung mit  $a_1 = 0$  und  $y_u(x)$  eine Lösung mit  $a_0 = 0$ . Wir können die Diskussion der Lösungen daher auf gerade oder ungerade Lösungen einschränken.

Gesucht ist jetzt eine Lösung in Form eines Polynoms. In diesem Fall müssen die Koeffizienten  $a_k$  ab einem gewissen Index verschwinden. Dies tritt nach (7.14) genau dann auf, wenn der Zähler für ein  $k$  verschwindet. Folglich gibt es genau dann Polynomlösungen der Differentialgleichungen, wenn  $n$  eine natürliche Zahl ist. Außerdem ist die Lösung ein Polynom  $\bar{P}_n(x)$  vom Grad  $n$ . Das Polynom soll wieder so normiert sein, dass  $\bar{P}_n(1) = 1$  ist.

Die Lösungen der Differentialgleichungen können jetzt explizit berechnet werden. Zunächst ist  $\bar{P}_0(x) = 1$  und  $\bar{P}_1(x) = x$ . Für  $n = 2$  setzen wir zunächst  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  und erhalten

$$y(x) = 1 + \frac{0(0+1) - 2(2+1)}{(0+2)(0+1)}a_0x^2 = 1 - 3x^2 \quad \text{oder} \quad \bar{P}_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Für  $n = 3$  starten wir von  $a_1 = 1$  und  $a_0 = 0$ , was zunächst  $a_2 = 0$  impliziert. Für  $a_3$  finden wir

$$a_3 = \frac{1(1+1) - 3(3+1)}{(1+2)(1+1)} = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad y(x) = x - \frac{5}{3}x^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Dies stimmt überein mit den früher gefundenen Ausdrücken für die Legendre-Polynome.

Die Potenzreihenlösung zeigt zwar, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Polynomlösung  $\bar{P}_n(x)$  vom Grad  $n$  gibt. Dies kann aber nicht erklären, warum die so gefundenen Polynome orthogonal sind.

## Eigenfunktionen

Die Differentialgleichung (7.13) kann mit dem Differentialoperator

$$D = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

als

$$Dy + n(n+1)y = 0$$

geschrieben werden. Tatsächlich ist

$$Dy = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dy} = \frac{d}{dx}(1-x^2)y' = (1-x^2)y'' - 2xy'.$$

Dies bedeutet, dass die Lösungen  $\bar{P}_n(x)$  Eigenfunktionen des Operators  $D$  zum Eigenwert  $n(n + 1)$  sind:

$$D\bar{P}_n = -n(n + 1)\bar{P}_n.$$

### Orthogonalität von $\bar{P}_n$ als Eigenfunktionen

Ein Operator  $A$  auf Funktionen heisst *selbstadjungiert*, wenn für zwei beliebige Funktionen  $f$  und  $g$  gilt

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

gilt. Im vorliegenden Zusammenhang möchten wir die Eigenschaft nutzen, dass Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Operatores zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Dazu seien  $Df = \lambda f$  und  $Dg = \mu g$  und wir rechnen

$$\begin{aligned} \langle Df, g \rangle &= \langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \\ &= \langle f, Dg \rangle = \langle f, \mu g \rangle = \mu \langle f, g \rangle \\ &\frac{0}{0} = (\lambda - \mu) \langle f, g \rangle \end{aligned} \quad (7.15)$$

Da  $\lambda - \mu \neq 0$  ist, muss  $\langle f, g \rangle = 0$  sein.

Der Operator  $D$  ist selbstadjungiert, d. h. für zwei beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gilt

$$\begin{aligned} \langle Df, g \rangle &= \int_{-1}^1 (Df)(x)g(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right) g(x) dx \\ &= \underbrace{\left[ \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right) g(x) \right]_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right) \frac{d}{dx} g(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) dx \\ &= - \underbrace{\left[ f(x) \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) \right]_{-1}^1}_{=0} + \int_{-1}^1 f(x) \left( \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) dx \\ &= \langle f, Dg \rangle. \end{aligned}$$

Dies beweist, dass  $D$  selbstadjungiert ist. Da  $\bar{P}_n$  Eigenwerte des selbstadjungierten Operators  $D$  zu den verschiedenen Eigenwerten  $-n(n + 1)$  sind, folgt auch, dass die  $\bar{P}_n$  orthogonale Polynome vom Grad  $n$  sind, die die gleiche Standardisierungsbedingung wie die Legendre-Polygone erfüllen, also ist  $\bar{P}_n(x) = P_n(x)$ .

### Legendre-Funktionen zweiter Art

Die Potenzreihenmethode liefert natürlich auch Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung, die sich nicht als Polynome darstellen lassen. Ist  $n$  gerade, dann liefern die Anfangswerte  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$  eine ungerade Funktion, die Folge der Koeffizienten bricht aber nicht ab, vielmehr ist

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k = \frac{k}{k+2} a_k.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel findet man

$$a_k = \frac{k-2}{k} a_{k-2} = \frac{k-2}{k} \frac{k-4}{k-2} a_{k-4} = \frac{k-2}{k} \frac{k-4}{k-2} \frac{k-6}{k-4} a_{k-6} = \cdots = \frac{1}{k} a_1.$$

Die Lösung hat daher die Reihenentwicklung

$$Q_0(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{artanh} x.$$

Die Funktion  $Q_0(x)$  heisst *Legendre-Funktion zweiter Art*.

Für  $n = 1$  wird die Reihenentwicklung  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  etwas interessanter. Die Rekursionsformel für die Koeffizienten ist

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-2}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad \text{oder} \quad a_k = \frac{(k-1)(k-2)-2}{k(k-1)} a_{k-2}$$

Man erhält der Reihe nach

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-2}{2 \cdot 1} a_0 = -1 \\ a_3 &= 0 \\ a_4 &= \frac{3 \cdot 2 - 2}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{4}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{1}{3} a_2 = -\frac{1}{3} \\ a_5 &= 0 \\ a_6 &= \frac{5 \cdot 4 - 2}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{18}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{1}{5} \\ a_7 &= 0 \\ a_8 &= \frac{7 \cdot 6 - 2}{8 \cdot 7} a_6 = \frac{40}{8 \cdot 7} = -\frac{1}{7} \\ a_9 &= 0 \\ a_{10} &= \frac{9 \cdot 8 - 2}{10 \cdot 9} a_8 = \frac{70}{10 \cdot 9} = -\frac{1}{9}, \end{aligned}$$

woraus sich die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} y(x) &= -x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 - \frac{1}{9}x^{10} - \dots \\ &= -x \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots \right) = -x \operatorname{artanh} x. \end{aligned}$$

Die *Legendre-Funktionen zweiter Art*  $Q_n(x)$  werden allerdings so definiert, dass gewisse Rekursionsformeln für die Legendre-Polynome, die wir hier nicht hergeleitet haben, auch für die  $Q_n(x)$  gelten. In dieser Normierung muss statt des eben berechneten  $y(x)$  die Funktion

$$Q_1(x) = x \operatorname{artanh} x - 1$$

verwendet werden.

### 7.4.2 Laguerre-Differentialgleichung

Die Laguerre-Gewichtsfunktion  $w_{\text{Laguerre}}(x) = e^{-x}$  führte auf die Laguerre-Polynome  $L_n(x)$ , die in (7.12) als hypergeometrische Funktionen erkannt wurden. Sie sind daher auch Lösungen der Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion  ${}_1F_1$ , die in (5.31) dargestellt ist.

Die Parameter der Darstellung von  $L_n(x)$  als hypergeometrische Funktion sind

$$L_n(x) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ 1 \end{matrix}; x\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -n \\ b = 1. \end{cases}$$

Einsetzen dieser Parameter in die Differentialgleichung (5.31)

$$zw'' + (1 - z)w' + nw = 0 \quad (7.16)$$

Dies ist die *Laguerre-Differentialgleichung*. Die Laguerre-Polynome sind also Lösungen der Laguerre-Differentialgleichung, wenn der Parameter  $n$  nicht-negativ ganzzahlig ist.

Die allgemeine Laguerre-Differentialgleichung lässt beliebige reelle Werte für den Koeffizienten von  $y$  zu, sie lautet

$$zw'' + (1 - z)w' + \lambda w = 0.$$

Die Anfangsbedingungen für die hypergeometrische Funktion als Lösung

$$L_n(0) = {}_1F_1(-\lambda; 1; 0) = 1$$

$$L'_n(0) = \frac{d}{dx} {}_1F_1(-\lambda; 1; 0) = \frac{-\lambda}{1}$$

Der Satz 5.7 schlägt eine zweite Lösung vor, im vorliegenden Fall mit  $b = 1$  ist die zweite Lösung jedoch identisch zu ersten, es muss daher ein anderer Weg zu einer zweiten Lösung gesucht werden.

#### Die assozierte Laguerre-Differentialgleichung

Die *assoziierte Laguerre-Differentialgleichung* ist die Differentialgleichung

$$zw'' + (\nu + 1 - z)w' + \lambda w = 0, \quad (7.17)$$

also die Differentialgleichung für die hypergeometrische Funktion  ${}_1F_1$  mit Parametern  $a = -\lambda$  und  $b = \nu + 1$ . Die Gleichung (7.17) hat daher die Lösung  ${}_1F_1(-\lambda; \nu + 1; x)$ . Für natürliches  $\lambda$  sind diese Lösungen Polynome

$$L_n^{(\nu)}(x) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ \nu + 1 \end{matrix}; x\right),$$

sie heißen die *assoziierten Laguerre-Polynome*.

## 7.5 Bessel-Funktionen als orthogonale Funktionenfamilie

Auch die Besselfunktionen sind eine orthogonale Funktionenfamilie. Sie sind Funktionen differenzierbaren Funktionen  $f(r)$  für  $r > 0$  mit  $f'(r) = 0$  und für  $r \rightarrow \infty$  nimmt  $f(r)$  so schnell ab, dass auch  $rf(r)$  noch gegen 0 strebt. Das Skalarprodukt ist

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty r f(r) g(r) dr,$$

als Operator verwenden wir

$$A = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + s(r),$$

wobei  $s(r)$  eine beliebige integrierbare Funktion sein kann. Zunächst überprüfen wir, ob dieser Operator wirklich selbstadjungiert ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_0^\infty r \left( f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + s(r)f(r) \right) g(r) dr \\ &= \int_0^\infty rf''(r)g(r) dr + \int_0^\infty f'(r)g(r) dr + \int_0^\infty s(r)f(r)g(r) dr. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist symmetrisch in  $f$  und  $g$ , daher ändern wir daran weiter nichts. Auf das erste Integral kann man partielle Integration anwenden und erhält

$$= \left[ rf'(r)g(r) \right]_0^\infty - \int_0^\infty f'(r)g(r) + rf'(r)g'(r) dr + \int_0^\infty f'(r)g(r) dr + \int_0^\infty s(r)f(r)g(r) dr.$$

Der erste Term verschwindet wegen der Bedingungen an die Funktionen  $f$  und  $g$ . Der erste Term im zweiten Integral hebt sich gegen das zweite Integral weg. Der letzte Term ist das Skalarprodukt von  $f'$  und  $g'$ . Somit ergibt sich

$$= -\langle f', g' \rangle + \int_0^\infty s(r)f(r)g(r) dr. \quad (7.18)$$

Vertauscht man die Rollen von  $f$  und  $g$ , erhält man das Gleiche, da im letzten Ausdruck (7.18) die Funktionen  $f$  und  $g$  symmetrische auftreten. Damit ist gezeigt, dass der Operator  $A$  selbstadjungiert ist. Es folgt nun, dass Eigenvektoren des Operators  $A$  automatisch orthogonal sind.

Eigenfunktionen von  $A$  sind aber Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} Af &= \lambda f \\ \Rightarrow \quad f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + s(r)f(r) &= \lambda f(r) \\ \Rightarrow \quad r^2 f''(r) + rf'(r) + (-\lambda r^2 + s(r)r^2)f(r) &= 0 \end{aligned}$$

sind.

Durch die Wahl  $s(r) = 1$  wird der Operator  $A$  zum Bessel-Operator  $B$  definiert in (5.20). Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung zu verschiedenen Werten des Parameters müssen also orthogonal sein, insbesondere sind die Besselfunktion  $J_\nu(r)$  und  $J_\mu(r)$  orthogonal wenn  $\mu \neq \nu$  ist.

## 7.6 Das Sturm-Liouville-Problem

Sowohl bei den Bessel-Funktionen wie bei den Legendre-Polynomen konnte die Orthogonalität der Funktionen dadurch gezeigt werden, dass sie als Eigenfunktionen eines bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes selbstadjungierten Operators erkannt wurden.

### 7.6.1 Differentialgleichung

Das klassische Sturm-Liouville-Problem ist das folgende Eigenwertproblem. Gesucht sind Lösungen der Differentialgleichung

$$((p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x) \quad (7.19)$$

auf dem Intervall  $(a, b)$ , die zusätzlich die Randbedingungen

$$\begin{aligned} k_a y(a) + h_a p(a)y'(a) &= 0 \\ k_b y(b) + h_b p(b)y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

erfüllen, wobei  $|k_i|^2 + |h_i|^2 \neq 0$  mit  $i = a, b$ . Weitere Bedingungen an die Funktionen  $p(x), q(x), w(x)$  sowie die Lösungsfunktionen  $y(x)$  sollen später geklärt werden.

### 7.6.2 Das verallgemeinerte Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen

Ein zu (7.19) analoges Eigenwertproblem für Matrizen ist das folgende verallgemeinerte Eigenwertproblem. Das gewohnte Eigenwertproblem verwendet die Matrix  $B = E$ .

**Definition 7.14.** Seien  $A$  und  $B$   $n \times n$ -Matrizen.  $v$  heisst verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn

$$Av = \lambda Bv.$$

Für symmetrische Matrizen lässt sich dieses Problem auf ein Optimierungsproblem reduzieren.

**Satz 7.15.** Seien  $A$  und  $B$  symmetrische  $n \times n$ -Matrizen und sei außerdem  $B$  positiv definit. Ist  $v$  ein Vektor, der die Grösse

$$f(v) = \frac{v^t A v}{v^t B v}$$

maximiert, ist ein verallgemeinerter Eigenvektor für die Matrizen  $A$  und  $B$ .

*Beweis.* Sei  $\lambda = f(v)$  der maximale Wert und  $u \neq 0$  ein beliebiger Vektor. Da  $v$  die Grösse  $f(v)$  maximiert, muss die Ableitung von  $f(u+tv)$  für  $t = 0$  verschwinden. Um diese Ableitung zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Ableitung von  $(v+tu)^t M(v+tu)$  an der Stelle  $t = 0$  für eine beliebige symmetrische Matrix:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (v+tu)^t M(v+tu) &= \frac{d}{dt} (v^t v + t(v^t M u + u^t M v) + t^2 u^t M u) = v^t M u + u^t M v + 2t v^t M v \\ \frac{d}{dt} (v^t + tu^t) M(v+tu) \Big|_{t=0} &= v^t M u + u^t M v = 2v^t M u \end{aligned}$$

Dies wenden wir jetzt auf den Quotienten  $\lambda(v+tu)$  an.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(v+tu) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \frac{(v+tu)^t A(v+tu)}{(v+tu)^t B(v+tu)} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{2u^t A v (v^t B v) - 2u^t B v (v^t A v)}{(v^t B v)^2} = \frac{2}{v^t B v} u^t \left( A v - \frac{v^t A v}{v^t B v} B v \right) \\ &= 2 \frac{u^t (A v - \lambda B v)}{v^t B v} \end{aligned}$$

Da  $v$  ein Maximum von  $\lambda(v)$  ist, verschwindet diese Ableitung für alle Vektoren  $u$ , somit gilt

$$u^t(Av - \lambda Bv) = 0$$

für alle  $u$ , also auch  $Av = \lambda Bv$ . Dies beweist, dass  $v$  ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  ist.  $\square$

**Satz 7.16.** Verallgemeinerte Eigenvektoren  $u$  und  $v$  von  $A$  und  $B$  zu verschiedenen Eigenwerten erfüllen  $u^t B v = 0$ .

*Beweis.* Seien  $\lambda$  und  $\mu$  die Eigenwerte, also  $Au = \lambda Bu$  und  $Av = \mu Bv$ . Wie in (7.15) berechnen wir das Skalarprodukt auf zwei Arten

$$\begin{aligned} u^t Av &= u^t \lambda Bv = \lambda u^t Bv \\ &= v^t Au = v^t \mu Bu = \mu v^t Bv \\ &\hline 0 &= (\lambda - \mu) u^t Bv. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte verschieden sind, ist  $\lambda - \mu \neq 0$ , es folgt, dass  $u^t Bv = 0$  sein muss.  $\square$

Verallgemeinerte Eigenwerte und Eigenvektoren verhalten sich also ganz analog zu den gewöhnlichen Eigenwerten und Eigenvektoren. Da  $B$  positiv definit ist, ist  $B$  auch invertierbar. Zudem kann  $B$  zur Definition des verallgemeinerten Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle_B = u^t B v$$

verwendet werden. Die Matrix

$$\tilde{A} = B^{-1} A$$

ist bezüglich dieses Skalarproduktes selbstadjungiert, denn es gilt

$$\langle \tilde{A}u, v \rangle_B = (B^{-1}Au)^t Bv = u^t A^t (B^{-1})^t Bv = u^t Av = u^t BB^{-1}Av = \langle u, \tilde{A}v \rangle.$$

Das verallgemeinerte Eigenwertproblem für symmetrische Matrizen ist damit ein gewöhnliches Eigenwertproblem für selbstadjungierte Matrizen des Operators  $\tilde{A}$  bezüglich des verallgemeinerten Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ .

### 7.6.3 Der Operator $L_0$ und die Randbedingung

Die Differentialgleichung kann auch in Operatorform geschrieben werden. Dazu schreiben wir

$$L_0 = -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}.$$

Bezüglich des gewöhnlichen Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

für Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  ist der Operator  $L_0$  tatsächlich selbstadjungiert. Mit partieller Integration rechnet man nach:

$$\langle f, L_0 g \rangle = \int_a^b f(x) \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} \right) g(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b f(x) \frac{d}{dx} (p(x)g'(x)) dx \\
&= - \left[ f(x)p(x)g'(x) \right]_a^b + \int_a^b f'(x)p(x)g'(x) dx \\
\langle L_0 f, g \rangle &= - \left[ f'(x)p(x)g(x) \right]_a^b + \int_a^b f'(x)p(x)g'(x) dx.
\end{aligned}$$

Die beiden Skalarprodukte führen also auf das gleiche Integral, sie unterscheiden sich nur um die Randterme

$$\begin{aligned}
\langle f, L_0 g \rangle - \langle L_0 f, g \rangle &= -f(b)p(b)g'(b) + f(a)p(a)g'(a) + f'(b)p(b)g(b) - f'(a)p(a)g(a) \quad (7.21) \\
&= -p(b) \begin{vmatrix} f(b) & g(b) \\ f'(b) & g'(b) \end{vmatrix} + p(a) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(a) & g'(a) \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} f(b) & g(b) \\ p(b)f'(b) & p(b)g'(b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ p(a)f'(a) & p(a)g'(a) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Um zu erreichen, dass der Operator selbstadjungiert wird, muss sichergestellt werden, dass entweder  $p$  oder die Determinanten an den Intervallenden verschwinden. Dies passiert genau dann, wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} f(a) \\ p(a)f'(a) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} g(a) \\ p(a)g'(a) \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. In zwei Dimensionen bedeutet lineare Abhängigkeit, dass es eine nichttriviale Linearform mit Koeffizienten  $h_a, k_a$  gibt, die auf beiden Vektoren verschwindet. Ausgeschrieben bedeutet dies, dass die Randbedingung (7.20) erfüllt sein muss.

## 7.6.4 Skalarprodukt

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist, das Sturm-Liouville-Problem als Eigenwertproblem für einen selbstadjungierten Operator in einem Funktionenraum mit einem geeigneten Skalarprodukt zu finden.

Wir haben bereits gezeigt, dass die Randbedingung (7.20) sicherstellt, dass der Operator  $L_0$  für das Standardskalarprodukt selbstadjungiert ist. Dies entspricht der Symmetrie der Matrix  $A$ .

Die Komponente  $q(x)$  stellt keine besonderen Probleme, denn

$$\langle f, qg \rangle = \int_a^b f(x)q(x)g(x) dx = \langle qf, g \rangle.$$

Der Operator  $f(x) \mapsto q(x)f(x)$ , der eine Funktion mit der Funktion  $q(x)$  multipliziert, ist also ebenfalls symmetrisch. Dasselbe gilt für einen Operator, der mit  $w(x)$  multipliziert. Da  $w(x)$  eine positive Funktion ist, ist der Operator  $f(x) \mapsto w(x)f(x)$  sogar positiv definit. Dies entspricht der Matrix  $B$ . Nach den Erkenntnissen des vorangegangenen Abschnittes ist das verallgemeinerte Eigenwertproblem daher ein Eigenwertproblem für einen modifizierten Operator bezüglich eines alternativen Skalarproduktes.

Als Skalarprodukt muss also das Integral

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx$$

mit der Gewichtsfunktion  $w(x)$  verwendet werden. Damit dies ein vernünftiges Skalarprodukt ist, muss  $w(x) > 0$  im Inneren des Intervalls sein.

## 7.6.5 Der Vektorraum $H$

Damit können wir jetzt die Eigenschaften der in Frage kommenden Funktionen zusammenstellen. Zunächst müssen sie auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert sein und das Integral

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty$$

muss existieren. Wir bezeichnen den Vektorraum der Funktionen, deren Quadrat mit der Gewichtsfunktion  $w(x)$  integrierbar sind, mit  $L^2([a, b], w)$ .

Damit auch  $\langle qf, f \rangle_w$  und  $\langle L_0 f, f \rangle_w$  wohldefiniert sind, müssen zusätzlich die Integrale

$$\int_a^b |f(x)|^2 q(x) w(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b |f'(x)|^2 p(x) w(x) dx$$

existieren. Wir setzen daher

$$H = \left\{ f \in L^2([a, b], w) \mid \int_a^b |f'(x)|^2 p(x) w(x) dx < \infty, \int_a^b |f(x)|^2 q(x) w(x) dx < \infty \right\}.$$

## 7.6.6 Der Sturm-Liouville-Differentialoperator

Das verallgemeinerte Eigenwertproblem für  $A$  und  $B$  ist ein gewöhnliches Eigenwertproblem für die Operator  $\tilde{A} = B^{-1}A$  bezüglich des modifizierten Skalarproduktes. Das Sturm-Liouville-Problem ist also ein Eigenwertproblem im Vektorraum  $H$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ . Der Operator

$$L = \frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right) \quad (7.22)$$

heisst der *Sturm-Liouville-Operator*. Eine Lösung des Sturm-Liouville-Problems ist eine Funktion  $y(x)$  derart, dass

$$Ly = \lambda y,$$

$\lambda$  ist der zu  $y(x)$  gehörige Eigenwert. Der Operator ist definiert auf Funktionen des im vorangegangenen Abschnitt definierten Vektorraumes  $H$ . Führt man die Differentiation aus, bekommt der Operator die Form

$$L = -\frac{p(x)}{w(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{p'(x)}{w(x)} \frac{d}{dx} + \frac{q(x)}{w(x)}. \quad (7.23)$$

## 7.6.7 Beispiele

Die meisten der früher vorgestellten Funktionenfamilien stellen sich als Lösungen eines geeigneten Sturm-Liouville-Problems heraus. Alle Eigenschaften aus der Sturm-Liouville-Theorie gelten daher automatisch für diese Funktionenfamilien.

### Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind Eigenfunktionen des Operators  $d^2/dx^2$ , also eines Sturm-Liouville-Operators mit  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$  und  $w(x) = 1$ . Auf dem Intervall  $(-\pi, \pi)$  können wir die

## Randbedingungen

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} k_{-\pi} = 1, \quad h_{-\pi} = 0 \\ k_{\pi} = 1, \quad h_{\pi} = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y(-\pi) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = B \sin nx \\ \left. \begin{array}{l} k_{-\pi} = 0, \quad h_{-\pi} = 1 \\ k_{\pi} = 0, \quad h_{\pi} = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y'(-\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = A \cos nx \end{aligned}$$

verwenden. Die Orthogonalität der Sinus- und Kosinus-Funktionen folgt jetzt ganz ohne weitere Rechnung.

An dieser Lösung ist nicht ganz befriedigend, dass die trigonometrischen Funktionen nicht mit einer einzigen Randbedingung gefunden werden können. Der Ausweg ist, periodische Randbedingungen zu verlangen, also  $y(-\pi) = y(\pi)$  und  $y'(-\pi) = y'(\pi)$ . Dann ist wegen

$$\begin{aligned} \langle f, L_0 g \rangle - \langle L_0 f, g \rangle &= -f(\pi)g'(\pi) + f(-\pi)g'(-\pi) + f'(\pi)g(\pi) - f'(-\pi)g(-\pi) \\ &= -f(\pi)g'(\pi) + f(\pi)g'(\pi) + f'(\pi)g(\pi) - f'(\pi)g(\pi) = 0 \end{aligned}$$

die Bedingung (7.21) ebenfalls erfüllt,  $L_0$  ist in diesem Raum selbstadjungiert.

**Bessel-Funktionen  $J_n(x)$** 

Der Bessel-Operator (5.20) kann wie folgt in die Form eines Sturm-Liouville-Operators gebracht werden. Zunächst rechnet man

$$B = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 = x \left( x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + x \right) = x \left( \frac{d}{dx}(-x) \frac{d}{dx} + x \right).$$

Somit ist  $B$  ein Sturm-Liouville-Operator für

$$\begin{aligned} p(x) &= -x \\ q(x) &= x \\ w(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Am linken Rand kann als Randbedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x)y'(x) = 0$$

verwendet werden, die für alle Bessel-Funktionen erfüllt ist. Dies entspricht der Wahl  $k_0 = 0$  und  $h_0 = 1$ . Am rechten Rand für  $x \rightarrow \infty$  kann man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

verlangen, was der Wahl  $k_\infty = 1$  und  $h_\infty = 0$  entspricht. Damit ist die Bessel-Differentialgleichung erkannt als ein Sturm-Liouville-Problem für  $\lambda = n^2$ . Es folgt damit sofort, dass die Besselfunktionen orthogonale Funktionen bezüglich des Skalarproduktes mit der Gewichtsfunktion  $w(x) = 1/x$  sind.

**Bessel-Funktionen  $J_n(sx)$** 

Das Sturm-Liouville-Problem mit den Funktionen (7.24) ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit, die Bessel-Differentialgleichung in ein Sturm-Liouville-Problem zu verwandeln. Das Problem (7.24)

ging davon aus, dass  $n^2$  der verallgemeinerte Eigenwert sein soll. Im Folgenden sollen hingegen die Funktionen  $J_n(sx)$  für konstantes  $n$ , aber verschiedene  $s$  untersucht und als orthogonal erkannt werden.

Die Funktion  $y(x) = J_n(x)$  ist eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + x^2y = n^2y.$$

Setzt man  $x = st$  und  $f(t) = y(st)$ , dann wird die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}y(st) = y'(st) \cdot s \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{s} = y'(x) \\ f''(t) &= \frac{d^2}{dt^2}y(st) = y''(st) \cdot s^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''(t)}{s^2} = y''(x). \end{aligned}$$

Setzt man diese in die Besselsche Differentialgleichung ein, findet man

$$x^2y'' + xy' + x^2y = s^2t^2 \frac{f''(t)}{s^2} + st \frac{f'(t)}{s} + s^2t^2 f(t) = n^2 f(t).$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktionen  $J_n(sx)$  Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (s^2x^2 - n^2)y = 0 \tag{7.25}$$

ist.

Die Differentialgleichung (7.25) soll jetzt ebenfalls als ein Sturm-Liouville-Problem betrachtet werden, diesmal aber mit festem  $n$  und  $s^2$  als dem verallgemeinerten Eigenwert. Dazu wird

$$\begin{aligned} p(x) &= -x \\ q(x) &= -\frac{n^2}{x} \\ w(x) &= x \end{aligned} \tag{7.26}$$

gesetzt. Das zugehörige Sturm-Liouville-Problem ist jetzt

$$\frac{1}{x} \left( \frac{d}{dx}(-x) \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x} \right) y = \lambda y \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{n^2}{x^2} y = \lambda y,$$

oder nach Multiplikation mit  $x^2$

$$x^2y'' + xy' + ((-\lambda)x^2 - n^2)y = 0. \tag{7.27}$$

Die Funktionen  $J_n(sx)$  sind daher verallgemeinerte Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Problems (7.26) für den Eigenwert  $\lambda = -s^2$ .

**Satz 7.17** (Orthogonalität der Bessel-Funktionen). *Die Bessel-Funktionen  $J_n(sx)$  für verschiedene  $s$  sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes mit der Gewichtsfunktion  $w(x) = x$ , d. h.*

$$\int_0^\infty J_n(s_1 x) J_n(s_2 x) x dx = 0$$

für  $s_1 \neq s_2$ .

*Beweis.* Um die Bessel-Funktionen als Lösung des Sturm-Liouville-Problems (7.26) zu betrachten, müssen noch geeignete Randbedingungen formuliert werden. Für  $n > 0$  kann man  $J_n(0) = 0$  verwenden, also  $k_0 = 1$  und  $h_0 = 0$ . Für  $J_0$  ist dies nicht geeignet, aber wegen  $J'_0(0) = 0$  kann man für  $n = 0$  verwenden  $k_0 = 0$  und  $h_0 = 1$  wählen.

Für den rechten Rand kann man verwenden, dass die Ableitung der Bessel-Funktionen wie  $x^{-3/2}$  gegen 0 geht, gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)J_n(sx) = 0,$$

weil  $p(x)J_n(sx)$  wie  $x^{-1/2}$  gegen 0 geht. Dies bedeutet, dass  $k_\infty = 0$  und  $h_\infty = 1$  verwendet werden kann. Damit sind geeignete Randbedingungen für das Sturm-Liouville-Problem gefunden.  $\square$

### Laguerre-Polynome

Die Laguerre-Polynome sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts mit der Laguerre-Gewichtsfunktion  $w(x) = e^{-x}$  und erfüllen die Laguerre-Differentialgleichung (7.16). mit  $p(x) = -xe^{-x}$  wird

$$\frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} \right) = e^x \left( xe^{-x} \frac{d^2}{dx^2} + (1-x)e^{-x} \frac{d}{dx} \right),$$

dies sind die abgeleiteten Terme in der Laguerre-Differentialgleichung. Der Definitionsbereich ist  $(0, \infty)$ . Als Randbedingung am linken kann man  $y(0) = 1$  verwenden, welche auch die Laguerre-Polynome ergeben hat. Am rechten Rand ist die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}y'(x) = 0$$

für beliebige Polynomlösungen erfüllt, dies ist der Fall  $k_\infty = 0$  und  $h_\infty = 1$ .

Das zugehörige verallgemeinerte Eigenwertproblem wird damit

$$xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0,$$

also die Laguerre-Differentialgleichung. Somit folgt, dass die Laguerre-Polynome orthogonal sind bezüglich des Skalarproduktes mit der Laguerre-Gewichtsfunktion.

### Tschebyscheff-Polynome

Die Tschebyscheff-Polynome sind Lösungen der bereits in Kapitel 1 hergeleiteten Tschebyscheff-Differentialgleichung (1.6)

$$(1-x^2)y'' - xy' = n^2y$$

auf dem Intervall  $(-1, 1)$ . Auch dieses Problem kann als Sturm-Liouville-Problem formuliert werden mit

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ p(x) &= \sqrt{1-x^2} \\ q(x) &= 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige Sturm-Liouville-Eigenwertproblem ist

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} y(x) = \lambda \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y(x).$$

Führt man die Ableitungen auf der linken Seite aus, entsteht die Gleichung

$$\sqrt{1-x^2}y''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y'(x) = \lambda \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x)$$

Multiplikation mit  $\sqrt{1-x^2}$  ergibt

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = \lambda y(x).$$

Es folgt, dass die Tschebyscheff-Polynome orthogonal sind bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### Jacobi-Polynome

Die Jacobi-Polynome sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes mit der Gewichtsfunktion

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

definiert in Definition 7.7. Man kann zeigen, dass sie Lösungen der *Jacobi-Differentialgleichung*

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (7.28)$$

sind. Es stellt sich die Frage, ob sich Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  finden lassen derart, dass die Differentialgleichung (7.28) eine Sturm-Liouville-Gleichung wird. Gemäss der Form (7.23) muss  $p(x)$  so gefunden werden, dass

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{w^{(\alpha,\beta)}(x)} &= 1 - x^2 \\ \frac{p'(x)}{w^{(\alpha,\beta)}(x)} &= \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x \end{aligned}$$

gilt. Der Quotient der beiden Gleichungen ist die logarithmische Ableitung

$$(\log p(x))' = \frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1-x^2}{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x}$$

von  $p(x)$ , die sich in geschlossener Form integrieren lässt. Man findet als Stammfunktion

$$p(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}.$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{w^{(\alpha,\beta)}(x)} &= \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} = (1-x)(1+x) = 1 - x^2 \\ \frac{p'(x)}{w^{(\alpha,\beta)}(x)} &= \frac{-(\alpha+1)(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta+1} + (\beta+1)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \\ &= -(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x. \end{aligned}$$

Damit ist die Jacobische Differentialgleichung als Sturm-Liouville-Differentialgleichung erkannt.

## Hypergeometrische Differentialgleichungen

Auch die Eulersche hypergeometrische Differentialgleichung lässt sich in die Form eines Sturm-Liouville-Operators bringen. Dazu setzt man

$$\begin{aligned} p(z) &= z^c(z-1)^{a+b+1-c} \\ q(z) &= -abz^{c-1}(z-1)^{a+b-c} \\ w(z) &= z^{c-1}(z-1)^{a+b-c}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in den Sturm-Liouville-Operator ein, erhält man

$$L = -\frac{d}{dz}p(z)\frac{d}{dz} + q(z) = -p(z)\frac{d^2}{dz^2} - p'(z)\frac{d}{dz} + q(z) \quad (7.29)$$

Wir brauchen also

$$\begin{aligned} p'(z) &= cz^{c-1}(z-1)^{a+b+1-c} + (a+b+1-c)z^c(z-1)^{a+b-c} \\ &= (c(z-1) + (a+b+1-c)z) \cdot z^{c-1}(z-1)^{a+b-c} \\ &= -(c - (a+b+1)z) \cdot z^{c-1}(z-1)^{a+b-c}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (7.29) liefert

$$\begin{aligned} L &= -z^c(z-1)^{a+b+1-c}\frac{d^2}{dz^2} + w(z)(c - (a+b+1)z)\frac{d}{dz} - abw(z) \\ &= w(z)\left(-z(z-1)\frac{d^2}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{d}{dz} - ab\right) \\ &= w(z)\left(z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{d}{dz} - ab\right). \end{aligned}$$

Die Klammer auf der rechten Seite ist tatsächlich die linke Seite der eulerschen hypergeometrischen Differentialgleichung.

Die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  ist ein Eigenvektor des Operators  $L$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Sei jetzt  $w(z)$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda \neq 0$ , also

$$z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = \lambda w(z).$$

Kann man  $a$  und  $b$  so in  $a_1$  und  $b_1$  ändern, dass  $a+b = a_1+b_1$  gleich bleiben aber das Produkt den Wert  $a_1b_1 = ab - \lambda$ ?  $a_1$  und  $b_1$  sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - (a+b)x + ab - \lambda = 0.$$

Alle Eigenfunktionen des Operators  $L$  sind also hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$ .

Da die Gewichtsfunktion  $w(z)$  bei der Ersetzung  $a \rightarrow a_1$  und  $b \rightarrow b_1$  sich nicht ändert ( $w(z)$  hängt nur von der Summe  $a+b$  ab, welche sich nicht ändert), sind die beide beiden Eigenfunktionen bezüglich des Skalarproduktes mit der Gewichtsfunktion  $w(z)$  orthogonal.

## 7.7 Anwendung: Gauss-Quadratur

Orthogonale Polynome haben eine etwas unerwartet Anwendung in einem von Gauss erdachten numerischen Integrationsverfahren. Es basiert auf der Beobachtung, dass viele Funktionen sich sehr

gut durch Polynome approximieren lassen. Wenn man also sicherstellt, dass ein Verfahren für Polynome sehr gut funktioniert, darf man auch davon ausgehen, dass es für andere Funktionen nicht allzu schlecht sein wird.

### 7.7.1 Interpolationspolynome

Zu einer stetigen Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  gesucht, welches in den Punkten  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  die Funktionswerte  $f(x_i)$  annimmt. Ein solches Polynom  $p(x)$  hat  $n + 1$  Koeffizienten, die aus dem linearen Gleichungssystem der  $n + 1$  Gleichungen  $p(x_i) = f(x_i)$  ermittelt werden können.

Das Interpolationspolynom  $p(x)$  lässt sich aber auch direkt angeben. Dazu konstruiert man zuerst die Polynome

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (\widehat{x - x_i}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (\widehat{x_i - x_i}) \cdots (x_i - x_n)}$$

vom Grad  $n$ , wobei der Hut bedeutet, dass diese Faktoren im Produkt wegzulassen sind. Die Polynome  $l_i(x)$  haben die Eigenschaft

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Linearkombination

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

ist dann ein Polynom vom Grad  $n$ , welches am den Stellen  $x_j$  die Werte

$$p(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \delta_{ij} = f(x_j)$$

hat, das Polynom  $p(x)$  ist also das gesuchte Interpolationspolynom.

### 7.7.2 Integrationsverfahren auf der Basis von Interpolation

Das Integral einer stetigen Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$  kann mit Hilfe des Interpolationspolynoms approximiert werden. Wenn  $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$  ist im Intervall  $[-1, 1]$ , dann gilt für die Integrale

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 p(x) dx \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x) - p(x)| dx \leq 2\varepsilon.$$

Ein Interpolationspolynom mit kleinem Fehler liefert also auch eine gute Approximation für das Integral.

Da das Interpolationspolynom durch die Funktionswerte  $f(x_i)$  bestimmt ist, muss auch das Integral allein aus diesen Funktionswerten berechnet werden können. Tatsächlich ist

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_{-1}^1 l_i(x) dx}_{= A_i}. \quad (7.30)$$

Das Integral von  $f(x)$  wird also durch eine mit den Zahlen  $A_i$  gewichtete Summe

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) A_i$$

approximiert.

### 7.7.3 Integrationsverfahren, die für Polynome exakt sind

Ein Polynom vom Grad  $2n$  hat  $2n+1$  Koeffizienten. Um das Polynom durch ein Interpolationspolynom exakt wiederzugeben, braucht man  $2n+1$  Stützstellen. Andererseits gilt

$$\int_{-1}^1 a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 dx = \int_{-1}^1 a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0 dx,$$

das Integral ist also bereits durch die  $n+1$  Koeffizienten mit geradem Index bestimmt. Es sollte daher möglich sein, aus  $n+1$  Funktionswerten eines beliebigen Polynoms vom Grad höchstens  $2n$  an geeigneten gewählten Stützstellen das Integral exakt zu bestimmen.

*Beispiel.* Wir versuchen dies für quadratische Polynome durchzuführen, also für  $n=1$ . Gesucht sind also zwei Werte  $x_i$ ,  $i=0, 1$  und Gewichte  $A_i$ ,  $i=0, 1$  derart, dass für jedes quadratische Polynom  $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  das Integral durch

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = A_0 p(x_0) + A_1 p(x_1)$$

gegeben ist. Indem wir für  $p(x)$  die Polynome 1,  $x$ ,  $x^2$  und  $x^3$  einsetzen, erhalten wir vier Gleichungen

$$\begin{aligned} p(x) = 1 &: 2 = A_0 + A_1 \\ p(x) = x &: 0 = A_0 x_0 + A_1 x_1 \\ p(x) = x^2 &: \frac{2}{3} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 \\ p(x) = x^3 &: 0 = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3. \end{aligned}$$

Dividiert man die vierte durch die zweite Gleichung in der Form

$$\left. \begin{array}{l} A_0 x_0^3 = -A_1 x_1^3 \\ A_0 x_0 = -A_1 x_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(vierte Gleichung)} \\ \text{(zweite Gleichung)} \end{array} \Rightarrow x_0^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = -x_0.$$

Indem wir dies in die zweite Gleichung einsetzen, finden wir

$$0 = A_0 x_0 + A_1 x_1 = A_0 x_0 - A_1 x_0 = (A_0 - A_1) x_0 \Rightarrow A_0 = A_1.$$

Aus der ersten Gleichung folgt jetzt

$$2 = A_0 + A_1 = 2A_0 \Rightarrow A_0 = 1.$$

Damit bleiben nur noch die Werte von  $x_i$  zu bestimmen, was mit Hilfe der zweiten Gleichung geschehen kann:

$$\frac{2}{3} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2x_0^2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Damit ist das Problem gelöst: das Integral eines Polynoms vom Grad 3 im Intervall  $[-1, 1]$  ist exakt gegeben durch

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Das Integral kann also durch nur zwei Auswertungen des Polynoms exakt bestimmt werden.

Im Laufe der Lösung des Gleichungssystems wurden die Gewichte  $A_i$  mit bestimmt. Es ist aber auch möglich, die Gewichte zu bestimmen, wenn man die Stützstellen kennt. Nach (7.30) sind sie die  $A_i$  gegeben als Integrale der Polynome  $l_i(x)$ , die im vorliegenden Fall linear sind:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}x)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}x)$$

Diese haben die Integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1,$$

da das Polynom  $x$  verschwindendes Integral hat. Dies stimmt mit  $A_0 = A_1 = 1$  überein.  $\circlearrowright$

Das eben vorgestellte Verfahren kann natürlich auf beliebiges  $n$  verallgemeinert werden. Allerdings ist die Rechnung zur Bestimmung der Stützstellen und Gewichte sehr mühsam.

#### 7.7.4 Stützstellen und Orthogonalpolynome

Sei  $R_n = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg p \leq n\}$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $n$ .

**Satz 7.18.** Sei  $p$  ein Polynom vom Grad  $n$ , welches auf allen Polynomen in  $R_{n-1}$  orthogonal sind. Seien ausserdem  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  Stützstellen im Intervall  $[-1, 1]$  und  $A_i \in \mathbb{R}$  Gewichte derart dass

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

für jedes Polynom  $f$  vom Grad höchstens  $2n-1$ , dann sind die Zahlen  $x_i$  die Nullstellen des Polynoms  $p$ .

*Beweis.* Sei  $f(x)$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $2n-1$ . Nach dem Polynomdivisionsalgorithmus gibt es Polynome  $q, r \in R_{n-1}$  derart, dass  $f = qp + r$ . Dann ist das Integral von  $f$  gegeben durch

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 q(x)p(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx = \langle q, p \rangle + \int_{-1}^1 r(x) dx.$$

Da  $p \perp R_{n-1}$  folgt insbesondere, dass  $\langle q, p \rangle = 0$ .

Da die Integrale auch aus den Werten in den Stützstellen berechnet werden können, muss auch

$$0 = \int_{-1}^1 q(x)p(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i q(x_i)p(x_i)$$

für jedes beliebige Polynom  $q \in R_{n-1}$  gelten. Da man für  $q$  die Interpolationspolynome  $l_j(x)$  verwenden kann, den Grad  $n - 1$  haben, folgt

$$0 = \sum_{i=0}^n A_i l_j(x_i) p(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i \delta_{ij} p(x_i) = A_j p(x_j),$$

die Stützstellen  $x_i$  müssen also die Nullstellen des Polynoms  $p(x)$  sein.  $\square$

Der Satz 7.18 begründet das *Gaußsche Quadraturverfahren*. Die in Abschnitt 7.1.3 bestimmten Legendre-Polynome  $P_n$  haben die im Satz verlangte Eigenschaft, dass sie auf allen Polynomen geringeren Grades orthogonal sind. Wählt man die  $n$  Nullstellen von  $P_n$  als Stützstellen, erhält man automatisch ein Integrationsverfahren, welches für Polynome vom Grad  $2n - 1$  exakt ist.

*Beispiel.* Das Legendre-Polynom  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  hat die Nullstellen  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ , dies sind genau die im Beispiel auf Seite 232 befundenen Stützstellen.  $\circlearrowright$

### 7.7.5 Fehler der Gauss-Quadratur

Das Gaußsche Quadraturverfahren mit  $n$  Stützstellen berechnet Integrale von Polynomen bis zum Grad  $2n - 1$  exakt. Für eine beliebige Funktion kann man die folgende Fehlerabschätzung angeben [**buch:numal**].

**Satz 7.19.** Seien  $x_i$  die Stützstellen und  $A_i$  die Gewichte einer Gaußschen Quadraturformel mit  $n+1$  Stützstellen und sei  $f$  eine auf dem Intervall  $[-1, 1]$   $2n + 2$ -mal stetig differenzierbare Funktion, dann ist der E Fehler des Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + E$$

gegeben durch

$$E = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 l(x)^2 dx, \quad (7.31)$$

wobei  $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  und  $\xi$  ein geeigneter Wert im Intervall  $[-1, 1]$  ist.

Dank dem Faktor  $(2n+2)!$  im Nenner von (7.31) geht der Fehler für grosses  $n$  sehr schnell gegen 0. Man kann auch zeigen, dass die mit Gauss-Quadratur mit  $n+1$  Stützstellen berechneten Näherungswerte eines Integrals einer stetigen Funktion  $f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  immer gegen den wahren Wert des Integrals konvergieren.

Zur Illustration der Genauigkeit der Gauss-Quadratur berechnen wir das Integral

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 - x^2} dx = \arcsin a + a \sqrt{1 - a^2} \quad (7.32)$$

mit Gauss-Quadratur einerseits und dem Trapezverfahren andererseits. Da Gauss-Quadratur mit sehr viel weniger Stützstellen auskommt, berechnen wir die Trapeznäherung mit zehnmal so vielen Stützstellen. In den Tabellen 7.3 und 7.4 sind die Resultate zusammengestellt. Für  $a = \frac{1}{2}$  zeigt Tabelle 7.3 die sehr schnelle Konvergenz der Gauss-Quadratur, schon mit 12 Stützstellen wird Maschinengenauigkeit erreicht. Das Trapezverfahren dagegen erreicht auch mit 200 Stützstellen nur 4 korrekte Nachkommastellen.

An den Stellen  $x = \pm 1$  divergiert die Ableitung des Integranden des Integrals (7.32). Da grösste und kleinste Stützstelle der Gauss-Quadratur immer deutlich vom Rand des Intervalls entfernt ist,

$n$	Gauss-Quadratur	Trapezregel
2	0.9574271077563381	0.9563709682242596
4	0.9566128333449730	0.9565513401768598
6	0.9566114812034364	0.9565847489712136
8	0.9566114775028123	0.9565964425360520
10	0.9566114774905637	0.9566018550715587
12	0.9566114774905187	0.9566047952369826
14	0.9566114774905172	0.9566065680717177
16	0.9566114774905187	0.9566077187127541
18	0.9566114774905183	0.9566085075898731
20	0.9566114774905184	0.9566090718697414
$\infty$	0.9566114774905183	0.9566114774905183

Tabelle 7.3: Integral von  $\sqrt{1 - x^2}$  zwischen  $-\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}$  berechnet mit Gauss-Quadratur und der Trapezregel, aber mit zehnmal so vielen Stützstellen. Bereits mit 12 Stützstellen erreicht die Gauss-Quadratur Maschinengenauigkeit, die Trapezregel liefert auch mit 200 Stützstellen nicht mehr als 4 korrekte Nachkommastellen.

$n$	Gauss-Quadratur	Trapezregel
2	1.6321752373234928	1.5561048774629949
4	1.5798691557134743	1.5660124134617943
6	1.5735853681692993	1.5683353001877542
8	1.5719413565928206	1.5692627503425400
10	1.5713388119633434	1.5697323578543481
12	1.5710710489948883	1.5700051217458713
14	1.5709362135398341	1.5701784766276063
16	1.5708621102742815	1.5702959121005231
18	1.5708186779483588	1.5703793521168343
20	1.5707919411931615	1.5704408749735932
$\infty$	1.5707367072605671	1.5707367072605671

Tabelle 7.4: Integral von  $\sqrt{1 - x^2}$  zwischen  $-0.999$  und  $0.999$  berechnet mit Gauss-Quadratur und der Trapezregel, aber mit zehnmal so vielen Stützstellen. Wegen der divergierenden Steigung des Integranden bei  $\pm 1$  tun sich beide Verfahren sehr schwer. Trotzdem erreicht die Gauss-Quadratur 4 korrekte Nachkommastellen mit 20 Stützstellen, während die Trapezregel auch mit 200 Stützstellen nur 3 korrekte Nachkommastellen findet.

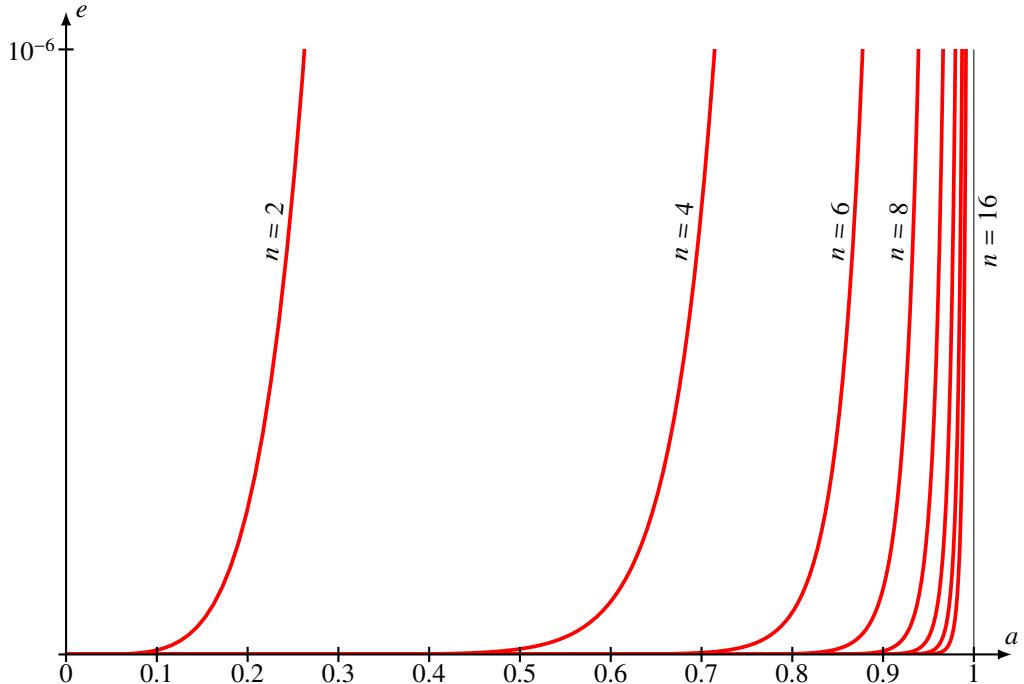


Abbildung 7.6: Approximationsfehler des Integrals (7.32) in Abhängigkeit von  $a$ . Die Divergenz der Ableitung des Integranden an den Intervallenden  $\pm 1$  führt zu schlechterer Konvergenz des Verfahrens, wenn  $a$  nahe an 1 ist.

kann das Verfahren diese “schwierigen” Stellen nicht erkennen. Tabelle 7.4 zeigt, wie die Konvergenz des Verfahrens in diesem Fall sehr viel schlechter ist. Dies zeigt auch der Graph in Abbildung 7.6.

### 7.7.6 Skalarprodukte mit Gewichtsfunktion

Die Nullstellen der Legendre-Polynome ergaben ein gutes Integrationsverfahren für Polynome auf einem beschränkten Intervall. Die Beispiele haben aber auch gezeigt, dass Stellen, wo die Ableitung des Integranden divergiert, die Genauigkeit stark beeinträchtigen können. Außerdem ist das Verfahren nicht anwendbar auf uneigentliche Integrale.

#### Umgang mit Singularitäten

Die Lösung des Problems mit Stellen mit divergenter Ableitung besteht darin, die Stützstellen in der Nähe dieser Stellen zu konzentrieren. Die Verwendung einer Gewichtsfunktion  $w(x)$  kann genau dies erreichen. Statt das Integral einer Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, kann man  $f(x) = g(x)w(x)$  schreiben, wobei  $w(x)$  so gewählt werden soll, dass das Verhalten der Steigung an den Intervallenden gut wiedergibt. Dies ist mit einer Jacobischen Gewichtsfunktion immer möglich. Statt der Nullstellen der Legendre-Polynome sind dann die Nullstellen der Jacobi-Polynome und die Funktionswerte von  $g(x)$  an diesen Stellen zu verwenden, die Gewichte sind die Integrale von  $l_i(x)P^{(\alpha,\beta)}(x)$ .

## Uneigentliche Integrale

Die Berechnung eines uneigentlichen Integrals auf dem Intervall  $(0, \infty)$  oder  $(-\infty, \infty)$  ist aus mehreren Gründen nicht direkt mit dem früher beschriebenen Gauss-Quadraturverfahren möglich.

Die Stützstellen, die bei der Gauss-Quadratur in einem Intervall  $(a, b)$  verwendet werden, entstehen dadurch, dass man die Nullstellen der Legendre-Polynome in  $(-1, 1)$  auf das Intervall  $(a, b)$  skaliert. Dies führt offensichtlich nicht zum Erfolg, wenn ein oder beide Intervallgrenzen unendlich sind. Dieses Problem kann dadurch gelöst werden, dass man das unendliche Intervall  $(a, \infty)$  mit

$$x = a + \frac{1-t}{t}$$

auf das Intervall  $[0, 1]$  transformiert.

Will man beim Intervall  $(0, \infty)$  bleiben, dann ist zu beachten, dass das Integral eines Polynomes immer divergent ist, es ist also auf jeden Fall nötig, den Integranden durch Funktionen zu approximieren, die genügend schnell gegen 0 gehen. Polynome beliebigen Grades können verwendet werden, wenn sie mit einer Funktion multipliziert werden, die schneller als jedes Polynom gegen 0 geht, so dass das Integral immer noch konvergiert. Die Funktionen  $e^{-x}$  für das Intervall  $(0, \infty)$  oder  $e^{-x^2}$  für das Intervall  $(-\infty, \infty)$  kommen dafür in Frage.

Um das Integral von  $f(x)$  im Intervall  $(0, \infty)$  zu berechnen, schreibt man daher zunächst

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty g(x)e^{-x} dx = \int_0^\infty g(x)w(x) dx \quad \text{mit} \quad w(x) = e^{-x} \text{ und } g(x) = f(x)e^x.$$

Dann approximiert man  $g(x)$  durch ein Interpolationspolynom, so wie man das bei der Gauss-Quadratur gemacht hat. Als Stützstellen müssen dazu die Nullstellen der Laguerre-Polynome verwendet werden. Als Gewichte  $w_i$  sind die Integrale der  $l_i(x)e^{-x}$  zu verwenden.

## Übungsaufgabe

**7.1.** Für Funktionen auf dem Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) \cos x dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonale Polynome bis zum Grad 2.

*Hinweis.* Verwenden Sie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cos x dx = 1, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2 - 8}{2}, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx = \frac{\pi^4 - 48\pi^2 + 384}{8}.$$

*Lösung.* Wir müssen den Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsprozess für die Polynome  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = x$  und  $f_2(x) = x^2$  durchführen. Zunächst halten wir fest, dass

$$\langle f_0, f_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1,$$

das Polynom  $g_0(x) = f_0(x)$  ist hat also Norm 1.

Ein dazu orthogonales Polynom ist  $f_1(x) - \langle g_0, f_1 \rangle g_0(x)$ , wir müssen also das Skalarprodukt

$$\langle g_0, f_1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

bestimmen. Es verschwindet, weil die Funktion  $x \cos x$  ungerade ist. Somit ist die Funktion  $f_1(x) = x$  orthogonal zu  $f_0(x) = 1$ , um sie auch zu normieren berechnen wir das Integral

$$\|f_1\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

und

$$g_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 8}} x.$$

Zur Berechnung von  $g_2$  müssen wir die Skalarprodukte

$$\langle g_0, f_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$\langle g_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 8}} x \cdot x^2 \cos x dx = 0$$

bestimmen. Damit wird das dritte Polynom

$$f_2(x) - g_0(x)\langle g_0, f_2 \rangle - g_1(x)\langle g_1, f_2 \rangle = x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

welches bereits orthogonal ist zu  $g_0$  und  $g_1$ . Wir können auch noch erreichen, obwohl das nicht verlangt war, dass es normiert ist, indem wir die Norm berechnen:

$$\left\| x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{4} \right\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{4} \right)^2 \cos x dx = 20 - 2\pi^2$$

woraus sich

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{20 - 2\pi^2}} \left( x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{4} \right).$$

Damit haben wir die ersten drei bezüglich des obigen Skalarproduktes orthogonalen Polynome

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi^2 - 8}}, \quad g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{20 - 2\pi^2}} \left( x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{4} \right)$$

gefunden. ○



# Kapitel 8

## Integraltransformationen

Die Fourier-Transformation und andere Integraltransformationen führen zu neuen speziellen Funktionen. In diesem Kapitel soll als Beispiel die Fourier-Transformation der Bessel-Funktionen untersucht werden.

### 8.1 Zweidimensionale Fourier-Transformation

#### 8.1.1 Fourier-Transformation und partielle Differentialgleichungen

#### 8.1.2 Fourier-Transformation in kartesischen Koordinaten

#### 8.1.3 Basisfunktionen in Polarkoordinaten

### 8.2 Fourier-Transformation und Bessel-Funktionen

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktion. Die Fourier-Transformation von  $f$  ist das Integral

$$(\mathcal{F}f)(u, v) = F(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(xu+yv)} dx dy. \quad (8.1)$$

Die Funktionen  $e_{u,v}: (x, y) \mapsto e^{i(xu+yv)}$  sind die Eigenfunktionen des Laplace-Operators in kartesischen Koordinaten, sie erfüllen

$$\Delta e_{u,v} = (u^2 + v^2) \Delta e_{u,v}.$$

Die Fourier-Integrale sind die Skalarprodukte

$$(\mathcal{F}f)(u, v) = \langle e_{u,v}, f \rangle,$$

wobei das Skalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx dy$$

definiert ist.

Jede Funktion in der Ebene kann auch in Polarkoordinaten ausgedrückt werden. Die kartesischen Koordinaten können mittels

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

durch die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ausgedrückt werden. Wir schreiben

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

für die Funktion  $f$  ausgedrückt in Polarkoordinaten.

In Polarkoordinaten wird das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \overline{\tilde{f}(r, \varphi)} \tilde{g}(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Auch die Fouriertransformation kann jetzt durch Berechnung eines doppelten Integrals in Polarkoordinaten ermittelt werden. Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass auch diese Berechnung auf Bessel-Funktionen führt. Im Gegenzug werden sich neue Eigenschaften und Darstellungen derselben ergeben.

### 8.2.1 Berechnung der Fourier-Transformation in Polarkoordinaten

Die Fourier-Transformation  $(\mathcal{F}f)(u, v)$  ist eine Funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , die vom Wellenvektor  $(u, v)$  abhängt. Auch dieser Vektor kann in Polarkoordinaten ausgedrückt werden. Für die Polarkoordinaten in der Wellenvektor-Ebene soll die Bezeichnung  $(R, \vartheta)$  verwendet werden, was auf die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} u &= R \cos \vartheta \\ v &= R \sin \vartheta \end{aligned}$$

führt. Im Exponenten der Exponentialfunktion des Fourier-Integrals (8.1) steht der Ausdruck

$$xu + yv = r \cos \varphi \cdot R \cos \vartheta + r \sin \varphi \cdot R \sin \vartheta = rR \cos(\varphi - \vartheta).$$

Mit diesen Bezeichnungen wird das Fourier-Integral (8.1) zu

$$\begin{aligned} \tilde{F}(R, \vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) e^{irR \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r, \varphi) e^{irR \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi r dr. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Die partielle Funktion  $\varphi \mapsto \tilde{f}(r, \varphi)$  ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion, sie lässt sich also als komplexe Fourier-Reihe

$$\tilde{f}(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(r) e^{in\varphi} \tag{8.3}$$

schreiben, die Funktionen  $\hat{f}_n(r)$  sind die komplexen Fourier-Koeffizienten. Setzt man (8.3) in die Fourier-Transformation (8.2) ein, erhält man

$$\tilde{F}(R, \vartheta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \hat{f}_n(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi + irR \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi r dr.$$

Der Exponent im inneren Integral kann als

$$in\varphi + irR \cos(\varphi - \vartheta) = i(n(\varphi - \vartheta) + rR \cos(\varphi - \vartheta)) + in\vartheta,$$

oder im Integral als

$$\tilde{F}(R, \vartheta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \hat{f}_n(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\varphi-\vartheta)+irR \cos(\varphi-\vartheta)} e^{in\vartheta} d\varphi r dr$$

geschrieben werden. Der zweite Exponentialfaktor hängt nicht von  $\varphi$  ab und kann daher aus dem Integral herausgezogen werden. Der erste Exponentialfaktor hängt nur von  $\varphi - \vartheta$  ab. Da die Exponentialfunktion  $2\pi$ -periodisch ist, hat die Verschiebung um  $\vartheta$  keinen Einfluss auf den Wert des Integrals. Die Fourier-Transformation ist daher auch

$$\tilde{F}(R, \vartheta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \hat{f}_n(r) e^{in\vartheta} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi+irR \cos\varphi} d\varphi}_{=: F_n(rR)} r dr.$$

Die Beziehung zu den Besselfunktionen können wir daraus herstellen, indem wir zunächst  $\xi = rR$  abkürzen und dann das innere Integral

$$F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi+i\xi \cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{i\xi \cos\varphi} d\varphi \quad (8.4)$$

auswerten. Exponentialfunktion als Potenzreihe entwickeln:

$$F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k \cos^k \varphi}{k!} d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k \varphi d\varphi}_{=: c_{n,k}}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist im Wesentlichen ein Fourier-Koeffizient der Funktion  $\varphi \mapsto \cos^k \varphi$ .

### Berechnung der Fourier-Koeffizienten von $\cos^k \varphi$

Indem man die Kosinus-Funktion als die Linearkombination

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

von Exponentialfunktionen ausdrückt, kann man auch die  $k$ -te Potenz mit Hilfe des binomischen Satzes als

$$\cos^k \varphi = \sum_{m=0}^k \frac{1}{2^k} \binom{k}{m} e^{im\varphi} e^{i(m-k)\varphi} = \sum_{m=0}^k \frac{1}{2^k} \binom{k}{m} e^{i(2m-k)\varphi}$$

ausdrücken. Der Fourier-Koeffizient von  $\cos^k \varphi$  ist daher das Integral

$$c_{n,k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \cos^k \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{i(2m-k)\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(2m-k+n)\varphi} d\varphi.
\end{aligned}$$

Für  $2m - k + n = 0$  ist das Integral ein Integral der Funktion 1 über ein Intervall der Länge  $2\pi$ , zusammen mit dem Faktor  $1/2\pi$  hat es daher den Wert 1. Für  $2m - k + n \neq 0$  ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(2m-k+n)\varphi} d\varphi = \frac{1}{i} \left[ \frac{e^{i(2m-k+n)\varphi}}{2m - k + n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

weil die Exponentialfunktion  $2\pi$ -periodisch ist. Nur für  $k = 2m + n$  ergibt sich ein nicht verschwindender Fourier-Koeffizient. Eine Summe über  $k \in \mathbb{N}$  kann daher auch als Summe über  $m \in \mathbb{N}$  interpretiert werden, in der  $k$  durch die Formel  $k = 2m + n$  gegeben wird. Mit dieser Konvention wird

$$c_{n,k} = c_{n,2m+n} = \frac{1}{2^{2m+n}} \binom{2m+n}{m}$$

schreiben lässt.

### Berechnung von $F_n(\xi)$

Die Reihe für  $F_n(\xi)$  lässt sich weiter vereinfachen. Wir verwenden wieder die Tatsache, dass sich nur für  $n = -2m - k$  ein Beitrag ergibt. Dies bedeutet, dass  $k = 2m + n$  sein muss, die Summe kann damit als Summe über  $m$  statt über  $k$  geschrieben werden. Somit ist

$$\begin{aligned}
F_n(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \xi^k}{k!} c_{n,k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+n} \xi^{2m+n}}{(2m+n)!} c_{n,2m+n} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+n}} \binom{2m+n}{m} \frac{i^{2m+n} \xi^{2m+n}}{(2m+n)!} \\
&= i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+n)!} \frac{(2m+n)!}{m! (2m+n-m)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} \\
&= i^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} = i^n J_n(\xi).
\end{aligned}$$

Die Funktionen  $F_n(\xi)$  sind daher bis auf einen Phasenfaktor der Wert  $J_n(\xi)$  einer Bessel-Funktion.

### Berechnung der Fourier-Transformation mit Bessel-Funktionen

Mit allen oben zusammengestellten Notationen kann die Fourier-Transformation jetzt in Polarkoordinaten als

$$\tilde{F}(R, \vartheta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\vartheta} \int_0^\infty \hat{f}_n(r) i^n J_n(rR) r dr$$

geschrieben werden. Dies hat tatsächlich die Form eines Skalarproduktes der Funktion  $\tilde{f}(r, \varphi)$  mit einer Funktion der Form

$$\tilde{e}_{n,R}(r, \varphi) = e^{in\varphi} J_n(rR).$$

Letzteres sind die in Abschnitt 8.1 versprochenen Basisfunktionen.

**Fourier-Reihe von  $e^{i\xi \cos \varphi}$** 

Die Funktionen  $F_n(\xi)$  sind wegen

$$F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{i\xi \cos \varphi} d\varphi,$$

daraus kann man die Fourier-Reihe von  $e^{i\xi \cos \varphi}$  berechnen, dies wird im folgenden Satz durchgeführt.

**Satz 8.1.** Die komplexe Fourier-Reihe der Funktion  $\varphi \mapsto \exp(i\xi \cos \varphi)$  ist

$$e^{i\xi \cos \varphi} = J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) \cos n\varphi. \quad (8.5)$$

Real- und Imaginärteil davon sind die Fourier-Reihen

$$\cos(\xi \cos \varphi) = J_0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \cos 2m\varphi \quad (8.6)$$

$$\sin(\xi \cos \varphi) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\xi) \cos(2m+1)\varphi. \quad (8.7)$$

*Beweis.* Die Fourier-Koeffizienten  $F_n(\xi)$  der Funktion  $e^{i\xi \cos \varphi}$  führen auf die Fourier-Reihe

$$e^{i\xi \cos \varphi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n(\xi) e^{in\varphi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n J_n(\xi) e^{in\varphi}.$$

Terme mit  $\pm n$  können wegen

$$\left. \begin{array}{l} J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi) \\ i^{-n} = (-1)^n i^n \end{array} \right\} \Rightarrow i^{-n} J_{-n}(\xi) = i^n J_n(\xi)$$

zusammengefasst werden, auf diese Weise erhält man

$$e^{i\xi \cos \varphi} = J_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) \cos n\varphi.$$

Dies beweist (8.5).

Indem man Real- und Imaginärteil trennt, kann man daraus auch die Fourier-Reihen von  $\cos(\xi \cos \varphi)$  und  $\sin(\xi \cos \varphi)$  gewinnen, sie sind

$$\begin{aligned} \exp(\xi \cos \varphi) &= J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\xi) \cos n\varphi \\ &= J_0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^{2m} J_{2m}(\xi) \cos 2m\varphi + 2 \sum_{m=0}^{\infty} i^{2m+1} J_{2m+1}(\xi) \cos(2m+1)\varphi \\ &= J_0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \cos 2m\varphi + 2i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\xi) \cos(2m+1)\varphi \\ \cos(\xi \cos \varphi) &= J_0(\xi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\xi) \cos 2m\varphi \end{aligned}$$

$$\sin(\xi \cos \varphi) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\xi) \cos((2m+1)\varphi).$$

Damit sind auch die Formeln (8.6) und (8.7) für die reellen Fourier-Reihen bewiesen.  $\square$

### 8.2.2 Integraldarstellung der Bessel-Funktion

Aus (8.4) kann jetzt die Integraldarstellung der Bessel-Funktionen gewonnen werden. Dazu substituiert man  $\varphi$  durch  $\tau$  mit  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \tau$  oder  $\tau = \frac{\pi}{2} - \varphi$  und  $d\tau = -d\varphi$  im Integral und berechnet

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &= (-i)^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi+i\xi \cos \varphi} d\varphi \\ &= -(-i)^n \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{in(\frac{\pi}{2}-\tau)+i\xi \cos(\frac{\pi}{2}-\tau)} d\tau \\ &= (-i)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i^n e^{-in\tau+i\xi \sin \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Da der Integrand  $2\pi$ -periodisch ist, kann das Integrationsintervall auf  $[-\pi, \pi]$  verschoben werden, was

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau+i\xi \sin \tau} d\tau.$$

ergibt. Das Integral kann in zwei Integrale

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-in\tau+i\xi \sin \tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{in\tau-i\xi \sin \tau} d\tau$$

aufgeteilt werden,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-in\tau+i\xi \sin \tau} + e^{in\tau-i\xi \sin \tau}}{2} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{i(-n\tau+\xi \sin \tau)} + e^{-i(-n\tau+\xi \sin \tau)}}{2} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - \xi \sin \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 8.2** (Integraldarstellung der Bessel-Funktionen). *Die Bessel-Funktionen  $J_n$  mit ganzzahliger Ordnung  $n$  haben die Integraldarstellung*

$$J_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - \xi \sin \tau) d\tau. \quad (8.8)$$

## Übungsaufgaben

# Kapitel 9

## Funktionentheorie

Jede stetige reelle Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall kann beliebig genau durch Polynome, also durch differenzierbare approximiert werden. Für komplex differenzierbare Funktionen sieht die Situation völlig anders aus. Bereits die Funktion  $z \mapsto \bar{z}$  kann in einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  nicht durch Polynome in der Variablen  $z$  approximiert werden. Es stellt sich heraus, dass komplex differenzierbare Funktionen immer eine konvergente Taylor-Reihe besitzen. In Abschnitt 9.2 wird ein Beispiel einer beliebig oft stetig differenzierbaren reellen Funktion angegeben, die nur in 0 verschwindet, deren Taylor-Reihe in 0 die Nullfunktion ist.

Wenn man also weiss, dass die Lösung eines Problems nicht nur eine reelle Funktion ist, sondern eine komplex differenzierbare Funktion, dann unterliegt diese sehr viel strengerem Einschränkungen. Mit der zugehörigen Potenzreihe können Funktionswerte leicht berechnet werden, mit dem Cauchy-Integral können Singularitäten studiert werden und mit der analytischen Fortsetzung kann man Lösungen über Singularitäten auf der reellen Achse hinaus fortsetzen.

### 9.1 Holomorphe Funktionen

Wir betrachten in diesem Kapitel komplexwertige Funktionen, die in einem Teilgebiet der komplexen Ebene definiert sind. Ein *Gebiet* ist eine offene Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . *Offen* heisst, dass mit jedem Punkt  $z_0 \in \Omega$  eine Umgebung

$$U = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

ebenfalls in  $\Omega$  enthalten ist, also  $U \subset \Omega$  für genügend kleines  $\varepsilon$ . Sei also  $f(z)$  eine in  $\Omega \subset \mathbb{C}$  definierte Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

Eine komplexwertige Funktion  $f(z)$  kann betrachtet werden als zwei reellwertige Funktionen von zwei Variablen  $x$  und  $y$ :

$$f(z) = \operatorname{Re} f(x + iy) + i \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Schreibt man  $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x, y)$  und  $\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x, y)$ , dann ist die komplexe Funktion vollständig durch reelle Funktionen beschrieben. Und natürlich wissen wir auch, was unter den Ableitungen der Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  zu verstehen ist. Der Funktion  $f(z)$  entspricht eine Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung einer solchen Funktion im Punkt  $(x_0, y_0)$  ist eine lineare Abbildung von Vektoren, die in linearer Näherung den Funktionswert bei  $f(z_0 + \Delta z)$

$$\begin{pmatrix} u(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta x, \Delta y).$$

In dieser Sicht einer komplexen Funktion gibt es keine einzelne Zahl, die die Funktion einer Ableitung übernehmen könnte, die Ableitung ist eine  $2 \times 2$ -Matrix.

