

# Nachrichtentechnik 1 + 2

Thomas Kneubühler

Herbstsemester 2021  
Frühlingssemester 2022



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Was ist Nachrichtentechnik? . . . . .	1
1.2 Historischer Überblick . . . . .	1
1.3 Klassifizierungen von Kommunikationssystemen . . . . .	3
1.3.1 Klassifizierung nach der Übertragungsdistanz . . . . .	3
1.3.2 Klassifizierung nach Zugriffsverfahren . . . . .	4
1.3.3 Klassifizierung nach Freqenzbereich . . . . .	5
<b>2 Signale</b>	<b>7</b>
2.1 Was sind Signale? . . . . .	7
2.2 Klassifizierungen von Signalen . . . . .	7
2.2.1 Periodische oder aperiodische Signale . . . . .	7
2.2.2 Energie- oder Leistungssignale . . . . .	8
2.2.3 Deterministische oder stochastische Signale . . . . .	9
2.2.4 Zeitkontinuierliche oder zeitdiskrete Signale . . . . .	10
2.2.5 Amplitudenkontinuierliche oder quantisierte Signale . . . . .	11
2.2.6 Analoge oder digitale Signale . . . . .	11
2.2.7 Reell- oder komplexwertige Signale . . . . .	12
2.3 Sprung- und Impulsfunktion . . . . .	12
2.3.1 Sprungfunktion . . . . .	12
2.3.2 Dirac'sche Impulsfunktion . . . . .	12
2.4 Kenngrößen von Signalen . . . . .	13
2.4.1 Amplitudenfunktion . . . . .	13
2.4.2 Peak-to-peak Amplitude . . . . .	14
2.4.3 Peak-Amplitude . . . . .	14
2.4.4 Linearer zeitlicher Mittelwert . . . . .	14
2.4.5 Momentanleistung, Signalenergie und mittlere Signalleistung . . . . .	14
2.4.6 Effektivwert . . . . .	15
2.4.7 Scheitelfaktor . . . . .	15
2.5 Logarithmische Beschreibung von Leistungsverhältnissen . . . . .	16
<b>3 Fouriertransformation</b>	<b>19</b>
3.1 Wozu dient der Frequenzbereich? . . . . .	19
3.2 Fourier-Reihe . . . . .	19
3.2.1 Trigonometrische Form der Fourier-Reihe . . . . .	21
3.2.2 Harmonische Form der Fourier-Reihe . . . . .	21
3.2.3 Komplexe Form der Fourier-Reihe . . . . .	22
3.2.4 Eigenschaften der Fourier-Reihe . . . . .	22
3.3 Fouriertransformation . . . . .	23
3.3.1 Übergang von der Fourierreihe zur Fouriertransformation . . . . .	23
3.3.2 Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	23
3.3.3 Fourier-Transformierte von ausgewählten Leistungssignalen . . . . .	28

<b>4 Lineare zeitinvariante Systeme</b>	<b>29</b>
4.1 Was ist ein LTI-System? . . . . .	29
4.2 Sprung- und Impulsfunktion als Eingangssignale . . . . .	30
4.2.1 Sprungfunktion und Sprungantwort . . . . .	30
4.2.2 Impulsfunktion und Impulsantwort . . . . .	30
4.3 Ausgangssignal bei beliebigem Eingangssignal . . . . .	30
4.4 Berechnung im Frequenzbereich . . . . .	31
4.5 Bodediagramm . . . . .	31
4.6 Filtereigenschaften von LTI-Systemen . . . . .	33
4.6.1 Verzerrungsfreies LTI-System . . . . .	33
4.6.2 Ideale Filter . . . . .	34
4.6.3 Kausale Filter . . . . .	36
4.6.4 Quadraturfilter . . . . .	37
<b>5 Analoge Modulationsarten</b>	<b>39</b>
5.1 Wozu dienen Modulationen? . . . . .	39
5.1.1 Modulation eines sinusförmigen Trägersignals . . . . .	40
5.1.2 Modulation eines rechteckförmigen Trägersignals . . . . .	41
5.2 Trägersignale für Amplitudenmodulation . . . . .	43
5.3 Gewöhnliche Amplitudenmodulation . . . . .	44
5.3.1 Gewöhnliche AM im Zeitbereich . . . . .	44
5.3.2 Gewöhnliche AM im Frequenzbereich . . . . .	46
5.3.3 Äquivalente Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM . . . . .	47
5.3.4 Leistungseffizienz von gewöhnlicher AM . . . . .	49
5.4 Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger (DSB-SC) . . . . .	51
5.4.1 DSB-SC im Zeitbereich . . . . .	51
5.4.2 DSB-SC im Frequenzbereich . . . . .	52
5.5 Einseitenband-Amplitudenmodulation (SSB) . . . . .	53
5.5.1 Filtermethode . . . . .	54
5.5.2 Phasenmethode . . . . .	54
5.5.3 Demodulation einer SSB . . . . .	56
5.6 Restseitenband-Amplitudenmodulation (VSB) . . . . .	57
5.7 Quadraturamplitudenmodulation (QAM) . . . . .	57
5.8 Winkelmodulationsarten . . . . .	60
5.9 Winkelmodulation im Frequenzbereich . . . . .	61
5.9.1 Kleinhubsignale . . . . .	62
5.9.2 Grosshubsignal . . . . .	63
5.10 Technische Entwicklung des UKW-Radios . . . . .	67
<b>6 Digitalisierung von Signalen</b>	<b>71</b>
6.1 Welche Vorteile bringt die Digitalisierung von Signalen? . . . . .	71
6.2 Abtastung . . . . .	72
6.2.1 Mathematische Beschreibung des Abtastvorgangs im Zeitbereich . . . . .	73
6.2.2 Abtastvorgang im Frequenzbereich . . . . .	74
6.2.3 Nyquist-Shannon Abtasttheorem . . . . .	76
6.2.4 Rekonstruktion . . . . .	77
6.2.5 Interpolation im digitalen Bereich . . . . .	79
6.3 Quantisierung . . . . .	80
6.3.1 Gleichförmige Quantisierung . . . . .	81
6.3.2 Ungleichförmige Quantisierung . . . . .	82
6.3.3 Heutige Audiokompressionsverfahren . . . . .	86
6.4 Weitere Verfahren der A/D-Wandlung . . . . .	87
6.4.1 Deltamodulator . . . . .	87

6.4.2	Delta-Sigma A/D-Wandler . . . . .	88
6.4.3	Delta-Sigma D/A-Wandler und Pulsweitenmodulation . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Übertragung von digitalen Signalen</b>	<b>91</b>
7.1	Digitale Information auf analogen Signalen . . . . .	91
7.2	Digitale Basisbandübertragung . . . . .	92
7.2.1	Unipolares NRZ-Signal . . . . .	93
7.2.2	Bipolares NRZ-Signal . . . . .	95
7.2.3	Unipolares oder bipolares NRZ-inverted Signal . . . . .	95
7.2.4	Unipolares RZ-Signal . . . . .	96
7.2.5	Bipolares RZ-Signal . . . . .	97
7.2.6	Alternate Mark Inversion . . . . .	98
7.2.7	Manchester-Code . . . . .	98
7.2.8	MLT3-Code . . . . .	99
7.2.9	PAM5 Codierung . . . . .	101
7.3	Bandbreitenbedarf von digitalen Signalen . . . . .	102
7.3.1	Bandbreitenbedarf eines PCM-Signals . . . . .	102
7.4	Pulsformfilter . . . . .	104
7.4.1	Erstes Nyquist-Kriterium . . . . .	104
7.4.2	Raised-Cosine Puls . . . . .	105
7.4.3	Zweites Nyquist-Kriterium . . . . .	109
7.5	Digitale Modulation von Trägersignalen . . . . .	109
7.5.1	Digitale Amplitudenmodulation . . . . .	110
7.5.2	Digitale Phasenmodulation . . . . .	111
7.5.3	Digitale Frequenzmodulation . . . . .	113
7.6	Äquivalente Basisbanddarstellung von Bandpasssignalen . . . . .	114
7.6.1	Basisbanddarstellung von ASK und PSK . . . . .	114
7.6.2	Quadraturamplitudenmodulation QAM . . . . .	116
7.6.3	Bandbegrenzte digitale Modulation . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen</b>	<b>121</b>
8.1	Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Nachrichtentechnik . . . . .	121
8.2	Zufallsexperiment . . . . .	122
8.3	Wahrscheinlichkeit von Ereignissen . . . . .	125
8.3.1	Laplace-Experiment . . . . .	126
8.3.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	126
8.4	Zufallsvariablen . . . . .	129
8.4.1	Diskrete Zufallsvariable . . . . .	130
8.4.2	Stetige Zufallsvariable . . . . .	131
8.4.3	Verteilungsfunktion . . . . .	131
8.4.4	Diskrete Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	132
8.4.5	Stetige Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion . . . . .	133
8.4.6	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von diskreten und gemischten Zufallsvariablen . . . . .	134
8.5	Zweidimensionale und n-dimensionale Zufallsvariablen . . . . .	134
8.5.1	Verbundverteilungsfunktion . . . . .	134
8.5.2	Randverteilungsfunktion . . . . .	135
8.5.3	Verbundwahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	135
8.5.4	Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion . . . . .	136
8.5.5	Anwenden von Funktionen auf Zufallsvariablen . . . . .	136
8.5.6	Funktionen von n-dimensionalen Zufallsvariablen . . . . .	137
8.6	Statistische Kennwerte . . . . .	139
8.6.1	Erwartungswert . . . . .	139
8.6.2	Zweites Moment . . . . .	140

8.6.3	Varianz und Standardabweichung . . . . .	141
8.6.4	Korrelation . . . . .	141
8.6.5	Kovarianz . . . . .	142
8.7	Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	143
8.7.1	Gleichverteilung . . . . .	143
8.7.2	Binomialverteilung . . . . .	144
8.7.3	Poissonverteilung . . . . .	144
8.7.4	Gaussverteilung . . . . .	144
8.7.5	Rayleigh-Verteilung . . . . .	147
<b>9</b>	<b>Zufallsprozess</b>	<b>149</b>
9.1	Was ist ein Zufallsprozess? . . . . .	149
9.2	Definitionen und Notationen für Zufallsprozesse . . . . .	150
9.3	Statistische Eigenschaften von Zufallsprozessen . . . . .	151
9.3.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeits(dichte)funktion . . . . .	151
9.3.2	Statistische Kennwerte . . . . .	151
9.4	Stationarität von Zufallsprozessen . . . . .	153
9.4.1	Streng stationäre Prozesse . . . . .	153
9.4.2	Schwach stationäre Prozesse . . . . .	154
9.5	Zeitmittelwerte und Ergodizität . . . . .	155
9.5.1	Linearer zeitlicher Mittelwert . . . . .	155
9.5.2	Zeitliche Autokorrelationsfunktion . . . . .	156
9.5.3	Ergodizität von stationären Prozessen . . . . .	156
9.6	Eigenschaften von stationären Zufallsprozessen . . . . .	157
9.7	Spektrale Leistungsdichte . . . . .	158
9.7.1	Kreuzspektraldichte . . . . .	159
9.8	Übertragung von Zufallsprozessen über LTI-Systeme . . . . .	160
9.8.1	Erwartungswert und Autokorrelation am Ausgang des LTI-Systems . . . . .	160
9.8.2	Leistungsdichtespektrum am Ausgang des LTI-Systems . . . . .	160
9.9	Ausgesuchte Zufallsprozesse . . . . .	161
9.9.1	Gauss'scher Zufallsprozess . . . . .	161
9.9.2	Weisses Rauschen . . . . .	162
9.9.3	Farbige Rauschen . . . . .	162
9.9.4	Bandbegrenztes weisses Rauschen . . . . .	162
9.9.5	Schmalbandiges Rauschen . . . . .	162
9.10	Praxisnahe Rauschquellen . . . . .	163
9.10.1	Thermisches Widerstandsrauschen . . . . .	163
9.10.2	Rauschverhalten von Halbleiterverstärkern . . . . .	165
9.10.3	Rauschen am Antenneneingang . . . . .	165
9.11	Leistungsdichtespektren von Leitungscodes . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Rauschen in analogen Kommunikationssystemen</b>	<b>173</b>
10.1	Rauschen verschlechtert die Empfangsqualität . . . . .	173
10.2	Gauss'scher Kanal . . . . .	174
10.3	Übertragung im Basisband . . . . .	174
10.4	Übertragung mit Amplitudenmodulation . . . . .	176
10.4.1	Empfänger mit kohärentem Detektor . . . . .	176
10.4.2	Empfänger mit Hüllkurvendetektor . . . . .	179
10.5	Übertragung mit Winkelmodulation . . . . .	180
10.5.1	Empfang eines winkelmodulierten Signals mit grossem Störabstand . . . . .	182
10.5.2	Empfang eines winkelmodulierten Signals mit geringem Störabstand . . . . .	183
10.5.3	Störabstand am Empfängerausgang bei Phasenmodulation . . . . .	184
10.5.4	Störabstand am Empfängerausgang bei Frequenzmodulation . . . . .	184

10.6 Zusammenfassende Tabelle . . . . .	185
<b>11 Digitale Datenübertragung über einen AWGN-Kanal</b>	<b>187</b>
11.1 Rauschen führt zu Bitfehlern . . . . .	187
11.2 Empfang von binären Signalen . . . . .	188
11.3 MAP-Kriterium und Maximum-Likelihood Detektor . . . . .	190
11.3.1 MAP-Kriterium nach einem gauss'schen Kanal . . . . .	191
11.3.2 Maximum-Likelihood Detektor . . . . .	194
11.4 Optimales Empfangsfilter . . . . .	195
11.4.1 Matched Filter . . . . .	195
11.4.2 Korrelator . . . . .	196
11.4.3 Minimale Bitfehlerrate dank optimalem Detektor . . . . .	197
<b>12 Informationstheorie</b>	<b>201</b>
12.1 Informationstheorie nach Claude Shannon . . . . .	201
12.1.1 Diskrete gedächtnisfreie Quellen und Kanäle . . . . .	202
12.1.2 Mathematische Definition von Information . . . . .	202
12.1.3 Entropie . . . . .	203
12.1.4 Klassifikation von Kanälen . . . . .	204
12.2 Quellencodierung . . . . .	209
12.2.1 Klassifizierung von Codes . . . . .	209
12.2.2 Redundanz und Effizienz der Codierung . . . . .	211
12.2.3 Kraft'sche Ungleichung . . . . .	211
12.2.4 Shannon-Fano Codierung . . . . .	212
12.2.5 Huffman Codierung . . . . .	213
<b>13 Kanalcodierung</b>	<b>215</b>
13.1 Prinzip der Kanalcodierung . . . . .	215
13.1.1 Kanalcodierungstheorem . . . . .	215
13.2 Blockcodes . . . . .	216
13.2.1 Lineare Blockcodes . . . . .	216
13.2.2 Hamminggewicht und Hammingdistanz . . . . .	217
13.2.3 Fehlererkennung und Fehlerkorrektur . . . . .	218
13.2.4 Systematische Blockcodes . . . . .	218
13.2.5 Darstellung von linearen Blockcodes mit der Generatormatrix G . . . . .	218
13.2.6 Paritätsprüfmatrix H . . . . .	220
13.2.7 Hammingsschranke . . . . .	222
13.2.8 Restfehlerwahrscheinlichkeit . . . . .	222
13.3 Zyklische Blockcodes . . . . .	227
13.3.1 Polynomdarstellung . . . . .	228
13.3.2 Theorem für zyklische Codes . . . . .	230
13.3.3 Generatorpolynom für zyklische Codes . . . . .	231
13.3.4 Zyklische Codes und Generatormatrix . . . . .	232
13.3.5 Einfache Bildung eines geordnet-systematischen zyklischen Codes . . . . .	233
13.4 Zyklische Redundanzprüfung . . . . .	235
13.4.1 Eigenschaften der zyklischen Redundanzprüfung . . . . .	236
13.4.2 Beispiele von CRC-Polynomen . . . . .	237
<b>A Konstanten</b>	<b>239</b>
A.1 Griechische Buchstaben . . . . .	239
A.2 Mathematische und physikalische Konstanten . . . . .	239

<b>B Zehnerlogarithmus</b>	<b>241</b>
B.1 Berechnung von Summen, Produkten und Potenzen . . . . .	241
B.2 Umrechnung auf eine andere logarithmische Basis . . . . .	241
B.3 Anwendungsbeispiel: Dezibel . . . . .	241
B.4 Tabelle des Zehnerlogarithmus . . . . .	242
<b>C Zweierlogarithmus</b>	<b>245</b>
C.1 Berechnung von Summen, Produkten und Potenzen . . . . .	245
C.2 Umrechnung auf eine andere logarithmische Basis . . . . .	245
C.3 Anwendungsbeispiel: Informationsgehalt . . . . .	245
C.4 Tabelle des Zweierlogarithmus . . . . .	246
<b>D Nützliche trigonometrische Formeln</b>	<b>249</b>
D.1 Eulersche Darstellung . . . . .	249
D.2 Summe zweier Winkel . . . . .	249
D.3 Produkte von trigonometrischen Funktionen . . . . .	249
D.4 Differentiation . . . . .	249
<b>E Fourier-Reihe und Fourier-Transformation</b>	<b>251</b>
E.1 Berechnung der Fourier-Reihe . . . . .	251
E.1.1 Trigonometrische Form der Fourier-Reihe . . . . .	251
E.1.2 Harmonische Form der Fourier-Reihe . . . . .	251
E.1.3 Komplexe Form der Fourier-Reihe . . . . .	251
E.2 Eigenschaften der komplexen Fourier-Reihe . . . . .	251
E.3 Berechnung der Fourier-Transformation und ihrer Rücktransformation . . . . .	252
E.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	252
E.5 Fourier-Transformation von Einzelpulsen . . . . .	253
E.6 Periodisch fortgesetzte Einzelpulse . . . . .	254
E.7 Fouriertransformation einer Fourierreihe . . . . .	254
<b>F Besselfunktion erster Art</b>	<b>255</b>
F.1 Berechnung mit Reihenentwicklung . . . . .	255
F.2 Eigenschaften . . . . .	255
F.3 Tabelle der Bessel-Funktion erster Art und n-ter Ordnung . . . . .	256
<b>G Fehlerfunktion</b>	<b>259</b>
G.1 Definition der Fehlerfunktion . . . . .	259
G.2 Eigenschaften . . . . .	259
G.3 Tabelle der Fehlerfunktion . . . . .	260
<b>H Q-Funktion</b>	<b>261</b>
H.1 Definition der Q-Funktion . . . . .	261
H.2 Eigenschaften . . . . .	261
H.3 Tabelle der Q-Funktion . . . . .	262

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Periodisches Signal . . . . .	8
2.2	Aperiodisches Signal . . . . .	8
2.3	Energiesignal . . . . .	8
2.4	Leistungssignal . . . . .	9
2.5	Deterministisches Signal . . . . .	9
2.6	Stochastisches Signal . . . . .	10
2.7	Zeitkontinuierliches Signal . . . . .	10
2.8	Zeitdiskretes Signal . . . . .	10
2.9	Amplitudenkontinuierliches Signal . . . . .	11
2.10	Quantisiertes Signal . . . . .	11
2.11	Analoges Signal . . . . .	11
2.12	Digitales Signal . . . . .	12
2.13	Kenngrößen von Signalen . . . . .	13
3.1	Rechteckapproximation mit Fourierreihe . . . . .	20
4.1	Ideales Tiefpassfilter . . . . .	34
4.2	Ideales Hochpassfilter . . . . .	35
4.3	Ideales Bandpassfilter . . . . .	35
4.4	Ideales Bandpassfilter . . . . .	36
4.5	Ideales Allpassfilter . . . . .	36
4.6	Chebyshev-Tiefpassfilter . . . . .	37
5.1	Amplitudenmodulation . . . . .	40
5.2	Phasenmodulation . . . . .	40
5.3	Frequenzmodulation . . . . .	41
5.4	Pulsamplitudenmodulation (PAM) . . . . .	41
5.5	Pulsweitenmodulation (PWM) . . . . .	42
5.6	Pulsphasenmodulation (PPM) . . . . .	42
5.7	Pulsfrequenzmodulation (PFM) . . . . .	42
5.8	Zeigerdiagramm eines amplitudenmodulierten Trägersignals . . . . .	44
5.9	Hüllkurvendetektor . . . . .	45
5.10	Zeitlicher Verlauf von gewöhnlicher AM . . . . .	46
5.11	Blockschaltbild eines Modulators für gewöhnliche AM . . . . .	46
5.12	Amplitudendichtespektrum von gewöhnlicher AM . . . . .	47
5.13	Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit Cosinus-Trägersignal . . . . .	48
5.14	Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit Sinus-Trägersignal . . . . .	48
5.15	Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit phasenverschobenem Trägersignal . . . . .	49
5.16	Blockschaltbild eines Modulators für Zweiseitenband-AM ohne Träger . . . . .	51
5.17	Zeitlicher Verlauf von Zweiseitenband-AM ohne Träger . . . . .	51
5.18	Amplitudendichtespektrum von Zweiseitenband-AM ohne Träger . . . . .	52
5.19	Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Zweiseitenband-AM ohne Träger . . . . .	52
5.20	Zeitlicher Verlauf von Einseitenband-AM . . . . .	54
5.21	Einseitenband-Modulator mit Phasenmethode . . . . .	54
5.22	Amplitudendichtespektrum von Einseitenband-AM: oberes bzw. unteres Seitenband . . . . .	56
5.23	Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Einseitenband-AM . . . . .	56
5.24	Blockschaltbild für einen QAM-Modulator . . . . .	58