### 9.1.1 Komplexe Ableitung

Die Ableitung einer Funktion einer reellen Variablen wird mit Hilfe des Grenzwertes

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definiert, oder als diejenige Zahl  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (9.1)$$

gilt. Der Term  $x - x_0$  und die Gleichung (9.1) sind aber auch für komplexe Argument sinnvoll, wir definieren daher

**Definition 9.1.** Die komplexe Funktion  $f(z)$  heisst im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar und hat die komplexe Ableitung  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ , wenn

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \quad (9.2)$$

gilt.

*Beispiel.* Die Funktion  $z \mapsto f(z) = z^n$  ist überall komplex differenzierbar und hat die Ableitung  $nz^{n-1}$ . Um dies nachzuprüfen, müssen wir die Bedingung (9.2) verifizieren. Aus einer wohlbekannten Faktorisierung von  $z^n - z_0^n$  können wir den Differenzenquotienten finden:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= \underbrace{z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}}_{n \text{ Summanden}}. \end{aligned}$$

Lassen wir jetzt  $z$  gegen  $z_0$  gehen, wird die rechte Seite zu  $nz_0^{n-1}$ . ○

*Beispiel.* Die Funktion  $z \mapsto f(z) = \bar{z} = x - iy$  ist nicht differenzierbar. Wenn  $f(z) = \bar{z}$  differenzierbar wäre, dann müsste es eine Zahl  $a \in \mathbb{C}$  geben, so dass

$$\bar{z} - \bar{z}_0 = a(z - z_0) + o(z - z_0)$$

gilt. wählen wir  $z = z_0 + x$  bzw.  $z = z_0 + iy$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} z - z_0 = x : \quad \bar{z} - \bar{z}_0 &= x \quad \Rightarrow \quad \bar{z} - \bar{z}_0 = 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad a = 1 \\ z - z_0 = iy : \quad \bar{z} - \bar{z}_0 &= -iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z} - \bar{z}_0 = -1 \cdot iy \quad \Rightarrow \quad a = -1 \end{aligned}$$

Es ist also nicht möglich, eine einzige Zahl  $a$  zu finden, die als die Ableitung der Funktion  $z \mapsto \bar{z}$  betrachtet werden könnte. ○

Das letzte Beispiel zeigt, dass selbst Funktionen, deren Real- und Imaginärteil beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen sind, nicht komplex differenzierbar sein müssen. Komplexe Differenzierbarkeit ist eine wesentlich stärkere Bedingung an eine Funktion, komplex differenzierbare Funktionen bilden eine echte Teilmenge aller Funktionen, deren Real- und Imaginärteil differenzierbar ist.

### 9.1.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Komplexe Funktionen können nur differenzierbar sein, wenn sich die vier partiellen Ableitungen zu einer einzigen komplexen Zahl zusammenfassen lassen. Um diese Beziehung zu finden, gehen wir von einer komplexen Funktion

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

aus, und berechnen die Ableitung auf zwei verschiedene Arten, indem wir sowohl nach  $x$  als auch nach  $iy$  ableiten:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(z + x) - f(z)}{x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(z + iy) - f(z)}{iy} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn Real- und Imaginärteile übereinstimmen. Es folgt also

**Satz 9.2.** *Real- und Imaginärteil  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  einer komplex differenzierbaren Funktion  $f(z)$  mit  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.3)$$

Leitet man die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nochmals nach  $x$  und  $y$  ab, erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Die erste und die letzte sowie die mittleren zwei können zu jeweils einer Differentialgleichung für die Funktionen  $u$  und  $v$  zusammengefasst werden, nämlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

**Definition 9.3.** *Der Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

*heisst der Laplace-Operator in zwei Dimensionen.*

**Definition 9.4.** *Eine Funktion  $h(x, y)$  von zwei Variablen heisst harmonisch, wenn sie die Gleichung*

$$\Delta h = 0$$

*erfüllt.*

**Satz 9.5.** *Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion sind harmonische Funktionen.*

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen schränken also einerseits stark ein, welche Funktionen überhaupt als Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion in Frage kommen. Andererseits koppeln sie auch Real- und Imaginärteil stark zusammen.

**Beispiel.** Von einer komplex differenzierbaren Funktion  $f(z)$  sei nur der Realteil  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  bekannt. Man finde alle möglichen Funktionen  $f(z)$ .

Zunächst kontrollieren wir, ob dies überhaupt ein Realteil sein kann, indem wir nachrechnen, ob  $u(x, y)$  harmonisch ist.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,\end{aligned}$$

$u$  ist also harmonisch.

Um die Funktion  $f$  zu finden, brauchen wir jetzt noch den Imaginärteil. Wir finden ihn mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen. Es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad (9.4)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man durch Integrieren nach  $x$

$$v(x, y) = -3x^2y + C(y),$$

die Integrations-“Konstante” ist eine Funktion, die aber nur von  $y$  abhängen darf. Die zweite Cauchy-Riemann-Gleichung verwendet die Ableitung von  $v$  nach  $y$ , sie ist

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + C'(y).$$

Aus der zweiten Gleichung von (9.4) liest man ab, dass

$$C'(y) = -3y^2 \quad \Rightarrow \quad C(y) = -y^3 + k$$

sein muss. Damit ist  $v$  bis auf eine Konstante bestimmt. Die zugehörige Funktion  $f(z)$  ist daher

$$f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + ik = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + ik = z^3 + ik.$$

Wir haben die Funktion  $f(z)$  bis auf eine Konstanten  $ik$  aus ihrem Realteil rekonstruiert. ○

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen besagen auch, dass man nur die Ableitungen nach  $x$  zu berechnen braucht, um die Ableitung  $f'(x)$  zu bestimmen. Die Rechenregeln für die Ableitung lassen sich daher direkt auf komplexe Funktionen übertragen:

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$$

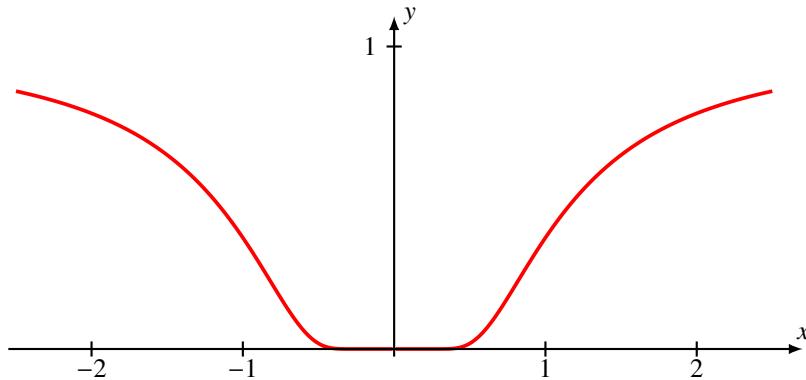


Abbildung 9.1: Beispiel einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion, deren Ableitungen in  $x = 0$  alle verschwinden. Die zugehörige Taylor-Reihe ist die Nullfunktion, sie hat nichts mit der Funktion zu tun.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} e^z &= e^z \\ \frac{d}{dz} f(g(z)) &= f'(g(z))g'(z) \\ \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\end{aligned}$$

Die Ableitungsformeln ändern also nicht, die formalen Ableitungsregeln für holomorphe Funktionen sind die gleichen wie für reelle Funktionen.

## 9.2 Analytische Funktionen

Holomorphe Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie auch immer eine konvergente Reihenentwicklung haben, sie sind also analytisch.

### 9.2.1 Definition

Die Taylor-Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ermöglicht deren effiziente Berechnung. Es ist aber nicht selbstverständlich, dass die Taylor-Reihe überhaupt gegen die Funktion konvergiert, aus deren Ableitungen sie gebildet worden ist, wie das folgende Beispiel illustriert.

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Der Graph  $y = f(x)$  ist in Abbildung 9.1 dargestellt.

Die ersten zwei Ableitungen der Funktion  $f$  sind

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} = \frac{2}{x^3} \cdot f(x)$$

$$f''(x) = \frac{(4 - 6x^2)e^{-1/x^2}}{x^6} = \frac{4 - 6x^2}{x^6} \cdot f(x)$$

...

Man kann vermuten, dass alle Ableitungen Funktionen der Form

$$F(x) = \frac{p(x)}{x^n} \cdot f(x), \quad (9.5)$$

sind, wobei  $p(x)$  ein Polynom ist. Leitet man eine solche Funktion nach  $x$  ab, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(p(x)f(x))x^n - nx^{n-1}p(x)f(x)}{x^{2n}} \\ &= \frac{p'(x)f(x) + p(x)f'(x) - nx^{n-1}p(x)f(x)}{x^{2n}} \\ &= \frac{p'(x) + p(x)(2/x^3) - nx^{n-1}p(x)}{x^{2n}} \cdot f(x) \\ &= \frac{x^3 p'(x) + 2p(x) - nx^{n-1}p(x)}{x^{2n+3}} \cdot f(x). \end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Funktion der Form (9.5).

Der Faktor  $f(x) = e^{-1/x^2}$  von  $F(x)$  geht für  $x \rightarrow 0$  exponentiell schnell gegen 0, schneller als der Nenner  $x^n$  gegen 0 gehen kann. Der Grenzwert  $x \rightarrow 0$  einer Funktion der Form (9.5) ist daher immer

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass alle Ableitungen  $f^{(n)}(0) = 0$  sind. Die Taylorreihe von  $f(x)$  ist daher die Nullfunktion.  $\circlearrowright$

Es ist bekannt aus der elementaren Theorie der Potenzreihen in Kapitel 1.5, dass eine analytische Funktion beliebig oft differenzierbar ist und dass die Potenzreihe im Punkt  $x_0$  die Taylor-Reihe sein muss. Außerdem sind Summen, Differenzen und Produkte von analytischen Funktionen wieder analytisch. Für eine komplexe Funktion lässt sich der Begriff der analytischen Funktion genau gleich definieren.

**Definition 9.6.** Eine in einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  definierte Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst analytisch im Punkt  $z_0 \in U$ , wenn es eine in einer Umgebung von  $z_0$  konvergente Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = f(z)$$

gibt. Sie heisst analytisch, wenn sie analytisch ist in jedem Punkt von  $U$ .

Die Verwendung einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  ist wesentlich, denn die Funktion  $f: z \mapsto \bar{z}$  kann in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  der reellen Achse  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  durch die Potenzreihe  $f(x) = x_0 + (x - x_0)$  dargestellt werden, es gibt aber keine Potenzreihe, die  $f(z)$  in einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  gegen  $f(z) = \bar{z}$  konvergiert.

## 9.2.2 Konvergenzradius

In der Theorie der Potenzreihen, wie sie in Kapitel 1 zusammengefasst wurde, wird auch untersucht, wie gross eine Umgebung des Punktes  $z_0$  ist, in der die Potenzreihe im Punkt  $z_0$  einer analytischen Funktion konvergiert. Die Definition des Konvergenzradius gilt auch für komplexe Funktionen.

**Satz 9.7.** *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

ist konvergent auf einem Kreis um  $z_0$  mit Radius  $\varrho$  und

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Falls  $a_k \neq 0$  für alle  $k$  und der folgende Grenzwert existiert, dann gilt auch

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

**Definition 9.8.** Der in Satz 9.7 Radius  $\varrho$  des Konvergenzkreises heisst Konvergenzradius.

Man kann auch zeigen, dass der Konvergenzkreis immer so gross ist, dass auf seinem Rand ein Wert  $z$  liegt, für den die Potenzreihe nicht konvergiert.

## 9.3 Cauchy-Integral

In Abschnitt 9.1 hat sich bereits gezeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion weit mehr Einschränkungen auferlegt als reelle Differenzierbarkeit. Sowohl der Real- wie auch der Imaginärteil müssen harmonische Funktionen sein. In diesem Abschnitt wird die Cauchy-Integralformel etabliert, die sogar zeigt, dass eine komplex differenzierbare Funktion bereits durch die Werte auf dem Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes gegeben ist, beliebig oft differenzierbar ist und ausserdem immer analytisch ist.

### 9.3.1 Wegintegrale

Das Finden einer Stammfunktion, die Integration, ist die Grundtechnik, mit der man den Übergang von lokaler Information in Form von Ableitungen, zu globaler Information über reelle Funktionen vollzieht. Sie liefert aus der Steigung zwischen zwei Punkten  $x_0$  und  $x$  den Funktionswert mittels

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(\xi) d\xi.$$

Bei einer reellen Funktion gibt es nur eine Richtung, entlang der man integrieren könnte.

Auch in der komplexen Ebene erwarten wir eine Formel

$$f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^z f'(\zeta) d\zeta.$$

In der komplexen Ebene gibt es aber beliebig viele Wege, mit denen die Punkte  $z_0$  und  $z$  verbunden werden können. Der Wert von  $f(z)$  muss also durch Integration entlang eines speziell gewählten Weges  $\gamma$

$$f(z) = f(z_0) + \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta$$

bestimmt werden. Es muss also zunächst geklärt werden, wie ein solches Wegintegral überhaupt zu verstehen und zu berechnen ist. Dann gilt es zu untersuchen, inwieweit diese Konstruktion unabhängig von der Wahl des Weges ist. Für komplex differenzierbare Funktionen wird sich eine sehr erfolgreiche Theorie ergeben.

### Definition des Wegintegrals

Ein Weg in der komplexen Ebene ist eine Abbildung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t).$$

Wir verlangen für unsere Zwecke zusätzlich, dass  $\gamma$  differenzierbar ist. Dann können wir für jede beliebige Funktion das Wegintegral definieren.

**Definition 9.9.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg in  $\mathbb{C}$  und  $f(z)$  eine stetige komplexe Funktion, dann heisst

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

das Wegintegral von  $f(z)$  entlang der Kurve  $\gamma$ .

*Beispiel.* Man berechne das Wegintegral der Funktion  $f(z) = z^n$  entlang des Weges  $\gamma(t) = 1 + t + it^2$  für  $t \in [0, 1]$ .

Die Definition besagt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \gamma(t)^n \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)^{n+1}}{n+1} dt \\ &= \left[ \frac{\gamma(t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{(2+i)^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{(2+i)^{n+1} - 1}{n+1}. \end{aligned}$$

Man stellt in diesem Beispiel auch fest, dass das Integral offenbar unabhängig ist von der Wahl des Weges, es kommt einzig auf die beiden Endpunkte an:

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} (\gamma(1)^{n+1} - \gamma(0)^{n+1}).$$

○

*Beispiel.* Wir berechnen als Beispiel das Wegintegral der Funktion  $f(z) = 1/z$  entlang eines Halbkreises von 1 zu  $-1$ . Es gibt zwei verschiedene solche Halbkreise:

$$\begin{aligned} \gamma_+(t) &= e^{it}, \quad t \in [0, \pi] \\ \gamma_-(t) &= e^{-it}, \quad t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Wir finden für die Wegintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_+} \frac{1}{z} dz &= \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^\pi dt = i\pi, \\ \int_{\gamma_-} \frac{1}{z} dz &= - \int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}} ie^{-it} dt = -i \int_0^\pi dt = -i\pi.\end{aligned}$$

Das Wegintegral zwischen 1 und  $-1$  hängt also mindestens für diese spezielle Funktion  $f(z) = 1/z$  von der Wahl des Weges ab.  $\circlearrowright$

Wie Wahl der Parametrisierung der Kurve hat keinen Einfluss auf den Wert des Wegintegrals.

**Satz 9.10.** Seien  $\gamma_1(t), t \in [a, b]$ , und  $\gamma_2(s), s \in [c, d]$  verschiedene Parametrisierungen der gleichen Kurve, es gebe also eine Funktion  $t(s)$  derart, dass  $\gamma_1(t(s)) = \gamma_2(s)$ . Dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

*Beweis.* Wir verwenden die Definition des Wegintegrals

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \gamma'_1(t) dt = \int_c^d f(\gamma_1(t(s))) \underbrace{\gamma'_1(t(s)) t'(s)}_{= \frac{d}{ds} \gamma_1(t(s))} ds \\ &= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \gamma'_2(s) ds = \int_{\gamma_2} f(z) dz.\end{aligned}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen haben wir die Formel für die Variablentransformation  $t = t(s)$  in einem Integral verwendet.  $\square$

Wir erwarten, dass das Wegintegral ähnlich wie das Integral reeller Funktionen eine Art ‘Umkehroperation’ zur Ableitung ist. Wir untersuchen daher den Fall, dass  $f(z)$  eine komplexe Stammfunktion  $F(z)$  hat, also  $f(z) = F'(z)$ . Wir berechnen das Wegintegral entlang des Weges  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dies ist genau die Formel, die man als den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kennt. Trotzdem ist die Situation hier etwas anders. In der reellen Infinitesimalrechnung war die Existenz einer Stammfunktion durch das Integral gesichert, man konnte mit

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

immer eine Stammfunktion angeben. Im komplexen Fall können wir natürlich auch versuchen, eine Stammfunktion mit Hilfe von

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

zu definieren. Dabei muss allerdings  $\gamma_z$  ein Weg sein, der im Punkt  $z$  endet, und wir wissen noch nicht einmal, ob die Wahl des Weges eine Rolle spielt. Bevor wir also sicher sein können, dass eine Stammfunktion existiert, müssen wir zeigen, dass das Wegintegral einer komplex differenzierbaren Funktion zwischen zwei Punkten nicht von der Wahl des Weges abhängt, der die beiden Punkte verbindet. Dazu ist notwendig, geschlossene Wege genauer zu betrachten.

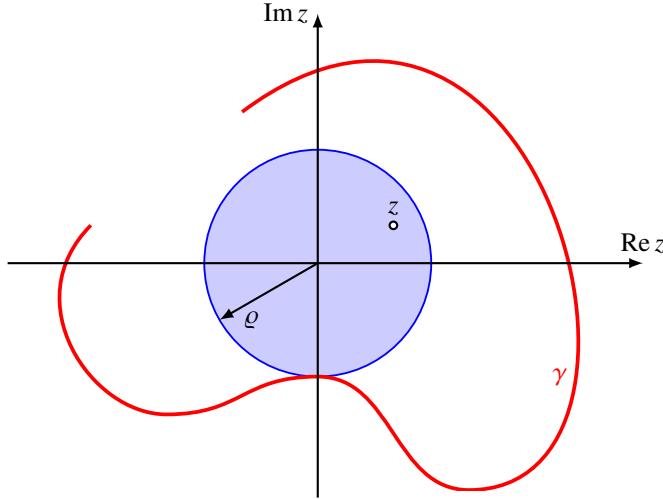


Abbildung 9.2: Pfad und Konvergenzradius für den Nachweis, dass Wegintegrale auf analytische Funktionen führen (Satz 9.11).

### Wegintegrale führen auf analytische Funktionen

Mit Wegintegralen kann man aus stetigen Funktionen neue Funktionen konstruieren. Die folgende Konstruktion liefert überraschenderweise immer analytische Funktionen.

**Satz 9.11.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg in  $\mathbb{C}$ , der nicht durch den Nullpunkt verläuft, und  $g$  eine stetige Funktion auf  $\gamma([a, b])$  (Abbildung 9.2). Dann ist die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(x)}{x - z} dx$$

in einer Umgebung des Nullpunktes analytisch:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{mit } c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(x)}{x^{k+1}} dx.$$

Der Konvergenzradius  $\rho$  dieser Reihe ist der minimale Abstand der Kurve  $\gamma$  vom Nullpunkt.

*Beweis.* Zunächst schreiben wir

$$\frac{1}{x - z} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{x^{k+1}}. \quad (9.6)$$

Damit können wir jetzt die Funktion  $f(z)$  berechnen:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(x)}{x - z} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{x^{k+1}} g(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(x)}{x^{k+1}} dx \right)}_{= c_k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

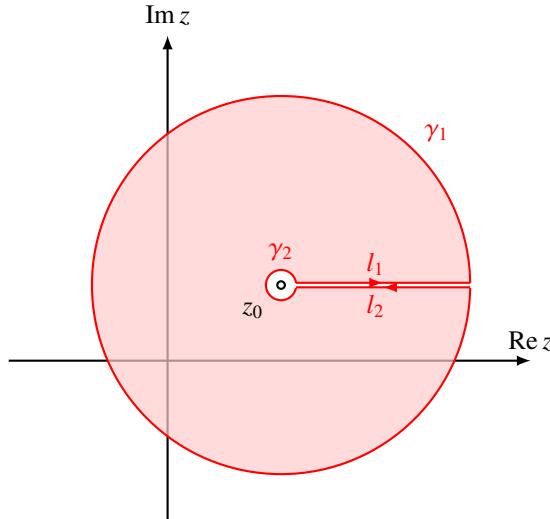


Abbildung 9.3: Pfad zur Herleitung der Laurent-Reihe einer Funktion  $f(z)$  mit einer Singularität  $z_0$ .

Wir müssen uns noch die Konvergenz dieser Reihen überlegen. Wenn  $z < \varrho$  ist, dann ist

$$\left| \frac{z}{x} \right| = \frac{|z|}{|x|} < 1,$$

so dass die geometrische Reihe (9.6) konvergent ist, daraus lesen wir ab, dass der Konvergenzradius mindestens  $\varrho$  ist. Größer kann er allerdings auch nicht sein, da für  $|z| \geq \varrho$  das Integral nicht mehr definiert sein muss. Nimmt man nämlich einen Punkt von  $g([a, b])$  für  $z$  wird der Integrand unendlich gross.  $\square$

Der Satz 9.11 ist nur für Potenzreihen im Punkt 0 formuliert, was im Wesentlichen durch die Umformung (9.6) bedingt war. Man kann dies aber auch als Potenzreihe

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{x-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{x-z_0}} = \frac{1}{x-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{x-z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k$$

im Punkt  $z_0$  ausdrücken. Man bekommt dann die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad \text{mit } c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(x)}{(x-z_0)^{k+1}} dx$$

für das Wegintegral.

### Laurent-Reihen

In Satz 9.11 konnten wir eine Potenzreihe für solche  $z$  konstruieren, deren Betrag kleiner ist als der kleinste Abstand der Kurve  $\gamma$  vom Ursprung. Dies war notwendig, weil in (9.6) die geometrische Reihe nur konvergiert, wenn der Quotient  $< 1$  ist. Wenn die Funktion  $f(z)$  jedoch eine Singularität im Punkt  $z_0$  hat, dann kann es nicht möglich sein, die Funktion mit einer Potenzreihe zu beschreiben.

Wir verwenden daher den speziellen Pfad in Abbildung 9.3. Er führt in einem grossen Kreis  $\gamma_1$  um den Punkt  $z_0$  herum, dann folgt ein zur  $x$ -Achse paralleler Abschnitt, der bis zum kleinen Kreis  $\gamma_2$  führt. Nach Durchlaufen des kleinen Kreises  $\gamma_2$  im Uhrzeigersinn folgt wieder ein zur  $x$ -Achse paralleles Stück zurück zum grossen Kreis. Da die geraden Stücke zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, heben sie sich weg. Ein Wegintegral entlang  $\gamma$  zerfällt daher in eine Differenz

$$\oint_{\gamma} \dots dz = \oint_{\gamma_1} \dots dz - \oint_{\gamma_2} \dots dz$$

von Wegintegralen entlang  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Der äussere Pfad  $\gamma_1$  gibt wie in Satz 9.11 Anlass zu einer Potenzreihe in  $(z - z_0)$ . Der innere Pfad  $\gamma_2$  kann aber nicht so behandelt werden, da  $z$  immer weiter von  $z_0$  entfernt als die Punkte auf  $\gamma_2$ . Allerdings ist  $|x/z| < 1$  für Punkte auf  $\gamma_2$ , wir müssen daher die geometrische Reihe auf  $x/z$  anwenden:

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{\frac{x-z_0}{z-z_0} - 1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Das Integral entlang der Kurve  $\gamma_2$  kann also als Reihe in  $1/(z-z_0)$  entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(x)}{x-z} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (x-z_0)^k g(x) dx \right)}_{= d_{k+1}} \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(z-z_0)^k}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der vom Integral entlang  $\gamma_1$  herrührenden Reihe finden wir den Satz

**Satz 9.12.** Ist  $g(z)$  eine entlang der Kurve  $\gamma$  wie in Abbildung 9.3 definierte stetige Funktion, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(x)}{x-z} dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(z-z_0)^k},$$

wobei die Koeffizienten  $c_k$  und  $d_k$  gegeben sind durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{g(x)}{x-z_0} dx \quad \text{und} \quad d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} g(x) x^{k-1} dx.$$

**Definition 9.13.** Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

heisst Laurent-Reihe im Punkt  $z_0$ .

### Geschlossene Wege

**Definition 9.14.** Ein Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heisst geschlossen, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Das Integral entlang eines geschlossenen Weges hängt nicht von der Parametrisierung ab und wird zur Verdeutlichung mit

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz$$

bezeichnet.

*Beispiel.* Wir berechnen das Integral von  $f(z) = z^n$  entlang des Einheitskreises, den wir mit  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  parametrisieren. Die Definition liefert:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{int} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

Für  $n = -1$  ist dies das Integral einer konstanten Funktion, also

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Für  $n \neq -1$  kann man eine Stammfunktion von  $e^{i(n+1)t}$  verwenden:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = i \left[ \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

weil  $e^{i(n+1)t}$  periodisch ist mit Periode  $2\pi$ . ○

Das Beispiel zeigt, dass ein Wegintegral der Potenzfunktionen, aller Polynome und schliesslich aller konvergenten Potenzreihen über einen geschlossenen Weg verschwinden. Es zeigt aber auch, dass das Wegintegral über einen geschlossenen Weg nicht zu verschwinden braucht, wie das Beispiel  $f(z) = 1/z$  zeigt. Letztere Funktion unterscheidet sich von den Potenzfunktionen allerdings dadurch, dass sie im Nullpunkt nicht definiert ist.

**Satz 9.15.** Sei  $f(z)$  eine in einem zusammenhängenden Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{C}$  definierte komplexe Funktion, für die das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Dann hat  $f(z)$  eine komplexe Stammfunktion  $F(z)$ .

*Beweis.* Wir wählen einen beliebigen Punkt  $z_0 \in \Omega$  definieren die komplexe Stammfunktion mit Hilfe des Wegintegrals

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei  $\gamma_z$  ein beliebiger Weg ist, der  $z_0$  mit  $z$  verbindet.

Wir müssen uns davon überzeugen, dass die Wahl des Weges keinen Einfluss auf  $F(z)$  hat. Dazu seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei verschiedene Wege, die  $z_0$  mit  $z$  verbinden. Da die Parametrisierung der Wege keinen Einfluss auf das Wegintegral haben, nehmen wir an, dass beide Wege auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind.

Jetzt konstruieren wir einen geschlossene Weg  $\gamma$  durch die Definition:

$$\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(2-t) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Der Weg  $\gamma$  besteht aus  $\gamma_1$  und dem in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg  $\gamma_2$ , denn an der Stelle  $t = 1$  passen die beiden Teilwege nahtlos zusammen:  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \gamma_2(2 - 1)$ . Wegen  $\gamma(2) = \gamma_2(2 - 2) = \gamma_2(0) = \gamma_1(0)$  ist der Weg geschlossen. Nach Voraussetzung ist verschwindet das Wegintegral über  $\gamma$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \gamma'_1(t) dt + \int_1^2 f(\gamma_2(2-t)) \frac{d}{dt} \gamma_2(2-t) dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \gamma'_1(t) dt - \int_1^2 f(\gamma_2(2-t)) \gamma'_2(2-t) dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \gamma'_1(t) dt - \int_0^1 f(\gamma_2(s)) \gamma'_2(s) ds \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ \Rightarrow \quad \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Da die Wahl des Weges keine Rolle spielt, ist  $F(z)$  wohldefiniert.  $\square$

Die Bedingung des eben bewiesenen Satzes ist nicht wirklich nützlich, sie ist kaum nachprüfbar. Es braucht also zusätzliche Anstrengungen um genügend viele Funktionen zu finden, welche die Eigenschaft haben, dass Wegintegrale über geschlossene Wege verschwinden. Wir zielen dabei auf den folgenden Satz hin:

**Satz 9.16 (Cauchy).** *Ist  $f(z)$  eine in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{C}$  definierte komplex differenzierbare Funktion, und ist  $\gamma$  ein im Gebiet  $\Omega$  auf einen Punkt zusammenziehbarer geschlossener Weg, dann gilt*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

*Ist insbesondere  $\Omega$  einfach zusammenhängend (d. h. jeder geschlossene Weg lässt sich in einen Punkt zusammenziehen), dann verschwindet das Wegintegral von  $f(z)$  über jeden geschlossenen Weg in  $\Omega$ .*

*Beweis.* Wir verwenden für den folgenden Beweis den Satz von Green über Wegintegrale in der Ebene. Er besagt, dass für einen geschlossenen Weg  $\gamma$  der in der Ebene das Gebiet  $D$  berandet, und zwei Funktionen  $L(x, y)$  und  $M(x, y)$ , gilt

$$\oint_{\gamma} (L dx + M dy) = \int_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy.$$

Wir berechnen jetzt das Integral einer komplex differenzierbaren Funktion  $f(z)$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int (u(x, y) + iv(x, y))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt \\ &= \int u(x, y)\dot{x}(t) - v(x, y)\dot{y}(t) dt + i \int u(x, y)\dot{y}(t) + v(x, y)\dot{x}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy) \\
&= \int_D \underbrace{-\frac{\partial v}{\partial x}}_{=\frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + i \int_D \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\frac{\partial v}{\partial y}} - \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir auf der dritten Zeile den Satz von Green angewendet, und auf der letzten Zeile die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.  $\square$

### 9.3.2 Die Cauchy-Integralformel

Sei jetzt  $f(z)$  eine komplex differenzierbare Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

komplex differenzierbar für  $z \neq a$ . Insbesondere ist der Wert des Wegintegrals von  $g(z)$  entlang eines geschlossenen Pfades um den Punkt  $a$  unabhängig von der Wahl des Weges. Zum Beispiel könnten wir das Wegintegral mit Hilfe eines kleinen Kreises um  $a$  mit Radius  $r$  mit der Parametrisierung

$$t \mapsto \gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

berechnen. Die Rechnung ergibt

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Da  $f(z)$  komplex differenzierbar ist, können wir  $f(z)$  approximieren durch  $f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$ , also

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz &= i \int_0^{2\pi} f(a) + f'(a)re^{it} + o(r) dt \\
&= f(a)i \int_0^{2\pi} dt + irf'(a) \int_0^{2\pi} e^{it} dt + i \int_0^{2\pi} o(r) dt \\
&= 2\pi if(a) + irf'(a) \underbrace{\left[ \frac{1}{i} e^{it} \right]_0^{2\pi}}_{=0} + o(r) \\
&= 2\pi if(a) + o(r).
\end{aligned}$$

Da das Wegintegral einer komplex differenzierbaren Funktion aber unabhängig vom Weg und damit vom Radius  $r$  sein muss, folgt

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi if(a).$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 9.17** (Cauchy). *Ist  $\gamma$  ein geschlossener Weg in der komplexen Ebene, die ein Gebiet umrandet, in dem die komplexe Funktion  $f(z)$  komplex differenzierbar ist, dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Insbesondere sind die Werte einer komplex differenzierbaren Funktion im Inneren eines Gebietes durch die Werte auf dem Rand bereits vollständig bestimmt.

### Ableitungen und Cauchy-Formel

Sei  $f(z)$  eine komplex differenzierbare Funktion, als Definitionsbereich nehmen wir der Einfachheit halber einen Kreis vom Radius  $r$  um den Nullpunkt, sein Rand ist die Kurve  $\gamma$ . Durch Ableiten der Cachyschen Integralformel finden wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ f''(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2 \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \\ f'''(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2 \cdot 3 \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\zeta \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Es folgt

**Satz 9.18.** *Eine komplex differenzierbare Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

### Komplex differenzierbare Funktionen sind analytisch

Wir haben früher gesehen, dass Wegintegrale auf analytische Funktionen führen. Andererseits zeigt das Cauchy-Integral, dass komplex differenzierbare Funktionen durch genau die Integrale bestimmt sind, die in den Reihenentwicklungen in Satz 9.11 auftraten. Diese Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz 9.19.** *Eine komplex differenzierbare Funktion  $f(z)$ , die in einer Kreisscheibe vom Radius  $r$  um den Punkt  $z_0$  definiert ist, ist analytisch. Ihre Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$$

hat die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \geq 0.$$

*Beweis.* Da  $f$  komplex differenzierbar ist, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

In Satz 9.11 wurde gezeigt, dass  $f(z)$  analytisch ist, und dass die Koeffizienten der Potenzreihe von der verlangten Form sind.  $\square$

Für eine komplexe Funktion, die im Punkt  $z_0$  eine Singularität hat, also in einer Umgebung von  $z_0$  ohne den Punkt  $z_0$  definiert ist, können wir das Resultat aus Satz 9.12 verwenden, und zum folgenden analogen Resultat gelangen:

**Satz 9.20.** *Eine komplex differenzierbare Funktion  $f(z)$ , die in einer Kreisscheibe vom Radius  $r$  um den Punkt  $z_0$  mit Ausnahme des Punktes  $z_0$  definiert ist, kann in eine konvergente Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

*entwickelt werden, deren Koeffizienten durch*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

*gegeben sind.*

## 9.4 Analytische Fortsetzung

Wir haben schon gesehen, dass eine reelle Funktion, die in einem Punkte eine konvergente Potenzreihe besitzt, auf natürliche Weise auch als komplexe Funktion betrachtet werden kann, indem man komplexe Argumente in der Potenzreihe zulässt. Die neue komplexe Funktion ist ein einem Kreis um den Punkt konvergent. Mit Hilfe der Potenzreihe kann man also immer eine Funktion auf ein Kreisgebiet ausdehnen. Dieser Abschnitt untersucht die Frage, ob man diese Idee auch auf noch grössere Gebiete ausdehnen kann.

### 9.4.1 Analytische Fortsetzung mit Potenzreihen

Eine komplex differenzierbare Funktion  $f(z)$  ist immer darstellbar als Potenzreihe, und ist daher analytisch. So kann zum Beispiel die Funktion  $1/z$  als Potenzreihe um jeden beliebigen Punkt  $z_0$  entwickelt werden:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z_0 - z}{z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}} (z - z_0)^k, \quad (9.7)$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe sind

$$a_k = \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}},$$

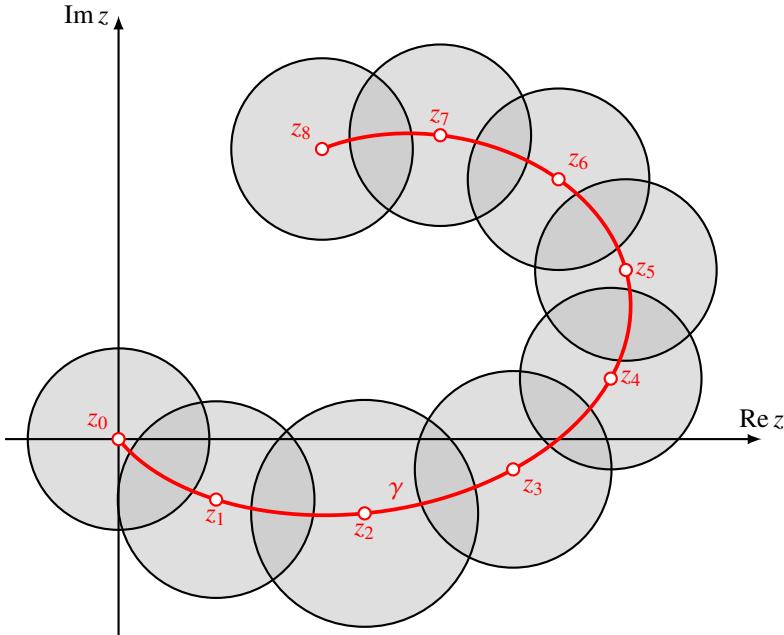


Abbildung 9.4: Analytische Fortsetzung einer komplexen Funktion entlang einer Kurve  $\gamma$ .

und man kann den Konvergenzradius ausrechnen:

$$\frac{1}{Q} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_0|^{\frac{k+1}{k}}} = \frac{1}{|z_0|}.$$

Der Konvergenzradius ist limitiert durch die Singularität bei an der Stelle  $z = 0$ .

Es gibt also keine einzelne Potenzreihe, die die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  in der ganzen komplexen Ebene darstellen kann. Wählt man aber einzelne Punkte  $z_0$  und  $z_1$  derart, dass der Kreis um  $z_0$  mit Radius  $|z_0|$  und der Kreis um  $z_1$  mit Radius  $|z_1|$  überlappen, dann werden die beiden Potenzreihen im Überlappungsgebiet die gleichen Werte annehmen.

Man könnte also eine Kurve  $\gamma$  in der komplexen Ebene wählen, entlang der man in jedem Punkt die Funktion  $f(z)$  in eine Potenzreihe entwickelt. Liegen zwei Punkte nahe genug auf der Kurve  $\gamma$ , werden die Konvergenzkreise der Potenzreihen überlappen, und die Potenzreihen werden im Überlappungsgebiet die gleichen Werte liefern.

Selbst wenn man eine Funktion  $f(z)$  nur in einem Kreis um den Punkt  $z_0$  kennt, zum Beispiel durch eine Potenzreihe im Punkt  $z_0$ , kann man entlang einer Kurve, die  $z_0$  mit  $z_1$  verbindet, in jedem Punkt eine Potenzreihe finden, die mit der Potenzreihe in den Nachbarpunkten übereinstimmt, und so die Definition der Funktion entlang dieser Kurve auf ein grösseres Gebiet ausweiten, wie in Abbildung 9.4 dargestellt. Man nennt dies die *analytische Fortsetzung* der Funktion  $f(z)$  entlang der Kurve  $\gamma$ .

*Beispiel.* Wir haben bereits gesehen, dass sich die Funktion  $f(z) = 1/z$  in jedem Punkt  $z_0$  der komplexen Ebene in die Potenzreihe (9.7) entwickeln lässt. Diese Reihe lässt sich integrieren

$$F(z, z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)z_0^{k+1}} z^{k+1},$$

diese Reihe ist ebenfalls auf einem Kreis vom Radius  $|z_0|$  um den Punkt  $z_0$  konvergent. Wir vermuten natürlich, dass dies eine Darstellung des natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl ist. Natürlich ist das immer nur auf einem Kreisgebiet möglich, die Reihe für  $z = 1$  ist zum Beispiel im Punkt  $z = -1$  nicht konvergent.

Um eine in der ganzen komplexen Ebene definierte Funktion  $\log(z)$  zu konstruieren, müssen wir also eine analytische Fortsetzung aufbauen. Bei der Integration haben wir eine frei wählbare Integrationskonstante  $C(z_0)$ , die wir so wählen müssen, dass die Reihen im Überlappungsgebiet übereinstimmen:

$$F(z, z_0) + C(z_0) = F(z, z_1) + C(z_1)$$

für jedes  $z$  im Überlappungsgebiet. Dadurch wird aber nur die Differenz  $C(z_1) - C(z_0)$  der Werte festgelegt. Da wir Übereinstimmung mit der üblichen Definition des Logarithmus erreichen möchten, können wir  $C(1) = 0$  festlegen.

Wir konstruieren jetzt die analytische Fortsetzung entlang der Kurven  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  wie in Abbildung 9.5 dargestellt. Um die Differenz  $C(z_1) - C(z_0)$  zu bestimmen, Werten wir die Funktionen  $F(z, z_0)$  und  $F(z, z_1)$  jeweils im rot eingeziehenen Punkt aus. Die exakte Berechnung ist etwas mühsam, da es sich ja nur um ein Beispiel handelt, können wir die Reihen auch numerisch ausrechnen, und so die Differenzen bestimmen:

Startpunkt $z_0 = 1$ :	$C(1) = 0$	
entlang $\gamma_+$ :	$C(i) = i\frac{\pi}{2}$	$C(-1) = i\pi$
entlang $\gamma_-$ :	$C(-i) = -i\frac{\pi}{2}$	$C(-1) = -i\pi$

Wir stellen fest, dass die analytische Fortsetzung der Logarithmusfunktion entlang der Kurve  $\gamma_+$  die Potenzreihe

$$\log_+(z) = i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(-1)^k} (z+1)^k = i\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k}$$

ergibt, während man entlang der Kurve  $\gamma_-$

$$\log_-(z) = -i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(-1)^k} (z+1)^k = -i\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{k}$$

findet. Die beiden analytischen Fortsetzungen entlang der Kurven  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  stimmen auf der negativen reellen Achse nicht überein, sie unterscheiden sich um  $2\pi i$ :

$$\log_+(z) - \log_-(z) = 2\pi i.$$

○

Das Beispiel zeigt, dass es im Allgemeinen eine auf der ganzen komplexen Ebene definierte komplexe Entsprechung einer reellen Funktion nicht zu geben braucht. Dieses Phänomen tritt zum Beispiel auch bei der Wurzelfunktion  $f(z) = \sqrt{z}$  auf. Diese Funktion ist im Punkt  $z = 0$  nicht differenzierbar, man muss diesen Punkt also aus dem Definitionsbereich ausschliessen. Führt man analog zum Beispiel eine analytische Fortsetzung durch, findet man, dass sich die Werte von  $f(z)$  für die beiden Wege  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$  durch das Vorzeichen unterscheiden.

## 9.4.2 Analytische Fortsetzung mit Differentialgleichungen

In Abschnitt 9.3.1 wurde gezeigt, wie Wegintegrale Stammfunktionen komplexer Funktionen liefern können. Im vorangegangenen Abschnitt wurde untersucht, wie eine komplex differenzierbare Funktion mit Hilfe von analytischer Fortsetzung entlang einer Kurve ausgedehnt werden kann.

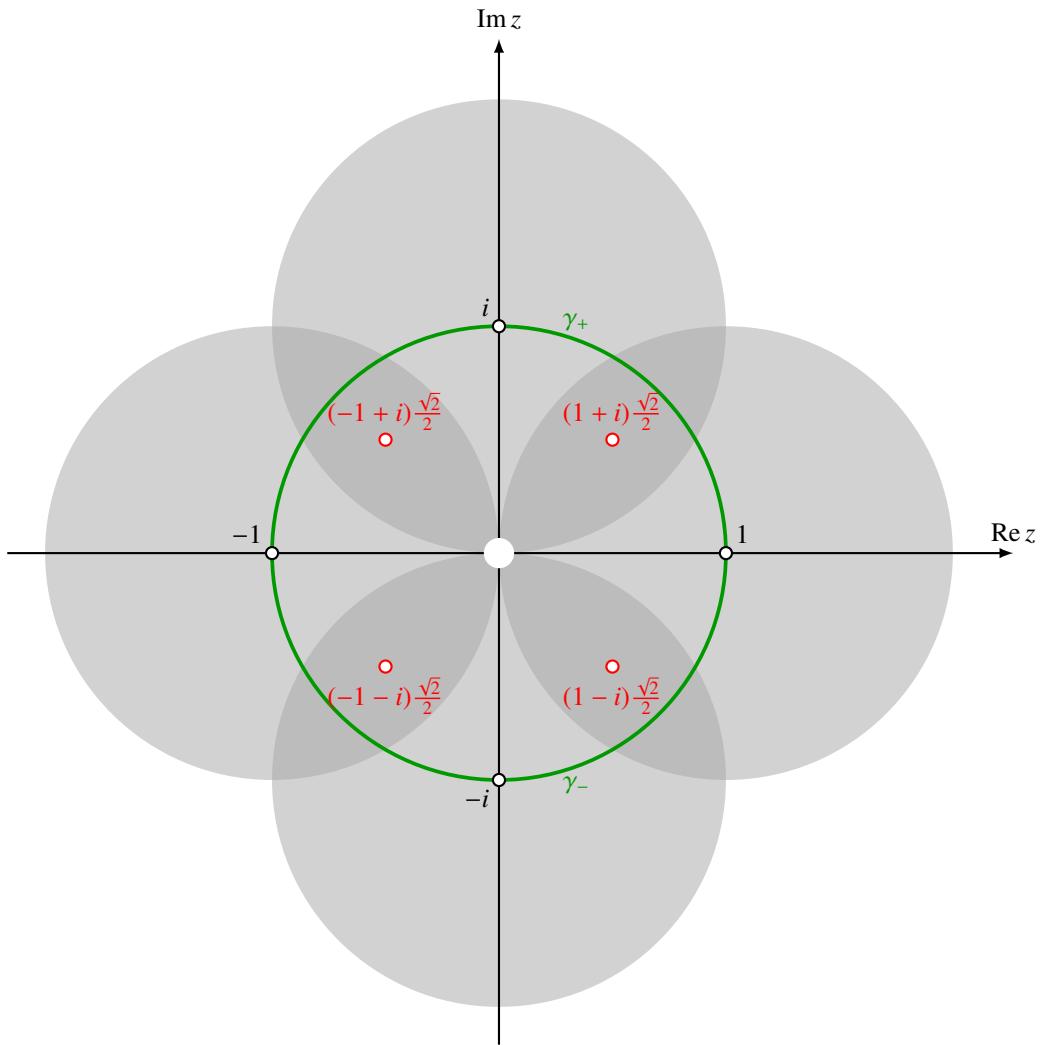


Abbildung 9.5: Analytische Fortsetzung für die Funktion  $\frac{1}{z}$  entlang der Pfade  $\gamma_+$  und  $\gamma_-$ .

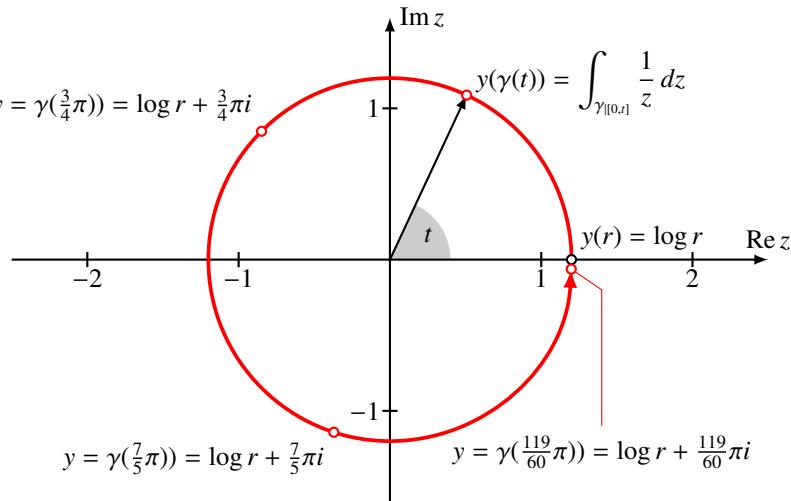


Abbildung 9.6: Analytische Fortsetzung des Logarithmus als Lösung der Differentialgleichung  $y' = \frac{1}{z}$ . Bei einem Umlauf um den Nullpunkt nimmt der Wert von  $y(z)$  um  $2\pi i$  zu.

Sei  $f(z)$  eine komplex differenzierbare Funktion. In jedem beliebigen Punkt des Definitionsbereichs können wir  $f(z)$  in eine Potenzreihe entwickeln, und natürlich auch termweise integrieren. Es gibt also in jedem Punkt  $z_0$  des Definitionsbereichs eine Funktion  $F_{z_0}(z)$ , die  $F'_{z_0}(z) = f(z)$  erfüllt. Durch analytische Fortsetzung entlang einer Kurve  $\gamma$  können wir eine komplex differenzierbare Funktion  $f(z)$  finden, die in einer Umgebung der Kurve  $F'(z) = f(z)$  erfüllt.

Sei andererseits  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve in  $\mathbb{C}$ . Dann können wir die Werte der Stammfunktion im Punkt  $\gamma(b)$  durch

$$F(\gamma(b)) = F(\gamma(a)) + \int_{\gamma} f(z) dz$$

berechnen.

*Beispiel.* Wir bestimmen die Stammfunktion von  $f(z) = 1/z$ . Entlang der reellen Achse weiß man bereits, dass die Stammfunktion der natürliche Logarithmus ist, also  $F(x) = \log x$ . Um diese Stammfunktion auf  $\mathbb{C}$  auszudehnen, verwenden wir einen kreisförmigen Pfad von der reellen Achse bis zum Punkt  $z$ . Liegt  $z$  in der oberen Halbebene, wählen wir einen Pfad in der oberen Halbebene, und umgekehrt. Wir können die Zahl  $z$  in Polarkoordinaten darstellen als  $z = re^{i\varphi}$ . Ein Pfad von der reellen Achse kann mit

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto re^{it\varphi}$$

parametrisiert werden. Der Zuwachs der Stammfunktion entlang dieses Pfades ist

$$F(z) - F(r) = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{it\varphi}} i\varphi e^{it\varphi} dt = i\varphi \int_0^1 dt = i\varphi.$$

Der Wert der Stammfunktion am Anfang der Kurve ist  $\log r$ , somit folgt, dass

$$\log z = \log r + i\varphi$$

(Abbildung 9.6).



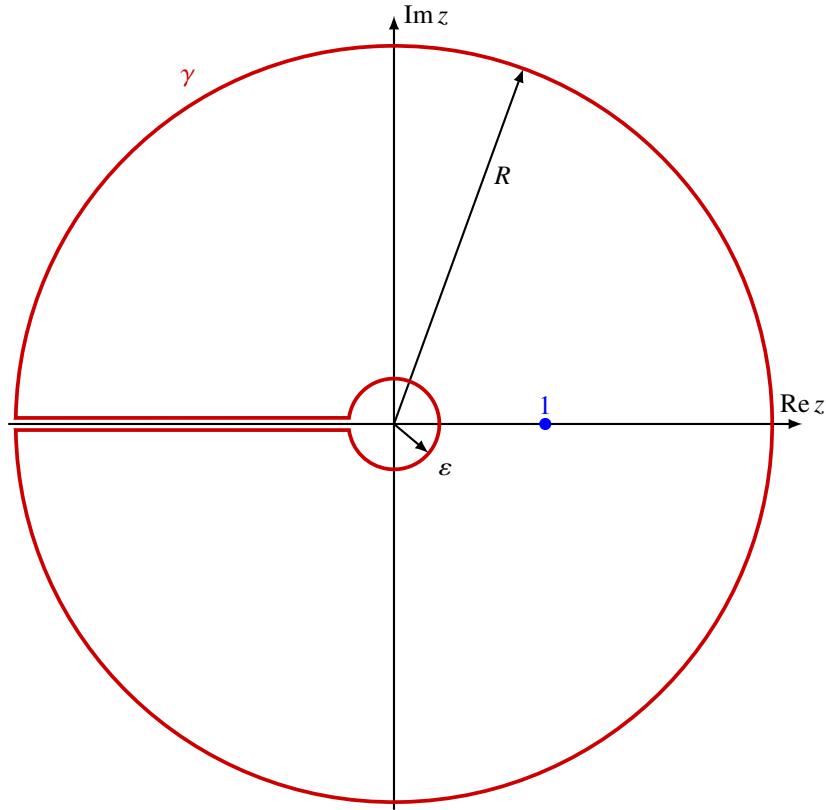


Abbildung 9.7: Pfad zur Auswertung des Integrals (9.9) mit Hilfe des Residuensatzes.

## 9.5 Anwendungen

In diesem Abschnitt wird die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen dazu verwendet, einige früher bereits verwendete oder angedeutete Resultate herzuleiten.

### 9.5.1 Reflektionsformel für die Gamma-Funktion

Die Formel (4.28) stellt eine Beziehung zwischen dem Produkt  $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$  von zwei Werten der Gamma-Funktion in Punkten der komplexen Ebene, die durch Spiegelung an der Geraden  $\text{Re } x = \frac{1}{2}$  auseinander hervorgehen, und einem speziellen Beta-Integral her.

**Satz 9.21.** *Für  $0 < x < 1$  gilt*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (9.8)$$

*Beweis.* In der Formel (4.28) wurde bereits ein Zusammenhang zwischen  $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$  und einem

Beta-Integral hergestellt, konkret

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt.$$

Mit der Substitution  $t = s/(s+1)$ , die bereits für die Herleitung der Formel (4.30) verwendet wurde, ergibt sich

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1} ds.$$

Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir den Cauchy-Integralsatz, um das Integral

$$I = \oint_\gamma \frac{z^{x-1}}{1-z} dz \quad (9.9)$$

zu berechnen. Darin hat die Funktion im Zähler des Integranden  $f(z) = z^{x-1}$  nur außerhalb der negativen reellen Achse einen wohldefinierten Wert. In Polarkoordinaten  $z = re^{i\varphi}$  verwenden wir den Hauptwert  $z^{x-1} = r^{x-1} e^{i(x-1)\varphi}$ . Aus dem Cauchy-Integralsatz lesen wir den Wert

$$I = 2\pi i$$

ab.

Das Integral (9.9) kann zerlegt werden in die Integrale

$$I = I_R + I_+ + I_\varepsilon + I_-,$$

wobei  $I_R$  das Integral über den äusseren Kreis vom Radius  $R$  ist,  $I_\varepsilon$  das Integral im Gegenuhrzeigersinn über den inneren Kreis vom Radius  $\varepsilon$ . Die Terme  $I_\pm$  sind die Integrale entlang der negativen reellen Achse, wobei das Pluszeichen für den oberen  $-R$  nach  $-\varepsilon$  gelten soll.

Für die beiden Integrale  $I_R$  und  $I_\varepsilon$  wird die Parametrisierung  $\varphi \mapsto z(\varphi) = re^{i\varphi}$  mit  $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$  verwendet. Das Integral über den Kreis vom Radius  $r$  im Gegenuhrzeigersinn ist

$$I_r = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^{x-1} e^{i(x-1)\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^x e^{ix\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} d\varphi$$

Die beiden Teile  $I_R$  und  $I_\varepsilon$  können wie folgt noch weiter vereinfacht werden:

$$I_R = iR^{x-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix\varphi}}{1/R - e^{i\varphi}} d\varphi$$

$$I_\varepsilon = -i\varepsilon^x \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{ix\varphi}}{1 - \varepsilon e^{i\varphi}} d\varphi,$$

wobei das negative Zeichen bei  $I_\varepsilon$  daher röhrt, dass der kleine Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Für grosse Werte von  $R$  ist das erste Integral beschränkt, aber wegen  $x-1 < 0$  konvergiert der Vorfaktor  $R^{x-1}$  gegen 0 für  $R \rightarrow \infty$ . Ähnlich ist das zweite Integral für kleine  $\varepsilon$  beschränkt, aber  $\varepsilon^x$  konvergiert gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wir können daher

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{x-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(x-1)\varphi}}{1/R - e^{i\varphi}} ie^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$$\text{und } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{-\pi} \frac{\varepsilon^{x-1} e^{i(x-1)\varphi}}{1 - \varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

folgern.

Die anderen zwei Integrale verwenden die Parametrisierung  $z(s) = -s = se^{\pm i\pi}$  mit  $dz = e^{\pm i\pi} ds$ . Damit werden sie

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_R^\varepsilon \frac{s^{x-1} e^{i(x-1)\pi}}{1 - se^{i\pi}} e^{i\pi} ds = \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1} e^{ix\pi}}{1 + s} ds \\ I_- &= \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1} e^{i(x-1)(-\pi)}}{1 - se^{-i\pi}} e^{-i\pi} ds = - \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1} e^{-ix\pi}}{1 + s} ds. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale stimmen bis auf den von  $t$  unabhängigen Faktor  $e^{\pm ix\pi}$  überein, sie können daher zusammengefasst werden zu

$$\begin{aligned} I_+ + I_- &= (e^{ix\pi} - e^{-ix\pi}) \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds = \frac{e^{ix\pi} - e^{-ix\pi}}{2i} \cdot 2i \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds \\ &= 2i \sin(\pi x) \int_\varepsilon^R \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird dies zu

$$I = 2i \sin(\pi x) \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds$$

Zusammen mit dem früher bestimmten Wert  $I = 2\pi i$  folgt

$$2\pi i = 2i \sin(\pi x) \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{1 + s} ds = \Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

### 9.5.2 Der Satz von Carlson

In Abschnitt 4.1 wurde gezeigt, wie die Gamma-Funktion  $\Gamma(x)$  konstruiert werden kann, die in ganzzähligen Argumenten mit der Fakultät zusammenfällt. Es wurde auch gezeigt, dass  $\Gamma(x) + \sin(\pi x)$  eine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft ist. Die Integraldefinition der Gamma-Funktion 4.5 zeigt, dass die Gamma-Funktion holomorph ist. Der folgende Satz von Carlson zeigt jetzt, dass sich zwei solche Lösungen um eine unbeschränkte Funktion unterscheiden müssen.

**Satz 9.22** (Carlson). *Ist  $f(z)$  eine holomorphe Funktion, die für  $\operatorname{Re} z \geq 0$  beschränkt ist und an den Stellen  $z = 1, 2, 3, \dots$  verschwindet. Dann ist  $f(z) = 0$ .*

*Beweis.* Da  $f(1) = f(2) = f(3) = \dots = 0$  ist auch die Funktion

$$g_n(z) = \frac{f(z)}{(z-1)(z-2) \cdot \dots \cdot (z-n)}$$

eine holomorphe Funktion. Für  $|z| > n$  ist jeder Faktor im Nenner betragsmäßig  $> 1$ , also ist  $g_n(z)$  in der rechten Halbebene nicht nur beschränkt, es gilt sogar

$$|g_n(z)| = \frac{|f(z)|}{|z-1| \cdot |z-2| \cdot \dots \cdot |z-n|} \leq \frac{M}{(|z|-n)^n} = O\left(\frac{1}{|z|^n}\right) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

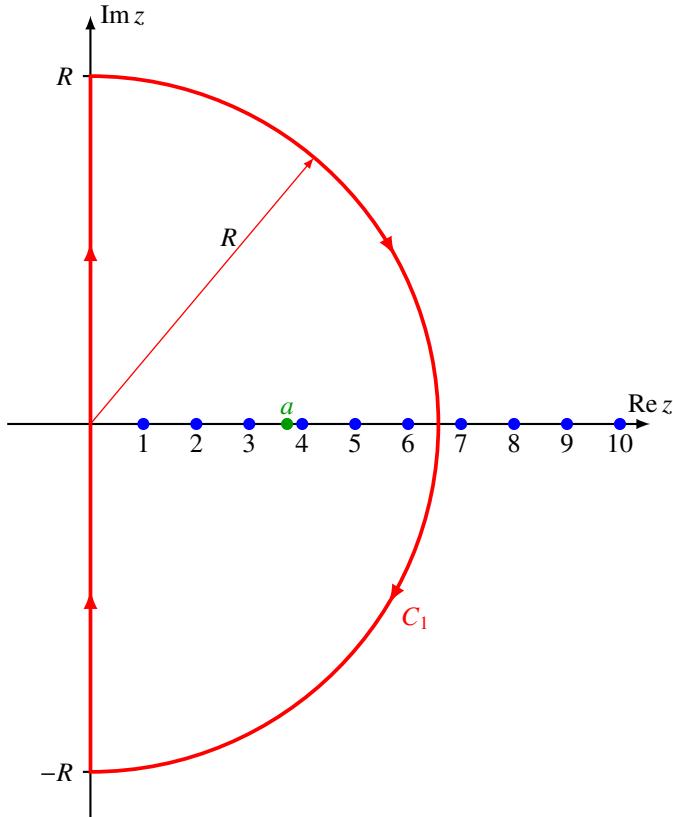


Abbildung 9.8: Pfad zum Beweis des Satzes 9.22 von Carlson.

Mit dem Cauchy-Integralsatz kann man jetzt  $g_n(a)$  für einen Punkt  $a$  in der rechten Halbebene berechnen, er ist

$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g_n(z)}{z-a} dz = \frac{f(a)}{(a-1)(a-2) \cdots (a-n)}, \quad (9.10)$$

wobei  $\gamma$  ein Pfad ist, der  $a$  umschliessen muss.

Als Pfad wählen wir einen Halbkreis  $C_1$  vom Radius  $R$  um den Nullpunkt und das Segment von  $-iR$  bis  $iR$ , dargestellt in Abbildung 9.8. Das Integral über den Halbkreis kann durch

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)(z-1)(z-2) \cdots (z-n)} dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z|=R \wedge \operatorname{Re} z \geq 0} \frac{M}{|z-a| \cdot |z-1| \cdot |z-2| \cdots |z-n|} \pi R \\ &\leq \frac{M\pi R}{(R-n)^n} \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Die rechte Seite geht für  $n > 1$  gegen 0 wenn  $R \rightarrow \infty$  geht. Das Integral über den Kreisbogen  $C_1$  trägt also nichts bei zum Integral (9.10)

Es bleibt das Integral über die imaginäre Achse, es ist

$$g_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{(it-a)(it-1)(it-2) \cdots (it-n)} i dt$$

$$|g_n(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(it)|}{\sqrt{(a^2 + t^2)(1^2 + t^2)(2^2 + t^2) \cdots (n^2 + t^2)}} dt.$$

Im Nenner kann man in den Faktoren  $(k^2 + t^2)$  mit  $k > 1$  das  $k^2$  weglassen, was den Nenner kleiner und damit den ganzen Ausdruck grösser macht. Es bleibt dann nur noch der erste Term, in dem wir  $a > 1$  durch 1 ersetzen können. Insgesamt bekommen wir so die Abschätzung

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}} dt = \frac{M}{2\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{M}{2n!}. \quad (9.11)$$

Um eine Abschätzung für  $f(a)$  zu erhalten, muss man jetzt noch den Nenner von (9.10) abschätzen. Da  $a$  nicht ganzzahlig ist, ist die nächstkleiner Ganzzahl  $[a] \neq a$ . Das Produkt im Nenner von (9.10) kann daher aufgespalten werden in die Faktoren  $(a - k)$  mit  $k < a$  und die Faktoren mit  $k > a$ . Den Betrag der Faktoren mit  $k < a$  kann man vergrössern, indem man  $a$  durch  $[a] + 1$  ersetzt, man erhält

$$|(a-1)(a-2)\cdots(a-[a])| \leq ([a]+1-1)([a]+1-2)\cdots([a]+1-[a]) = [a]!.$$

Die nachfolgenden Faktoren kann man vergrössern, indem man  $a$  durch  $[a]$  ersetzt, was

$$\begin{aligned} |(a - ([a] + 1))(a - ([a] + 2))\cdots(a - n)| &\leq |([a] - ([a] + 1))([a] - ([a] + 2))\cdots([a] - n)| \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot |n - [a]| = (n - [a])!. \end{aligned}$$

ergibt. Aus (9.10) und der Abschätzung (9.11) für  $|g_n(a)|$  erhält man jetzt

$$|f(a)| = |(a-1)(a-2)\cdots(a-n)| \cdot |g_n(a)| \leq \frac{[a]! (n - [a])!}{n!} \frac{M}{2} = \frac{M}{2} \binom{n}{[a]}^{-1}.$$

Für  $n > [a]$  ist der Binomialkoeffizient auch  $> n$  und somit

$$|f(a)| \leq \frac{M}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit ist gezeigt, dass  $f(a) = 0$  ist für alle reellen  $a > 1$ . A fortiori verschwinden auch alle Ableitungen von  $f$  und damit damit auch die zugehörige Potenzreihe, also  $f(z) = 0$ .  $\square$

### 9.5.3 Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit Singularitäten

Die Potenzreihenmethode hat ermöglicht, mindestens eine Lösung gewisser linearer Differentialgleichungen zu finden. Bei Differentialgleichungen wie der Besselschen Differentialgleichung, deren Koeffizienten Singularitäten aufweisen, konnte aber nur eine Lösung gefunden werden, während die Theorie verlangt, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei linear unabhängige Lösungen haben muss.

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, warum dies nicht möglich war und wie diese Schwierigkeit mit Hilfe der analytischen Fortsetzung überwunden werden kann.

#### Differentialgleichungen mit Singularitäten

Mit der Besselschen Differentialgleichung (5.19) ist es nicht möglich, die zweite Ableitung  $y''(0)$  an der Stelle  $x = 0$  zu bestimmen. Die Differentialgleichung kann an der Stelle  $x = 0$  nicht nach  $y''$  aufgelöst werden. Wenn man die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\alpha^2}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

erster Ordnung umwandelt, zeigt sich an der Stelle  $x = 0$  eine Singularität in der Matrix, die Ableitung kann also für  $x = 0$  nicht bestimmt werden. In einer Umgebung von  $x = 0$  erfüllt die Differentialgleichung die Voraussetzungen bekannter Existenz- und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen nicht.

Ein ähnliches Problem tritt bei jeder hypergeometrischen Differentialgleichung auf. Diese werden gemäss Abschnitt 5.4 aus den Differentialoperatoren

$$D_a = z \frac{d}{dz} + a$$

zusammengesetzt. Die Ableitung höchster Ordnung eines Produktes solcher Operationen ist

$$D_{a_1} \cdots D_{a_p} = z^p \frac{d^p}{dz^p} + \text{Ableitungen niedrigerer Ordnung.}$$

Dies zeigt, dass für  $p > 0$  oder  $q > 0$  ein Faktor  $x$  bei der Ableitung höchster Ordnung unvermeidlich ist, die Differentialgleichung kann also wieder nicht nach dieser Ableitung aufgelöst werden und erfüllt die Voraussetzungen der Existenz- und Eindeutigkeitssätze in einer Umgebung von  $x = 0$  wieder nicht.

Die Besselsche Differentialgleichung hat auch nicht die Form  $y'' + p(x)xy' + q(x)y = 0$ , die der Theorie der Indexgleichung zugrunde lag. Daher kann es auch keine Garantie geben, dass die Methode der verallgemeinerten Potenzreihen zwei linear unabhängige Lösungen liefern kann. Tatsächlich wurde für ganzzahlige  $n$  wegen  $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$  nur eine Lösung statt der erwarteten zwei linear unabhängigen Lösungen gefunden.

Sind die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichungen wie in den genannten Beispielen singulär bei  $x = 0$ , kann man auch nicht erwarten, dass die Lösungen singulär sind. Dies war schliesslich die Motivation, einen Lösungsansatz mit einer verallgemeinerten Potenzreihe zu versuchen. Mit den Funktion  $x^\alpha$  lässt sich bereits eine recht grosse Klasse von Singularitäten beschreiben, aber es ist nicht klar, welche weiteren Arten von Singularitäten berücksichtigt werden sollten. Dies soll im Folgenden erklärt werden.

## Der Lösungsraum einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

Eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat lokal einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum als Lösungsraum.

**Definition 9.23.** Sei

$$\sum_{k=0}^n a_k(x)y^{(n)}(x) = 0 \quad (9.12)$$

eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit analytischen Koeffizienten und  $x_0 \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$\mathbb{L}_{x_0} = \left\{ y(x) \mid \begin{array}{l} y \text{ ist Lösung der Differentialgleichung} \\ (9.12) \text{ in einer Umgebung von } x_0 \end{array} \right\}$$

der Lösungsraum der Differentialgleichung (9.12). Wenn der Punkt  $x_0$  aus dem Kontext klar ist, kann er auch weggelassen werden:  $\mathbb{L}_{x_0} = \mathbb{L}$ .

### Analytische Fortsetzung auf einem Weg um 0

Die betrachteten Differentialgleichungen haben holomorphe Koeffizienten, Lösungen der Differentialgleichung lassen sich daher immer in die komplexe Ebene fortsetzen, solange man die Singularitäten der Koeffizienten vermeidet. Hat eine Funktion  $y(z)$  eine Laurent-Reihe

$$y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

dann ist sie automatisch in einer Umgebung von 0 definiert außer in 0. Die analytische Fortsetzung entlang eines Pfades, der 0 umschließt, ist die Funktion  $y(z)$  selbst.

Für die Wurzelfunktion  $y(z) = z^{\frac{1}{n}}$  ist dies nicht möglich. Die analytische Fortsetzung von  $\sqrt[n]{x}$  auf der positiven reellen Achse entlang einer Kurve, die 0 umschließt, produziert die Funktion

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}},$$

die für  $\varphi = 2\pi$  zu  $e^{i\frac{2\pi}{n}} \sqrt[n]{x}$  wird. Verallgemeinerte Potenzreihen als Lösungen zeigen daher, dass die analytische Fortsetzung der Lösung entlang eines Pfades um eine Singularität nicht mit der Lösung übereinstimmen muss. Das Studium dieser analytischen Fortsetzung dürfte daher zusätzliche Informationen über die Lösung hervorbringen.

**Definition 9.24.** Der Fortsetzungsoperator  $\mathcal{A}$  ist der lineare Operator, der eine in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^+$  analytische Funktion  $f(x)$  entlang eines geschlossenen Weges fortsetzt, der 0 im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Die Einschränkung der analytischen Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^+$  wird mit  $\mathcal{A}f(x)$  bezeichnet.

Die obengenannten Beispiele lassen sich mit dem Operator  $\mathcal{A}$  als

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z^n &= z^n & n \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{A}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \\ \mathcal{A}z^\varrho &= e^{2\pi i \varrho} z^\varrho \end{aligned}$$

schreiben.

### Rechenregeln für die analytische Fortsetzung

Der Operator  $\mathcal{A}$  ist ein Algebrahomomorphismus, d. h. für zwei analytische Funktionen  $f$  und  $g$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda f + \mu g) &= \lambda \mathcal{A}f + \mu \mathcal{A}g \\ \mathcal{A}(fg) &= (\mathcal{A}f)(\mathcal{A}g) \end{aligned}$$

für beliebige  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Ist  $f$  eine in ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion, dann lässt sie sich mit Hilfe einer Potenzreihe berechnen. Der Wert  $f(g(z))$  entsteht durch Einsetzen von  $g(z)$  in die Potenzreihe. Analytische Fortsetzung mit  $\mathcal{A}$  reproduziert jeden einzelnen Term der Potenzreihe, es folgt  $\mathcal{A}f(g(z)) = f(\mathcal{A}g(z))$ . Ebenso folgt auch, dass der Operator  $\mathcal{A}$  mit der Ableitung vertauscht, dass also

$$\frac{d^n}{dz^n}(\mathcal{A}f) = \mathcal{A}(f^{(n)}).$$

## Analytische Fortsetzung von Lösungen einer Differentialgleichung

Wir untersuchen jetzt die Wirkung des Operators  $\mathcal{A}$  auf den Lösungsraum  $\mathbb{L}$  einer Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten, die in einer Umgebung von 0 definiert sind. Auf den Koeffizienten wirkt  $\mathcal{A}$  als die Identität. Ist  $y(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung, dann gilt

$$0 = \mathcal{A} \left( \sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(n)}(x) \right) = \sum_{k=0}^n (\mathcal{A} a_k)(x) \cdot (\mathcal{A} y)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \cdot (\mathcal{A} y)^{(n)}(x),$$

somit ist  $\mathcal{A}y$  ebenfalls eine Lösung. Wir schliessen daraus, dass  $\mathcal{A}$  eine lineare Abbildung  $\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  ist.

Der Lösungsraum einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ist  $n$ -dimensional. Nach Wahl einer Basis des Lösungsraums kann der Operator  $\mathcal{A}$  mit Hilfe einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  beschrieben werden. Sei  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$  eine Basis des Lösungsraums, dann kann  $\mathcal{A}w_j$  wieder eine Lösung der Differentialgleichung und kann daher geschrieben werden als Linearkombination

$$\mathcal{A}w_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} w_k \quad (9.13)$$

der Funktionen in  $\mathcal{W}$ .

Die Matrix  $A$  mit den Einträgen  $a_{jk}$  kann durch Wahl einer geeigneten Basis in besonders einfache Form gebracht. Wir führen diese Diskussion im folgenden nur für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung  $n = 2$ .

### Fall A diagonalisierbar: verallgemeinerte Potenzreihen

In diesem Fall kann man die Lösungsfunktionen  $w_1$  und  $w_2$  so wählen, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

diagonal wird mit Eigenwerten  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ . Dies bedeutet, dass  $\mathcal{A}w_j = \lambda_j w_j$ . Wir schreiben

$$\varrho_j = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_j.$$

Der Logarithmus ist nicht eindeutig, er ist nur bis auf ein Vielfaches von  $2\pi i$  bestimmt. Folglich aus auch  $\varrho_j$  nicht eindeutig bestimmt, eine andere Wahl des Logarithmus ändert  $\varrho_j$  aber um eine ganze Zahl.

Die Funktion  $z^{\varrho_j}$  wird unter der Wirkung von  $\mathcal{A}$  zu

$$\mathcal{A}z^{\varrho_j} = e^{2\pi i \varrho_j} z^{\varrho_j} = e^{\log \lambda_j} z^{\varrho_j} = \lambda_j z^{\varrho_j}.$$

Auf den Funktionen  $z^{\varrho_j}$  und  $w_j$  wirkt der Operator  $\mathcal{A}$  also die gleich durch Multiplikation mit  $\lambda_j$ . Deren Quotient

$$f(z) = \frac{w_j(z)}{z^{\varrho_j}} \quad \text{erfüllt} \quad \mathcal{A}f = \frac{\mathcal{A}w_j}{\mathcal{A}z^{\varrho_j}} = \frac{\lambda_j w_j}{\lambda_j z^{\varrho_j}} = \frac{w_j}{z^{\varrho_j}} = f.$$

Die Funktion  $f$  kann daher als Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

geschrieben werden. Die Lösung  $w_2(z)$  muss daher die Form

$$w_j(z) = z^{\varrho_j} f(z) = z^{\varrho_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad (9.14)$$

haben, also die einer verallgemeinerten Potenzreihe. Auch hier zeigt sich, dass die Wahl des Logarithmus in der Definition von  $\varrho_j$  unbedeutend ist, sie äussert sich nur in einer Verschiebung der Koeffizienten  $a_k$ .

Falls der Operator  $\mathcal{A}$  also diagonalisierbar ist, dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung in der Form einer verallgemeinerten Potenzreihe.

### Fall A nicht diagonalisierbar: logarithmische Lösungen

Falls die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar ist, hat sie nur einen Eigenwert  $\lambda$  und kann durch geeignete Wahl einer Basis in Jordansche Normalform

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A}w_1 &= \lambda w_1 + w_2 \\ \mathcal{A}w_2 &= \lambda w_2. \end{aligned}$$

Die Funktion  $w_2$  hat unter  $\mathcal{A}$  die gleichen Eigenschaften wie im diagonalisierbaren Fall, man kann also wieder schliessen, dass  $w_2$  durch eine verallgemeinerte Potenzreihe mit

$$\varrho = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda$$

dargestellt werden kann.

Für den Quotienten  $w_1/w_2$  findet man jetzt das Bild

$$\mathcal{A} \frac{w_1}{w_2} = \frac{\mathcal{A}w_1}{\mathcal{A}w_2} = \frac{\lambda w_1 + w_2}{\lambda w_2} = \frac{w_1}{w_2} + \frac{1}{\lambda} \quad (9.15)$$

Das Verhalten von  $w_1$  unter  $\mathcal{A}$  in (9.15) ist dasselbe wie bei  $\log(z)/\lambda$ , denn

$$\mathcal{A} \frac{\log(z)}{\lambda} = \frac{\log(z)}{\lambda} + 1.$$

Die Differenz  $w_1 - \log(z)/\lambda$  wird bei der analytischen Fortsetzung zu

$$\mathcal{A} \left( \frac{w_1}{w_2} - \frac{\log(z)}{\lambda} \right) = \mathcal{A} \frac{w_1}{w_2} - \mathcal{A} \frac{\log(z)}{\lambda} = \frac{w_1}{w_2} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\log(z)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{w_1}{w_2} - \frac{\log(z)}{\lambda}.$$

Die Differenz ist daher wieder als Laurent-Reihe

$$\frac{w_1}{w_2} - \frac{\log(z)}{\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$$

darstellbar, was nach  $w_1$  aufgelöst

$$w_1(z) = \frac{1}{\lambda} \log(z) w_2(z) + w_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$$

ergibt. Da  $w_2$  eine verallgemeinerte Potenzreihe ist, kann man dies auch als

$$w_1(z) = c \log(z) w_2(z) + z^0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (9.16)$$

schreiben, wobei Konstanten  $c$  und  $c_k$  noch bestimmt werden müssen. Setzt man (9.16) in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, verschwindet der  $\log(z)$ -Term und für die verbleibenden Koeffizienten kann die bekannte Methode des Koeffizientenvergleichs verwendet werden.

### Bessel-Funktionen zweiter Art

Im Abschnitt 5.3.2 waren wir nicht in der Lage, für ganzahlige  $\alpha$  zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung zu finden. Die vorangegangenen Ausführungen erklären dies: der Ansatz als verallgemeinerte Potenzreihe konnte die Singularität nicht wiedergeben. Inzwischen wissen wir, dass wir nach einer Lösung mit einer logarithmischen Singularität suchen müssen.

Um dies nachzuprüfen, setzen wir den Ansatz

$$y(x) = \log(x) J_n(x) + z(x)$$

in die Besselsche Differentialgleichung ein. Dazu benötigen wir erst die Ableitungen von  $y(x)$ :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{x} J_n(x) + \log(x) J'_n(x) + z'(x) \\ xy'(x) &= J_n(x) + x \log(x) J'_n(x) + x z'(x) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} J_n(x) + \frac{2}{x} J'_n(x) + \log(x) J''_n(x) + z''(x) \\ x^2 y''(x) &= -J_n(x) + 2x J'_n(x) + x^2 \log(x) J''_n(x) + x^2 z''(x). \end{aligned}$$

Die Wirkung des Bessel-Operators auf  $y(x)$  ist

$$\begin{aligned} By &= x^2 y'' + xy' + x^2 y \\ &= \log(x) (\underbrace{x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + x^2 J_n(x)}_{= n^2 J_n(x)} - J_n(x) + 2x J'_n(x) + J_n(x) + x z'(x) + x^2 z''(x)) \\ &= n^2 \log(x) J_n(x) + 2x J_n(x) + x^2 z(x) + x z'(x) + x^2 z''(x) \end{aligned}$$

Damit  $y(x)$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $n^2$  wird, muss dies mit  $n^2 y(x)$  übereinstimmen, also

$$n^2 \log(x) J_n(x) + 2x J_n(x) + x^2 z(x) + x z'(x) + x^2 z''(x) = n^2 \log(x) J_n(x) + n^2 z(x).$$

Die logarithmischen Terme heben sich weg und es bleibt

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (x^2 - n^2) z(x) = -2x J_n(x).$$

Eine Lösung für  $z(x)$  kann mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes gefunden werden. Sie ist aber nur bis auf einen Faktor festgelegt. Tatsächlich kann man aber auch eine direkte Definition geben.

**Definition 9.25.** Die Bessel-Funktionen zweiter Art der Ordnung  $\alpha$  sind die Funktionen

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi}. \quad (9.17)$$

Für ganzzahliges  $\alpha$  verschwindet der Nenner in (9.17), daher ist

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{d}{d\alpha} J_\alpha(x) \Big|_{\alpha=n} + (-1)^n \frac{d}{d\alpha} J_\alpha(x) \Big|_{\alpha=-n} \right).$$

Die Funktionen  $Y_\alpha(x)$  sind Linearkombinationen der Lösungen  $J_\alpha(x)$  und  $J_{-\alpha}(x)$  und damit automatisch auch Lösungen der Besselschen Differentialgleichung. Dies gilt auch für den Grenzwert im Falle ganzzahliger Ordnung  $\alpha$ . Da  $J_\alpha(x)$  durch eine Reihenentwicklung definiert ist, kann man diese Termweise nach  $\alpha$  ableiten und damit auch eine Reihendarstellung von  $Y_n(x)$  finden. Nach einiger Rechnung findet man:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left( \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} + \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+n} \end{aligned}$$

(siehe auch [buch:specialfunctions]).

## Übungsaufgaben

**9.1.** Verwenden Sie die Eulersche Spiegelungsformel um

$$S_n = \sum_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{1+2k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)$$

zu berechnen.

*Lösung.* Zunächst beachten wir, dass

$$1 - \frac{1+2k}{2} = \frac{1-2k}{2}.$$

Dies bedeutet, dass

$$\Gamma\left(\frac{1+2k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+2k}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+2k}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi(1+2k)}{2}} = \frac{\pi}{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

nach der Eulerschen Spiegelungsformel. Das Argument der Sinus-Funktion ist ein ungerades Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$ , die Sinus-Funktion hat dort die Werte  $\pm 1$ , genauer

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k.$$

Damit wird die gesuchte Summe:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{(-1)^k} = -\pi + \pi - \pi + \cdots + (-1)^n \pi = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\pi & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$
○

**9.2.** Verwenden Sie die Legendresche Verdoppelungsformel und die Eulersche Spiegelungsformel für die Gamma-Funktion, um  $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})$  zu berechnen und verifizieren Sie, dass beide Wege das gleiche Resultat geben.

*Lösung.* Aus der Spiegelungsformel für  $x = \frac{1}{4}$  folgt

$$\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{1/\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

Andererseits ist  $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ , so dass aus der Legendreschen Verdoppelungsformel folgt

$$\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = 2^{1-2\cdot\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}\Gamma(2 \cdot \frac{1}{4}) = \sqrt{2} \sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\pi.$$

Offensichtlich stimmen die beiden Resultate überein. ○



# Kapitel 10

## Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen sind eine besonders ergiebige Quelle für Anwendungen spezieller Funktionen. Die Separationsmethode zum Beispiel für die Wellengleichung auf gewissen, besonders einfachen Gebieten wie Rechtecken, Kreisscheiben oder Kugel führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen, deren Lösungen spezielle Funktionen sind.

### 10.1 Gleichungen und Randbedingungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind immer auf einem Intervall als Definitionsgebiet definiert. Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen, die verschiedene partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Variablen involvieren, das Definitionsgebiet ist daher immer eine höherdimensionale Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sowohl das Gebiet wie auch dessen Rand können wesentlich komplexer sein. Eine sorgfältige Definition ist unabdingbar, um Widersprüchen vorzubeugen.

#### 10.1.1 Gebiete, Differentialoperatoren, Randbedingungen

In diesem Abschnitt sollen die Begriffe geklärt werden, die zur korrekten Formulierung eines partiellen Differentialgleichungsproblems notwendig sind.

##### Gebiete

Gewöhnliche Differentialgleichungen haben nur eine unabhängige Variable, die gesuchte Lösungsfunktion ist auf eine Intervall in  $\mathbb{R}$  definiert. Die Lösungsfunktion einer partiellen Differentialgleichung ist auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert, dies ermöglicht wesentlich vielfältigere und kompliziertere Situationen.

**Definition 10.1.** Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , d. h. für jeden Punkt  $x \in G$  gibt es eine kleine Umgebung  $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \varepsilon\}$ , die ebenfalls in  $G$  enthalten ist, also  $U_\varepsilon(x) \subset G$ .

##### Differentialoperatoren

Eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion ist eine Beziehung zwischen den Werten der Funktion und ihrer Ableitung in jedem Punkt des Definitionsintervalls. Eine partielle Differen-

tialgleichung ist entsprechend eine Beziehung zwischen den Werten einer Funktion und ihren partiellen Ableitungen. Eine Funktion von mehreren Variablen hat sehr viel mehr partielle Ableitungen, bereits partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind daher sehr viel vielfältiger. Bei höheren partiellen Ableitungen kommen noch die zusätzliche Bedingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

hinzu, die für jedes Paar von Indizes  $i, j$  ebenfalls erfüllt sein müssen.

In diesem Kapitel betrachten wir ausschliesslich lineare Differentialgleichungen. Die Funktionswerte und partiellen Ableitungen lassen sich daher in der Form eines Operators

$$L = a + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

schreiben. Die Koeffizienten  $a, b_i, c_{ij}$  können dabei durchaus auch Funktionen der unabhängigen Variablen sein.

### Laplace-Operator

Der *Laplace-Operator* hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Er zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, dass eine beliebige Translation oder Drehung des Koordinatensystems den Wert von  $\Delta u$  nicht ändert. Man könnte sagen, der Laplace-Operator ist symmetrisch bezüglich aller Bewegungen des Raumes.

### Wellengleichung

Da die physikalischen Gesetze invariant sein müssen unter solchen Bewegungen, ist zu erwarten, dass der Laplace-Operator in partiellen Differentialgleichungen. Als Beispiel betrachten wir die Ausbreitung einer Welle, welche sich in einem Medium mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Ist  $u(x, t)$  die Auslenkung der Welle im Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  zur Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , dann erfüllt die Funktion  $u(x, t)$  die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u. \quad (10.1)$$

In dieser Gleichung treten nicht nur die partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten auf, die der Laplace-Operator miteinander verknüpft. Die Funktion  $u(x, t)$  ist definiert auf einem Gebiet in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  mit den Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n, t)$ . Der Gleichung (10.1) ist daher eigentlich die Gleichung

$$\square u = 0 \quad \text{mit} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

wird. Der Operator  $\square$  heisst auch d'Alembert-Operator.

## Randbedingungen

Die Differentialgleichung oder der Differentialoperator legen die Lösung nicht fest. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dazu die Spezifikation geeigneter Randbedingungen nötig.

**Definition 10.2.** Eine Randbedingung für das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $F \subset \partial\Omega$  sowie eine auf  $F$  definierte Funktion  $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt eine Dirichlet-Randbedingung, wenn  $u(x) = f(x)$  für  $x \in F$ . Sie erfüllt eine Neumann-Randbedingung, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(x) \quad \text{für } x \in F.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{d}{dt} u(x + tn) \Big|_{t=0} = \text{grad } u \cdot n$$

die Normalableitung, die Richtungsableitung in Richtung des Vektors  $n$ , der senkrecht ist auf dem Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$ .

Die Vorgabe nur von Ableitungen kann natürlich die Lösung  $u(x)$  einer linearen partiellen Differentialgleichung nicht eindeutig festlegen, dazu ist noch mindestens ein Funktionswert notwendig. Die Vorgabe von anderen Ableitungen in Richtungen tangential an den Rand liefert keine neue Information, denn ausgehend von dem einen Funktionswert auf dem Rand kann man durch Integration entlang einer Kurve auf dem Rand eine Neumann-Randbedingung konstruieren, die die gleiche Information beinhaltet wie Anforderungen an die tangentialen Ableitungen. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind daher die einzigen sinnvollen linearen Randbedingungen.

## 10.2 Separationsmethode

Die Existenz der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist unter einigermaßen milden Bedingungen in der Nähe der Anfangsbedingung garantiert. Ausserdem steht eine ganze Reihe von Lösungsverfahren zur Verfügung, nicht zuletzt das Potenzreihenverfahren, welches in Kapitel 5 beschrieben wurde. Das Ziel dieses Abschnitts ist eine Methode vorzustellen, mit der partielle Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

### 10.2.1 Separationsansatz

Die Separationsmethode ist motiviert durch die Beobachtung, dass in vielen partiellen Differentialgleichungen die Ableitungen nach verschiedenen Variablen sich in verschiedenen Termen befinden und sich daher algebraisch trennen lassen. Für eine beliebige Funktion bringt das nicht viel, aber für Funktionen mit einer speziellen Form kann man daraus eine Vereinfachung ableiten.

#### Prinzip

Die Grundlage der Separationsmethode ist die Idee, die Differentialgleichung in zwei Teile aufzuteilen, die keine gemeinsamen Variablen enthalten. Eine partielle Differentialgleichungen in einem zweidimensionalen Gebiet mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  soll so umgeformt werden, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nur die Variable  $x$  vorkommt und auf der rechten nur die Variable  $y$ . Es entsteht also eine Gleichung der Form

$$F(x) = G(y). \tag{10.2}$$

Wie so etwas gehen gehen kann wird weiter unten untersucht.

Betrachtet hält man in der Gleichung (10.2) die Variable  $x$  fest, steht links eine fest Zahl, schreiben wir sie  $\lambda$ . Die Gleichung wird also zu

$$\lambda = G(y),$$

sie muss für alle  $y$  gelten. Es folgt dann, dass die rechte Seite gar nicht von  $y$  abhängen kann. Für jeden Wert von  $y$  muss  $G$  den gleichen Wert  $\lambda$  geben.

Wenn aber  $G$  konstant ist und immer den Wert  $\lambda$  ergibt, dann ist die Gleichung (10.2) auch gleichbedeutend mit der Gleichung

$$F(x) = \lambda,$$

$F$  muss also auch konstant sein.

Die algebraische Trennung der beiden Variablen  $x$  und  $y$  hat also zur Folge, dass die beiden Seiten der Gleichung gar nicht variiert können, beide Seiten müssen konstant sein. Die Konstante ist allerdings nicht bekannt und muss im Laufe der weiteren Lösungsschritte der Gleichung bestimmt werden.

Die Überlegungen funktionieren auch für eine grössere Zahl von Variablen. Entscheidend ist nur, dass die einen Variablen, zum Beispiel  $x_1, \dots, x_k$ , nur auf der linken Seite vorkommen und die anderen, wir nennen sie  $x_{k+1}, \dots, x_n$  nur auf der rechten. Die Gleichung hat dann die Form

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (10.3)$$

Setzt man feste Werte von  $x_1, \dots, x_k$  ein, ist die linke Seite eine Zahl, die wir wieder  $\lambda$  nennen können. Es muss also für alle  $x_{k+1}, \dots, x_n$  gelten, dass  $G(x_{k+1}, \dots, x_n) = \lambda$  ist. Daher ist  $G$  eine Konstante, sie ist gar nicht von den Variablen abhängig. Wenn aber die rechte Seite konstant ist, dann muss auch für alle  $x_1, \dots, x_k$  gelten, dass  $F(x_1, \dots, x_k) = \lambda$  ist, die linke Seite kann also auch nicht variiert.

### Prinzip 10.3. In einer Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

in der die linke Seite nur von  $x_1, \dots, x_k$  abhängt und die rechte nur von  $x_{k+1}, \dots, x_n$  müssen beide Seiten konstant sein.

### Ein Beispiel

In der Differentialgleichung

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^4$$

kommen die Ableitungen nach  $x$  und  $y$  in verschiedenen Termen vor. Wir versuchen daher, auch die Lösungsfunktion als Summe

$$u(x, y) = X(x) + Y(y)$$

von Termen zu schreiben, die nur von jeweils einer Variablen abhängen. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$x \frac{\partial}{\partial x} (X(x) + Y(y)) - y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X(x) + Y(y)) = xX'(x) - y^2 Y''(y) = y^4.$$

Indem man den Term mit  $y$  auf die rechte Seite schafft, findet man die Gleichung

$$xX'(x) = y^2 Y'(y) + y^4,$$

in der die Variablen  $x$  und  $y$  separiert sind. Es folgt, dass beide Seiten konstant sein müssen, es gibt also eine Konstante  $\lambda$  derart, dass

$$xX'(x) = \lambda \quad \text{und} \quad y^2 Y''(y) + y^4 = \lambda.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich als Differentialgleichungen in der üblicheren Form als

$$\begin{aligned} X'(x) &= \frac{\lambda}{x} & \Rightarrow & \quad X(x) = \int \frac{\lambda}{x} dx = \lambda \log x + C \\ Y''(y) &= \frac{\lambda - y^4}{y^2} & \Rightarrow & \quad Y'(y) = \int \frac{\lambda - y^4}{y^2} dy = -\frac{\lambda}{y} - \frac{y^3}{3} + D \\ & & \Rightarrow & \quad Y(y) = \int Y'(y) dy = -\lambda \log y - \frac{y^4}{12} + Dy + E \end{aligned}$$

schreiben und im Falle von  $X(x)$  mit einem Integral lösen.  $Y(y)$  benötigt zwei Integrationen, ist aber ansonsten nicht schwieriger zu bestimmen.

Das Beispiel zeigt, dass ein Separationsansatz ermöglicht, eine partielle Differentialgleichung in mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen zu zerlegen, eine für jede Variable, und zu lösen.

### Separationsansatz und Randbedingungen

Die im Beispiel gewählte Aufteilung der Lösungsfunktion in eine Summe macht es sehr schwierig, Randbedingungen der partiellen Differentialgleichungen in Randbedingungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu übersetzen.

Als Beispiel dieser Schwierigkeit betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = au$$

auf dem Gebiet  $\Omega = [0, a] \times [0, b] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a \wedge 0 < y < b\}$  mit den Randwerten  $u(x, y) = 0$  für Punkte auf dem Rand von  $\Omega$ . Genauer:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0 & \text{für } 0 < y < b \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0 & \text{für } 0 < x < a. \end{aligned}$$

Ein Ansatz der Form  $u(x, y) = X(x) + Y(y)$  bedeutet für die Randwerte  $u(x, y) = 0$ , dass auf dem Rand  $X(x) = -Y(y)$  gelten muss. Das bedeutet aber, dass  $X(0) = -Y(b)$ ,  $Y$  müsste also konstant sein.

Ein Produktansatz löst das Problem. Wir verwenden stattdessen einen Produktansatz  $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ , wobei die Funktionen  $X(x)$  und  $Y(y)$  nicht konstant sein sollen. Die Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} u(0, y) &= X(0)Y(y) = 0 & \Rightarrow & \quad X(0) = 0 \\ u(a, y) &= X(a)Y(y) = 0 & \Rightarrow & \quad X(a) = 0 \\ u(x, 0) &= X(x)Y(0) = 0 & \Rightarrow & \quad Y(0) = 0 \\ u(x, b) &= X(x)Y(b) = 0 & \Rightarrow & \quad Y(b) = 0. \end{aligned}$$

Der Produktansatz ermöglicht also, die Randbedingungen für die Funktion  $u(x, y)$  in Randbedingungen für die Funktionen  $X(x)$  oder  $Y(y)$  umzuwandeln.

## 10.2.2 Eigenwertproblem

Viele partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik sind zeitabhängig, aber das räumliche Gebiet, in dem sie definiert sind, ist nicht von der Zeit abhängig. Dies

### Wellengleichung

Die Schwingung einer ebenen Membran, die in ein emGebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  eingespannt ist, wird durch die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad (10.4)$$

beschrieben. Darin ist  $u(t, x)$  die Auslenkung der Membran zur Zeit  $t > 0$  in einem Punkt  $x \in G$  des Gebietes  $G$  ist. Die Randbedingungen zerfallen in zwei Teile:

- Bedingungen, die wiedergeben, dass die Membran in einen Rahmen eingespannt und damit unbeweglich ist. Dies bedeutet, dass  $u(t, x) = 0$  für alle Zeiten  $t > 0$  und für Randpunkte  $x \in \partial G$  von  $G$  ist.
- Bedingungen, die Auslenkung und Geschwindigkeit der Membran zur Zeit  $t = 0$  beschreiben, typischerweise in der Form

$$u(0, x) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

wobei  $f(x)$  und  $g(x)$  Funktionen auf dem Gebiet  $G$  sind.

In der Zeitableitung auf der linken Seite von (10.4) kommen die Ortskoordinaten nicht vor und im Laplace-Operator auf der rechten Seite tritt die Zeit nicht auf. Es ist daher naheliegend zu versuchen, die Lösung der Differentialgleichung als Produkt

$$u(t, x) = T(t) \cdot U(x)$$

zu schreiben. Wendet man die Differentialgleichung darauf an, wird daraus die Gleichung

$$\frac{1}{c^2} T''(t) \cdot U(x) = T(t) \cdot \Delta U(x).$$

Indem man durch  $T(t)$  und  $U(x)$  teilt, entsteht die separierte Gleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x)}{U(x)}.$$

Die linke Seite ist nur von der Zeit abhängig, die rechte nur von den Ortskoordinaten. Damit ist die Differentialgleichung separiert und das Problem darauf reduziert, die gewöhnliche Differentialgleichung

$$T''(t) = \lambda T(t)$$

und die partielle Differentialgleichung

$$\Delta U(x) = \lambda U(x)$$

niedrigerer Dimension zu lösen.

## Allgemeine Situation

Das Definitionsgebiet der partiellen Differentialgleichung ist also von der Form  $\mathbb{R}^+ \times G$ , wobei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein räumliches Gebiet ist und  $\mathbb{R}^+$  die Zeitachse. Auch die Randbedingungen zerfallen in zwei Arten:

- Bedingungen über die Lösungsfunktion zur Zeit  $t = 0$  im inneren des räumlichen Gebietes  $G$ , zum Beispiel die Anfangsauslenkung und/oder Anfangsgeschwindigkeit einer schwingenden Saite oder Membran.
- Bedingungen über die Lösungsfunktion auf dem Rand  $\partial G$  von  $G$  für alle Zeiten  $t > 0$ , zum Beispiel die Bedingung, dass die Membran fest eingespannt ist.

Oft zerfällt auch der Differentialoperator in Zeitableitungen und einen zeitunabhängigen Teil der nur Ableitungen nach den Ortsvariablen enthält. Die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0$$

enthält Ableitungen nach der Zeit, die nicht von Ortskoordinaten abhängig sind. Der Laplace-Operator  $\Delta$  ist nicht von der Zeitabhängig und das Gebiet  $G$  hängt ebenfalls nicht von der Zeit ab.

## Separation der Zeit

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist es naheliegend, die Lösungsfunktion  $u(t, x)$  als Produkt

$$u(t, x) = T(t) \cdot U(x), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in G$$

anzusetzen. Die Wellengleichung wird dann

$$\frac{1}{c^2} T''(t) \cdot U(x) = T(t) \cdot \Delta U(x)$$

und nach Separation

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x)}{U(x)}.$$

Es gibt also eine gemeinsame Konstante. Da wir Schwingungslösungen erwarten, für die  $T''(t) = -\omega^2 T(t)$  ist, schreiben wir die gemeinsame Konstante als  $-\lambda^2$ , was später die Formeln vereinfachen wird. Die separierten Differentialgleichungen werden jetzt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad T''(t) - c^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T''(t) = A \cos(c \sqrt{\lambda} t) + B \sin(c \lambda t) \\ = C \cos(c \lambda t + \delta) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta U(x)}{U(x)} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\lambda^2 U$$

Die letzte Gleichung für die Funktion  $U(x)$  hat die Form eines Eigenwertproblems mit dem Eigenwert  $-\lambda^2$ .

**Definition 10.4.** Eine Eigenfunktion eines Operators  $L$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist eine Funktion  $U$  derart, dass  $LU = \lambda U$ .

Die Separation ermöglicht also, das ursprüngliche Problem aufzuspalten in ein Eigenwertproblem für eine nur ortsabhängige Funktion  $U(x)$  und eine Schwingungsgleichung für  $T(t)$ . Die Schwingungsfrequenz  $c\lambda$  hängt direkt mit dem Eigenwert zusammen. Die Funktion  $U(x)$  beschreibt die Form der Membran, die Amplitude in jedem Punkt, der Faktor  $T(t)$  beschreibt die Schwingung.

## 10.3 Rechteckige Membran

Als Beispiel für die Lösung des in Abschnitt 10.2.2 aus der Wellengleichung abgeleiteten Eigenwertproblems mit Hilfe von Separation betrachten wir ein rechteckiges Gebiet.

### 10.3.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

Wir betrachten das Gebiet

$$G = (0, a) \times (0, b) = \{(x, y) \mid 0 < x < a \wedge 0 < y < b\}.$$

Gesucht ist eine Lösung des Eigenwertproblems

$$\Delta U = -\lambda^2 U \quad (10.5)$$

auf  $G$  mit den homogenen Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} U(0, y) = 0 \\ U(a, y) = 0 \end{array} \right\} \forall y \in (0, b) \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} U(x, 0) = 0 \\ U(x, b) = 0 \end{array} \right\} \forall x \in (0, a).$$

Dieses Gebiet lässt sich bestens in kartesischen Koordinaten beschreiben, so dass wir auch den Laplace-Operator in den gleichen Koordinaten ansetzen können. Wir verwenden also im folgenden

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

### 10.3.2 Separation

Wir setzen die Lösung als Produkt von Funktionen, die nur von einer der Variablen abhängen, nämlich

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (10.5) erhalten wir

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = -\lambda^2 X(x) \cdot Y(y).$$

Nach Division durch  $X(x) \cdot Y(y)$  können wir separieren in

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Da wir Schwingungslösungen erwarten, schreiben wir die Lösungen in der Form  $-\mu^2$ . So erhalten wir die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu^2 X(x) & x \in (0, a) \\ Y''(y) &= (-\lambda^2 - \mu^2) Y(y) & y \in (0, b) \end{aligned}$$

Die Funktionen  $X(x)$  und  $Y(y)$  müssen homogene Randbedingungen erfüllen, also

$$\begin{array}{ll} X(0) = 0 & Y(0) = 0 \\ X(a) = 0 & Y(b) = 0 \end{array} \quad \text{und}$$

### 10.3.3 Lösung der Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $X''(x) = -\mu^2 X(x)$  ist eine Funktion der Form

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Die Randbedingung für  $x = 0$  ist

$$X(0) = A = 0$$

bedeutet, dass nur der Sinus-Term verwendet werden muss. Die Randbedingung am rechten Rand wird dann

$$X(a) = B \sin \mu a.$$

Da  $B$  nicht auch verschwinden kann, muss  $\sin \mu a = 0$  sein. Die Nullstellen der Sinus-Funktion sind alle ganzzahligen Vielfachen

$$\mu a = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{a} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die negativen  $k$  geben die gleichen Lösungsfunktionen wie die positiven  $k$ , man kann sich daher auf die positiven  $k$  beschränken. Die Lösungen sind daher

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

Für die Gleichung  $Y''(y) = (-\lambda^2 + \mu^2)Y(y)$  folgt auf ganz analoge Weise, dass ihre Lösungen die Form

$$Y_l(y) = \sin \frac{k\pi}{b} y.$$

Aus  $X_k(x)$  und  $Y_l(y)$  können jetzt die Lösungen

$$U_{kl}(x, y) = \sin \frac{k\pi}{a} x \cdot \sin \frac{k\pi}{b} y \tag{10.6}$$

zusammengesetzt werden, die homogenen Randbedingungen entlang des ganzen Randes des Rechtecks erfüllen.

Die Funktionen  $X_k(x)$  hat weitere Nullstellen für  $x$ -Werte, für die  $k\pi x/a$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $k$  ist, also wenn

$$\frac{kx}{a} = \frac{x}{a/k}$$

eine ganze Zahl ist. Dies tritt ein, wenn  $x$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $a/k$  ist. Ebenso hat die Funktion  $Y_l(y)$  Nullstellen, wenn  $y$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $b/l$  ist. Die Funktion  $U_{kl}(x, y)$  verschwindet daher auf allen Geraden parallel zur  $y$ -Achse an  $x$ -Koordinaten, die Vielfache von  $a/k$  sind und auf allen Geraden parallel zur  $x$ -Achse an  $y$ -Koordinaten, die Vielfache von  $b/l$  sind.

### 10.3.4 Eigenfrequenzen

Die Lösungen  $U_{kl}(x, y)$  aus (10.6) sind Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung  $\Delta U = -\lambda^2 U$ . Durch Einsetzen lassen sich jetzt auch die Eigenwerte bestimmen:

$$\Delta U_{kl}(x, y) = -\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{k\pi}{a} x \cdot \sin \frac{k\pi}{b} y - \frac{l^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{k\pi}{a} x \cdot \sin \frac{k\pi}{b} y = -\left(\frac{k^2 \pi^2}{a^2} + \frac{l^2 \pi^2}{b^2}\right) U_{kl}(x, y)$$

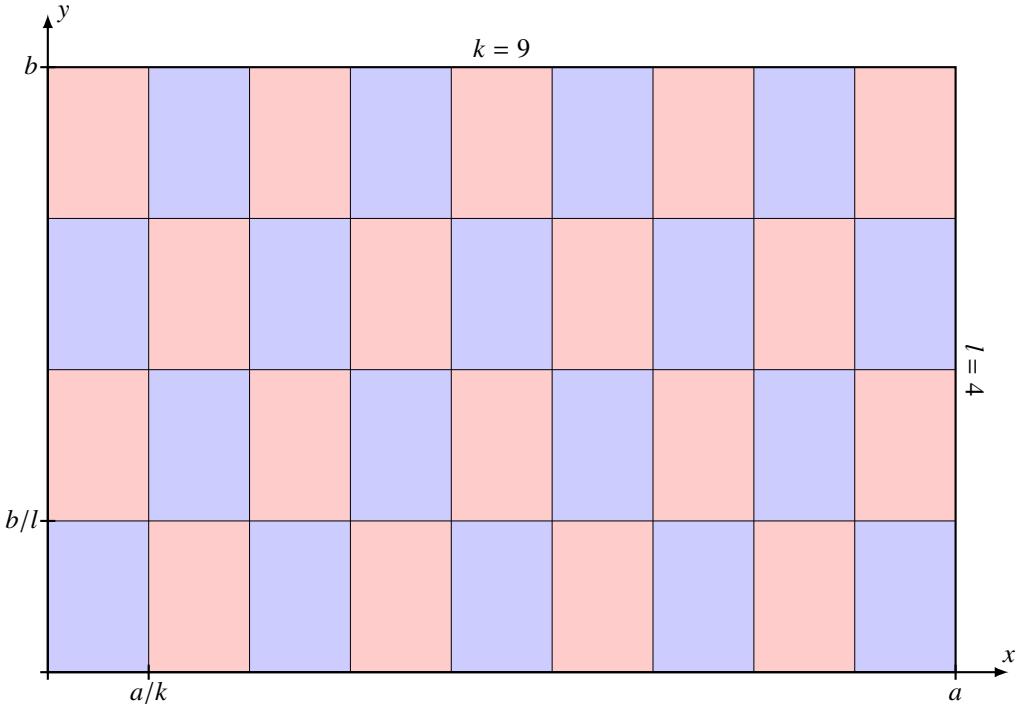


Abbildung 10.1: Vorzeichen und Knotenlinie der Eigenfunktion  $U_{kl}(x, y)$  des Laplace-Operators auf dem Rechteck  $(0, a) \times (0, b)$ . In den blauen Rechtecken gilt  $U_{kl}(x, y) > 0$  in den roten gilt  $U_{kl}(x, y) < 0$ . Die vertikalen und horizontalen schwarzen Linien sind Knotenlinien der Eigenfunktion, ihre  $x$ -Koordinaten sind Vielfache von  $a/k$ , die  $y$ -Koordinaten sind Vielfache von  $b/l$ .

Die Eigenfrequenzen einer rechteckig schwingenden Membran sind also

$$\lambda = \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{b^2}}.$$

Die Vorzeichen und die Knotenlinien der  $U_{kl}(x, y)$  des Eigenwertproblems ist in Abbildung 10.1 dargestellt.

## 10.4 Kreisförmige Membran

In diesem Abschnitt soll die Differentialgleichung einer kreisförmigen Membran mit Hilfe der Separationsmethode gelöst werden. Dabei werden die Bessel-Funktionen als Lösungsfunktionen auftreten und die Eigenfrequenzen werden durch ihre Nullstellen berechnet.

### 10.4.1 Differentialgleichung und Randbedingung

Die Wellengleichung auf einem Kreisgebiet mit Radius  $r_0$  lässt sich am besten mit Hilfe von Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ausdrücken. Gesucht ist also eine Funktion  $u(t, r, \varphi)$  gesucht, wobei  $0 \leq r < r_0$

und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Die Funktion muss eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

sein.

Der Laplace-Operator hat in Polarkoordinaten die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (10.7)$$

Die Differentialgleichung ist

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

Die Separation der Zeit führt auf die Eigenwertgleichung

$$\Delta U(r, \varphi) = -\lambda^2 U(r, \varphi)$$

für eine Funktion, die nur von  $r$  und  $\varphi$  abhängt.

Die Randbedingungen besagen, dass  $u(t, r_0, \varphi) = 0$  für  $t > 0$ . Dies bedeutet für die Funktion  $U(r, \varphi)$ , dass  $U(r_0, \varphi) = 0$  sein muss für alle  $\varphi$ .

Die Bedingungen an  $U$  reichen aber nicht ganz. Alle Koordinaten  $(0, \varphi)$  bezeichnen ja gleichermaßen den Nullpunkt des Koordinatensystems, es muss also auch sichergestellt sein, dass  $U(0, \varphi)$  für alle  $\varphi$  den gleichen Wert gibt.

### 10.4.2 Separation

Das Eigenwertproblem  $\Delta U = -\lambda^2 U$  soll jetzt in Polarkoordinaten separiert werden. Dazu schreiben wir die Lösung als

$$U(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi).$$

Die Randbedingungen an  $U$  werden zu  $R(r_0) = 0$ .

Im Ursprung des Koordinatensystems ist die Randbedingung etwas komplizierter. Wenn  $R(0) = 0$  ist, dann ist sichergestellt, dass  $U(0, \varphi) = R(0)\Phi(\varphi)0$  ist, dass also der Wert unabhängig ist von  $\varphi$ . Wenn aber  $R(0) \neq 0$  ist, dann kann die geforderte Unabhängigkeit von  $\varphi$  nur erfüllt werden, wenn  $\Phi(\varphi)$  konstant ist. Da die Funktion aber auch noch differenzierbar sein soll, darf es an der Stelle  $r = 0$  keine "Spitze" geben, die Ableitung  $R'(0)$  muss also auch = 0 sein.

Die Differentialgleichungen wird mit der Form (16.2) des Laplace-Operators

$$\Delta U = R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = -\lambda^2 R(r)\Phi(\varphi)$$

Nach Division durch die rechte Seite erhalten wir

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda^2$$

Im letzten Term auf der linken Seite kommen die Variablen  $r$  und  $\varphi$  gemischt vor, man muss also die Gleichung erst mit  $r^2$  multiplizieren, bevor man sie in

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda^2 r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

separieren kann. Die beiden Seiten sind also konstant, wir nennen die gemeinsame Konstanten  $\mu^2$ , das vereinfacht die Lösung der Gleichung für  $\Phi(\varphi)$ .

Die Gleichung für  $\Phi$  hat für  $\mu \neq 0$  die Lösungen

$$\Phi(\varphi) = \cos \mu\varphi \quad \text{und} \quad \Phi(\varphi) = \sin \mu\varphi.$$

Die Lösung muss aber auch stetig sein, d. h. es muss  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$  gelten. Dies ist nur möglich, wenn  $\mu$  eine ganze Zahl ist.

Für  $\mu = 0$  hat das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle, die allgemeine Lösung lautet daher

$$\Phi(\varphi) = C\varphi + D.$$

Die Funktion  $\Phi$  muss aber auch stetig sein, d. h.  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ , das ist mit  $C \neq 0$  nicht möglich, somit kommt für  $\mu = 0$  nur die Lösung  $\Phi(\varphi) = D$  in Frage.

Die Gleichung für  $R(r)$  wird jetzt

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R(r) = 0. \quad (10.8)$$

Bis auf den Faktor  $\lambda^2$  ist dies eine Besselsche Differentialgleichung.

### 10.4.3 Umformung in eine Besselsche Differentialgleichung

Die Funktion  $y(x) = J_\mu(sx)$  hat die Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= sJ'_m u(sx) \\ y''(x) &= s^2 J''_m(sx) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Besselsche Differentialgleichung für  $J_\mu$  an der Stelle  $sx$  ein, erhält man

$$s^2 x^2 J''_m(sx) + sx J'_m(sx) + (s^2 x^2 - \mu^2) J_m(sx) = 0.$$

Die Differentialgleichung (10.8) der Funktion  $R(r)$  wird also gelöst von den Funktionen  $R(r) = J_\mu(\lambda r)$ .

### 10.4.4 Eigenfrequenzen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gefunden, dass die Lösungen für  $R(r)$  die Funktionen  $J_\mu(\lambda r)$  sind. Bis jetzt haben wir aber nicht nachgeprüft, dass die Randbedingung eingehalten wird. Diese ist erfüllt,  $R(r_0) = 0$  ist. Es muss also  $J_\mu(\lambda r_0) = 0$  sein, oder  $\lambda r_0$  muss eine Nullstelle von  $J_\mu$  sein. Bezeichnen wir die Nullstellen von  $J_\mu$  mit  $j_{\mu k}$ , wobei  $k$  eine natürliche Zahl ist, dann muss

$$\lambda = \frac{j_{\mu k}}{r_0}$$

sein. Die Eigenfrequenzen der kreisförmigen Membran werden also im Wesentlichen durch die Nullstellen der Bessel-Funktionen gegeben.

Zu jedem ganzzahligen  $\mu$  gibt es also eine Folge  $j_{\mu k}/r_0$  von Eigenfrequenzen. Die Lösungen mit Index  $k$  der Differentialgleichung mit Index  $k$  hat die Form

$$U_{\mu k}(r, \varphi) = C \cos(\mu\varphi + \delta) J_\mu\left(\frac{j_{\mu k}}{r_0} r\right)$$

$k$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$	$\mu = 6$	$\mu = 7$
0	2.4048	0	0	0	0	0	0	0
1	5.5201	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	9.9361	11.0864
2	8.6537	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893	14.8213
3	11.7915	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	17.0038	18.2876
4	14.9309	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208	21.6415
5	18.0711	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861	24.9349
6	21.2116	19.6159	21.1170	22.5827	24.0190	25.4303	26.8202	28.1912
7	24.3525	22.7601	24.2701	25.7482	27.1991	28.6266	30.0337	31.4228
8	27.4935	25.9037	27.4206	28.9084	30.3710	31.8117	33.2330	34.6371
9	30.6346	29.0468	30.5692	32.0649	33.5371	34.9888	36.4220	37.8387
10	33.7758	32.1897	33.7165	35.2187	36.6990	38.1599	39.6032	41.0308

Tabelle 10.1: Nullstellen der Bessel-Funktionen

Der Faktor  $J_\mu$  hat  $k$  weitere Nullstellen für Radien  $r < r_0$ , diese gehören zu kreisförmigen Knotenlinien der Membran, dort bewegt sie sich nicht. Der Faktor  $\cos(\mu\varphi + \delta)$  hat  $2\mu$  Nullstellen im Intervall  $[0, 2\pi]$ , es gibt also noch zusätzlich  $\mu$  diametrale Knotenlinien. Nur für  $\mu = 0$  gibt es Lösungen, die keine radialen Knotenlinien haben, da in diesem Fall  $\Phi$  eine konstante Funktion sein muss.

## 10.5 Kugelfunktionen

Kugelsymmetrische Probleme können oft vorteilhaft in Kugelkoordinaten beschrieben werden. Die Separationsmethode kann auf partielle Differentialgleichungen mit dem Laplace-Operator angewendet werden. Die daraus resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen führen einerseits auf die Laguerre-Differentialgleichung für den radialen Anteil sowie auf Kugelfunktionen für die Koordinaten der geographischen Länge und Breite.

### 10.5.1 Kugelkoordinaten

Wir verwenden Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$ , wobei  $r$  der Radius ist,  $\vartheta$  die geographische Breite gemessen vom Nordpol der Kugel und  $\varphi$  die geographische Breite. Der Definitionsbereich für Kugelkoordinaten ist

$$\Omega = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid r \geq 0 \wedge 0 \leq \vartheta \leq \pi \wedge 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Die Entfernung eines Punktes von der  $z$ -Achse ist  $r \sin \vartheta$ . Daraus lassen sich die kartesischen Koordinaten eines Punktes mit Hilfe von

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass die Punkte auf der  $z$ -Achse keine eindeutigen Kugelkoordinaten haben. Sie sind charakterisiert durch  $r \sin \vartheta = 0$ , was  $\cos \vartheta = \pm 1$  impliziert. Entsprechend führen alle Werte von  $\varphi$  auf den gleichen Punkt  $(0, 0, \pm r)$ .

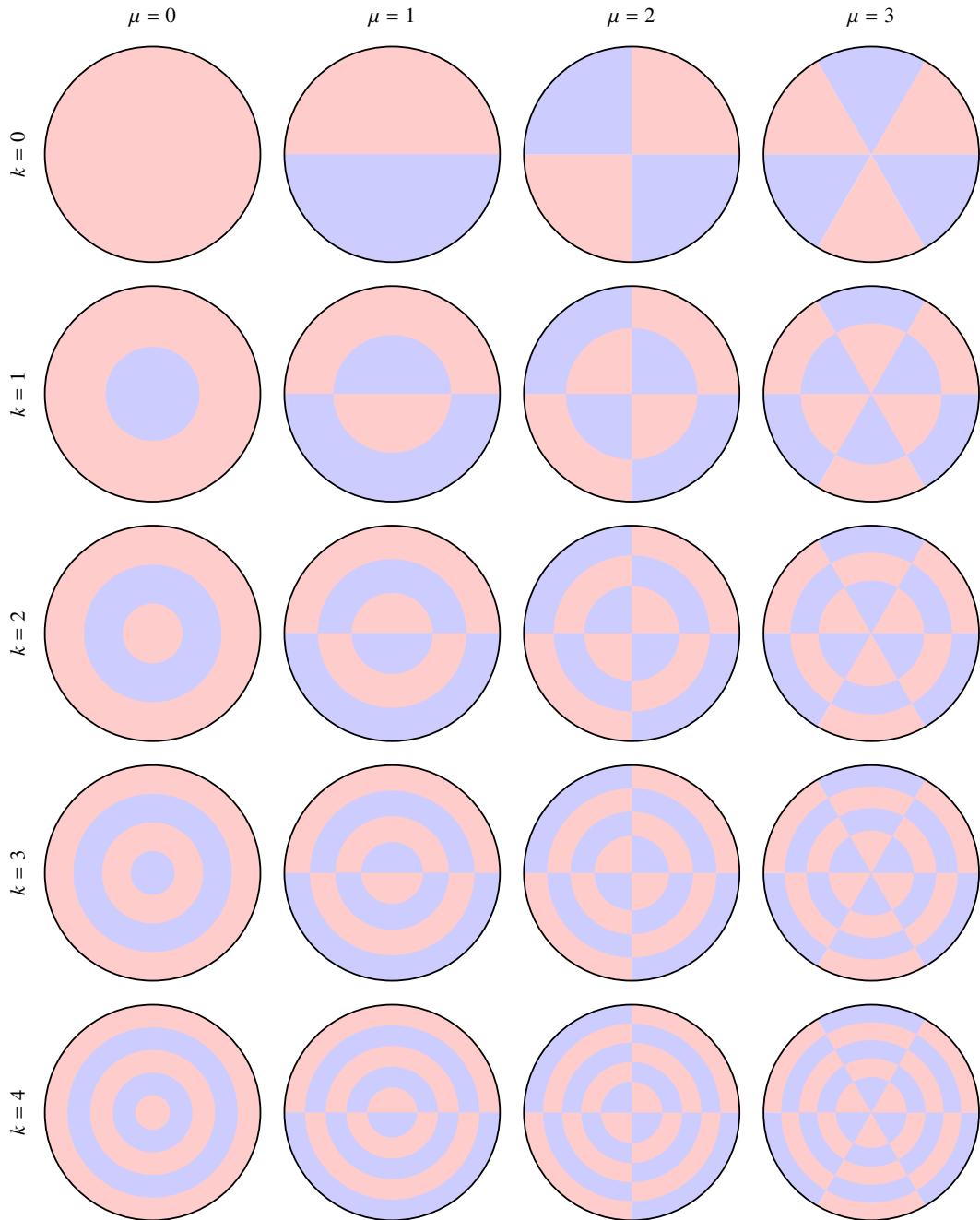


Abbildung 10.2: Vorzeichen der Lösungsfunktionen und Knotenlinien für verschiedene Werte von  $\mu$  und  $k$ . Die Bereiche, in denen die Lösungsfunktion positiv sind, ist rot dargestellt, die negativen Bereiche blau. In jeder Darstellung gibt es genau  $k + \mu$  Knotenlinien. Die Radien der kreisförmigen Knotenlinien müssen aus den Nullstellen der Besselfunktionen berechnet werden.

## 10.5.2 Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (10.9)$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (10.10)$$

oder

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (10.11)$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass mit der Notation gemeint ist, dass ein Ableitungsoperator auf alles wirkt, was rechts im gleichen Term steht. Der Operator

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \quad \text{wirkt daher als} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( f + r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

was die Äquivalenz der beiden Formen (10.10) und (10.11) rechtfertigt. Auch die Äquivalenz mit (10.9) kann auf ähnliche Weise verstanden werden.

Die Herleitung dieser Formel ist ziemlich aufwendig und soll hier nicht dargestellt werden. Es sei aber darauf hingewiesen, dass sich für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  wegen  $\sin \vartheta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$  der eingeschränkte Operator

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ergibt. Wendet man wie oben die Produktregel auf den ersten Term an, entsteht die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

die *nicht* übereinstimmt mit dem Laplace-Operator in Polarkoordinaten (16.2). Der Unterschied röhrt daher, dass der Laplace-Operator die Krümmung der Koordinatenlinien berücksichtigt, in diesem Fall der Meridiane.

## 10.5.3 Separation

In Abschnitt 10.2.2 wurde bereits gezeigt, wie die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0$$

durch Separation der Zeit auf ein Eigenwertproblem für eine Funktion  $u$  reduziert werden kann, die nur von den Ortskoordinaten abhängt. Es geht also nur noch darum, dass Eigenwertproblem

$$\Delta u = -\lambda^2 u$$

mit geeigneten Randbedingungen zu lösen. Dazu gehören einerseits eventuelle Gebietsränder, die im Moment nicht interessieren. Andererseits muss sichergestellt sein, dass die Lösungsfunktionen stetig und differentierbar sind an den Orten, wo das Koordinatensystem singulär ist. So müssen  $u(r, \vartheta, \varphi)$   $2\pi$ -periodisch in  $\varphi$  sein.

## Separation des radialen Anteils

Für das Eigenwertproblem verwenden wir den Ansatz

$$u(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi),$$

den wir in die Differentialgleichung einsetzen. So erhalten wir

$$\left( \frac{1}{r^2}R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) \right) \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) + R(r) \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) \Phi(\varphi) + R(r)\Theta(\vartheta) \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \Phi''(\varphi) = -\lambda^2 R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi).$$

Die Gleichung lässt sich nach Multiplikation mit  $r^2$  und Division durch  $u$  separieren in

$$\frac{R''(r) + 2rR'(r) + \lambda^2 r^2}{R(r)} + \frac{1}{\Theta(\vartheta) \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0 \quad (10.12)$$

Der erste Term hängt nur von  $r$  ab, die anderen nur von  $\vartheta$  und  $\varphi$ , daher muss der erste Term konstant sein. Damit ergibt sich für den Radialanteil die gewöhnliche Differentialgleichung

$$R''(r) + 2rR'(r) + \lambda^2 r^2 = \mu^2 R(r),$$

die zum Beispiel mit der Potenzreihenmethode gelöst werden kann. Sie kann aber durch eine geeignete Substitution nochmals auf die Laguerre-Differentialgleichung reduziert werden, wie in Kapitel 18 dargelegt wird.

## Kugelflächenanteil

Für die Separation der verbleibenden winkelabhängigen Teile muss die Gleichung

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta) \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2$$

mit  $\sin^2 \vartheta$  multipliziert werden, was auf

$$\frac{\sin \vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2 \sin^2 \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \mu^2 \sin^2 \vartheta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

führt. Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von  $\vartheta$  ab, die rechte nur von  $\varphi$ , beide Seiten müssen daher konstant sein, wir bezeichnen diese Konstante mit  $\alpha^2$ . So ergibt sich die Differentialgleichung

$$\alpha^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

für die Abhängigkeit von  $\varphi$ , mit der allgemeinen Lösung

$$\Phi(\varphi) = A \cos \alpha \varphi + B \sin \alpha \varphi.$$

Die Randbedingungen verlangen, dass  $\Phi(\varphi)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist, was genau dann möglich ist, wenn  $\alpha = m$  ganzzahlig ist. Damit ergibt sich für die  $\vartheta$ -Abhängigkeit die Differentialgleichung

$$\frac{\sin \vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \mu^2 \sin^2 \vartheta = m^2. \quad (10.13)$$

### Abhängigkeit von $\vartheta$

Die Differentialgleichung (10.13) ist etwas unhandlich, daher verwenden wir die Substitution  $z = \cos \vartheta$ , um die trigonometrischen Funktionen los zu werden. Wegen

$$\frac{dz}{d\vartheta} = -\sin \vartheta = -\sqrt{1-z^2}$$

können die Ableitungen nach  $\vartheta$  auch durch Ableitungen nach  $z$  ausgedrückt werden. Wir schreiben dazu  $Z(z) = \Theta(\vartheta)$  und berechnen

$$\Theta'(\vartheta) = \frac{d\Theta}{d\vartheta} = \frac{dZ}{dz} \frac{dz}{d\vartheta} = -\sqrt{1-z^2} Z'(z).$$

Dies bedeutet auch, dass

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} = -(1-z^2) \frac{d}{dz},$$

damit lässt sich die Differentialgleichung für  $\Theta(\vartheta)$  umschreiben in eine Differentialgleichung für  $Z(z)$ , nämlich

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} (1-z^2) \frac{d}{dz} Z(z) + \mu^2 (1-z^2) Z(z) = m^2 Z(z).$$

Indem man die Ableitung im ersten Term mit Hilfe der Produktregel ausführt, kann man die Gleichung

$$(1-z^2) \left( -2z Z'(z) + (1-z^2) Z''(z) \right) + \mu^2 (1-z^2) Z(z) = -m^2 Z(z)$$

bekommen. Division durch  $1-z^2$  ergibt die *Legendre-Differentialgleichung*

$$(1-z^2) Z''(z) - 2z Z'(z) + \left( \mu^2 - \frac{m^2}{1-z^2} \right) Z(z) = 0. \quad (10.14)$$

Eine Diskussion der Lösungen dieser Differentialgleichung erfolgt im Kapitel 24.

### 10.5.4 Kugelfunktionen

Die Legendre-Differentialgleichung (10.14) hat Lösungen für Werte von  $\mu$  derart, dass  $\mu^2 = l(l+1)$  für natürliche Zahlen  $l$ . Die Lösungen sind sogar Polynome, die wir mit  $P_l^{(m)}(z)$  bezeichnen, dabei ist  $m$  eine ganze Zahl mit  $-l \leq m \leq l$ . Die Funktionen  $P_l^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$  sind daher alle Lösungen des von  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängigen Teils der Lösungen des Eigenwertproblems. Mit einer geeigneten Normierung kann man zudem eine Familie von bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_{S^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \overline{f(\vartheta, \varphi)} g(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

orthonormierte Funktionen auf der Kugeloberfläche erhalten, die man normalerweise als

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{(m)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

bezeichnet.

## Übungsaufgaben

### 10.1. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{im Gebiet} \quad (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^+ \times (0, l) \quad (10.15)$$

beschreibt die Änderung der Temperatur eines Stabes der Länge  $l$ . Die homogene Randbedingung

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0 \quad (10.16)$$

besagt, dass der Stab an seinen Enden auf Temperatur 0 gehalten. Zur Lösung dieser Differentialgleichung muss auch die Temperatur zur Zeit  $t = 0$  in Form einer Randbedingung

$$u(0, x) = T_0(x)$$

gegeben sein. Führen Sie Separation für die Differentialgleichung (10.15) durch und bestimmen Sie die zulässigen Werte der Separationskonstanten.

*Lösung.* Man verwendet den Ansatz  $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$  und setzt diesen in die Differentialgleichung ein, die dadurch zu

$$T'(t)X(x) = \kappa T(t)X''(x)$$

wird. Division durch  $T(t)X(x)$  wird dies zu

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da die linke Seite nur von  $t$  abhängt, die rechte aber nur von  $x$ , müssen beide Seiten konstant sein. Wir bezeichnen die Konstante mit  $-\lambda^2$ , so dass wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\lambda^2 & \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda^2 \\ T'(t) &= -\lambda^2 \kappa T(t) & X''(x) &= -\lambda^2 X(x) \end{aligned}$$

welche die Lösungen

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 \kappa t} \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

haben. Die Lösung  $X(x)$  muss aber auch die homogene Randbedingung (10.16) erfüllen. Setzt man  $x = 0$  und  $x = l$  ein, folgt

$$0 = X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A \quad 0 = X(l) = B \sin \lambda l,$$

woraus man schliessen kann, dass  $\lambda l$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, wir schreiben  $\lambda l = k\pi$  oder

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

Damit sind die möglichen Werte  $\lambda$  bestimmt und man kann jetzt auch die möglichen Lösungen aufschreiben, sie sind

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 \pi^2 \kappa t / l^2} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad \circlearrowright$$

# Kapitel 11

## Elliptische Funktionen

Der Versuch, die Länge eines Ellipsenbogens zu berechnen, hat in Abschnitt 3.3.3 zu Integralen geführt, die nicht in geschlossener Form ausgewertet werden können. Neben den dort gefundenen Integralen sind noch weitere, ähnlich aufgebaute Integrale in dieser Familie zu finden.

Auf die trigonometrischen Funktionen stösst man, indem man Funktion der Bogenlänge umkehrt. Ein analoges Vorgehen bei den elliptischen Integralen führt auf die Jacobischen elliptischen Funktionen, die in Abschnitt 11.2 allerdings auf eine eher geometrische Art eingeführt werden. Die Verbindung zu den elliptischen Integralen wird dann in Abschnitt 11.2.2 wieder hergestellt.

### 11.1 Elliptische Integrale

Bei der Berechnung des Ellipsenbogens in Abschnitt 3.3.3 sind wir auf ein Integral gestossen, welches sich nicht in geschlossener Form ausdrücken liess. Um solche Integrale in den Griff zu bekommen, ist es nötig, sie als neue spezielle Funktionen zu definieren.

#### 11.1.1 Definition

Ein *elliptisches Integral* ist ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{p(x)}) dx \quad (11.1)$$

wobei  $R(x, y)$  eine rationale Funktion von zwei Variablen ist und  $p(x)$  ein Polynom dritten oder vierten Grades. Hätte  $p(x)$  ein mehrfache Nullstelle  $x_0$ , müsste es durch  $(x - x_0)^2$  teilbar sein, man könnte also einen Faktor  $(x - x_0)$  aus der Wurzel im Integranden von (11.1) ausklammern und damit das Integral in eine Form bringen, wo  $p(x)$  höchstens zweiten Grades ist. Solche Integrale lassen sich meistens mit trigonometrischen Substitutionen berechnen. Wir verlangen daher, dass  $p(x)$  keine mehrfachen Nullstellen hat.

Man kann zeigen, dass sich elliptische Integrale in Summen von elementaren Funktionen und speziellen elliptischen Integralen der folgenden Form überführen lassen [buch:smirnov32].

**Definition 11.1.** Die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Art sind die Integrale

$$\begin{aligned}1. \text{ Art: } & \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\2. \text{ Art: } & \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \\3. \text{ Art: } & \int \frac{dx}{(1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\end{aligned}$$

mit  $0 < k < 1$ . Es ist auch üblich, den Parameter  $m = k^2$  zu verwenden. Die Zahl  $k$  heisst Modul des elliptischen Integrals.

Wie gesagt lassen sich für diese unbestimmten Integrale keine geschlossenen Formen finden. Es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als die Integralgrenzen festzulegen und damit eine Stammfunktion auszuwählen.

### 11.1.2 Vollständige elliptische Integrale

In diesem Abschnitt legen wir beide Integrationsgrenzen fest und untersuchen die entstehenden Funktionen von den Parametern  $k$  und  $n$ .

#### Definition der vollständigen elliptischen Integrale

Da der Nenner in allen drei elliptischen Integralen eine Nullstelle bei  $\pm 1$  hat, kann das Integral nur von 0 bis 1 erstreckt werden.

**Definition 11.2.** Die vollständigen elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Art sind

$$\begin{aligned}1. \text{ Art: } K(k) &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\2. \text{ Art: } E(k) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \\3. \text{ Art: } \Pi(n, k) &= \int_0^1 \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\end{aligned}$$

mit  $0 < k < 1$ .

Die Funktionen hängen stetig von  $k$  ab. Die Nullstellen des Faktors  $1-k^2x^2$  liegen ausserhalb des Integrationsintervalls und spielen daher keine Rolle. Die Werte von  $K(k)$  und  $E(k)$  für  $k = 0$  können direkt berechnet werden:

$$K(0) = E(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Das Integral  $\Pi(n, 0)$  ist etwas komplizierter.

Für  $k \rightarrow 1$  ist  $E(k) = 1$ , die Integrale  $K(1)$  und  $\Pi(n, 1)$  sind dagegen divergent.

### Jacobi- und Legendre-Normalform

Die Integrationsvariable  $t$  der vollständigen elliptischen Integrale kann durch die Substitution  $t = \sin \varphi$  durch die Variable  $\varphi$  und das Integral über das Intervall  $[0, 1]$  durch ein Integral über das Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ersetzt werden. Mit

$$\frac{dt}{d\varphi} = \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

können die Funktionen  $K(k)$ ,  $E(k)$  und  $\Pi(n, k)$  auch als

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ \Pi(n, k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Diese Form wird auch die *Legendre-Normalform* der vollständigen elliptischen Integrale genannt, während die Form von Definition 11.2 die *Jacobi-Normalform* heisst.

### Vollständige elliptische Integrale als hypergeometrische Funktionen

Das vollständige elliptische Integral  $K(k)$  kann mit Hilfe der Binomialreihe umgeformt werden in eine hypergeometrische Reihe. Da im Integral nur  $k^2$  auftaucht, wird sich  $K(k)$  als hypergeometrische Funktion von  $k^2$  ausdrücken lassen.

**Satz 11.3.** Das vollständige elliptische Integral  $K(k)$  lässt sich durch die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$  als

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

ausdrücken.

*Beweis.* Zunächst ist das vollständige elliptische Integral in der Legendre-Form

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (k \sin \theta)^2)^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

Die Wurzel im letzten Integral kann mit Hilfe der binomischen Reihe vereinfacht werden zu

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^{2n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta. \quad (11.2)$$

Der verallgemeinerte Binomialkoeffizient lässt sich nach

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) = (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}$$

vereinfachen. Setzt man dies in (11.2) ein, erhält man

$$K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^{2n} \cdot (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \vartheta d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \vartheta d\vartheta \cdot (k^2)^n.$$

Es muss jetzt also nur noch das Integral von  $\sin^{2n} \vartheta$  berechnet werden. Mit partieller Integration kann man

$$\begin{aligned} \int \sin^m \vartheta d\vartheta &= \int \underbrace{\sin \vartheta}_{\uparrow} \underbrace{\sin^{m-1} \vartheta}_{\downarrow} d\vartheta \\ &= -\cos \vartheta \sin^{m-1} \vartheta + \int \cos^2 \vartheta (m-1) \sin^{m-2} \vartheta d\vartheta \\ &= -\cos \vartheta \sin^{m-1} \vartheta + (m-1) \int (1 - \sin^2 \vartheta) \sin^{m-2} \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Wegen  $\sin 0 = 0$  und  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  verschwindet der erste Term im bestimmten Integral und der zweite wird

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \vartheta d\vartheta - (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta \\ m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \vartheta d\vartheta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \vartheta d\vartheta &= \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Mit dieser Rekursionsformel kann jetzt das Integral berechnet werden. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \vartheta d\vartheta &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{2n-(2n-1)}{2(n-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\vartheta \\ &= \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit wird die Reihenentwicklung für  $K(k)$  jetzt zu

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{2})_n}{n! n!} \cdot \frac{(k^2)^n}{n!} = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

dies beweist die Behauptung. □

### Umfang einer Ellipse

Wir zeigen, wie sich die Berechnung des Umfangs  $U$  einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$ ,  $a \leq b$ , auf ein vollständiges elliptisches Integral zurückführen lässt. Der Fall  $a > b$  kann behandelt werden, indem die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten vertauscht werden.

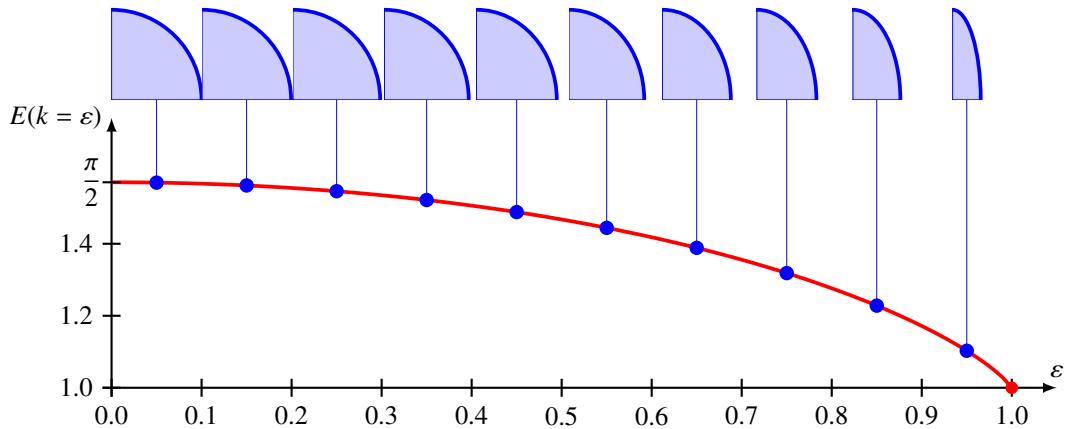


Abbildung 11.1: Bogenlänge eines Viertels einer Ellipse mit Exzentrizität  $\varepsilon$ . Eine solche Ellipse hat Halbachsen 1 und  $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ , ein entsprechender Ellipsenbogen ist für ausgewählte Werte in blau eingezeichnet.

Die Parametrisierung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

einer Ellipse führt auf das Integral

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)} dt \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (b^2 - a^2)/b^2 \cdot \sin^2 t} dt \end{aligned} \quad (11.3)$$

für den Umfang der Ellipse. Bei einem Kreis ist  $a = b$  und der zweite Term unter der Wurzel fällt weg, der Umfang wird  $4b\frac{\pi}{2} = 2\pi b$ . Die Differenz  $e^2 = b^2 - a^2$  ist die *lineare Exzentrizität* der Ellipse, der Quotient  $e/b$  wird die *numerische Exzentrizität* der Ellipse genannt. Insbesondere ist  $k = \varepsilon$ .

Das Integral (11.3) erhält jetzt die Form

$$U = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

und ist damit als elliptisches Integral zweiter Art erkannt. Für den Umfang der Ellipse finden wir damit die Formel

$$U = 4bE(k) = 4bE(\varepsilon).$$

Das vollständige elliptische Integral zweiter Art  $E(\varepsilon)$  liefert also genau den Umfang eines Viertels der Ellipse mit numerischer Exzentrizität  $\varepsilon$  und kleiner Halbachse 1. Für den extremen Wert  $\varepsilon = 0$  entsteht der Umfang einer Ellipse, also  $E(0) = \frac{\pi}{2}$ . Für  $\varepsilon = 1$  ist  $a = 0$ , es entsteht eine Strecke mit Länge  $E(1) = 1$ .

**Satz 11.4.** Das vollständige elliptische Integral  $E(k)$  ist

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; k^2\right).$$

*Beweis.* Die Identität kann wie im Satz 11.3 mit Hilfe einer Entwicklung der Wurzel mit der Binomialreihe gefunden werden.  $\square$

Die Darstellung von  $E(k)$  als hypergeometrische Reihe ermöglicht jetzt zum Beispiel auch die Berechnung der Ableitung nach dem Parameter  $k$  mit der Ableitungsformel für die Funktion  ${}_2F_1$ .

### 11.1.3 Berechnung mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel

Die numerische Berechnung von elliptischer Integrale mit gewöhnlichen numerischen Integrationsroutinen ist nicht sehr effizient. Das in diesem Abschnitt vorgestellte arithmetisch-geometrische Mittel liefert einen Algorithmus mit sehr viel besserer Konvergenz. Die Methode lässt sich auch auf die unvollständigen elliptischen Integrale von Abschnitt (11.1.4) verallgemeinern. Sie ist ein Spezialfall der sogenannten Landen-Transformation, welche außer für die elliptischen Integrale auch für die Jacobischen elliptischen Funktionen formuliert werden kann und für letztere ebenfalls sehr schnelle numerische Algorithmen liefert (siehe dazu auch die Aufgaben 11.2–11.4). Sie kann auch verwendet werden, um die Werte der Jacobischen elliptischen Funktionen für komplexe Argument zu berechnen. Eine weiter Anwendung ist die Berechnung einer grossen Zahl von Stellen der Kreiszahl  $\pi$ , siehe Aufgaben 11.5.

#### Das arithmetisch-geometrische Mittel

Seien  $a$  und  $b$  zwei nichtnegative reelle Zahlen. Aus  $a$  und  $b$  werden jetzt zwei Folgen konstruiert, deren Glieder durch

$$\begin{array}{lll} a_0 = a & \text{und} & a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_0 = b & \text{und} & b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{arithmetisches Mittel} \\ \text{geometrisches Mittel} \end{array}$$

definiert sind.

**Satz 11.5.** Falls  $a > b > 0$  ist, nimmt die Folge  $(a_k)_{k \geq 0}$  monoton ab und  $(b_k)_{k \geq 0}$  nimmt monoton zu. Beide konvergieren quadratisch gegen einen gemeinsamen Grenzwert.

**Definition 11.6.** Der gemeinsame Grenzwert von  $a_n$  und  $b_n$  heißt das arithmetisch-geometrische Mittel und wird mit

$$M(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

bezeichnet.

*Beweis.* Zunächst ist zu zeigen, dass die Folgen monoton sind. Dies folgt sofort aus der Definition der Folgen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \geq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n. \end{aligned}$$

Die Konvergenz folgt aus

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq \frac{a - b}{2^{n+1}}.$$

Dies zeigt jedoch nur, dass die Konvergenz mindestens ein Bit in jeder Iteration ist. Aus

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{(a_n + b_n)^2}{4} - a_n b_n = \frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{4} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4}$$

folgt

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_{n+1} + b_{n+1})}.$$

Da der Nenner gegen  $2M(a, b)$  konvergiert, wird der Fehler für in jeder Iteration quadriert, die Zahl korrekter Stellen verdoppelt sich in jeder Iteration, es liegt also quadratische Konvergenz vor.  $\square$

### Transformation des elliptischen Integrals

In diesem Abschnitt soll das Integral

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$$

berechnet werden. Es ist klar, dass

$$I(sa, sb) = \frac{1}{s} I(a, b).$$

Gauss hat gefunden, dass die Substitution

$$\sin t = \frac{2a \sin t_1}{a + b + (a - b) \sin^2 t_1} \quad (11.4)$$

zu

$$\frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{dt_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 t_1 + b_1^2 \sin^2 t_1}} \quad (11.5)$$

führt. Um dies nachzuprüfen, muss man zunächst (11.4) nach  $t_1$  ableiten, was

$$\frac{d}{dt_1} \sin t = \cos t \frac{dt}{dt_1} \Rightarrow \left( \frac{d}{dt_1} \sin t \right)^2 = (1 - \sin^2 t) \left( \frac{dt}{dt_1} \right)^2$$

ergibt. Die Ableitung von  $t$  nach  $t_1$  kann auch aus (11.5) ableiten, es ist

$$\left( \frac{dt}{dt_1} \right)^2 = \frac{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}{a_1^2 \cos^2 t_1 + b_1^2 \sin^2 t_1}.$$

Man muss also nachprüfen, dass

$$\frac{1}{1 - \sin^2 t} \frac{d}{dt_1} \sin t = \frac{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}{a_1^2 \cos^2 t_1 + b_1^2 \sin^2 t_1}. \quad (11.6)$$

Dazu muss man zunächst  $a_1 = (a + b)/2$ ,  $b_1 = \sqrt{ab}$  setzen. Außerdem muss man  $\cos^2 t$  durch  $1 - \sin^2 t$  ersetzen und  $\sin t$  durch (11.4). Auch  $\cos^2 t_1$  muss man durch  $1 - \sin^2 t_1$  ersetzt werden. Dann kann man nach einer langwierigen Rechnung, die sich am leichtesten mit einem Computer-Algebra-System ausführen lässt finden, dass (11.6) tatsächlich korrekt ist.

**Satz 11.7.** Für  $a_1 = (a + b)/2$  und  $b_1 = \sqrt{ab}$  gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt_1}{a_1^2 \cos^2 t_1 + b_1^2 \sin^2 t_1}.$$

Der Satz 11.7 zeigt, dass die Ersetzung von  $a$  und  $b$  durch  $a_1$  und  $b_1$  das Integral  $I(a, b)$  nicht ändert. Dies gilt natürlich für alle Glieder der Folge zur Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels.

**Satz 11.8.** Für  $a \geq b > 0$  gilt

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{\pi}{2M(a, b)} \quad (11.7)$$

*Beweis.* Zunächst folgt aus Satz 11.7, dass

$$I(a, b) = I(a_1, b_1) = \dots = I(a_n, b_n).$$

Ausserdem ist  $a_n \rightarrow M(a, b)$  und  $b_n \rightarrow M(a, b)$ , damit wird

$$I(a, b) = \frac{1}{M(a, b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a, b)}. \quad \square$$

### Berechnung des elliptischen Integrals

Das elliptische Integral erster Art hat eine Form, die dem Integral  $I(a, b)$  bereits sehr ähnlich ist. Im die Verbindung herzustellen, berechnen wir

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 t}} = K(k) \quad \text{mit} \quad k' = \frac{b^2}{a^2}, \quad k = \sqrt{1 - k'^2} \end{aligned}$$

**Satz 11.9.** Für  $0 < k \leq 1$  ist

$$K(k) = I(1, \sqrt{1 - k^2}) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1 - k^2})}$$

### Numerisches Beispiel

In diesem Abschnitt soll als Zahlenbeispiel  $E(k)$  für  $k = \sqrt{2}/2$  berechnet werden. In diesem speziellen Fall ist  $k' = k$ . Tabelle 11.1 zeigt die sehr rasche Konvergenz der Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels von 1 und  $\sqrt{2}/2$ . Mit Satz 11.9 folgt jetzt

$$K(\sqrt{2}/2) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{2}/2)} = 1.854074677301372.$$

Die Berechnung hat nur 4 Mittelwerte, 4 Produkte, 4 Quadratwurzeln und eine Division erforderl.