5.25	Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Quadraturamplitudenmodulation . . . . .	59
5.26	Zeigerdiagramm eines winkelmodulierten Trägersignals . . . . .	61
5.27	Besselfunktionen erster Art und n-ter Ordnung . . . . .	65
5.28	Blockschaltdbild des modulierenden Signals bei UKW-Radio . . . . .	69
5.29	Spektrale Zusammensetzung des modulierenden Signals bei UKW-Radio . . . . .	69
6.1	Natural Sampling mit $\tau = 0.5 T_s$ und $\tau = 0.1 T_s$ im Zeitbereich . . . . .	74
6.2	Natural Sampling mit $\tau = 0.5 T_s$ und $\tau = 0.1 T_s$ im Frequenzbereich . . . . .	75
6.3	Rekonstruktion mit Zero-Order Hold mit unterschiedlichen Pulslängen $\tau$ im Zeitbereich . . . . .	78
6.4	Rekonstruktion mit Zero-Order Hold mit unterschiedlichen Pulslängen $\tau$ im Frequenzbereich . . . . .	79
6.5	Zweifach interpoliertes Zero-Order Hold Signal, vor und nach dem digitalen Tiefpassfilter . . . . .	80
6.6	Zweifach interpoliertes Zero-Order Hold Signal im Frequenzbereich . . . . .	80
6.7	Amerikanische $\mu$ -Law Komanderkennlinie . . . . .	84
6.8	Komanderkennlinie von A-Law im Vergleich zu $\mu$ -Law . . . . .	85
6.9	Komanderkennlinie und digitale Approximation von A-Law . . . . .	86
6.10	Mit Summator implementierter Deltamodulator . . . . .	87
6.11	Mit Integrator implementierter Deltamodulator . . . . .	88
6.12	Delta-Sigma A/D-Wandler mit anschliessender analoger Rekonstruktion . . . . .	88
6.13	Delta-Sigma D/A-Wandler im Vergleich zu PWM . . . . .	90
7.1	Unipolares NRZ-Signal im Zeitbereich . . . . .	93
7.2	Additiver Scrambler von SDH/SONET . . . . .	94
7.3	Bipolares NRZ-Signal im Zeitbereich . . . . .	95
7.4	Unipolares NRZ-inverted Signal (NRZ-M) im Zeitbereich . . . . .	96
7.5	Unipolares RZ-Signal im Zeitbereich . . . . .	97
7.6	Bipolares RZ-Signal im Zeitbereich . . . . .	97
7.7	AMI NRZ-Signal im Zeitbereich . . . . .	98
7.8	Manchester codiertes Signal im Zeitbereich . . . . .	99
7.9	MLT3 codiertes Signal im Zeitbereich . . . . .	100
7.10	PAM5 codiertes Signal im Zeitbereich . . . . .	102
7.11	Raised-Cosine Pulse mit unterschiedlichen Roll-off Faktoren $\alpha$ . . . . .	106
7.12	Raised-Cosine Pulse im Frequenzbereich . . . . .	107
7.13	Augendiagramme der Raised-Cosine Pulse . . . . .	108
7.14	Amplitude Shift Keying im Zeitbereich . . . . .	110
7.15	On-Off Keying im Zeitbereich . . . . .	110
7.16	Binary Phase Shift Keying im Zeitbereich . . . . .	111
7.17	Quaternary Phase Shift Keying im Zeitbereich . . . . .	111
7.18	Differential BPSK im Zeitbereich . . . . .	112
7.19	Frequency Shift Keying im Zeitbereich . . . . .	113
7.20	Minimum Shift Keying im Zeitbereich . . . . .	113
7.21	Basisbanddarstellung eines OOK-Signals . . . . .	114
7.22	Basisbanddarstellung eines BPSK-Signals . . . . .	115
7.23	Basisbanddarstellung eines QPSK-Signals . . . . .	116
7.24	Basisbanddarstellung eines QAM-4 Signals . . . . .	116
7.25	Basisbanddarstellung eines QAM-16 Signals . . . . .	117
7.26	Basisbanddarstellung eines QAM-32 Signals . . . . .	118
7.27	Basisbanddarstellung eines QAM-64 Signals . . . . .	118
7.28	Bitfehler durch benachbarten QAM-Konstellationspunkt bei linearer und Gray Codierung . . . . .	119
7.29	Basisbanddarstellung von QPSK mit bandbegrenztem Spektrum . . . . .	120
7.30	Basisbanddarstellung von Offset-QPSK mit bandbegrenztem Spektrum . . . . .	120
8.1	Ergebnisraum eines Zufallsexperiments . . . . .	123
8.2	Ereignisse als Teilmengen des Ergebnisraums . . . . .	123
8.3	Wahrscheinlichkeit von Ereignissen . . . . .	125

8.4 Zufallsvariable . . . . .	130
8.5 Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen . . . . .	132
8.6 Wahrscheinlichkeitsmassefunktion einer diskreten Zufallsvariablen . . . . .	132
8.7 Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen . . . . .	133
8.8 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen . . . . .	133
8.9 Diskrete Gleichverteilung: $p_X(x)$ und $F_X(x)$ der Augenzahl beim Würfelwurf . . . . .	143
8.10 Stetige Gleichverteilung: $f_X(x)$ und $F_X(x)$ . . . . .	143
8.11 Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ . . . . .	145
8.12 Q-Funktion $Q(x)$ . . . . .	146
8.13 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ der Rayleigh-Verteilung . . . . .	148
9.1 Zufallsprozess . . . . .	149
9.2 Notationen des Zufallsprozesses . . . . .	150
9.3 Thermische Rauschspannung eines Widerstand $R$ . . . . .	164
9.4 Leistungsdichtespektren von Rauschsignalen gemäss ITU-R P.372 . . . . .	166
9.5 Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(\bar{B})$ in Abhängigkeit der Verschiebung $\tau$ . . . . .	168
9.6 Wahrscheinlichkeiten $P(B1), P(B2), P(B3)$ und $P(B4)$ in Abhängigkeit der Verschiebung $\tau$ . . . . .	170
10.1 Gauss'scher Kanal . . . . .	174
10.2 Übertragung eines Basisbandsignals über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal . . . . .	175
10.3 Übertragung von DSB-SC über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal . . . . .	176
10.4 Übertragung von gewöhnlicher AM über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal . . . . .	179
10.5 Verrausches AM-Signal in Basisbanddarstellung bei grossem Störabstand $\text{SNR}_i$ . . . . .	179
10.6 Verrausches AM-Signal in Basisbanddarstellung bei zu geringem Störabstand $\text{SNR}_i$ . . . . .	180
10.7 Übertragung von PM und FM über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal . . . . .	181
10.8 Verrausches PM- oder FM-Signal in Basisbanddarstellung bei hohem Störabstand $\text{SNR}_i$ . . . . .	182
10.9 Verrausches PM- oder FM-Signal in Basisbanddarstellung bei geringem Störabstand $\text{SNR}_i$ . . . . .	183
11.1 Übertragung von digitalen Signalen über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal . . . . .	188
11.2 Amplitudenverteilung in Abhängigkeit vom Symbolwert . . . . .	191
11.3 Amplitudenverteilung der gesamten Übertragung bei ungleich häufigen Mark und Space . . . . .	192
11.4 Amplitudenverteilung der gesamten Übertragung bei gleich häufigen Mark und Space . . . . .	194
12.1 Allgemeines Kanalmodell . . . . .	204
12.2 Informationsfluss über einen verrauschten Kanal . . . . .	205
12.3 Kanalmodell eines verlustlosen Kanals . . . . .	207
12.4 Kanalmodell eines deterministischen Kanals . . . . .	207
12.5 Kanalmodell eines rauschfreien Kanals . . . . .	208
12.6 Kanalmodell des binären symmetrischen Kanals . . . . .	209
12.7 Codebaum eines präfixfreien Codes . . . . .	211
13.1 Kanalmodell mit Quellencodierung und Kanalcodierung . . . . .	215
13.2 Implementierung der Multiplikation im GF(2) mit vorausgehendem LSB . . . . .	228
13.3 Implementierung der Multiplikation im GF(2) mit vorausgehendem MSB . . . . .	229
13.4 Implementierung der Division im GF(2) mit üblichem, vorausgehendem MSB . . . . .	230
13.5 Implementierung eines systematischen zyklischen (14,10)-Codes . . . . .	234
13.6 Implementierung der CRC-Berechnung für Polynom $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ . . . . .	235
G.1 Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ . . . . .	259
H.1 Q-Funktion $Q(x)$ . . . . .	261



# Tabellenverzeichnis

1.1	Meilensteine in der Geschichte der Nachrichtentechnik . . . . .	2
1.2	Kenndaten einer Datenübertragung mit einem Semaphorsystem . . . . .	3
1.3	Klassifizierung von Übertragungssystemen nach überbrückter Distanz . . . . .	4
1.4	Klassifizierung von Übertragungssystemen nach Kanalzugriffsverfahren . . . . .	4
1.5	Frequenzbereiche für drahtlose Nachrichtenübertragung . . . . .	6
2.1	Beispiele von Leistungs- und Effektivwert-Verhältnissen in dB . . . . .	17
2.2	Häufig verwendete Bezugsgrößen in dB . . . . .	18
3.1	Fourier-Reihe und Fourier-Transformation von Leistungssignalen . . . . .	28
5.1	Werte der Besselfunktionen erster Art und $n$ -ter Ordnung $J_n(\beta)$ . . . . .	66
7.1	4B5B-Codierung bei IEEE 802.3 100BASE-TX . . . . .	101
8.1	Ergebnisräume mit unterschiedlicher Anzahl Ergebnissen . . . . .	123
8.2	Beispiele von Ereignissen verschiedener Zufallsexperimente . . . . .	124
8.3	Beispiele von Elementareignissen verschiedener Zufallsexperimente . . . . .	124
8.4	Verknüpfungen von Ereignissen . . . . .	124
8.5	Beispielhafte Definitionen von Zufallsvariablen . . . . .	130
8.6	Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ . . . . .	146
8.7	Q-Funktion $Q(x)$ . . . . .	147
10.1	Rauschen und Störabstände in analogen Kommunikationssystemen . . . . .	186
12.1	Beispiele von binär codierten Symbolen . . . . .	209
12.2	Ablauf der Shannon-Fano Codierung . . . . .	213
12.3	Ablauf der Huffman Codierung . . . . .	214
13.1	Generatorpolynome von zyklischen Hamming-Codes . . . . .	232
13.2	Unteilbare Faktorpolynome von $x^n + 1$ im GF(2) . . . . .	232
13.3	CRC-Polynome von verschiedenen Anwendungen . . . . .	237

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Was ist Nachrichtentechnik?

Der Austausch von Information ist ein wichtiger Bestandteil des menschlichen Alltags, nicht erst, seitdem die technischen Möglichkeiten geschaffen wurden, dies zu jeder Zeit, mit jedermann und über beliebige Distanzen durchzuführen. Obwohl wir mit absoluter Selbstverständlichkeit auf verschiedenste Kommunikationsmittel zugreifen und sie beherrschen gelernt haben, darf nicht vergessen werden, dass jede Kommunikationsart ganz bestimmten Regeln und Rahmenbedingungen unterliegt, unter welchen sie überhaupt erfolgreich ablaufen kann. Selbst bei einer mündlichen Kommunikation sind solche Einschränkungen vorhanden: so sollte die Lautstärke des Sprechers dem Umgebungslärm angepasst sein, ein gewisses Protokoll eingehalten werden, bei welchem die Gesprächsteilnehmer wechselweise sprechen oder zuhören und nicht zuletzt ist es auch von Vorteil, wenn die Kommunikationspartner die gleiche Sprache sprechen.

Auch technische Systeme, welche Information untereinander austauschen, sind darauf angewiesen, dass Information tragende Signale möglichst ungestört empfangen werden können, dass sich die diversen Sender dank Protokollen oder durch eine fixe Zuteilung in den verschiedenen Kommunikationskanälen nicht gegenseitig in die Quere kommen und dass mit einer gemeinsam definierten Codierung die gesendete Information aus einem empfangenen Signal wieder herausgeschält werden kann.

Welche Möglichkeiten gibt es für technische Systeme, Information auszutauschen? Welche Rahmenbedingungen müssen für eine erfolgreiche Kommunikation erfüllt sein? Mit welchen technischen Massnahmen kann die Kommunikation optimiert werden? Wo sind die Grenzen von Kommunikationssystemen, z.B. in Bezug auf ihre Reichweite und der maximal übertragbaren Informationsmenge? Wie können Informationen auf ihren eigentlichen Gehalt reduziert werden? Die Module Nachrichtentechnik 1 und 2 werden viele dieser Fragen in allgemeiner Art beantworten. Grundlegende technische Verfahren der Übertragung von Nachrichten werden vorgestellt und es wird aufgezeigt, wo sie Verwendungen finden, ohne dass die konkrete technische Implementierung bis ins Detail ausgearbeitet wird. Eigenschaften von Kommunikationssystemen sowie grundsätzliche Grenzen einer erfolgreichen Kommunikation werden berechnet, wobei die Fouriertransformation sowie die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den am häufigsten beigezogenen mathematischen Methoden gehören werden.

### 1.2 Historischer Überblick

In der folgenden Tabelle sind ein paar wichtige Meilensteine der Nachrichtentechnik aufgeführt. Die getroffene Auswahl ist lückenhaft, doch soll sie helfen, sich einen prägnanten Überblick zu verschaffen, mit welchem Tempo und mit welchen Technologien sich die Nachrichtentechnik in den verschiedenen Epochen entwickelt hat. Viele Tabelleneinträge stammen aus [9] und [6]. Sie wurden mit Hilfe von [60] ergänzt und teilweise präzisiert.

30000	v. Chr.	Älteste bekannte Höhlenmalereien in der französischen Chauvet-Höhle.	[28]
3500	v. Chr.	Keilschrift der Sumerer.	[52]
180	v. Chr.	Griechischer Geschichtsschreiber Polybios: Symbolübertragung mit Fackelzeichen.	[49]
50	v. Chr.	Julius Caesar verschlüsselt Nachrichten durch Substitution (Caesar Verschlüsselung).	[14]
1439		Der Mainzer Johannes Gutenberg erfindet in Strassburg den Buchdruck.	[38]
1725		Basile Bouchon erfindet die Lochkarte zur Steuerung von Webmaschinen.	[12]
1791		Claude Chappe erfindet den Semaphor-Telegraphen.	[17]
1826		Joseph Nicéphore Niépce erfindet die Heliografie (Vorläufer der Fotografie)	[44]
1827		Georg Simon Ohm aus Erlangen formuliert in Berlin: $U = R \cdot I$ .	[26]
1833		Carl F. Gauss und Ernst H. Weber bauen den elektromagnetischen Telegraphen.	[53]
1858		Das erste transatlantische Kabel wird verlegt und versagt nach 26 Tagen.	[56]
1864		James Clerk Maxwell sagt elektromagnetische Wellen voraus.	[47]
1866		Erstes funktionierendes Transatlantikkabel.	[56]
1876		Alexander Graham Bell entwickelt und patentiert das Telefon.	[11]
1879		Thomas Alva Edison erfindet den Phonographen.	[48]
1884		Paul Nipkow patentiert Nipkow-Scheibe (Prinzip der Bewegtbild-Übertragung).	[45]
1886		Heinrich Hertz bestätigt experimentell Maxwell's Theorie.	[32]
1894		Sir Oliver Joseph Lodge demonstriert drahtlose Telegrafie.	[46]
1897		Karl Ferdinand Braun erfindet die Kathodenstrahlröhre.	[39]
1898		Valdemar Poulsen erfindet das Telegraphon (Tonaufzeichnung auf Magnetdraht).	[58]
1901		Guglielmo Marconi überträgt das erste drahtlose Signal über den Atlantik.	[29]
1904		Christian Hülsmeier entwickelt das Telemobiloskop, Vorläufer des RADARs.	[16]
1906		Der Kanadier Reginald Fessenden übermittelt Sprache und Musik mit Radiowellen.	[51]
1923		Charles Francis Jenkins demonstriert in Washington das Fernsehen.	[15]
1924		Harry Nyquist schreibt Publikation über maximale Übertragungsrate in der Telegraphie.	[31]
1928		Fritz Pfleumer erfindet in Dresden das Magnetband.	[24]
1947		John Bardeen, Walter Brattain und William Shockley entwickeln den Transistor.	[57]
1948		Claude Shannon schreibt Publikation zur Informationstheorie.	[18]
1950		Richard Hamming publiziert Theorie zu Fehler erkennenden und korrigierenden Codes.	[30]
1956		IBM präsentiert Festplatte IBM 350 (4.4 MByte, 24 Zoll, 1000 kg)	[33]
1958		Jack Kilby baut bei Texas Instruments die erste integrierte Schaltung.	[35]
1960		Theodore Maiman demonstriert in Malibu ersten Laser.	[55]
1962		Der erste aktive Satellit (Telstar 1) übermittelt Fernsehsignale.	[54]
1966		Manfred Börner von Telefunken überträgt Daten auf Lichtwellenleitern.	[43]
1970		Dov Frohmann erfindet bei Intel das elektrisch schreibbare / UV-löschbare EPROM.	[20]
1971		Intel präsentiert den ersten kommerziellen Mikroprozessor, den Intel 4004.	[36]
1975		Robert Metcalfe et. al. erhalten bei Xerox das Patent für den ersten Ethernet-Standard.	[22]
1977		Start der Raumsonde Voyager 1.	[59]
1978		Inbetriebnahme des ersten GPS-Satelliten.	[27]
1980		Fujio Masuoka erfindet bei Toshiba den Flash Speicher.	[25]
1982		Nach diversen Vorläufern wird die CD (compact disc) von Philips und Sony vermarktet.	[19]
1991		Inbetriebnahme des ersten digitalen Mobiltelefonnetzes (nach GSM-Standard) in Finnland.	[50]
1991		Tim Berners-Lee startet am CERN den ersten Webserver.	[61]
1997		Erster offizieller WLAN Standard von IEEE (IEEE 802.11).	[34]
2000		Durch Ausschalten der Selective Availability (SA) wird GPS für alle „metergenau“.	[27]
2007		Apples iPhone verhilft dem Smartphone zum Marktdurchbruch.	[37]
2010		Voyager 1 kommuniziert noch immer, aus einer Distanz von 16.9 Mrd. km (15.6 Licht-Std.).	[59]
2025		Voraussichtlich letzte Kommunikationssequenzen mit Voyager 1.	[59]
40272		Voyager 1 tritt in Sonnensystem AC+79 3888 des Sternsystems Camelopardalis ein (1.64 LJ).	[59]

**Tabelle 1.1:** Meilensteine in der Geschichte der Nachrichtentechnik

Bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts konnte die Kommunikationstechnik noch nicht auf Errungenschaften der Elektrotechnik zurückgreifen. Neben akustischen Signalzeichen – zum Beispiel zur Alarmierung – fand die Kommunikation vor allem auf optischem Wege statt. Als permanente Informationsträger dienten hauptsächlich Schriftstücke. Dank der Erfindung des Buchdrucks durch Johannes Gutenberg im 15. Jahrhundert wurden diese zu einem eigentlichen Massenkommunikationsmittel. Generell kann die Schrift als erste digitale Kommunikation interpretiert werden, bei welcher Informationen auf eine endliche Anzahl Zeichen abgebildet wird.

Ein etwas ausgefalleneres optisches Kommunikationsmittel stellten die Semaphore dar, entwickelt vom Franzosen Claude Chappe. Dabei handelte es sich um ein bewegbares Balkensystem, welches auf hohen Gebäuden oder speziell errichteten Türmen installiert wurde. Mit der Anordnung der Balken konnten Zeichen dargestellt werden, welche vom Personal des sich in Sichtdistanz (bzw. „Fernrohrdistanz“) befindenden benachbarten Semaphors nachgebildet und so weitergeleitet wurden.

In Europa wurden von den jeweiligen Machthabern in Frankreich, Deutschland, England, Russland und Schweden verschiedenartige Semaphorsysteme betrieben. Stellvertretend sollen ein paar Eckdaten zur Verbindung Paris – Lille einen Eindruck über die Leistungsfähigkeit solcher Systeme vermitteln.

<b>Semaphorsystem Paris – Lille</b>	
Gesamtdistanz:	220 km
Distanz zwischen 2 Semaphoren:	2..20 km
Übermittlungszeit eines Zeichens (Latenzzeit):	ca. 10 Minuten
Datendurchsatz	ca. 1 Symbol pro Minute

**Tabelle 1.2:** Kenndaten einer Datenübertragung mit einem Semaphorsystem

Viele für die Nachrichtentechnik relevanten Erfindungen im Gebiet der Elektrotechnik wurden schon im 19. Jahrhundert realisiert. Diese Pionierleistungen eröffneten für Militär, staatliche Verwaltung oder auch für den Handel solch revolutionär neue Möglichkeiten, dass sich der neue Industriezweig der Kommunikationstechnik sehr schnell entwickeln konnte. Noch vor Ende des 19. Jahrhunderts wurden in vielen Ländern Telegrafen- und auch Telefonnetze aufgebaut. So gab es z.B. zu jener Jahrhundertwende in Deutschland knapp 300'000 Telephonanschlüsse (bei ca. 50 Mio Einwohnern) [8].

Die Entwicklung hin zu Massenkommunikationsmitteln setzte sich mit den Rundfunkempfängern in der ersten Hälfte und dem Fernsehen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts fort.

Mit dem Siegeszug der Mikroelektronik und ihrer Möglichkeit, elektronische Schaltungen und komplexe mathematische Algorithmen sehr kostengünstig in Konsumergeräten zu implementieren, begannen sich die Computertechnik und die Nachrichtentechnik immer mehr anzunähern. Einerseits wären die heutigen leistungsfähigen Kommunikationssysteme ohne digitale Signalverarbeitung nicht realisierbar. Andererseits hat sich aber auch seit ca. 1995 die Datenkommunikation durch die Entwicklung des World Wide Web im geschäftlichen und privaten Alltag etabliert und das Datenaufkommen von Sprachkommunikation der klassischen Telefonie seit etwa dem Jahre 2000 deutlich in den Schatten gestellt.

## 1.3 Klassifizierungen von Kommunikationssystemen

Kommunikationssysteme können nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden. Nachfolgend sind ein paar häufig verwendete Einteilungen aufgeführt.

### 1.3.1 Klassifizierung nach der Übertragungsdistanz

Eine häufig verwendete Klassifizierung betrifft die (geographische) Ausdehnung des Kommunikationskanals. Sie wirkt sich auf Signallaufzeiten, benötigte Übertragungsleistung pro Bit, eingesetzte Übertragungstechnologien, Topologie des Netzwerks, Konzepte beim Verbindungsauflauf aber auch, wer für die Administration des Netzes zuständig ist. Insgesamt sind die Definitionen (z.B. gemäss [4] oder [7]) eher schwammig gehalten und eine Einordnung eines Kommunikationssystems in eine bestimmte Klasse manchmal auch nicht eindeutig. Die Distanzangaben und die in der Tabelle aufgeführten Beispiele von Kommunikationssystemen dienen somit nur als erste Orientierungshilfe.

Einordnung nach Übertragungsdistanz			
Kürzel	Beschreibung	typische Distanz	Anwendungsbeispiele
	Deep-Space Communications		Antennenarrays (34 m, 70 m Parabolantennen) zur Abwicklung von Weltraummissionen
WAN	Wide Area Network	10 – ... km	Glasfaserkommunikation im Telecom-Backbone Richtstrahlverbindungen zwischen GSM-Basisstationen Satellitenkommunikation
MAN	Metropolitan Area Network	0.1 – 100 km	Glasfaser- / Richtstrahlverbindungen Kabelfernsehnetz xDSL GSM-Zelle
LAN	Local Area Network	10 – 1000 m	Ethernet Wireless LAN RS-485 CAN
PAN	Personal Area Network	1 – 10 m	USB RS-232 DVI/HDMI IrDA Bluetooth Ultrawideband ZigBee RFID
	Chip to Chip Communications	0.01 – 1 m	PCIe I2C SPI CMOS-Logik I/O

**Tabelle 1.3:** Klassifizierung von Übertragungssystemen nach überbrückter Distanz

### 1.3.2 Klassifizierung nach Zugriffsverfahren

Teilen sich mehrere Teilnehmer einen Kanal, muss der Zugriff darauf so erfolgen, dass sich die Teilnehmer nicht gegenseitig stören. Mehrfacher Zugriff (Multiple Access oder Multiplexing) kann auf verschiedene Arten realisiert werden:

Einordnung nach Zugriffsverfahren auf den Kanal		
Kürzel	Englischer Begriff	Deutscher Begriff
TDMA	Time Division Multiple Access	Zeitmultiplexverfahren
FDMA	Frequency Division Multiple Access	Frequenzmultiplexverfahren
SDMA	Space Division Multiple Access	Raummultiplexverfahren
CDMA	Code Division Multiple Access	Codemultiplexverfahren

**Tabelle 1.4:** Klassifizierung von Übertragungssystemen nach Kanalzugriffsverfahren

#### Zeitmultiplex (TDMA)

Beim Zeitmultiplexverfahren hat jeder Kommunikationsteilnehmer einen meist nur sehr kurz andauernden Zugriff auf den Kommunikationskanal. Das Zugriffsschema kann wie folgt organisiert werden:

- **Statischer Zeitmultiplex:** reihum kriegt jeder Teilnehmer einen oder mehrere Zeitabschnitte (time slots) zugeteilt, in welchem er den Kanal belegen kann. Ganz typische Beispiele sind hierzu die klassische Sprachkommunikation wie ISDN, DECT oder GSM.
- **Dynamischer Zeitmultiplex:** jeder Teilnehmer kann prinzipiell zu einem beliebigen Zeitpunkt auf den Kanal zugreifen. Die dadurch entstehenden Kollisionen oder momentanen Überlastungen müssen durch ein Protokoll oder eine Arbitrierung gelöst werden. Neben dem Ur-Funkprotokoll für Datenkommunikation ALOHA und dem Ur-Ethernet mit CSMA/CD sind der CAN-Bus oder der I2C-Bus im Multi-Master Betrieb weitere Beispiele für dieses dynamische Zeitmultiplexing.

### Frequenzmultiplex (FDMA)

Frequenzmultiplexing ist für Funkdienste, welche über die (manchmal auch als Äther bezeichnete) Luftschnittstelle kommunizieren, das wichtigste Verfahren, um die verschiedenen Teilnehmer separieren zu können. Aber auch bei drahtgebundener Kommunikation ist Frequenzmultiplexing von grosser Bedeutung. Wiederum unterscheiden wir zwischen:

- **Statischer Frequenzmultiplex:** die Zuweisung des Frequenzbandes, in welchem kommuniziert werden kann, ist festgelegt und ändert sich nicht. So reserviert das BAKOM (koordiniert mit europäischen und weltweiten Gremien) für jeden Funkdienst einen speziellen Bereich, z.B. UKW-Radio im Bereich von 87.5 bis 108 MHz, GSM-900/1800 bei rund 900 bzw. 1800 MHz, UMTS auf 2100 MHz oder das quasi frei nutzbare ISM-Band auf 2400 MHz. Innerhalb des Bandes für den Funkdienst können einzelnen Sendern ebenfalls eine feste Frequenz zugeordnet sein, z.B. im Raum Zürich 102.8 MHz für Radio 24.
- **Dynamischer Frequenzmultiplex:** Etwas weniger häufig kommt dynamisches Frequenzmultiplexing vor. Die Sendefrequenz ändert sich dabei nach einem vordefinierten Verlauf. Dieses Frequenzsprungverfahren (frequency hopping) wird beispielsweise bei Bluetooth und teilweise auch in GSM-Netzen angewendet.

### Raummultiplex (SDMA)

Raummultiplex ist ein sehr naheliegendes Verfahren. Jeder Sender ist nur in einem örtlich begrenzten Bereich empfangbar. Eigentlich sind ja auch Vorlesungen an der HSR im Raummultiplex organisiert, durch die akustisch getrennten Hörsäle. Auch in der technischen Kommunikation trifft man Raummultiplexing immer wieder an, sei es indem Frequenzen ausserhalb des Sendegebiets wiederverwendet werden (Radio 24 in Zürich und Radio Regenbogen im Raum Mannheim, beide auf 102.8 MHz), ein Kommunikationsnetz wie GSM aus einer Vielzahl von zum Teil sehr kleinen Zellen aufgebaut wird oder sei es, dass Daten über mehrere Draht- oder Leiterplattenverbindungen parallel übertragen werden.

### Codemultiplex (CDMA)

Codemultiplex ist ein Verfahren, bei welchem pro übertragenes Bit eine relativ lange Sequenz von Einern und Nullern gesendet wird, welche zwar zufällig aussieht, aber vom Empfänger eindeutig dem Sender zugeordnet werden kann. Mit speziellen Filtern, sogenannten Korrelatoren, kann der Empfänger dieses Signal auch dann detektieren, wenn es von seiner Leistung her in der Vielzahl von anderen Nutz-, Stör- und Rauschsignalen untergeht. Gute Beispiele für CDMA sind UMTS (3G-Mobilfunk) oder die Navigationssignale von GPS und Galileo.

#### 1.3.3 Klassifizierung nach Freqenzbereich

Eine andere Klassifizierung – speziell bei drahtlosen Kommunikationssystemen – orientiert sich danach, in welchem Frequenz- bzw. Wellenlängenbereich die Kommunikationssignale übertragen werden.

Einordnung nach Frequenzbereich					
Band Nr.	Kürzel	Begriff	Frequenzbereich	Wellenlänge	Beispiele
-1	ELF	Extremly Low Frequency	0.03 - 0.3 Hz	1E6 - 1E7 km	
0	ELF	Extremly Low Frequency	0.3 - 3 Hz	1E5 - 1E6 km	
1	ELF	Extremly Low Frequency	3 - 30 Hz	1E4 - 1E5 km	submarine (deeply sub-merged)
2	SLF	Super Low Frequency	30 - 300 Hz	1E3 - 1E4 km	submarine
3	ULF	Ultra Low Frequency	300 - 3000 Hz	100 - 1000 km	mines
4	VLF	Very Low Frequency	3 - 30 kHz	10 - 100 km	submarine (near-surface)
5	LF	Low Frequency	30 - 300 kHz	1 - 10 km	aircraft beacons
6	MF	Medium Frequency	300 - 3000 kHz	100 - 1000 m	AM broadcasting
7	HF	High Frequency	3 - 30 MHz	10 - 100 m	amateur radio
8	VHF	Very High Frequency	30 - 300 MHz	1 - 10 m	FM broadcasting, TV, DVB-T
9	UHF	Ultra High Frequency	300 - 3000 MHz	10 - 100 cm	TV, GSM, GPS, WLAN
10	SHF	Super High Frequency	3 - 30 GHz	1 - 10 cm	satellite TV, WLAN, WiMAX, RADAR
11	EHF	Extremly High Frequency	30 - 300 GHz	1 - 10 mm	RADAR, millimeter wave scanner
12		Terahertz waves	300 - 3000 GHz	100 - 1000 um	submillimeter spectroscopy
13		Far infrared	3 - 30 THz	10 - 100 um	
14		Infrared (IR)	30 - 300 THz	1 - 10 um	fiber optics
15		near IR, visible light, UV	300 - 3000 THz	100 - 1000 nm	fiber optics, IrDA

**Tabelle 1.5:** Frequenzbereiche für drahtlose Nachrichtenübertragung

# Kapitel 2

## Signale

### 2.1 Was sind Signale?

Ziel der Nachrichtentechnik ist es, *Information* von einem Sender zu einem Empfänger zu übertragen oder sie für einen späteren Abruf temporär oder permanent zu speichern. Für den Transfer von *Information* werden als Hilfsmittel *Signale* verwendet, bei welchen es sich um informationstragende zeitliche Verläufe von irgendwelchen physikalischen oder dimensionslosen Größen handelt.

Beispiele dazu sind der Verlauf des Schalldrucks bei einem Gespräch, die variable Intensität des Lichts bei einer fiberoptischen Übertragung, die Zahlenfolge von einem digitalisierten Sensorsignal oder der Amplitudenverlauf von Spannung und Strom.

Da elektrische Signale im Vergleich zu anderen physikalischen Größen sehr einfach und schnell auf kleinstem Raum verarbeitet werden können, hat sich die Elektronik für die Verarbeitung und die Aufbereitung von Signalen weitgehend durchgesetzt.

Nachrichtentechnik ist aber eigentlich nicht nur eine elektrotechnische Domäne. Gerade bei der Speicherung von Information gibt es viele alternative Datenträger wie z.B. der historische Lochstreifen, Strich- und QR-Code oder eine CD, welche auf nicht elektrischen Größen basieren. Auch wird man kaum Benutzerschnittstellen als reine spannungs- und stromführende Geräte vorfinden, wenn dem Entwickler Benutzerfreundlichkeit nur ein bisschen am Herzen liegt.

Zudem können prinzipiell alle theoretischen Aspekte der Nachrichtentechnik unabhängig davon verwendet werden, auf welche physikalischen Größen sie sich schlussendlich beziehen. Aber dennoch: angesichts der Dominanz von elektrischen Kommunikationssystemen wäre es durchaus legitim, sich während eines Elektrotechnikstudiums vorwiegend auf elektrische Signale zu beschränken.

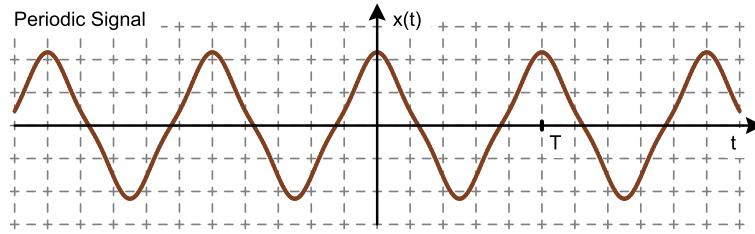
### 2.2 Klassifizierungen von Signalen

Signale können nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden. Nachfolgend sind ein paar häufig verwendete Einteilungen aufgeführt.

#### 2.2.1 Periodische oder aperiodische Signale

Von einem **periodischen Signal** wird gesprochen, wenn ein Signal nach jedem ganzzahligen Vielfachen  $n$  der Periodendauer  $T$  mit dem Verlauf des ursprünglichen Zeitpunkts identisch ist, d.h. es gilt:

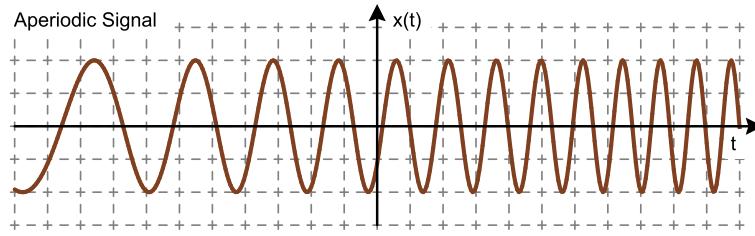
$$x(t + n \cdot T) = x(t) \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$



**Abbildung 2.1:** Periodisches Signal

Periodische Signale bestehen aus einem konstanten Gleichanteil sowie einem oder mehreren harmonischen Anteilen der Frequenz  $f_n = \frac{n}{T}, n \in \mathbb{N}_+$ . Die erste Harmonische ( $n = 1$ ) wird auch als Grundharmonische bezeichnet, die zweite Harmonische ( $n = 2$ ) als erste Oberwelle, die dritte Harmonische ( $n = 3$ ) als zweite Oberwelle, etc. Weder der konstante DC-Anteil noch die Grundharmonische muss in einem periodischen Signal mit einem Amplitudenkoeffizienten  $a_n > 0$  vorhanden sein. Ebenso können Oberwellen beliebig vorhanden sein oder fehlen.

Von einem **aperiodischen Signal** wird gesprochen, wenn sich keine Zeit  $T$  mit  $|T| < \infty$  finden lässt, nach welcher sich der Verlauf eines Signals  $x(t)$  periodisch wiederholt.



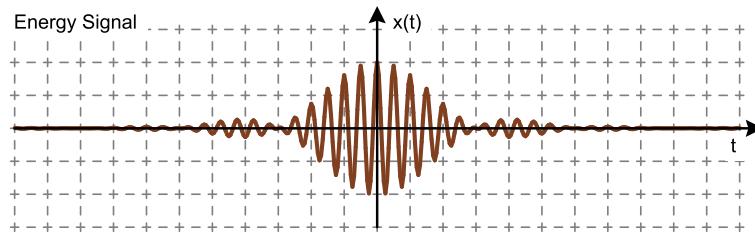
**Abbildung 2.2:** Aperiodisches Signal

Ein Beispiel eines aperiodischen Signals ist der dargestellte Sweep. Typische Vertreter von aperiodischen Signalen sind aber vor allem die stochastischen Signale.

### 2.2.2 Energie- oder Leistungssignale

Von einem **Energiesignal** wird gesprochen, wenn ein Signal eine *endliche* Signalenergie aufweist, d.h. es gilt:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.2)$$



**Abbildung 2.3:** Energiesignal

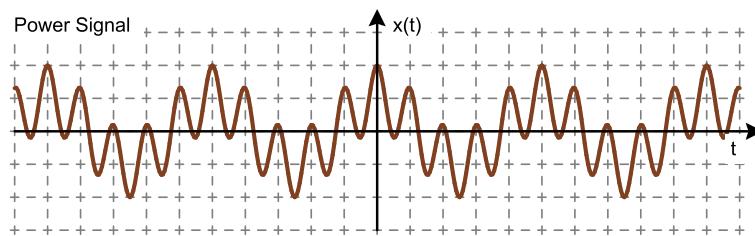
Auf die genaue Definition der Signalenergie wird weiter unten noch eingegangen. Ein typisches Energiesignal ist ein einzelner Puls der an- und wieder abschwellt. Typische Energiesignale haben einen Startpunkt,

vor welchem sie nicht vorhanden sind und einen Endpunkt, bei welchem sie vollständig abgeklungen sind. Ein atypischer Vertreter eines Energiesignals wäre z.B. ein Gausspuls, da dieser theoretisch über unendlich lange Zeit vorhanden ist und nie vollständig abklingt, wobei er aber aus praktischer Sicht sehr schnell gegen Null konvergiert.

Von einem **Leistungssignal** wird gesprochen, wenn ein Signal über unendlich lange Zeit betrachtet auch eine unendlich grosse Signalenergie aufweist, die Energie pro Zeit (d.h. die Leistung) aber einen endlichen Wert hat:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty \quad (2.3)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.4)$$



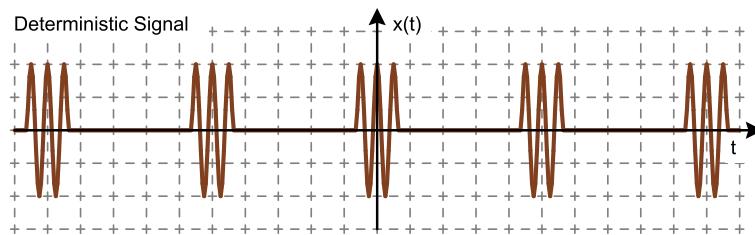
**Abbildung 2.4:** Leistungssignal

Ein typisches Leistungssignal ist ein periodisches Signal oder ein aperiodisches Signal, bei welchem die Amplitude weder dauerhaft auf Null abklingt noch dorthin konvergiert. Bei Signalen mit  $P_x = \infty$  sprechen wir von keinem eigentlichen Leistungssignal mehr. Die Leistung eines Signals wird aber nur dann unendlich gross, wenn zeitweise auch die Amplitudenwerte des Signals betragsmäßig unendlich gross werden. Solche Signale haben aber keine praktische Bedeutung.