$n$	$a_n$	$b_n$	$\pi/2a_n$
0	1.00000000000000000000000000000000	0.7071067811865475243	1.5707963267948965579
1	0.8535533905932737621	0.8408964152537145430	1.8403023690212201581
2	0.8472249029234941526	0.8472012667468914603	1.8540488143993356315
3	0.8472130848351928064	0.8472130847527653666	1.8540746772111781089
4	0.8472130847939790865	0.8472130847939790865	1.8540746773013718463
$\infty$			1.8540746773013719184

Tabelle 11.1: Die Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels für  $a = 1$  und  $b = \sqrt{2}/2$  zeigt die sehr rasche Konvergenz.

### 11.1.4 Unvollständige elliptische Integrale

Die Funktionen  $K(k)$  und  $E(k)$  sind als bestimmte Integrale über ein festes Intervall definiert. Die *unvollständigen elliptischen Integrale* entstehen, indem die obere Grenze des Integrals variabel wird:

$$\begin{aligned} \text{1. Art: } F(x, k) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \\ \text{2. Art: } E(x, k) &= \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt &= \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \\ \text{3. Art: } \Pi(n, x, k) &= \int_0^x \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1-n \sin^2 \vartheta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}}, \end{aligned}$$

die erste Formel ist jeweils die Jacobi-Form, die zweite die Legendre-Form mit dem Parameter  $\varphi$ , gegeben durch  $\sin \vartheta = x$ . Wie bei den vollständigen elliptischen Integralen ist auch hier in manchen Referenzen die Parameterkonvention mit dem Parameter  $m = k^2$  üblich.

Die vollständigen elliptischen Integrale sind die Werte der unvollständigen elliptischen Integrale mit  $x = 1$ , also

$$K(k) = F(1, k), \quad E(k) = E(1, k), \quad \Pi(n, k) = \Pi(n, 1, k).$$

Man beachte auch, dass  $F(x, 0) = E(x, 0)$  gilt.

Wegen  $k < 1$  sind alle drei Integranden als reelle Funktionen nicht mehr definiert, wenn  $|x| > 1$  ist. Die Abbildung 11.2 zeigt Graphen der unvollständigen elliptischen Integrale für verschiedene Werte des Parameters.

### Symmetrieeigenschaften

Die Integranden aller drei unvollständigen elliptischen Integrale sind gerade Funktionen der reellen Variablen  $t$ . Die Funktionen  $F(x, k)$ ,  $E(x, k)$  und  $\Pi(n, x, k)$  sind daher ungeraden Funktionen von  $x$ .

### Elliptische Integrale als komplexe Funktionen

Die unvollständigen elliptischen Integrale  $F(x, k)$ ,  $E(x, k)$  und  $\Pi(n, x, k)$  in Jacobi-Form lassen sich auch für komplexe Argumente interpretieren. Dazu muss für die Berechnung des Integrals ein Pfad in der komplexen Ebene gewählt werden, der die Singularitäten des Integranden vermeidet.

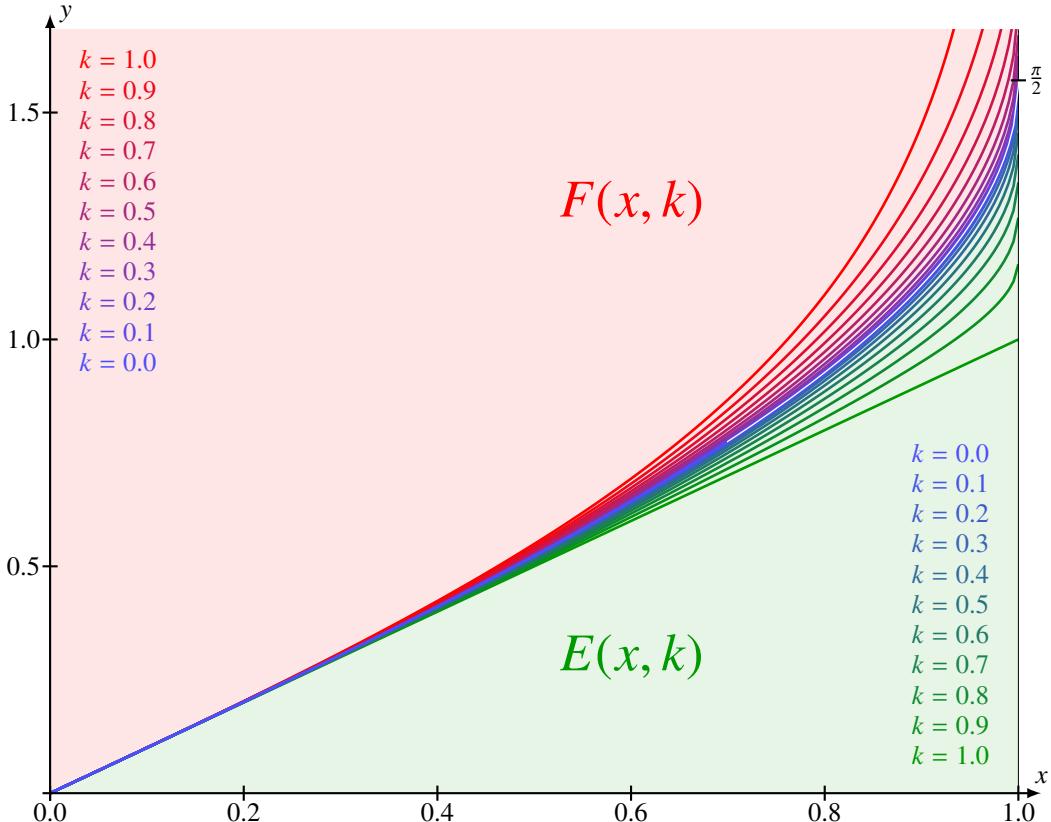


Abbildung 11.2: Unvollständige elliptische Integrale  $F(x, k)$  und  $E(x, k)$  für verschiedene Werte des Parameters  $k$ . Für  $k = 0$  stimmen die Integrale erster und zweiter Art überein,  $F(x, 0) = E(x, 0)$ .

Die Faktoren, die in den Integranden der unvollständigen elliptischen Integrale vorkommen, haben Nullstellen bei  $\pm 1$ ,  $\pm 1/k$  und  $\pm 1/\sqrt{n}$

### Wertebereich

Die unvollständigen elliptischen Integrale betrachtet als reelle Funktionen haben nur positive reelle Werte. Zum Beispiel nimmt das unvollständige elliptische Integral erster Art  $F(k, x)$  nur Werte zwischen 0 und  $K(k)$  an. Wenn komplexe Werte zulässig sind, kann man das Integral auch über die Singularitäten bei  $\pm 1$  und  $\pm 1/k$  hinweg ausführen, erhält dabei aber möglicherweise komplexe Werte, weil die Radikanden in den Integralen negativ werden. Die Schwierigkeit dabei ist, dass die Quadratwurzel nicht eindeutig ist. Welcher Wert der im Zusammenhang richtige ist, hängt davon ab, wie wir dorthin kommen.

Die reelle Achse teilt den Definitionsbereich der unvollständigen elliptischen Integrale in die obere und die untere Halbebene. die Werte für reelle Argumente beschreiben daher den Rand der Wertebereiche für Argumente in der oberen bzw. unteren Halbebene. Indem wir die Werte der elliptischen Integrale für reelle Argumente berechnen, können wir daher den Rand des Wertebereichs ermitteln.

Im folgenden diskutieren wir nur das elliptische Integral erster Art, die anderen können in der gleichen Art behandelt werden. Für Argumentwerte  $x$  im Intervall  $[0, 1]$  ist  $F(k, x) \in \mathbb{R}$ . An der Stelle  $x = 1$  wechselt der Faktor  $(1 - t^2)$  im Nenner das Vorzeichen, der Integrand wird negativ. Für Argumente zwischen 1 und  $1/k$  ist bleibt der Integrand negativ, es muss also ein Wert der Quadratwurzel gewählt werden. Beide Vorzeichen von

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{\pm i}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}} \quad (11.8)$$

sind möglich. Doch welche Wahl ist die “richtige”?

Dazu betrachten wir die Argument  $z = x + i\varepsilon$  auf einer Geraden parallel zur reellen Achse des Definitionsbereichs und in der oberen Halbebene. Da eine holomorphe Funktion die Orientierung erhält und weil das Intervall  $[0, 1]$  auf die reelle Achse abgebildet wird, müssen wir das Vorzeichen der Wurzel so wählen, dass die Werte der Wurzel ebenfalls in der oberen Halbebene liegen. Die “richtige” Wahl der Wurzel von

$$1 - z^2 = 1 - x^2 - 2ix\varepsilon + \varepsilon^2$$

erfüllt zwei Bedingungen.

1. Für nicht zu grosse Werte von  $x$  muss der Wert in der oberen Halbebene liegen. Für solche Werte von  $x$  ist der Realteil  $1 - x^2 + \varepsilon^2 > 0$  und der Imaginärteil  $-2x\varepsilon < 0$ . Für die Wurzel muss man also das Argument von  $1 - z^2$  als Winkel zwischen  $3\pi/2$  und  $2\pi$  wählen und für die Wurzel durch zwei teilen.
2. Der Realteil von  $1 - z^2$  wechselt das Vorzeichen, wenn  $x = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ , der Imaginärteil bleibt dabei negativ. Das Argument ändert von einem Winkel nahe bei aber kleiner als  $2\pi$  zu einem Winkel nahe bei aber grösser als  $\pi$ . Als Wurzel muss daher jene verwendet werden, deren Argument in der Nähe von  $\frac{\pi}{2}$  liegt.

Aus diesem Argument kann man ableiten, dass für die Berandung des Bildes der oberen Halbebene zwischen 1 und  $1/k$  das positive Zeichen in (11.8) gewählt werden muss.

Die anderen Singularitäten auf der reellen Achse können analog behandelt werden und es folgt, dass das Bild der oberen Halbebene ein Rechteck in der oberen Halbebene ist (Abbildung 11.3). Die Ecken auf der reellen Achse liegen bei den reellen Koordinaten

$$\pm F(1, k) = \pm \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \pm K(k).$$

Für die Höhe muss das Integral

$$l(\frac{1}{k}) = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}} \quad (11.9)$$

ausgewertet werden.

## Komplementärmodul

Im vorangegangen Abschnitt wurde gezeigt, dass der Wertebereich des unvollständigen elliptischen Integrals der ersten Art als komplexe Funktion ein Rechteck ist. Die obere Halbebene wird auf

Rechteck der Breite  $2K(k)$  abgebildet, für die Höhe des Rechtecks muss das Integral (11.9) ausgewertet werden. Das Integral läuft von  $t = 1$  bis  $t = 1/k$ , wir möchten daraus ein elliptisches Integral machen, dessen Integrationsintervall bei 0 beginnt. Dazu verwenden wir die Variablentransformation

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 y^2}},$$

die für  $y = 0$  den Wert 1 ergibt, für  $y = 1$  aber  $1/\sqrt{1 - k'^2}$ . Damit das richtige Integrationsintervall entsteht, muss  $k'$  so gewählt werden, dass  $1 - k'^2 = k^2$  ist.

**Definition 11.10.** Ist  $0 \leq k \leq 1$  der Modul eines elliptischen Integrals, dann heisst  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  der Komplementärmodul oder Komplement des Moduls. Es ist  $k^2 + k'^2 = 1$ .

Mit der Ableitung

$$\frac{dt}{dy} = \frac{k'^2 y}{(1 - k'^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

der Substitution wird das Integral (11.9) mit der oberen Grenze  $x$  zu einem Integral mit oberer Grenze

$$x^2 = \frac{1}{1 - k'^2 y_0^2} \Rightarrow y_0^2 = \frac{1}{k'^2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{k'} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

jetzt zu

$$\begin{aligned} l(x) &= \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-k'^2 y^2} - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{1-k'^2 y^2}}} \cdot \frac{k'^2 y}{\sqrt{1 - k'^2 y^2}} \cdot \frac{1}{1 - k'^2 y^2} dy \\ &= \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1 - k'^2 y^2}}{\sqrt{k'^2 y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 - k'^2 y^2}} \cdot \frac{k'^2 y}{1 - k'^2 y^2} dy \\ &= \int_0^{y_0} \sqrt{1 - k'^2 y^2} \cdot \frac{1}{k' \sqrt{1 - y^2}} \cdot \frac{k'}{1 - k'^2 y^2} dy \\ &= \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k'^2 y^2)}} = F(y_0, k') \end{aligned}$$

Die gesuchte Höhe des Rechtecks ergibt sich für die obere Grenze  $\frac{1}{k}$ . In diesem Fall ist

$$y_0 = \frac{1}{k'} \sqrt{1 - k^2} = 1$$

und das unvollständig elliptische Integral wird zum vollständigen elliptischen Integral  $K(k')$ . Die Höhe des Rechtecks des Wertebereichs der oberen Halbebene ist als der Wert des vollständigen elliptischen Integrals erster Art für den Komplementärmodul. Das Bild der komplexen Ebene unter der Abbildung gegeben durch das unvollständige elliptische Integral zweiter Art ist symmetrisch um den Nullpunkt und hat Breite  $2K(k)$  und Höhe  $2K(k')$ .

### Reelle Argument $> 1/k$

Für Argument  $x > 1/k$  sind beide Faktoren im Integranden des unvollständigen elliptischen Integrals negativ, das Integral kann daher wieder als gewöhnliches reelles Integral berechnet werden, es sollte sich daher auch auf das unvollständige elliptische Integral erster Art zurückführen lassen.

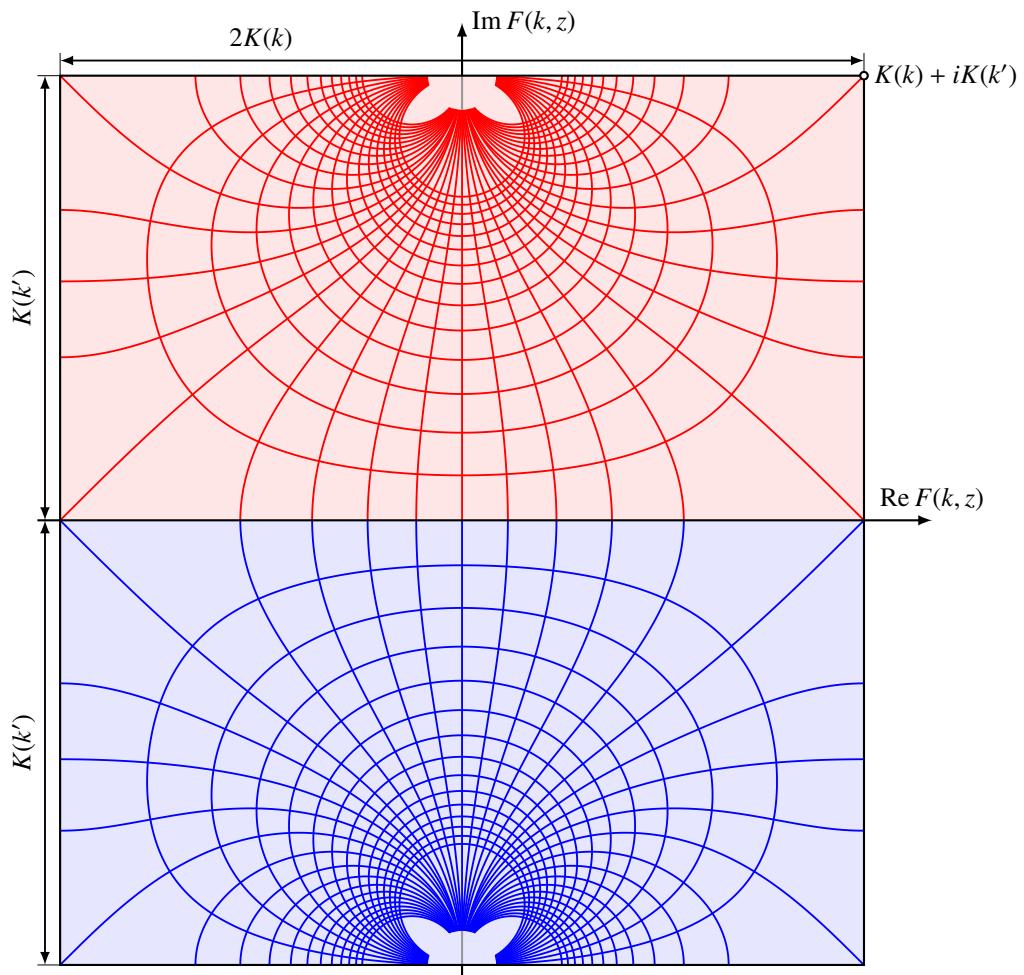


Abbildung 11.3: Der Wertebereich der Funktion  $F(k, z)$  ist ein Rechteck der Breite  $2K(k)$  und  $2K(k')$ . Die obere Halbebene wird in das rote Rechteck abgebildet, die unter in das blaue.

Da wir bereits wissen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, k) = iK(k'),$$

können wir  $F(x, k)$  auch als

$$F(x, k) = iK(k') - \int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

berechnen. Dazu werden wir die Variablentransformation

$$y = \frac{1}{kt} \Leftrightarrow t = \frac{1}{ky} \quad \text{mit} \quad \frac{dt}{dy} = -\frac{1}{ky^2}$$

auf das Integral an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= - \int_{\frac{1}{kx}}^0 \frac{dy}{ky^2 \sqrt{(1-1/(ky)^2)(1-1/y^2)}} \\ &= \int_0^{\frac{1}{kx}} \frac{dy}{\sqrt{(k^2y^2-1)(y^2-1)}} = F\left(\frac{1}{kx}, k\right). \end{aligned}$$

Dies ist das gesuchte unvollständige elliptische Integral erster Art. Insbesondere halten wir noch die Formel

$$F(x, k) = iK(k') - F\left(\frac{1}{kx}, k\right) \quad \text{für } x > \frac{1}{k}$$

für die Werte des elliptischen Integrals erster Art für grosse Argumentwerte fest.

### Berechnung von $F(x, k)$ mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel

Wie das vollständige elliptische Integral  $K(k)$  kann auch das unvollständige elliptische Integral

$$\begin{aligned} F(x, k) &= \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} && \text{mit } x = \sin \varphi \\ &= a \int_0^\varphi \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} && \text{mit } k = b/a \end{aligned}$$

mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel berechnet werden. Dazu muss die Substitution (11.4) verwendet werden, um auch den Winkel  $\varphi_1$  zu berechnen. Zunächst wird (11.4) nach  $x_1 = \sin t_1$  aufgelöst. Durch Multiplikation mit dem Nenner erhält man mit der Abkürzung  $x = \sin t$  die quadratische Gleichung

$$(a-b)xx_1^2 - 2ax_1 + (a+b)x = 0,$$

mit der Lösung

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)x^2}}{(a-b)x}. \quad (11.10)$$

Der Algorithmus zur Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels muss daher verallgemeinert werden zu

$$\left. \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & a_0 &= a \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, & b_0 &= b \\ x_{n+1} &= \frac{a_n - \sqrt{a_n^2 - (a_n^2 - b_n^2)x_n^2}}{(a_n - b_n)x_n}, & x_0 &= x \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Die Folge  $x_n$  konvergiert gegen einen Wert  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Der Wert des unvollständigen elliptischen Integrals ist dann der Grenzwert

$$F(x, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x_n}{M(a_n, b_n)} = \frac{\arcsin x_\infty}{M(1, \sqrt{1 - k^2})}.$$

In dieser Form ist die Berechnung allerdings nicht praktisch durchführbar. Das Problem ist, dass die Differenz  $a_n - b_n$ , die in (11.11) im Nenner vorkommt, sehr schnell gegen Null geht. Außerdem ist die Quadratwurzel im Zähler fast gleich gross wie  $a_n$ , was zu Auslöschung und damit ungenauen Resultaten führt.

Eine Möglichkeit, das Problem zu entschärfen, ist, die Rekursionsformel nach  $\varepsilon = a - b$  zu entwickeln. Mit  $a + b = 2a + \varepsilon$  kann man  $b$  aus der Formel eliminieren und erhält mit Hilfe der binomischen Reihe

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{x\varepsilon} \left( 1 - \sqrt{1 - \varepsilon(2a - \varepsilon)x^2/a^2} \right) \\ &= \frac{a}{x\varepsilon} \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} \varepsilon^k (2a - \varepsilon)^k \frac{x^{2k}}{a^{2k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!} \varepsilon^{k-1} (2a - \varepsilon)^k \frac{x^{2k-1}}{a^{2k-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1!} (2a - \varepsilon) \frac{x}{a} - \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{2!} \varepsilon (2a - \varepsilon)^2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \varepsilon^2 (2a - \varepsilon)^3 \frac{x^5}{a^5} - \dots \\ &= x \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2a} \right) \left( 1 - \frac{\frac{1}{2} - 1}{2!} \varepsilon (2a - \varepsilon) \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \varepsilon^2 (2a - \varepsilon)^2 \frac{x^4}{a^4} - \dots \right) \\ &= x \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2a} \right) \cdot {}_2F_1 \left( \frac{-1}{2}, 1; \frac{-\varepsilon(2a - \varepsilon)}{a^2}; \frac{x^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Form ist wesentlich besser, aber leider kann es bei der numerischen Rechnung passieren, dass  $\varepsilon < 0$  wird.

## 11.2 Jacobische elliptische Funktionen

Die elliptischen Integrale von Abschnitt 11.1 können dazu verwendet werden, die Länge eines Ellipsenbogens aus den Koordinaten der Endpunkte zu berechnen. Die trigonometrischen Funktionen drücken dagegen umgekehrt die Koordinaten eines Punktes auf einem Kreis aus der Länge des Kreisbogens aus. Das elliptische Integral, welches die Bogenlänge auf einer Ellipse zwischen den Punkten  $(1, 0)$  und  $(x, y)$  entspricht also eher der Funktion  $\arcsin y = \sin^{-1} y$ . Möchte man Funktionen konstruieren, die die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen auf die Geometrie von Ellipsen erweitern, dann muss man die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale dafür ins Auge fassen.

### 11.2.1 Elliptische Funktionen als Trigonometrie

Die Ellipse wurde in Abschnitt 3.3.3 als Kegelschnitt erkannt und auf verschiedene Arten parametrisiert. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man die Parametrisierung eines Kreises mit trigonometrischen Funktionen verallgemeinern kann auf eine Parametrisierung einer Ellipse mit den

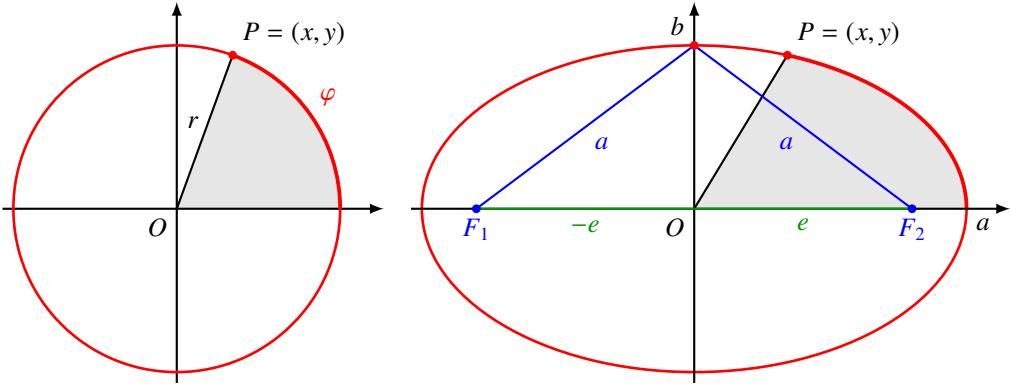


Abbildung 11.4: Kreis und Ellipse zum Vergleich und zur Herleitung der elliptischen Funktionen von Jacobi als “trigonometrische” Funktionen auf einer Ellipse.

drei Funktionen  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$ , die ähnliche Eigenschaften haben wie die trigonometrischen Funktionen.

Die nachstehende Darstellung ist stark inspiriert von William Schwalms sehr zielorientierten Einführung [[buch:schwalm](#)], welche auch als Youtube-Videovorlesung [[buch:schwalm-youtube](#)] zur Verfügung steht.

### Geometrie einer Ellipse

Eine *Ellipse* ist die Menge der Punkte der Ebene, für die die Summe der Entferungen von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$ , den *Brennpunkten*, konstant ist. In Abbildung 11.4 eine Ellipse mit Brennpunkten in  $F_1 = (-e, 0)$  und  $F_2 = (e, 0)$  dargestellt, die durch die Punkte  $(\pm a, 0)$  und  $(0, \pm b)$  auf den Achsen geht. Der Punkt  $(a, 0)$  hat die Entferungen  $a + e$  und  $a - e$  von den beiden Brennpunkten, also die Entfernungssumme  $a + e + a - e = 2a$ . Jeder andere Punkt auf der Ellipse muss ebenfalls diese Entfernungssumme haben, insbesondere auch der Punkt  $(0, b)$ . Seine Entfernung zu jedem Brennpunkt muss aus Symmetriegründen gleich gross, also  $a$  sein. Aus dem Satz von Pythagoras liest man daher ab, dass

$$b^2 + e^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad e^2 = a^2 - b^2$$

sein muss. Die Strecke  $e$  heisst auch (*lineare*) *Exzentrizität* der Ellipse. Das Verhältnis  $\varepsilon = e/a$  heisst die *numerische Exzentrizität* der Ellipse.

### Ellipsengleichung

Der Punkt  $P = (x, y)$  auf der Ellipse hat die Entferungen

$$\begin{aligned} \overline{PF_1}^2 &= y^2 + (x + e)^2 \\ \overline{PF_2}^2 &= y^2 + (x - e)^2 \end{aligned} \tag{11.12}$$

von den Brennpunkten, für die

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \tag{11.13}$$

gelten muss. Man kann nachrechnen, dass ein Punkt  $P$ , der die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllt, auch die Eigenschaft (11.13) erfüllt. Zur Vereinfachung setzen wir  $l_1 = \overline{PF_1}$  und  $l_2 = \overline{PF_2}$ .  $l_1$  und  $l_2$  sind Wurzeln aus der rechten Seite von (11.12). Das Quadrat von  $l_1 + l_2$  ist

$$l_1^2 + 2l_1l_2 + l_2^2 = 4a^2.$$

Um die Wurzeln ganz zu eliminieren, bringt man das Produkt  $l_1l_2$  alleine auf die rechte Seite und quadriert. Man muss also verifizieren, dass

$$(l_1^2 + l_2^2 - 4a^2)^2 = 4l_1^2l_2^2.$$

In den entstehenden Ausdrücken muss man außerdem  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  und

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

substituieren. Diese Rechnung führt man am einfachsten mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms durch, welches obige Behauptung bestätigt.

## Normierung

Die trigonometrischen Funktionen sind definiert als Verhältnisse von Seiten rechtwinkliger Dreiecke. Dadurch, dass man den die Hypotenuse auf Länge 1 normiert, kann man die Sinus- und Kosinus-Funktion als Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis interpretieren.

Für die Koordinaten eines Punktes auf der Ellipse ist dies nicht so einfach, weil es nicht nur eine Ellipse gibt, sondern für jede numerische Exzentrizität mindestens eine mit Halbachse 1. Wir wählen die Ellipsen so, dass  $a$  die grosse Halbachse ist, also  $a > b$ . Als Normierungsbedingung verwenden wir, dass  $b = 1$  sein soll, wie in Abbildung 11.5. Dann ist  $a = 1/\varepsilon > 1$ . In dieser Normierung haben Punkte  $(x, y)$  auf der Ellipse  $y$ -Koordinaten zwischen  $-1$  und  $1$  und  $x$ -Koordinaten zwischen  $-a$  und  $a$ .

Im Zusammenhang mit elliptischen Funktionen wird die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  auch mit

$$k = \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a},$$

die Zahl  $k$  heisst auch der *Modulus*. Man kann  $a$  auch durch  $k$  ausdrücken, durch Quadrieren und Umstellen findet man

$$k^2 a^2 = a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = a^2(k^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Die Gleichung der “Einheitsellipse” zu diesem Modulus ist

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x^2(k^2 - 1) + y^2 = 1.$$

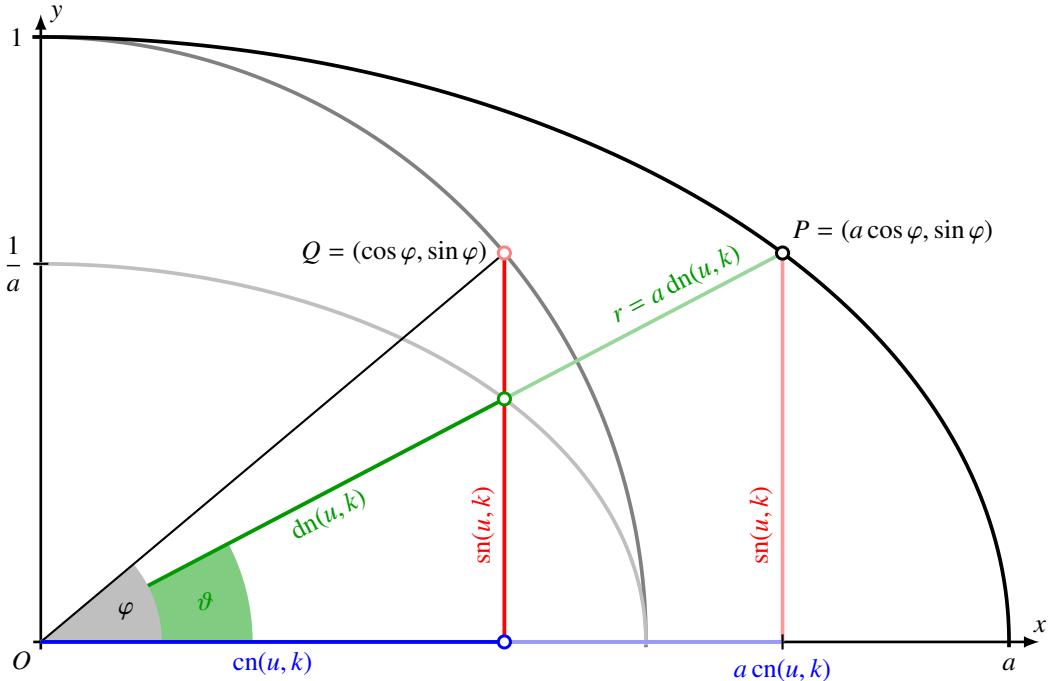


Abbildung 11.5: Definition der elliptischen Funktionen als Trigonometrie an einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $1$ .

### Definition der Jacobischen elliptischen Funktionen

Die elliptischen Funktionen für einen Punkt  $P$  auf der Ellipse mit Modulus  $k$  können jetzt als Verhältnisse der Koordinaten des Punktes definieren. Es stellt sich aber die Frage, was man als Argument verwenden soll. Es soll so etwas wie den Winkel  $\varphi$  zwischen der  $x$ -Achse und dem Radiusvektor zum Punkt  $P$  darstellen, aber wir haben hier noch eine Wahlfreiheit, die wir später ausnützen möchten. Im Moment müssen wir die Frage noch nicht beantworten und nennen das noch unbestimmte Argument  $u$ . Wir kümmern uns später um die Frage, wie  $u$  von  $\varphi$  abhängt.

Die Funktionen, die wir definieren wollen, hängen außerdem auch vom Modulus ab. Falls der verwendete Modulus aus dem Zusammenhang klar ist, lassen wir das  $k$ -Argument weg.

Die Punkte auf dem Einheitskreis haben alle den gleichen Abstand vom Nullpunkt, dies ist gleichzeitig die definierende Gleichung  $r^2 = x^2 + y^2 = 1$  des Kreises. Die Punkte auf der Ellipse erfüllen die Gleichung  $x^2/a^2 + y^2 = 1$ , die Entfernung der Punkte  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  vom Nullpunkt variiert aber.

In Analogie zu den trigonometrischen Funktionen setzen wir jetzt für die Funktionen

$$\text{sinus amplitudinis: } \text{sn}(u, k) = y$$

$$\text{cosinus amplitudinis: } \text{cn}(u, k) = \frac{x}{a}$$

$$\text{delta amplitudinis: } \text{dn}(u, k) = \frac{r}{a},$$

	$\text{sn}(u, k)$	$\text{cn}(u, k)$	$\text{dn}(u, k)$
$\text{sn}(u, k)$	$\text{sn}(u, k)$	$\sqrt{1 - \text{cn}^2(u, k)}$	$\frac{1}{k} \sqrt{1 - \text{dn}^2(u, k)}$
$\text{cn}(u, k)$	$\sqrt{1 - \text{sn}^2(u, k)}$	$\text{cn}(u, k)$	$\frac{1}{k} \sqrt{\text{dn}^2(u, k) - k'^2}$
$\text{dn}(u, k)$	$\sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}$	$\sqrt{k'^2 + k^2 \text{cn}^2(u, k)}$	$\text{dn}(u, k)$

Tabelle 11.2: Jede der Jacobischen elliptischen Funktionen lässt sich unter Verwendung der Relationen (11.15) durch jede andere ausdrücken.

die auch in Abbildung 11.5 dargestellt sind. Aus der Gleichung der Ellipse folgt sofort, dass

$$\text{sn}(u, k)^2 + \text{cn}(u, k)^2 = 1$$

ist. Der Satz von Pythagoras kann verwendet werden, um die Entfernung zu berechnen, also gilt

$$r^2 = a^2 \text{dn}(u, k)^2 = x^2 + y^2 = a^2 \text{cn}(u, k)^2 + \text{sn}(u, k)^2 \Rightarrow a^2 \text{dn}(u, k)^2 = a^2 \text{cn}(u, k)^2 + \text{sn}(u, k)^2. \quad (11.14)$$

Ersetzt man  $a^2 \text{cn}(u, k)^2 = a^2 - a^2 \text{sn}(u, k)^2$ , ergibt sich

$$a^2 \text{dn}(u, k)^2 = a^2 - a^2 \text{sn}(u, k)^2 + \text{sn}(u, k)^2 \Rightarrow \text{dn}(u, k)^2 + \frac{a^2 - 1}{a^2} \text{sn}(u, k)^2 = 1,$$

woraus sich die Identität

$$\text{dn}(u, k)^2 + k^2 \text{sn}(u, k)^2 = 1$$

ergibt. Ebenso kann man aus (11.14) die Funktion  $\text{cn}(u, k)$  eliminieren, was auf

$$a^2 \text{dn}(u, k)^2 = a^2 \text{cn}(u, k)^2 + 1 - \text{cn}(u, k)^2 = (a^2 - 1) \text{cn}(u, k)^2 + 1.$$

Nach Division durch  $a^2$  ergibt sich

$$\text{dn}(u, k)^2 - k^2 \text{cn}(u, k)^2 = \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - a^2 + 1}{a^2} = 1 - k^2 =: k'^2.$$

Wir stellen die hiermit gefundenen Relationen zwischen den grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen für später zusammen in den Formeln

$$\begin{aligned} \text{sn}^2(u, k) + \text{cn}^2(u, k) &= 1 \\ \text{dn}^2(u, k) + k^2 \text{sn}^2(u, k) &= 1 \\ \text{dn}^2(u, k) - k^2 \text{cn}^2(u, k) &= k'^2. \end{aligned} \quad (11.15)$$

zusammen. So wie es möglich ist,  $\sin \alpha$  durch  $\cos \alpha$  auszudrücken, ist es mit (11.15) jetzt auch möglich jede grundlegende elliptische Funktion durch jede anderen auszudrücken. Die Resultate sind in der Tabelle 11.2 zusammengestellt.

## Ableitung

Die trigonometrischen Funktionen sind deshalb so besonders nützlich für die Lösung von Schwingungsdifferentialgleichungen, weil sie die Beziehungen

$$\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi = -\sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi = \cos \varphi$$

erfüllen. So einfach können die Beziehungen natürlich nicht sein, sonst würde sich durch Integration ja wieder nur die trigonometrischen Funktionen ergeben. Durch geschickte Wahl des Arguments  $u$  kann man aber erreichen, dass sie ähnliche nützliche Beziehungen zwischen den Ableitungen ergeben.

Gesucht ist jetzt also eine Wahl für das Argument  $u$  zum Beispiel in Abhängigkeit von  $\varphi$ , dass sich einfache und nützliche Ableitungsformeln ergeben. Wir setzen daher  $u(\varphi)$  voraus und beachten, dass  $x$  und  $y$  ebenfalls von  $\varphi$  abhängen, es ist  $y = \sin \varphi$  und  $x = a \cos \varphi$ . Die Ableitungen von  $x$  und  $y$  nach  $\varphi$  sind

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\varphi} &= \cos \varphi = \frac{1}{a}x = \operatorname{cn}(u, k) \\ \frac{dx}{d\varphi} &= -a \sin \varphi = -ay = -a \operatorname{sn}(u, k).\end{aligned}$$

Daraus kann man jetzt die folgenden Ausdrücke für die Ableitungen der elliptischen Funktionen nach  $\varphi$  ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi} \operatorname{sn}(u, z) &= \frac{d}{d\varphi} y(\varphi) = \cos \varphi = \frac{x}{a} = \operatorname{cn}(u, k) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{cn}(u, k) \frac{d\varphi}{du} \\ \frac{d}{d\varphi} \operatorname{cn}(u, z) &= \frac{d}{d\varphi} \frac{x(\varphi)}{a} = -\sin \varphi = -\operatorname{sn}(u, k) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) = -\operatorname{sn}(u, k) \frac{d\varphi}{du} \\ \frac{d}{d\varphi} \operatorname{dn}(u, z) &= \frac{1}{a} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\varphi} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{ar} \frac{dx}{d\varphi} + \frac{y}{ar} \frac{dy}{d\varphi} = \frac{x}{ar} (-a \operatorname{sn}(u, k)) + \frac{y}{ar} \operatorname{cn}(u, k) \\ &= \frac{x}{ar} (-ay) + \frac{y}{ar} \frac{x}{a} = \frac{xy(-1 + \frac{1}{a^2})}{r} = -\frac{xy(a^2 - 1)}{a^2 r} \\ &= -\frac{a^2 - 1}{ar} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(u, k) = -k^2 \frac{a}{r} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(u, k) \\ &= -k^2 \frac{\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) = -k^2 \frac{\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \frac{d\varphi}{du}.\end{aligned}$$

Die einfachsten Beziehungen ergeben sich offenbar, wenn man  $u$  so wählt, dass

$$\frac{d\varphi}{du} = \operatorname{dn}(u, k) = \frac{r}{a}.$$

Damit haben wir die grundlegenden Ableitungsregeln

**Satz 11.11.** *Die Jacobischen elliptischen Funktionen haben die Ableitungen*

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) &= -\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) &= -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k).\end{aligned}\tag{11.16}$$

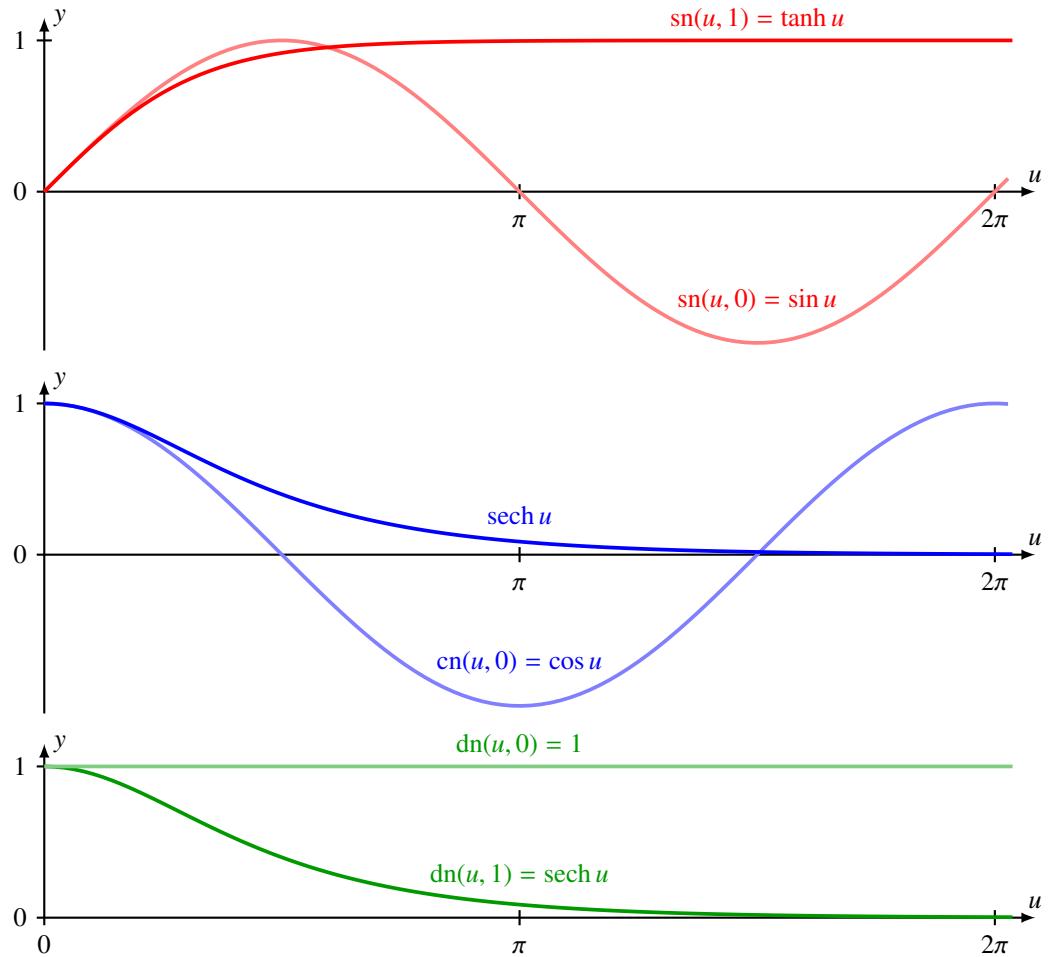


Abbildung 11.6: Grenzfälle der Jacobischen elliptischen Funktionen für die Werte 0 und 1 des Parameters  $k$ .

### Der Grenzwert $k \rightarrow 1$

Für  $k = 1$  ist  $k'^2 = 1 - k^2 = 0$  und es folgt aus den Relationen (11.15)

$$\text{cn}^2(u, k) - k^2 \text{dn}^2(u, k) = k'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cn}^2(u, 1) = \text{dn}^2(u, 1),$$

die beiden Funktionen  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$  fallen also zusammen. Die Ableitungsregeln werden dadurch vereinfacht:

$$\begin{aligned} \text{sn}'(u, 1) &= \text{cn}(u, 1) \text{dn}(u, 1) = \text{cn}^2(u, 1) = 1 - \text{sn}^2(u, 1) & \Rightarrow & \quad y' = 1 - y^2 \\ \text{cn}'(u, 1) &= -\text{sn}(u, 1) \text{dn}(u, 1) = -\text{sn}(u, 1) \text{cn}(u, 1) & \Rightarrow & \quad \frac{z'}{z} = (\log z)' = -y \end{aligned}$$

Die erste Differentialgleichung für  $y$  lässt sich separieren, man findet die Lösung

$$\frac{y'}{1-y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1-y^2} = \int du \quad \Rightarrow \quad \operatorname{artanh}(y) = u \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u.$$

Damit kann man jetzt auch  $z$  berechnen:

$$\begin{aligned} (\log \operatorname{cn}(u, 1))' &= \tanh u & \Rightarrow & \log \operatorname{cn}(u, 1) = - \int \tanh u \, du = -\log \cosh u \\ & & \Rightarrow & \operatorname{cn}(u, 1) = \frac{1}{\cosh u} = \operatorname{sech} u. \end{aligned}$$

Die Grenzfunktionen sind in Abbildung 11.6 dargestellt.

### Das Argument $u$

Die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{du} = \operatorname{dn}(u, k) \tag{11.17}$$

ermöglicht,  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $u$  zu berechnen, ohne jedoch die geometrische Bedeutung zu klären. Das beginnt bereits damit, dass der Winkel  $\varphi$  nicht nicht der Polarwinkel des Punktes  $P$  in Abbildung 11.5 ist, diesen nennen wir  $\vartheta$ . Der Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $\vartheta$  ist

$$\frac{1}{a} \tan \varphi = \tan \vartheta \tag{11.18}$$

Um die geometrische Bedeutung besser zu verstehen, nehmen wir jetzt an, dass die Ellipse mit einem Parameter  $t$  parametrisiert ist, dass also  $\varphi(t)$ ,  $\vartheta(t)$  und  $u(t)$  Funktionen von  $t$  sind. Die Ableitung von (11.18) ist

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \cdot \dot{\vartheta}.$$

Daraus kann die Ableitung von  $\vartheta$  nach  $\varphi$  bestimmt werden, sie ist

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\varphi}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\cos^2 \vartheta}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{a} \cdot \frac{(x/r)^2}{(x/a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{dn}^2(u, k)}.$$

Damit kann man jetzt mit Hilfe von (11.17) die Ableitung von  $\vartheta$  nach  $u$  ermitteln, sie ist

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{d\vartheta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{dn}^2(u, k)} \cdot \operatorname{dn}(u, k) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{dn}(u, k)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{r},$$

wobei wir auch die Definition der Funktion  $\operatorname{dn}(u, k)$  verwendet haben.

In der Parametrisierung mit dem Parameter  $t$  kann man jetzt die Ableitung von  $u$  nach  $t$  berechnen als

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = r \dot{\vartheta}.$$

Darin ist  $\dot{\vartheta}$  die Winkelgeschwindigkeit des Punktes um das Zentrum  $O$  und  $r$  ist die aktuelle Entfernung des Punktes  $P$  von  $O$ .  $r \dot{\vartheta}$  ist also die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes  $P$  senkrecht auf den aktuellen Radiusvektor. Der Parameter  $u$ , der zum Punkt  $P$  gehört, ist also das Integral

$$u(P) = \int_0^P r \, d\vartheta.$$

Für einen Kreis ist die Geschwindigkeit von  $P$  immer senkrecht auf dem Radiusvektor und der Radius ist konstant, so dass  $u(P) = \vartheta(P)$  ist.

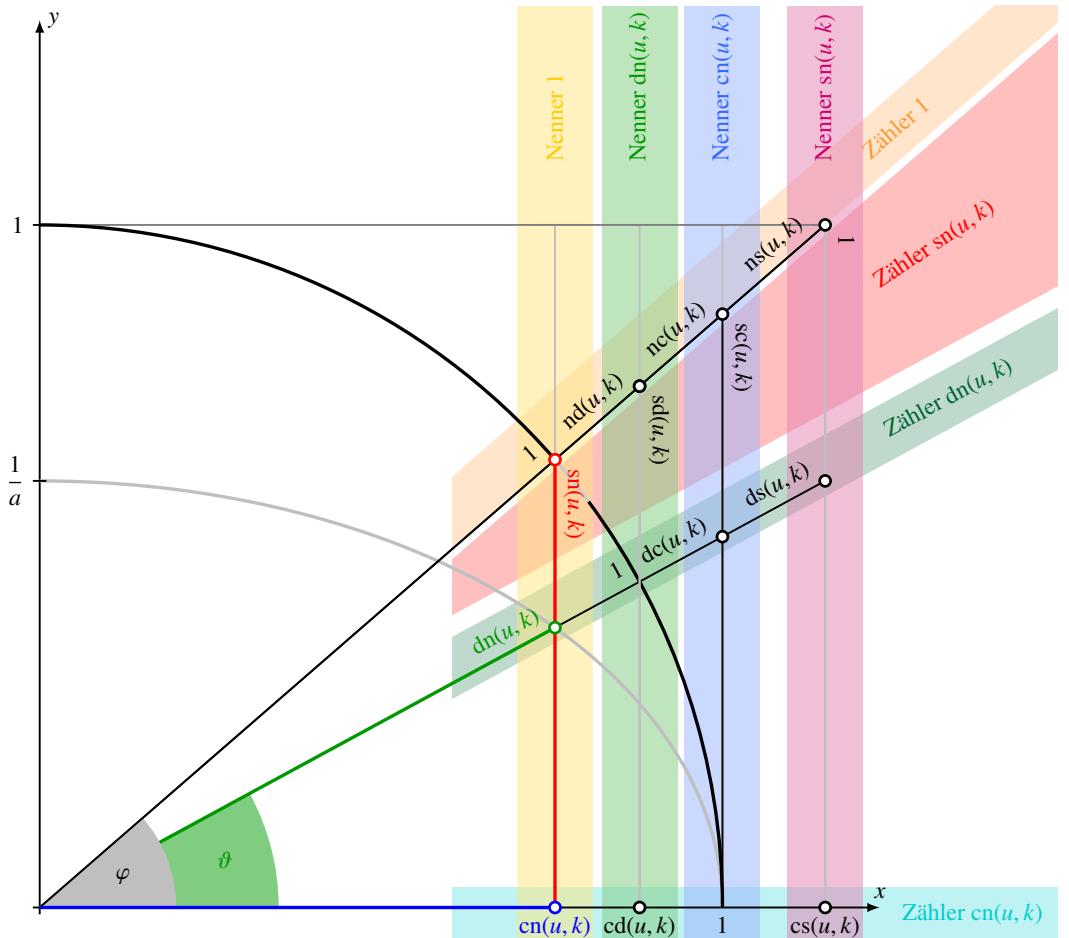


Abbildung 11.7: Die Verhältnisse der Funktionen  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$  geben Anlass zu neun weitere Funktionen, die sich mit Hilfe des Strahlensatzes geometrisch interpretieren lassen.

### Die abgeleiteten elliptischen Funktionen

Zusätzlich zu den grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen lassen sich weitere elliptische Funktionen bilden, die unglücklicherweise die *abgeleiteten elliptischen Funktionen* genannt werden. Ähnlich wie die trigonometrischen Funktionen  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ,  $\sec \alpha$  und  $\csc \alpha$  als Quotienten von  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  definiert sind, sind die abgeleiteten elliptischen Funktionen die in Tabelle 11.3 zusammengestellten Quotienten der grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen. Die Bezeichnungskonvention ist, dass die Funktion  $pq(u, k)$  ein Quotient ist, dessen Zähler durch den Buchstaben p bestimmt ist, der Nenner durch den Buchstaben q. Der Buchstabe n steht für eine 1, die Buchstaben s, c und d stehen für die Anfangsbuchstaben der grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen. Meint man irgend eine der Jacobischen elliptischen Funktionen, schreibt man manchmal auch  $zn(u, k)$ .

In Abbildung 11.7 sind die Quotienten auch geometrisch interpretiert. Der Wert der Funktion

.	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{\text{sn}(u, k)}$	$\frac{1}{\text{cn}(u, k)}$	$\frac{1}{\text{dn}(u, k)}$
1		$\text{ns}(u, k) = \frac{1}{\text{sn}(u, k)}$	$\text{nc}(u, k) = \frac{1}{\text{cn}(u, k)}$	$\text{nd}(u, k) = \frac{1}{\text{dn}(u, k)}$
$\text{sn}(u, k)$		$\text{sn}(u, k) = \frac{\text{sn}(u, k)}{1}$		$\text{sc}(u, k) = \frac{\text{sn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)}$
$\text{cn}(u, k)$		$\text{cn}(u, k) = \frac{\text{cn}(u, k)}{1}$	$\text{cs}(u, k) = \frac{\text{cn}(u, k)}{\text{sn}(u, k)}$	$\text{cd}(u, k) = \frac{\text{cn}(u, k)}{\text{dn}(u, k)}$
$\text{dn}(u, k)$		$\text{dn}(u, k) = \frac{\text{dn}(u, k)}{1}$	$\text{ds}(u, k) = \frac{\text{dn}(u, k)}{\text{sn}(u, k)}$	$\text{dc}(u, k) = \frac{\text{dn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)}$

Tabelle 11.3: Zusammenstellung der abgeleiteten Jacobischen elliptischen Funktionen in hinteren drei Spalten als Quotienten der grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen. Die erste Spalte zum Nenner 1 enthält die grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen.

$nq(u, k)$  ist die auf dem Strahl mit Polarwinkel  $\varphi$  abgetragene Länge bis zu den vertikalen Geraden, die den verschiedenen möglichen Nennern entsprechen. Entsprechend ist der Wert der Funktion  $dq(u, k)$  die Länge auf dem Strahl mit Polarwinkel  $\vartheta$ .

Die Relationen 11.15 ermöglichen, jede Funktion  $zn(u, k)$  durch jede andere auszudrücken. Die schiere Anzahl solcher Beziehungen macht es unmöglich, sie übersichtlich in einer Tabelle zusammenzustellen, daher soll hier nur an einem Beispiel das Vorgehen gezeigt werden:

*Beispiel.* Die Funktion  $sc(u, k)$  soll durch  $cd(u, k)$  ausgedrückt werden. Zunächst ist

$$sc(u, k) = \frac{\text{sn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)}$$

nach Definition. Im Resultat sollen nur noch  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$  vorkommen. Daher eliminieren wir zunächst die Funktion  $\text{sn}(u, k)$  mit Hilfe von (11.15) und erhalten

$$sc(u, k) = \frac{\sqrt{1 - \text{cn}^2(u, k)}}{\text{cn}(u, k)}. \quad (11.19)$$

Nun genügt es, die Funktion  $\text{cn}(u, k)$  durch  $cd(u, k)$  auszudrücken. Aus der Definition und der dritten Relation in (11.15) erhält man

$$\begin{aligned} cd^2(u, k) &= \frac{\text{cn}^2(u, k)}{\text{dn}^2(u, k)} = \frac{\text{cn}^2(u, k)}{k'^2 + k^2 \text{cn}^2(u, k)} \\ \Rightarrow \quad k'^2 cd^2(u, k) + k^2 cd^2(u, k) \text{cn}^2(u, k) &= \text{cn}^2(u, k) \\ \text{cn}^2(u, k) - k^2 cd^2(u, k) \text{cn}^2(u, k) &= k'^2 cd^2(u, k) \\ \text{cn}^2(u, k) &= \frac{k'^2 cd^2(u, k)}{1 - k^2 cd^2(u, k)} \end{aligned}$$

Für den Zähler brauchen wir  $1 - \text{cn}^2(u, k)$ , also

$$1 - \text{cn}^2(u, k) = \frac{1 - k^2 \text{cd}^2(u, k) - k'^2 \text{cd}^2(u, k)}{1 - k^2 \text{cd}^2(u, k)} = \frac{1 - \text{cd}^2(u, k)}{1 - k^2 \text{cd}^2(u, k)}$$

Einsetzen in (11.19) gibt

$$\text{sc}(u, k) = \frac{\sqrt{1 - \text{cd}^2(u, k)}}{\sqrt{1 - k^2 \text{cd}^2(u, k)}} \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2 \text{cd}^2(u, k)}}{k' \text{cd}(u, k)} = \frac{\sqrt{1 - \text{cd}^2(u, k)}}{k' \text{cd}(u, k)}. \quad \circlearrowright$$

### Ableitung der abgeleiteten elliptischen Funktionen

Aus den Ableitungen der grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen können mit der Quotientenregel nun auch beliebige Ableitungen der abgeleiteten Jacobischen elliptischen Funktionen gefunden werden. Als Beispiel berechnen wir die Ableitung von  $\text{sc}(u, k)$ . Sie ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \text{sc}(u, k) &= \frac{d}{du} \frac{\text{sn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)} = \frac{\text{sn}'(u, k) \text{cn}(u, k) - \text{sn}(u, k) \text{cn}'(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)} \\ &= \frac{\text{cn}^2(u, k) \text{dn}(u, k) + \text{sn}^2(u, k) \text{dn}(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)} = \frac{(\text{sn}^2(u, k) + \text{cn}^2(u, k)) \text{dn}(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)} \\ &= \frac{1}{\text{cn}(u, k)} \cdot \frac{\text{dn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)} = \text{nc}(u, k) \text{dc}(u, k). \end{aligned}$$

Man beachte, dass das Quadrat der Nennerfunktion im Resultat der Quotientenregel zur Folge hat, dass die beiden Funktionen im Resultat beide den gleichen Nenner haben wie die Funktion, die abgeleitet wird.

Mit etwas Fleiss kann man nach diesem Muster alle Ableitungen

$$\begin{array}{ll} \text{sn}'(u, k) = \text{cn}(u, k) \text{dn}(u, k) & \text{ns}'(u, k) = -\text{cs}(u, k) \text{ds}(u, k) \\ \text{cn}'(u, k) = -\text{sn}(u, k) \text{dn}(u, k) & \text{nc}'(u, k) = \text{sc}(u, k) \text{dc}(u, k) \\ \text{dn}'(u, k) = -k^2 \text{sn}(u, k) \text{cn}(u, k) & \text{nd}'(u, k) = k^2 \text{sd}(u, k) \text{cd}(u, k) \\ \text{sc}'(u, k) = \text{dc}(u, k) \text{nc}(u, k) & \text{cs}'(u, k) = -\text{ds}(u, k) \text{ns}(u, k) \\ \text{cd}'(u, k) = -k'^2 \text{sd}(u, k) \text{nd}(u, k) & \text{dc}'(u, k) = k'^2 \text{dc}(u, k) \text{nc}(u, k) \\ \text{ds}'(u, k) = -\text{cs}(u, k) \text{ns}(u, k) & \text{sd}'(u, k) = \text{cd}(u, k) \text{nd}(u, k) \end{array} \quad (11.20)$$

finden. Man beachte, dass in jeder Identität alle Funktionen den gleichen zweiten Buchstaben haben.

### Weitere Beziehungen

Für die Jacobischen elliptischen Funktionen lässt sich eine grosse Zahl weiterer Eigenschaften und Identitäten beweisen. Zum Beispiel gibt es Aditionstheoreme, die im Grenzfall  $k \rightarrow 0$  zu den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen werden. Ebenso kann man weitere algebraische Identitäten finden. So lässt sich zum Beispiel die einzige reelle Nullstelle von  $x^5 + x = w$  mit Jacobischen elliptischen Funktionen darstellen, während es nicht möglich ist, diese Lösung als Wurzausdruck zu schreiben.

Die Jacobischen elliptischen Funktionen lassen sich statt auf dem hier gewählten trigonometrischen Weg auch mit Hilfe der Jacobischen Theta-Funktionen definieren, die Lösungen einer Wärmeleitungsgleichung mit geeigneten Randbedingungen sind. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, ziemlich direkt zu Reihen- und Produktentwicklungen für die Funktionen zu führen. Auch die Additionstheorem ergeben sich vergleichsweise leicht. Dieser Zugang zu den Jacobischen elliptischen Funktionen wird in der Standardreferenz [**buch:ellfun-applications**] gewählt.

Bei anderen speziellen Funktionen waren Reihenentwicklungen ein wichtiges Hilfsmittel zu deren numerischer Berechnung. Bei den Jacobischen elliptischen Funktionen ist diese Methode nicht zielführend. Im Abschnitt 11.2.2 wird gezeigt, dass Jacobische elliptische Funktionen gewisse nicht-lineare Differentialgleichungen zu lösen ermöglichen. Dies zeigt auch, dass Jacobischen elliptischen Funktionen Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale sind, die in Abschnitt 11.1.3 mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel berechnet wurden. Die dort angetroffenen numerischen Schwierigkeiten treten bei der Berechnung der Umkehrfunktion jedoch nicht auf.

Die grundlegende Mechanik dieser Berechnungsmethode wird auf Seite 325 dargestellt und und in den Übungsaufgaben 11.2 bis 11.5 etwas näher untersucht wird.

Aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels lässt sich die sogenannte Landen-Transformation herleiten. Sie stellt eine Verbindung zwischen den Werten der elliptischen Funktionen zu verschiedenen Moduli  $k$  her. Sie ist die Basis aller effizienten Berechnungsmethoden.

## 11.2.2 Lösungen von Differentialgleichungen

Die elliptischen Funktionen ermöglichen die Lösung gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen in geschlossener Form. Ziel dieses Abschnitts ist, Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t)^2 = P(x(t))$  mit einem Polynom  $P$  vierten Grades oder  $\ddot{x}(t) = p(x(t))$  mit einem Polynom dritten Grades als rechter Seite lösen zu können.

### Die Differentialgleichungen der elliptischen Funktionen

Um Differentialgleichungen mit elliptischen Funktionen lösen zu können, muss man als erstes die Differentialgleichungen derselben finden. Quadriert man die Ableitungsregel für  $\text{sn}(u, k)$ , erhält man

$$\left( \frac{d}{du} \text{sn}(u, k) \right)^2 = \text{cn}(u, k)^2 \text{ dn}(u, k)^2.$$

Die Funktionen auf der rechten Seite können durch  $\text{sn}(u, k)$  ausgedrückt werden, dies führt auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{du} \text{sn}(u, k) \right)^2 &= (1 - \text{sn}(u, k)^2)(1 - k^2 \text{ sn}(u, k)^2) \\ &= k^2 \text{ sn}(u, k)^4 - (1 + k^2) \text{ sn}(u, k)^2 + 1. \end{aligned}$$

Für die Funktion  $\text{cn}(u, k)$  ergibt die analoge Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \text{ cn}(u, k) &= -\text{sn}(u, k) \text{ dn}(u, k) \\ \left( \frac{d}{du} \text{ cn}(u, k) \right)^2 &= \text{sn}(u, k)^2 \text{ dn}(u, k)^2 \\ &= (1 - \text{cn}(u, k)^2)(k'^2 + k^2 \text{ cn}(u, k)^2) \end{aligned}$$

Funktion $y =$	Differentialgleichung	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$\text{sn}(u, k)$	$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$	$k^2$	$1 + k^2$	1
$\text{cn}(u, k)$	$y'^2 = (1 - y^2)(k'^2 + k^2 y^2)$	$-k^2$	$k^2 - k'^2 = 2k^2 - 1$	$k'^2$
$\text{dn}(u, k)$	$y'^2 = -(1 - y^2)(k'^2 - y^2)$	-1	$1 + k'^2 = 2 - k^2$	$-k'^2$

Tabelle 11.4: Elliptische Funktionen als Lösungsfunktionen für verschiedene nichtlineare Differentialgleichungen der Art (11.21). Die Vorzeichen der Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  entscheidet darüber, welche Funktion für die Lösung verwendet werden muss.

$$= -k^2 \text{cn}(u, k)^4 + (k^2 - k'^2) \text{cn}(u, k)^2 + k'^2$$

und weiter für  $\text{dn}(u, k)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \text{dn}(u, k) &= -k^2 \text{sn}(u, k) \text{cn}(u, k) \\ \left( \frac{d}{du} \text{dn}(u, k) \right)^2 &= (k^2 \text{sn}(u, k)^2)(k^2 \text{cn}(u, k)^2) \\ &= (1 - \text{dn}(u, k)^2)(\text{dn}(u, k)^2 - k'^2) \\ &= -\text{dn}(u, k)^4 + (1 + k'^2) \text{dn}(u, k)^2 - k'^2. \end{aligned}$$

Die drei grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen genügen also alle einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung der selben Art. Das Quadrat der Ableitung ist ein Polynom vierten Grades der Funktion. Die Differentialgleichungen sind in der Tabelle 11.4 zusammengefasst.

### Die Differentialgleichung der abgeleiteten elliptischen Funktionen

Da auch die Ableitungen der abgeleiteten Jacobischen elliptischen Funktionen Produkte von genau zwei Funktionen sind, die sich wieder durch die ursprüngliche Funktion ausdrücken lassen, darf man erwarten, dass alle elliptischen Funktionen einer ähnlichen Differentialgleichung genügen. Um dies besser einzufangen, schreiben wir  $pq(u, k)$ , wenn wir eine beliebige abgeleitete Jacobische elliptische Funktion. Für  $pq = \text{sn}$   $pq = \text{cn}$  und  $pq = \text{dn}$  wissen wir bereits und erwarten für jede andere Funktion dass  $pq(u, k)$  auch, dass sie Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$pq'(u, k)^2 = \alpha pq(u, k)^4 + \beta pq(u, k)^2 + \gamma \quad (11.21)$$

erfüllt, wobei wir mit  $pq'(u, k)$  die Ableitung von  $pq(u, k)$  nach dem ersten Argument meinen. Die Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  hängen von  $k$  ab, ihre Werte für die grundlegenden Jacobischen elliptischen sind in Tabelle 11.5 zusammengestellt.

Die Koeffizienten müssen nicht für jede Funktion wieder neu bestimmt werden, denn für den Kehrwert einer Funktion lässt sich die Differentialgleichung aus der Differentialgleichung der ursprünglichen Funktion ermitteln.

Funktion	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
sn	$k^2$	$-(1+k^2)$	1	ns
cn	$-k^2$	$-(1-2k^2)$	$1-k^2$	nc
dn	1	$2-k^2$	$-(1-k^2)$	nd
sc	$1-k^2$	$2-k^2$	1	cs
sd	$-k^2(1-k^2)$	$-(1-2k^2)$	1	ds
cd	$k^2$	$-(1+k^2)$	1	dc
	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$	Reziproke

Tabelle 11.5: Koeffizienten der Differentialgleichungen für die Jacobischen elliptischen Funktionen. Der Kehrwert einer Funktion hat jeweils die Differentialgleichung der ursprünglichen Funktion, in der die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\gamma$  vertauscht worden sind.

### Differentialgleichung für den Kehrwert einer elliptischen Funktion

Aus der Differentialgleichung (11.21) für die Funktion  $pq(u, k)$  kann auch eine Differentialgleichung für den Kehrwert  $qp(u, k) = pq(u, k)^{-1}$  ableiten. Dazu rechnet man

$$qp'(u, k) = \frac{d}{du} \frac{1}{pq(u, k)} = \frac{pq'(u, k)}{pq(u, k)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} pq(u, k) = \frac{1}{qp(u, k)} \\ pq'(u, k) = \frac{qp'(u, k)}{qp(u, k)^2} \end{cases}$$

und setzt in die Differentialgleichung ein:

$$\left( \frac{qp'(u, k)}{qp(u, k)} \right)^2 = \alpha \frac{1}{qp(u, k)^4} + \beta \frac{1}{qp(u, k)^2} + \gamma.$$

Nach Multiplikation mit  $qp(u, k)^4$  erhält man den folgenden Satz.

**Satz 11.12.** Wenn die Jacobische elliptische Funktion  $pq(u, k)$  der Differentialgleichung (11.21) genügt, dann genügt der Kehrwert  $qp(u, k) = 1/pq(u, k)$  der Differentialgleichung

$$(qp'(u, k))^2 = \gamma qp(u, k)^4 + \beta qp(u, k)^2 + \alpha \quad (11.22)$$

### Differentialgleichung zweiter Ordnung

Leitet man die Differentialgleichung (11.21) nochmals nach  $u$  ab, erhält man die Differentialgleichung

$$2pq''(u, k) pq'(u, k) = 4\alpha pq(u, k)^3 pq'(u, k) + 2\beta pq'(u, k) pq(u, k).$$

Teilt man auf beiden Seiten durch  $2pq'(u, k)$ , bleibt die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2 pq}{du^2} = \beta pq + 2\alpha pq^3.$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit einer Anharmonizität der Form  $2\alpha z^3$ .

### Jacobische elliptische Funktionen als elliptische Integrale

Die in Tabelle 11.4 zusammengestellten Differentialgleichungen ermöglichen nun, den Zusammenhang zwischen den Funktionen  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$  und den unvollständigen elliptischen Integralen herzustellen. Die Differentialgleichungen sind alle von der Form

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = p(u), \quad (11.23)$$

wobei  $p(u)$  ein Polynom vierten Grades in  $y$  ist. Diese Differentialgleichung lässt sich mit Separation lösen. Dazu zieht man aus (11.23) die Wurzel

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{p(y)}$$

und trennt die Variablen. Man erhält

$$\int \frac{dy}{\sqrt{p(y)}} = u + C. \quad (11.24)$$

Solange  $p(y) > 0$  ist, ist der Integrand auf der linken Seite von (11.24) ebenfalls positiv und das Integral ist eine monoton wachsende Funktion  $F(y)$ . Insbesondere ist  $F(y)$  invertierbar. Die Lösung  $y(u)$  der Differentialgleichung (11.23) ist daher

$$y(u) = F^{-1}(u + C).$$

Die Jacobischen elliptischen Funktionen sind daher inverse Funktionen der unvollständigen elliptischen Integrale.

*Beispiel.* Die Differentialgleichung der Funktion  $y = \text{sn}(u, k)$  ist

$$(y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

Aus (11.24) folgt daher, dass

$$u + C = \int \frac{dy}{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}.$$

Das Integral ist das unvollständige elliptische Integral erster Art. Mit der Wahl der Konstanten  $C$  so, dass  $y(0) = 0$  ist, ist  $y(u) = \text{sn}(u, k)$  daher die Umkehrfunktion von  $y \mapsto F(y, k) = u$ .  $\circlearrowright$

### Numerische Berechnung mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel

In Abschnitt 11.1.3 auf Seite 310 wurde erklärt, wie das unvollständige elliptische Integral  $F(x, k)$  mit Hilfe des arithmetisch-geometrischen Mittels berechnet werden kann. Da  $\text{sn}^{-1}(x, k) = F(x, k)$  die Umkehrfunktion ist, kann man den Algorithmus auch zur Berechnung von  $\text{sn}(u, k)$  verwenden. Dazu geht man wie folgt vor:

1.  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ .
2. Berechne die Folgen des arithmetisch-geometrischen Mittels  $a_n$  und  $b_n$  mit  $a_0 = 1$  und  $b_0 = k'$ , bis zum Folgenindex  $N$ , bei dem ausreichende Konvergenz eingetreten ist.
3. Setze  $x_N = \sin(a_N \cdot u)$ .

$n$	$a_n$	$b_n$	$x_n$	
0	1.0000000000000000	0.4358898943540673	0.5422823228691580	= $\text{sn}(u, k)$
1	0.7179449471770336	0.6602195804079634	0.4157689781689663	
2	0.6890822637924985	0.6884775317911533	0.4017521410983242	
3	0.6887798977918259	0.6887798314243237	0.4016042867931862	
4	0.6887798646080748	0.6887798646080740	0.4016042705654757	
5	0.6887798646080744	0.6887798646080744	0.4016042705654755	
6			0.4016042705654755	= $\sin(a_5 u)$

Tabelle 11.6: Berechnung von  $\text{sn}(u, k)$  für  $u = 0.6$  und  $k = 0.2$  mit Hilfe des arithmetisch-geometrischen Mittels. In der ersten Phase des Algorithmus (rot) wird die Folge der arithmetischen und geometrischen Mittel berechnet, in der zweiten Phase werden die Approximationen von  $x_0 = \text{sn}(u, k)$ . Bei  $n = 5$  erreicht die Iteration des arithmetisch-geometrischen Mittels Maschinengenauigkeit, was sich auch darin äussert, dass sich  $x_5$  und  $x_6 = \sin(a_5 u)$  nicht unterscheiden.

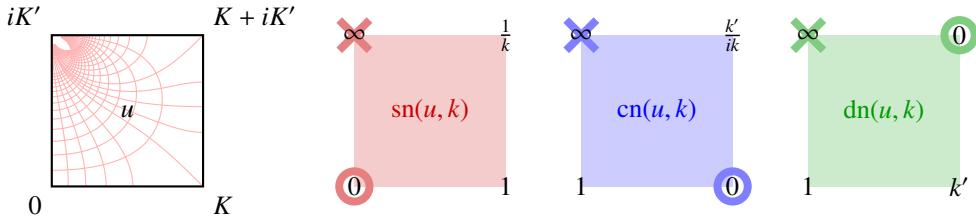


Abbildung 11.8: Werte der grundlegenden Jacobischen elliptischen Funktionen  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  und  $\text{dn}(u, k)$  in den Ecken des Rechtecks mit Ecken  $(0, 0)$  und  $(K, K + iK')$ . Links der Definitionsbereich, rechts die Werte der drei Funktionen. Pole sind mit einem Kreuz ( $\times$ ) bezeichnet, Nullstellen mit einem Kreis ( $\circ$ ).