### 2.2.3 Deterministische oder stochastische Signale

Von einem **deterministischen Signal** wird gesprochen, wenn es einem vorbestimmten zeitlichen Verlauf folgt. Dieser kann als deterministische Funktion  $f(t)$  schon ausgedrückt werden, bevor das Signal  $x(t)$  zeitlich abläuft:

$$x(t) = f(t) \quad (2.5)$$

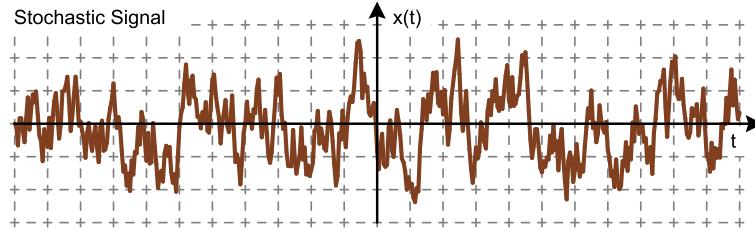


**Abbildung 2.5:** Deterministisches Signal

Typische deterministische Signale wären beispielsweise Hilfssignale wie ein periodisches Trägersignal oder ein periodisches Synchronisationssignal. Deterministische Signale sind aber nicht nur auf periodische Signale

beschränkt, sondern können auch einmalige Vorgänge sein.

Von einem **stochastischen Signal** wird gesprochen, wenn es keinem vorbestimmten zeitlichen Verlauf folgt, sondern zu jedem oder zu ausgewählten Zeitpunkten einen zufälligen Verlauf aufweist.



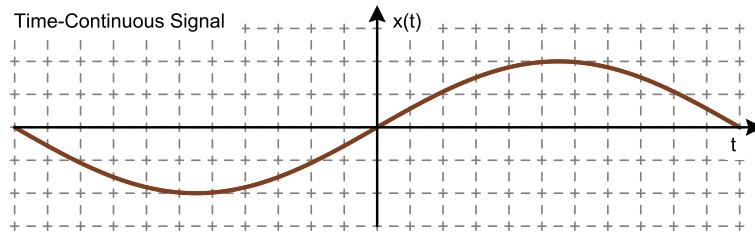
**Abbildung 2.6:** Stochastisches Signal

Ein typisches stochastisches Signal ist ein Rauschsignal. Aber auch sämtliche Nachrichtensignale sollten Zufallssignale sein, da ein Informationstransfer ja gerade auf der Zufälligkeit von Verläufen basiert. Denn, wäre dem Empfänger der Verlauf des Signals schon bekannt, müsste die Information, welche mit dem Signal transferiert wird, ja gar nicht mehr erst übertragen werden.

#### 2.2.4 Zeitkontinuierliche oder zeitdiskrete Signale

Von einem **zeitkontinuierlichen Signal** wird gesprochen, wenn sein zeitlicher Verlauf für jeden Zeitpunkt definiert ist:

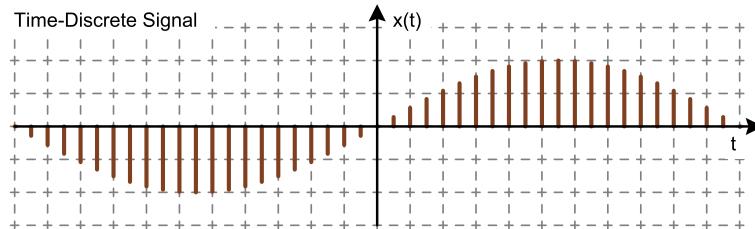
$x(t)$  ist definiert für alle  $t$



**Abbildung 2.7:** Zeitkontinuierliches Signal

Von einem **zeitdiskreten Signal** wird gesprochen, wenn sein zeitlicher Verlauf nur für ausgewählte Zeitpunkte definiert ist:

$x(t)$  ist nur definiert an den Stellen  $t_i$



**Abbildung 2.8:** Zeitdiskretes Signal

Nicht-definiert zu den übrigen Zeitpunkten heisst nicht etwa, dass das Signal an diesen Stellen  $x(t) = 0$  ist. Nicht definiert heisst meistens auch, dass sein Amplitudenwert an diesen Stelle nicht von Interesse ist, weil im Normalfall die Rekonstruktion von einem zeitdiskreten zu einem zeitkontinuierlichen Signal mit Hilfe einer Bildungsvorschrift und ohne solch zusätzliche Zwischenwerte auskommt.

### 2.2.5 Amplitudenkontinuierliche oder quantisierte Signale

Von einem **amplitudenkontinuierlichen Signal** wird gesprochen, wenn sein Verlauf Amplitudenwerte mit beliebig feiner Auflösung annehmen kann:

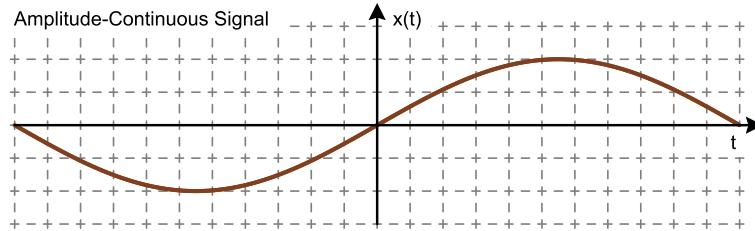


Abbildung 2.9: Amplitudenkontinuierliches Signal

Von einem **amplitudendiskreten Signal** oder einem **quantisierten Signal** wird gesprochen, wenn sein Verlauf nur ausgesuchte Amplitudenwerte  $x_i$  annehmen kann:

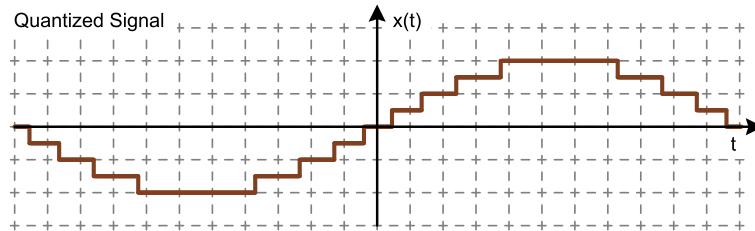


Abbildung 2.10: Quantisiertes Signal

### 2.2.6 Analoge oder digitale Signale

Von einem **analogen Signal** wird gesprochen, wenn es sowohl zeitkontinuierlich wie auch amplitudenkontinuierlich ist:

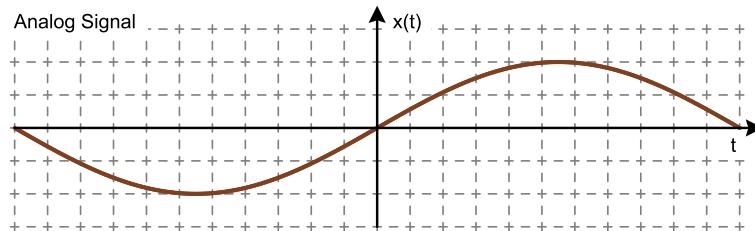


Abbildung 2.11: Analoges Signal

Von einem **digitalen Signal** wird gesprochen, wenn es sowohl zeitdiskret wie auch amplitudendiskret (quantisiert) ist:

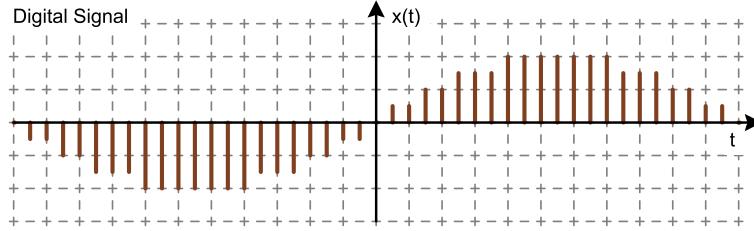


Abbildung 2.12: Digitales Signal

### 2.2.7 Reell- oder komplexwertige Signale

Von einem **reellwertigen Signal** wird gesprochen, wenn es über seinen ganzen Zeitbereich nur reellwertige Amplitudenwerte annimmt. Ein **komplexwertiges Signal** weist hingegen (evtl. nur zeitweise) auch imaginäre Anteile auf.

Die mathematische Darstellung eines Signals als komplexwertiges Signal macht nur dann Sinn, wenn zwei zueinander unabhängige orthogonale Größen zur Bildung des Signalverlaufs beitragen. Dies ist bei der Generierung eines einfachen Spannungs- oder Stromverlaufs normalerweise nicht gegeben, womit dann auch keine komplexwertigen Darstellungen zur Anwendung gelangen.

Allerdings werden wir sehen, dass bei einer Signalübertragung mit Hilfe von Trägersignalen Sinus und Cosinus der gleichen Frequenz miteinander kombiniert werden können. Die zur Modulation von Sinus und Cosinus verwendeten Nachrichtensignale können zudem ohne gegenseitige Störung aus den beiden kombinierten Trägersignalen zurückgewonnen werden.

Somit können also bei einer Übertragung im Frequenzband des Trägersignals zwei solche unabhängigen Größen vorhanden sein. Entsprechend bietet sich an, die beiden modulierenden Signale als komplexwertiges Signal zusammenzufassen, was nicht nur eine Spielerei ist, sondern die mathematische Verarbeitung vereinfachen kann. Genaue Begriffsdefinitionen und mathematisch genauere Erklärungen folgen bei der Behandlung der QAM-Modulation.

## 2.3 Sprung- und Impulsfunktion

Sprung- und Impulsfunktion sind wichtige idealisierte Signale, die im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation oder als Eingangssignale von LTI-Systemen die mathematische Behandlung von Signalen und Systemen vereinfachen.

### 2.3.1 Sprungfunktion

Bei einer normierten Sprungfunktion  $u(t)$  (auch Schrittfunction oder Heaviside-Funktion; Englisch: unit step oder Heaviside step function) handelt es sich um einen idealisierten Einschaltvorgang. Bis zum Zeitpunkt  $t = 0$  besitzt die Schrittfunction die Amplitude  $u(t) = 0$ . Ab dem Zeitpunkt  $t \geq 0$  springt die Amplitude auf den Wert  $u(t) = 1$ .

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Dirac'sche Impulsfunktion

Im Gegensatz zur Sprungfunktion  $u(t)$  ist die Dirac'sche Impulsfunktion  $\delta(t)$  ein Signal, welches zwar eine sehr einfache Schreibweise für mathematisch idealisierte Signale bietet, aber in der praktischen Anwendung – selbst als angenäherte Funktion – eigentlich bedeutungslos ist. Bei der idealisierten Impulsfunktion  $\delta(t)$  (Deltafunktion, Diracimpuls, Englisch: Dirac delta function) handelt es sich um einen Impuls von verschwindend kurzer Dauer aber nicht verschwindender normierter „Impulskraft“. Ausserhalb des Zeitpunkts  $t = 0$  gilt für

die Amplitude  $\delta(t) = 0$ , und besitzt zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Amplitude, welche gegen unendlich strebt.

Da einerseits die Amplitude zum Zeitpunkt  $t = 0$  der einzige relevante Anteil an die Energie der Impulsfunktion liefert und andererseits ein Wert „unendlich“ nicht verrechnet werden kann, wird die Deltafunktion nicht durch ihre Form (d.h. ihren zeitlichen Verlauf) definiert, sondern durch folgende Eigenschaft in Verbindung mit einer beliebigen Funktion  $f(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.7)$$

Die Deltafunktion zum Zeitpunkt  $t_0$  schält durch die Multiplikation mit  $f(t)$  und anschliessender Integration somit gerade den Funktionswert von  $f(t)$  an der Stelle  $t_0$  heraus. Alle Funktionswerte von  $f(t)$  zu anderen Zeitpunkten werden gleichzeitig ausgetilgt.

Da wir den zeitlichen Verlauf von  $\delta(t)$  mathematisch nicht beschreiben können, handelt es sich beim Diracimpuls eigentlich gar nicht um eine Funktion, sondern um eine sogenannte Distribution. Wie die Deltafunktion verrechnet werden darf, ist keine einfache Angelegenheit. In diesem Modul beschränken wir das Rechnen mit der Deltafunktion aber auf die obenstehende Definitionsformel der Impulsfunktion.

Mit dieser Definition und den zwei Vereinfachungen  $f(t) = 1$  und  $t_0 = 0$  ergibt sich sofort folgende zusätzliche Eigenschaft von  $\delta(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.8)$$

Auch in Bezug auf die Einheit zeigt sich, dass die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ein theoretisches Gebilde ist und keine direkte praktische Bedeutung hat. Aufgrund ihrer Definition gemäss Formel (2.7) wird klar, dass durch die Integration die Einheit des Funktionsarguments (im Falle von  $\delta(t)$  also die Zeit  $t$  mit Einheit [s]) dem Resultat beigegeben wird. Damit das Resultat  $f(t_0)$  wieder die Einheit von  $f(t)$  aufweist, muss somit die Dirac-Impulsfunktion  $\delta(t)$  eine Einheit aufweisen, welche gerade dem Kehrwert des Arguments  $t$  aufweisen, d.h.  $[s^{-1}]$ .

## 2.4 Kenngrößen von Signalen

Um wichtige Eigenschaften eines Signals mit wenigen aussagekräftigen Parametern darzustellen, eignen sich verschiedene Kenngrößen. Im nachfolgenden periodischen Signal sind die gebräuchlichsten Werte dargestellt. Die Kenngrößen beschränken sich aber selbstverständlich nicht nur auf periodische Signale.

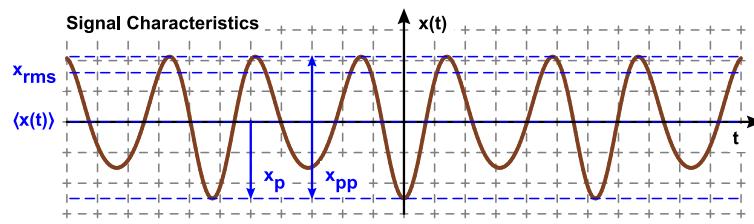


Abbildung 2.13: Kenngrößen von Signalen

### 2.4.1 Amplitudenfunktion

Mit der zeitvarianten Amplitudenfunktion  $x(t)$  ist der Signalverlauf an sich gemeint. In dieser Darstellung bezeichnet er einen einzigen deterministischen Verlauf, welcher vorbestimmt ist oder ein einziges Signal,

welches bei einer Messung aufgezeichnet wurde. Diese kleine Präzisierung soll als Abgrenzung zu Zufallsprozessen dienen, bei welchen mehrere Signalverläufe mit unterschiedlichen Auftretenswahrscheinlichkeiten zur Auswahl stehen.

Signale  $x(t)$  können sich auf eine physikalische Grösse beziehen oder reine Zahlenwerte repräsentieren, welche zum Beispiel von einem digitalen Signalprozessor oder einem FPGA verarbeitet werden.

### 2.4.2 Peak-to-peak Amplitude

Der Bereich zwischen maximaler und minimaler Signalamplitude wird als Spitzen-Spitzen-Wert oder als Spitzen-Tal-Wert bezeichnet:

$$x_{\text{pp}} = \max(x(t)) - \min(x(t)) \quad (2.9)$$

### 2.4.3 Peak-Amplitude

Der Scheitelwert  $x_p$  wird auf zum Teil widersprüchliche Art und Weise definiert. In der Nachrichtentechnik soll er meist die maximale vorzeichenbereinigte Amplitude wiedergeben, d.h. als Spitzenwert wird der höchste Betrag der Amplitude betrachtet und das Vorzeichen der Phasenlage zugeschrieben. Sollte das Vorzeichen bzw. die Unterscheidung zwischen Scheitel- und Talwert eine Rolle spielen, bedarf es sinnvollerweise weiterer Erläuterungen, um Missverständnissen vorzubeugen.

$$x_p = \max(|x(t)|) \quad (2.10)$$

### 2.4.4 Linearer zeitlicher Mittelwert

Der lineare zeitliche Mittelwert oder DC-Wert ist in der Nachrichtentechnik von eher geringem Nutzen. Oft sind Nachrichtensignale DC-frei. Dies vor allem auch, weil für die Übertragung von Information der (per Definition statische) DC-Wert unbrauchbar ist.

DC-Anteile werden aber einerseits oft als Hilfssignale zum Beispiel aus schaltungstechnischen Gründen benötigt, oder müssen in anderen Fällen als störende Komponente erkannt und eliminiert werden.

Der zeitliche Mittelwert wird oft mit einem Überstrich über dem Formelausdruck oder mit spitzen Klammern (brackets) symbolisiert:

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (2.11)$$

### 2.4.5 Momentanleistung, Signalenergie und mittlere Signalleistung

Neben den Kennwerten, die sich auf den zeitlichen Amplitudenverlauf von  $x(t)$  beziehen, ist insbesondere die Signalenergie  $E_x$  oder Signalleistung  $P_x$  von grosser Bedeutung. Beide beziehen sich auf die momentane Signalleistung  $P_x(t)$ :

$$P_x(t) = |x(t)|^2 \quad (2.12)$$

Die Betragszeichen sind dabei nur relevant, wenn es sich bei  $x(t)$  um einen komplexwertigen Signalverlauf handelt, da die momentane Signalleistung immer eine reellwertige, positive Grösse darstellen soll.

Diese Definition scheint nun vielleicht im Widerspruch zum Gebiet der Energietechnik zu sein, in welchem mit Schein-, Wirk- und Blindleistung auch negative oder komplexwertige Leistungsanteile bekannt sind. Diese drei physikalischen Leistungen werden aber nicht aus einem einzigen Signalverlauf  $u(t)$  oder  $i(t)$  berechnet,

sondern sie entstehen aus dem Kreuzprodukt von  $u(t)$  und  $i(t)$  und fallen so als Kreuzleistung nicht unter die eben präsentierte Definition einer momentanen Signalleistung.

Durch integrieren der Momentanleistung ergibt sich die Signalenergie  $E_x$ :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.13)$$

Mit einer zeitlichen Mittelung der Momentanleistung  $P_x(t)$  erhält man die mittlere Leistung  $\bar{P}_x$ :

$$\bar{P}_x = \langle P_x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} P_x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \quad (2.14)$$

Bei der momentanen Signalleistung, Signalenergie oder mittlerer Signalleistung handelt es sich nicht zwingend um eine physikalische Grösse. Sie kann aber beispielsweise bei Spannungs- und Stromamplituden mit Hilfe des Referenzwiderstands einfach in eine physikalische Energie oder Leistung umgerechnet werden.

Die Suche nach einem solchen physikalischen Skalierungsfaktor für die Leistung von Signalen, welche beispielsweise einen Geldwert, eine Pulsfrequenz eines Sportlers oder schlicht eine dimensionslose Zahl repräsentieren, ergibt aber keinen wirklichen Sinn.

Aus Sicht der Nachrichtentechnik ist aber die Energie oder Leistung eines Signals unabhängig von der dargestellten Einheit immer ein interessanter Kennwert, da sie zum Beispiel ein gutes Mass darstellen, wie stark sich ein Nachrichtensignal von unerwünschten Störsignalen abheben kann. Meist sind etwas abstrakte, dimensionslose Signalamplituden und Signalleistungen sogar die bevorzugte Darstellung eines Signals und seiner Leistung.

#### 2.4.6 Effektivwert

Um eine Signalleistung in der Dimension der Signalamplitude darzustellen, ist der Effektivwert oder RMS-Wert eine häufig verwendete Grösse, wobei sich RMS auf die Berechnung dieser Grösse bezieht (root-mean-square):

$$x_{\text{eff}} = x_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{P}_x} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt} \quad (2.15)$$

#### 2.4.7 Scheitelfaktor

Oft besteht der Wunsch, die mittlere Leistung  $P_x$  und somit den Effektivwert  $x_{\text{rms}}$  eines Signals  $x(t)$  mit einem Verstärker zu maximieren, damit eine gute Signalqualität verarbeitet werden kann, welche möglichst frei von Störsignalen ist. Ebenso möchte man beispielsweise einen Analog/Digital-Wandler gut aussteuern, um die vorhandene Anzahl Bit pro Sample des Wandlers für eine möglichst genaue Zahlendarstellung der Amplitudenwerte auszunutzen. In beiden Fällen, beim Verstärker und beim A/D-Wandler, ist jedoch der lineare Aussteuerbereich in der Amplitudenhöhe beschränkt. Wird dieser lineare Bereich durch Spitzenwerte  $x_p$  überschritten, führt dies zu einer Übersteuerung (Englisch: clipping).

Der Scheitelfaktor oder Crest-Faktor  $C$  (Englisch: crest factor) gibt das Verhältnis zwischen Spitzenwert  $x_p$  und Effektivwert  $x_{\text{rms}}$  wieder:

$$C = \frac{x_p}{x_{\text{rms}}} = \frac{\max(|x(t)|)}{\sqrt{P_x}} \quad (2.16)$$

Ist der Scheitelfaktor  $C$  eines Signals  $x(t)$  bekannt, erlaubt dies beispielsweise, einen Verstärker aufgrund eines gemessenen Effektivwerts  $x_{\text{rms}}$  so einzustellen, dass auch die Spitzenwerte  $x_p$  ohne Übersteuern verarbeitet werden können.