4. Berechnet für absteigende  $n = N - 1, N - 2, \dots$  die Folge  $x_n$  mit Hilfe der Rekursionsformel

$$x_n = \frac{2a_n x_{n+1}}{a_n + b_n + (a_n - b_n)x_{n+1}^2}, \quad (11.25)$$

die aus (11.4) durch die Substitution  $x_n = \sin t_n$  entsteht.

5. Setze  $\text{sn}(u, k) = x_0$ .

Da die Formel (11.25) nicht unter den numerischen Stabilitätsproblemen leidet, die früher auf Seite 311 diskutiert wurden, ist die Berechnung stabil und sehr schnell. Tabelle 11.6 zeigt die Berechnung am Beispiel  $u = 0.6$  und  $k = 0.2$ .

### Pole und Nullstellen der Jacobischen elliptischen Funktionen

Für die Funktion  $y = \text{sn}(u, k)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)},$$

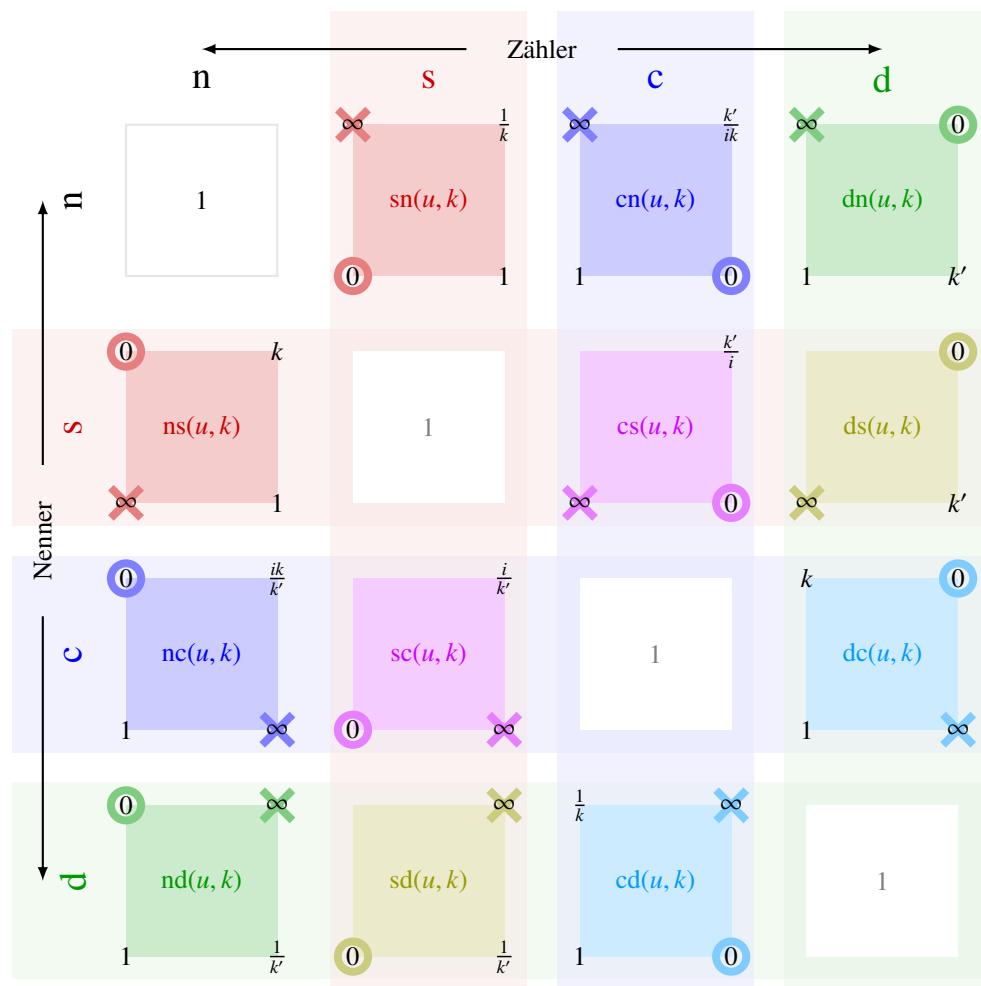


Abbildung 11.9: Pole und Nullstellen aller Jacobischen elliptischen Funktionen mit den gleichen Darstellungskonventionen wie in Abbildung 11.8

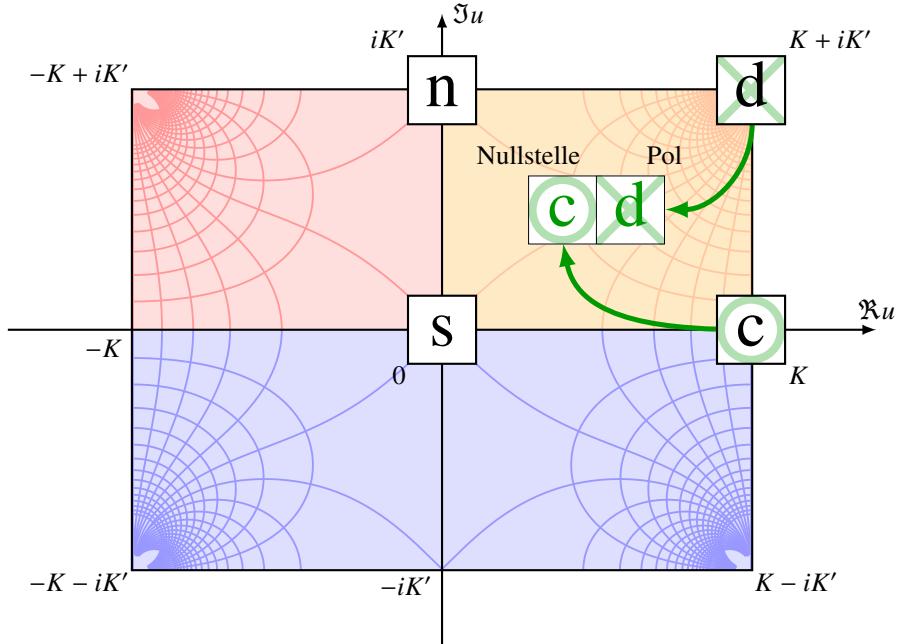


Abbildung 11.10: Auswahl einer Jacobischen elliptischen Funktion mit bestimmten Nullstellen und Polen. Nullstellen und Pole können in jeder der vier Ecken des fundamentalen Rechtecks (gelb, oberer rechter Viertel des Periodenrechtecks) liegen. Der erste Buchstabe des Namens der gesuchten Funktion ist der Buchstabe der Ecke der Nullstelle, der zweite Buchstabe ist der Buchstabe der Ecke des Poles. Im Beispiel die Funktion  $cd(u, k)$ , welche eine Nullstelle in  $K$  hat und einen Pol in  $K + iK'$ .

welche mit dem unbestimmten Integral

$$u + C = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \quad (11.26)$$

gelöst werden kann. Der Wertebereich des Integrals in (11.26) wurde bereits in Abschnitt 11.1.4 auf Seite 306 diskutiert. Daraus können jetzt Nullstellen und Pole der Funktion  $sn(u, k)$  und mit Hilfe von Tabelle 11.2 auch für  $cn(u, k)$  und  $dn(u, k)$  abgelesen werden:

$sn(0, k) = 0$	$cn(0, k) = 1$	$dn(0, k) = 1$
$sn(iK', k) = \infty$	$cn(iK', k) = \infty$	$dn(iK', k) = \infty$
$sn(K, k) = 1$	$cn(K, k) = 0$	$dn(K, k) = k'$
$sn(K + iK', k) = \frac{1}{k}$	$cn(K + iK', k) = \frac{k'}{ik}$	$dn(K + iK', k) = 0$

(11.27)

Abbildung 11.8 zeigt diese Werte an einer schematischen Darstellung des Definitionsbereiches auf. Daraus lassen sich jetzt auch die Werte der abgeleiteten Jacobischen elliptischen Funktionen ablesen, Pole und Nullstellen sind in Abbildung 11.9 zusammengestellt.

### Differentialgleichung des anharmonischen Oszillators

Wir möchten die nichtlineare Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Ax^4 + Bx^2 + C \quad (11.28)$$

mit Hilfe elliptischer Funktionen lösen. Wir nehmen also an, dass die gesuchte Lösung eine Funktion der Form

$$x(t) = a \operatorname{zn}(bt, k) \quad (11.29)$$

ist. Die erste Ableitung von  $x(t)$  ist

$$\dot{x}(t) = a \operatorname{zn}'(bt, k).$$

Indem wir diesen Lösungsansatz in die Differentialgleichung (11.28) einsetzen, erhalten wir

$$a^2 b^2 \operatorname{zn}'(bt, k)^2 = a^4 A \operatorname{zn}(bt, k)^4 + a^2 B \operatorname{zn}(bt, k)^2 + C \quad (11.30)$$

Andererseits wissen wir, dass  $\operatorname{zn}(u, k)$  einer Differentialgleichung der Form (11.21) erfüllt. Wenn wir (11.30) durch  $a^2 b^2$  teilen, können wir die rechte Seite von (11.30) mit der rechten Seite von (11.21) vergleichen:

$$\frac{a^2 A}{b^2} \operatorname{zn}(bt, k)^4 + \frac{B}{b^2} \operatorname{zn}(bt, k)^2 + \frac{C}{a^2 b^2} = \alpha \operatorname{zn}(bt, k)^4 + \beta \operatorname{zn}(bt, k)^2 + \gamma \operatorname{zn}(bt, k).$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha = \frac{a^2 A}{b^2}, \quad \beta = \frac{B}{b^2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{C}{a^2 b^2} \quad (11.31)$$

oder aufgelöst nach den Koeffizienten der ursprünglichen Differentialgleichung

$$A = \frac{\alpha b^2}{a^2} \quad B = \beta b^2 \quad \text{und} \quad C = \gamma a^2 b^2 \quad (11.32)$$

für die Koeffizienten der Differentialgleichung der zu verwendenden Funktion.

Man beachte, dass nach (11.31) die Koeffizienten  $A$ ,  $B$  und  $C$  die gleichen Vorzeichen haben wie  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , da in (11.31) nur mit Quadraten multipliziert wird, die immer positiv sind. Diese Vorzeichen bestimmen, welche der Funktionen gewählt werden muss.

In den Differentialgleichungen für die elliptischen Funktionen gibt es nur den Parameter  $k$ , der angepasst werden kann. Es folgt, dass die Gleichungen (11.31) auch  $a$  und  $b$  bestimmen. Zum Beispiel folgt aus der letzten Gleichung, dass

$$b = \pm \sqrt{\frac{B}{\beta}}.$$

Damit folgt dann aus der zweiten

$$a = \pm \sqrt{\frac{\beta C}{\gamma B}}.$$

Die verbleibende Gleichung legt  $k$  fest. Das folgende Beispiel illustriert das Vorgehen am Beispiel einer Gleichung, die Lösungsfunktion  $\operatorname{sn}(u, k)$  verlangt.

*Beispiel.* Wir nehmen an, dass die Vorzeichen von  $A$ ,  $B$  und  $C$  gemäss Tabelle ?? verlangen, dass die Funktion  $\text{sn}(u, k)$  für die Lösung verwendet werden muss. Die Tabelle sagt dann auch, dass  $\alpha = k^2$ ,  $\beta = 1$  und  $\gamma = 1$  gewählt werden müssen. Aus dem Koeffizientenvergleich (11.31) folgt dann der Reihe nach

$$\begin{aligned} b &= \pm \sqrt{B} \\ a &= \pm \sqrt{\frac{C}{B}} \\ k^2 &= \frac{AC}{B^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass man  $k^2$  durch Einsetzen von (11.32) auch direkt aus den Koeffizienten  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  erhalten kann, nämlich

$$\frac{AC}{B^2} = \frac{\frac{\alpha b^2}{a^2} \gamma a^2 b^2}{\beta^2 b^4} = \frac{\alpha \gamma}{\beta^2}. \quad \circ$$

Da alle Parameter im Lösungsansatz (11.29) bereits festgelegt sind stellt sich die Frage, woher man einen weiteren Parameter nehmen kann, mit dem Anfangsbedingungen erfüllen kann. Die Differentialgleichung (11.28) ist autonom, die Koeffizienten der rechten Seite der Differentialgleichung sind nicht von der Zeit abhängig. Damit ist eine zeitverschobene Funktion  $x(t - t_0)$  ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11.28) hat also die Form

$$x(t) = a \text{zn}(b(t - t_0)),$$

wobei die Funktion  $\text{zn}(u, k)$  auf Grund der Vorzeichen von  $A$ ,  $B$  und  $C$  gewählt werden müssen.

Die Übungsaufgaben 11.1 ist als Lernaufgabe konzipiert, mit der die Lösung der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators beispielhaft durchgearbeitet werden kann.

### 11.2.3 Das mathematische Pendel

Das in Abbildung 11.11 dargestellte Mathematische Pendel besteht aus einem Massepunkt der Masse  $m$  im Punkt  $P$ , der über eine masselose Stange der Länge  $l$  mit dem Drehpunkt  $O$  verbunden ist. Das Pendel bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft  $g$ .

Das Trägheitsmoment des Massepunktes um den Drehpunkt  $O$  ist  $I = ml^2$ . Das Drehmoment der Schwerkraft ist  $M = gl \sin \vartheta$ . Die Bewegungsgleichung wird daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I \dot{\vartheta} &= M = gl \sin \vartheta \\ ml^2 \ddot{\vartheta} &= gl \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} = \frac{g}{l} \sin \vartheta \end{aligned}$$

Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir nicht unmittelbar mit den Differentialgleichungen erster Ordnung der elliptischen Funktionen vergleichen können.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung der elliptischen Funktionen enthalten das Quadrat der ersten Ableitung. In unserem Fall entspricht das einer Gleichung, die  $\dot{\vartheta}^2$  enthält. Der Energieerhaltungssatz kann uns eine solche Gleichung geben. Die Summe von kinetischer und potentieller Energie muss konstant sein. Dies führt auf

$$E_{\text{kinetisch}} + E_{\text{potentiell}} = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + mgl(1 - \cos \vartheta) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\vartheta}^2 + mgl(1 - \cos \vartheta) = E. \quad (11.33)$$

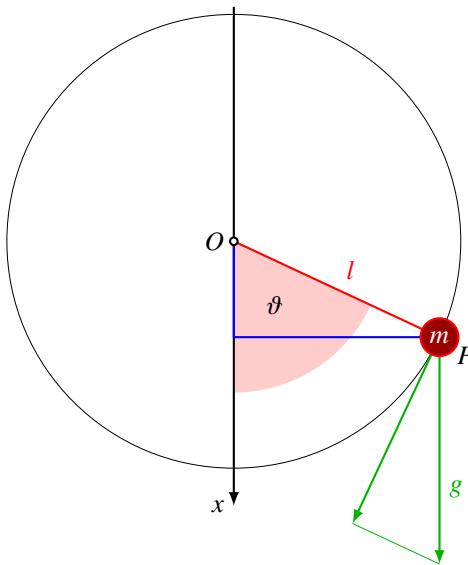


Abbildung 11.11: Mathematisches Pendel

Durch Auflösen nach  $\dot{\vartheta}$  kann man jetzt die Differentialgleichung

$$\dot{\vartheta}^2 = -\frac{2g}{l}(1 - \cos \vartheta) + \frac{2E}{ml^2}$$

finden. In erster Näherung, d.h. wenn man die rechte Seite bis zu vierten Potenzen in eine Taylor-Reihe in  $\vartheta$  entwickelt, ist dies tatsächlich eine Differentialgleichung der Art, wie wir sie für elliptische Funktionen gefunden haben, wir möchten aber eine exakte Lösung konstruieren.

Die maximale Energie für eine Bewegung, bei der sich das Pendel gerade über den höchsten Punkt hinweg zu bewegen vermag, ist  $E = 2lmg$ . Falls  $E < 2mgl$  ist, erwarten wir Schwingungslösungen, bei denen der Winkel  $\vartheta$  immer im offenen Intervall  $(-\pi, \pi)$  bleibt. Für  $E > 2mgl$  wird sich das Pendel im Kreis bewegen, für sehr grosse Energie ist die kinetische Energie dominant, die Verlangsamung im höchsten Punkt wird immer weniger ausgeprägt sein.

### Koordinatentransformation auf elliptische Funktionen

Wir verwenden als neue Variable

$$y = \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = 1 - y^2. \quad (11.34)$$

Die Ableitung ist

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \dot{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^2 = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \dot{\vartheta}^2. \quad (11.35)$$

Man beachte, dass die Koordinate senkrecht zur  $x$ -Achse in Abbildung 11.11 die Auslenkung  $l \sin \vartheta$  ist,  $y$  ist also nicht die Auslenkung senkrecht zur  $x$ -Achse! Aus den Halbwinkelformeln finden wir ausserdem

$$\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 1 - 2y^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos \vartheta = 2y^2. \quad (11.36)$$

Die Grösse  $1 - \cos \vartheta$  haben wir in der Energiegleichung (11.33) bereits angetroffen.

Die Identitäten (11.36) können wir jetzt in die Energiegleichung (11.33) einsetzen und erhalten

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + 2mgy^2 = E \quad (11.37)$$

und nach Division durch  $2ml^2$

$$\frac{1}{4}\dot{\vartheta}^2 = \frac{E}{2ml^2} - \frac{g}{l}y^2. \quad (11.38)$$

Durch Multiplizieren mit der rechten Gleichung von (11.34) erhalten wir auf der linken Seite einen Ausdruck, den wir mit Hilfe von (11.35) als Funktion von  $\dot{y}$  ausdrücken können. Wir erhalten

$$\underbrace{\frac{1}{4}\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \dot{\vartheta}^2}_{= \dot{y}^2} = (1 - y^2)\left(\frac{E}{2ml^2} - \frac{g}{l}y^2\right)$$

$$\dot{y}^2 = (1 - y^2)\left(\frac{E}{2ml^2} - \frac{g}{l}y^2\right) \quad (11.39)$$

Die letzte Gleichung hat die Form einer Differentialgleichung für elliptische Funktionen. Welche Funktion verwendet werden muss, hängt von der relativen Grösse der Koeffizienten in der zweiten Klammer ab.

### Zeittransformation

Die Gleichung (11.39) kann auch in die Form

$$\frac{2ml^2}{E}\dot{y}^2 = (1 - y^2)\left(1 - \frac{2mgl}{E}y^2\right) \quad (11.40)$$

gebracht werden. Der konstante Faktor auf der linken Seite kann wie in der Diskussion des anharmonischen Oszillators durch eine lineare Transformation der Zeit zum Verschwinden gebracht werden. Dazu setzt man  $z(t) = y(bt)$  und bekommt

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}y(bt) \frac{dbt}{dt} = b\dot{y}(bt).$$

Die Zeit muss also mit dem Faktor  $\sqrt{2ml^2/E}$  skaliert werden.

### Nullstellen der rechten Seite

Die rechte Seite von (11.40) hat die beiden Nullstellen 1 und

$$y_0 = \sqrt{\frac{E}{2mgl}}. \quad (11.41)$$

Die Differentialgleichung kann damit als

$$\dot{y}^2 = (1 - y^2)\left(1 - \frac{1}{y_0^2}y^2\right) \quad (11.42)$$

geschrieben werden. Da die linke Seite  $\geq 0$  sein muss, muss  $y \leq \min(1, y_0)$  sein. Damit ergeben sich zwei Fälle. Wenn  $y_0 < 1$  ist, dann schwingt das Pendel. Der Fall  $y_0 > 1$  entspricht einer Bewegung, bei der das Pendel um den Punkt  $O$  rotiert. In den folgenden zwei Abschnitten werden die beiden Fälle ausführlicher diskutiert.

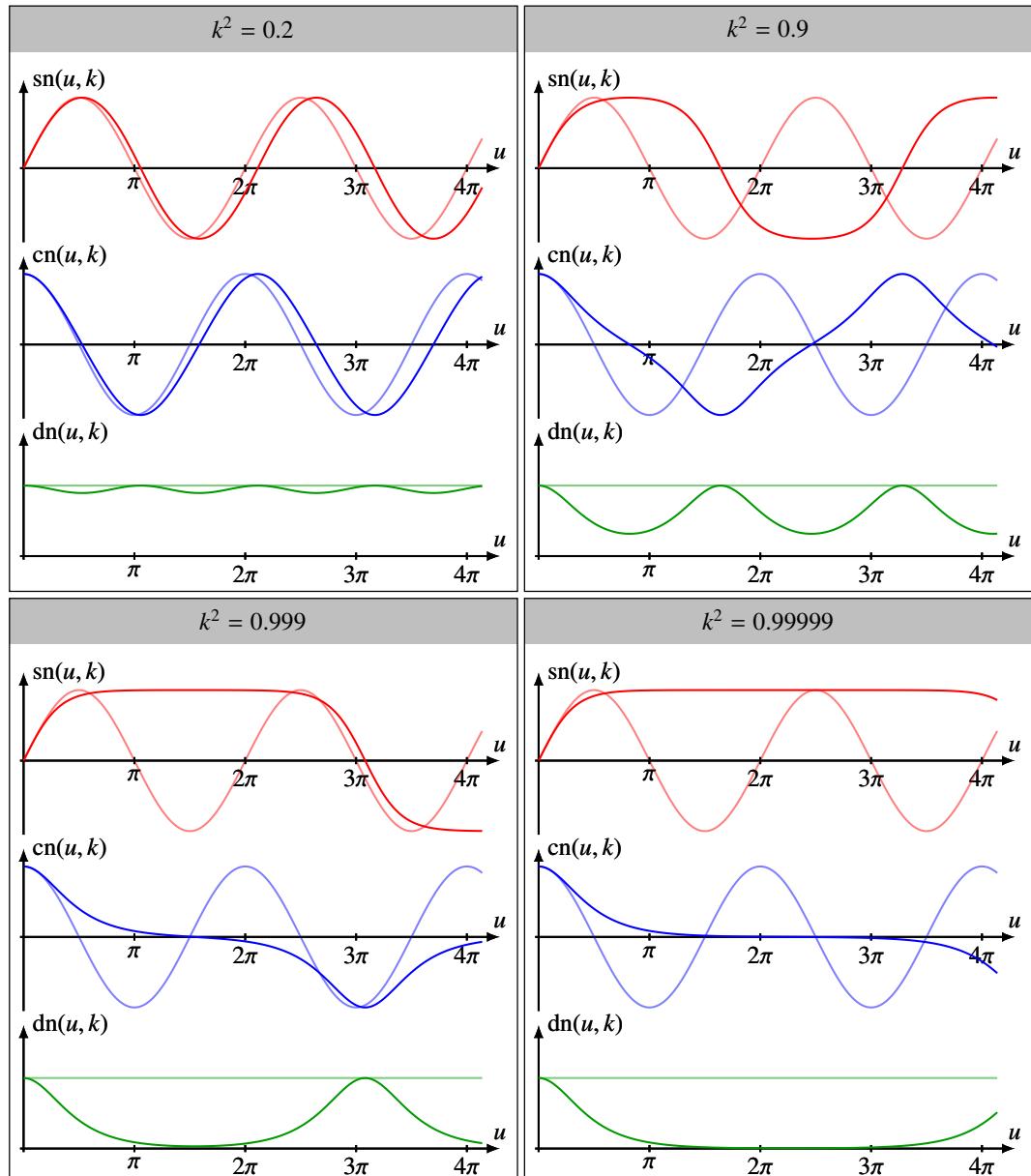


Abbildung 11.12: Abhängigkeit der elliptischen Funktionen von  $u$  für verschiedene Werte von  $k^2 = m$ . Für  $m = 0$  ist  $\text{sn}(u, 0) = \sin u$ ,  $\text{cn}(u, 0) = \cos u$  und  $\text{dn}(u, 0) = 1$ , diese sind in allen Plots in einer helleren Farbe eingezzeichnet. Für kleine Werte von  $m$  weichen die elliptischen Funktionen nur wenig von den trigonometrischen Funktionen ab, es ist aber klar erkennbar, dass die anharmonischen Terme in der Differentialgleichung die Periode mit steigender Amplitude verlängern. Sehr grosse Werte von  $m$  nahe bei 1 entsprechen der Situation, dass die Energie des Pendels fast ausreicht, dass es den höchsten Punkt erreichen kann, was es für  $m$  macht.

### Der Fall $E > 2mgl$

In diesem Fall ist die zweite Nullstelle  $y_0 > 1$  oder  $1/y_0^2 < 1$ . Die Differentialgleichung (11.42) sieht ganz ähnlich aus wie die Differentialgleichung der Funktion  $\text{sn}(u, k)$ , tatsächlich wird sie zur Differentialgleichung von  $\text{sn}(u, k)$  wenn man

$$k^2 = 1/y_0^2 = \frac{2mgl}{E}$$

wählt. In diesem Fall ist also  $y = \text{sn}(u, 1/y_0)$  eine Lösung der Differentialgleichung, wobei  $u$  eine lineare Funktion der Zeit ist.

Wenn  $y_0 \gg 1$  ist, dann ist  $k \approx 0$  und die Bewegung ist entspricht einer gleichförmigen Kreisbewegung. Je näher  $y_0$  an 1 liegt, desto näher an 1 ist auch  $k$  und desto grösser wird die Verlangsamung der Bewegung in der Nähe des Scheitels, das Pendel verweilt sehr lange. Dies äussert sich in Abbildung 11.12 durch die lange Verweildauer der Funktion nahe der Extrema.

### Der Fall $E < 2mgl$

In diesem Fall ist  $y_0 < 1$  und die Differentialgleichung (11.42) sieht zwar immer noch wie eine Differentialgleichung für  $\text{sn}(u, k)$  aus, aber die Lage der Nullstellen der rechten Seite ist verkehrt. Indem wir  $y = y_0 z$  schreiben, erhalten wir

$$\dot{y}^2 = y_0^2 \dot{z}^2 = (1 - y_0^2 z^2)(1 - z^2). \quad (11.43)$$

Wieder kann durch eine lineare Transformation der Zeit der Faktor  $y_0^2$  auf der linken Seite zum Verschwinden gebracht werden, es bleibt die Differentialgleichung der Funktion  $\text{sn}(u, k)$  mit  $k = y_0$ . Daraus liest man ab, dass  $y_0 \text{sn}(u, k)$  die Bewegung des Pendels im oszillatorischen Fall beschreibt, wobei  $u$  wieder eine lineare Funktion der Zeit ist.

Wenn  $y_0 \ll 1$  ist, dann ist auch  $k$  sehr klein und die lineare Näherung ist sehr gut, das Pendel verhält sich wie ein harmonischer Oszillator mit einer Sinus-Schwingung als Lösung. Für  $y_0 = k$  nahe an 1 dagegen erreicht die Schwingung fast den die maximale Höhe und wird dort sehr langsam. Dies äussert sich in Abbildung 11.12. Dies äussert sich in Abbildung 11.12 wiederum durch die lange Verweildauer der Funktion nahe der Extrema.

## 11.3 Lemniskatischer Sinus

Historisch war der *lemniskatische Sinus* die erste elliptische Funktion, die Gauss bereits als 19-jähriger untersucht, aber nicht veröffentlicht hat. In diesem Abschnitt soll die Verbindung zu den Jacobischen elliptischen Funktionen hergestellt werden.

### 11.3.1 Lemniskate

Die *Lemniskate von Bernoulli* ist die Kurve vierten Grades mit der Gleichung

$$(X^2 + Y^2)^2 = 2a^2(X^2 - Y^2). \quad (11.44)$$

Sie ist in Abbildung 11.13 dargestellt. Der Fall  $a = 1/\sqrt{2}$  ist eine Kurve mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

wir nennen sie die *Standard-Lemniskate*.

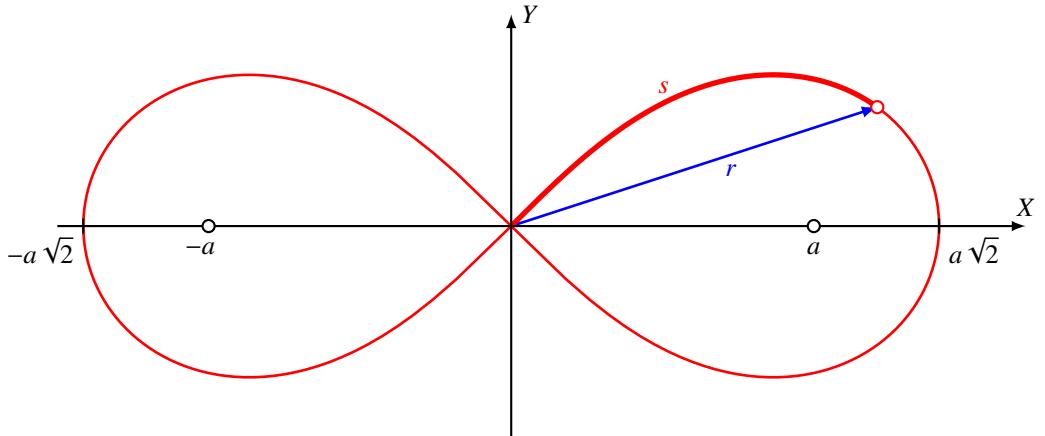


Abbildung 11.13: Bogenlänge und Radius der Lemniskate von Bernoulli.

### Scheitelpunkte

Die beiden Scheitel der Lemniskate befinden sich bei  $X_s = \pm a\sqrt{2}$ . Dividiert man die Gleichung der Lemniskate durch  $X_s^2 = 4a^4$  entsteht

$$\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{a\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \frac{a^2}{2a^2} \left(\left(\frac{X}{a\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{Y}{a\sqrt{2}}\right)^2\right). \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \quad (11.45)$$

wobei wir  $x = X/a\sqrt{2}$  und  $y = Y/a\sqrt{2}$  gesetzt haben. In dieser Normierung, der Standard-Lemniskaten, liegen die Scheitel bei  $\pm 1$ . Dies ist die Skalierung, die für die Definition des lemniskatischen Sinus und Kosinus verwendet werden soll.

### Polarcoordinaten

In Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  gilt nach Einsetzen in (11.45)

$$r^4 = r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = r^2 \cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad r^2 = \cos 2\varphi \quad (11.46)$$

als Darstellung der Lemniskate in Polardarstellung. Sie gilt für Winkel  $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  für das rechte Blatt und  $\varphi \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$  für das linke Blatt der Lemniskate.

### Schnitt eines Kegels mit einem Paraboloid

Schreibt man in der Gleichung (11.44) für die Klammer auf der rechten Seite  $Z^2 = X^2 - Y^2$ , dann wird die Lemniskate die Projektion in die  $X$ - $Y$ -Ebene der Schnittkurve der Flächen, die durch die Gleichungen

$$X^2 - Y^2 = Z^2 \quad \text{und} \quad (X^2 + Y^2) = R^2 = \sqrt{2}aZ \quad (11.47)$$

beschrieben wird. Die linke Gleichung in (11.47) beschreibt einen geraden Kreiskegel, die rechte ist ein Rotationsparaboloid. Die Schnittkurve ist in Abbildung 11.14 dargestellt.

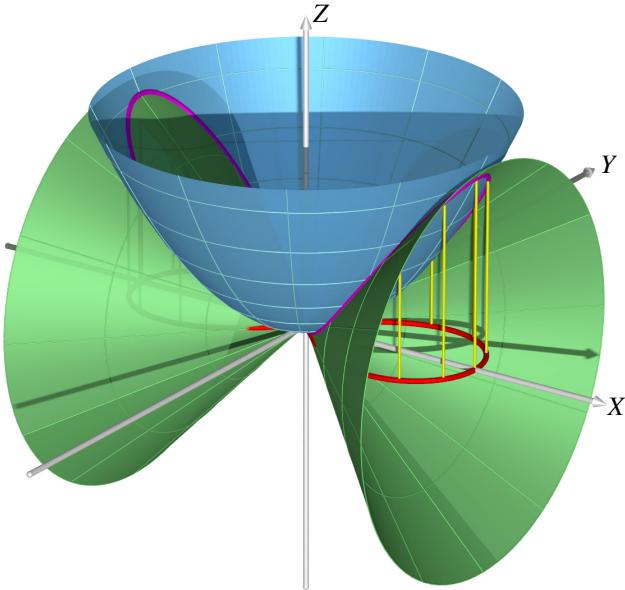


Abbildung 11.14: Lemniskate (rot) als Projektion (gelb) der Schnittkurve (pink) eines geraden Kreiskegels (grün) mit einem Rotationsparaboloid (hellblau).

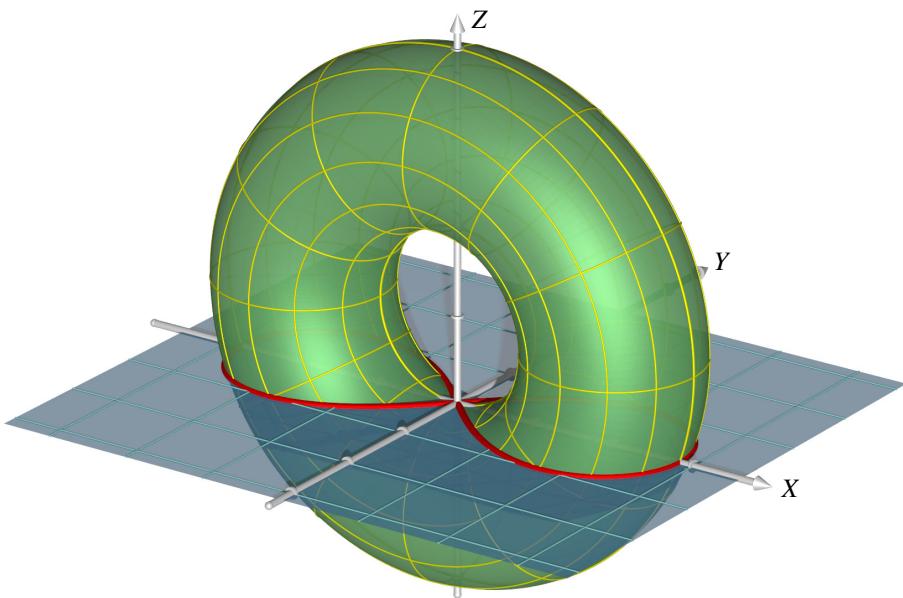


Abbildung 11.15: Die Schnittkurve (rot) eines Torus (grün) mit einer zur Torusachse parallelen Ebene (blau), die den inneren Äquator des Torus berührt, ist eine Lemniskate.

### Schnitt eines Torus mit einer Ebene

Schneidet man einen Torus mit einer Ebene, die zur Achse des Torus parallel ist und den inneren Äquator des Torus berührt, wie in Abbildung 11.15, entsteht ebenfalls eine Lemniskate, wie in diesem Abschnitt nachgewiesen werden soll.

Der in Abbildung 11.15 dargestellte Torus mit den Radien 2 und 1 hat als Achse die um eine Einheit in Z-Richtung verschobene Y-Achse und die X-Z-Ebene als Äquatorebene. Der Torus kann mit

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + \cos u) \cos v \\ \sin u \\ (2 + \cos u) \sin v + 1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, die  $u$ - und  $v$ -Koordinatenlinien sind in der Abbildung gelb eingezeichnet. Die  $v$ -Koordinatenlinien sind Breitenkreise um die Achse des Torus. Aus  $u = 0$  und  $u = \pi$  ergeben sich die Äquatoren des Torus.

Die Gleichung  $Z = 0$  beschreibt eine achsparallele Ebene, die den inneren Äquator berührt. Die Schnittkurve erfüllt daher

$$(2 + \cos u) \sin v + 1 = 0,$$

was wir auch als  $2 + \cos u = -1/\sin v$  schreiben können. Wir müssen nachprüfen, dass die Koordinaten  $X = (2 + \cos u) \cos v$  und  $Y = \sin u$  die Gleichung einer Lemniskate erfüllen.

Zunächst können wir in der  $X$ -Koordinate den Klammerausdruck durch  $\sin v$  ausdrücken und erhalten

$$X = (2 + \cos u) \cos v = -\frac{1}{\sin v} \cos v = -\frac{\cos v}{\sin v} \quad \Rightarrow \quad X^2 = \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} = \frac{1 - \sin^2 v}{\sin^2 v}. \quad (11.48)$$

Auch die  $Y$ -Koordinaten können wir durch  $v$  ausdrücken, nämlich

$$Y^2 = \sin^2 u = 1 - \cos^2 u = 1 - \left( \frac{1}{\sin v} - 2 \right)^2 = \frac{-3 \sin^2 v + 4 \sin v - 1}{\sin^2 v}. \quad (11.49)$$

Die Gleichungen (11.48) und (11.49) zeigen, dass man  $X^2$  und  $Y^2$  sogar einzig durch  $\sin v$  parametrisieren kann. Um die Ausdrücke etwas zu vereinfachen, schreiben wir  $S = \sin v$  und erhalten zusammenfassend

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{1 - S^2}{S^2} \\ Y^2 &= \frac{-3S^2 + 4S - 1}{S^2}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Daraus kann man jetzt die Summen und Differenzen der Quadrate berechnen, sie sind

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \frac{-4S^2 + 4S}{S^2} = \frac{4S(1 - S)}{S^2} = \frac{4(1 - S)}{S} = 4 \frac{1 - S}{S} \\ X^2 - Y^2 &= \frac{2 - 4S + 2S^2}{S^2} = \frac{2(1 - S)^2}{S^2} = 2 \left( \frac{1 - S}{S} \right)^2. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Die Berechnung des Quadrates von  $X^2 + Y^2$  ergibt die Gleichung

$$(X^2 + Y^2)^2 = 16 \left( \frac{1 - S}{S} \right)^2 = 8 \cdot 2 \left( \frac{1 - S}{S} \right)^2 = 2 \cdot 2^2 \cdot (X^2 - Y^2).$$

Sie ist eine Lemniskaten-Gleichung für  $a = 2$ .

### 11.3.2 Bogenlänge

Die Funktionen

$$x(r) = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}, \quad y(r) = \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{1-r^2} \quad (11.52)$$

erfüllen

$$\begin{aligned} x(r)^2 - y(r)^2 &= \frac{r^2(1+r^2)}{2} - \frac{r^2(1-r^2)}{2} \\ &= r^4 = (x(r)^2 + y(r)^2)^2, \end{aligned}$$

sie stellen also eine Parametrisierung der Standard-Lemniskate dar.

Mit Hilfe der Parametrisierung (11.52) kann man die Länge  $s$  des in Abbildung 11.13 dargestellten Bogens der Lemniskate berechnen. Dazu benötigt man die Ableitungen nach  $r$ , die man mit der Produkt- und Kettenregel berechnen kann:

$$\begin{aligned} \dot{x}(r) &= \frac{\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+r^2}} & \Rightarrow & \dot{x}(r)^2 = \frac{1+r^2}{2} + r^2 + \frac{r^4}{2(1+r^2)} \\ \dot{y}(r) &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}} - \frac{r^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}} & \Rightarrow & \dot{y}(r)^2 = \frac{1-r^2}{2} - r^2 + \frac{r^4}{2(1-r^2)}. \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate ist

$$\dot{x}(r)^2 + \dot{y}(r)^2 = 1 + r^4 \frac{1-r^2+1+r^2}{2(1+r^2)(1-r^2)} = 1 + r^4 \frac{2}{2(1-r^4)} = \frac{1-r^4+r^4}{1-r^4} = \frac{1}{1-r^4}.$$

Durch Einsetzen in das Integral für die Bogenlänge bekommt man

$$s(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt. \quad (11.53)$$

### 11.3.3 Darstellung als elliptisches Integral

Das unvollständige elliptische Integral erster Art mit Parameter  $k^2 = -1$  oder  $k = i$  ist

$$K(r, i) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-i^2t^2)}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(-1)t^2)}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = s(r).$$

Der lemniskatische Sinus ist also eine Umkehrfunktion des elliptischen Integrals erster Art für den speziellen Wert  $i$  des Parameters  $k$ .

Die Länge des rechten Blattes der Lemniskate wird mit  $\varpi$  bezeichnet und hat den numerischen Wert

$$\varpi = 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-t^4}} dt = 2.6220575542. \quad (11.54)$$

$\varpi$  ist auch als die *lemniskatische Konstante* bekannt. Der Lemniskatenbogen zwischen dem Nullpunkt und  $(1, 0)$  hat die Länge  $\varpi/2$ .

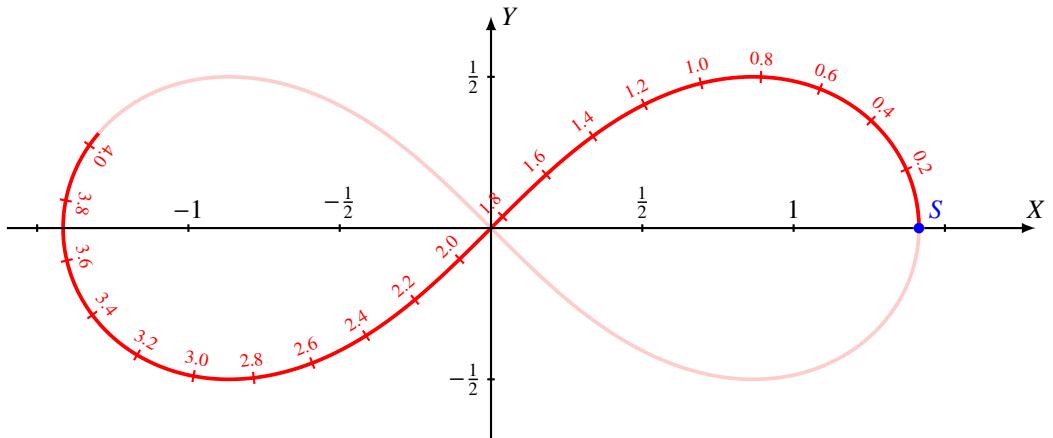


Abbildung 11.16: Parametrisierung der Lemniskate mit Jacobischen elliptischen Funktionen wie in (11.55)

### 11.3.4 Bogenlängenparametrisierung

## Die Lemniskate mit der Gleichung

$$(X^2 + Y^2)^2 = 2(X^2 - Y^2)$$

(der Fall  $a = 1$  in (11.44)) kann mit Jacobischen elliptischen Funktionen parametrisiert werden. Dazu schreibt man

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= \sqrt{2} \operatorname{cn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k) \\ Y(t) &= -\operatorname{cn}(t, k) \operatorname{sn}(t, k) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } k = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (11.55)$$

Abbildung 11.16 zeigt die Parametrisierung. Dem Parameterwert  $t = 0$  entspricht der Scheitelpunkt  $S = (\sqrt{2}, 0)$  der Lemniskate.

## Verifikation der Lemniskatengleichung

Dass (11.55) tatsächlich eine Parametrisierung ist, kann dadurch nachgewiesen werden, dass man die beiden Seiten der definierenden Gleichung der Lemniskate berechnet. Zunächst sind die Quadrate von  $X(t)$  und  $Y(t)$

$$X(t)^2 = 2 \operatorname{cn}(t, k)^2 \operatorname{dn}(t, k)^2$$

$$Y(t)^2 = \text{cn}(t, k)^2 \text{ sn}(t, k)^2.$$

Für Summe und Differenz der Quadrate findet man jetzt

$$\begin{aligned} X(t)^2 + Y(t)^2 &= 2 \operatorname{cn}(t, k)^2 \underbrace{\left(\operatorname{dn}(t, k)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2\right)}_{=1} = 2 \operatorname{cn}(t, k)^2 \\ X(t)^2 - Y(t)^2 &= \operatorname{cn}(t, k)^2 (2 \operatorname{dn}(t, k)^2 - \operatorname{sn}(t, k)^2) \\ &= \operatorname{cn}(t, k)^2 (2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cn}(t, k)^2\right) - (1 - \operatorname{cn}(t, k)^2)) \end{aligned}$$

$$= 2 \operatorname{cn}(t, k)^4.$$

Beide lassen sich also durch  $\operatorname{cn}(t, k)^2$  ausdrücken. Zusammengefasst erhält man

$$\Rightarrow (X(t)^2 + Y(t)^2)^2 = 4 \operatorname{cn}(t, k)^4 = 2(X(t)^2 - Y(t)^2),$$

eine Lemniskaten-Gleichung.

### Berechnung der Bogenlänge

Wir zeigen jetzt, dass dies tatsächlich eine Bogenlängenparametrisierung der Lemniskate ist. Dazu berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \sqrt{2} \operatorname{cn}'(t, k) \operatorname{dn}(t, k) + \sqrt{2} \operatorname{cn}(t, k) \operatorname{dn}'(t, k) \\ &= -\sqrt{2} \operatorname{sn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{sn}(t, k) \operatorname{cn}(t, k)^2 \\ &= -\sqrt{2} \operatorname{sn}(t, k) \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2\right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{sn}(t, k) \left(\frac{3}{2} - \operatorname{sn}(t, k)^2\right) \\ \dot{Y}(t) &= \operatorname{cn}'(t, k) \operatorname{sn}(t, k) + \operatorname{cn}(t, k) \operatorname{sn}'(t, k) \\ &= -\operatorname{sn}(t, k)^2 \operatorname{dn}(t, k) + \operatorname{cn}(t, k)^2 \operatorname{dn}(t, k) \\ &= \operatorname{dn}(t, k) \left(1 - 2 \operatorname{sn}(t, k)^2\right) \end{aligned}$$

und davon die Quadrate

$$\begin{aligned} \dot{X}(t)^2 &= 2 \operatorname{sn}(t, k)^2 \left(\frac{3}{2} - \operatorname{sn}(t, k)^2\right)^2 \\ &= \frac{9}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2 - 6 \operatorname{sn}(t, k)^4 + 2 \operatorname{sn}(t, k)^6 \\ \dot{Y}(t)^2 &= \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2\right) \left(1 - 2 \operatorname{sn}(t, k)^2\right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{2} \operatorname{sn}(t, k)^2 + 6 \operatorname{sn}(t, k)^4 - 2 \operatorname{sn}(t, k)^6. \end{aligned}$$

Für das Bogenlängenintegral wird die Quadratsumme der Ableitungen benötigt, diese ist

$$\dot{X}(t)^2 + \dot{Y}(t)^2 = 1.$$

Dies bedeutet, dass die Bogenlänge zwischen den Parameterwerten 0 und  $t$

$$\int_0^t \sqrt{\dot{X}(\tau)^2 + \dot{Y}(\tau)^2} d\tau = \int_0^s d\tau = t,$$

der Parameter  $t$  ist also ein Bogenlängenparameter.

### Bogenlängenparametrisierung der Standard-Lemniskate

Die mit dem Faktor  $1/\sqrt{2}$  skalierte Standard-Lemniskate mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

hat daher eine Bogenlängenparametrisierung mit

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \operatorname{cn}(\sqrt{2}t, k) \operatorname{dn}(\sqrt{2}t, k) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cn}(\sqrt{2}t, k) \operatorname{sn}(\sqrt{2}t, k) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } k = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (11.56)$$

Der Punkt  $t = 0$  entspricht dem Scheitelpunkt  $S = (1, 0)$  der Lemniskate. Der Parameter misst also die Bogenlänge entlang der Lemniskate ausgehend vom Scheitel.

### 11.3.5 Der lemniskatische Sinus und Kosinus

Der Sinus berechnet die Gegenkathete zu einer gegebenen Bogenlänge des Kreises, er ist die Umkehrfunktion der Funktion, die der Gegenkathete die Bogenlänge zuordnet. Daher ist es naheliegend, die Umkehrfunktion von  $s(r)$  in (11.53) den *lemniskatischen Sinus* zu nennen mit der Bezeichnung  $r = r(s) = \operatorname{sl} s$ .

#### Die komplementäre Bogenlänge

Der Kosinus ist der Sinus des komplementären Winkels. Auch für die lemniskatische Bogenlänge  $s(r)$  lässt sich eine komplementäre Bogenlänge  $t$  definieren, nämlich die Bogenlänge zwischen dem Punkt  $(x(r), y(r))$  und dem Scheitelpunkt  $S = (1, 0)$ . Dies ist der Parameter der Parametrisierung (11.56) des vorangegangenen Abschnittes. Die Bogenlänge zwischen  $O = (0, 0)$  und  $S = (1, 0)$  wurde in (11.54) bereits berechnet, sie ist  $\varpi/2$ . Damit folgt für die beiden Parameter  $s$  und  $t$  die Beziehung  $t = \varpi/2 - s$ .

#### Der lemniskatische Kosinus

Der *lemniskatische Kosinus* ist daher  $\operatorname{cl}(s) = \operatorname{sl}(\varpi/2 - s)$ . Graphen des lemniskatischen Sinus und Kosinus sind in Abbildung 11.17 dargestellt.

Die Parametrisierung (11.56) ist eine Bogenlängenparametrisierung der Standard-Lemniskate. Man kann sie verwenden, um  $r(t)$  zu berechnen. Es ist

$$r(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = \operatorname{cn}(\sqrt{2}t, k)^2 \left( \operatorname{dn}(\sqrt{2}t, k)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sn}(\sqrt{2}t, k)^2 \right) = \operatorname{cn}(\sqrt{2}t, k)^2.$$

Die Wurzel ist

$$r(t) = \operatorname{cn}(\sqrt{2}t, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Der lemniskatische Sinus wurde aber in Abhängigkeit von  $s = \varpi/2 - t$  mittels

$$\operatorname{sl} s = r(s) = \operatorname{cn}(\sqrt{2}(\varpi/2 - s), k)^2$$

definiert. Der lemniskatische Kosinus ist definiert als der lemniskatische Sinus der komplementären Bogenlänge, also

$$\operatorname{cl}(s) = \operatorname{sl}(\varpi/2 - s) = \operatorname{cn}(\sqrt{2}s, k)^2.$$

Die Funktion  $\operatorname{sl}(s)$  und  $\operatorname{cl}(s)$  sind in Abbildung 11.17 dargestellt. Sie sind beide  $2\varpi$ -periodisch. Die Abbildung zeigt ausserdem die Funktionen  $\sin(\pi s/\varpi)$  und  $\cos(\pi s/\varpi)$ , die ebenfalls  $2\varpi$ -periodisch sind.

Die Darstellung des lemniskatischen Sinus und Kosinus durch die Jacobische elliptische Funktion  $\operatorname{cn}(\sqrt{2}s, k)$  zeigt einmal mehr den Nutzen der Jacobischen elliptischen Funktionen.

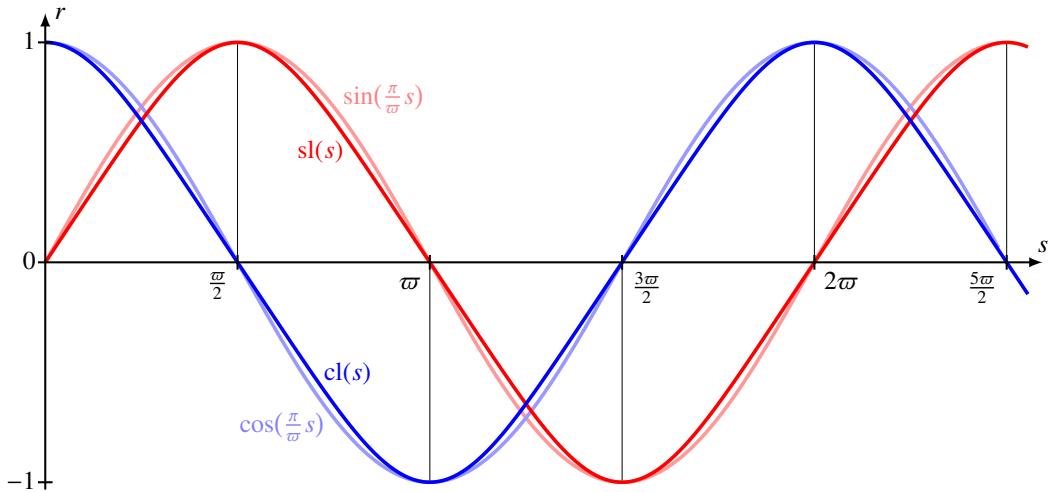


Abbildung 11.17: Lemniskatischer Sinus und Kosinus sowie Sinus und Kosinus mit derart skaliertem Argument, dass die Funktionen die gleichen Nullstellen haben.

## Übungsaufgaben

**11.1.** In einem anharmonischen Oszillator oszilliert eine Masse  $m$  unter dem Einfluss einer Kraft, die nach dem Gesetz

$$F(x) = -\kappa x + \delta x^3$$

von der Auslenkung aus der Ruhelage abhängt. Nehmen Sie im Folgenden an, dass  $\delta > 0$  ist, dass also die rücktreibende Kraft  $F(x)$  kleiner ist als bei einem harmonischen Oszillator. Ziel der folgenden Teilaufgaben ist, die Lösung  $x(t)$  schrittweise dadurch zu bestimmen, dass die Bewegungsgleichung in die Differentialgleichung der Jacobischen elliptischen Funktion  $\text{sn}(u, k)$  umgeformt wird.

- Berechnen Sie die Auslenkung  $x_0$ , bei der die rücktreibende Kraft verschwindet. Eine beschränkte Schwingung kann diese Amplitude nicht überschreiten.
- Berechnen Sie die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Auslenkung.
- Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz für die Gesamtenergie  $E$  dieses Oszillators. Leiten Sie daraus eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für den anharmonischen Oszillator ab, die sie in der Form  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = f(x)$  schreiben.
- Die Amplitude der Schwingung ist derjenige  $x$ -Wert, für den die Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  verschwindet. Leiten Sie die Amplitude aus der Differentialgleichung von Teilaufgabe c) ab. Sie erhalten zwei Werte  $x_{\pm}$ , wobei der kleinere  $x_-$  die Amplitude einer beschränkten Schwingung beschreibt, während die  $x_+$  die minimale Ausgangsamplitude einer gegen  $\infty$  divergenten Lösung ist.
- Rechnen Sie nach, dass

$$\frac{x_+^2 + x_-^2}{2} = x_0^2 \quad \text{und} \quad x_-^2 x_+^2 = \frac{4E}{\delta}.$$

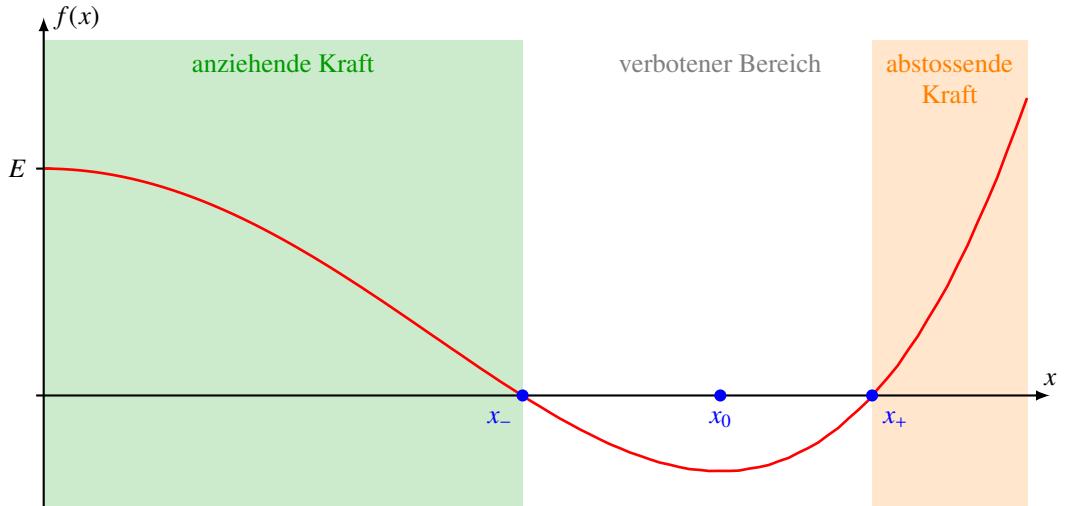


Abbildung 11.18: Rechte Seite der Differentialgleichung (11.58). Eine beschränkte Lösung bewegt sich im Bereich  $x < x_-$  während im Bereich  $x > x_+$  die Kraft abstoßend ist und zu einer divergenten Lösung führt.

- f) Faktorisieren Sie die Funktion  $f(x)$  in der Differentialgleichung von Teilaufgabe c) mit Hilfe der in Teilaufgabe d) bestimmten Nullstellen  $x_{\pm}^2$ .
- g) Dividieren Sie die Differentialgleichung durch  $x_-^2$ , schreiben Sie  $X = x/x_-$  und bringen Sie die Differentialgleichung in die Form

$$A\dot{X}^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), \quad (11.57)$$

wobei  $k^2 = x_-^2/x_+^2$  und  $A$  geeignet gewählt werden müssen.

- h) Verwenden Sie  $t(\tau) = \alpha\tau$  und  $Y(\tau) = X(t(\tau)) = X(\alpha\tau)$  um eine Differentialgleichung für die Funktion  $Y(\tau)$  zu gewinnen, die die Form der Differentialgleichung von  $\text{sn}(u, k)$  hat (Abschnitt 11.2.2), für die also  $A = 0$  in (11.57) ist.
- i) Verwenden Sie die Lösung  $\text{sn}(u, k)$  der in Teilaufgabe h) erhaltenen Differentialgleichung, um die Lösung  $x(t)$  der ursprünglichen Gleichung aufzuschreiben.

*Lösung.* a) Wegen

$$F(x) = -\kappa x \left(1 - \frac{\delta}{\kappa} x^2\right) = -Ix \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{\kappa}}x\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\delta}{\kappa}}x\right)$$

folgt, dass die rücktreibende Kraft bei der Auslenkung  $\pm x_0$  mit

$$x_0^2 = \frac{\kappa}{\delta} \quad \text{oder} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}}$$

verschwindet.

- b) Die potentielle Energie ist die Arbeit, die gegen die rücktreibende Kraft geleistet wird, um die Auslenkung  $x$  zu erreichen. Sie entsteht durch Integrieren der Kraft über das Auslenkungsintervall, also

$$E_{\text{pot}} = - \int_0^x F(\xi) d\xi = \int_0^x \kappa \xi - \delta \xi^3 d\xi = \left[ \kappa \frac{\xi^2}{2} - \delta \frac{\xi^4}{4} \right]_0^x = \kappa \frac{x^2}{2} - \delta \frac{x^4}{4}.$$

- c) Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Die Gesamtenergie ist damit

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \kappa \frac{x^2}{2} - \delta \frac{x^4}{4}.$$

Die verlangte Umformung ergibt

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - \kappa \frac{x^2}{2} + \delta \frac{x^4}{4} \quad (11.58)$$

als Differentialgleichung für  $x$ . Die Ableitung  $\dot{x}$  hat positives Vorzeichen wenn die Kraft abstoßend ist und negatives Vorzeichen dort, wo die Kraft anziehend ist.

- d) Die Amplitude der Schwingung ist derjenige  $x$ -Wert, für den die Geschwindigkeit verschwindet, also eine Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{2E}{m} - \frac{\kappa}{m} x^2 + \frac{\delta}{2m} x^4.$$

Der gemeinsame Nenner  $m$  spielt offenbar keine Rolle. Die Gleichung hat die zwei Lösungen

$$x_{\pm}^2 = \frac{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 4E\delta}}{\delta} = \frac{\kappa}{\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\delta}\right)^2 - \frac{4E}{\delta}}.$$

Die Situation ist in Abbildung 11.18 Für  $x > x_+$  ist die Kraft abstoßend, die Lösung divergiert. Die Lösung mit dem negativen Zeichen  $x_-$  bleibt dagegen beschränkt, dies ist die Lösung, die wir suchen.

- e) Die beiden Formeln ergeben sich aus den Regeln von Vieta für die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form  $x^4 + px^2 + q$ . Die Nullstellen haben den Mittelwert  $-p/2$  und das Produkt  $q$ .

- f) Die rechte Seite der Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe der beiden Nullstellen  $x_{\pm}^2$  faktorisieren und bekommt die Form

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{\delta}{4} (x_+^2 - x^2)(x_-^2 - x^2).$$

- g) Indem die ganze Gleichung durch  $x_-^2$  dividiert wird, entsteht

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{\dot{x}}{x_-} \right)^2 = \frac{\delta}{4} (x_+^2 - x^2) \left( 1 - \frac{x^2}{x_-^2} \right).$$

Schreiben wir  $X = x_+/x_-$  wird daraus

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 = \frac{\delta}{4}\left(x_+^2 - x_-^2 X^2\right)(1 - X^2).$$

Durch Ausklammern von  $x_+^2$  im ersten Faktor wird daraus

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 = \frac{\delta}{4}x_+^2\left(1 - \frac{x_-^2}{x_+^2}X^2\right)(1 - X^2).$$

Mit der Schreibweise  $k^2 = x_-^2/x_+^2$  wird die Differentialgleichung zu

$$\frac{2m}{\delta x_+^2}\dot{X}^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2), \quad (11.59)$$

was der Differentialgleichung für die Jacobische elliptische Funktion  $\text{sn}(u, k)$  bereits sehr ähnlich sieht.

- h) Bis auf den Faktor vor  $\dot{X}^2$  ist (11.59) die Differentialgleichung von  $\text{sn}(u, k)$ . Um den Faktor zum Verschwinden zu bringen, schreiben wir  $t(\tau) = \alpha\tau$ . Die Ableitung von  $Y(\tau) = X(t(\tau))$  nach  $\tau$  ist

$$\frac{dY}{d\tau} = \dot{X}(t(\tau))\frac{dt}{d\tau} = \alpha\dot{X}(t(\tau)) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{dY}{d\tau} = \dot{X}(t(\tau)) \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = \dot{X}(t(\tau))^2.$$

Die Differentialgleichung für  $Y(\tau)$  ist

$$\frac{2m}{\delta x_+^2 \alpha^2} \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = (1 - Y^2)(1 - k^2 Y^2).$$

Der Koeffizient vor der Ableitung wird 1, wenn man

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\delta x_+^2}$$

wählt. Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$Y(\tau) = \text{sn}(\tau, k).$$

- i) Indem man die gefunden Größen einsetzt kann man jetzt die Lösung der Differentialgleichung in geschlossener Form als

$$x(t) = x_- X(t) = x_- \text{sn}\left(t \sqrt{\frac{\delta x_+^2}{2m}}, k\right).$$

Das Produkt  $\delta x_+^2$  kann auch als

$$\delta x_+^2 = \kappa + \sqrt{\kappa - 4\delta E}$$

geschrieben werden. ○

$n$	$k$	$k'$
0	0.2000000000000000	0.979795897113271
1	0.010205144336438	0.999947926158694
2	0.000026037598592	0.9999999999661022
3	0.000000000169489	1.0000000000000000
4	0.0000000000000000	1.0000000000000000

Tabelle 11.7: Numerisches Experiment zur Folge  $(k_n, k'_n)$  gemäss (11.60) mit  $k_0 = 0.2$ 

**11.2.** Die Landen-Transformation basiert auf der Iteration

$$k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n} \quad \text{und} \quad k'_{n+1} = \sqrt{1 - k_{n+1}^2} \quad (11.60)$$

mit den Startwerten  $k_0 = k$  und  $k'_0 = \sqrt{1 - k_0^2}$ . Zeigen Sie, dass  $k_n \rightarrow 0$  und  $k'_n \rightarrow 1$  mit quadratischer Konvergenz.

*Lösung.* Es ist klar, dass  $k'_n \rightarrow 1$  folgt, wenn man zeigen kann, dass  $k_n \rightarrow 0$  gilt. Wir berechnen daher

$$k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{1 + \sqrt{1 - k_n^2}}$$

und erweitern mit dem Nenner  $1 + \sqrt{1 - k_n^2}$  um

$$= \frac{1 - (1 - k_n^2)}{(1 + \sqrt{1 - k_n^2})^2} = \frac{k_n^2}{(1 + \sqrt{1 - k_n^2})^2} \leq k_n^2$$

zu erhalten. Daraus folgt jetzt sofort die quadratische Konvergenz von  $k_n$  gegen 0.

Ein einfaches numerisches Experiment (siehe Tabelle 11.7) bestätigt die quadratische Konvergenz der Folgen.  $\circ$

**11.3.** Aus der in Aufgabe 11.2 konstruierten Folge  $k_n$  kann zu einem vorgegebenen  $u$  ausserdem die Folge  $u_n$  mit der Rekursionsformel

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + k_{n+1}}$$

und Anfangswert  $u_0 = u$  konstruiert werden. Die Landen-Transformation (siehe [buch:ellfun-applications]) führt auf die folgenden Formeln für die Jacobischen elliptischen Funktionen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn}(u_n, k_n) &= \frac{(1 + k_{n+1}) \operatorname{sn}(u_{n+1}, k_{n+1})}{1 + k_{n+1} \operatorname{sn}(u_{n+1}, k_{n+1})^2} \\ \operatorname{cn}(u_n, k_n) &= \frac{\operatorname{cn}(u_{n+1}, k_{n+1}) \operatorname{dn}(u_{n+1}, k_{n+1})}{1 + k_{n+1} \operatorname{sn}(u_{n+1}, k_{n+1})^2} \\ \operatorname{dn}(u_n, k_n) &= \frac{1 - k_{n+1} \operatorname{sn}(u_{n+1}, k_{n+1})^2}{1 + k_{n+1} \operatorname{sn}(u_{n+1}, k_{n+1})^2} \end{aligned} \right\} \quad (11.61)$$

$n$	$k_n$	$u_n$	$\text{sn}(u_n, k_n)$	$\text{cn}(u_n, k_n)$	$\text{dn}(u_n, k_n)$
0	0.900000000000	0.600000000000	0.54228232286	0.84019633556	0.87281338478
1	0.39286445838	0.43076696830	0.41576897816	0.90947026163	0.98656969610
2	0.04188568608	0.41344935827	0.40175214109	0.91574844642	0.99985840483
3	0.00043898784	0.41326793867	0.40160428679	0.91581329801	0.99999998445
4	0.00000004817	0.41326791876	0.40160427056	0.91581330513	1.000000000000
5	0.000000000000	0.41326791876	0.40160427056	0.91581330513	1.000000000000
$N$		0.41326791876	$\sin u_N$	$\cos u_N$	1

Tabelle 11.8: Durchführung des auf der Landen-Transformation basierenden Algorithmus zur Berechnung der Jacobischen elliptischen Funktionen für  $u = 0.6$  und  $k = 0.9$ . Die erste Phase (rot) berechnet die Folgen  $k_n$  und  $u_n$ , die zweite (blau) transformiert die Wert der trigonometrischen Funktionen in die Werte der Jacobischen elliptischen Funktionen.

$n$	$k_n$	$u_n$	$\text{sn}(u_n, k_n)$
0	0.5000000000000000	$1.685750354812596 + 2.156515647499643i$	2.0000000000000000
1	0.071796769724491	$1.572826493259468 + 2.012056490946491i$	3.732050807568877
2	0.001292026239995	$1.570796982340579 + 2.009460215619685i$	3.796651109009551
3	0.000000417333300	$1.570796326794965 + 2.009459377005374i$	3.796672364209438
4	0.000000000000044	$1.570796326794897 + 2.009459377005286i$	3.796672364211658
$N$	0.000000000000000	$1.570796326794897 + 2.009459377005286i$	3.796672364211658

Tabelle 11.9: Berechnung von  $\text{sn}(K + iK', k) = 1/k$  mit Hilfe der Landen-Transformation. Konvergenz der Folge  $k_n$  ist bei  $N = 5$  eingetreten.

Die Transformationsformeln (11.61) sind auch als Gauss-Transformation bekannt. Konstruieren Sie daraus einen numerischen Algorithmus, mit dem sich gleichzeitig die Werte aller drei Jacobischen elliptischen Funktionen für vorgegebene Parameterwerte  $u$  und  $k$  berechnen lassen.

*Lösung.* In der ersten Phase des Algorithmus werden die Folgen  $k_n$  und  $k'_n$  sowie  $u_n$  bis zum Folgenindex  $N$  berechnet, bis  $k_N \approx 0$  angenommen werden darf. Dann gilt

$$\begin{aligned}\text{sn}(u_N, k_N) &= \text{sn}(u_N, 0) = \sin u_N \\ \text{cn}(u_N, k_N) &= \text{cn}(u_N, 0) = \cos u_N \\ \text{dn}(u_N, k_N) &= \text{dn}(u_N, 0) = 1.\end{aligned}$$

In der zweiten Phase des Algorithmus können für absteigende  $n$  jeweils die Formeln (11.61) angewendet werden um nacheinander die Werte der Jacobischen elliptischen Funktionen für Argument  $u_n$  und Parameter  $k_n$  für  $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$  zu bekommen.  $\circlearrowright$

**11.4.** Es ist bekannt, dass  $\text{sn}(K + iK', k) = 1/k$  gilt. Verwenden Sie den Algorithmus von Aufgabe 11.3, um dies für  $k = \frac{1}{2}$  nachzurechnen.

$n$	$a_n$	$b_n$	$\pi_n$
0	1.0000000000000000	0.707106781186548	
1	0.853553390593274	0.840896415253715	3. <u>187672642712106</u>
2	0.847224902923494	0.847201266746892	3. <u>141680293297648</u>
3	0.847213084835193	0.847213084752765	3. <u>141592653895451</u>
4	0.847213084793979	0.847213084793979	3. <u>141592653589822</u>
5	0.847213084793979	0.847213084793979	3. <u>141592653589871</u>
$\infty$			3.141592653589793

Tabelle 11.10: Approximationen der Kreiszahl  $\pi$  mit Hilfe des Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels. In nur 4 Schritten werden 12 Stellen Genauigkeit erreicht.

*Lösung.* Zunächst müssen wir mit dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels

$$K(k) \approx 1.685750354812596 \quad \text{und} \quad K(k') \approx 2.156515647499643$$

berechnen. Aus  $k = \frac{1}{2}$  kann man jetzt die Folgen  $k_n$  und  $u_n$  berechnen, die innert  $N = 5$  Iterationen konvergiert. Sie führt auf

$$u_N = \frac{\pi}{2} + 2.009459377005286i = \frac{\pi}{2} + bi.$$

Jetzt muss der Sinus von  $u_N$  berechnet werden. Dazu verwenden wir die komplexe Darstellung:

$$\sin u_N = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-b} - e^{-i\frac{\pi}{2}+b}}{2i} = \frac{ie^{-b} + ie^b}{2i} = \cosh b = 3.796672364211658.$$

Da der Wert  $\operatorname{sn}(u_N, k_N) = \sin u_N$  reell ist, wird auch die daraus wie in Aufgabe 11.3 konstruierte Folge  $\operatorname{sn}(u_n, k_n)$  reell sein. Die Werte von  $\operatorname{cn}(u_n, k_n)$  und  $\operatorname{dn}(u_n, k_n)$  werden für die Iterationsformeln (11.61) für  $\operatorname{sn}(u_n, k_n)$  nicht benötigt. Die Berechnung ist in Tabelle 11.9 zusammengefasst. Man liest ab, dass  $\operatorname{sn}(K + iK', k) = 2 = 1/k$ , wie erwartet.  $\circ$

**11.5.** Die sehr schnelle Konvergenz des arithmetisch-geometrische Mittels kann auch dazu ausgenutzt werden, eine grosse Zahl von Stellen der Kreiszahl  $\pi$  zu berechnen. Almkvist und Berndt haben gezeigt [**buch:almkvist-berndt**], dass

$$\pi = \frac{4M(1, \sqrt{2}/2)^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}(a_n^2 - b_n^2)}.$$

Verwenden Sie diese Formel, um Approximationen von  $\pi$  zu berechnen.

*Lösung.* Wir schreiben

$$\pi_n = \frac{4a_k^2}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}(a_k^2 - b_k^2)}$$

für die Approximationen von  $\pi$ , wobei  $a_k$  und  $b_k$  die Folgen der arithmetischen und geometrischen Mittel von 1 und  $\sqrt{2}/2$  sind. Die Tabelle 11.10 zeigt die Resultat. In nur 4 Schritten können 12 Stellen Genauigkeit erreicht werden, dann beginnen jedoch bereits Rundungsfehler das Resultat zu beinträchtigen. Für die Berechnung einer grösseren Zahl von Stellen muss daher mit grösserer Präzision gerechnet werden.





## **Teil II**

# **Anwendungen und weiterführende Themen**



# Übersicht

Im zweiten Teil kommen die Teilnehmer des Seminars selbst zu Wort. Die im ersten Teil dargelegten mathematischen Methoden und grundlegenden Modelle werden dabei verfeinert, verallgemeinert und auch numerisch überprüft.