## 2.5 Logarithmische Beschreibung von Leistungsverhältnissen

Oft ist in der Nachrichtentechnik auch die absolute Grösse einer Amplitude oder einer Leistung nur zweitranzig. Machen Sie den einfachen Test: die Sprachverständlichkeit hängt nicht nur von einer kräftigen Stimme des Sprechers ab, sondern ebenso von der Lautstärke der Umgebungsgeräusche. Dass die Signalqualität nicht nur durch das Signal selber definiert wird, sondern in Bezug auf Störsignale betrachtet werden muss, gilt nicht nur für den vorgenannten Sprecher sondern auch für technische Systeme.

Der Störabstand oder das Signal-Rausch-Verhältnis (signal-to-noise ratio SNR) ist eine der wichtigsten Kenngrössen der Kommunikationstechnik:

$$\text{SNR} = \frac{S}{N} = \frac{\text{Signalleistung}}{\text{Rauschleistung}} \quad (2.17)$$

Leistungsverhältnisse werden oft in logarithmischer Weise ausgedrückt, wobei sich der Zehnerlogarithmus durchgesetzt hat. Eine logarithmische Darstellung ist vor allem dann praktisch, wenn sich die Leistungsverhältnisse über mehrere Dekaden erstrecken, oder wenn sie sich z.B. linear mit der Distanz oder der Frequenz um einen bestimmten relativen Faktor verändern.

Ein Leistungsverhältnis  $k_B$  ausgedrückt in Bel ist der Zehnerlogarithmus des Quotienten zweier Leistungen  $P_y$  und  $P_x$ :

$$\log_{10} \frac{P_y}{P_x} = k_B \text{ Bel} \quad (2.18)$$

Für einen linearen Störabstand von beispielsweise  $S/N = 1000$  ergibt dies ein logarithmisches Verhältnis von  $\text{SNR} = \log_{10}(S/N) = 3$  Bel. Das Bel als Einheit wird in dieser Art aber nirgendwo verwendet. Stattdessen hat sich dessen Zehntel, das Dezibel (dB) durchgesetzt:

$$10 \cdot \log_{10} \frac{P_y}{P_x} = 10 \cdot k_B \text{ dB} \quad (2.19)$$

Für den im vorhergehenden Beispiel verwendeten linearen Störabstand  $S/N = 1000$  ergibt dies  $\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10}(S/N) = 30$  dB.

Ob es sich bei einem Leistungsverhältnis (wie z.B. einer SNR) um eine logarithmische und somit nicht um eine lineare Grösse handelt, wird einzig mit der Einheit dB ausgedrückt.

Mit dem logarithmischen Leistungsverhältnis lassen sich nur positive reellwertige Leistungen vergleichen, was aber gemäss der Definition der Signalleistung, Gleichung (2.14), schon gewährleistet ist. Muss im Sinne einer komplexen Scheinleistung oder einer vorzeichenbehafteten Blindleistung ein Winkel oder ein Vorzeichen berücksichtigt werden, ergibt das logarithmische Leistungsverhältnis höchstens dann einen Sinn, wenn näher definiert wird, in welcher Form Winkel oder Vorzeichen verrechnet und im Ergebnis zusätzlich erwähnt werden sollen.

Das Leistungsverhältnis in Dezibel kann auch sehr einfach mit dem Effektivwert ausgedrückt werden, z.B.

das Verhältnis von den Leistungen am Eingang ( $P_x$ ) und am Ausgang ( $P_y$ ) eines Verstärkers. Die Leistungsverstärkung beträgt dann:

$$10 \cdot \log_{10} \frac{P_y}{P_x} = 10 \cdot \log_{10} \frac{y_{\text{rms}}^2}{x_{\text{rms}}^2} = 20 \cdot \log_{10} \frac{y_{\text{rms}}}{x_{\text{rms}}} [\text{dB}] \quad (2.20)$$

Wird also ein Leistungsverhältnis mit Hilfe von Effektivwerten ausgedrückt, muss für die Berechnung der Dezibel ein Faktor 20 anstatt 10 nach dem Logarithmieren verwendet werden.

Fehlt einem noch etwas die Routine mit Dezibelberechnungen, können einem diese beiden unterschiedlichen Faktoren etwas Schwierigkeiten bereiten. Dabei wäre der Sachverhalt eigentlich sehr simpel:

- Um ein Leistungsverhältnis in Bel mit seinem Zehntel, dem Dezibel auszudrücken, muss selbstverständlich ein Faktor 10 verwendet werden.
- Den Faktor 20 verwendet man nur dann, wenn zur Berechnung des Leistungsverhältnisses Effektivwerte (RMS-Werte) anstatt Leistungen verwendet werden:
  - Um aus den Effektivwerten wieder die mittlere Leistung zu bestimmen, muss die Wurzelbildung der RMS-Berechnung durch Quadrieren wieder rückgängig gemacht werden.
  - Diese Potenzierung mit dem Exponenten 2 kann dank den Rechenregeln für Logarithmen durch einen vorangestellten Faktor 2 ersetzt werden.

In nachfolgender Tabelle sind einige wichtige (teilweise leicht gerundete) Dezibel-Werte als Verhältnis von Leistungen wie auch Effektivwerten aufgelistet.

dB	$\frac{P_y}{P_x}$	$\frac{y_{\text{rms}}}{x_{\text{rms}}}$
20	100	10
10	10	$\sqrt{10}$
6	4	2
3	2	$\sqrt{2}$
0	1	1
-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
-6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$
-20	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$

**Tabelle 2.1:** Beispiele von Leistungs- und Effektivwert-Verhältnissen in dB

Obwohl mit Dezibel ein Leistungsverhältnis ausgedrückt wird, ist deren Bezugsgröße oft ein Amplitudenwert, z.B. Spannung oder Strom. Bei solchen Amplituden handelt es sich um Effektivwerte, welche in einem Referenzsystem (z.B. mit  $50\Omega$  oder  $75\Omega$  nominaler Impedanz) in eine Leistung umgerechnet werden können.

Einige Beispiele von häufig verwendeten Bezugsgrößen:

Bezeichnung	Bezugsgrösse	Umrechnung in Leistung (bei $50 \Omega$ -System)
dBW	1 W	0 dBW = 1 W
dBm	1 mW	0 dBm = 1 mW
dBV	1 V	0 dBV = 20 mW an $50 \Omega$
dBuV	1 $\mu$ V	0 dBuV = 20 fW an $50 \Omega$
dBuA	1 $\mu$ A	0 dBuA = 50 pW an $50 \Omega$

**Tabelle 2.2:** Häufig verwendete Bezugsgrössen in dB

# Kapitel 3

## Fouriertransformation

### 3.1 Wozu dient der Frequenzbereich?

Um Nachrichtensignale in geeigneter Art zu erzeugen, ihr Verhalten in Übertragungskanälen zu verstehen und die Auswertung der Signale beim Empfänger optimieren zu können, ist es wünschenswert, wenn Signale und Systeme mathematisch modelliert und simuliert werden können.

Oft ist aber die mathematische Behandlung im Zeitbereich sehr aufwendig und es ist nicht ganz einfach, eine intuitive Vorstellung darüber zu erlangen, wie Signale durch Systeme im Zeitbereich verändert werden. Dies gilt selbst dann, wenn die Signale über LTI-Systeme (d.h. lineare und zeitinvariante Systeme) übertragen werden.

LTI-Systeme bestehen aus Addierern, Skalierungen, Integratoren, Differentiatoren und zeitlichen Verzögerungen. Solche Systeme können mit linearen Differentialgleichungen beschrieben werden, wobei eine direkte Lösung dieser Gleichungen für allgemeine Signale sehr rechenintensiv ist.

Einfach berechenbar sind hingegen die Eigenfunktionen solcher Gleichungssysteme: konstante und sinusförmige Signale, welche auch exponentiell anschwellen oder abklingen dürfen. Solche Eigenfunktionen erzeugen am Ausgang eines LTI-Systems den gleichen zeitlichen Verlauf, wie er am Eingang anliegt, allerdings meist zeitlich verzögert und um einen Verstärkungs- oder Dämpfungsfaktor skaliert.

Gelingt es nun, beliebige Eingangssignale in eine (endlich oder unendlich grosse) Menge von Eigenfunktionen aufzuteilen, können die daraus resultierenden Ausgangsfunktionen einzeln auf einfache Weise berechnet werden und dank der Linearität und Zeitinvarianz des Systems wieder zum gesamten Ausgangssignal zusammengefügt werden. Die Berechnung des Ausgangssignals erfolgt somit relativ einfach im sogenannten Bildbereich, dem Bereich der Eigenfunktionen.

Signale können je nach ihrer Charakteristik in unterschiedliche Eigenfunktionen aufgeteilt werden. Für periodische Signale eignet sich die Fourier-Reihe, für zeitlich begrenzte, nicht wiederkehrende ansteigende und wieder abklingende Vorgänge die Fourier-Transformation, für Einschaltvorgänge die Laplace-Transformation und für digitale Signale die z-Transformation.

Bei der mathematischen Behandlung nachrichtentechnischer Funktionsblöcke im Frequenzbereich wird in diesem Skript die Fourier-Transformation im Vordergrund stehen.

### 3.2 Fourier-Reihe

Periodische Signale mit einer Periodendauer  $T$  können mit Hilfe der Fourier-Analyse in einen konstanten DC-Anteil und sinusförmige Signale mit der Grundfrequenz  $f_0 = \frac{1}{T}$  sowie ganzzahliger Vielfacher dieser Frequenz aufgeteilt werden.

Das sinusförmige Signal mit der Grundfrequenz  $f_1 = 1 \cdot f_0$  ist die sogenannte *Grundharmonische* des periodischen Signals. Bei der zweiten Harmonischen (mit der Frequenz  $f_2 = 2 \cdot f_0$ ) handelt es sich um die *erste Oberwelle*, bei der dritten Harmonischen (mit der Frequenz  $f_3 = 3 \cdot f_0$ ) um die *zweite Oberwelle*, etc.

Weder Grundharmonische noch Oberwellen müssen tatsächlich als Teil des periodischen Signals vorkommen. Die Definition der Grundharmonischen richtet sich einzig nach der Periodendauer des Signals, d.h.  $f_0 = \frac{1}{T}$ , und nicht danach, ob diese Grundfrequenz tatsächlich mit einer Amplitude  $a_1 > 0$  vorhanden ist. Ist z.B. bei einer Summe von periodischen Signalen die Periodendauer  $T$  bzw. die Grundharmonische dieser Summe gar nicht bekannt, kann man sie bestimmen, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache der Periodendauern sämtlicher Signalanteile  $s_a(t), s_b(t) \dots s_n(t)$  bestimmt, oder äquivalent den grössten gemeinsamen Teiler ihrer Grundharmonischen sucht, d.h.:

$$T = \text{KGV}(T_a, T_b, \dots, T_n) \quad (3.1)$$

$$f_0 = \text{GGT}(f_a, f_b, \dots, f_n) \quad (3.2)$$

Die Approximation eines DC-behafteten Rechtecksignals ist in den folgenden Graphen dargestellt. Dabei wurden jeweils die Anteile bis zur ersten, dritten, neunten bzw. neunzehnten Harmonischen berücksichtigt.

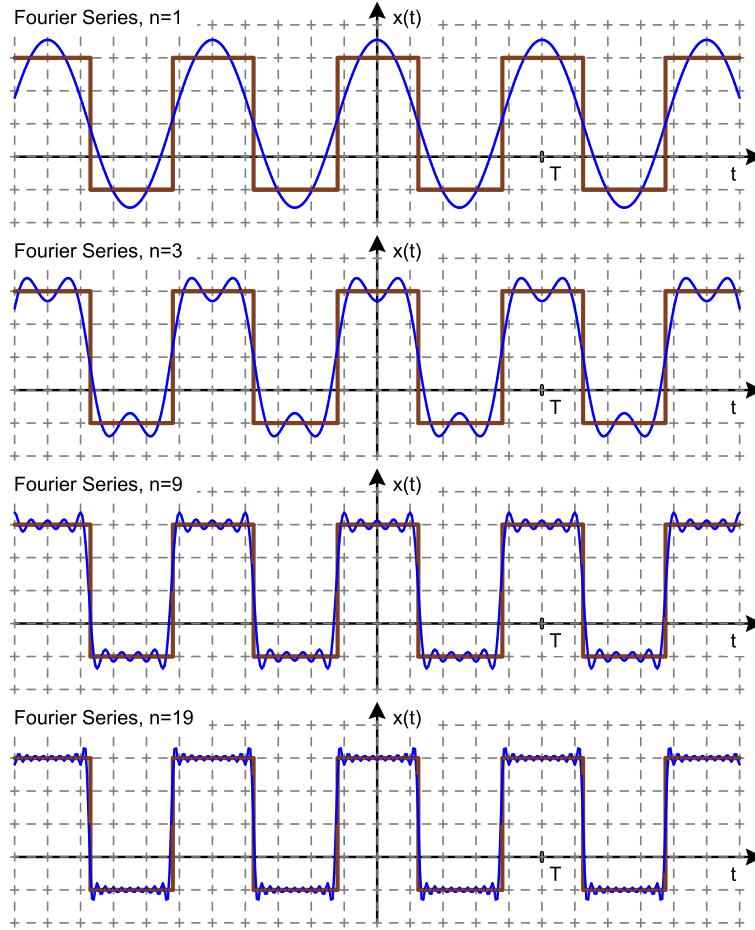


Abbildung 3.1: Rechteckapproximation mit Fourierreihe

Die Approximation scheint in diesem Beispiel sehr gut zu gelingen, doch sind an den Unstetigkeitsstellen Über- und Unterschwinger auszumachen, die auch bei der Approximation mit weiteren Harmonischen nicht zum Verschwinden gebracht werden können. Es handelt sich hierbei um das Gibbs'sche Phänomen. Die Amplitude dieser Abweichungen entspricht ca. 9% der Sprungamplitude an der Unstetigkeitsstelle.

Trotz dieser Einschränkung in Bezug auf Unstetigkeitsstellen ist die Approximation mit der Fourier-Reihe dahingehend perfekt, dass die Leistung des Differenzsignals zwischen Original und Approximation mit zunehmender Anzahl von Harmonischen gegen Null strebt.

In der Literatur haben sich verschiedene Darstellungen der Fourier-Reihe etabliert. Drei Formen werden nachfolgend kurz vorgestellt.

### 3.2.1 Trigonometrische Form der Fourier-Reihe

Die trigonometrische Form der Fourier-Reihe teilt ein periodisches Signal  $x(t)$  mit Periodendauer  $T$  und Grundfrequenz  $f_0 = \frac{1}{T}$  in Cosinus- und Sinusfunktionen auf.

Anmerkung: um die Koeffizienten der trigonometrischen Form von jenen der komplexen Darstellung unterscheiden zu können, wird an dieser Stelle des Skripts  $\frac{u_0}{2}$  für den Gleichanteil und  $u_n$  für die Koeffizienten der Cosinusfunktionen,  $v_n$  für die Koeffizienten der Sinusfunktionen verwendet. In der Literatur werden üblicherweise die Variablennamen  $a_n$  für Gleich- und Cosinusanteile (d.h.  $a_{0...n} = u_{0...n}$ ) und  $b_n$  für den Sinusanteil (d.h.  $b_{1...n} = v_{1...n}$ ) verwendet.

$$x(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) + v_n \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t). \quad (3.3)$$

Der DC-Anteil wird meist etwas eigenständlich mit  $\frac{u_0}{2}$  angegeben, um auch für  $n = 0$  die Berechnung der Koeffizienten  $u_{0...n}$  und  $v_{1...n}$  einheitlich zu halten:

$$u_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) dt \quad (3.4)$$

$$v_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) dt \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Harmonische Form der Fourier-Reihe

Die sogenannte harmonische Form der Fourier-Reihe fasst die Cosinus- und Sinusanteile gleicher Frequenz, wie sie bei der trigonometrischen Form der Fourier-Reihe vorkommen, zusammen. Daraus entsteht für jeden Frequenzanteil ein Cosinussignal mit Amplitude  $r_n$  und Phasenlage  $\varphi_n$ .

Auch hier gilt anzumerken, dass in der Literatur meist die Bezeichnung  $c_n$  anstatt  $r_n$  verwendet wird. Ziel ist wiederum, diese Koeffizienten von jenen der komplexen Darstellung zu unterscheiden. Der Winkel  $\varphi_n$  hingegen, in der Art wie er hier definiert ist, stimmt gerade mit dem Winkel  $\varphi_n$  der komplexen Darstellung überein.

Es ergibt sich somit für die harmonische Form der Fourier-Reihe:

$$x(t) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t + \varphi_n) \quad (3.6)$$

$$r_0 = \frac{u_0}{2} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (3.7)$$

$$r_{n>0} = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \quad (3.8)$$

$$\varphi_n = \arg(u_n - j \cdot v_n) \quad (3.9)$$

Für die Berechnung des Winkels  $\varphi_n$  wurde hier auf die Argument-Funktion ausgewichen, welche den Winkel einer komplexen Zahl wiedergibt. So kann die Fallunterscheidung vermieden werden, welche sich bei einer Berechnung mit  $\varphi_n = \arctan \frac{-v_n}{u_n}$  für unterschiedliche Vorzeichen von  $u_n$  und  $v_n$  ergeben würde, da sich der Wertebereich der Arkustangens-Funktion auf den Bereich  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$  beschränkt.

### 3.2.3 Komplexe Form der Fourier-Reihe

Mit der komplexen Form der Fourier-Reihe vereinfachen sich die Formeln zur Berechnung der Koeffizienten. Anstatt Sinus- und Cosinusfunktionen dienen als Grundfunktionen der Fourierreihe komplexe Schwingungen mit Koeffizienten  $c_n = a_n + j \cdot b_n$ .

Mit Hilfe der Eulerschen Formel lassen sich nun die komplexen Schwingungen mit den Koeffizienten  $c_n$  wieder in Cosinus- und Sinusanteile umrechnen:

$$c_n \cdot e^{j2\pi n f_0 \cdot t} = (a_n + j b_n) \cdot (\cos(2\pi n f_0 \cdot t) + j \sin(2\pi n f_0 \cdot t)) \quad (3.10)$$

Ist das aufzuspaltende Signal  $x(t)$  ein reellwertiges Signal, wird als Ergänzung pro Koeffizient auf der positiven Frequenzachse jeweils zwingend eine zweite, zur ersten konjugiert-komplexe Schwingung benötigt, d.h. eine Schwingung mit gleicher Amplitude, aber negativer Frequenz und Phasenlage:

$$c_{-n} \cdot e^{-j2\pi n f_0 \cdot t} = c_n^* \cdot e^{-j2\pi n f_0 \cdot t} = (a_n - j b_n) \cdot (\cos(2\pi n f_0 \cdot t) - j \sin(2\pi n f_0 \cdot t)) \quad (3.11)$$

Dabei gilt für Realteil  $a_n$  und Imaginärteil  $b_n$  von  $c_n$  ( $n \geq 0$ ) im Vergleich zu den Koeffizienten der trigonometrischen Form:

$$\Re(c_n) = a_n = \frac{u_n}{2} \quad \Im(c_n) = b_n = -\frac{v_n}{2} \quad (3.12)$$

Dies führt zu einem zweiseitigen Spektrum mit zusätzlichen Koeffizienten bei negativen Frequenzen. Solche Anteile mit negativer Frequenz ergeben bei reellwertigen Signalen  $x(t)$  in der Praxis (z.B. messtechnisch) wenig Sinn. Sie röhren nur daher, dass bei der komplexen Form der Fourier-Reihe die Eigenfunktionen komplexwertige Schwingungen sind, das aufzuspaltende  $x(t)$  aber reellwertig ist.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j n 2\pi f_0 \cdot t} \quad (3.13)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j n 2\pi f_0 \cdot t} dt \quad (3.14)$$

### 3.2.4 Eigenschaften der Fourier-Reihe

Die im Kapitel 3.3 beschriebenen Eigenschaften der Fouriertransformation sind in angepasster Form auch für die Fourierreihe gültig. Trotzdem werden hier noch ein paar Eigenschaften der Fourier-Reihe speziell aufgelistet.

#### Symmetrien

Ist  $x(t)$  reellwertig, dann gilt für die Koeffizienten  $c_n = |c_n| e^{j\varphi_n}$ :

$c_{-n}$	$=$	$c_n^*$	d.h. $c_{-n}$ ist zu $c_n$ komplex konjugiert.
$ c_{-n} $	$=$	$ c_n $	d.h. die Koeffizienten $ c_n $ haben eine gerade Charakteristik.
$\varphi_{-n}$	$=$	$-\varphi_n$	d.h. $\varphi_n$ haben eine ungerade Charakteristik.
$a_{-n}$	$=$	$a_n$	d.h. $a_n$ haben eine gerade Charakteristik.
$b_{-n}$	$=$	$-b_n$	d.h. $b_n$ haben eine ungerade Charakteristik.