# Kapitel 12

## Verfolgungskurven

David Hugentobler und Yanik Kuster

Ein paar Hinweise für die korrekte Formatierung des Textes

- Absätze werden gebildet, indem man eine Leerzeile einfügt. Die Verwendung von \\ ist nur in Tabellen und Arrays gestattet.
- Die explizite Platzierung von Bildern ist nicht erlaubt, entsprechende Optionen werden gelöscht. Verwenden Sie Labels und Verweise, um auf Bilder hinzuweisen.
- Beginnen Sie jeden Satz auf einer neuen Zeile. Damit ermöglichen Sie dem Versionsverwaltungssysteme, Änderungen in verschiedenen Sätzen von verschiedenen Autoren ohne Konflikt anzuwenden.
- Bilden Sie auch für Formeln kurze Zeilen, einerseits der besseren Übersicht wegen, aber auch um GIT die Arbeit zu erleichtern.

### 12.1 Was sind Verfolgungskurven?

Verfolgungskurven tauchen oft auf bei Fragen wie, welchen Pfad begeht ein Hund während er einer Katze nachrennt. Ein solches Problem hat im Kern immer einen Verfolger und sein Ziel. Der Verfolger versucht sein Ziel zu ergattern und das Ziel versucht zu entkommen. Der Pfad, den der Verfolger während der Verfolgung begeht, wird Verfolgungskurve genannt. Um diese Kurve zu bestimmen, kann das Verfolgungsproblem als DGL formuliert werden. Diese DGL entspringt der Verfolgungsstrategie des Verfolgers.

#### 12.1.1 Verfolger und Verfolgungsstrategie

Wie bereits erwähnt, wird der Verfolger durch seine Verfolgungsstrategie definiert. Wir nehmen an, dass sich der Verfolger an eine Verfolgungsstrategie hält. Dabei gibt es viele mögliche Strategien, die der Verfolger wählen könnte. Die möglichen Strategien entstehen durch Festlegung einzelner Parameter, die der Verfolger kontrollieren kann. Der Verfolger hat nur einen direkten Einfluss auf

	Geschwindigkeit	Abstand	Richtung
Strategie 1	konstant	-	direkt auf Ziel hinzu
Strategie 2	-	konstant	direkt auf Ziel hinzu
Strategie 3	konstant	-	etwas voraus Zielen

Tabelle 12.1: mögliche Verfolgungsstrategien

seinen Geschwindigkeitsvektor. Mit diesem kann er neben Richtung und Betrag auch den Abstand zwischen Verfolger und Ziel kontrollieren. Wenn zwei dieser drei Parameter durch die Strategie definiert werden, ist der dritte nicht mehr frei. Daraus folgt, dass eine Strategie zwei dieser drei Parameter festlegen muss, um den Verfolger komplett zu beschreiben.

In der Tabelle (12.1) sind drei mögliche Strategien aufgezählt. Folgend wird nur noch auf die Strategie 1 eingegangen. Bei dieser Strategie ist die Geschwindigkeit konstant und der Verfolger bewegt sich immer direkt auf sein Ziel hinzu. In der Grafik (??) ist das Problem dargestellt. Wobei  $\vec{V}$  der Ortsvektor des Verfolgers,  $\vec{Z}$  der Ortsvektor des Ziels und  $\vec{\dot{V}}$  der Geschwindigkeitsvektor des Verfolgers ist. Die konstante Geschwindigkeit kann man mit der Gleichung

$$|\vec{\dot{V}}| = \text{konst} = A \quad |A \in \mathbb{R} > 0 \quad (12.1)$$

darstellen. Der Geschwindigkeitsvektor wiederum kann mit der Gleichung

$$\frac{\vec{Z} - \vec{V}}{|\vec{Z} - \vec{V}|} \cdot \vec{\dot{V}} = \vec{\dot{V}} \quad (12.2)$$

beschrieben werden. Durch die Subtraktion der Ortsvektoren  $\vec{V}$  und  $\vec{Z}$  entsteht ein Vektor der vom Punkt  $V$  auf  $Z$  zeigt. Da die Länge dieses Vektors beliebig sein kann, wird durch Division mit dem Betrag, die Länge auf eins festgelegt. Aus dem Verfolgungsproblem ist auch ersichtlich, dass die Punkte  $V$  und  $Z$  nicht am gleichen Ort starten und so eine Division durch Null ausgeschlossen ist. Wenn die Punkte  $V$  und  $Z$  trotzdem am gleichen Ort starten, ist die Lösung trivial. Nun wird die Gleichung mit deren rechten Seite skalar multipliziert, um das Gleichungssystem von zwei auf eine Gleichung zu reduzieren.

$$\frac{\vec{Z} - \vec{V}}{|\vec{Z} - \vec{V}|} \cdot \vec{\dot{V}} = |\vec{\dot{V}}|^2 \quad (12.3)$$

$$\frac{\vec{Z} - \vec{V}}{|\vec{Z} - \vec{V}|} \cdot \frac{\vec{\dot{V}}}{|\vec{\dot{V}}|} = 1 \quad (12.4)$$

Diese DGL ist der Kern des Verfolgungsproblems, insofern der Verfolger die Strategie 1 verwendet.

## 12.1.2 Ziel

Als nächstes gehen wir auf das Ziel ein. Wie der Verfolger wird auch unser Ziel sich strikt an eine Fluchtstrategie halten, welche von Anfang an bekannt ist. Diese Strategie kann als Parameterdarstellung der Position nach der Zeit beschrieben werden. Zum Beispiel könnte ein Ziel auf einer Geraden

flüchten, welches auf einer Ebene mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} 0 \\ t \end{cases} \quad (12.5)$$

beschrieben werden könnte. Mit dieser Gleichung ist das Ziel auch schon vollumfänglich definiert. Die Fluchtkurve kann eine beliebige Form haben, jedoch wird die zu lösende DGL immer komplexer.

## 12.2 Beispiel Verfolgungskurve

In diesem Abschnitt wird rechnerisch das Beispiel einer Verfolgungskurve mit der Verfolgungsstrategie 1 beschreiben.

Das zu verfolgende Ziel  $\vec{Z}$  wandert auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit  $v = 1$ , wobei diese Gerade der  $y$ -Achse entspricht. Der Verfolger  $\vec{V}$  startet auf einem beliebigen Punkt im ersten Quadrant und bewegt sich auch mit konstanter Geschwindigkeit. Diese Anfangspunkte oder Anfangsbedingungen können wie folgt formuliert werden:

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}; \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (12.6)$$

Wenn man diese Startpunkte in die Gleichung der Verfolgungskurve (??) einfügt ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{\begin{pmatrix} 0-x \\ t-y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2 + (t-y)^2}} \circ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 1 \quad (12.7)$$

Macht man den linken Term Bruchfrei und löst das Skalarprodukt auf, dann ergibt sich folgende DGL:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0-x \\ t-y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \sqrt{x^2 + (t-y)^2} \\ -x \cdot \dot{x} + (t-y) \cdot \dot{y} &= \sqrt{x^2 + (t-y)^2} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Im nächsten Schritt quadriert man beide Seiten, erweitert den neu entstandenen quadratischen Term, bringt alles auf die linke Seite und klammert gemeinsames aus.

$$\begin{aligned} ((t-y)\dot{y} - x\dot{x})^2 &= x^2 + (t-y)^2 \\ x^2\dot{x}^2 - 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} + (t-y)^2\dot{y}^2 &= x^2 + (t-y)^2 \\ \dot{x}^2x^2 - x^2 - 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2(t-y)^2 - (t-y)^2 &= 0 \\ (\dot{x}^2 - 1) \cdot x^2 - 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} + (\dot{y}^2 - 1) \cdot (t-y)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck kann mittels folgender Beziehung  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$  vereinfacht werden, anschliessend wird die Gleichung mit  $-1$  multipliziert:

$$\underbrace{(\dot{x}^2 - 1) \cdot x^2}_{-\dot{y}^2} - 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} + \underbrace{(\dot{y}^2 - 1) \cdot (t-y)^2}_{-\dot{x}^2} = 0$$

$$-\dot{y}^2 \cdot x^2 - 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} - \dot{x}^2 \cdot (t-y)^2 = 0$$

$$\dot{y}^2 \cdot x^2 + 2x(t-y)\dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 \cdot (t-y)^2 = 0$$

Im letzten Ausdruck erkennt man das Muster einer binomischen Formel, was den Ausdruck wesentlich vereinfacht:

$$\begin{aligned} x^2\dot{y}^2 + 2 \cdot x\dot{y} \cdot (t-y)\dot{x} + (t-y)^2\dot{x}^2 &= 0 \\ (x\dot{y} + (t-y)\dot{x})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn man nun beidseitig die Quadratwurzel zieht, dann ergibt sich im Vergleich zu (12.8) eine wesentlich einfachere DGL:

$$x\dot{y} + (t-y)\dot{x} = 0 \quad (12.9)$$

Um die Ableitung nach der Zeit wegzubringen, wird beidseitig mit  $\dot{x}$  dividiert, wobei  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$  entspricht.

$$x\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + (t-y)\frac{\dot{x}}{\dot{x}} = 0$$

Nach dem Kürzen und Vereinfachen ergibt sich folgende DGL:

$$xy' + t - y = 0 \quad (12.10)$$

Hier wäre es passend wenn man die Abhängigkeit nach  $t$  komplett wegbringen könnte. Um dies zu erreichen muss man auf die Definition der Bogenlänge aus Analysis 2 zurückgreifen:

$$s = v \cdot t = t = \int_{x_0}^{x_{end}} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (12.11)$$

Nicht gerade auffällig ist die Richtung in welche hier integriert wird. Wenn der Verfolger sich wie vorgesehen am Anfang im ersten Quadranten befindet, dann muss sich dieser nach links bewegen, was nicht der üblichen Integrationsrichtung entspricht. Um eine Integration wie üblich von links nach rechts ausführen zu können, müssen die Integrationsgrenzen vertauscht werden, was in einem Vorzeichenwechsel resultiert. Wenn man nun (12.11) in die DGL (12.10) einfügt, dann ergibt sich folgender Ausdruck:

$$xy' - \int \sqrt{1 + y'^2} dx - y = 0 \quad (12.12)$$

Um das Integral los zu werden, leitet man den vorherigen Ausdruck (12.12) nach  $x$  ab:

$$\begin{aligned} y' + xy'' - \sqrt{1 + y'^2} - y' &= 0 \\ xy'' - \sqrt{1 + y'^2} &= 0 \end{aligned}$$

Mittels der Substitution  $y' = u$  kann vorherige DGL in eine erster Ordnung umgewandelt werden:

$$xu' - \sqrt{1 + u^2} = 0$$

Welche mittels Separation gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(u) + C_L &= \ln(x) + C_R \\ \operatorname{arsinh}(u) &= \ln(x) + C \\ u &= \sinh(\ln(x) + C) \end{aligned}$$

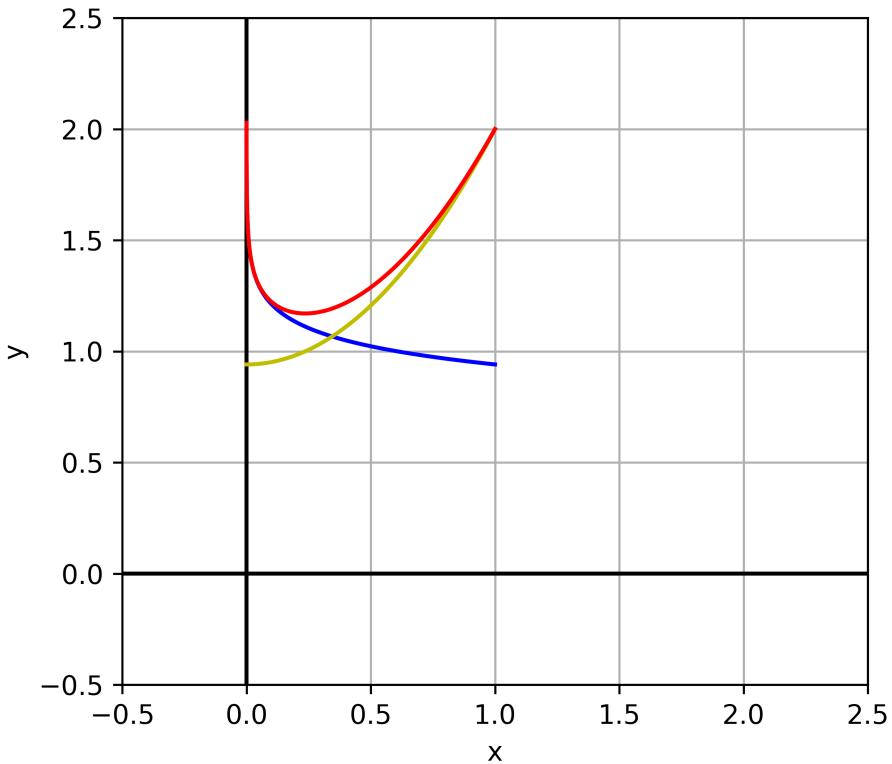


Abbildung 12.1: Graph der Verfolgungskurve wobei, (rot) die Funktion  $y(x)$  ist, (grün) der quadratische Teil und (blau) dem  $\ln(x)$ -Teil entspricht.

In dem man die Substitution rückgängig macht, erhält man eine weitere DGL erster Ordnung die bereits separiert ist:

$$y' = \sinh(\ln(x) + C) \quad (12.13)$$

Diese kann mit den selben Methoden gelöst werden, diesmal in Kombination mit der exponentiellen Definition der  $\sinh$ -Funktion:

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh(\ln(x) + C) \\ &= \int \frac{1}{2}(e^{\ln(x)+C} - e^{-(\ln(x)+C)}) \\ &= \frac{e^C}{4}x^2 - \frac{\ln(x)}{2 \cdot e^C} + C_1 \\ &= C_1 + C_2x^2 - \frac{\ln(x)}{8 \cdot C_2} \end{aligned}$$

Das Resultat, wie ersichtlich, ist folgende Funktion (12.14) welche mittels Anfangsbedingungen

parametrisiert werden kann:

$$y(x) = C_1 + C_2 x^2 - \frac{\ln(x)}{8 \cdot C_2} \quad (12.14)$$

Für die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  ergibt sich ein Anfangswertproblem, welches für deren Bestimmung gelöst werden muss. Zuerst soll aber eine qualitative Intuition, oder Idee für das Aussehen der Funktion  $y(x)$  geschaffen werden:

- Für grosse  $x$ -Werte welche in der Regel in der Nähe von  $x_0$  sein sollten, ist der quadratisch Term in der Funktion dominant und somit für immer kleiner werdende  $x$  geht der Verfolger in Richtung  $y$ -Achse wobei seine Steigung stetig sinkt, was Sinn macht wenn der Verfolgte entlang der  $y$ -Achse steigt.
- Für  $x$ -Werte in der Nähe von 0 ist das asymptotische Verhalten des Logarithmus dominant, dies macht auch Sinn da sich der Verfolgte auf der  $y$ -Achse bewegt und der Verfolger im nachgeht.
- Aufgrund des Monotoniewechsels in der Kurve muss es auch ein Minimum aufweisen. Es stellt sich nun die Frage: Wo befindet sich dieser Punkt? Durch eine logische Überlegung kann eine Abschätzung darüber getroffen werden und zwar, dass dieser dann entsteht, wenn  $A$  und  $P$  die gleiche  $y$ -Koordinaten besitzen. In diesem Moment ändert die Richtung der  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit und somit auch sein Vorzeichen.

Alle diese Eigenschaften stimmen mit dem überein, was man von einer Kurve dieser Art erwarten würde, siehe 12.1. Nun stellt sich die Frage wie die Kurve wirklich aussieht, dies wird durch das Einsetzen folgender Anfangsbedingungen erreicht:

$$y(x)|_{t=0} = y(x_0) = y_0 ; \frac{dy}{dx}|_{t=0} = y'(x_0) = \frac{y_0}{x_0} \quad (12.15)$$

Leitet man die Funktion (12.14) nach  $x$  ab und setzt die Anfangsbedingungen ein, dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$y_0 = C_1 + C_2 x_0^2 - \frac{\ln(x_0)}{8 \cdot C_2} \quad (12.16a)$$

$$\frac{y_0}{x_0} = 2 \cdot C_2 x_0 - \frac{\ln(x_0)}{8 \cdot C_2} \quad (12.16b)$$

... Mit folgenden Formeln geht es weiter:

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 ; r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ y &= \frac{1}{4} ((y_0 + r_0) \eta + (r_0 - y_0) \ln(\eta) - r_0 + 3y_0) \\ y' &= \frac{1}{2} \left( (y_0 + r_0) \frac{x}{x_0^2} + (r_0 - y_0) \frac{1}{x} \right) \\ -4t &= (y_0 + r_0)(\eta - 1) + (r_0 - y_0) \ln(\eta) \\ -4t + (y_0 + r_0) &= (y_0 + r_0)\eta + (r_0 - y_0) \ln(\eta) \\ e^{-4t+(y_0+r_0)\eta} &= e^{(y_0+r_0)\eta} \cdot \eta^{(r_0-y_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{-4t}{r_0-y_0} + \frac{y_0+r_0}{r_0-y_0}} &= e^{\frac{y_0+r_0}{r_0-y_0}\eta} \cdot \eta \\
\chi &= \frac{y_0+r_0}{r_0-y_0}; \chi \\
\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}} &= \chi \eta \cdot e^{\chi \eta} \\
W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right) &= \chi \eta \\
\frac{W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right)}{\chi} &= \eta \\
\frac{W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right)}{\chi} &= \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \\
x(t) &= \sqrt{\frac{W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right)}{\chi}} \\
y(t) &= \frac{1}{4} \left( (y_0 + r_0) \frac{W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right)}{\chi} + (r_0 - y_0) \cdot \ln \left( \frac{W\left(\chi \cdot e^{\chi - \frac{4t}{r_0-y_0}}\right)}{\chi} \right) - r_0 + 3y_0 \right) \quad (12.17)
\end{aligned}$$



# Kapitel 13

## FM Bessel

Joshua Bär

Die Frequenzmodulation ist eine Modulation die man auch schon im alten Radio findet. Falls du dich an die Zeit erinnerst, konnte man zwischen *FM-AM* Umschalten, dies bedeutete so viel wie: *Frequenz-Modulation* und *Amplituden-Modulation*. Durch die Modulation wird ein Nachrichtensignal  $m(t)$  auf ein Trägersignal (z.B. ein Sinus- oder Rechtecksignal) abgebildet (kombiniert). Durch dieses Auftragen vom Nachrichtensignal  $m(t)$  kann das modulierte Signal in einem gewünschten Frequenzbereich übertragen werden. Der ursprünglich Frequenzbereich des Nachrichtensignal  $m(t)$  erstreckt sich typischerweise von 0 Hz bis zur Bandbreite  $B_m$ .

Beim Empfänger wird dann durch Demodulation das ursprüngliche Nachrichtensignal  $m(t)$  so originalgetreu wie möglich zurückgewonnen.

Beim Trägersignal  $x_c(t)$  handelt es sich um ein informationsloses Hilfssignal. Durch die Modulation mit dem Nachrichtensignal  $m(t)$  wird es zum modulierten zu übertragenden Signal. Für alle Erklärungen wird ein sinusförmiges Trägersignal benutzt, jedoch kann auch ein Rechtecksignal, welches Digital einfach umzusetzen ist, genauso als Trägersignal genutzt werden kann. Zuerst wird erklärt was *FM-AM* ist, danach wie sich diese im Frequenzspektrum verhalten. Erst dann erklärt ich dir wie die Besselfunktion mit der Frequenzmodulation( acro?) zusammenhängt. Nun zur Modulation im nächsten Abschnitt.

### 13.1 AM - FM

Das sinusförmige Trägersignal hat die übliche Form:  $x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c(t) + \varphi)$ . Wobei die konstanten Amplitude  $A_c$  und Phase  $\varphi$  vom Nachrichtensignal  $m(t)$  verändert wird. Der Parameter  $\omega_c$ , die Trägerkreisfrequenz bzw. die Trägerfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ , steht nicht für die Modulation zur Verfügung, statt dessen kann durch ihn die Frequenzachse frei gewählt werden. Jedoch ist das für die Vielfalt der Modulationsarten keine Einschränkung. Ein Nachrichtensignal kann auch über die Momentanfrequenz (instantaneous frequency)  $\omega_i$  eines Trägers verändert werden. Mathematisch wird dann daraus

$$\omega_i = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

mit der Ableitung der Phase.

TODO: Hier beschrieb ich was AmplitudenModulation ist und mache dan den link zu Frequenzmodulation inkl Formel

$$\cos(\cos x)$$

erat, sed diam voluptua [fm:bibtex].

## 13.2 AM-FM im Frequenzspektrum

Hier Beschreiben ich das Frequenzspektrum und wie AM und FM aussehen und generiert werden.

## 13.3 FM und Besselfunktion

Hier wird beschrieben wie die Bessel Funktion der FM im Frequenzspektrum hilft, wieso diese gebraucht wird und ihre Vorteile.

## 13.4 Fazit

# Kapitel 14

## Parabolische Zylinderfunktionen

Thierry Schwaller, Alain Keller

Die Laplace-Gleichung ist eine wichtige Gleichung in der Physik. Mit ihr lässt sich zum Beispiel das elektrische Feld in einem ladungsfreien Raum bestimmen. In diesem Kapitel wird die Lösung der Laplace-Gleichung im parabolischen Zyplinderkoordinatensystem genauer untersucht.

### 14.1 Problem

#### 14.1.1 Laplace Gleichung

Die partielle Differentialgleichung

$$\Delta f = 0 \quad (14.1)$$

ist als Laplace Gleichung bekannt. Sie ist eine spezielle Form der poisson Gleichung

$$\Delta f = g \quad (14.2)$$

mit  $g$  als beliebige Funktion. In der Physik hat die Laplace Gleichung in verschiedenen Gebieten verwendet, zum Beispiel im Elektromagnetismus. Das Gaussche Gesetz in den Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.3)$$

besagt das die Divergenz eines Elektrischen Feldes an einem Punkt gleich der Ladung an diesem Punkt ist. Das elektrische Feld ist hierbei der Gradient des elektrischen Potentials

$$\nabla \phi = E. \quad (14.4)$$

Eingesetzt in (14.3) resultiert

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (14.5)$$

was eine Possion Gleichung ist. An Ladungsfreien Stellen, ist der rechte Teil der Gleichung 0.

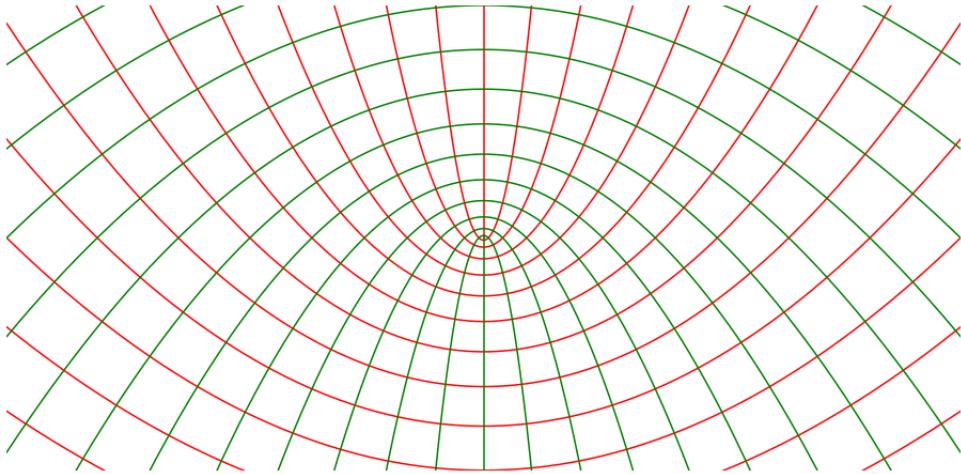


Abbildung 14.1: Das parabolische Koordinatensystem. Die roten Parabeln haben ein konstantes  $\sigma$  und die grünen ein konstantes  $\tau$ .

### 14.1.2 Parabolische Zylinderkoordinaten

Im parabolischen Zylinderkoordinatensystem bilden parabolische Zylinder die Koordinatenflächen. Die Koordinate  $(\sigma, \tau, z)$  sind in kartesischen Koordinaten ausgedrückt mit

$$x = \sigma\tau \quad (14.6)$$

$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \quad (14.7)$$

$$z = z. \quad (14.8)$$

Wird  $\tau$  oder  $\sigma$  konstant gesetzt resultieren die Parabeln

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2\right) \quad (14.9)$$

und

$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{\tau^2} + \tau^2\right). \quad (14.10)$$

Abbildung 14.1 zeigt das Parabolische Koordinatensystem. Das parabolische Zylinderkoordinatensystem entsteht wenn die Parabeln aus der Ebene gezogen werden. Um in diesem Koordinatensystem integrieren und differenzieren zu können braucht es die Skalierungsfaktoren  $h_\tau$ ,  $h_\sigma$  und  $h_z$ . Der Skalierungsfaktor braucht es, damit die Distanzen zwischen zwei Punkten unabhängig vom Koordinatensystem sind. Wird eine infinitesimal kleine Distanz  $ds$  zwischen zwei Punkten betrachtet kann dies im kartesischen Koordinatensystem mit

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (14.11)$$

ausgedrückt werden. Das Skalierungsfaktoren werden so bestimmt, dass

$$(ds)^2 = (h_\sigma d\sigma)^2 + (h_\tau d\tau)^2 + (h_z dz)^2 \quad (14.12)$$

gilt. Dafür werden  $dx$ ,  $dy$ , und  $dz$  in (14.11) mit den Beziehungen von (14.7) - (14.8) als

$$dx = \frac{\delta x}{\delta \sigma} d\sigma + \frac{\delta x}{\delta \tau} d\tau + \frac{\delta x}{\delta \tilde{z}} d\tilde{z} = \tau d\sigma + \sigma d\tau \quad (14.13)$$

$$dy = \frac{\delta y}{\delta \sigma} d\sigma + \frac{\delta y}{\delta \tau} d\tau + \frac{\delta y}{\delta \tilde{z}} d\tilde{z} = \tau d\tau - \sigma d\sigma \quad (14.14)$$

$$dz = \frac{\delta z}{\delta \sigma} d\sigma + \frac{\delta z}{\delta \tau} d\tau + \frac{\delta z}{\delta \tilde{z}} d\tilde{z} = d\tilde{z} \quad (14.15)$$

$$(14.16)$$

substituiert. Wird diese gleichung in der Form von (14.12) geschrieben, resultiert

$$(ds)^2 = (\sigma^2 + \tau^2)(d\sigma)^2 + (\sigma^2 + \tau^2)(d\tau)^2 + (d\tilde{z})^2. \quad (14.17)$$

Daraus resultieren die Skalierungsfaktoren

$$h_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (14.18)$$

$$h_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (14.19)$$

$$h_{\tilde{z}} = 1. \quad (14.20)$$

### 14.1.3 Differentialgleichung

Möchte man eine Differentialgleichung im parabolischen Zylinderkoordinatensystem lösen müssen die Skalierungsfaktoren mitgerechnet werden. . .

### 14.1.4 Lösung der Helmholtz Gleichung im parabolischen Zylinderfunktion

Die Differentialgleichungen, welche zu den parabolischen Zylinderfunktionen führen tauchen, wie bereits erwähnt, dann auf, wenn die Helmholtz Gleichung

$$\Delta f(x, y, z) = \lambda f(x, y, z) \quad (14.21)$$

im parabolischen Zylinderkoordinatensystem

$$\Delta f(\sigma, \tau, z) = \lambda f(\sigma, \tau, z) \quad (14.22)$$

gelöst wird. Wobei der Laplace Operator  $\Delta$  im parabolischen Zylinderkoordinatensystem gegeben ist als

$$\nabla = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (14.23)$$

Die Helmholtz Gleichung würde also wie folgt lauten

$$\nabla f(\sigma, \tau, z) = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left( \frac{\partial^2 f(\sigma, \tau, z)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f(\sigma, \tau, z)}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial^2 f(\sigma, \tau, z)}{\partial z^2} = \lambda f(\sigma, \tau, z) \quad (14.24)$$

Diese partielle Differentialgleichung kann mit Hilfe von Separation gelöst werden, dazu wird

$$f(\sigma, \tau, z) = g(\sigma)h(\tau)i(z) \quad (14.25)$$

gesetzt. Was dann schlussendlich zu den Differentialgleichungen

$$g''(\sigma) - (\lambda\sigma^2 + \mu)g(\sigma) = 0, \quad (14.26)$$

$$h''(\tau) - (\lambda\tau^2 - \mu)h(\tau) = 0 \quad (14.27)$$

und

$$i''(z) + (\lambda + \mu)i(z) = 0 \quad (14.28)$$

führt. Wobei die Lösung von 14.28

$$i(z) = A \cos(\sqrt{\lambda + \mu}z) + B \sin(\sqrt{\lambda + \mu}z) \quad (14.29)$$

ist und 14.26 und 14.27 die sogenannten Weberschen Differentialgleichungen sind, welche die parabolischen Zylinder Funktionen als Lösung haben.

## 14.2 Lösung

### 14.3 Physik sache

#### 14.3.1 Elektrisches Feld einer semi-infiniten Platte

Die parabolischen Zylinderkoordinaten tauchen auf, wenn man das elektrische Feld einer semi-infiniten Platte finden will. Das dies so ist kann im zwei Dimensionalen mit Hilfe von komplexen Funktionen gezeigt werden. Wobei die Platte dann nur eine Linie ist. Jede komplexe Funktion  $F(z)$  kann geschrieben werden als

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) \quad z \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}. \quad (14.30)$$

Dabei muss gelten, falls die Funktion differenzierbar ist, dass

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \quad \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}. \quad (14.31)$$

Aus dieser Bedingung folgt

$$\underbrace{\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}}_{\nabla^2 U(x, y)=0} = 0 \quad \underbrace{\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V(x, y)=0} = 0. \quad (14.32)$$

Zusätzlich zeigen diese Bedingungen auch, dass die zwei Funktionen  $U(x, y)$  und  $V(x, y)$  orthogonal zueinander sind. Der Zusammenhang zum elektrischen Feld ist jetzt, dass das Potential an einem quellenfreien Punkt gegeben ist als

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0. \quad (14.33)$$

Da dies bei komplexen differenzierbaren Funktionen gilt, wie Gleichung 14.32 zeigt, kann entweder  $U(x, y)$  oder  $V(x, y)$  von einer solchen Funktion als das Potential angesehen werden. Im weiteren wird für das Potential  $U(x, y)$  verwendet. Da die Funktion, welche nicht das Potential beschreibt, in weiteren angenommen als  $V(x, y)$ , orthogonal zum Potential ist, zeigt dies das Verhalten des elektrischen Feldes. Um nun zu den parabolischen Zylinderkoordinaten zu gelangen muss nur noch eine

geeignete komplexe Funktion  $F(z)$  gefunden werden, welche eine semi-infinite Platte beschreiben kann. Man könnte natürlich auch nach anderen Funktionen suchen, welche andere Bedingungen erfüllen und würde dann auf andere Koordinatensysteme stossen. Die gesuchte Funktion in diesem Fall ist

$$F(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x + iy}. \quad (14.34)$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$F(z) = \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}}_{U(x,y)} + i \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}}_{V(x,y)}. \quad (14.35)$$

Die Äquipotentialflächen können nun betrachtet werden, indem man die Funktion welche das Potential beschreibt gleich eine Konstante setzt,

$$\sigma = U(x, y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad (14.36)$$

und die Flächen mit der gleichen elektrischen Feldstärke können als

$$\tau = V(x, y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \quad (14.37)$$

beschrieben werden. Diese zwei Gleichungen zeigen nun wie man vom kartesischen Koordinatensystem ins parabolische Zylinderkoordinatensystem kommt. Werden diese Formeln nun nach x und y aufgelöst so beschreibe sie, wie man aus dem parabolischen Zylinderkoordinatensystem zurück ins kartesische rechnen kann

$$x = \sigma\tau, \quad (14.38)$$

$$y = \frac{1}{2} (\tau^2 - \sigma^2) \quad (14.39)$$



# Kapitel 15

## Fresnel-Integrale

Andreas Müller

Die Fresnel-Integrale tauchen in der Untersuchung der Beugung in paraxialer Näherung auf, auch bekannt als die Fresnel-Approximation. In diesem Kapitel betrachten wir jedoch nur die geometrische Anwendung der Fresnel-Integrale als Parametrisierung der Euler-Spirale und zeigen, dass letztere eine Klo thoide ist.

### 15.1 Definition

Die Funktion  $e^{x^2}$  hat bekanntermassen keine elementare Stammfunktion, weshalb die Fehlerfunktion als Stammfunktion definiert wurde. Die Funktionen  $\cos x^2$  und  $\sin x^2$  sind eng mit  $e^{x^2}$  verwandt, es ist daher nicht überraschend, dass sie ebenfalls keine elementare Stammfunktionen haben. Dies rechtfertigt die Definition der Fresnel-Integrale als neue spezielle Funktionen.

**Definition 15.1.** *Die Funktionen*

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$
$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

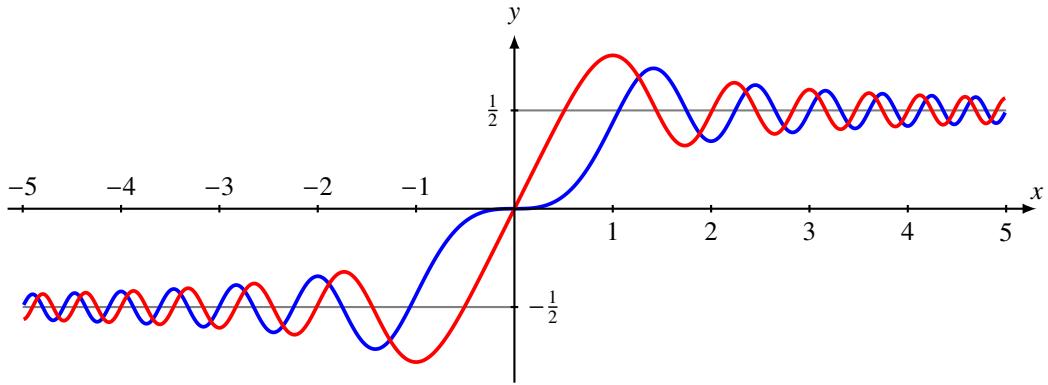
heissen die Fresnel-Integrale.

Der Faktor  $\frac{\pi}{2}$  ist einigermassen willkürlich, man könnte daher noch allgemeiner die Funktionen

$$C_a(x) = \int_0^x \cos(at^2) dt$$
$$S_a(x) = \int_0^x \sin(at^2) dt$$

definieren, so dass die Funktionen  $C(x)$  und  $S(x)$  der Fall  $a = \frac{\pi}{2}$  werden, also

$$C(x) = C_{\frac{\pi}{2}}(x), \quad S(x) = S_{\frac{\pi}{2}}(x).$$

Abbildung 15.1: Graph der Funktionen  $C(x)$  (rot) und  $S(x)$  (blau)

Durch eine Substitution  $t = bs$  erhält man

$$\begin{aligned} C_a(x) &= \int_0^x \cos(at^2) dt = b \int_0^{\frac{x}{b}} \cos(ab^2 s^2) ds = bC_{ab^2}\left(\frac{x}{b}\right) \\ S_a(x) &= \int_0^x \sin(at^2) dt = b \int_0^{\frac{x}{b}} \sin(ab^2 s^2) ds = bS_{ab^2}\left(\frac{x}{b}\right). \end{aligned}$$

Indem man  $ab^2 = \frac{\pi}{2}$  setzt, also

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{2a}},$$

kann man die Funktionen  $C_a(x)$  und  $S_a(x)$  durch  $C(x)$  und  $S(x)$  ausdrücken:

$$C_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} C\left(x \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\right) \quad \text{und} \quad S_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} S\left(x \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\right). \quad (15.1)$$

Im Folgenden werden wir meistens nur den Fall  $a = 1$ , also die Funktionen  $C_1(x)$  und  $S_1(x)$  betrachten, da in diesem Fall die Formeln einfacher werden. Die Abbildung 15.1 zeigt die Graphen der Funktion  $C(x)$  und  $S(x)$ .

## 15.2 Euler-Spirale

Ein besseres Verständnis für die beiden Funktionen  $C(x)$  und  $S(x)$  als die Darstellung 15.1 ermöglicht die Abbildung 15.2, die die beiden Funktionen als die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Parameterdarstellung einer Kurve zeigt. Sie heisst die *Euler-Spirale*. Die Spirale scheint sich für  $x \rightarrow \pm\infty$  um die Punkte  $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$  zu winden.

**Satz 15.2.** Die Grenzwerte der Fresnel-Integrale für  $x \rightarrow \pm\infty$  sind

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

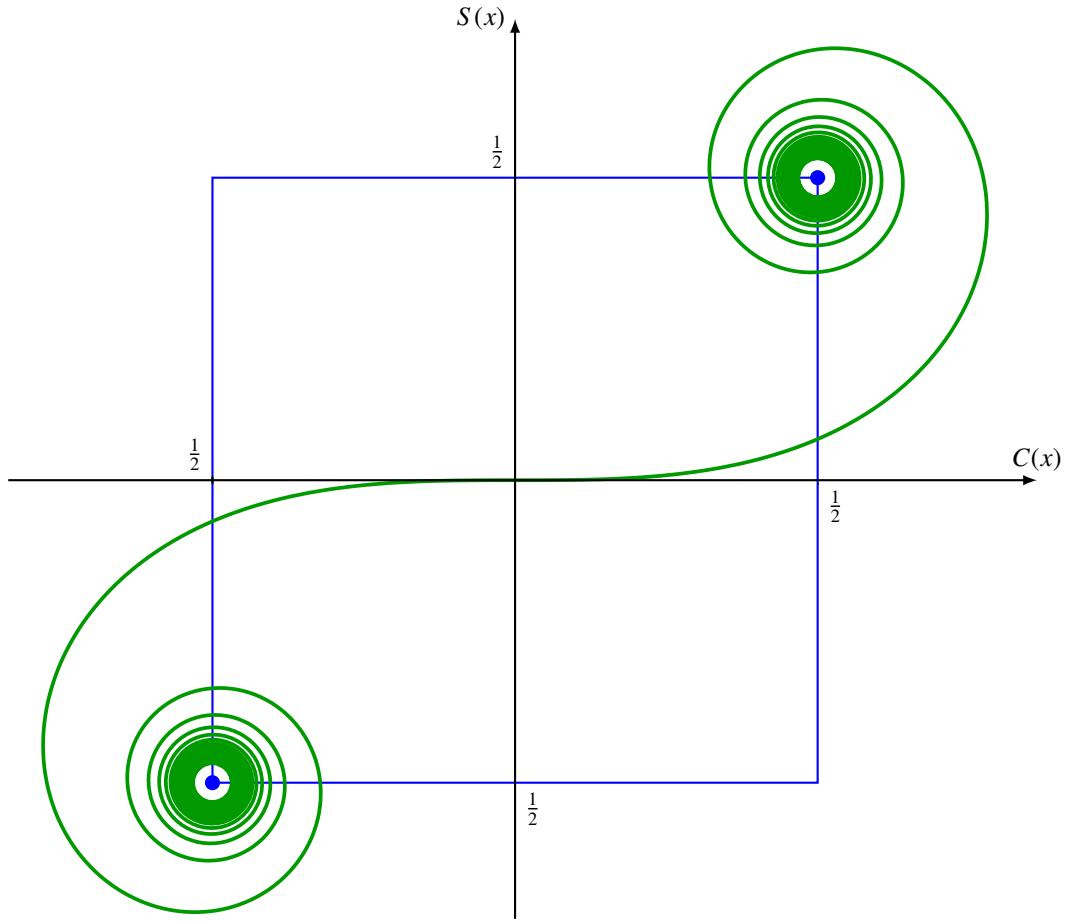


Abbildung 15.2: Die Eulerspirale ist die Kurve mit der Parameterdarstellung  $x \mapsto (C(x), S(x))$ , sie ist rot dargestellt. Sie windet sich unendlich oft um die beiden Punkte  $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ .

*Beweis.* Die komplexe Funktion  $f(z) = e^{-z^2}$  ist eine ganze Funktion, das Integral über einen geschlossenen Pfad in der komplexen Ebene verschwindet daher. Wir verwenden den Pfad in Abbildung 15.3 bestehend aus den drei Segmenten  $\gamma_1$  entlang der reellen Achse von 0 bis  $R$ , dem Kreisbogen  $\gamma_2$  um 0 mit Radius  $R$  und  $\gamma_3$  mit der Parametrisierung  $t \mapsto te^{i\pi/4}$ .

Das Teilintegral über  $\gamma_1$  ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Das Integral über  $\gamma_3$  ist

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz &= - \int_0^\infty \exp(-t^2 e^{i\pi/2}) e^{it\pi/4} dt = - \int_0^\infty e^{-it^2} dt e^{i\pi/4} \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^\infty \cos t^2 - i \sin t^2 dt \end{aligned}$$

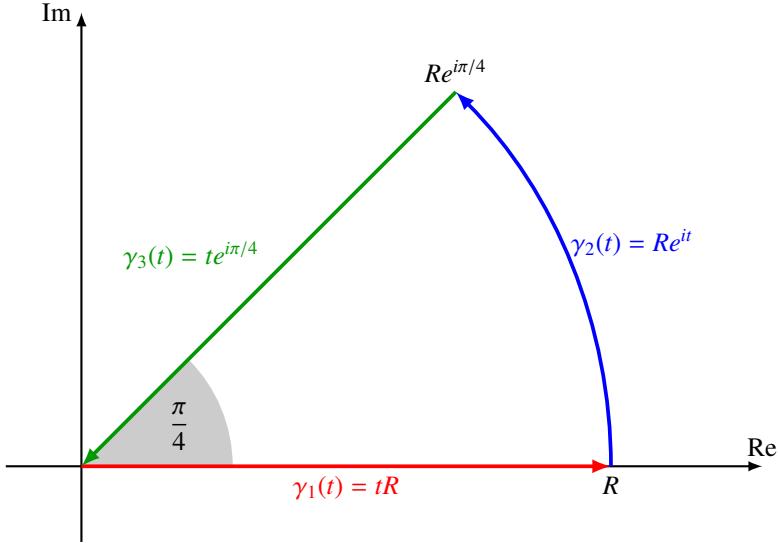


Abbildung 15.3: Pfad zur Berechnung der Grenzwerte  $C_1(\infty)$  und  $S_1(\infty)$  mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(C_1(\infty) - iS_1(\infty)) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(C_1(\infty) + S_1(\infty) + i(C_1(\infty) - S_1(\infty))),
 \end{aligned}$$

wobei wir

$$C_1(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} C_1(R) \quad \text{und} \quad S_1(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} S_1(R)$$

abgekürzt haben.

Das Integral über das Segment  $\gamma_2$  lässt sich mit der Parametrisierung  $\gamma_2(t) = Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)) iRe^{it} dt \right| \\
 &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2t} dt \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(1 - \frac{4}{\pi}t)} dt.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\cos 2t \geq 1 - \frac{4}{\pi}t$  verwendet. Mit dieser Vereinfachung kann das Integral ausgewertet werden und ergibt

$$= Re^{-R^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{R^2 \frac{\pi}{4}t} dt = Re^{-R^2} \left[ \frac{4}{\pi R^2} e^{R^2 \frac{\pi}{4}t} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1) = \frac{4}{\pi R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0$$

für  $R \rightarrow \infty$ . Im Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  kann der Teil  $\gamma_2$  des Pfades vernachlässigt werden.

Das Integral über den geschlossenen Pfad  $\gamma$  verschwindet. Da der Teil  $\gamma_2$  keine Rolle spielt, müssen sich die Integrale über  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  wegheben, also

$$0 = \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz$$

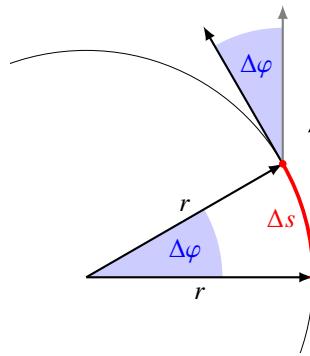


Abbildung 15.4: Berechnung der Krümmung einer ebenen Kurve.

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1(\infty) + S_1(\infty)) - \frac{i}{\sqrt{2}}(C_1(\infty) - S_1(\infty)).$$

Der Imaginärteil ist  $C_1(\infty) - S_1(\infty)$ , da er verschwinden muss, folgt  $C_1(\infty) = S_1(\infty)$ . Nach Multiplikation mit  $\sqrt{2}$  folgt aus der Tatsache, dass auch der Realteil verschwinden muss

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = C_1(\infty) + S_1(\infty) \quad \Rightarrow \quad C_1(\infty) = S_1(\infty) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aus (15.1) erhält man dann auch die Grenzwerte

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

## 15.3 Klothoide

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Krümmung der Euler-Spirale proportional zur vom Nullpunkt aus gemessenen Bogenlänge ist.

**Definition 15.3.** Eine ebene Kurve, deren Krümmung proportionale zur Kurvenlänge ist, heisst Klothoide.

Die Klothoide wird zum Beispiel im Strassenbau für Autobahnkurven verwendet. Fährt man mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Klothoide, muss man die Krümmung mit konstanter Geschwindigkeit ändern, also das Lenkrad mit konstanter Geschwindigkeit drehen. Dies ermöglicht eine ruhige Fahrweise.

### 15.3.1 Krümmung einer ebenen Kurve

Abbildung 15.4 erinnert daran, dass der Bogen eines Kreises vom Radius  $r$ , entlang dem sich die Richtung der Tangente um  $\Delta\varphi$  ändert, die Länge  $\Delta s = r\Delta\varphi$ . Die Krümmung ist der Kehrwert des Krümmungsradius, daraus kann man ablesen, dass

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Für eine beliebige ebene Kurve ist daher die Krümmung

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds}.$$

### 15.3.2 Krümmung der Euler-Spirale

Wir betrachten jetzt die Euler-Spirale mit der Parametrisierung  $\gamma(s) = (C_1(s), S_1(s))$ . Zunächst stellen wir fest, dass die Länge der Tangente

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \begin{pmatrix} \dot{C}_1(s) \\ \dot{S}_1(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s^2 \\ \sin s^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{\cos^2 s^2 + \sin^2 s^2} = 1.$$

Insbesondere ist der Parameter  $s$  der Kurve  $\gamma(s)$  die Bogenlänge.

Der zu  $\dot{\gamma}(s)$  gehörige Polarwinkel kann aus dem Vergleich mit einem Vektor mit bekanntem Polarwinkel  $\varphi$  abgelesen werden:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \cos s^2 \\ \sin s^2 \end{pmatrix},$$

der Polarwinkel ist daher  $\varphi = s^2$ . Die Krümmung ist die Ableitung des Polarwinkels nach  $s$ , also

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{ds^2}{ds} = 2s,$$

sie ist somit proportional zur Bogenlänge  $s$ . Damit folgt, dass die Euler-Spirale eine Klothoide ist.

### 15.3.3 Eine Kugel schälen

Schält man einen Streifen konstanter Breite beginnend parallel zum Äquator von einer Kugel ab und breitet ihn in die Ebene aus, entsteht eine Approximation einer Klothoide. Abbildung 15.5 zeigt blau den abgeschnittenen Streifen, Abbildung 15.6 zeigt das Resultat dieses Versuches an einem Apfel, das Youtube-Video [[fresnel:schale](#)] des Numberphile-Kanals illustriert das Problem anhand eines aufblasbaren Globus.

Windet sich die Kurve in Abbildung 15.5  $n$  mal um die vertikale Achse, bevor sie den Nordpol erreicht, dann kann die Kurve mit der Funktion

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \cos(t/n) \\ \sin(t) \cos(t/n) \\ \sin(t/n) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Der Tangentialvektor

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \cos(t/n) - \cos(t) \sin(t/n)/n \\ \cos(t) \cos(t/n) - \sin(t) \sin(t/n)/n \\ \cos(t/n)/n \end{pmatrix}$$

hat die Länge

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \frac{1}{n^2} + \cos^2 \frac{t}{n}.$$

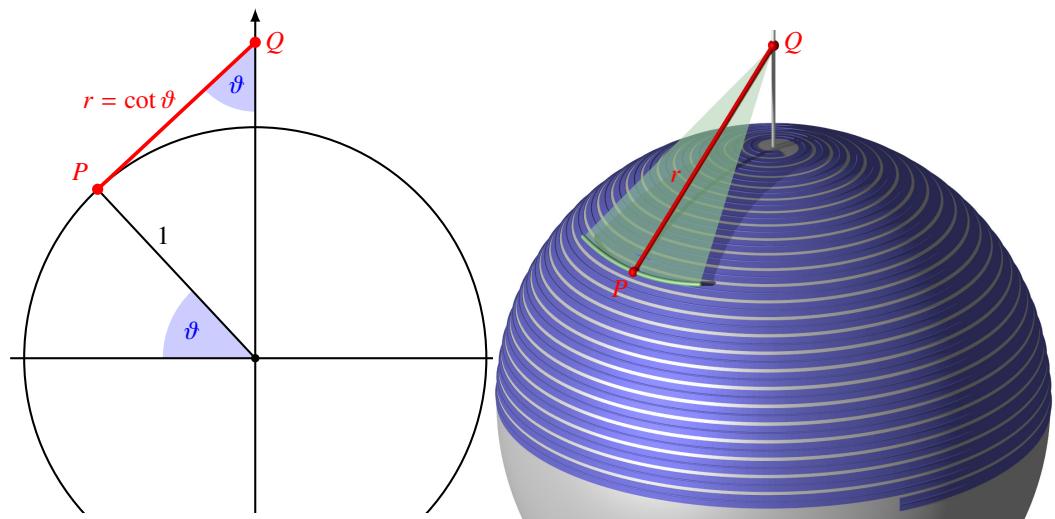


Abbildung 15.5: Schält man einen Streifen konstanter Breite beginnend am Äquator von einer Kugel ab und breitet ihn in der Ebene aus, entsteht eine Klohoide.



Abbildung 15.6: Klohoide erhalten durch Abschälen eines Streifens von einem Apfel (vgl. Abbildung 15.5)

Die Ableitung der Bogenlänge ist daher

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \cos^2 \frac{t}{n}}.$$

Der Krümmungsradius des blauen Streifens, der die Kugel im Punkt  $P$  bei geographischer  $\vartheta$  berührt, hat die Länge der Tangente, die die Kugel im Punkt  $P$  berührt und im Punkt  $Q$  durch die Achse der Kugel geht (Abbildung 15.5). Die Krümmung in Abhängigkeit von  $\vartheta$  ist daher  $\tan \vartheta$ .

## 15.4 Numerische Berechnung der Fresnel-Integrale

Die Fresnel-Integrale können mit verschiedenen Methoden effizient berechnet werden.

### 15.4.1 Komplexe Fehlerfunktionen

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass der Integrand der Fresnel-Integrale mit  $e^{t^2}$  verwandt ist. Tatsächlich kann gezeigt werden dass sich die Fresnel-Integrale mit Hilfe der komplexen Fehlerfunktion als

$$\left. \begin{array}{l} S_1(z) \\ C_1(z) \end{array} \right\} = \frac{1 \pm i}{4} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{2} \sqrt{\pi} z\right) \mp \operatorname{erf}\left(\frac{1-i}{2} \sqrt{\pi} z\right) \right)$$

ausdrücken lassen [**fresnel:fresnelC**]. Diese Darstellung ist jedoch für die numerische Berechnung nur beschränkt nützlich, weil die meisten Bibliotheken für die Fehlerfunktion diese nur für reelle Argument auszuwerten gestatten.

### 15.4.2 Als Lösung einer Differentialgleichung

Da die Fresnel-Integrale die sehr einfachen Differentialgleichungen

$$C'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \quad \text{und} \quad S'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$$

erfüllen, kann man eine Methode zur numerischen Lösung von Differentialgleichung verwenden. Die Abbildungen 15.1 und 15.2 wurden auf diese Weise erzeugt.

### 15.4.3 Taylor-Reihe integrieren

Die Taylorreihen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

der trigonometrischen Funktionen werden durch Einsetzen von  $x = t^2$  zu

$$\cos t^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{4k} \quad \text{und} \quad \sin t^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{4k+2}.$$

Die Fresnel-Integrale  $C_1(x)$  und  $S_1(x)$  können daher durch termweise Integration mit Hilfe der Reihen

$$C_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{x^{4k+1}}{4k+1} \quad \text{und} \quad S_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{4k+3}}{4k+3}$$

berechnet werden. Diese Reihen sind insbesondere für kleine Werte von  $x$  sehr schnell konvergent.

#### 15.4.4 Hypergeometrische Reihen

Aus der Reihenentwicklung kann jetzt auch eine Darstellung der Fresnel-Integrale durch hypergeometrische Reihen gefunden werden [**fresnel:fresnelC**]. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{\pi z^3}{6} \cdot {}_1F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}; -\frac{\pi^2 z^4}{16}\right) \\ C(z) &= z \cdot {}_1F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}; -\frac{\pi^2 z^4}{16}\right). \end{aligned}$$



# Kapitel 16

## Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Andrea Mozzini Vellen und Tim Tönz

### 16.1 Einleitung

### 16.2 Lösungsmethode 1: Separationsmethode

An diesem Punkt bleibt also nur noch die Lösung der partiellen Differentialgleichung. In diesem Kapitel wird sie mit Hilfe der Separationsmethode gelöst.

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, lautet die partielle Differentialgleichung, die die Schwingungen einer Membran beschreibt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

Da es sich um eine Kreisscheibe handelt, werden Polarkoordinaten verwendet, so dass sich der Laplaceoperator ergibt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Es wird eine runde elastische Membran berücksichtigt, die den Gebietbereich  $\Omega$  abdeckt und am Rand  $\Gamma$  befestigt ist. Es wird daher davon ausgegangen, dass die Membran aus einem homogenen Material von vernachlässigbarer Dicke gefertigt ist. Die Membran kann verformt werden, aber innere elastische Kräfte wirken den Verformungen entgegen. Es wirken keine äusseren Kräfte. Es handelt sich somit von einer kreisförmigen eingespannten homogenen schwingenden Membran.

Daher ist die Membranabweichung im Punkt  $(r, \varphi) \in \overline{\Omega}$  zum Zeitpunkt  $t$ :

$$u : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(r, \varphi, t) \longmapsto u(r, \varphi, t)$$

Da die Membran am Rand befestigt ist, kann es keine Schwingungen geben, so dass die *Dirichlet-Randbedingung* gilt:

$$u|_{\Gamma} = 0$$

Um eine eindeutige Lösung bestimmen zu können, werden die folgenden Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, 0) &= f(r, \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(r, \varphi, 0) &= g(r, \varphi) \end{aligned}$$

Daher muss an dieser Stelle von einer Separation der Variablen ausgegangen werden:

$$u(r, \varphi, t) = F(r)G(\varphi)T(t)$$

Dank der Randbedingungen kann also gefordert werden, dass  $F(R) = 0$  ist, und natürlich, dass  $G(\varphi)$   $2\pi$  periodisch ist. Eingesetzt in der Differenzialgleichung ergibt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

Da die linke Seite nur von  $t$  und die rechte Seite nur von  $r$  und  $\varphi$  abhängt, müssen sie gleich einer reellen Zahl sein. Aus physikalischen Gründen suchen wir nach Lösungen, die weder exponentiell in der Zeit wachsen noch exponentiell abklingen. Dies bedeutet, dass die Konstante negativ sein muss, also schreibt man  $k = -k^2$ . Daraus ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} T''(t) + c^2 \kappa^2 T(t) &= 0 \\ r^2 \frac{F''(r)}{F(r)} + r \frac{F'(r)}{F(r)} + \kappa^2 r^2 &= -\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)} \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung hängt die linke Seite nur von  $r$  ab, während die rechte Seite nur von  $\varphi$  abhängt. Sie müssen also wiederum gleich einer reellen Zahl  $v$  sein. Also das:

$$\begin{aligned} r^2 F''(r) + r F'(r) + (\kappa^2 r^2 - v) F(r) &= 0 \\ G''(\varphi) &= v G(\varphi) \end{aligned}$$

$G$  kann in einer Fourierreihe entwickelt werden, so dass man sieht, dass  $v$  die Form  $n^2$  mit einer positiven ganzen Zahl sein muss, also:

$$G(\varphi) = C_n \cos(\varphi) + D_n \sin(\varphi)$$

Die Gleichung  $F$  hat die Gestalt

$$r^2 F''(r) + r F'(r) + (\kappa^2 r^2 - n^2) F(r) = 0 \quad (*)$$

Wir bereits in der Vorlesung von Prof. Müller gezeigt, sind die Besselfunktionen

$$J_v(x) = r^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+v} m! \Gamma(v+m+1)}$$

Lösungen der "Besselschen Differenzialgleichung"

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

Die Funktionen  $F(r) = J_n(kr)$  lösen also die Differentialgleichung (\*). Die Randbedingung  $F(R) = 0$  impliziert, dass  $\kappa R$  eine Nullstelle der Besselfunktion  $J_n$  sein muss. Man kann zeigen, dass die Besselfunktionen  $J_n, n \geq 0$ , alle unendlich viele Nullstellen

$$\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \dots$$

haben, und dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{mn} = \infty$ . Somit ergibt sich, dass  $\kappa = \frac{\alpha_{mn}}{R}$  für ein  $m \geq 1$ , und dass

$$F(r) = J_n(\kappa_{mn}r) \quad \text{mit} \quad \kappa_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$$

Die Differenzialgleichung  $T''(t) + c^2 \kappa^2 T(t) = 0$ , wird auf ähnliche Weise gelöst wie  $G(\varphi)$ . Durch Überlagerung aller Ergebnisse erhält man die Lösung

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\kappa_{mn}r) \cos(n\varphi) [a_{mn} \cos(c\kappa_{mn}t) + b_{mn} \sin(c\kappa_{mn}t)] \quad (16.1)$$

Dabei sind  $m$  und  $n$  ganze Zahlen, wobei  $m$  für die Anzahl der Knotenkreise und  $n$  für die Anzahl der Knotenlinien steht. Es gibt bestimmte Bereiche auf der Membran, in denen es keine Bewegung oder Vibration gibt. Wenn der nicht schwingende Bereich ein Kreis ist, nennt man ihn einen Knotenkreis, und wenn er eine Linie ist, nennt man ihn ebenfalls eine Knotenlinie.  $J_n(\kappa_{mn}r)$  ist die Besselfunktion  $n$ -ter Ordnung, wobei  $k_{mn}$  die Wellenzahl und  $r$  der Radius ist.  $a_{mn}$  und  $b_{mn}$  sind die zu bestimmenden Konstanten.

An diesem Punkt stellte sich die Frage, ob es möglich wäre, die partielle Differentialgleichung mit einer anderen Methode als der der Trennung der Variablen zu lösen. Nach einer kurzen Recherche und Diskussion mit Prof. Müller wurde festgestellt, dass die beste Methode die Transformati onsmethode ist, genauer gesagt die Anwendung der Hankel-Transformation. Im nächsten Kapitel wird daher diese Integraltransformation vorgestellt und entwickelt, und es wird erläutert, warum sie für diese Art von Problem geeignet ist.

## 16.3 Die Hankel Transformation

Hermann Hankel (1839-1873) war ein deutscher Mathematiker, der für seinen Beitrag zur mathematischen Analyse und insbesondere für seine namensgebende Transformation bekannt ist. Diese Transformation tritt bei der Untersuchung von Funktionen auf, die nur von der Entfernung des Ursprungs abhängen. Er studierte auch Funktionen, jetzt Hankel- oder Bessel-Funktionen genannt, der dritten Art. Die Hankel Transformation mit Bessel-Funktionen als Kern taucht natürlich bei achsensymmetrischen Problemen auf, die in zylindrischen Polarkoordinaten formuliert sind. In diesem Kapitel werden die Theorie der Transformation und einige Eigenschaften der Grundoperationen erläutert.

Wir führen die Definition der Hankel Transformation aus der zweidimensionalen Fourier Transformation und ihrer Umkehrung ein, die durch:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\kappa \cdot r)} f(x, y) dx dy, \quad (16.2)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k, l)\} = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa \cdot r)} F(k, l) dx dy \quad (16.3)$$

wo  $\mathbf{r} = (x, y)$  und  $\kappa = (k, l)$ . Wie bereits erwähnt, sind Polarkoordinaten für diese Art von Problemen am besten geeignet, also mit,  $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  und  $(k, l) = \kappa(\cos \phi, \sin \phi)$ , findet man  $\kappa \cdot \mathbf{r} = kr(\cos(\theta - \phi))$  und danach:

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos(\theta-\phi)} f(r, \theta) d\phi. \quad (16.4)$$

Dann wird angenommen dass,  $f(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$ , was keine strenge Einschränkung ist, und es wird eine Änderung der Variablen vorgenommen  $\theta - \phi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ , um (16.4) zu reduzieren:

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r f(r) dr \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})+i(n\alpha-kr \sin \alpha)} d\alpha, \quad (16.5)$$

wo  $\phi_0 = (\frac{\pi}{2} - \phi)$ .

Unter Verwendung der Integral Darstellung der Besselfunktion vom Ordnung n

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{i(n\alpha-kr \sin \alpha)} d\alpha \quad (16.6)$$

(16.5) wird sie zu:

$$F(k, \phi) = e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})} \int_0^\infty r J_n(kr) f(r) dr \quad (16.7)$$

$$= e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})} \tilde{f}_n(k), \quad (16.8)$$

wo  $\tilde{f}_n(k)$  ist die *Hankel Transformation* von  $f(r)$  und ist formell definiert durch:

$$\mathcal{H}_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(k) = \int_0^\infty r J_n(kr) f(r) dr. \quad (16.9)$$

Ähnlich verhält es sich mit der inversen Fourier Transformation in Form von polaren Koordinaten unter der Annahme  $f(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$  mit (16.8), wird die inverse Fourier Transformation (16.3):

$$e^{in\theta} f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\theta-\phi)} F(k, \phi) d\phi \quad (16.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa \tilde{f}_n(k) dk \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})-ikr \cos(\theta-\phi)} d\phi, \quad (16.11)$$

was durch den Wechsel der Variablen  $\theta - \phi = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$  und  $\theta_0 = -(\theta + \frac{\pi}{2})$ ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa \tilde{f}_n(k) dk \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} e^{in(\theta+\alpha-ikr \sin \alpha)} d\alpha \\ &= e^{in\theta} \int_0^\infty \kappa J_n(kr) \tilde{f}_n(k) dk, \quad \text{von (16.6)} \end{aligned} \quad (16.12)$$

Also, die inverse *Hankel Transformation* ist so definiert:

$$\mathcal{H}_n^{-1}\{\tilde{f}_n(k)\} = f(r) = \int_0^\infty \kappa J_n(kr) \tilde{f}_n(k) dk. \quad (16.13)$$

Anstelle von  $\tilde{f}_n(\kappa)$ , wird häufig für die Hankel Transformation verwendet, indem die Ordnung angegeben wird. (16.9) und (16.13) Integralen existieren für eine grosse Klasse von Funktionen, die normalerweise in physikalischen Anwendungen benötigt werden. Alternativ kann auch die berühmte Hankel Transformationsformel verwendet werden,

$$f(r) = \int_0^\infty \kappa J_n(\kappa r) d\kappa \int_0^\infty p J_n(\kappa p) f(p) dp, \quad (16.14)$$

um die Hankel Transformation (16.9) und ihre Inverse (16.13) zu definieren. Insbesondere die Hankel Transformation der nullten Ordnung ( $n = 0$ ) und der ersten Ordnung ( $n = 1$ ) sind häufig nützlich, um Lösungen für Probleme mit der Laplace Gleichung in einer achsensymmetrischen zylindrischen Geometrie zu finden.

### 16.3.1 Operative Eigenschaften der Hankel Transformation

In diesem Kapitel werden die operativen Eigenschaften der Hankel Transformation aufgeführt. Der Beweis für ihre Gültigkeit wird jedoch nicht analysiert.

#### Theorem 1: Skalierung

Wenn  $\mathcal{H}_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa)$ , dann:

$$\mathcal{H}_n\{f(ar)\} = \frac{1}{a^2} \tilde{f}_n\left(\frac{\kappa}{a}\right), \quad a > 0.$$

#### Theorem 2: Persevalsche Relation

Wenn  $\tilde{f}(\kappa) = \mathcal{H}_n\{f(r)\}$  und  $\tilde{g}(\kappa) = \mathcal{H}_n\{g(r)\}$ , dann:

$$\int_0^\infty r f(r) dr = \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) \tilde{g}(\kappa) d\kappa.$$

#### Theorem 3: Hankel Transformationen von Ableitungen

Wenn  $\tilde{f}_n(\kappa) = \mathcal{H}_n\{f(r)\}$ , dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n\{f'(r)\} &= \frac{\kappa}{2n} \left[ (n-1)\tilde{f}_{n+1}(\kappa) - (n+1)\tilde{f}_{n-1}(\kappa) \right], \quad n \geq 1, \\ \mathcal{H}_1\{f'(r)\} &= -\kappa \tilde{f}_0(\kappa), \end{aligned}$$

bereitgestellt dass  $[rf(r)]$  verschwindet als  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ .

#### Theorem 4

Wenn  $\mathcal{H}_n\{f(r)\} = \tilde{f}_n(\kappa)$ , dann:

$$\mathcal{H}_n \left\{ \left( \nabla^2 - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right) \right\} = \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} = -\kappa^2 \tilde{f}_n(\kappa),$$

bereitgestellt dass  $rf'(r)$  und  $rf(r)$  verschwinden als  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ .

## 16.4 Lösungsmethode 2: Transformationsmethode

Die Hankel-Transformation wird dann zur Lösung der Differentialgleichung verwendet. Es müssen jedoch einige Änderungen an dem Problem vorgenommen werden, damit es mit den Annahmen übereinstimmt, die für die Verwendung der Hankel-Transformation erforderlich sind. Das heisst, dass die Funktion  $u$  nur von der Entfernung zum Ausgangspunkt abhängt. Wir führen also das Konzept einer unendlichen und achsensymmetrischen Membran ein:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(r, 0) = g(r), \quad \text{für } 0 < r < \infty \quad (16.15)$$

Mit Anwendung der Hankel-Transformation nullter Ordnung in Abhängigkeit von  $r$  auf die Gleichungen (16.4) und (16.15):

$$\tilde{u}(\kappa, t) = \int_0^\infty r J_0(\kappa r) u(r, t) dr, \quad (16.16)$$

bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + c^2 \kappa^2 \tilde{u} &= 0, \\ \tilde{u}(\kappa, 0) = \tilde{f}(\kappa), \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\kappa, 0) &= \tilde{g}(\kappa). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für diese Transformation lautet, wie schon gesehen, wie folgt

$$\tilde{u}(\kappa, t) = \tilde{f}(\kappa) \cos(ckt) + \frac{1}{ck} \tilde{g}(\kappa) \sin(ckt).$$

Wendet man an nun die inverse Hankel-Transformation an, so erhält man die formale Lösung

$$u(r, t) = \int_0^\infty \kappa \tilde{f}(\kappa) \cos(ckt) J_0(\kappa r) dk + \frac{1}{c} \int_0^\infty \tilde{g}(\kappa) \sin(ckt) J_0(\kappa r) dk. \quad (16.17)$$

Es wird daher davon ausgegangen, dass sich die Membran verformt und zum Zeitpunkt  $t = 0$  freigegeben wird

$$u(r, 0) = f(r) = Aa(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{d}{dt}(r, 0) = g(r) = 0$$

so dass  $\tilde{g}(\kappa) \equiv 0$  und

$$\tilde{f}(\kappa) = Aa \int_0^\infty r (a^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\kappa r) dr = \frac{Aa}{\kappa} e^{-ak}$$

Die formale Lösung (16.17) lautet also

$$\begin{aligned} u(r, t) &= Aa \int_0^\infty e^{-ak} J_0(\kappa r) \cos(ckt) dk = Aa Re \int_0^\infty e^{-\kappa(a+ict)} J_0(\kappa r) dk \\ &= Aa Re \left\{ r^2 + (a + ict)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

### 16.4.1 Vergleich der Lösungen

Hier kommt noch der Vergleich der Lösungen ;)



# Kapitel 17

## Thema

Hans Muster

Ein paar Hinweise für die korrekte Formatierung des Textes

- Absätze werden gebildet, indem man eine Leerzeile einfügt. Die Verwendung von \\ ist nur in Tabellen und Arrays gestattet.
- Die explizite Platzierung von Bildern ist nicht erlaubt, entsprechende Optionen werden gelöscht. Verwenden Sie Labels und Verweise, um auf Bilder hinzuweisen.
- Beginnen Sie jeden Satz auf einer neuen Zeile. Damit ermöglichen Sie dem Versionsverwaltungssysteme, Änderungen in verschiedenen Sätzen von verschiedenen Autoren ohne Konflikt anzuwenden.
- Bilden Sie auch für Formeln kurze Zeilen, einerseits der besseren Übersicht wegen, aber auch um GIT die Arbeit zu erleichtern.

### 17.1 Teil 0

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua [sturmlionville:bibtex]. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

### 17.2 Teil 1

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta

sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (17.1)$$

Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem.

Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 17.2.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga (??).

Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio ???. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus ???. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## 17.3 Teil 2

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 17.3.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus

aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.

## 17.4 Teil 3

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incidunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 17.4.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.



# Kapitel 18

## Laguerre-Polynome

Patrik Müller

Die Laguerre-Polynome, benannt nach Edmond Laguerre (1834 - 1886), sind Lösungen der ebenfalls nach Laguerre benannten Differentialgleichung. Laguerre entdeckte diese Polynome, als er Approximationsmethoden für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

suchte. Darum möchten wir uns in diesem Kapitel, ganz im Sinne des Entdeckers, den Laguerre-Polynomen für Approximationen von Integralen mit exponentiell-abfallenden Funktionen widmen. Namentlich werden wir versuchen, mittels Laguerre-Polynomen und der Gauss-Quadratur eine geeignete Approximation für die Gamma-Funktion zu finden.

Laguerre-Polynome tauchen zudem auch in der Quantenmechanik im radialen Anteil der Lösung für die Schrödinger-Gleichung eines Wasserstoffatoms auf.

### 18.1 Definition

Die verallgemeinerte Laguerre-Differentialgleichung ist gegeben durch

$$xy''(x) + (\nu + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (18.1)$$

Spannenderweise wurde die verallgemeinerte Laguerre-Differentialgleichung zuerst von Yacovlevich Sonine (1849 - 1915) beschrieben, aber aufgrund ihrer Ähnlichkeit nach Laguerre benannt. Die klassische Laguerre-Differentialgleichung erhält man, wenn  $\nu = 0$ . Hier wird die verallgemeinerte Laguerre-Differentialgleichung verwendet, weil die Lösung mit derselben Methode berechnet werden kann. Zusätzlich erhält man aber die Lösung für den allgemeinen Fall. Zur Lösung von (18.1) verwenden wir einen Potenzreihenansatz. Da wir bereits wissen, dass die Lösung orthogonale Polynome sind, erscheint dieser Ansatz sinnvoll. Setzt man nun den Ansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k \\y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)ka_{k+1} x^{k-1}\end{aligned}$$

in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)ka_{k+1} x^k + (\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k + n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)ka_{k+1} + (\nu+1)(k+1)a_{k+1} - ka_k + na_k] x^k &= 0.\end{aligned}$$

Daraus lässt sich die Rekursionsbeziehung

$$a_{k+1} = \frac{k-n}{(k+1)(k+\nu+1)} a_k$$

ableiten. Für ein konstantes  $n$  erhalten wir als Potenzreihenlösung ein Polynom vom Grad  $n$ , denn für  $k = n$  wird  $a_{n+1} = 0$  und damit auch  $a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = 0$ . Aus der Rekursionsbeziehung ist zudem ersichtlich, dass  $a_0 \neq 0$  beliebig gewählt werden kann. Wählen wir nun  $a_0 = 1$ , dann folgt für die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$

$$a_1 = -\frac{n}{1 \cdot (\nu+1)}, \quad a_2 = \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)}, \quad a_3 = -\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

und allgemein

$$\begin{aligned}k \leq n : \quad a_k &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{k!(\nu+1)_k} = \frac{(-1)^k}{(\nu+1)_k} \binom{n}{k} \\k > n : \quad a_k &= 0.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für  $\nu = 0$  die Laguerre-Polynome

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \tag{18.2}$$

und mit  $\nu \in \mathbb{R}$  die verallgemeinerten Laguerre-Polynome

$$L_n^\nu(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(\nu+1)_k} \binom{n}{k} x^k. \tag{18.3}$$

Die Laguerre-Polynome von Grad 0 bis 7 sind in Abbildung 18.1 dargestellt.