Zusätzlich gelten noch folgende Eigenschaften für reellwertige Signale:

- Ist  $x(t)$  reellwertig und ein gerades Signal (d.h. ein Signal, für welches  $x(-t) = x(t)$  gilt), dann sind alle Koeffizienten  $c_n$  reellwertig (d.h.  $b_n = 0$  für alle  $n$ ).
- Ist  $x(t)$  reellwertig und ein ungerades Signal (d.h. ein Signal, für welches  $x(-t) = -x(t)$  gilt), dann sind alle Koeffizienten  $c_n$  rein imaginär (d.h.  $a_n = 0$  für alle  $n$ ).

### Satz von Parseval

Die mittlere Leistung  $P_x$  eines periodischen Leistungssignals (mit  $P_x < \infty$ ) kann mit dem Satz von Parseval auch mit den Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe berechnet werden. Ist  $x(t)$  ein periodisches Leistungssignal mit Periodendauer  $T$ , so gilt:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (3.15)$$

## 3.3 Fouriertransformation

Mit der Fourierreihe können nur periodische Signale in spektrale Anteile aufgeteilt werden, d.h. stationäre, deterministische, repetitive Leistungssignale. Mit der Fouriertransformation kann die spektrale Analyse auf eine weitere Gruppe von Signalen ausgedehnt werden: die deterministischen Energiesignale.

### 3.3.1 Übergang von der Fourierreihe zur Fouriertransformation

Mit einem Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  der Periodendauer  $T$  kann ein Energiesignal so behandelt werden, als ob es sich um ein periodisches Signal handelt, dessen Periodendauer unendlich gross ist.

- Die Frequenz  $f_0 = \frac{1}{T}$  der Grundharmonischen strebt dadurch gegen Null, d.h. die Abstände zwischen den Spektrallinien verringern sich und das diskrete Spektrum geht in ein kontinuierliches Spektrum über.
- Das bei der Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  benötigte Integral  $\int_T x(t) \cdot e^{-j n 2\pi f_0 \cdot t} dt$  verändert sich beim Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  nicht. Wird  $T$  vergrössert, erweitert sich einfach der Bereich, über welchen integriert wird, mit Abschnitten  $x(t) = 0$ , welche keinen Beitrag zum Integral leisten.
- Durch Vergrössern von  $T$  führt aber die Division durch  $T$  bei  $c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j n 2\pi f_0 \cdot t} dt$  dazu, dass die Koeffizienten  $c_n$  gegen Null streben. Um dies zu verhindern, kann auf diese Division verzichtet werden oder, äquivalent,  $c_n$  mit  $T$  skaliert werden.
- Die Skalierung von  $c_n \cdot T$  (mit  $T \rightarrow \infty$ ) entspricht einer Division  $c_n \cdot \frac{1}{f_0}$  (mit  $f_0 \rightarrow 0$ ). wobei die Frequenz  $f_0$  wie festgestellt in eine kontinuierliche Variable übergeht. Durch die Skalierung mit  $T$  wird somit aus den Amplituden der komplexen Schwingungen  $c_n$  ein *Amplitudendichthespektrum*  $c_n/f_0$ . Dieses gibt wieder, in welchen Frequenzbereichen die meisten Amplitudenanteile von  $x(t)$  vorzufinden sind.

Mit diesen Überlegungen und mit  $\omega = 2\pi f$  haben wir die Fouriertransformation hergeleitet:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (3.16)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (3.17)$$

### 3.3.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

#### Symmetrien

Ist  $x(t)$  reellwertig, dann gilt für  $X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ :

- $X(-\omega) = X^*(\omega)$  d.h. das Amplitudendichespektrum  $X(\omega)$  ist zu  $X(-\omega)$  komplex konjugiert.  
 $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$  d.h. der Betrag des Amplitudendichespektrums  $|X(\omega)|$  hat eine gerade Charakteristik.  
 $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$  d.h. das Phasenspektrum  $\varphi(\omega)$  hat eine ungerade Charakteristik.

Weiter gelten folgende Eigenschaften für reellwertige Signale:

- Ist  $x(t)$  reellwertig und ein gerades Signal (d.h. ein Signal, für welches  $x(-t) = x(t)$  gilt), dann ist sein Spektrum  $X(\omega)$  ebenfalls reellwertig.
- Ist  $x(t)$  reellwertig und ein ungerades Signal (d.h. ein Signal, für welches  $x(-t) = -x(t)$  gilt), dann ist sein Spektrum  $X(\omega)$  rein imaginär.

### Satz von Plancherel

Der Energieinhalt  $E_x$  eines Energiesignals (mit  $E_x < \infty$ ) kann mit dem Satz von Plancherel auch im Frequenzbereich berechnet werden. Er entspricht somit dem bekannten Parseval-Theorem für Fourier-Reihen von periodischen Leistungssignalen. Falls  $x(t)$  ein Energiesignal ist, so gilt:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.18)$$

### Linearität (Überlagerungssatz)

Die Linearität der Fouriertransformation äussert sich in einem Skalierungssatz für  $y(t) = a \cdot x(t)$  und in einem Überlagerungssatz für  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ . Zusammengefasst ergibt sich folgende Regel:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (3.19)$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) \cdot e^{-j\omega t} dt = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

### Verschiebung im Zeitbereich

Eine zeitliche Verzögerung um  $t_0$  im Zeitbereich wird im Frequenzbereich auf eine frequenzabhängige Phasenverschiebung  $e^{-j\omega t_0}$  abgebildet:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (3.20)$$

Beweis mit Hilfe der Substitution  $u = t - t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j\omega(u+t_0)} du = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j\omega u} du = X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

### Verschiebung im Frequenzbereich

Ebenso kann eine Verschiebung um  $\omega_0$  im Frequenzbereich durch eine Multiplikation mit der komplexwerten Schwingung  $e^{j\omega_0 t}$  ausgedrückt werden. Verschiebungen im Frequenzbereich sind in der Nachrichtentechnik äusserst wichtige Operationen. Auf ihnen basiert die mehrfache Kanalnutzung durch Frequenzmultiplex.

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0) \quad (3.21)$$

Beweis:

$$X(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}]$$

### Skalierung

Eine Stauchung der Zeitvariablen  $t$  mit einem Faktor  $k > 1$  führt zu einer Verbreiterung im Frequenzbereich, während eine Streckung mit  $0 < k < 1$  im Zeitbereich zu einem schmaleren Spektrum führt. Dieser Sachverhalt wird mit folgendem Ähnlichkeitssatz beschrieben:

$$x(k \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|k|} \cdot X\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (3.22)$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch die Substitution  $u = k \cdot t$  (mit  $k \neq 0$ ) und im Falle von  $k < 0$  Vertauschen der Integrationsgrenzen.

$$k > 0: \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt) \cdot e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{j\omega u/k} \cdot \frac{1}{k} du = \frac{1}{k} X\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$k < 0: \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt) \cdot e^{j\omega t} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) \cdot e^{j\omega u/k} \cdot \frac{1}{k} du = -\frac{1}{k} X\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{|k|} \cdot X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

### Zeitumkehrung

Wird der zeitliche Verlauf eines bekannten Signals  $x(t)$  mit bekanntem Spektrum  $X(\omega)$  gespiegelt, kann die neue Fourier-Transformierte des gespiegelten Signals sehr einfach berechnet werden:

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) \quad (3.23)$$

Beweis: Skalierungssatz mit  $k = -1$ .

### Vertauschungssatz

Beim Vertauschungssatz rückt die Dualität der Fouriertransformation in Bezug auf Hin- und Rücktransformation in den Fokus. Das Spektrum  $X(\omega)$  einer zeitlichen Funktion  $x(t)$  sei schon bekannt. Hat nun ein anderer Signalverlauf gerade diese Form des Spektrums  $X(\cdot)$  im Zeitbereich (d.h.  $X(t)$ ), kann nun das Spektrum dieses neuen Signals mit der ursprünglichen zeitlichen Funktion  $x(\cdot)$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot x(-\omega) \quad (3.24)$$

Beweis:

Substitution von  $\eta = -\omega$  und  $u = t$  und anschliessend für  $2\pi \mathcal{F}^{-1}[X(u)]$  wieder Rücksubstitution mit  $\omega = -\eta$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j\eta u} du = 2\pi \cdot x(\eta) = 2\pi \cdot x(-\omega)$$

### Differentiationssatz

Eine Differentiation im Zeitbereich kann im Frequenzbereich sehr einfach beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \cdot X(\omega) \quad (3.25)$$

Beweis durch differenzieren der Rücktransformierten:

$$u(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega \cdot X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad \text{mit } U(\omega) = j\omega \cdot X(\omega)$$

Von geringerer Wichtigkeit ist eine Differentiation im Frequenzbereich:

$$-jt \cdot x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega} X(\omega) \quad (3.26)$$

Beweis durch differenzieren der Fourier-Transformierten:

$$U(\omega) = \frac{d}{d\omega} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -jt \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{mit } u(t) = -jt \cdot x(t)$$

### Integrationssatz

Auch eine Integration im Zeitbereich kann im Frequenzbereich einfach beschrieben werden:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \quad (3.27)$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^t e^{j\omega\tau} d\tau d\omega$$

Das innere Integral kann für  $\omega \neq 0$  mit einer Grenzwertbetrachtung gelöst werden:

$$\int_{-\infty}^t e^{j\omega\tau} d\tau = \lim_{a \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^t e^{(a+j\omega)\tau} d\tau = \lim_{a \rightarrow 0_+} \frac{1}{a+j\omega} [e^{(a+j\omega)\tau}]_{-\infty}^t = \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}$$

Damit gilt für den Spezialfall  $X(0) = 0$ , d.h. ein Signal ohne Gleichanteil:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} \quad (\text{falls } X(0) = 0) \quad (3.28)$$

Um den Gleichanteil zu berücksichtigen, muss die Fourier-Transformierte auch auf Leistungssignale angewendet werden können. Für diese Erweiterung ist die Dirac-Impulsfunktion hilfreich, welche aber erst im Kapitel über LTI-Systeme detailliert eingeführt wird. Bei der idealisierten Impulsfunktion  $\delta(t)$  handelt es sich um einen Impuls von verschwindend kurzer Dauer aber endlicher Energie. Ausserhalb des Zeitpunkts  $t = 0$  gilt für die Amplitude  $\delta(t) = 0$ . Damit  $\delta(t)$  mit einem einzigen, unendlich kurz andauernden Amplitudenwert eine endliche Energie aufweisen kann, muss sie zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Amplitude besitzen, welche gegen unendlich strebt.

Da mit einem unendlich kurzen und unendlich hohen Amplitudenwert ein Signalverlauf nicht beschrieben werden kann, handelt es sich bei  $\delta(t)$  nicht um eine Funktion im eigentlichen Sinne, sondern um eine Distribution. Die wichtigste Eigenschaft von  $\delta(t)$  ist ihre Ausblendeigenschaft, welche sich für eine beliebig wählbare Funktion  $f(t)$  in folgendem Integral äussert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (3.29)$$

Somit gilt für  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \quad (3.30)$$

Und mit dem Vertauschungssatz (Gleichung (3.24)) ergibt sich sofort auch die Fouriertransformation für ein konstantes DC-Signal:

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \delta(\omega) \quad (3.31)$$

Beweise:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = e^{j0t} = 1$$

Wir ersetzen jetzt im Beweis des Integrationssatzes das innere Integral durch das Produkt aus der Funktion

$e^{j\omega\tau}$  mit der gespiegelten und um  $t$  verschobenen Schrittfunktion  $u(t - \tau)$ . Die Schrittfunktion  $u(t - \tau)$  wird anschliessend in einen Gleichanteil und die Vorzeichenfunktion ( $\text{sign}$ ) aufgeteilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^t e^{j\omega\tau} d\tau d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} \cdot u(t - \tau) d\tau d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t - \tau) \right) d\tau d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \left( \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^t e^{j\omega\tau} d\tau - \int_t^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\tau \right) \right) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \int_{-\infty}^t e^{(a+j\omega)\tau} d\tau - \int_t^{+\infty} e^{(-a+j\omega)\tau} d\tau \right) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{a+j\omega} e^{(a+j\omega)t} + \frac{1}{-a+j\omega} e^{(-a+j\omega)t} \right) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \left( \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

Damit gilt für den allgemeinen Fall (für welchen nicht  $X(0) = 0$  gelten muss):

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot \left( \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$$

### Multiplikationssatz

Eine Multiplikation zweier Funktionen im Zeitbereich wird im Frequenzbereich auf eine Faltungsfunktion abgebildet. Die Faltung ist definiert mit  $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \cdot f_2(x - \xi) d\xi$  und damit eine sehr aufwendig zu berechnende Funktion, da für das Ergebnis von jedem einzelnen  $x$ -Wert ein ganzes Integral berechnet werden muss.

Da die Multiplikation im Zeitbereich eine wichtige und technisch gut realisierbare Funktion ist, wird auch die Faltungsfunktion im Frequenzbereich immer wieder zum Thema werden:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega) \cdot X_2(\omega - \Omega) d\Omega \quad (3.32)$$

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega) X_2(\omega - \Omega) d\Omega \cdot e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\omega - \Omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega) \cdot x_2(t) \cdot e^{j\Omega t} d\Omega \\
 &= x_2(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\Omega) \cdot e^{j\Omega t} d\Omega \\
 &= x_1(t) \cdot x_2(t)
 \end{aligned}$$

### Faltungssatz

Beim Faltungssatz werden zwei Signale im Zeitbereich durch die Faltungsfunktion miteinander verknüpft. Erst im Zusammenhang mit linearen zeitinvarianten Systemen wird sich die herausragende Bedeutung der Faltungsfunktion im Zeitbereich so richtig zeigen. Glücklicherweise kann diese aufwendige Berechnung im Frequenzbereich sehr einfach mit einer Multiplikation gelöst werden. Der Faltungssatz ist wohl der Hauptgrund, warum die Integraltransformationen in der Elektrotechnik ein so wichtiges mathematisches Werkzeug sind.

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \quad \circlearrowleft \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \quad (3.33)$$

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Zeitverschiebungssatzes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \end{aligned}$$

### 3.3.3 Fourier-Transformierte von ausgewählten Leistungssignalen

Die Fouriertransformierte von einem DC-Signal wurde schon beim Beweis des Integrationssatzes vorgestellt. Mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes können auch die komplexwertigen Schwingungen einer beliebigen Fourier-Reihe mit Hilfe der Fourier-Transformation beschrieben werden, das heißt neben Energiesignalen kann auch die Klasse der periodischen Leistungssignale mit der Fourier-Transformation dargestellt werden, wenn man die Distribution  $\delta(\omega)$  (d.h. die Impulsfunktion im Frequenzbereich) zu Hilfe nimmt.

$x(t)$	Fourier-Reihe	Fourier-Transformation
$x(t) = 1$	1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$	$e^{j2\pi f_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - 2\pi f_0)$
Mit $f_0$ periodisches Signal $x(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn2\pi f_0 \cdot t}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot c_n \cdot \delta(\omega - n \cdot 2\pi f_0)$
$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{j2\pi f_0 \cdot t}$	$\pi \cdot \delta(\omega + 2\pi f_0) + \pi \cdot \delta(\omega - 2\pi f_0)$
$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2} \cdot e^{-j2\pi f_0 \cdot t} - \frac{j}{2} \cdot e^{j2\pi f_0 \cdot t}$	$j \cdot \pi \cdot \delta(\omega + 2\pi f_0) - j \cdot \pi \cdot \delta(\omega - 2\pi f_0)$

**Tabelle 3.1:** Fourier-Reihe und Fourier-Transformation von Leistungssignalen

# Kapitel 4

## Lineare zeitinvariante Systeme

### 4.1 Was ist ein LTI-System?

Lineare, zeitinvariante Systeme (linear time-invariant systems) zeichnen sich dadurch aus, dass sie auf analytische (d.h. nicht nur numerische) Weise analysiert werden können. Sie lassen zudem zu, dass einfache qualitative Aussagen möglich sind, wie Signale beim Durchlaufen eines solchen Systems verändert werden.

Ein LTI-System soll durch den Operator  $\mathcal{T}[\cdot]$  charakterisiert werden, welcher ein beliebiges Eingangssignal  $x(t)$  in ein Ausgangssignal  $y(t)$  überführt:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \quad (4.1)$$

LTI-Systeme besitzen folgende herausragende Eigenschaften:

- **Skalierung:** wird ein Signal  $x(t)$  am Eingang des Systems um den Faktor  $a$  skaliert, wird auch das Ausgangssignal  $y(t)$  um diesen Faktor gewichtet, d.h.

$$\mathcal{T}[a \cdot x(t)] = a \cdot y(t) \quad (4.2)$$

- **Superposition:** wird ein Eingangssignal  $x(t)$  aus zwei Anteilen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  gebildet, setzt sich auch das Ausgangssignal  $y(t)$  aus den beiden jeweiligen Anteilen  $y_1 = \mathcal{T}[x_1(t)]$  und  $y_2 = \mathcal{T}[x_2(t)]$  zusammen, d.h.

$$\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t) \quad (4.3)$$

- **Zeitinvarianz:** liegt ein Signal  $x(t)$  zu einem um  $t_0$  verschobenen Zeitpunkt am Eingang des LTI-Systems an, führt dies zum selben, ebenfalls um  $t_0$  verschobenen Ausgangssignal  $y(t - t_0)$ , d.h.

$$\mathcal{T}[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad (4.4)$$

LTI-Systeme bestehen typischerweise aus Addierern, Skalierungen, Integratoren, Differentiatoren und zeitlichen Verzögerungen und können mit linearen Differentialgleichungen beschrieben werden.

Linearität und Zeitinvarianz sind in vielen Systemen ohne weiteres Dazutun in sehr guter Näherung schon vorhanden. Bestehen grössere Abweichungen in Bezug auf die Linearität, kann oft mit einer Linearisierung um den aktuellen Arbeitspunkt herum diese Eigenschaft für die mathematische Behandlung erzwungen werden. Ebenso kann es helfen, bei fehlender Zeitinvarianz den Betrachtungszeitraum einzuschränken, so dass Änderungen im Systemverhalten unberücksichtigt bleiben dürfen. Schliesslich wird bei der technischen Implementierung viel Aufwand betrieben, um Schaltungen und Bauteile mit linearen und zeitinvarianten Eigenschaften zu entwickeln und herzustellen.

Neben diesen beiden namensbildenden Eigenschaften eines LTI-Systems ist bei der technischen Implementierung auch die Kausalität, der Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, eine Eigenschaft, die nicht umgangen werden kann. Kausalität bedeutet in Bezug auf LTI-Systeme, dass sich ein Signal erst dann am Ausgang als Wirkung zeigen darf, wenn das verursachende Eingangssignal am LTI-System schon anliegt.

## 4.2 Sprung- und Impulsfunktion als Eingangssignale

Die Sprungfunktion  $u(t)$  und die Impulsfunktion  $\delta(t)$  sind wichtige idealisierte Eingangssignale von LTI-Systemen welche charakteristische Ausgangssignale erzeugen.

### 4.2.1 Sprungfunktion und Sprungantwort

Die Sprungantwort  $a(t)$  ist das Ausgangssignal, welches sich ergibt, wenn am Eingang eines LTI-Systems die Sprungfunktion  $u(t)$  angelegt wird. Die Sprungantwort  $a(t)$  charakterisiert ein LTI-System vollständig. Oft kann die Sprungfunktion  $u(t)$  sehr leicht am Eingang eines Systems angelegt werden. Bei gleichzeitiger Messung der Sprungantwort  $a(t)$  kann ein LTI-System messtechnisch einfach charakterisiert werden.

### 4.2.2 Impulsfunktion und Impulsantwort

Obwohl in der Praxis die Impulsfunktion  $\delta(t)$  höchstens näherungsweise an ein LTI-System angelegt werden kann (da beispielsweise die Amplitude unendlich nicht erzeugt werden kann und eine solche das LTI-System vermutlich zerstören würde), definieren wir die Impulsantwort  $h(t)$  als jenes Signal, welches sich am Ausgang des LTI-Systems zeigt, wenn eine Impulsfunktion  $\delta(t)$  am Eingang angelegt wird.