### 18.1.1 Analytische Fortsetzung

Durch die analytische Fortsetzung erhalten wir zudem noch die zweite Lösung der Differentialgleichung mit der Form

$$\Xi_n(x) = L_n(x) \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k.$$

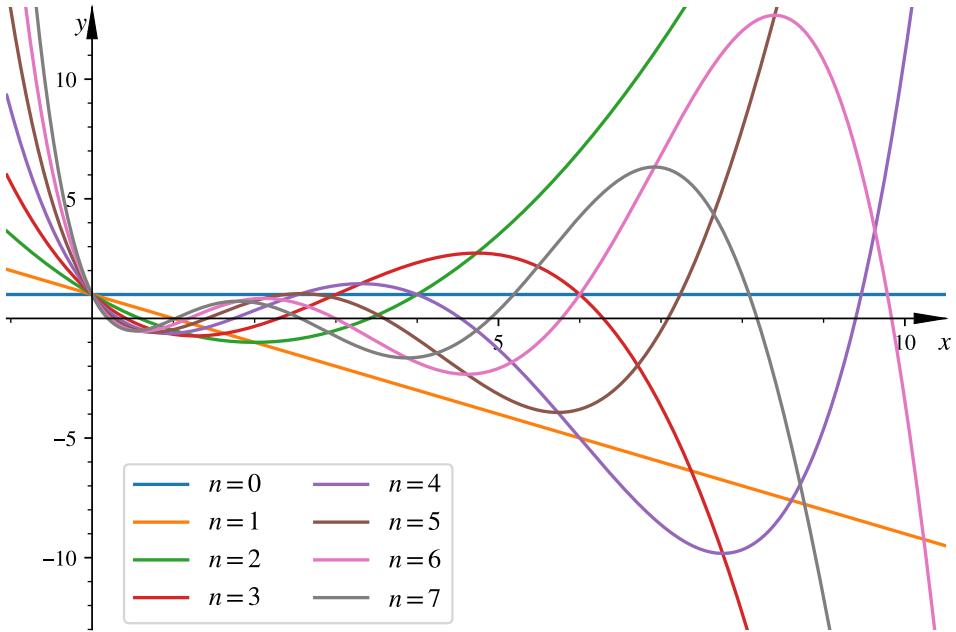


Abbildung 18.1: Laguerre-Polynome vom Grad 0 bis 7

Nach einigen aufwändigen Rechnungen, die den Rahmen dieses Kapitel sprengen würden, erhalten wir

$$\Xi_n = L_n(x) \ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} (\alpha_{n-k} - \alpha_n - 2\alpha_k) x^k + (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)! n!}{((n+k)!)^2} x^{n+k},$$

wobei  $\alpha_0 = 0$  und  $\alpha_k = \sum_{i=1}^k i^{-1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

## 18.2 Orthogonalität

Im Abschnitt 18.1 haben wir die Behauptung aufgestellt, dass die Laguerre-Polynome orthogonal sind. Zu dieser Behauptung möchten wir nun einen Beweis liefern. Wenn wir (18.1) in ein Sturm-Liouville-Problem umwandeln können, haben wir bewiesen, dass es sich bei den Laguerre-Polynomen um orthogonale Polynome handelt (siehe Abschnitt 7.6). Der Beweis kann äquivalent auch über den Sturm-Liouville-Operator

$$S = \frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right). \quad (18.4)$$

und den Laguerre-Operator

$$\Lambda = x \frac{d}{dx^2} + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx} \quad (18.5)$$

erhalten werden, indem wir diese Operatoren einander gleichsetzen. Aus der Beziehung

$$S = \Lambda$$

$$\frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right) = x \frac{d^2}{dx^2} + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx} \quad (18.6)$$

lässt sich sofort erkennen, dass  $q(x) = 0$ . Außerdem ist ersichtlich, dass  $p(x)$  die Differentialgleichung

$$x \frac{dp}{dx} = -(\nu + 1 - x)p$$

erfüllen muss. Durch Separation erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p} &= - \int \frac{\nu + 1 - x}{x} dx = - \int \frac{\nu + 1}{x} dx - \int 1 dx \\ \log p &= -(\nu + 1) \log x - x + c \\ p(x) &= -Cx^{\nu+1}e^{-x}. \end{aligned}$$

Eingefügt in Gleichung (18.6) ergibt sich

$$\frac{C}{w(x)} \left( x^{\nu+1} e^{-x} \frac{d^2}{dx^2} + (\nu + 1 - x)x^\nu e^{-x} \frac{d}{dx} \right) = x \frac{d^2}{dx^2} + (\nu + 1 - x) \frac{d}{dx}.$$

Mittels Koeffizientenvergleich kann nun abgelesen werden, dass  $w(x) = x^\nu e^{-x}$  und  $C = 1$  mit  $\nu > -1$ . Die Gewichtsfunktion  $w(x)$  wächst für  $x \rightarrow -\infty$  sehr schnell an, deshalb ist die Laguerre-Gewichtsfunktion nur geeignet für den Definitionsbereich  $(0, \infty)$ . Bleibt nur noch sicherzustellen, dass die Randbedingungen,

$$k_0 y(0) + h_0 p(0)y'(0) = 0 \quad (18.7)$$

$$k_\infty y(\infty) + h_\infty p(\infty)y'(\infty) = 0 \quad (18.8)$$

mit  $|k_i|^2 + |h_i|^2 \neq 0$ ,  $\forall i \in \{0, \infty\}$ , erfüllt sind. Am linken Rand (Gleichung (18.7)) kann  $y(0) = 1$ ,  $k_0 = 0$  und  $h_0 = 1$  verwendet werden, was auch die Laguerre-Polynome ergeben haben. Für den rechten Rand ist die Bedingung (Gleichung (18.8))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^{\nu+1}e^{-x}y'(x) = 0$$

für beliebige Polynomlösungen erfüllt für  $k_\infty = 0$  und  $h_\infty = 1$ . Damit können wir schlussfolgern: Die verallgemeinerten Laguerre-Polynome sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes auf dem Intervall  $(0, \infty)$  mit der verallgemeinerten Laguerre-Gewichtsfunktion  $w(x) = x^\nu e^{-x}$ . Die Laguerre-Polynome ( $\nu = 0$ ) sind somit orthogonal im Intervall  $(0, \infty)$  mit der Gewichtsfunktion  $w(x) = e^{-x}$ .

## 18.3 Gauss-Quadratur

Die Gauss-Quadratur ist ein numerisches Integrationsverfahren, welches die Eigenschaften von orthogonalen Polynomen verwendet. Herleitungen und Analysen der Gauss-Quadratur können im Abschnitt 7.7 gefunden werden. Als grundlegende Idee wird die Beobachtung, dass viele Funktionen sich gut mit Polynomen approximieren lassen, verwendet. Stellt man also sicher, dass ein Verfahren gut für Polynome funktioniert, sollte es auch für andere Funktionen angemessene Resultate liefern.

Es wird ein Polynom verwendet, welches an den Punkten  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  die Funktionswerte  $f(x_i)$  annimmt. Als Resultat kann das Integral via einer gewichteten Summe der Form

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)A_i \quad (18.9)$$

berechnet werden. Die Gauss-Quadratur ist exakt für Polynome mit Grad  $2n - 1$ , wenn ein Interpolationspolynom von Grad  $n$  gewählt wurde.

### 18.3.1 Gauss-Laguerre-Quadratur

Wir möchten nun die Gauss-Quadratur auf die Berechnung von uneigentlichen Integralen erweitern, spezifisch auf das Intervall  $(0, \infty)$ . Mit dem vorher beschriebenen Verfahren ist dies nicht direkt möglich. Mit einer Transformation die das unendliche Intervall  $(a, \infty)$  mit

$$x = a + \frac{1-t}{t}$$

auf das Intervall  $[0, 1]$  transformiert, kann dies behoben werden. Für unseren Fall gilt  $a = 0$ . Das Integral eines Polynomes in diesem Intervall ist immer divergent. Darum müssen wir das Polynom mit einer Funktion multiplizieren, die schneller als jedes Polynom gegen 0 geht, damit das Integral immer noch konvergiert. Die Laguerre-Polynome  $L_n$  schaffen hier Abhilfe, da ihre Gewichtsfunktion  $w(x) = e^{-x}$  schneller gegen 0 konvergiert als jedes Polynom. Die Gleichung (18.9) lässt sich wie folgt umformulieren:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)A_i \quad (18.10)$$

#### Stützstellen und Gewichte

Nach der Definition der Gauss-Quadratur müssen als Stützstellen die Nullstellen des verwendeten Polynoms genommen werden. Für das Laguerre-Polynom  $L_n$  müssen demnach dessen Nullstellen  $x_i$  und als Gewichte  $A_i$  die Integrale  $\int_0^\infty l_i(x)e^{-x}dx$  verwendet werden. Dabei sind

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Lagrangeschen Interpolationspolynome. Laut [\[laguerre:hildebrand2013introduction\]](#) können die Gewichte mit

$$A_i = -\frac{C_{n+1}\gamma_n}{C_n\phi'_n(x_i)\phi_{n+1}(x_i)}$$

berechnet werden.  $C_i$  entspricht dabei dem Koeffizienten von  $x^i$  des orthogonalen Polynoms  $\phi_n(x)$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$  und

$$\gamma_n = \int_0^\infty w(x)\phi_n^2(x) dx$$

dem Normalisierungsfaktor. Wir setzen nun  $\phi_n(x) = L_n(x)$  und nutzen den Vorzeichenwechsel der Laguerre-Koeffizienten aus, damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{C_{n+1}\gamma_n}{C_n L'_n(x_i)L_{n+1}(x_i)} \\ &= \frac{C_n}{C_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{L_{n-1}(x_i)L'_n(x_i)}. \end{aligned}$$

Für Laguerre-Polynome gilt

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = -\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \gamma_n = 1.$$

Daraus folgt

$$A_i = -\frac{1}{n L_{n-1}(x_i)L'_n(x_i)}. \quad (18.11)$$

Nun kann die Rekursionseigenschaft der Laguerre-Polynome

$$\begin{aligned} x L'_n(x) &= n L_n(x) - n L_{n-1}(x) \\ &= (x - n - 1)L_n(x) + (n + 1)L_{n+1}(x) \end{aligned}$$

umgeformt werden und da  $x_i$  die Nullstellen von  $L_n(x)$  sind, vereinfacht sich der Term zu

$$\begin{aligned} x_i L'_n(x_i) &= -n L_{n-1}(x_i) \\ &= (n + 1)L_{n+1}(x_i). \end{aligned}$$

Setzen wir das nun in (18.11) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{x_i [L'_n(x_i)]^2} \\ &= \frac{x_i}{(n + 1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}. \end{aligned} \quad (18.12)$$

## Fehlerterm

Die Gauss-Laguerre-Quadratur mit  $n$  Stützstellen berechnet Integrale von Polynomen bis zum Grad  $2n - 1$  exakt. Für beliebige Funktionen kann eine Fehlerabschätzung angegeben werden. Der Fehlerterm  $R_n$  folgt direkt aus der Approximation

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n f(x_i)A_i + R_n$$

und [\[laguerre:abramowitz+stegun\]](#) gibt ihn als

$$R_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_0^\infty l(x)^2 e^{-x} dx \quad (18.13)$$

$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty \quad (18.14)$$

an. Der Fehler ist also abhängig von der  $2n$ -ten Ableitung der zu integrierenden Funktion.

## 18.4 Anwendung: Berechnung der Gamma-Funktion

Die Gauss-Laguerre-Quadratur kann nun verwendet werden, um exponentiell abfallende Funktionen im Definitionsbereich  $(0, \infty)$  zu berechnen. Dabei bietet sich z.B. die Gamma-Funktion hervorragend an, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden.

### 18.4.1 Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion ist eine Erweiterung der Fakultät auf die reale und komplexe Zahlenmenge. Die Definition 4.5 beschreibt die Gamma-Funktion als Integral der Form

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{wobei Realteil von } z \text{ grösser als 0.} \quad (18.15)$$

Der Term  $e^{-t}$  im Integranden und der Integrationsbereich erfüllen genau die Bedingungen der Laguerre-Integration. Weiter zu erwähnen ist, dass für die verallgemeinerte Laguerre-Integration die Gewichtsfunktion  $t^\nu e^{-t}$  exakt dem Integranden für  $\nu = z - 1$  entspricht.

#### Funktionalgleichung

Die Gamma-Funktion besitzt die gleiche Rekursionsbeziehung wie die Fakultät, nämlich

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1). \quad (18.16)$$

#### Reflektionsformel

Die Reflektionsformel

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{für } z \notin \mathbb{Z} \quad (18.17)$$

stellt eine Beziehung zwischen den zwei Punkten, die aus der Spiegelung an der Geraden  $\operatorname{Re} z = 1/2$  hervorgehen, her. Dadurch lassen Werte der Gamma-Funktion sich für  $z$  in der rechten Halbebene leicht in die linke Halbebene übersetzen und umgekehrt.

### 18.4.2 Berechnung mittels Gauss-Laguerre-Quadratur

In den vorherigen Abschnitten haben wir gesehen, dass sich die Gamma-Funktion bestens für die Gauss-Laguerre-Quadratur eignet. Nun bieten sich uns zwei Optionen, diese zu berechnen:

1. Wir verwenden die verallgemeinerten Laguerre-Polynome, dann  $f(x) = 1$ .
2. Wir verwenden die Laguerre-Polynome, dann  $f(x) = x^{z-1}$ .

Die erste Variante wäre optimal auf das Problem angepasst, allerdings müssten die Gewichte und Nullstellen für jedes  $z$  neu berechnet werden, da sie per Definition von  $z$  abhängen. Dazu kommt, dass die Berechnung der Gewichte  $A_i$  nach [laguerre:Cassity1965AbcissasCA]

$$A_i = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+\nu)}{(n+\nu)\left[L_{n-1}^\nu(x_i)\right]^2}$$

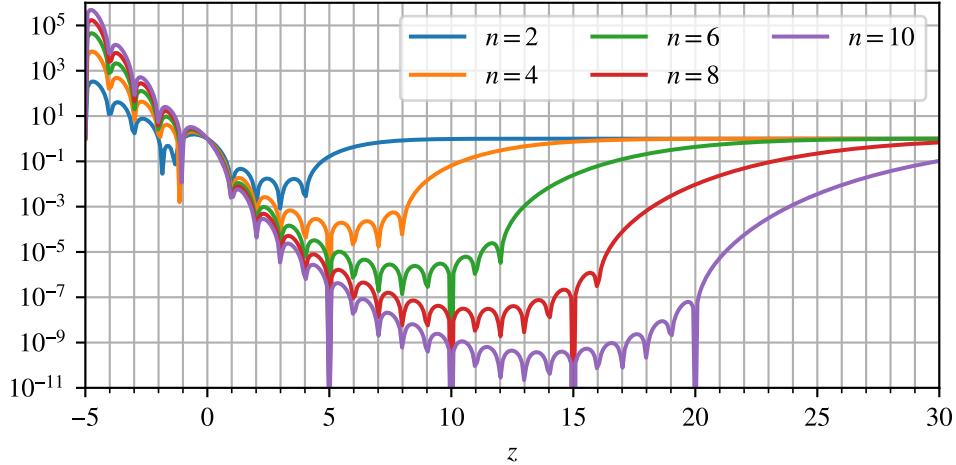


Abbildung 18.2: Relativer Fehler des direkten Ansatzes für verschiedene reelle Werte von  $z$  und Grade  $n$  der Laguerre-Polynome

Evaluationen der Gamma-Funktion benötigen. Somit ist diese Methode eindeutig nicht geeignet für unser Vorhaben.

Bei der zweiten Variante benötigen wir keine Neuberechnung der Gewichte und Nullstellen für unterschiedliche  $z$ . In (18.12) ist ersichtlich, dass die Gewichte einfach zu berechnen sind. Auch die Nullstellen können vorgängig, mittels eines geeigneten Verfahrens, aus den Polynomen bestimmt werden. Als problematisch könnte sich höchstens die zu integrierende Funktion  $f(x) = x^{z-1}$  für  $|z| \gg 0$  erweisen. Somit entscheiden wir uns aufgrund der vorherigen Punkte, die zweite Variante weiterzuverfolgen.

### Direkter Ansatz

Wenden wir also die Gauss-Laguerre-Quadratur aus (18.10) auf die Gamma-Funktion (18.15) an, ergibt sich

$$\Gamma(z) \approx \sum_{i=1}^n x_i^{z-1} A_i. \quad (18.18)$$

Bevor wir die Gauss-Laguerre-Quadratur anwenden, möchten wir als ersten Schritt eine Fehlerabschätzung durchführen. Für den Fehlerterm (18.14) wird die  $2n$ -te Ableitung der zu integrierenden Funktion  $f(\xi)$  benötigt. Für das Integral der Gamma-Funktion ergibt sich also

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{d\xi^{2n}} f(\xi) &= \frac{d^{2n}}{d\xi^{2n}} \xi^{z-1} \\ &= (z-2n)_{2n} \xi^{z-2n-1}. \end{aligned}$$

Eingesetzt im Fehlerterm (18.14) resultiert

$$R_n = (z-2n)_{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \xi^{z-2n-1}, \quad (18.19)$$

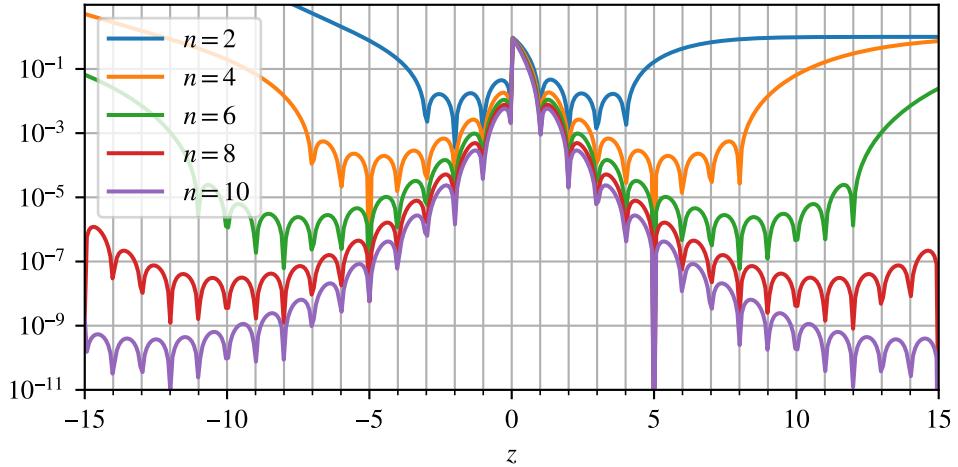


Abbildung 18.3: Relativer Fehler des Ansatzes mit Spiegelung negativer Realwerte für verschiedene reelle Werte von  $z$  und Grade  $n$  der Laguerre-Polynome

wobei  $\xi$  ein geeigneter Wert im Intervall  $(0, \infty)$  ist und  $n$  der Grad des verwendeten Laguerre-Polynoms. Eine Fehlerabschätzung mit dem Fehlerterm stellt sich als unnütz heraus, da  $R_n$  für  $z < 2n - 1$  bei  $\xi \rightarrow 0$  eine Singularität aufweist und für  $z > 2n - 1$  bei  $\xi \rightarrow \infty$  divergiert. Nur für den unwahrscheinlichen Fall  $z = 2n - 1$  wäre eine Fehlerabschätzung plausibel.

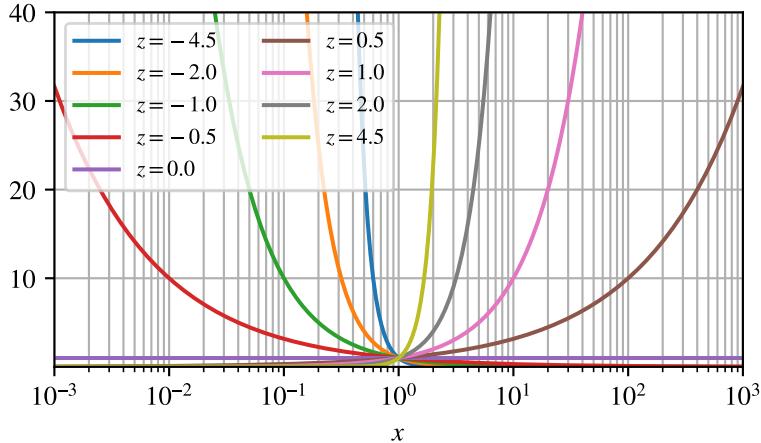
Wenden wir nun also direkt die Gauss-Laguerre-Quadratur auf die Gamma-Funktion an. Dazu benötigen wir die Gewichte nach (18.12) und als Stützstellen die Nullstellen des Laguerre-Polynomes  $L_n$ . Evaluieren wir den relativen Fehler unserer Approximation zeigt sich ein Bild wie in Abbildung 18.2. Man kann sehen, wie der relative Fehler Nullstellen aufweist für ganzzahlige  $z \leq 2n$ . Laut der Theorie der Gauss-Quadratur auch ist das zu erwarten, da die Approximation via Gauss-Quadratur exakt ist für zu integrierende Polynome mit Grad  $\leq 2n - 1$  und hinzukommt, dass zudem von  $z$  noch 1 abgezogen wird im Exponenten. Es ist ersichtlich, dass sich für den Polynomgrad  $n$  ein Intervall gibt, in dem der relative Fehler minimal ist. Links steigt der relative Fehler besonders stark an, während er auf der rechten Seite zu konvergieren scheint. Um die linke Hälfte in den Griff zu bekommen, könnten wir die Reflektionsformel der Gamma-Funktion ausnutzen.

Spiegelt man nun  $z$  mit negativem Realteil mittels der Reflektionsformel, ergibt sich ein stabilerer Fehler in der linken Hälfte, wie in Abbildung 18.3. Die Spiegelung bringt nur für wenige Werte einen, für praktische Anwendungen geeigneten, relativen Fehler. Wie wir aber in Abbildung 18.2 sehen konnten, gibt es für jeden Polynomgrad  $n$  ein Intervall  $[a(n), a(n) + 1]$ ,  $a(n) \in \mathbb{Z}$ , in welchem der relative Fehler minimal ist. Die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion (18.16) könnte uns hier helfen, das Problem in den Griff zu bekommen.

### Analyse des Integranden

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, scheint der Integrand problematisch. Darum möchten wir jetzt den Integranden analysieren, um ihn besser verstehen zu können und dadurch geeignete Gegenmassnahmen zu entwickeln.

In Abbildung 18.4 ist der Integrand  $x^z$  für unterschiedliche Werte von  $z$  dargestellt. Dies entspricht der zu integrierenden Funktion  $f(x)$  der Gauss-Laguerre-Quadratur für die Gamma-Funktion.

Abbildung 18.4: Integrand  $x^z$  mit unterschiedlichen Werten für  $z$ 

Man erkennt, dass für kleine  $z$  sich ein singulärer Integrand ergibt und auch für grosse  $z$  wächst der Integrand sehr schnell an. Das heisst, die Ableitungen im Fehlerterm divergieren noch schneller und das wirkt sich negativ auf die Genauigkeit der Approximation aus. Somit lässt sich hier sagen, dass kleine Exponenten um 0 genauere Resultate liefern sollten.

In Abbildung 18.5 fügen wir die Dämpfung der Gewichtsfunktion  $w(x)$  der Gauss-Laguerre-Quadratur wieder hinzu und erhalten so wieder den kompletten Integranden  $x^{z-1}e^{-x}$  der Gamma-Funktion. Für negative  $z$  ergeben sich immer noch Singularitäten, wenn  $x \rightarrow 0$ . Um 1 wächst der Term  $x^z$  schneller als die Dämpfung  $e^{-x}$ , aber für  $x \rightarrow \infty$  geht der Integrand gegen 0. Das führt zu glockenförmigen Kurven, die für grosse Exponenten  $z$  nach der Stelle  $x = 1$  schnell anwachsen. Zu grosse Exponenten  $z$  sind also immer noch problematisch. Kleine positive  $z$  scheinen nun also auch zulässig zu sein. Damit formulieren wir die Vermutung, dass  $a(n)$ , welches das Intervall  $[a(n), a(n) + 1]$  definiert, in dem der relative Fehler minimal ist, grösser als 0 und kleiner als  $2n - 1$  ist.

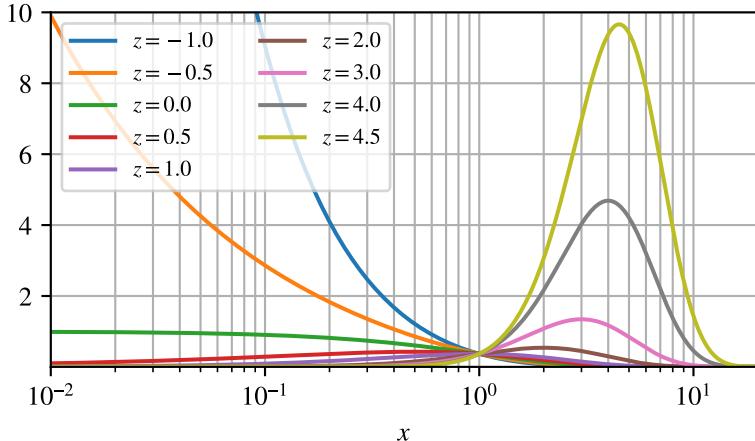
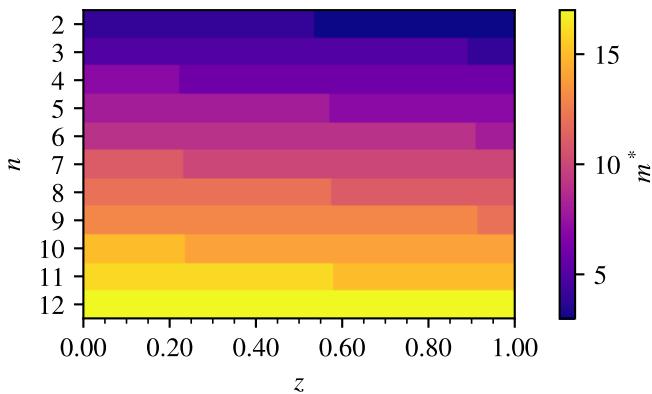
### Ansatz mit Verschiebungsterm

Nun stellt sich die Frage, ob die Approximation mittels Gauss-Laguerre-Quadratur verbessert werden kann, wenn man das Problem in einem geeigneten Intervall  $[a(n), a(n) + 1]$ ,  $a(n) \in \mathbb{Z}$ , evaluiert und dann mit der Funktionalgleichung (18.16) zurückverschiebt. Für dieses Vorhaben führen wir einen Verschiebungsterm  $m \in \mathbb{Z}$  ein. Passen wir (18.18) mit dem Verschiebungsterm  $m$  an, ergibt sich

$$\Gamma(z) \approx s(z, m) \sum_{i=1}^n x_i^{z+m-1} A_i \quad (18.20)$$

mit

$$s(z, m) = \begin{cases} \frac{1}{(z)_m} & \text{wenn } m \geq 0 \\ (z + m)_{-m} & \text{wenn } m < 0 \end{cases}.$$

Abbildung 18.5: Integrand  $x^z e^{-x}$  mit unterschiedlichen Werten für  $z$ Abbildung 18.6:  $a$  in Abhängigkeit von  $z$  und  $n$ 

### Finden der optimalen Berechnungsstelle

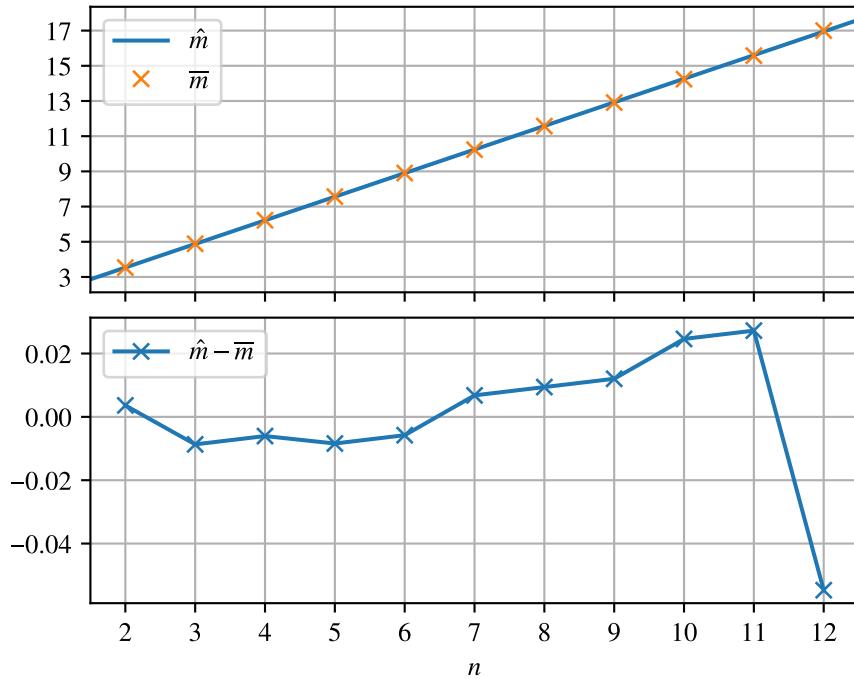
Um die optimale Stelle  $z^*(n) \in [a(n), a(n) + 1]$ ,  $z^*(n) \in \mathbb{R}$ , zu finden, erweitern wir den Fehlerterm (18.19) und erhalten

$$R_{n,m}(\xi) = s(z, m) \cdot (z - 2n)_{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \xi^{z+m-2n-1}, \quad \text{für } \xi \in (0, \infty). \quad (18.21)$$

Daraus formulieren wir das Optimierungsproblem

$$m^* = \operatorname{argmin}_m \max_{\xi} R_{n,m}(\xi).$$

Allerdings ist die Funktion  $R_{n,m}(\xi)$  unbeschränkt und hat die gleichen Probleme wie die Fehlerabschätzung des direkten Ansatzes. Dazu müssten wir  $\xi$  versuchen, unter Kontrolle zu bringen, was ein äußerst schwieriges Unterfangen zu sein scheint. Da die Gauss-Quadratur aber sowieso nur

Abbildung 18.7: Schätzung Mittelwert von  $m$  und Fehler

wirklich praktisch sinnvoll für kleine  $n$  ist, können die Intervalle  $[a(n), a(n) + 1]$  empirisch gesucht werden.

Wir bestimmen nun die optimalen Verschiebungsterme empirisch für  $n = 2, \dots, 12$  im Intervall  $z \in (0, 1)$ , da  $z$  sowieso um den Term  $m$  verschoben wird, reicht die  $m^*$  nur in diesem Intervall zu analysieren. In Abbildung 18.6 sind die empirisch bestimmten  $m^*$  abhängig von  $z$  und  $n$  dargestellt. In  $n$ -Richtung lässt sich eine klare lineare Abhängigkeit erkennen und die Beziehung zu  $z$  ist negativ, d.h. wenn  $z$  grösser ist, wird  $m^*$  kleiner. Allerdings ist die genaue Beziehung zu  $z$  aus dieser Grafik nicht offensichtlich, aber sie scheint regelmässig zu sein. Es lässt die Vermutung aufkommen, dass die Restriktion von  $m^* \in \mathbb{Z}$  Rundungsprobleme verursacht. Wir versuchen, dieses Problem via lineare Regression und geeignete Rundung zu beheben. Den linearen Regressor

$$\hat{m} = \alpha n + \beta$$

machen wir nur abhängig von  $n$  in dem wir den Mittelwert  $\bar{m}$  von  $m^*$  über  $z$  berechnen.

In Abbildung 18.7 sind die Resultate der linearen Regression aufgezeigt mit  $\alpha = 1.34094$  und  $\beta = 0.854093$ . Die lineare Beziehung ist ganz klar ersichtlich und der Fit scheint zu genügen. Der optimale Verschiebungsterm kann nun mit

$$m^* \approx \lceil \hat{m} - z \rceil = \lceil \alpha n + \beta - z \rceil$$

gefunden werden.

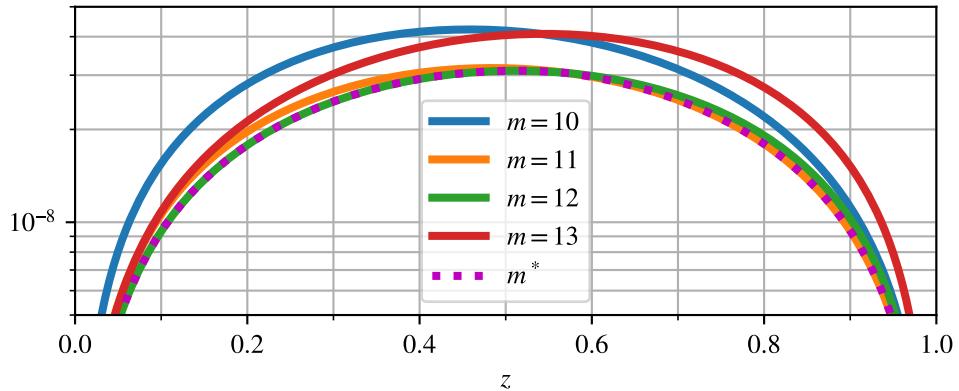


Abbildung 18.8: Relativer Fehler des Ansatzes mit Verschiebungsterm für verschiedene reelle Werte von  $z$  und Verschiebungsterme  $m$ . Das verwendete Laguerre-Polynom besitzt den Grad  $n = 8$ .  $m^*$  bezeichnet hier den optimalen Verschiebungsterm.

### Evaluation des Schätzers

In einem ersten Schritt möchten wir analysieren, wie gut die Abschätzung des optimalen Verschiebungsterms ist. Dazu bestimmen wir den relativen Fehler für verschiedene Verschiebungsterme  $m$  rund um  $m^*$  bei gegebenem Polynomgrad  $n = 8$  für  $z \in (0, 1)$ . Abbildung 18.8 sind die relativen Fehler der Approximation dargestellt. Man kann deutlich sehen, dass der relative Fehler anwächst, je weiter der Verschiebungsterm vom idealen Wert abweicht. Zudem scheint der Schätzer den optimalen Verschiebungsterm gut zu bestimmen, da der Schätzer zuerst der grünen Linie folgt und dann beim Übergang auf die orangefarbene Linie wechselt.

### Resultate

Das Verfahren scheint für den Grad  $n = 8$  und  $z \in (0, 1)$  gut zu funktionieren. Es stellt sich nun die Frage, wie der relative Fehler sich für verschiedene  $z$  und  $n$  verhält. In Abbildung 18.9 sind die relativen Fehler für unterschiedliche  $n$  dargestellt. Der relative Fehler scheint immer noch Nullstellen aufzuweisen für ganzzahlige  $z$ . Durch das Verschieben ergibt sich jetzt aber, wie zu erwarten war, ein periodischer relativer Fehler mit einer Periodendauer von 1. Zudem lässt sich erkennen, dass der Fehler abhängig von der Ordnung  $n$  des verwendeten Laguerre-Polynoms ist. Wenn der Grad  $n$  um 1 erhöht wird, verbessert sich die Genauigkeit des Resultats um etwa eine signifikante Stelle.

In Abbildung 18.10 ist der Betrag des relativen Fehlers in der komplexen Ebene dargestellt. Je stärker der Imaginäranteil von  $z$  von 0 abweicht, umso schlechter wird die Genauigkeit der Approximation. Das erstaunt nicht weiter, da die Gauss-Quadratur eigentlich nur für reelle Zahlen definiert ist. Wenn der Imaginäranteil von  $z$  ungefähr 0 ist, lässt sich das gleiche Bild beobachten wie in Abbildung 18.9.

### Vergleich mit Lanczos-Methode

Nun stellt sich die Frage, wie das in diesem Abschnitt beschriebene Approximationsverfahren der Gamma-Funktion sich gegenüber den üblichen Approximationsverfahren schlägt. Eine häufig ver-

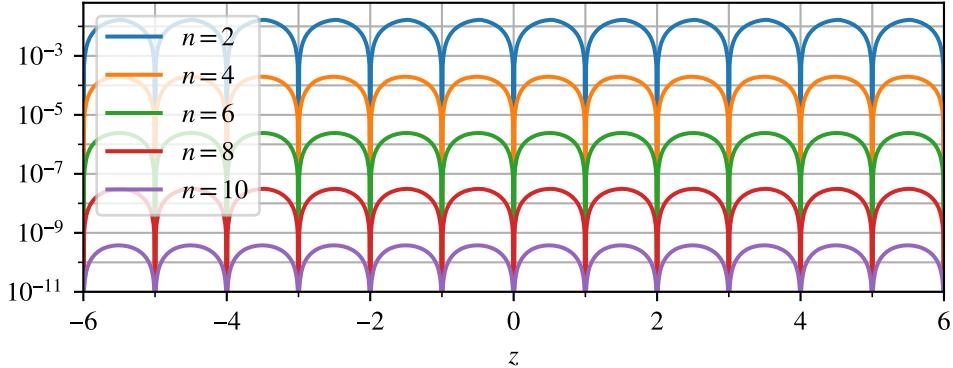


Abbildung 18.9: Relativer Fehler des Ansatzes mit optimalen Verschiebungsterm für verschiedene reelle Werte von  $z$  und Laguerre-Polynome vom Grad  $n$

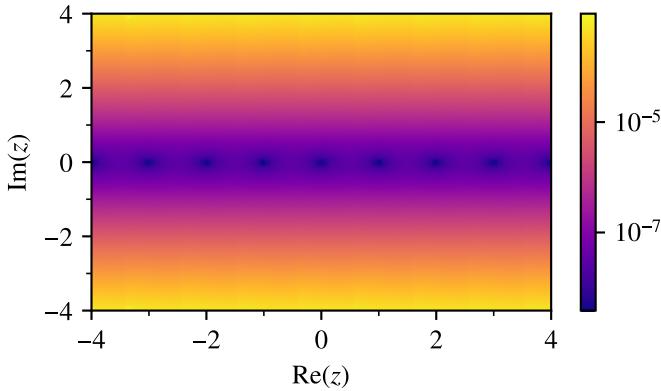


Abbildung 18.10: Absolutwert des relativen Fehlers in der komplexen Ebene

wendete Methode ist die Lanczos-Approximation, welche gegeben ist durch

$$\Gamma(z+1) \approx \sqrt{2\pi} \left( z + \sigma + \frac{1}{2} \right)^{z+1/2} e^{-(z+\sigma+1/2)} \sum_{k=0}^n g_k H_k(z), \quad (18.22)$$

wobei

$$g_k = \frac{e^\sigma \varepsilon_k (-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} (k)_r \left( \frac{e}{r + \sigma + \frac{1}{2}} \right)^{r+1/2},$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_k(z) = \frac{(-1)^k (-z)_k}{(z+1)_k}$$

mit  $H_0 = 1$  und  $\sum_0^n g_k = 1$  (siehe [\[laguerre:lanczos\]](#)). Diese Methode wurde zum Beispiel in *GNU Scientific Library*, *Boost*, *CPython* und *musl* implementiert. Diese Methode erreicht für  $n = 7$

typischerweise Genauigkeit von 13 korrekten, signifikanten Stellen für reelle Argumente. Zum Vergleich: die vorgestellte Methode erreicht für  $n = 7$  eine minimale Genauigkeit von 6 korrekten, signifikanten Stellen für reelle Argumente. Das Resultat ist etwas enttäuschend, aber nicht unerwartet, da die Lanczos-Methode spezifisch auf dieses Problem zugeschnitten ist und unsere Methode eine erweiterte allgemeine Methode ist. Was die Komplexität der Berechnungen im Betrieb angeht, ist die Gauss-Laguerre-Quadratur wesentlich ressourcensparender, weil sie nur aus  $n$  Funktionsevaluierungen, wenigen Multiplikationen und Additionen besteht. Demzufolge könnte diese Methode Anwendung in Systemen mit wenig Rechenleistung und/oder knappen Energieressourcen finden.



# Kapitel 19

## Riemannsche Zetafunktion

Raphael Unterer

### 19.1 Einleitung

Die Riemannsche Zetafunktion ist für alle komplexe  $s$  mit  $\Re(s) > 1$  definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (19.1)$$

### 19.2 Eulerprodukt

Das Eulerprodukt stellt die Verbindung der Zetafunktion und der Primzahlen her. Diese Verbindung ist sehr wichtig, da durch sie eine Aussage zur Primzahlverteilung gemacht werden kann. Die Verteilung der Primzahlen ist Gegenstand der Riemannschen Vermutung, welche eines der grössten ungelösten Probleme der Mathematik ist.

**Satz 19.1.** *Für alle Zahlen  $s$  mit  $\Re(s) > 1$  ist die Zetafunktion identisch mit dem unendlichen Eulerprodukt*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (19.2)$$

wobei  $P$  die Menge aller Primzahlen darstellt.

*Beweis.* Der Beweis startet mit dem Eulerprodukt und stellt dieses so um, dass die Zetafunktion erscheint. Als erstes ersetzen wir die Faktoren durch geometrische Reihen

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \prod_{p \in P} \sum_{k_i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{p_i^s} \right)^{k_i} = \prod_{p \in P} \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{sk_i}}, \quad (19.3)$$

dabei iteriert der Index  $i$  über alle Primzahlen  $p_i$ . Durch Ausschreiben der Multiplikation und Ausklammern der Summen erhalten wir

$$\begin{aligned} \prod_{p \in P} \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{sk_i}} &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{sk_1}} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{sk_2}} \dots \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \left( \frac{1}{p_1^{k_1}} \frac{1}{p_2^{k_2}} \dots \right)^s. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Der Fundamentalsatz der Arithmetik (Primfaktorzerlegung) besagt, dass jede beliebige Zahl  $n \in \mathbb{N}$  durch eine eindeutige Primfaktorzerlegung beschrieben werden kann

$$n = \prod_i p_i^{k_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (19.5)$$

Jeder Summand der Summen in (19.4) ist somit eine Zahl  $n$ . Da die Summen alle möglichen Kombinationen von Exponenten und Primzahlen in (19.4) enthält haben wir

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \left( \frac{1}{p_1^{k_1}} \frac{1}{p_2^{k_2}} \dots \right)^s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \quad (19.6)$$

□

## 19.3 Zusammenhang mit der Gammafunktion

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Zetafunktion durch die Gammafunktion  $\Gamma(s)$  ausdrücken lässt. Dieser Zusammenhang der Art  $\zeta(s) = f(\Gamma(s))$  ist nicht nur interessant, er wird später auch für die Herleitung der analytischen Fortsetzung gebraucht.

Wir erinnern uns an die Definition der Gammafunktion in (4.23)

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt,$$

wobei die Notation an die Zetafunktion angepasst ist. Durch die Substitution von  $t$  mit  $t = nu$  und  $dt = n du$  wird daraus

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty n^{s-1} u^{s-1} e^{-nu} n du \\ &= \int_0^\infty n^s u^{s-1} e^{-nu} du. \end{aligned}$$

Durch Division mit durch  $n^s$  ergibt sich die Quotienten

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du,$$

welche sich zur Zetafunktion summieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^\infty u^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} du. \quad (19.7)$$

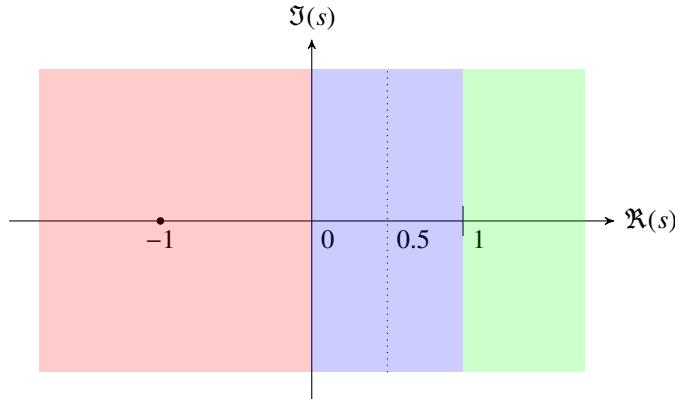


Abbildung 19.1: Die verschiedenen Abschnitte der Riemannschen Zetafunktion. Die originale Definition von (19.1) ist im grünen Bereich gültig. Für den blauen Bereich gilt (19.17). Um den roten Bereich zu bekommen verwendet die Funktionalgleichung (19.38) eine Spiegelung an  $\Re(s) = 0.5$ .

Die Summe über  $e^{-nu}$  können wir als geometrische Reihe schreiben und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-u})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-u})^n - 1 \quad (19.8)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-u}} - 1 \quad (19.9)$$

$$= \frac{1}{e^u - 1}. \quad (19.10)$$

Wenn wir dieses Resultat einsetzen in (19.7) und durch  $\Gamma(s)$  teilen, erhalten wir den gewünschten Zusammenhang

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \quad \square \quad (19.11)$$

## 19.4 Analytische Fortsetzung

Die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion ist äusserst interessant. Sie ermöglicht die Berechnung von  $\zeta(-1)$  und weiterer spannender Werte. So liegen zum Beispiel unendlich viele Nullstellen der Zetafunktion bei  $\Re(s) = 0.5$ . Diese sind relevant für die Primzahlverteilung und sind Gegenstand der Riemannschen Vermutung.

Es werden zwei verschiedene Fortsetzungen benötigt. Die erste erweitert die Zetafunktion auf  $\Re(s) > 0$ . Die zweite verwendet eine Spiegelung an der  $\Re(s) = 0.5$  Linie und erschliesst damit die ganze komplexe Ebene. Eine grafische Darstellung dieses Plans ist in Abbildung 19.1 zu sehen.

### 19.4.1 Fortsetzung auf $\Re(s) > 0$

Zuerst definieren die Dirichletsche Etafunktion als

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad (19.12)$$

wobei die Reihe bis auf die alternierenden Vorzeichen die selbe wie in der Zetafunktion ist. Diese Etafunktion konvergiert gemäss dem Leibnitz-Kriterium im Bereich  $\Re(s) > 0$ , da dann die einzelnen Glieder monoton fallend sind.

Wenn wir es nun schaffen, die sehr ähnliche Zetafunktion durch die Etafunktion auszudrücken, dann haben die gesuchte Fortsetzung. Zuerst wiederholen wir zweimal die Definition der Zetafunktion (19.1), wobei wir sie einmal durch  $2^{s-1}$  teilen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (19.13)$$

$$\frac{1}{2^{s-1}} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s}. \quad (19.14)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (19.13) minus (19.14), ergibt sich

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s) = \underbrace{\frac{1}{1^s} - \frac{2}{2^s} + \frac{1}{2^s}}_{-\frac{1}{2^s}} + \underbrace{\frac{1}{3^s} - \frac{2}{4^s} + \frac{1}{4^s}}_{-\frac{1}{4^s}} \dots \quad (19.15)$$

$$= \eta(s). \quad (19.16)$$

Dies ist die Fortsetzung auf den noch unbekannten Bereich  $0 < \Re(s) < 1$

$$\zeta(s) := \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)^{-1} \eta(s). \quad (19.17)$$

#### 19.4.2 Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$

Für die Fortsetzung auf den Rest von  $\mathbb{C}$ , verwenden wir den Zusammenhang von Gamma- und Zetafunktion aus 19.3. Wir beginnen damit, die Gammafunktion für den halben Funktionswert zu berechnen als

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} dt. \quad (19.18)$$

Nun substituieren wir  $t$  mit  $t = \pi n^2 x$  und  $dt = \pi n^2 dx$  und erhalten

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty (\pi n^2)^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx. \quad (19.19)$$

Analog zum Abschnitt 19.3 teilen wir durch  $(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}} n^s} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx, \quad (19.20)$$

und finden Zeta durch die Summenbildung  $\sum_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}}} \zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} dx. \quad (19.21)$$

Die Summe kürzen wir ab als  $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ . Im Abschnitt 19.4.3 wird die poisson'sche Summenformel  $\sum f(n) = \sum F(n)$  bewiesen. In unserem Problem ist  $f(n) = e^{-\pi n^2 x}$  und die zugehörige Fouriertransformation  $F(n)$  ist

$$F(n) = \mathcal{F}(e^{-\pi n^2 x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{-\pi n^2 \pi}{x}}. \quad (19.22)$$

Dadurch ergibt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2 \pi}{x}}, \quad (19.23)$$

wobei wir die Summen so verändern müssen, dass sie bei  $n = 1$  beginnen und wir  $\psi(x)$  erhalten als

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2 \pi}{x}} + 1 \right) \quad (19.24)$$

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( 2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right) \quad (19.25)$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (19.26)$$

Diese Gleichung wird später wichtig werden.

Zunächst teilen wir nun das Integral aus (19.21) auf als

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx = \underbrace{\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx}_{I_2} = I_1 + I_2, \quad (19.27)$$

wobei wir uns nun auf den ersten Teil  $I_1$  konzentrieren werden. Dabei setzen wir die Definition von  $\psi(x)$  aus (19.26) ein und erhalten

$$I_1 = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \quad (19.28)$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \left( x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \quad (19.29)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) dx}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} dx}_{I_4}. \quad (19.30)$$

Dabei kann das zweite Integral  $I_4$  gelöst werden als

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} dx = \frac{1}{s(s-1)}. \quad (19.31)$$

Das erste Integral  $I_3$  aus (19.30) mit  $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$  ist nicht lösbar in dieser Form. Deshalb substituieren wir  $x = \frac{1}{u}$  und  $dx = -\frac{1}{u^2} du$ . Die untere Integralgrenze wechselt ebenfalls zu  $x_0 = 0 \rightarrow u_0 = \infty$ . Dies ergibt

$$I_3 = \int_{\infty}^1 \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(u) \frac{-du}{u^2} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \psi(u) \frac{du}{u^2} \quad (19.32)$$

$$= \int_1^\infty x^{(-1)(\frac{s}{2} + \frac{1}{2})} \psi(x) dx, \quad (19.33)$$

wobei wir durch Multiplikation mit  $(-1)$  die Integralgrenzen tauschen dürfen. Es ist zu beachten das diese Grenzen nun identisch mit den Grenzen des zweiten Integrals von (19.27) sind. Wir setzen beide Lösungen ein in Gleichung (19.30) und erhalten

$$I_1 = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx = \int_1^\infty x^{(-1)(\frac{s}{2} + \frac{1}{2})} \psi(x) dx + \frac{1}{s(s-1)}. \quad (19.34)$$

Dieses Resultat setzen wir wiederum ein in (19.27), um schlussendlich

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} \zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty x^{(-1)(\frac{s}{2} + \frac{1}{2})} \psi(x) dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \end{aligned} \quad (19.35)$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}) \psi(x) dx \quad (19.36)$$

$$= \frac{-1}{s(1-s)} + \int_1^\infty (x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}) \frac{\psi(x)}{x} dx, \quad (19.37)$$

zu erhalten. Wenn wir dieses Resultat genau anschauen, erkennen wir dass sich nichts verändert wenn  $s$  mit  $1-s$  ersetzt wird. Somit haben wir die analytische Fortsetzung gefunden als

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} \zeta(s) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{\frac{1-s}{2}}} \zeta(1-s). \quad (19.38)$$

### 19.4.3 Poissonsche Summenformel

Der Beweis für Gleichung 19.26 folgt direkt durch die poissonsche Summenformel. Um diese zu beweisen, berechnen wir zunächst die Fourierreihe der Dirac Delta Funktion.

**Lemma 19.2.** Die Fourierreihe der periodischen Dirac Delta Funktion  $\sum \delta(x - 2\pi k)$  ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}. \quad (19.39)$$

*Beweis.* Eine Fourierreihe einer beliebigen periodischen Funktion  $f(x)$  berechnet sich als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (19.40)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (19.41)$$

Wenn  $f(x) = \delta(x)$  eingesetzt wird ergeben sich konstante Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}, \quad (19.42)$$

womit die sehr einfache Fourierreihe der Dirac Delta Funktion berechnet wäre.  $\square$

**Satz 19.3** (Poissonsche Summenformel). *Die Summe einer Funktion  $f(n)$  über alle ganzen Zahlen  $n$  ist äquivalent zur Summe ihrer Fouriertransformation  $F(k)$  über alle ganzen Zahlen  $k$*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k). \quad (19.43)$$

*Beweis.* Wir schreiben die Summe über die Fouriertransformation aus

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x k} dx \quad (19.44)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi x k}}_{(19.39)} dx, \quad (19.45)$$

und verwenden die Fouriertransformation der Dirac Funktion aus (19.39)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi x k} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(-2\pi x - 2\pi k) \quad (19.46)$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + k). \quad (19.47)$$

Wenn wir dies einsetzen und erhalten wir den gesuchten Beweis für die poissonsche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + k) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x + k) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k). \quad (19.48)$$

□



# Kapitel 20

## Thema

Hans Muster

Ein paar Hinweise für die korrekte Formatierung des Textes

- Absätze werden gebildet, indem man eine Leerzeile einfügt. Die Verwendung von \\ ist nur in Tabellen und Arrays gestattet.
- Die explizite Platzierung von Bildern ist nicht erlaubt, entsprechende Optionen werden gelöscht. Verwenden Sie Labels und Verweise, um auf Bilder hinzuweisen.
- Beginnen Sie jeden Satz auf einer neuen Zeile. Damit ermöglichen Sie dem Versionsverwaltungssysteme, Änderungen in verschiedenen Sätzen von verschiedenen Autoren ohne Konflikt anzuwenden.
- Bilden Sie auch für Formeln kurze Zeilen, einerseits der besseren Übersicht wegen, aber auch um GIT die Arbeit zu erleichtern.

### 20.1 Teil 0

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua [0f1:bibtex]. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

### 20.2 Teil 1

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta

sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (20.1)$$

Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem.

Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### **20.2.1 De finibus bonorum et malorum**

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga (??).

Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio ???. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus ???. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## **20.3 Teil 2**

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### **20.3.1 De finibus bonorum et malorum**

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus

aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.

## 20.4 Teil 3

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incidunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 20.4.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.



# Kapitel 21

## Sphärische Navigation

Enez Erdem und Marc Kühne

### 21.1 Einleitung

Heutzutage ist die Navigation ein Teil des Lebens. Man sendet dem Kollegen seinen eigenen Standort, um sich das ewige Erklären zu sparen oder gibt die Adresse des Ziels ein, damit man seinen Aufenthaltsort zum Beispiel auf einer riesigen Wiese am See findet. Dies wird durch Technologien wie Funknavigation, welches ein auf Laufzeitmessung beruhendes Hyperbelverfahren mit Langwellen ist, oder die verbreitete Satellitennavigation, welche vier Satelliten für eine Messung zur Standortbestimmung nutzt. Vor all diesen technologischen Fortschritten gab es lediglich die Astrogavigation, welche heute noch auf Schiffen verwendet wird im Falle eines Stromausfalls. Aber wie funktioniert die Navigation mit den Sternen? Welche Hilfsmittel benötigt man, welche Rolle spielt die Mathematik und weshalb kann die Erde nicht flach sein? In diesem Kapitel werden genau diese Fragen mithilfe des nautischen Dreiecks, der sphärischen Trigonometrie und einigen Hilfsmitteln und Messgeräten beantwortet.

### 21.2 Warum ist die Erde nicht flach?

Es gibt heutzutage viele Beweise dafür, dass die Erde eine Kugel ist. Die Fotos von unserem Planeten oder die Berichte der Astronauten. Aber schon vor ca. 2300 Jahren hat Aristoteles bemerkt, dass Schiffe im Horizont verschwinden und die einzige Erklärung dafür die Kugelgestalt der Erde ist. Auch der Erdschatten bei einer Mondfinsternis ist immer rund. Eratosthenes konnte etwa 100 Jahre später den Erdumfang berechnen. Er beobachtete, dass die Sonne in Syene mittags im Zenit steht und gleichzeitig in Alexandria unter einem Winkel einfällt. Mithilfe der Trigonometrie konnte er mit dem Abstand der Städte und dem Einfallswinkel den Umfang berechnen.

Der Kartograph Gerhard Mercator projizierte die Erdkugel wie in Abbildung 21.1 dargestellt auf ein Papier und erstellte so eine winkeltreue Karte. Jedoch wurden die Länder, die einen grösseren Abstand zum Äquator haben vergrössert, damit die Winkel stimmen können. Wurde man also nun davon ausgehen, dass die Erde flach ist so würden wir nie dort ankommen wo wir es wollen. Dies

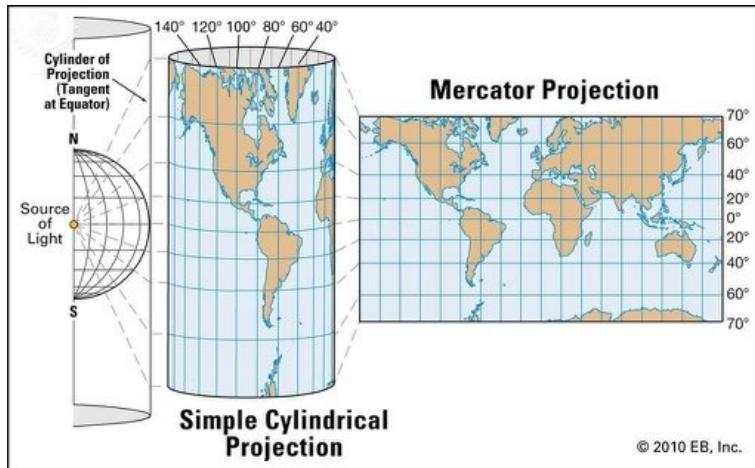


Abbildung 21.1: Mercator Projektion

sieht man zum Beispiel sehr gut, wenn man die Anwendung Google Earth und eine Weltkarte vergleicht. Grönland ist auf der Weltkarte so gross wie Afrika. In der Anwendung Google Earth jedoch ist Grönland etwa so gross wie Algerien. Das liegt daran, dass man die 3D – Weltkarte nicht einfach auslegen kann.

## 21.3 Sphärische Navigation und Winkelfunktionen

Es gibt Hinweise, dass sich schon die Babylonier und Ägypter vor 4000 Jahren mit Problemen der sphärischen Trigonometrie beschäftigt haben, um den Lauf von Gestirnen zu berechnen. Jedoch konnten sie dieses Problem nicht lösen. Die Geschichte der sphärischen Trigonometrie ist daher eng mit der Astronomie verknüpft. Ca. 350 BCE dachten die Griechen über Kugelgeometrie nach, sie wurde damit zu einer Hilfswissenschaft der Astronomen.

Zwischen 190 v. Chr. und 120 v. Chr. lebte ein griechischer Astronom namens Hipparchos. Dieser entwickelte unter anderem die Chordentafeln, welche die Chordfunktionen, auch Chord genannt, beinhalteten. Chord ist der Vorgänger der Sinusfunktion und galt damals als wichtigste Grundlage der Trigonometrie. In dieser Zeit wurden auch die ersten Sternenkarten angefertigt. Damals kannte man die Sinusfunktionen noch nicht.

Die Definition der trigonometrischen Funktionen aus Griechenland ermöglicht nur, rechtwinklige Dreiecke zu berechnen. Aus Indien stammten die ersten Ansätze zu den Kosinussätzen. Aufbauend auf den indischen und griechischen Forschungen entwickelten die Araber um das 9. Jahrhundert den Sinussatz. Die Beziehung zwischen Seiten und Winkeln sind komplizierter und als Sinus- und Kosinussätze bekannt. Doch ein paar weitere Jahrhunderte vergingen bis zu diesem Thema wieder verstärkt Forschung betrieben wurde, da im 15. Jahrhundert grosse Entdeckungsreisen, hauptsächlich per Schiff, erfolgten und die Orientierung mit Sternen vermehrt an Wichtigkeit gewann. Man nutzte für die Kartographie nun die Kugelgeometrie, um die Genauigkeit zu erhöhen. Der Sinussatz, die Tangensfunktion und der neu entwickelte Seitenkosinussatz wurden in dieser Zeit bereits verwendet und im darauffolgenden Jahrhundert folgte der Winkelkosinussatz.

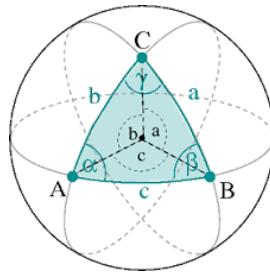


Abbildung 21.2: Das Kugeldreieck

Durch weitere mathematische Entwicklungen wie den Logarithmus wurden im Laufe des nächsten Jahrhunderts viele neue Methoden und kartographische Anwendungen der Kugelgeometrie entdeckt. Im 19. und 20. Jahrhundert wurden weitere nicht-euklidische Geometrien entwickelt und die sphärische Trigonometrie fand auch ihre Anwendung in der Relativitätstheorie.

## 21.4 Sphärische Trigonometrie

### 21.4.1 Das Kugeldreieck

Damit man die Definition des Kugeldreiecks versteht, müssen wir zuerst Begriffe wie Grosskreisebene und Grosskreisbögen verstehen. Ein Grosskreis ist ein grösstmöglicher Kreis auf einer Kugeloberfläche. Sein Mittelpunkt fällt immer mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen und ein Schnitt auf dem Großkreis teilt die Kugel in jedem Fall in zwei gleich grosse Hälften. Da es unendlich viele Möglichkeiten gibt, eine Kugel so zu zerschneiden, dass die Schnittebene den Kugelmittelpunkt trifft, gibt es auch unendlich viele Grosskreise. Grosskreisbögen sind die kürzesten Verbindungslinien zwischen zwei Punkten auf der Kugel.

Da die Länge der Grosskreisbögen wegen der Abhängigkeit vom Kugelradius ungeeignet ist, wird die Grösse einer Seite mit dem zugehörigen Mittelpunktwinkel des Grosskreisbogens angegeben. Laut dieser Definition ist die Seite  $c$  der Winkel  $AMB$ , wobei der Punkt  $M$  die Erdmitte ist.

Man kann bei Kugeldreiecken nicht so einfach unterscheiden, was Innen oder Aussen ist. Wenn man drei Eckpunkte miteinander verbindet, ergeben sich immer 16 Kugeldreiecke.

Werden drei voneinander verschiedene Punkte, die sich nicht auf derselben Grosskreisebene befinden, mit Grosskreisbögen verbunden werden, so entsteht ein Kugeldreieck  $ABC$ . Für ein Kugeldreieck gilt, dass die Summe der drei Seiten kleiner als  $3\pi$  aber grösser als 0 ist.  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind die Ecken des Dreiecks und dessen Seiten sind die Grosskreisbögen zwischen den Eckpunkten (siehe Abbildung 21.2).

### 21.4.2 Rechtwinkliges Dreieck und rechtseitiges Dreieck

In der sphärischen Trigonometrie gibt es eine Symmetrie zwischen Seiten und Winkeln, also zu jedem Satz über Seiten und Winkel gibt es einen entsprechenden Satz, mit dem man Winkel durch Seiten und Seiten durch Winkel ersetzt hat.

Wie auch im ebenen Dreieck gibt es beim Kugeldreieck auch ein rechtwinkliges Kugeldreieck, bei dem ein Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ist. Ein rechtseitiges Dreieck gibt es jedoch nur beim Kugeldreieck, weil dort

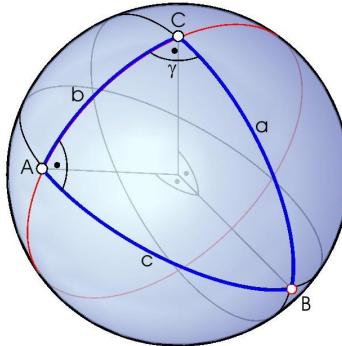


Abbildung 21.3: Rechtseitiges und rechtwinkliges Kugeldreieck

eine Seitenlänge  $\frac{\pi}{2}$  lang sein muss, wie man in der Abbildung 21.3 sehen kann.

### 21.4.3 Winkelsumme und Flächeninhalt

Die Winkel eines Kugeldreiecks sind die, welche die Halbtangenten in den Eckpunkten einschliessen. Für die Summe der Innenwinkel gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{F}{r^2} + \pi \quad \text{und} \quad \alpha + \beta + \gamma > \pi,$$

wobei  $F$  der Flächeninhalt des Kugeldreiecks ist.

#### Sphärischer Exzess

Der sphärische Exzess

$$\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

beschreibt die Abweichung der Innenwinkelsumme von  $\pi$  und ist proportional zum Flächeninhalt des Kugeldreiecks.

#### Flächeninhalt

Mithilfe des Radius  $r$  und dem sphärischen Exzess  $\epsilon$  gilt für den Flächeninhalt

$$F = \frac{\pi \cdot r^2}{\frac{\pi}{2}} \cdot \epsilon = 2 \cdot r^2 \cdot \epsilon.$$

In diesem Kapitel sind keine Begründungen für die erhaltenen Resultate im Abschnitt 21.4.3 zu erwarten und können in der Referenz [nav:winkel] nachgeschlagen werden.

## 21.4.4 Seiten und Winkelberechnung

Es gibt in der sphärischen Trigonometrie eigentlich gar keinen Satz des Pythagoras, wie man ihn aus der zweidimensionalen Geometrie kennt. Es gibt aber einen Satz, der alle drei Seiten eines rechtwinkligen Kugeldreiecks in eine Beziehung bringt. Dieser Satz gilt jedoch nicht für das rechtseitige Kugeldreieck. Die Approximation im nächsten Abschnitt wird erklären, warum man dies als eine Form des Satzes des Pythagoras sehen kann. Es gilt nämlich:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad \text{wenn} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

### Approximation von kleinen Dreiecken

Die Sätze in der ebenen Trigonometrie sind eigentlich Approximationen der sphärischen Trigonometrie. So ist der Sinussatz in der Ebene nur eine Annäherung des sphärischen Sinussatzes. Das Gleiche gilt für den Kosinussatz und dem Satz des Pythagoras. So kann mit dem Taylorpolynom 2. Grades den Sinus und den Kosinus vom Sphärischen in die Ebene approximieren:

$$\sin(a) \approx a$$

und

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Es gibt ebenfalls folgende Approximierung der Seiten von der Sphäre in die Ebene:

$$a \approx \sin(a)$$

und

$$\frac{a^2}{2} \approx 1 - \cos(a).$$

Die Korrespondenzen zwischen der ebenen und sphärischen Trigonometrie werden in den kommenden Abschnitten erläutert.

### Sphärischer Satz des Pythagoras

Die Korrespondenz

$$a^2 \approx 1 - \cos(a)$$

liefert unter anderem einen entsprechenden Satz des Pythagoras, nämlich

$$\begin{aligned} \cos(a) \cdot \cos(b) &= \cos(c), \\ \left[1 - \frac{a^2}{2}\right] \cdot \left[1 - \frac{b^2}{2}\right] &= 1 - \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Höhere Potenzen vernachlässigen:

$$\begin{aligned} \cancel{\left[1 - \frac{a^2}{2}\right]} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \cancel{\frac{a^2 b^2}{4}} &= \cancel{\left[1 - \frac{c^2}{2}\right]} - \frac{c^2}{2} \\ -a^2 - b^2 &= -c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Dies ist der wohlbekannte ebene Satz des Pythagoras.

## Sphärischer Sinussatz

Den sphärischen Sinussatz

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$$

kann man ebenfalls mit der Korrespondenz

$$a \approx \sin(a)$$

zum entsprechenden ebenen Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

approximieren.

## Sphärische Kosinussätze

In der sphärischen Trigonometrie gibt es den Seitenkosinussatz

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

und den Winkelkosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c,$$

der nur in der sphärischen Trigonometrie vorhanden ist.

Analog gibt es auch beim Seitenkosinussatz eine Korrespondenz zu

$$a^2 \leftrightarrow 1 - \cos(a),$$

die den ebenen Kosinussatz herleiten lässt, nämlich

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) \quad (21.1)$$

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left[ 1 - \frac{b^2}{2} \right] \left[ 1 - \frac{c^2}{2} \right] + bc \cdot \cos(\alpha). \quad (21.2)$$

Höhere Potenzen vernachlässigen:

$$\cancel{1 - \frac{a^2}{2}} = \cancel{1 - \frac{b^2}{2}} - \frac{c^2}{2} + \cancel{\frac{b^2 c^2}{4}} + bc \cdot \cos(\alpha) \quad (21.3)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha). \quad (21.4)$$

## 21.5 Das Nautische Dreieck

### 21.5.1 Definition des Nautischen Dreiecks

Die Himmelskugel ist eine gedachte Kugel, welche die Erde und dessen Beobachter umgibt und als Rechenfläche für Koordinaten in der Astronomie und Geodäsie dient. Der Zenit ist jener Punkt, der

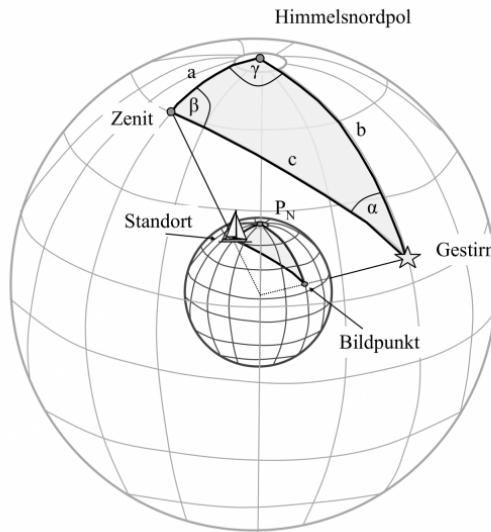


Abbildung 21.4: Nautisches Dreieck

vom Erdmittelpunkt durch denn eigenen Standort an die Himmelskugel verlängert wird. Als Gestirne kommen Sterne und Planeten in Frage, zu welchen in diversen Jahrbüchern die für die Navigation nötigen Daten publiziert sind. Der Himmelsspöl ist der Nordpol an die Himmelskugel projiziert. Das nautische Dreieck hat die Ecken Zenit, Gestirn und Himmelsspöl, wie man in der Abbildung 21.4 sehen kann.

Ursprünglich ist das nautische Dreieck ein Hilfsmittel der sphärischen Astronomie um die momentane Position eines Fixsterns oder Planeten an der Himmelskugel zu bestimmen.

### 21.5.2 Das Bilddreieck

Man kann das nautische Dreieck auf die Erdkugel projizieren. Dieses Dreieck nennt man dann Bild-dreieck. Als Bildpunkt wird in der astronomischen Navigation der Punkt bezeichnet, an dem eine gedachte Linie vom Mittelpunkt eines beobachteten Gestirns zum Mittelpunkt der Erde die Erdoberfläche schneidet. Die Projektion des nautischen Dreiecks auf die Erdkugel hat die Ecken Nordpol, Standort und Bildpunkt.

## 21.6 Standortbestimmung ohne elektronische Hilfsmittel

Um den eigenen Standort herauszufinden, wird in diesem Kapitel die Projektion des nautischen Dreiecks auf die Erdkugel zur Hilfe genommen. Mithilfe eines Sextanten, einem Jahrbuch und der sphärischen Trigonometrie kann man dann die Längen- und Breitengrade des eigenen Standortes bestimmen. Was ein Sextant und ein Jahrbuch ist, wird im Abschnitt 21.6.3 erklärt.

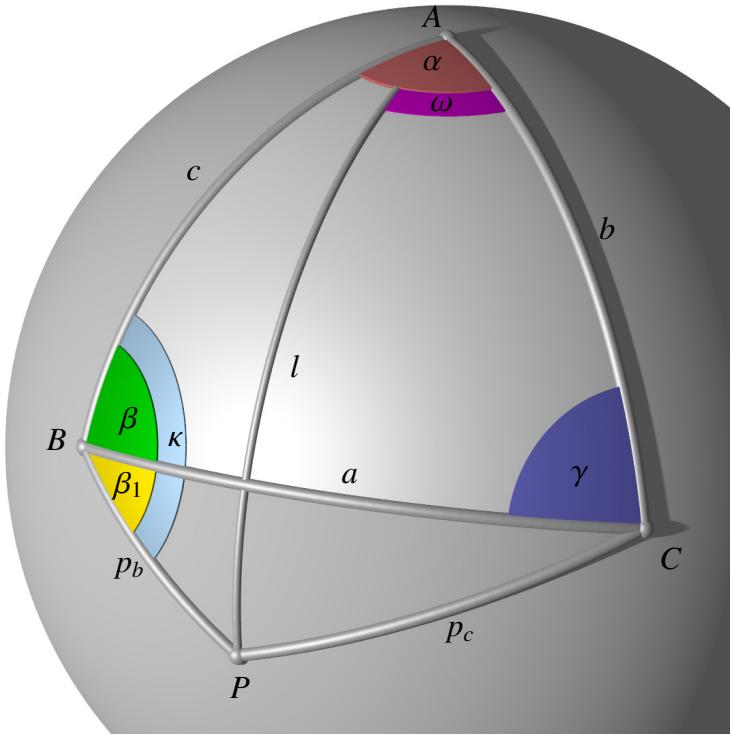


Abbildung 21.5: Dreieck für die Standortbestimmung

### 21.6.1 Ecke $P$ und $A$

Unser eigener Standort ist der gesuchte Ecke  $P$  und die Ecke  $A$  ist in unserem Fall der Nordpol. Der Vorteil an der Idee des nautischen Dreiecks ist, dass eine Ecke immer der Nordpol ist. Somit ist diese Ecke immer bekannt und nur deswegen sind die Zusammenhänge von Rektaszension, Sternzeit und Deklination so einfach.