Ist bei einem LTI-System die Ein- und Ausgangsgröße identisch (z.B. eine Spannung mit Einheit [V]), dann verhält es sich in Bezug auf die Einheiten neutral, d.h. es fügt weder Einheiten hinzu, noch fallen wegen dem LTI-System Einheiten weg. Wird am Eingang eines LTI-Systems also eine Dirac-Impulsfunktion  $\delta(t)$  mit Einheit [ $s^{-1}$ ] an dieses System angelegt, hat somit auch die Impulsantwort  $h(t)$  die Einheit [ $s^-$ ]. Bei der Impulsantwort  $h(t)$  handelt es sich somit ebenso wie beim Eingangssignal  $\delta(t)$  um ein reelles, messbares Signal, sondern nur um eine mathematische Beschreibung des LTI-Systems.

Die Impulsantwort  $h(t)$  ist trotz ihres theoretischen Charakters eine außerordentlich wichtige Funktion, da sie ein LTI-System vollständig charakterisiert und mit ihrer Hilfe das Ausgangssignal  $y(t)$  für beliebige Eingangssignale  $x(t)$  berechnet werden kann. Dies wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

## 4.3 Ausgangssignal bei beliebigem Eingangssignal

Mit Hilfe der Definition der Dirac'schen Impulsfunktion kann jedes beliebige Eingangssignal  $x(t)$  wie folgt umgeschrieben werden:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (4.5)$$

Damit folgt:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \mathcal{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathcal{T}[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Im ersten Schritt wird  $x(t)$  durch die vorhergehende Schreibweise ersetzt. Im zweiten Schritt wird die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion verwendet, welche die Funktion  $x(t)$  auf den Skalarwert  $x(\tau)$  reduziert, sowie die Linearitätseigenschaft des LTI-Systems, welche die Berechnung von skalierten und überlagerten Funktionsanteilen erlaubt. Anschliessend kommt die Zeitinvarianz zum Tragen, welche garantiert, dass für jede Diracfunktion  $\delta(t - \tau)$  die zeitverschobene Impulsantwort  $h(t - \tau)$  erzeugt wird. Das resultierende Integral ist die schon bekannte Faltungsfunktion, womit vereinfachend geschrieben werden kann:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (4.6)$$

An dieser Stelle sei nochmals auf die Einheit der Impulsantwort  $h(t)$  hingewiesen. Durch das Faltungintegral wird dem Ausgangssignal im Vergleich zum Eingangssignal die Einheit [ $s$ ] beigefügt. Nur weil die Impulsantwort  $h(t)$  die Einheit [ $s^{-1}$ ] besitzt, wird diese Änderung der Einheit wieder kompensiert. Rückblickend erweist sich somit die Einheit [ $s^{-1}$ ] der Impulsantwort  $h(t)$  nicht mehr als sonderbar, sondern als

Notwendigkeit, damit Ausgangssignale ohne Veränderung der Einheit aus den Eingangssignalen berechnet werden können.

## 4.4 Berechnung im Frequenzbereich

Das Ausgangssignal  $y(t)$  könnte bei bekanntem Eingangssignal  $x(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$  direkt im Zeitbereich berechnet werden, was aber sehr zeitaufwendig ist: für jeden Zeitpunkt  $t$  von  $y(t)$  muss ein Faltungsintegral berechnet werden, d.h. es muss eine Multiplikation von  $x(t)$  mit dem gespiegelten sowie verschobenen  $h(t)$  über den ganzen Zeitbereich durchgeführt werden und dieses Produkt der beiden Funktionen anschließend noch integriert werden.

Der Faltungssatz der Fouriertransformation reduziert diese Faltung im Zeitbereich auf eine simple Multiplikation im Frequenzbereich. Tatsächlich zeigt sich, dass es vom Rechenaufwand einfacher ist, das Eingangssignal  $x(t)$  und die Impulsantwort  $h(t)$  als  $X(\omega)$  und  $H(\omega)$  in den Frequenzbereich zu transformieren und dort die Fourier-Transformierte  $Y(\omega)$  des Ausgangssignals  $y(t)$  zu berechnen:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad (4.7)$$

Eine Rücktransformation in den Zeitbereich ist nur dann notwendig, wenn das Ausgangssignal  $y(t)$  auch im Zeitbereich explizit untersucht werden soll. Ist für die Weiterverrechnung die Darstellung im Frequenzbereich ausreichend, kann auf die Rücktransformation in den Zeitbereich verzichtet werden.

Bei  $H(\omega)$  handelt es sich um die sogenannte Frequenzantwort (Englisch: frequency response) oder Übertragungsfunktion. Sie ist die Fourier-Transformierte von  $h(t)$ :

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] \quad (4.8)$$

Als Fourier-Transformierte von  $h(t)$  besitzt  $H(\omega)$  die zusätzliche Einheit  $\left[\frac{1}{\text{rad/s}}\right]$  bzw. [s], was zusammen mit der Einheit  $[\text{s}^{-1}]$  von  $h(t)$  zu einer dimensionslosen Grösse führt. Tatsächlich beinhaltet  $H(\omega)$  nur komplexe Werte, welche pro Frequenzpunkt beschreiben, wie sinusförmige Spektralanteile eines Eingangssignals in Bezug auf Amplitude und Phase auf das Ausgangssignal abgebildet werden.

Die komplexwertige Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  erstreckt sich über den negativen und positiven Bereich der Frequenzachse und kann somit in einen Amplituden- und Phasenanteil aufgespaltet werden:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.9)$$

Bei  $|H(\omega)|$  handelt es sich um den Amplitudengang, bei  $\varphi(\omega)$  um den Phasengang. Sowohl Amplituden- wie Phasengang können relativ einfach messtechnisch ermittelt werden, indem am Eingang des LTI-Systems für jeden Punkt der Kreisfrequenzachse  $\omega$  ein sinusförmiges Signal  $\cos(\omega \cdot t)$  angelegt wird. Die Skalierung der Amplitude am Ausgang entspricht gerade  $|H(\omega)|$ . Die gemessene Phasenabweichung kann wie bei der harmonischen Form der Fourierreihe in die komplexe Form umgerechnet werden.

Wie die Impulsantwort  $h(t)$  charakterisiert auch die Frequenzantwort  $H(\omega)$  ein LTI-System vollständig und erlaubt durch die Fourier-Rücktransformation die Berechnung von  $h(t)$ . Ist die Impulsantwort reellwertig, ist die Frequenzantwort auf der negativen Frequenzachse konjugiert komplex zum Anteil auf der positiven Frequenzachse, d.h.  $H(-\omega) = H^*(\omega)$ , bzw.  $|H(-\omega)| = |H(\omega)|$  und  $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ .

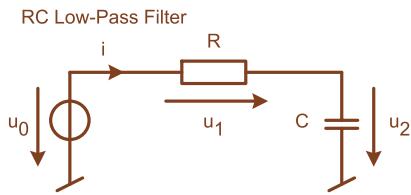
## 4.5 Bodendiagramm

Übertragungsfunktionen werden oft mit Hilfe des sogenannten Bodendiagramms dargestellt, bei welchem der Amplitudengang  $|H(\omega)|$  doppelt-logarithmisch (Frequenzachse und  $|H(\omega)|$  je mit logarithmischer Skala), der Phasengang  $\varphi(\omega)$  einfache-logarithmisch (Frequenzachse logarithmisch,  $\varphi(\omega)$  linear) dargestellt werden.

Das Aufzeichnen einer Frequenzantwort mit einem Bodendiagramm bietet folgende Vorteile:

- Darstellung eines weiten Bereichs der Frequenzachse bei gleichzeitig hohem relativem Detailgrad in jedem Frequenzabschnitt.
- Darstellung eines weiten Bereichs des Amplitudengangs mit hohem Detailgrad für grosse Verstärkungen und Dämpfungen.
- Gute Approximation durch einfache Linearisierung von einzelnen Bereichen der Frequenzantwort.
- Übersichtliche und einfach überblickbare Darstellung des Verhaltens eines LTI-Systems im Frequenzbereich.
- Einfache Berechnung des Ausgangssignals  $Y(\omega)$  eines LTI-Systems durch simple Addition des Frequenzganges zum Eingangssignal  $X(\omega)$ .

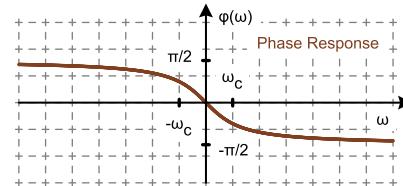
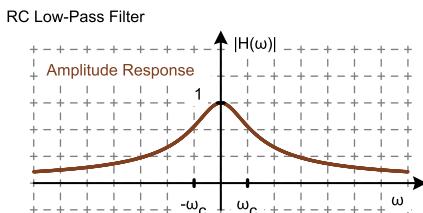
**Beispiel:** die Übertragungsfunktion eines RC-Tiefpassfilters soll berechnet und für  $\omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi \cdot 100$  Hz linear sowie im Bode-Diagramm (effektiv und linear angenähert) aufgezeichnet werden:



Filtereingang:	$u_0(t)$
Filterausgang:	$u_2(t)$
Ladung im Kondensator:	$q(t) = C \cdot u_2(t)$
Strom durch Kondensator:	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du_2(t)}{dt}$
Spannung über Widerstand:	$u_1(t) = R \cdot i(t)$
Maschengleichung:	$u_0(t) = u_1(t) + u_2(t) = RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t)$
Fourier-Transformation:	$U_0(\omega) = j\omega RC \cdot U_2(\omega) + U_2(\omega)$
Übertragungsfunktion:	$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_0(\omega)} = \frac{1}{1+j\omega RC}$

Linearer Graph:      Amplitude:      Phase:

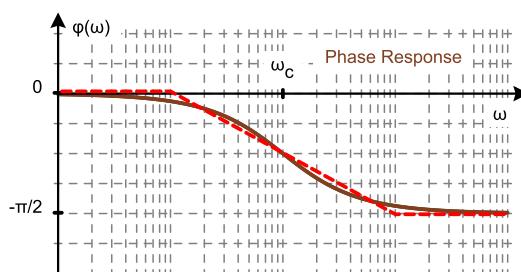
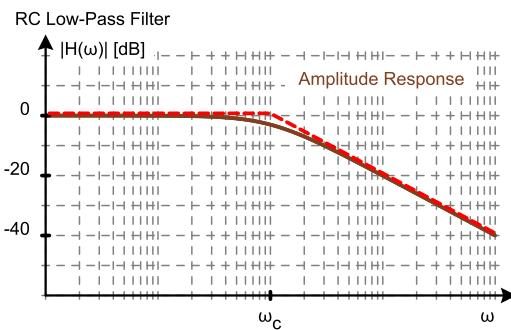
$$\begin{aligned} |H(-\infty)| &= 0 & \varphi_h(-\infty) &= +\pi/2 \\ |H(-\omega_c)| &= 1/\sqrt{2} & \varphi_h(-\omega_c) &= +\pi/4 \\ |H(0)| &= 1 & \varphi_h(0) &= 0 \\ |H(+\omega_c)| &= 1/\sqrt{2} & \varphi_h(+\omega_c) &= -\pi/4 \\ |H(+\infty)| &= 0 & \varphi_h(+\infty) &= -\pi/2 \end{aligned}$$



Bode-Diagramm:      Amplitude:      Phase:

$$\begin{aligned} |H(0)| &= 0 \text{ dB} & \varphi(0) &= 0 \\ |H(\omega_c)| &= -3 \text{ dB} & \varphi(\omega_c) &= -\pi/4 \\ |H(\infty)| &= -20 \text{ dB/Dekade} & \varphi(\infty) &= -\pi/2 \end{aligned}$$

Im nachstehenden Bodediagramm ist die lineare Annäherung rot gestrichelt eingezeichnet. Amplitudengang und Phasengang des RC-Tiefpassfilters lassen sich so auf sehr einfache Weise und trotzdem mit recht guter Präzision beschreiben.



Ist nun der Amplitudengang  $|X(\omega)|$  und der Phasengang  $\varphi_x(\omega)$  eines Signals  $x(t)$  gegeben oder berechnet worden, kann das Spektrum  $Y(\omega)$  des Ausgangssignal  $y(t)$  durch simple Addition berechnet werden:

$$|Y(\omega)| \text{ [dB]} = |X(\omega)| \text{ [dB]} + |H(\omega)| \text{ [dB]} \quad \varphi_y(\omega) = \varphi_x(\omega) + \varphi_h(\omega)$$

## 4.6 Filtereigenschaften von LTI-Systemen

Da sich die Beschreibung von LTI-Systemen im Frequenzbereich so einfach gestaltet, kann intuitiv und mit wenig Aufwand untersucht werden, welchen frequenzselektiven Einfluss sie auf durchlaufende Signale ausüben. Teilweise sind dies gezielt implementierte Veränderungen, wie beispielsweise bei Filtern. Teilweise handelt es sich aber (wie etwa bei einem Kabel) um Einwirkungen des Übertragungsmediums, welche eigentlich unerwünscht sind und die eventuell sogar durch ein vorgängiges oder anschliessendes Filter mit inversem Frequenzverhalten so weit wie möglich korrigiert werden.

Signale werden von linearen oder nicht-linearen Systemen in vielfacher Weise verformt, d.h. gefiltert und entzerrt, verstärkt und gedämpft, moduliert, etc. Dabei wird grundsätzlich zwischen linearen und nicht-linearen Verformungen sowie verzerrungsfreier Übertragung unterschieden:

- **Lineare Verzerrungen:** Sie werden durch LTI-Systeme erzeugt. Das Superpositionsprinzip und die Skalierung dürfen bei Berechnungen und Messungen angewandt werden. Zudem werden im Frequenzbereich alle Spektralanteile nur skaliert, d.h. es können bei einem durchlaufenden Signal zwar Frequenzkomponenten verschwinden (Skalierung mit Null), aber keine neuen Frequenzen entstehen.
- **Nicht-Lineare Verzerrungen:** Sie können nicht durch LTI-Systeme erzeugt werden. Superpositionsprinzip und Skalierung sind im allgemeinen ungültig, was eine einfache Berechnung erschwert. Durch Nicht-Linearitäten oder variantes Zeitverhalten können zudem neue Frequenzkomponenten bei einem durchlaufenden Signal entstehen oder gezielt erzeugt werden.
- **Verzerrungsfreie Übertragung:** ein System ist verzerrungsfrei, wenn Signale bei ihrer Übertragung nur verzögert oder gesamthaft (und somit nicht frequenzselektiv) in ihrer Amplitude skaliert, d.h. verstärkt oder gedämpft werden. Nicht-lineare Verzerrungen dürfen keine auftreten, womit nur LTI-Systeme verzerrungsfrei sein können. Diese dürfen aber wie erwähnt auch kein frequenzselektives Verhalten aufweisen.

### 4.6.1 Verzerrungsfreies LTI-System

Die Beschreibung von verzerrungsfreien Systemen im Zeitbereich lautet:

$$y(t) = k \cdot x(t - t_d) \quad (4.10)$$

Der frequenzunabhängige Faktor  $k \neq 0$  beschreibt dabei die Amplitudenverstärkung oder -dämpfung, die konstante Zeit  $t_d$  die Verzögerung (delay) durch das LTI-System. Mit dem Zeitverschiebungssatz der Fouriertransformation folgt für die Beschreibung im Frequenzbereich:

$$Y(\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_d} \cdot X(\omega) \quad (4.11)$$

Ein LTI-System ist somit verzerrungsfrei, falls gilt:

$$H(\omega) = k \cdot e^{-j\omega t_d} \quad (4.12)$$

Beziehungsweise separat für Amplituden- und Phasengang:

$$|H(\omega)| = k \quad (4.13)$$

$$\varphi(\omega) = -t_d \cdot \omega \quad (4.14)$$

Damit ein verzerrungsfreies LTI-System vorliegt, muss somit der Amplitudengang konstant sein und die Phase linear mit der Frequenz  $f$  bzw. Kreisfrequenz  $\omega$  anwachsen, bei kausalen Systemen zudem mit negativem

Vorzeichen.

Gleichzeitig können nun zwei verschiedenen Verzerrungsarten bei LTI-Systemen ausgemacht werden:

- **Amplitudenverzerrungen:**  $H(\omega) \neq k$ , d.h. je nach Frequenz werden Spektralanteile des durchlaufenden Signals unterschiedlich gewichtet. Bei LTI-Systemen werden aber keine neuen Frequenzkomponenten im Spektrum auftauchen.
- **Phasenverzerrungen:**  $\varphi(\omega)$  ist keine lineare Funktion von  $\omega$ . Die Frequenzanteile des Eingangssignals treten am Ausgang in unterschiedlicher Phasenlage zusammengesetzt wieder auf.

#### 4.6.2 Ideale Filter

Um Signale zu verarbeiten und zum Beispiel einen einzelnen Sender in einer FDMA-Übertragung wieder zu extrahieren, werden mit Filtern gezielte frequenzselektive Eigenschaften angestrebt. So soll beispielsweise ein einzelner Sender in einem Frequenzband herausgeschält und verstärkt werden, während alle anderen Sender in den übrigen Frequenzbereichen möglichst vollständig gedämpft werden sollen.

Folgende Grundtypen von Filtern werden unterschieden:

- **Ideales Tiefpassfilter:** ein ideales Tiefpassfilter (Englisch: low-pass filter, LPF) besitzt eine verzerrungsfreie Übertragung für Frequenzanteile unterhalb der Eckfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ . Oberhalb von  $f_c$  werden sämtliche Frequenzanteile vollständig gedämpft. Streng genommen hätte ein ideales Tiefpassfilter im Durchlassbereich einen Phasengang von  $\varphi = 0$ , womit es frei von Verzögerungen wäre, während im Sperrbereich (mit  $|H(\omega)| = 0$ ) der Phasengang nicht definiert ist. Ist eine kleine zeitliche Verzögerung  $t_d$  zulässig, ergibt sich im Durchlassbereich der lineare Phasengang  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_d$ .

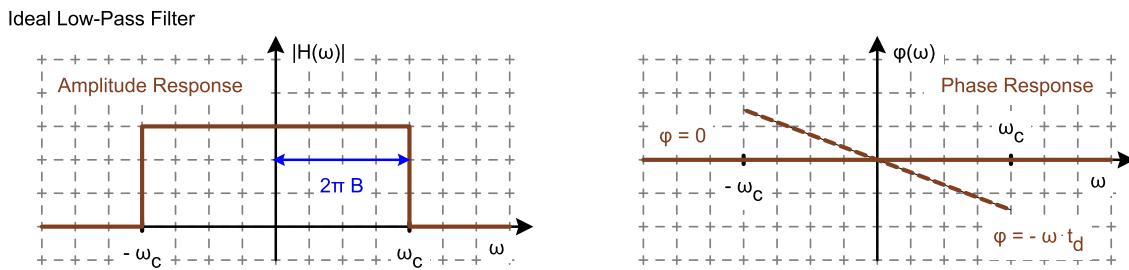


Abbildung 4.1: Ideales Tiefpassfilter

$$H(\omega) = \begin{cases} k \cdot e^{-j\omega t_d} & \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| < f_c \\ 0 & \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| > f_c \end{cases} \quad (4.15)$$

Die Bandbreite  $B$  eines idealen Tiefpassfilters entspricht dem in Hertz ausgedrückten Durchlassbereich auf der positiven Frequenzachse, d.h.  $B = f_c$  [Hz].

- **Ideales Hochpassfilter:** ein ideales Hochpassfilter (Englisch: high-pass filter, HPF) besitzt eine verzerrungsfreie Übertragung für Frequenzanteile oberhalb der Eckfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ . Unterhalb von  $f_c$  werden sämtliche Frequenzanteile vollständig gedämpft. Der Phasengang ist im Sperrbereich mit  $|H(\omega)| = 0$  wiederum nicht definiert und im Durchlassbereich streng genommen  $\varphi = 0$ . Ist eine kleine zeitliche Verzögerung  $t_d$  zulässig, ergibt sich im Durchlassbereich der lineare Phasengang  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_d$ .

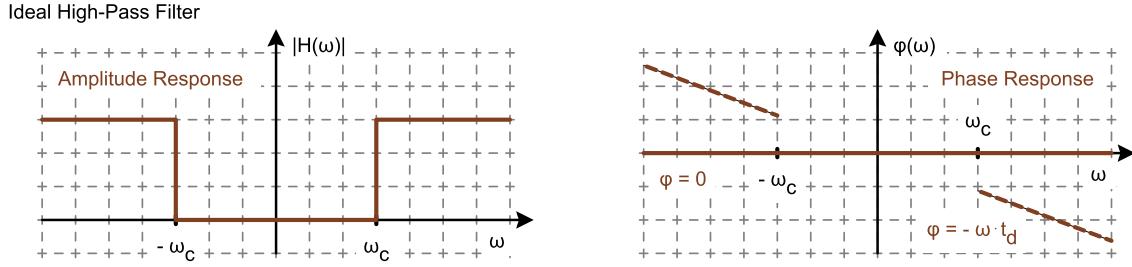


Abbildung 4.2: Ideales Hochpassfilter

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| < f_c \\ k \cdot e^{-j\omega t_d} & \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| > f_c \end{cases} \quad (4.16)$$

Bei Hochpassfiltern ist die Bandbreite  $B$  undefiniert, da der Durchlassbereich auf der Frequenzachse gegen hohe Frequenzen hin offen und somit unendlich gross ist.