### 21.6.2 Ecke $B$ und $C$ - Bildpunkt von $X$ und $Y$

Für die Standortermittlung benötigt man als weiteren Punkt ein Gestirn bzw. seinen Bildpunkt auf der Erdkugel. Damit das trigonometrische Rechnen einfacher wird, werden hier zwei Gestirne zur Hilfe genommen. Es gibt diverse Gestirne, die man nutzen kann wie zum Beispiel die Sonne, der Mond oder die vier Navigationsplaneten Venus, Mars, Jupiter und Saturn.

Die Bildpunkte von den beiden Gestirnen  $X$  und  $Y$  bilden die beiden Ecken  $B$  und  $C$  im Dreieck der Abbildung 21.5.

### 21.6.3 Ephemeriden

Zu all diesen Gestirnen gibt es Ephemeridentabellen. Diese Tabellen enthalten die Rektaszensionen und Deklinationen in Abhängigkeit von der Zeit.

2002 MAY 10, 11, 12 (FRI., SAT., SUN.)												2002 MAY 10, 11, 12 (FRI., SAT., SUN.)												
UT	ARIES	VENUS	-3.9	MARS	+1.7	JUPITER	-2.0	SATURN	+0.1	STARS	UT	SUN	MOON	LAT.	Twilight	Naut.	Civi	Sunrise	10	11	12	13		
d	h	gHA	gHA	Dec	gHA	Dec	gHA	Dec	Name	SHA	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m		
10	227 37.2	151 33.2	N23 56.3	151 02.2	N23 44.9	124 50.6	N23 04.9	154 11.5	N21 13.0	Acaranis	315 25.3	540	17.0	N 72	00 25	03 26	03 09	02 45	02 06					
01	257 37.2	181 31.5	N23 56.3	151 01.5	N23 46.9	124 49.9	N23 04.9	154 09.5	04.7	Acrux	190 54.3	31.6	220 31.9	16.1	18 36	12.4	54.4	68	02 10	02 31	03 03	03 06	02 47	
02	257 37.2	181 31.5	N23 56.3	151 01.5	N23 46.9	124 49.9	N23 04.9	154 09.5	04.7	Acrux	173 16.8	56.3	06.9		02 10	02 31	03 03	03 06	02 47					
03	237 44.6	190 36.7	-	154 01.5	N23 46.9	124 49.9	N23 04.9	154 09.5	04.7	Adhara	255 19.7	52.6	56.7		02 10	02 31	03 03	03 06	02 47					
04	305 49.6	215 20.9	-	154 01.5	N23 46.9	124 49.9	N23 04.9	154 09.5	04.7	Aldebaran	240 56.8	N16	30.8		02 10	02 31	03 03	03 06	02 47					
05	305 49.6	215 20.9	-	154 01.5	N23 46.9	124 49.9	N23 04.9	154 09.5	04.7	Aldebaran	229 22.2	13.2			02 09	02 29	03 01	03 04	02 46	03 03	03 56			
06	317 52.0	241 23.3	N24 0.6	241 06.1	N23 45.9	214 17.5	N23 04.5	244 24.3	N21 13.3	Alcyone	164 6.7	27.8	N55	57.1										
07	237 56.8	271 2.6	-	286 06.1	-	244 21.4	04.5	274 26.6	13.3	Al Na'ir	27 54.7	346	56.9											
F	09	2 56.4	286 25.6	-	01.8	286 06.1	-	259 23.4	-	Alnath	275 55.6	5	1.1											
D	10	49 06.8	331 21.4	N24 0.9	331 01.0	N23 46.9	204 26.4	N23 04.3	314 27.2	N21 13.3	Alphecca	126 18.0	N26	42.4										
A	11	33 04.3	331 21.4	N24 0.9	331 01.0	N23 46.9	204 26.4	N23 04.3	314 27.2	N21 13.3	Alphecca	344 2.6	30.3	1.3										
Y	12	49 06.8	331 21.4	N24 0.9	331 01.0	N23 46.9	204 26.4	N23 04.3	314 27.2	N21 13.3	Alphecca	125 54.3	32.9	249 42.0	16.0	5 02	12.5	54.4	64	01 36	03 01	03 40	03 37	03 37
T	13	33 04.3	331 21.4	N24 0.9	331 01.0	N23 46.9	204 26.4	N23 04.3	314 27.2	N21 13.3	Alphecca	125 54.3	32.9	249 42.0	16.0	5 02	12.5	54.4	64	01 36	03 01	03 40	03 37	03 37
B	14	78 10.8	1 21.7	0.3	0.7	1 11.3	47.3	334 33.4	13.3	Altair	62 16.6	N 52.3												
V	15	93 14.2	16.2	-	0.4	16.0	12.0	47.3	349 35.4	0.3	Ankaa	353 24.6	S 42	17.6										
S	16	109 25.9	16.2	-	0.4	16.0	12.0	47.3	349 35.4	0.3	Ankaa	112 36.7	S 52.6											
O	17	123 19.3	16.2	-	0.4	16.0	12.0	47.3	349 35.4	0.3	Ankaa	112 36.7	S 52.6											
E	18	131 21.5	61 19.5	N24 0.6	61 1 51.9	N23 47.9	34 41.3	N23 04.1	64 50.2	N21 13.7	Arturina	146 0.4	N16	10.3										
Z	19	149 26.5	61 19.5	N24 0.6	61 1 51.9	N23 47.9	34 41.3	N23 04.1	64 50.2	N21 13.7	Arturina	209 25.9	56.3	1.3										
R	20	149 26.5	61 19.5	N24 0.6	61 1 51.9	N23 47.9	34 41.3	N23 04.1	64 50.2	N21 13.7	Arturina	234 21.8	S 59.4	31.3										
M	21	183 26.9	10.6	-	0.6	10.6	15.9	47.3	284 47.3	0.3	Atrops	278 41.7	N 6	21.0										
G	22	183 26.9	10.6	-	0.6	10.6	15.9	47.3	284 47.3	0.3	Atrops	278 41.7	N 6	21.0										
P	23	213 33.9	13.6	-	0.6	13.6	17.1	46.7	309 11.9	0.3	Betelgeuse	271 13.1	S 20.4	24.4										
S	24	222 36.3	151 15.5	N24 0.7	151 17.8	N23 48.9	215 25.2	N23 03.6	245 15.7	N21 14.7	Betula	164 0.1	N16	44.6										
A	25	222 36.3	151 15.5	N24 0.7	151 17.8	N23 48.9	215 25.2	N23 03.6	245 15.7	N21 14.7	Betula	270 24.5	52.6	1.3										
Y	26	237 45.7	190 11.8	-	0.6	190 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	185 0.1	57.3	14.3											
T	27	237 45.7	190 11.8	-	0.6	190 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	185 0.1	57.3	14.3											
B	28	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
Z	29	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
R	30	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
M	31	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
G	32	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
P	33	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
S	34	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
O	35	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
E	36	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
Z	37	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
R	38	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
M	39	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
G	40	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
P	41	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
S	42	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
O	43	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
E	44	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
Z	45	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
R	46	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
M	47	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
G	48	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
P	49	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
S	50	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
O	51	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
E	52	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
Z	53	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
R	54	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
M	55	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
G	56	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
P	57	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
S	58	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
O	59	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
E	60	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
Z	61	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9											
R	62	259 40.4	181 11.8	-	0.6	181 11.8	-	254 57.3	14.3	Betula	49 37.4	N45	16.9					</						



Abbildung 21.7: Sextant

Wenn man die Sternzeit von Greenwich ausgerechnet hat, kann man den Längengrad des Gestirns  $\lambda = \theta - \alpha$  bestimmen, wobei  $\alpha$  die Rektaszension und  $\theta$  die Sternzeit von Greenwich ist. Dies gilt analog auch für das zweite Gestirn.

### Sextant

Ein Sextant ist ein nautisches Messinstrument, mit dem man den Winkel zwischen der Blickrichtung zu weit entfernten Objekten bestimmen kann. Es wird vor allem der Winkelabstand vom Horizont zum Gestirn gemessen. Man benutzt ihn vor allem für die astronomische Navigation auf See.

#### 21.6.4 Bestimmung des eigenen Standortes $P$

Wir nehmen die Abbildung 21.8 zur Hilfe. Nun hat man die Koordinaten der beiden Gestirne und man weiss die Koordinaten des Nordpols. Damit wir unseren Standort bestimmen können, bilden wir zuerst das Dreieck  $ABC$ , dann das Dreieck  $BPC$  und zum Schluss noch das Dreieck  $ABP$ . Auf diese Dreiecke können wir die einfachen Sätze der sphärischen Trigonometrie anwenden und benötigen lediglich ein Ephemeride zu den Gestirnen und einen Sextant.

#### Dreieck $ABC$

Ecke	Name
$A$	Nordpol
$B$	Bildpunkt des Gestirns $X$
$C$	Bildpunkt des Gestirns $Y$

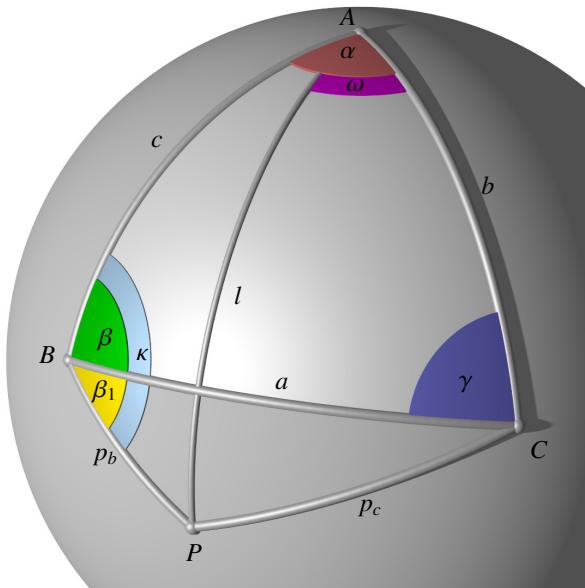


Abbildung 21.8: Dreieck für die Standortbestimmung

Mit unserem erlangten Wissen können wir nun alle Seiten des Dreiecks  $ABC$  berechnen. Dazu sind die folgenden vorbereiteten Berechnungen nötigt:

1. Die Seite vom Nordpol zum Bildpunkt  $X$  sei  $c$ , dann ist  $c = \frac{\pi}{2} - \delta_1$ .
2. Die Seite vom Nordpol zum Bildpunkt  $Y$  sei  $b$ , dann ist  $b = \frac{\pi}{2} - \delta_2$ .
3. Der Innenwinkel bei der Ecke, wo der Nordpol ist sei  $\alpha$ , dann ist  $\alpha = |\lambda_1 - \lambda_2|$ .

mit

Ecke	Name
$\delta_1$	Deklination vom Bildpunkt $X$
$\delta_2$	Deklination vom Bildpunkt $Y$
$\lambda_1$	Längengrad vom Bildpunkt $X$
$\lambda_2$	Längengrad vom Bildpunkt $Y$

Nun haben wir die beiden Seiten  $c$  und  $b$  und den Winkel  $\alpha$ , der sich zwischen diesen Seiten befindet. Mithilfe des Seiten-Kosinussatzes  $\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha)$  können wir nun die dritte Seitenlänge bestimmen. Es ist darauf zu achten, dass hier natürlich die Seitenlängen in Bogenmaß sind und dementsprechend der Kosinus und Sinus verwendet wird.

Jetzt fehlen noch die beiden anderen Innenwinkel  $\beta$  und  $\gamma$ . Diese bestimmen wir mithilfe des Kosinussatzes:

$$\beta = \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(b) - \cos(a) \cdot \cos(c)}{\sin(a) \cdot \sin(c)} \right]$$

und

$$\gamma = \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a)}{\sin(a) \cdot \sin(b)} \right]$$

Schlussendlich haben wir die Seiten  $a, b$  und  $c$ , die Ecken  $A, B$  und  $C$  und die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  bestimmt und somit das ganze Kugeldreieck  $ABC$  berechnet.

### Dreieck $BPC$

Wir bilden nun ein zweites Dreieck, welches die Ecken  $B$  und  $C$  des ersten Dreiecks besitzt. Die dritte Ecke ist der eigene Standort  $P$ . Unser Standort definiere sich aus einer geographischen Breite  $\delta$  und einer geographischen Länge  $\lambda$ .

Die Seite von  $P$  zu  $B$  sei  $pb$  und die Seite von  $P$  zu  $C$  sei  $pc$ . Die beiden Seitenlängen kann man mit dem Sextant messen und durch eine einfache Formel bestimmen, nämlich  $pb = \frac{\pi}{2} - h_B$  und  $pc = \frac{\pi}{2} - h_C$  mit  $h_B$  = Höhe von Gestirn in  $B$  und  $h_C$  = Höhe von Gestirn in  $C$  mit Sextant gemessen.

Zum Schluss müssen wir noch den Winkel  $\beta_1$  mithilfe des Seiten-Kosinussatzes

$$\cos(pb) = \cos(pc) \cdot \cos(a) + \sin(pc) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta_1)$$

mit den bekannten Seiten  $pc, pb$  und  $a$  bestimmen.

### Dreieck $ABP$

Nun muss man eine Verbindungsgerade des Standorts zwischen  $P$  und  $A$  ziehen. Die Länge  $l$  dieser Linie entspricht der gesuchten geographischen Breite  $\delta$ . Diese lässt sich mithilfe des Dreiecks  $ABP$ , den bekannten Seiten  $c$  und  $pb$  und des Seiten-Kosinussatzes berechnen. Für den Seiten-Kosinussatz benötigt es noch  $\kappa = \beta + \beta_1$ . Somit ist

$$\cos(l) = \cos(c) \cdot \cos(pb) + \sin(c) \cdot \sin(pb) \cdot \cos(\kappa)$$

und

$$\delta = \cos^{-1}[\cos(c) \cdot \cos(pb) + \sin(c) \cdot \sin(pb) \cdot \cos(\kappa)].$$

Für die geographische Länge  $\lambda$  des eigenen Standortes nutzt man den Winkel  $\omega$ , welcher sich im Dreieck  $ACP$  in der Ecke bei  $A$  befindet. Mithilfe des Kosinussatzes können wir

$$\omega = \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(pb) - \cos(c) \cdot \cos(l)}{\sin(c) \cdot \sin(l)} \right]$$

berechnen und bekommen schlussendlich die geographische Länge

$$\lambda = \lambda_1 - \omega,$$

wobei  $\lambda_1$  die Länge des Bildpunktes  $X$  von  $C$  ist.

## 21.7 Beispielrechnung

### 21.7.1 Einführung

In diesem Abschnitt wird die Theorie vom Abschnitt 21.6 in einem Praxisbeispiel angewendet. Wir haben die Deklination, Rektaszension, Höhe der beiden Planeten Deneb und Arktur und die Sternzeit von Greenwich als Ausgangslage. Die Deklinationen und Rektaszensionen sind von einem vergangenen Datum und die Höhe der Gestirne und die Sternzeit wurden digital in einer Stadt in Japan mit den Koordinaten 35.716672 N, 140.233336 E bestimmt. Wir werden nachrechnen, dass wir mit unserer Methode genau auf diese Koordinaten kommen.

## 21.7.2 Vorgehen

Unser Vorgehen erschliesst sich aus unserer Methode, die wir im Abschnitt 21.6.4 theoretisch erklärt haben.

1. Koordinaten der Bildpunkte der Gestirne bestimmen
2. Dreiecke aufzeichnen und richtig beschriften
3. Dreieck ABC bestimmen
4. Dreieck BPC bestimmen
5. Dreieck ABP bestimmen
6. Geographische Breite bestimmen
7. Geographische Länge bestimmen

## 21.7.3 Ausgangslage

Die Rektaszension und die Sternzeit sind in der Regel in Stunden angegeben. Für die Umrechnung in Grad kann folgender Zusammenhang verwendet werden:

$$\text{Stunden} \cdot 15 = \text{Grad}.$$

Dies wurde hier bereits gemacht.

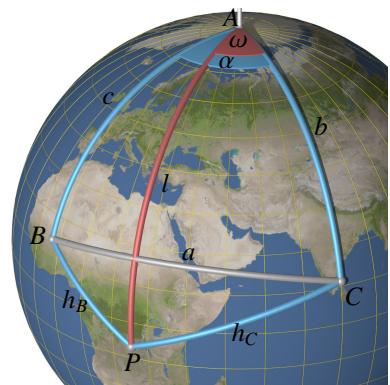
$$\text{Sternzeit } s = 118.610804^\circ$$

Deneb

Rektaszension $RA_{\text{Deneb}}$	$310.55058^\circ$
Deklination $DEC_{\text{Deneb}}$	$45.361194^\circ$
Höhe $h_c$	$50.256027^\circ$

Arktur

Rektaszension $RA_{\text{Arktur}}$	$214.17558^\circ$
Deklination $DEC_{\text{Arktur}}$	$19.063222^\circ$
Höhe $h_b$	$47.427444^\circ$



## 21.7.4 Koordinaten der Bildpunkte

Als erstes benötigen wir die Koordinaten der Bildpunkte von Arktur und Deneb.  $\delta$  ist die Breite,  $\lambda$  die Länge.

$$\delta_{\text{Deneb}} = DEC_{\text{Deneb}} = \underline{\underline{45.361194^\circ}}$$

$$\lambda_{\text{Deneb}} = RA_{\text{Deneb}} - s = 310.55058^\circ - 118.610804^\circ = \underline{\underline{191.939776^\circ}}$$

$$\delta_{\text{Arktur}} = DEC_{\text{Arktur}} = \underline{\underline{19.063222^\circ}}$$

$$\lambda_{\text{Arktur}} = RA_{\text{Arktur}} - s = 214.17558^\circ - 118.610804^\circ = \underline{\underline{5.5647759^\circ}}$$

## 21.7.5 Dreiecke definieren

Das Festlegen der Dreiecke ist essenziell für die korrekten Berechnungen. Ein Problem, welches in der Theorie nicht berücksichtigt wurde ist, dass der Punkt  $P$  nicht zwingend unterhalb der Seite  $a$  sein muss. Wenn man das nicht berücksichtigt, erhält man falsche oder keine Ergebnisse. In der Realität weiss man jedoch ungefähr auf welchem Breitengrad man ist, so kann man relativ einfach

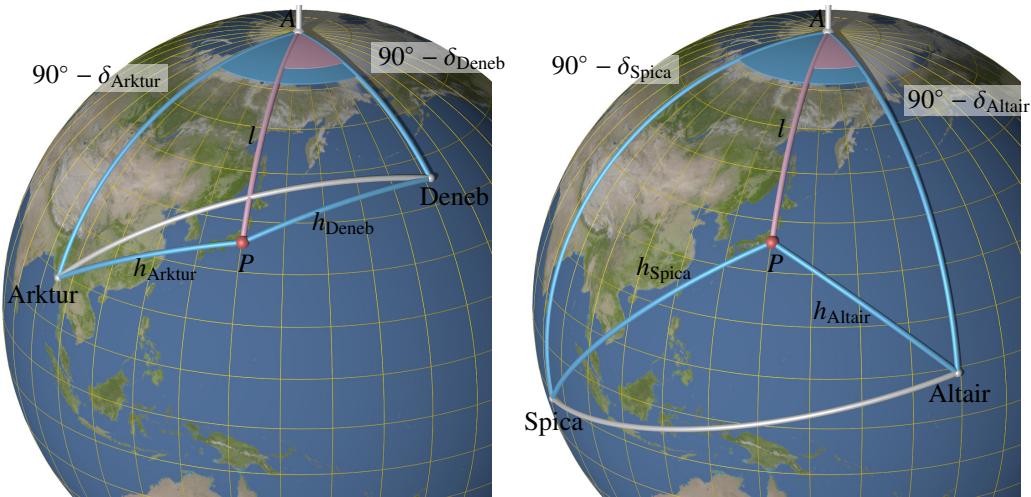


Abbildung 21.9: Arktur-Deneb; Spica-Altair

entscheiden, ob der eigene Standort über  $a$  ist oder nicht. Beim unserem genutzten Paar Arktur-Deneb ist dies kein Problem, da der Punkt unterhalb der Seite  $a$  liegt. Würde man aber das Paar Altair-Spica nehmen, liegt  $P$  über  $a$  (vgl. Abbildung 21.9) und man müsste trigonometrisch anders vorgehen.

### 21.7.6 Dreieck ABC

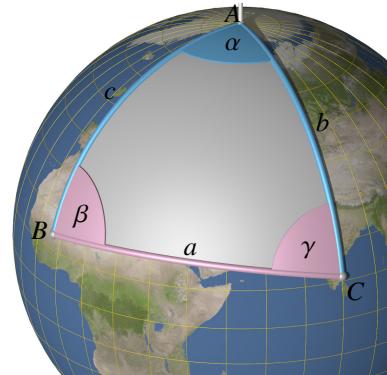
Nun berechnen wir alle Seitenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und die Innenswinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Wir können  $b$  und  $c$  mit den geltenen Zusammenhängen des nautischen Dreiecks wie folgt bestimmen:

$$b = 90^\circ - DEC_{\text{Deneb}} = 90^\circ - 45.361194^\circ$$

$$= \underline{\underline{44.638806^\circ}}$$

$$c = 90^\circ - DEC_{\text{Arktur}} = 90^\circ - 19.063222^\circ$$

$$= \underline{\underline{70.936778^\circ}}$$



Um  $a$  zu bestimmen, benötigen wir zuerst den Winkel

$$\alpha = RA_{\text{Deneb}} - RA_{\text{Arktur}} = 310.55058^\circ - 214.17558^\circ$$

$$= \underline{\underline{96.375^\circ}}.$$

Danach nutzen wir den sphärischen Winkelkosinussatz, um  $a$  zu berechnen:

$$a = \cos^{-1}(\cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha))$$

$$= \cos^{-1}(\cos(44.638806^\circ) \cdot \cos(70.936778^\circ) + \sin(44.638806^\circ) \cdot \sin(70.936778^\circ) \cdot \cos(96.375^\circ))$$

$$= \underline{\underline{80.8707801^\circ}}$$

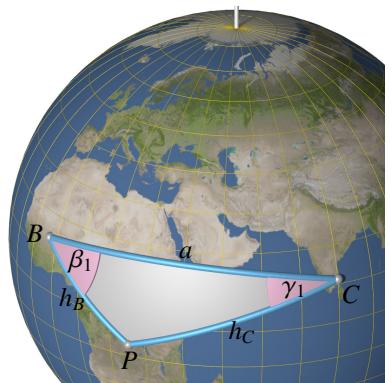
Für  $\beta$  und  $\gamma$  nutzen wir den sphärischen Seitenkosinussatz:

$$\begin{aligned}\beta &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(b) - \cos(a) \cdot \cos(c)}{\sin(a) \cdot \sin(c)} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(44.638806^\circ) - \cos(80.8707801^\circ) \cdot \cos(70.936778^\circ)}{\sin(80.8707801^\circ) \cdot \sin(70.936778^\circ)} \right] \\ &= \underline{\underline{45.0115314^\circ}} \\ \gamma &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a)}{\sin(a) \cdot \sin(b)} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(70.936778^\circ) - \cos(44.638806^\circ) \cdot \cos(80.8707801^\circ)}{\sin(80.8707801^\circ) \cdot \sin(44.638806^\circ)} \right] \\ &= \underline{\underline{72.0573328^\circ}}\end{aligned}$$

### 21.7.7 Dreieck $BPC$

Als nächstes berechnen wir die Seiten  $h_B$ ,  $h_B$  und die Innenwinkel  $\beta_1$  und  $\gamma_1$ .

$$\begin{aligned}h_B &= 90^\circ - pbb = 90^\circ - 47.42744^\circ \\ &= \underline{\underline{42.572556^\circ}} \\ h_C &= 90^\circ - pc = 90^\circ - 50.256027^\circ \\ &= \underline{\underline{39.743973^\circ}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta_1 &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(h_c) - \cos(a) \cdot \cos(h_B)}{\sin(a) \cdot \sin(h_B)} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(39.743973^\circ) - \cos(80.8707801^\circ) \cdot \cos(42.572556^\circ)}{\sin(80.8707801^\circ) \cdot \sin(42.572556^\circ)} \right] \\ &= \underline{\underline{12.5211127^\circ}} \\ \gamma_1 &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(h_b) - \cos(a) \cdot \cos(h_C)}{\sin(a) \cdot \sin(h_C)} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(42.572556^\circ) - \cos(80.8707801^\circ) \cdot \cos(39.743973^\circ)}{\sin(80.8707801^\circ) \cdot \sin(39.743973^\circ)} \right] \\ &= \underline{\underline{13.2618475^\circ}}\end{aligned}$$

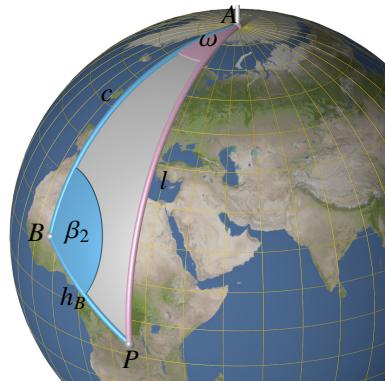
### 21.7.8 Dreieck ABP

Als erstes müssen wir den Winkel  $\beta_2$  berechnen:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \beta + \beta_1 = 45.011513^\circ + 12.5211127^\circ \\ &= \underline{\underline{44.6687451^\circ}}\end{aligned}$$

Danach können wir mithilfe von  $\beta_2$ ,  $c$  und  $h_B$  die Seite  $l$  berechnen:

$$\begin{aligned}l &= \cos^{-1}(\cos(c) \cdot \cos(h_B) + \sin(c) \cdot \sin(h_B) \cdot \cos(\beta_2)) \\ &= \cos^{-1}(\cos(70.936778^\circ) \cdot \cos(42.572556^\circ) \\ &\quad + \sin(70.936778^\circ) \cdot \sin(42.572556^\circ) \cdot \cos(57.5326442^\circ)) \\ &= \underline{\underline{54.2833404^\circ}}\end{aligned}$$



Damit wir gleich den Längengrad berechnen können, benötigen wir noch den Winkel  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\omega &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(h_B) - \cos(c) \cdot \cos(l)}{\sin(c) \cdot \sin(l)} \right] \\ &= \cos^{-1} \left[ \frac{\cos(42.572556^\circ) - \cos(70.936778^\circ) \cdot \cos(54.2833404^\circ)}{\sin(70.936778^\circ) \cdot \sin(54.2833404^\circ)} \right] \\ &= \underline{\underline{44.6687451^\circ}}\end{aligned}$$

### 21.7.9 Längengrad und Breitengrad bestimmen

$$\begin{aligned}\delta &= 90^\circ - l \\ &= 90^\circ - 54.2833404 \\ &= \underline{\underline{35.7166596^\circ}}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\lambda &= \lambda_{\text{Arktur}} + \omega \\ &= 95.5647759^\circ + 44.6687451^\circ \\ &= \underline{\underline{140.233521^\circ}}\end{aligned}$$

Wie wir sehen, stimmen die berechneten Koordinaten mit den Koordinaten des Punktes, an welchem gemessen wurde überein.

### 21.7.10 Fazit

Die theoretische Anleitung im Abschnitt 21.6 scheint grundsätzlich zu funktionieren. Allerdings gab es zwei interessante Probleme.

Einerseits das Problem, ob der Punkt  $P$  sich oberhalb oder unterhalb von  $a$  befindet. Da wir eigentlich wussten, wo der gesuchte Punkt  $P$  ist, konnten wir das Dreieck anhand der Koordinaten der Bildpunkte richtig aufstellen. In der Praxis muss man aber schon wissen, auf welchem Breitengrad man ungefähr ist. Dies weis man in der Regeln aber, da die eigene Breite die Höhe des Polarsterns ist. Diese Höhe wird mit dem Sextant gemessen.

Andererseits ist da noch ein Problem mit dem Sinussatz. Beim Sinussatz gibt es immer zwei Lösungen, weil

$$\sin(\pi - a) = \sin(a).$$

Da kann es sein (und war in unserem Fall auch so), dass man das falsche Ergebnis erwischt. Wegen dieser Erkenntnis haben wir nur Kosinussätze verwendet und dies ebenfalls im Abschnitt 21.6 abgeändert, da es für den Leser auch relevant sein kann, wenn er es Probieren möchte.

# Kapitel 22

## Transferfunktionen

Marc Benz

### 22.1 Teil 0

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua [transfer:bibtex]. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

### 22.2 Teil 1

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (22.1)$$

Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem.

Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 22.2.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga (??).

Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio ???. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus ???. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## 22.3 Teil 2

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 22.3.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## 22.4 Teil 3

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima

veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### **22.4.1 De finibus bonorum et malorum**

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.



# Kapitel 23

## Kalman, Riccati und Abel

Samuel Niederer

Ein paar Hinweise für die korrekte Formatierung des Textes

- Absätze werden gebildet, indem man eine Leerzeile einfügt. Die Verwendung von \\ ist nur in Tabellen und Arrays gestattet.
- Die explizite Platzierung von Bildern ist nicht erlaubt, entsprechende Optionen werden gelöscht. Verwenden Sie Labels und Verweise, um auf Bilder hinzuweisen.
- Beginnen Sie jeden Satz auf einer neuen Zeile. Damit ermöglichen Sie dem Versionsverwaltungssysteme, Änderungen in verschiedenen Sätzen von verschiedenen Autoren ohne Konflikt anzuwenden.
- Bilden Sie auch für Formeln kurze Zeilen, einerseits der besseren Übersicht wegen, aber auch um GIT die Arbeit zu erleichtern.

### 23.1 Teil 0

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua [kra:bibtex]. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

### 23.2 Teil 1

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta

sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (23.1)$$

Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem.

Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 23.2.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga (??).

Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio ???. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus ???. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## 23.3 Teil 2

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 23.3.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus

aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.

## 23.4 Teil 3

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incidunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 23.4.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.



## Kapitel 24

# Recurrence Relations for Spherical Harmonics in Quantum Mechanics

Manuel Cattaneo, Naoki Pross

Ideas and current research goals

---

- Recurrence relations for spherical harmonics
- Associated Legendre polynomials
- Rodrigues' type formula aka Rodrigues' formula
- Applications:
  - \* Quantization of angular momentum
  - \* Gravitational field measurements (NASA ebb and flow, ESA goce)
  - \* Literally anything that needs basis functions on the surface of a sphere

Literature

---

- Nichtkommutative Bildverarbeitung, T. Mendez, p57+
- Linear Algebra Done Right, S. Axler, p212,221,231,237
- Introduction to Quantum Mechanics, D. J. Griffith, p201+
- Seminar Quantenmechanik, A. Müller, p101,106,114,121
- Introduction to Partial Differential Equations, J. Oliver, p510+
- Partial Differential Equations in Engineering Problems, K. Miller, p175,190



# Kapitel 25

## Thema

Hans Muster

Ein paar Hinweise für die korrekte Formatierung des Textes

- Absätze werden gebildet, indem man eine Leerzeile einfügt. Die Verwendung von \\ ist nur in Tabellen und Arrays gestattet.
- Die explizite Platzierung von Bildern ist nicht erlaubt, entsprechende Optionen werden gelöscht. Verwenden Sie Labels und Verweise, um auf Bilder hinzuweisen.
- Beginnen Sie jeden Satz auf einer neuen Zeile. Damit ermöglichen Sie dem Versionsverwaltungssysteme, Änderungen in verschiedenen Sätzen von verschiedenen Autoren ohne Konflikt anzuwenden.
- Bilden Sie auch für Formeln kurze Zeilen, einerseits der besseren Übersicht wegen, aber auch um GIT die Arbeit zu erleichtern.

### 25.1 Teil 0

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua [**hermite:bibtex**]. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

### 25.2 Teil 1

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta

sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (25.1)$$

Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem.

Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### **25.2.1 De finibus bonorum et malorum**

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga (??).

Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio ???. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus ???. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut preferendis doloribus asperiores repellat.

## **25.3 Teil 2**

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incident ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### **25.3.1 De finibus bonorum et malorum**

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similius sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitibus

aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.

## 25.4 Teil 3

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incidunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

### 25.4.1 De finibus bonorum et malorum

At vero eos et accusamus et iusto odio dignissimos ducimus qui blanditiis praesentium voluptatum deleniti atque corrupti quos dolores et quas molestias excepturi sint occaecati cupiditate non provident, similique sunt in culpa qui officia deserunt mollitia animi, id est laborum et dolorum fuga. Et harum quidem rerum facilis est et expedita distinctio. Nam libero tempore, cum soluta nobis est eligendi optio cumque nihil impedit quo minus id quod maxime placeat facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut reiciendis voluptatibus maiores alias consequatur aut perferendis doloribus asperiores repellat.



# Kapitel 26

## Elliptische Filter

Nicolas Tobler

### 26.1 Einleitung

Der womöglich wichtigste Filtertyp ist das Tiefpassfilter. Dieses soll im Durchlassbereich unter der Grenzfrequenz  $\Omega_p$  verstärkt durchlassen und alle anderen Frequenzen vollständig auslöschen.

In der Elektrotechnik führen Schaltungen mit linearen Bauelementen wie Kondensatoren, Spulen und Widerständen immer zu linearen zeitinvarianten Systemen (LTI-System von englisch *time-invariant system*). Die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich  $|H(\Omega)|$  eines solchen Systems ist dabei immer eine rationale Funktion, also eine Division von zwei Polynomen. Die Polynome habe dabei immer reelle oder komplexe-konjugierte Nullstellen.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(w)}, \quad w = \frac{\Omega}{\Omega_p} \quad (26.1)$$

$\Omega = 2\pi f$  ist die analoge Frequenz

Damit das Filter implementierbar und stabil ist, muss  $H(\Omega)^2$  eine rationale Funktion sein, deren Nullstellen und Pole auf der linken Halbebene liegen.

$N \in \mathbb{N}$  gibt dabei die Ordnung des Filters vor, also die maximale Anzahl Pole oder Nullstellen.

Damit ein Filter die Passband Kondition erfüllt muss  $|F_N(w)| \leq 1 \forall |w| \leq 1$  und für  $|w| \geq 1$  sollte die Funktion möglichst schnell divergieren. Eine einfaches Polynom, dass das erfüllt, erhalten wir wenn  $F_N(w) = w^N$ . Tatsächlich erhalten wir damit das Butterworth Filter, wie in Abbildung 26.1 ersichtlich.

wenn  $F_N(w)$  eine rationale Funktion ist, ist auch  $H(\Omega)$  eine rationale Funktion und daher ein lineares Filter.

$$F_N(w) = \begin{cases} w^N & \text{Butterworth} \\ T_N(w) & \text{Tschebyscheff, Typ 1} \\ [k_1 T_N(k^{-1} w^{-1})]^{-1} & \text{Tschebyscheff, Typ 2} \\ R_N(w, \xi) & \text{Elliptisch (Cauer)} \end{cases} \quad (26.2)$$

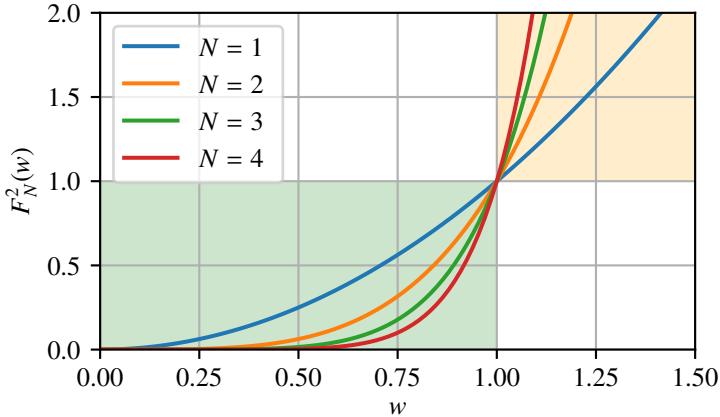


Abbildung 26.1:  $F_N$  für Butterworth filter. Der grüne Bereich definiert die erlaubten Werte für alle  $F_N$ -Funktionen.

Mit der Ausnahme vom Butterworth filter sind alle Filter nach speziellen Funktionen benannt. Alle diese Filter sind optimal für unterschiedliche Anwendungsgebiete. Das Butterworth-Filter, zum Beispiel, ist maximal flach im Durchlassbereich. Das Tschebyscheff-1 Filter sind maximal steil für eine definierte Welligkeit im Durchlassbereich, während es im Sperrbereich monoton abfallend ist. Es scheint so als sind gewisse Eigenschaften dieser speziellen Funktionen verantwortlich für die Optimalität dieser Filter.

## 26.2 Tschebyscheff-Filter

Als Einstieg betrachten wir das Tschebyscheff-Filter, welches sehr verwandt ist mit dem elliptischen Filter. Genauer ausgedrückt sind die Tschebyscheff-1 und -2 Filter Spezialfälle davon.

Der Name des Filters deutet schon an, dass die Tschebyscheff-Polynome  $T_N$  für das Filter relevant sind:

$$T_0(x) = 1 \quad (26.3)$$

$$T_1(x) = x \quad (26.4)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (26.5)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (26.6)$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (26.7)$$

Bemerkenswert ist, dass die Polynome im Intervall  $[-1, 1]$  mit der trigonometrischen Funktion

$$T_N(w) = \cos(N \cos^{-1}(w)) \quad (26.8)$$

$$= \cos(N z), \quad w = \cos(z) \quad (26.9)$$

übereinstimmt. Der Zusammenhang lässt sich mit den Doppel- und Mehrfachwinkelfunktionen der trigonometrischen Funktionen erklären. Abbildung 26.2 zeigt einige Tschebyscheff-Polynome. Da

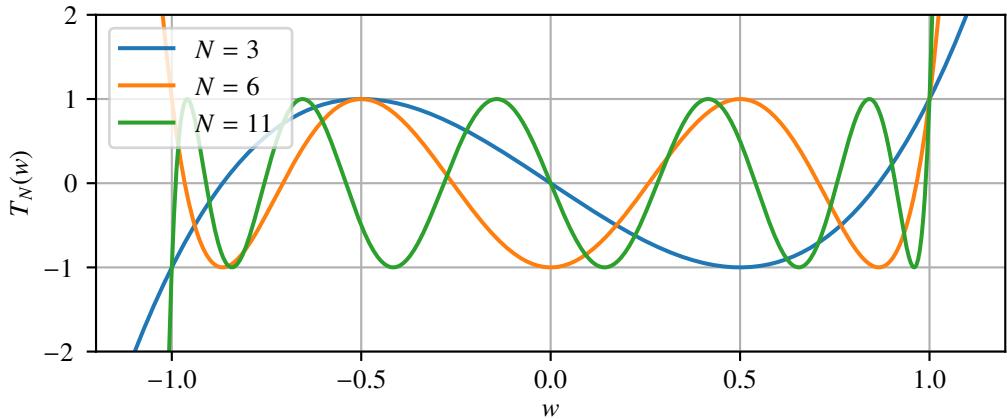


Abbildung 26.2: Die Tschebyscheff-Polynome  $C_N$ .

der Kosinus begrenzt zwischen  $-1$  und  $1$  ist, sind auch die Tschebyscheff-Polynome begrenzt. Geht man aber über das Intervall  $[-1, 1]$  hinaus, divergieren die Funktionen mit zunehmender Ordnung immer steiler gegen  $\pm\infty$ . Diese Eigenschaft ist sehr nützlich für ein Filter. Wenn wir die Tschebyscheff-Polynome quadrieren, passen sie perfekt in die Voraussetzungen für Filterfunktionen, wie es Abbildung 26.3 demonstriert.

Die analytische Fortsetzung von (26.8) über das Intervall  $[-1, 1]$  hinaus stimmt mit den Polynomen überein, wie es zu erwarten ist. Die genauere Betrachtung wird uns dann helfen die elliptischen Filter besser zu verstehen.

Starten wir mit der Funktion, die als erstes auf  $w$  angewendet wird, dem Arcuscosinus. Die invertierte Funktion des Kosinus kann als definites Integral dargestellt werden:

$$\cos^{-1}(x) = \int_x^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (26.10)$$

$$= \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} dz + \frac{\pi}{2} \quad (26.11)$$

Der Integrand oder auch die Ableitung

$$\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (26.12)$$

bestimmt dabei die Richtung, in der die Funktion verläuft. Der reelle Arcuscosinus ist bekanntlich nur für  $|z| \leq 1$  definiert. Hier bleibt der Wert unter der Wurzel positiv und das Integral liefert reelle Werte. Doch wenn  $|z|$  über  $1$  hinausgeht, wird der Term unter der Wurzel negativ. Durch die Quadratwurzel entstehen für den Integranden zwei rein komplexe Lösungen. Der Wert des Arcuscosinus verlässt also bei  $z = \pm 1$  den reellen Zahlenstrahl und knickt in die komplexe Ebene ab. Abbildung 26.4 zeigt den arccos in der komplexen Ebene. Wegen der Periodizität des Kosinus ist auch der Arcuscosinus  $2\pi$ -periodisch und es entstehen periodische Nullstellen.

Die Tschebyscheff-Polynome skalieren diese Nullstellen mit dem Ordnungsfaktor  $N$ , wie dar gestellt in Abbildung 26.5. Somit passiert  $\cos(N \cos^{-1}(w))$  im Intervall  $[-1, 1]$   $N$  Nullstellen. Durch

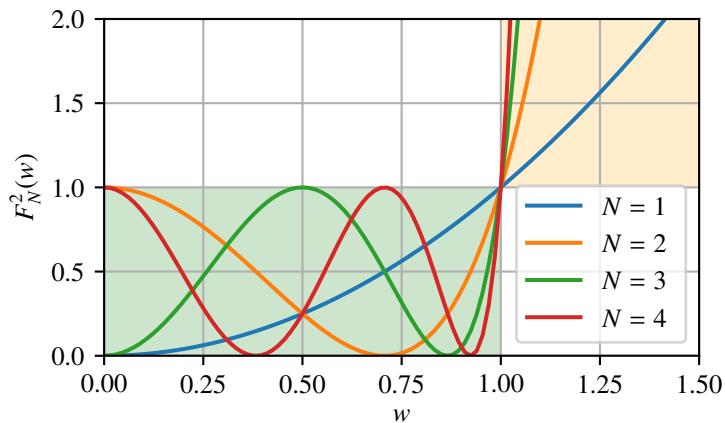


Abbildung 26.3: Die Tschebyscheff-Polynome füllen den erlaubten Bereich besser, und erhalten dadurch eine steilere Flanke im Sperrbereich.

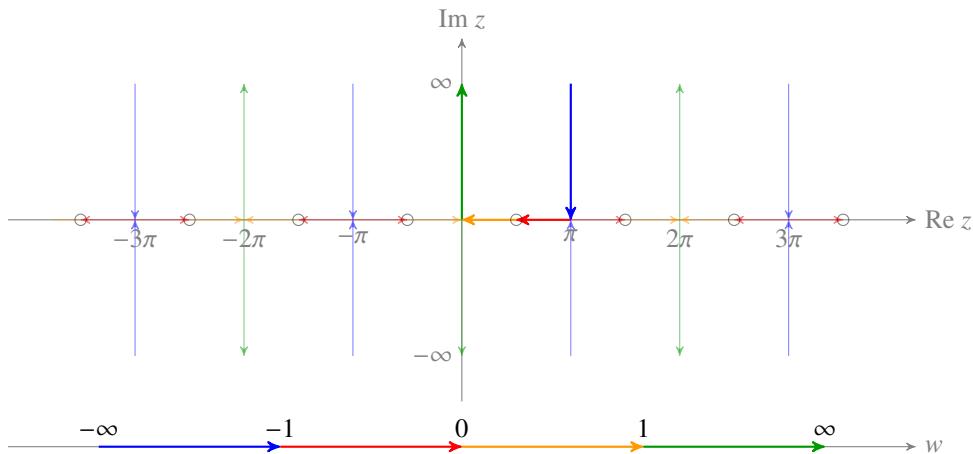


Abbildung 26.4: Die Funktion  $z = \cos^{-1}(w)$  dargestellt in der komplexen Ebene.

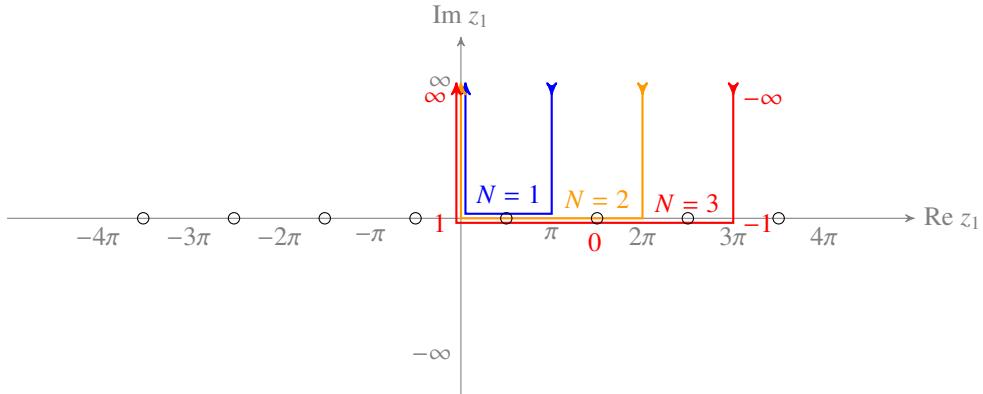


Abbildung 26.5:  $z_1 = N \cos^{-1}(w)$ -Ebene der Tschebyscheff-Funktion. Die eingefärbten Pfade sind Verläufe von  $w \in [-\infty, \infty]$  für verschiedene Ordnungen  $N$ . Je grösser die Ordnung  $N$  gewählt wird, desto mehr Nullstellen werden passiert.

die spezielle Anordnung der Nullstellen hat die Funktion Equiripple-Verhalten und ist dennoch ein Polynom, was sich perfekt für linear Filter eignet.

## 26.3 Jacobische elliptische Funktionen

Für das elliptische Filter wird statt der, für das Tschebyscheff-Filter benutzen Kreis-Trigonometrie die elliptischen Funktionen gebraucht. Der Begriff elliptische Funktion wird für sehr viele Funktionen gebraucht, daher ist es hier wichtig zu erwähnen, dass es ausschliesslich um die Jacobischen elliptischen Funktionen geht.

Im Wesentlichen erweitern die Jacobi elliptischen Funktionen die trigonometrische Funktionen für Ellipsen. Zum Beispiel gibt es analog zum Sinus den elliptischen  $\text{sn}(z, k)$ . Im Gegensatz zum den trigonometrischen Funktionen haben die elliptischen Funktionen zwei Parameter. Zum einen gibt es den *elliptischen Modul  $k$* , der die Exzentrizität der Ellipse parametrisiert. Zum andern das Winkelargument  $z$ . Im Kreis ist der Radius für alle Winkel konstant, bei Ellipsen ändert sich das. Dies hat zur Folge, dass bei einer Ellipse die Kreisbogenstrecke nicht linear zum Winkel verläuft. Darum kann hier nicht der gewohnte Winkel verwendet werden. Das Winkelargument  $z$  kann durch das elliptische Integral erster Art

$$z = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad (26.13)$$

mit dem Winkel  $\phi$  in Verbindung liegt.

Dabei wird das vollständige und unvollständige Elliptische integral unterschieden. Beim vollständigen Integral

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (26.14)$$

wird über ein viertel Ellipsenbogen integriert also bis  $\phi = \pi/2$  und liefert das Winkelargument für eine Vierteldrehung. Die Zahl wird oft auch abgekürzt mit  $K = K(k)$  und ist für das elliptische Filter sehr relevant. Alle elliptischen Funktionen sind somit  $4K$ -periodisch.

Neben dem  $sn$  gibt es zwei weitere basis-elliptische Funktionen  $cn$  und  $dn$ . Dazu kommen noch weitere abgeleitete Funktionen, die durch Quotienten und Kehrwerte dieser Funktionen zustande kommen. Insgesamt sind es die zwölf Funktionen

$$sn \quad ns \quad sc \quad sd \quad cn \quad nc \quad cs \quad cd \quad dn \quad nd \quad ds \quad dc.$$

Die Jacobischen elliptischen Funktionen können mit der inversen Funktion des kompletten elliptischen Integrals erster Art

$$\phi = F^{-1}(z, k) \quad (26.15)$$

definiert werden. Dabei ist zu beachten dass nur das  $z$  Argument der Funktion invertiert wird, also

$$z = F(\phi, k) \Leftrightarrow \phi = F^{-1}(z, k). \quad (26.16)$$

Mithilfe von  $F^{-1}$  kann zum Beispiel  $sn^{-1}$  mit dem Elliptischen integral dargestellt werden:

$$\sin(\phi) = \sin(F^{-1}(z, k)) = sn(z, k) = w \quad (26.17)$$

$$\phi = F^{-1}(z, k) = \sin^{-1}(\sin(z, k)) = \sin^{-1}(w) \quad (26.18)$$

$$F(\phi, k) = z = F(\sin^{-1}(\sin(z, k)), k) = F(\sin^{-1}(w), k) \quad (26.19)$$

$$sn^{-1}(w, k) = F(\phi, k), \quad \phi = \sin^{-1}(w) \quad (26.20)$$

$$sn^{-1}(w, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \phi = \sin^{-1}(w) \quad (26.21)$$

$$= \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad (26.22)$$

Beim  $\cos^{-1}(x)$  haben wir gesehen, dass die analytische Fortsetzung bei  $x < -1$  und  $x > 1$  rechtwinklig in die Komplexen zahlen wandert. Wenn man das gleiche mit  $sn^{-1}(w, k)$  macht, erkennt man zwei interessante Stellen. Die erste ist die gleiche wie beim  $\cos^{-1}(x)$  nämlich bei  $t = \pm 1$ . Der erste Term unter der Wurzel wird dann negativ, während der zweite noch positiv ist, da  $k \leq 1$ .

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \in \mathbb{R} \quad \forall \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (26.23)$$

Die zweite stelle passiert wenn beide Faktoren unter der Wurzel negativ werden, was bei  $t = 1/k$  der Fall ist.

Funktion in reelle und komplexe Richtung periodisch

In der reellen Richtung ist sie  $4K(k)$ -periodisch und in der imaginären Richtung  $4K'(k)$ -periodisch.

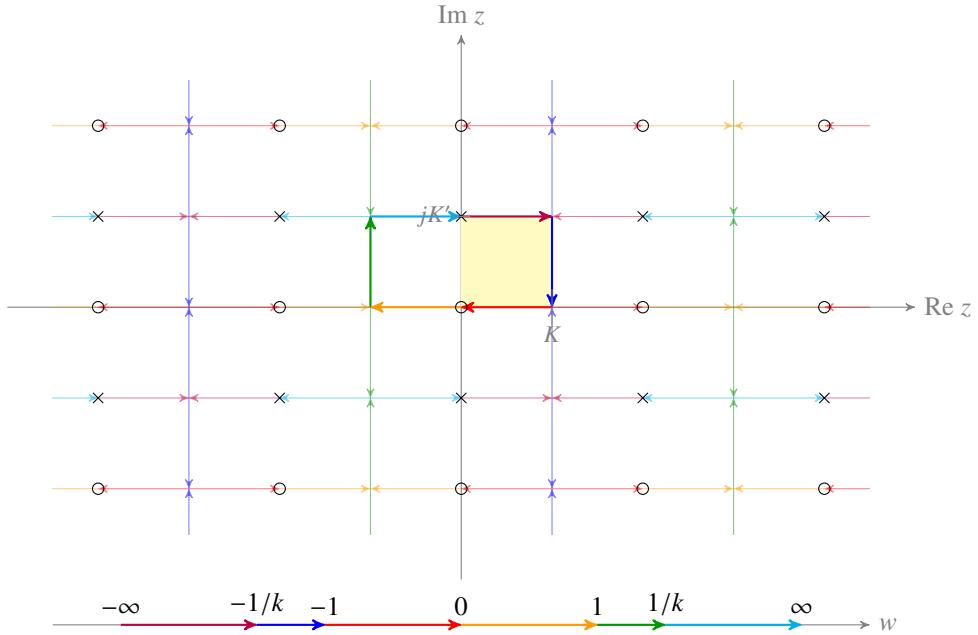


Abbildung 26.6:  $z$ -Ebene der Funktion  $z = \text{sn}^{-1}(w, k)$ . Die Funktion ist in der realen Achse  $4K$ -periodisch und in der imaginären Achse  $2jK'$ -periodisch.

## 26.4 Elliptische rationale Funktionen

Kommen wir nun zum eigentlichen Teil dieses Papers, den elliptischen rationalen Funktionen

$$R_N(\xi, w) = \text{cd}\left(N f_1(\xi) \text{ cd}^{-1}(w, 1/\xi), f_2(\xi)\right) \quad (26.24)$$

$$= \text{cd}\left(N \frac{K_1}{K} \text{ cd}^{-1}(w, k), k_1\right), \quad k = 1/\xi, k_1 = 1/f(\xi) \quad (26.25)$$

$$= \text{cd}(N K_1 z, k_1), \quad w = \text{cd}(zK, k) \quad (26.26)$$

sieht ähnlich aus wie die trigonometrische Darstellung der Tschebyschef-Polynome (26.8) Anstelle vom Kosinus kommt hier die cd-Funktion zum Einsatz. Die Ordnungszahl  $N$  kommt auch als Faktor vor. Zusätzlich werden noch zwei verschiedene elliptische Module  $k$  und  $k_1$  gebraucht.

Sinus entspricht  $\text{sn}$

Damit die Nullstellen an ähnlichen Positionen zu liegen kommen wie bei den Tschebyscheff-Polynomen, muss die cd-Funktion gewählt werden.

Die  $\text{cd}^{-1}(w, k)$ -Funktion ist um  $K$  verschoben zur  $\text{sn}^{-1}(w, k)$ -Funktion, wie ersichtlich in Abbildung 26.7. Auffallend ist, dass sich alle Nullstellen und Polstellen um  $K$  verschoben haben.

Durch das Konzept vom fundamentalen Rechteck, siehe Abbildung 26.8 können für alle inversen Jacobi elliptischen Funktionen die Positionen der Null- und Polstellen anhand eines Diagramms ermittelt werden. Der erste Buchstabe bestimmt die Position der Nullstelle und der zweite Buchstabe die Polstelle.

Auffallend an der  $w = \text{sn}(z, k)$ -Funktion ist, dass sich  $w$  auf der reellen Achse wie der Kosinus immer zwischen  $-1$  und  $1$  bewegt, während bei  $\text{Im}(z) = K'$  die Werte zwischen  $\pm 1/k$  und  $\pm \infty$  ver-

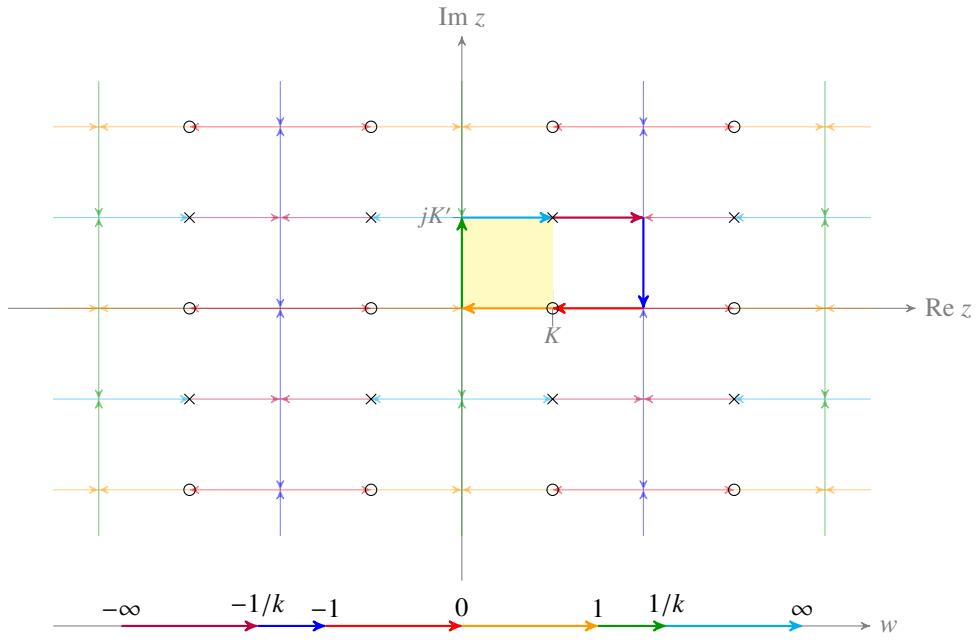


Abbildung 26.7:  $z$ -Ebene der Funktion  $z = \text{sn}^{-1}(w, k)$ . Die Funktion ist in der realen Achse  $4K$ -periodisch und in der imaginären Achse  $2jK'$ -periodisch.

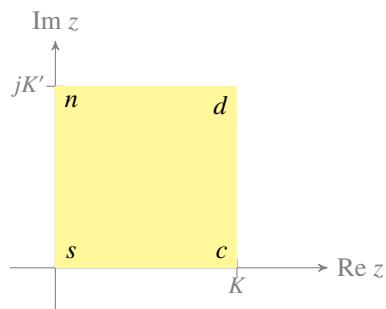


Abbildung 26.8: Fundamentals Rechteck der inversen Jaccobi elliptischen Funktionen.

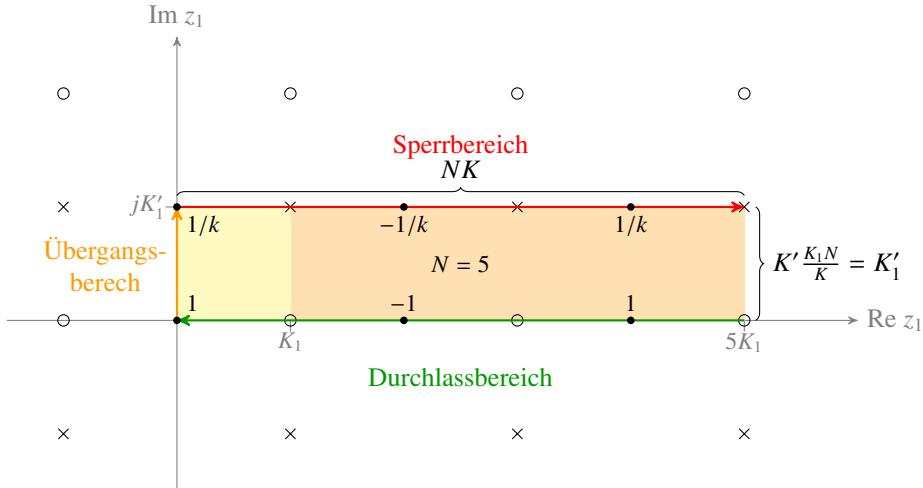


Abbildung 26.9:  $z_1$ -Ebene der elliptischen rationalen Funktionen. Je grösser die Ordnung  $N$  gewählt wird, desto mehr Nullstellen passiert.

laufen. Die Funktion hat also Equiripple-Verhalten um  $w = 0$  und um  $w = \pm\infty$ . Falls es möglich ist diese Werte abzufahren im Sti der Tschebyscheff-Polynome, kann ein Filter gebaut werden, dass Equiripple-Verhalten im Durchlass- und Sperrbereich aufweist.

Analog zu Abbildung 26.5 können wir auch bei den elliptisch rationalen Funktionen die komplexe  $z$ -Ebene betrachten, wie ersichtlich in Abbildung 26.9, um die besser zu verstehen.

### 26.4.1 Degree Equation

Der  $cd^{-1}$  Term muss so verzogen werden, dass die umgebene  $cd$ -Funktion die Nullstellen und Pole trifft. Dies trifft ein wenn die Degree Equation erfüllt ist.

$$N \frac{K'}{K} = \frac{K'_1}{K_1} \quad (26.27)$$

Leider ist das lösen dieser Gleichung nicht trivial. Die Rechnung wird in ?? im Detail angeschaut.

### 26.4.2 Polynome?

Bei den Tschebyscheff-Polynomen haben wir gesehen, dass die Trigonometrische Formel zu einfachen Polynomen umgewandelt werden kann. Im gegensatz zum  $\cos^{-1}$  hat der  $cd^{-1}$  nicht nur Nullstellen sondern auch Pole. Somit entstehen bei den elliptischen rationalen Funktionen, wie es der name auch deutet, rationale Funktionen, also ein Bruch von zwei Polynomen.

Da Transformationen einer rationalen Funktionen mit Grundrechenarten, wie es in (26.1) der Fall ist, immer noch rationale Funktionen ergeben, stellt dies kein Problem für die Implementierung dar.

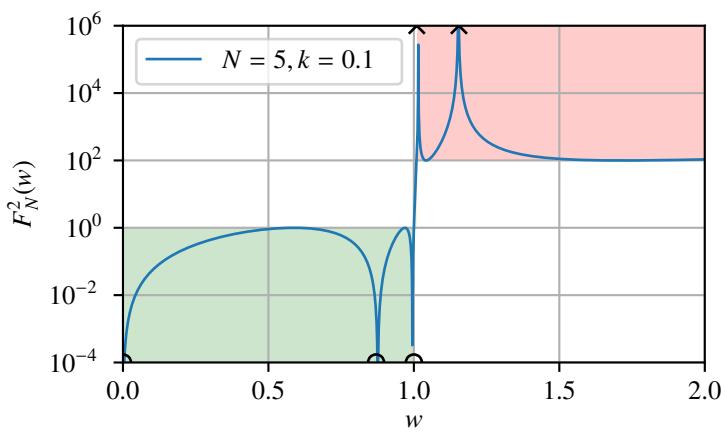


Abbildung 26.10:  $F_N$  für ein elliptischs filter.

# Kapitel 27

## $\int P(t)e^{-t^2} dt$ in geschlossener Form?

Andreas Müller

Der Risch-Algorithmus erlaubt, eine definitive Antwort darauf zu geben, ob eine elementare Funktion eine Stammfunktion in geschlossener Form hat. Der Algorithmus ist jedoch ziemlich kompliziert. In diesem Kapitel soll ein spezieller Fall mit Hilfe der Theorie der orthogonale Polynome, speziell der Hermite-Polynome, behandelt werden, wie er in der Arbeit [[dreieck:polint](#)] untersucht wurde.

### 27.1 Problemstellung

Es ist bekannt, dass das Fehlerintegral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} dt$$

nicht in geschlossener Form dargestellt werden kann. Mit der in Kapitel 6 skizzierten Theorie von Liouville und dem Risch-Algorithmus kann dies streng gezeigt werden.

Andererseits gibt es durchaus Integranden, die  $e^{-t^2}$  enthalten, für die eine Stammfunktion in geschlossener Form gefunden werden kann. Zum Beispiel folgt aus der Ableitung

$$\frac{d}{dt} e^{-t^2} = -2te^{-t^2}$$

die Stammfunktion

$$\int te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

Leitet man  $e^{-t^2}$  zweimal ab, erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2} = (4t^2 - 2)e^{-t^2} \quad \Rightarrow \quad \int (t^2 - \frac{1}{2})e^{-t^2} dt = \frac{1}{4}e^{-t^2}.$$

Es gibt also viele weitere Polynome  $P(t)$ , für die der Integrand  $P(t)e^{-t^2}$  eine Stammfunktion in geschlossener Form hat. Damit stellt sich jetzt das folgende allgemeine Problem.

**Problem 27.1.** Für welche Polynome  $P(t)$  hat der Integrand  $P(t)e^{-t^2}$  eine elementare Stammfunktion?

## 27.2 Hermite-Polynome

In Abschnitt 27.1 hat sich schon angedeutet, dass die Polynome, die man durch Ableiten von  $e^{-t^2}$  erhalten kann, bezüglich des gestellten Problems besondere Eigenschaften haben. Zunächst halten wir fest, dass die Ableitung einer Funktion der Form  $P(t)e^{-t^2}$  mit einem Polynom  $P(t)$

$$\frac{d}{dt} P(t)e^{-t^2} = P'(t)e^{-t^2} - 2tP(t)e^{-t^2} = (P'(t) - 2tP(t))e^{-t^2} \quad (27.1)$$

ist. Insbesondere hat die Ableitung wieder die Form  $Q(t)e^{-t^2}$  mit einem Polynom  $Q(t)$ , welches man auch als

$$Q(t) = e^{t^2} \frac{d}{dt} P(t)e^{-t^2}$$

erhalten kann.

Die Polynome, die man aus der Funktion  $H_0(t) = e^{-t^2}$  durch Ableiten erhalten kann, wurden bereits in Abschnitt 7.3 bis auf ein Vorzeichen hergeleitet, sie heissen die Hermite-Polynome und es gilt

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

Das Vorzeichen dient dazu sicherzustellen, dass der Leitkoeffizient immer 1 ist. Das Polynom  $H_n(t)$  hat den Grad  $n$ .

In Abschnitt wurde auch gezeigt, dass die Polynome  $H_n(t)$  bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2} dt, \quad w(t) = e^{-t^2},$$

orthogonal sind. Ausserdem folgt aus (27.1) die Rekursionsbeziehung

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - H'_{n-1}(t) \quad (27.2)$$

für  $n > 0$ .

Im Hinblick auf die Problemstellung ist jetzt die Frage interessant, ob die Integranden  $H_n(t)e^{-t^2}$  eine Stammfunktion in geschlossener Form haben. Mit Hilfe der Rekursionsbeziehung (27.2) kann man für  $n > 0$  unmittelbar verifizieren, dass

$$\begin{aligned} \int H_n(t)e^{-t^2} dt &= \int (2tH_{n-1}(t) - H'_{n-1}(t))e^{-t^2} dt \\ &= - \int (\exp'(-t^2)H_{n-1}(t) + H'_{n-1}(t))e^{-t^2} dt \\ &= - \int (e^{-t^2} H_{n-1}(t))' dt = -e^{-t^2} H_{n-1}(t) \end{aligned}$$

ist. Für  $n > 0$  hat also  $H_n(t)e^{-t^2}$  eine elementare Stammfunktion. Die Hermite-Polynome sind also Lösungen für das Problem 27.1.

## 27.3 Beliebige Polynome

Im Abschnitt 27.2 wurden die Hermite-Polynome  $H_n(t)$  mit  $n > 0$  als Lösungen des gestellten Problems erkannt. Eine Linearkombination von solchen Polynomen hat natürlich ebenfalls eine elementare Stammfunktion. Das Problem kann daher neu formuliert werden:

**Problem 27.2.** Welche Polynome  $P(t)$  lassen sich aus den Hermite-Polynomen  $H_n(t)$  mit  $n > 0$  linear kombinieren?

Sei also

$$P(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_{n-1} t^{n-1} + p_n t^n$$

ein beliebiges Polynom vom Grad  $n$ . Eine elementare Stammfunktion von  $P(t)e^{-t^2}$  existiert sicher, wenn sich  $P(t)$  aus den Funktionen  $H_n(t)$  mit  $n > 0$  linear kombinieren lässt. Gesucht ist also zunächst eine Darstellung von  $P(t)$  als Linearkombination von Hermite-Polynomen.

**Lemma 27.3.** Jedes Polynom  $P(t)$  vom Grad  $n$  lässt sich auf eindeutige Art und Weise als Linearkombination

$$P(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + \dots + a_n H_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(t) \quad (27.3)$$

von Hermite-Polynomen schreiben.

*Beweis.* Zunächst halten wir fest, dass aus der Rekursionsformel (27.2) folgt, dass der Leitkoefizient bei jedem Rekursionsschnitt mit 2 multipliziert wird. Der Leitkoefizient von  $H_n(t)$  ist also  $2^n$ .

Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für  $n = 0$  ist  $P(t) = p_0 = p_0 H_0(t)$  als Linearkombination von Hermite-Polynomen darstellbar, dies ist die Induktionsverankerung.

Wir nehmen jetzt im Sinne der Induktionsannahme an, dass sich ein Polynom vom Grad  $n - 1$  als Linearkombination der Polynome  $H_0(t), \dots, H_{n-1}(t)$  schreiben lässt und untersuchen ein Polynom  $P(t)$  vom Grad  $n$ . Da der Leitkoefizient des Polynoms  $H_n(t)$  ist  $2^n$ , ist zerlegen wir

$$P(t) = \underbrace{\left( P(t) - \frac{p_n}{2^n} H_n(t) \right)}_{= Q(t)} + \frac{p_n}{2^n} H_n(t).$$

Das Polynom  $Q(t)$  hat Grad  $n - 1$ , besitzt also nach Induktionsannahme eine Darstellung

$$Q(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + \dots + a_{n-1} H_{n-1}(t)$$

als Linearkombination der Polynome  $H_0(t), \dots, H_{n-1}(t)$ . Somit ist

$$P(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + \dots + a_{n-1} H_{n-1}(t) + \frac{p_n}{2^n} H_n(t)$$

eine Darstellung von  $P(t)$  als Linearkombination der Polynome  $H_0(t), \dots, H_n(t)$ . Damit ist der Induktionsschritt vollzogen und das Lemma für alle  $n$  bewiesen.  $\square$

**Satz 27.4.** Die Funktion  $P(t)e^{-t^2}$  hat genau dann eine elementare Stammfunktion, wenn in der Darstellung (27.3) von  $P(t)$  als Linearkombination von Hermite-Polynomen  $a_0 = 0$  gilt.

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \int P(t)e^{-t^2} dt &= a_0 \int e^{-t^2} dt + \int \sum_{k=1}^n a_k H_k(t) dt \\ &= a_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(t) + \sum_{k=1}^n a_k \int H_k(t) dt. \end{aligned}$$

Da die Integrale in der Summe alle elementar darstellbar sind, ist das Integral genau dann elementar, wenn  $a_0 = 0$  ist.  $\square$

## 27.4 Integralbedingung

Die Tatsache, dass die Hermite-Polynome orthogonal sind, erlaubt das Kriterium von Satz 27.4 in einer besonders attraktiven Integralform zu formulieren.

Aus den Polynomen  $H_n(t)$  lassen sich durch Normierung die orthonormierten Polynome

$$\tilde{H}_n(t) = \frac{1}{\|H_n\|_w} H_n(t) \quad \text{mit} \quad \|H_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-t^2} dt$$

bilden. Da diese Polynome eine orthonormierte Basis des Vektorraums der Polynome bilden, kann die gesuchte Zerlegung eines Polynoms  $P(t)$  auch mit Hilfe des Skalarproduktes gefunden werden:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \langle \tilde{H}_k, P \rangle_w \tilde{H}_k(t) = \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{H_k}{\|H_k\|_w}, P \right\rangle_w \frac{H_k(t)}{\|H_k\|_w} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\langle H_k, P \rangle_w}{\|H_k\|_w^2}}_{= a_k} H_k(t).$$

Die Darstellung von  $P(t)$  als Linearkombination von Hermite-Polynomen hat somit die Koeffizienten

$$a_k = \frac{\langle H_k, P \rangle_w}{\|H_k\|_w^2}.$$

Aus dem Kriterium  $a_0 = 0$  dafür, dass eine elementare Stammfunktion von  $P(t)e^{-t^2}$  existiert, wird daher die Bedingung, dass  $\langle H_0, P \rangle_w = 0$  ist. Da  $H_0(t) = 1$  ist, folgt als Bedingung

$$a_0 = \langle H_0, P \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) e^{-t^2} dt = 0.$$

**Satz 27.5.** Ein Integrand der Form  $P(t)e^{-t^2}$  mit einem Polynom  $P(t)$  hat genau dann eine elementare Stammfunktion, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t) e^{-t^2} dt = 0$$

ist.



Das Mathematische Seminar der Ostschweizer Fachhochschule in Rapperswil hat sich im Frühjahrssemester 2022 dem Thema Spezielle Funktionen zugewandt. Ziel war, die grosse Vielfalt von speziellen Funktionen und Funktionenfamilien zu ergründen, die im Laufe der Zeit für die verschiedensten Anwendungen erdacht wurden. Dieses Buch bringt das Skript des Vorlesungsteils mit den von den Seminarteilnehmern beigetragenen Seminararbeiten zusammen.