- Ideales Bandpassfilter:** ein ideales Bandpassfilter (Englisch: band-pass filter, BPF) besitzt eine verzerrungsfreie Übertragung für Frequenzanteile zwischen den Eckfrequenzen  $f_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{2\pi}$  und  $f_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{2\pi}$ . Ausserhalb dieses Bereichs werden sämtliche Frequenzanteile vollständig gedämpft. Der Phasengang ist im Sperrbereich mit  $|H(\omega)| = 0$  wiederum nicht definiert und im Durchlassbereich streng genommen  $\varphi = 0$ . Ist eine kleine zeitliche Verzögerung  $t_d$  zulässig, ergibt sich im Durchlassbereich der lineare Phasengang  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_d$ .

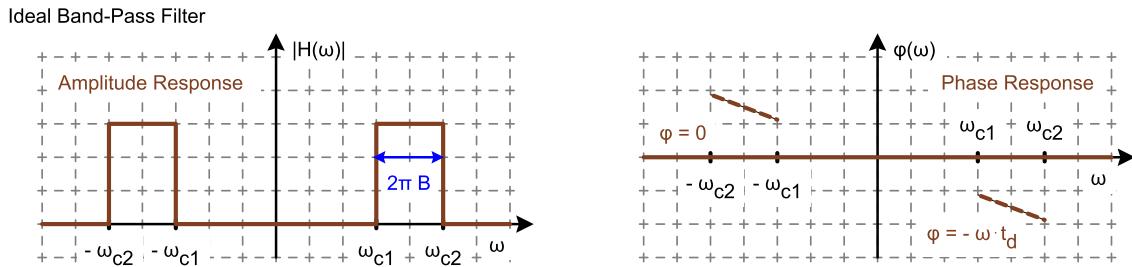


Abbildung 4.3: Ideales Bandpassfilter

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| < f_{c1}, \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| > f_{c2} \\ k \cdot e^{-j\omega t_d} & f_{c1} < \left| \frac{\omega}{2\pi} \right| < f_{c2} \end{cases} \quad (4.17)$$

Die Bandbreite  $B$  eines idealen Bandpassfilters entspricht dem in Hertz ausgedrückten Durchlassbereich auf der positiven Frequenzachse, d.h.  $B = f_{c2} - f_{c1}$  [Hz].

- Ideale Bandsperre:** eine ideale Bandsperre (Englisch: band-stop filter, BSF) besitzt eine verzerrungsfreie Übertragung für Frequenzanteile ausserhalb der Eckfrequenzen  $f_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{2\pi}$  und  $f_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{2\pi}$ . Innerhalb dieses Bereichs werden sämtliche Frequenzanteile vollständig gedämpft. Der Phasengang ist im Sperrbereich mit  $|H(\omega)| = 0$  wiederum nicht definiert und im Durchlassbereich streng genommen  $\varphi = 0$ . Ist eine kleine zeitliche Verzögerung  $t_d$  zulässig, ergibt sich im Durchlassbereich der lineare Phasengang  $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_d$ .

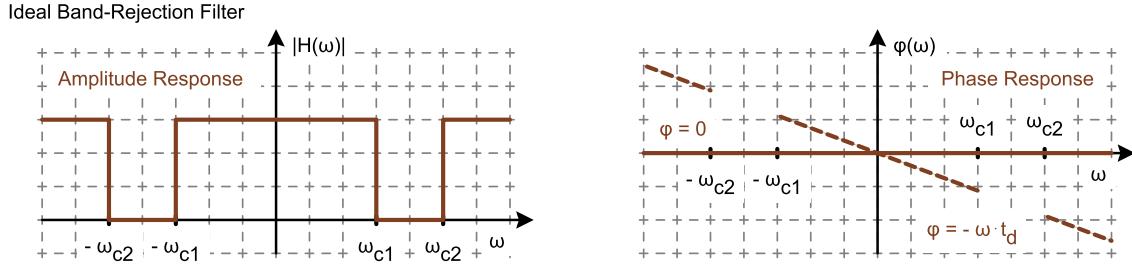


Abbildung 4.4: Ideales Bandpassfilter

$$H(\omega) = \begin{cases} k \cdot e^{-j\omega t_d} & |\frac{\omega}{2\pi}| < f_{c1}, |\frac{\omega}{2\pi}| > f_{c2} \\ 0 & f_{c1} < |\frac{\omega}{2\pi}| < f_{c2} \end{cases} \quad (4.18)$$

Die Bandbreite  $B$  einer idealen Bandsperre entspricht dem in Hertz ausgedrückten *Sperrbereich* auf der positiven Frequenzachse, d.h.  $B = f_{c2} - f_{c1}$  [Hz]. Im Gegensatz zum Tief- und Bandpassfilter bezieht sich also die Bandbreite nicht auf den Durchlassbereich.

- **Ideales Allpassfilter:** ein ideales Allpassfilter (Englisch: all-pass filter) überträgt die Amplituden sämtlicher Frequenzanteile mit gleicher Skalierung  $k$ , besitzt aber einen gezielt gewählten frequenzabhängigen Phasengang.

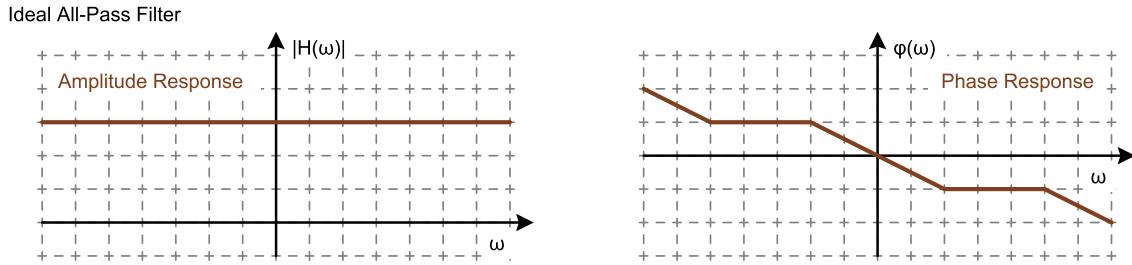


Abbildung 4.5: Ideales Allpassfilter

$$H(\omega) = k \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.19)$$

Da keine Frequenzanteile unterdrückt werden, ist bei einem Allpassfilter die Bandbreite  $B$  undefiniert.

### 4.6.3 Kausale Filter

Werden die Frequenzantworten  $H(\omega)$  der idealen Filter zur Impulsantwort  $h(t)$  rücktransformiert, ergeben sich acausale Funktionen. Dies bedeutet aber, dass ideale Filter nicht realisierbar sind.

Realisierbare, kausale Filter bilden immer einen Kompromiss, zwischen Flankensteilheit vom Durchlass- zum Sperrbereich, frequenzabhängiger Welligkeit im Durchlassbereich, nicht idealer Dämpfung im Sperrbereich und Linearität des Phasengangs.

Je nach zulässigem Kompromiss sind verschiedene Vorgehensweisen bei der Realisierung von Filtern geeignet. Bekannte Vertreter dieser Filtertypen sind beispielsweise Butterworth-, Chebyshev-, Cauer- oder Besselfilter.

Die Eckfrequenz von realen Filtern ist nicht klar ersichtlich, da sie einen kontinuierlichen Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich haben. Üblicherweise wird daher der 3dB-Punkt als Eckfrequenz angenommen,

d.h. die Frequenz, wo die Amplitudendämpfung in Richtung Sperrbereich einen Wert  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$  erreicht hat, und die Leistung um den Faktor 2 kleiner ist als im Durchlassbereich. Als Bandbreite (oft auch 3dB-Bandbreite) bezeichnet man den Durchlassbereich bis zum 3dB-Punkt. Diese Definition ist praxisnah gewählt, muss aber bei sehr unförmigen Frequenzgängen nicht zwingend auch eindeutig sein.

Als Beispiel eines realen Filters ist unten ein Chebyshev-Tiefpassfilter 5. Ordnung abgebildet, bei welchem 1dB Ripple im Durchlassbereich zugelassen werden, damit die Flankensteilheit zwischen Durchlassbereich und Sperrbereich möglichst ausgeprägt wurde. Dieser Rippel sowie der Phasengang, welcher auch im Durchlassbereich nicht perfekt linear ist, führen dazu, dass auch Signale, deren Frequenzanteile alle tiefer als die Eckfrequenz des Filters sind, durch dieses Chebyshev-Filter leicht verzerrt werden.

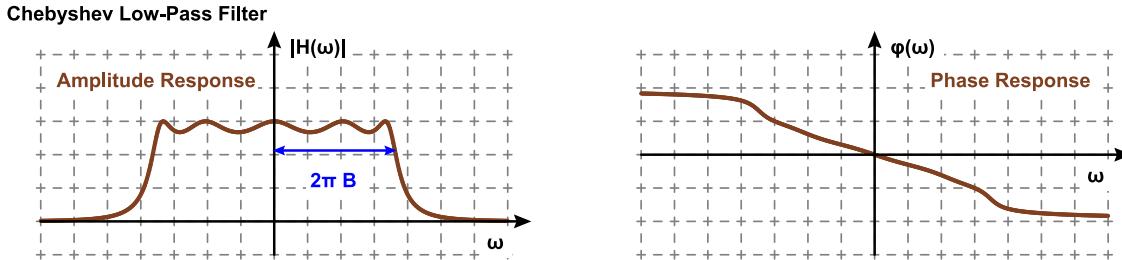


Abbildung 4.6: Chebyshev-Tiefpassfilter

#### 4.6.4 Quadraturfilter

Beim Quadraturfilter handelt es sich um ein Allpassfilter, welches die Phase sämtlicher Frequenzanteile des Signals um  $-\frac{\pi}{2}$ , d.h. eine Viertelperiode dreht. Dies entspricht einer grossen Verzögerung für tiefe Frequenzanteile und einer kurzen Verzögerung für hohe Frequenzkomponenten.

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & \omega > 0 \\ e^{+j\pi/2} & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Dies kann mit der Vorzeichenfunktion sgn kompakt als  $H(\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega)$  geschrieben werden. Die Impulsantwort berechnet sich zu

$$h(t) = \frac{1}{\pi \cdot t} \quad (4.21)$$

und ist somit ebenfalls acausal. Die Faltung im Zeitbereich von Eingangssignal mit der Impulsantwort des Quadraturfilters  $\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi \cdot t}$  wird als Hilbert Transformation bezeichnet, obwohl der Zeitbereich bei dieser Integraltransformation nicht verlassen wird.

Technisch gesehen kann ein Quadraturfilter nur für gewisse Frequenzbereiche approximiert werden, ermöglicht aber ganz interessante Anwendungen wie z.B. die Einseitenband-Amplitudenmodulation. Die tiefere mathematische Bedeutung der Hilbert-Transformation, z.B. Zusammenhänge zwischen Amplituden- und Phasengang, bzw. Real- und Imaginärteil eines Minimum-Phasen-Systems, wird hier nicht näher erläutert.



# Kapitel 5

## Analoge Modulationsarten

### 5.1 Wozu dienen Modulationen?

Bei einer Modulation wird ein Trägersignal (z.B. ein Sinus- oder Rechtecksignal) von einem Nachrichtensignal  $m(t)$  geformt. Das Nachrichtensignal  $m(t)$  prägt so seinen Signalverlauf auf einen Parameter des Trägersignals auf. Ziel ist es, das Nachrichtensignal vom Frequenzbereich seines Basisbands in jenen des gewünschten Übertragungsbands zu bringen.

Als Basisband bezeichnet man den ursprünglichen Frequenzbereich des Nachrichtensignals  $m(t)$ , welcher sich typischerweise von 0 Hz bis zur Bandbreite  $B_m$  von  $m(t)$  erstreckt. Das Übertragungsbild ist meist in einem viel höheren Frequenzbereich angesiedelt, wo die physikalischen Eigenschaften des Kanals für eine Übertragung besser geeignet sind und/oder welcher vom Gesetzgeber für die Übertragung zugelassen ist. Gelingt es zudem, die Bandbreite im Übertragungsbild auf einen möglichst kleinen Nutzbereich zu beschränken, können sich viele verschiedene Sender den Kanal durch Frequenzmultiplexing (FDMA) teilen.

Beim Signal im Übertragungsbild handelt es sich typischerweise um ein Bandpasssignal. Bandpasssignale besitzen ein Spektrum, welches nicht bis zu den tiefen Frequenzen im DC-Bereich reicht, sondern um eine Mittenfrequenz  $f_c$  gruppiert ist. Typische Bandpasssignale sind die in diesem Kapitel behandelten modulierten Trägersignale. Oft (aber nicht zwingend) ist ihre Bandbreite  $B_{BP}$  im Vergleich zu ihrer Mittenfrequenz  $f_c$  klein (d.h.  $B_{BP} \ll f_c$ ), so dass es sich um schmalbandige Bandpasssignale handelt.

Ein weiterer Vorteil von Modulationen wird in einem späteren Kapitel aufgezeigt: durch geeignete Modulationsarten wie Frequenz- und Phasenmodulation kann auch die Reichweite der Übertragung verbessert werden. So erzielt man entweder die gleiche Reichweite mit geringerer Sendeleistung oder bei gleicher Leistung kann die Distanz des maximalen Empfangsbereichs erhöht werden. Der Preis für diese Vorteile liegt allerdings in einer erhöhten Bandbreite des Bandpasssignals im Übertragungsbild.

Beim Empfänger wird durch Demodulation das modulierte Signal vom Übertragungsbild wieder zurück ins Basisband geholt. Dabei soll das ursprüngliche Nachrichtensignal  $m(t)$  wieder so originalgetreu wie möglich vorliegen oder, im Falle von digitalen Modulationsarten, die durch  $m(t)$  repräsentierte Information möglichst frei von Bitfehlern decodiert werden.

Das Nachrichtensignal  $m(t)$  ist das modulierende Signal. Es liegt oft in normierter Form als  $m_n(t)$  vor, d.h. dimensionslos und mit  $|m_n(t)| \leq 1$ . Da durch einen Gleichanteil kein zusätzlicher Informationsgehalt pro Zeiteinheit übertragen werden kann, dient er oft nur als Hilfssignal bei einer schaltungstechnischen Implementierung. Um Sendeleistung zu sparen, liegt  $m(t)$  zudem meist als mittelwertfreies Signal vor, d.h.  $\langle m(t) \rangle = 0$ .

Beim nicht-modulierten Trägersignal  $x_c(t)$  handelt es sich um ein informationsloses Hilfssignal. Es wird durch die Modulation zum modulierten Signal. Im Hinblick auf Frequenzmultiplexing ist dabei ein sinusförmiges Trägersignal besonders geeignet, da dieses – frei von Oberwellen – auch in modulierter Form am wenigsten Bandbreite im Übertragungskanal belegt. Spielt diese Bandbreite bei der Übertragung des modulierten Signals keine Rolle, da beispielsweise Frequenzmultiplexing nicht gefordert wird, eignet sich als Trägersignal aber beispielsweise auch ein Rechtecksignal. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass es mit rein digitaler Schaltungstechnik äußerst einfach erzeugt werden kann.

### 5.1.1 Modulation eines sinusförmigen Trägersignals

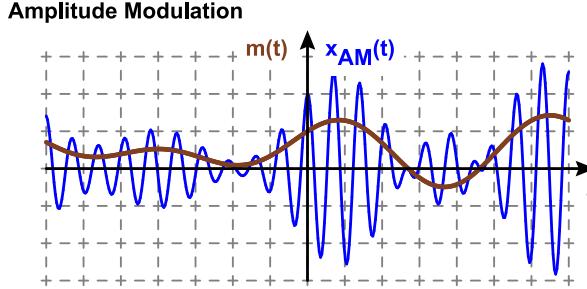
Ein nicht-moduliertes sinusförmiges Trägersignal hat die Form  $x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \varphi)$ . Die Trägeramplitude  $A_c$  und die Phase  $\varphi$  sind beim nicht-modulierten Trägersignal konstant, können aber von einem Nachrichtensignal im Sinne der Modulation verändert werden.

Der dritte Parameter des Trägersignals, die Trägerkreisfrequenz  $\omega_c$  bzw. die Trägerfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ , steht bei der üblichen mathematischen Beschreibung nicht als Parameter für die Modulation zur Verfügung. Statt dessen kann mit der Trägerfrequenz das Übertragungsbereich des modulierten Signals auf der Frequenzachse frei gewählt werden.

Diese Gepflogenheit schränkt aber die Vielfalt der Modulationsarten nicht ein: ein Nachrichtensignal kann auch übertragen werden, indem es die Momentanfrequenz (instantaneous frequency)  $\omega_i$  eines Trägers verändert. Mathematisch wird dann eine solche Frequenzmodulation auf die zeitliche Ableitung der Phase abgebildet:  $\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\varphi}{dt}$ . Details dazu werden bei der Behandlung von Phasen- und Frequenzmodulation erläutert.

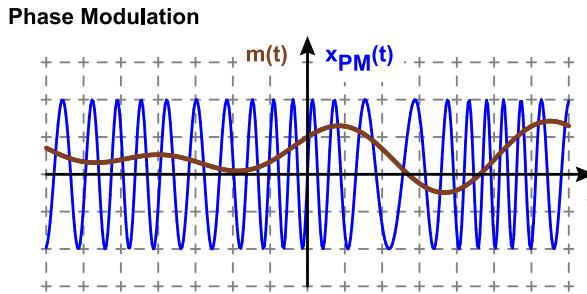
Bei einem sinusförmigen Trägersignal sind somit drei grundlegende Modulationsarten möglich:

- **Amplitudenmodulation:** das Nachrichtensignal  $m(t)$  prägt seinen Verlauf auf die Amplitude  $A(t)$  auf.



**Abbildung 5.1:** Amplitudenmodulation

- **Phasenmodulation:** das Nachrichtensignal  $m(t)$  prägt seinen Verlauf auf die Phase  $\varphi(t)$  auf.



**Abbildung 5.2:** Phasenmodulation

- **Frequenzmodulation:** das Nachrichtensignal  $m(t)$  prägt seinen Verlauf auf die momentane Kreisfrequenz  $\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$  auf.

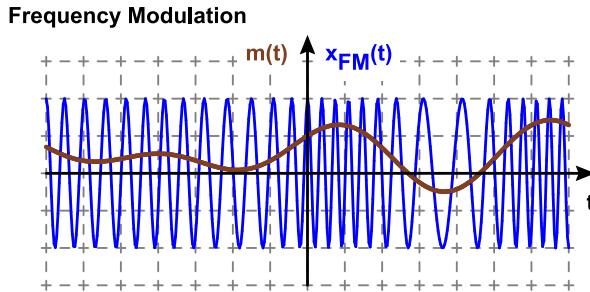


Abbildung 5.3: Frequenzmodulation

Frequenzmodulation und Phasenmodulation können dabei nicht kombiniert werden, da jede Frequenzmodulation die Phase  $\varphi(t)$  ebenso verändert, wie auch jede Phasenmodulation die momentane Kreisfrequenz  $\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$  beeinflusst. Die beiden Parameter  $\varphi(t)$  und  $\omega_i(t)$  können somit nicht unabhängig voneinander verändert werden. Oft werden Phasenmodulation und Frequenzmodulation unter dem Begriff Winkelmodulation zusammengefasst und mathematisch in einheitlicher Weise behandelt.

Amplitude und Winkel sind dagegen unabhängige Parameter, welche beim selben Trägersignal zum Beispiel von zwei beliebigen Nachrichtensignalen moduliert werden können. Dank dieser Unabhängigkeit der beiden Parameter können bei der Demodulation die beiden modulierenden Signale wieder vollständig separiert werden.

Zu diesen hybriden Verfahren gehört die Quadraturamplitudenmodulation sowie – in spezieller Weise – auch die Einseitenbandmodulation. Diese beiden Modulationsarten erlauben, bei gleicher Bandbreite mehr analoge Signalverläufe bzw. mehr digitale Information zu übertragen, als dies bei reiner Amplitudenmodulation oder Winkelmodulation der Fall ist. Aus diesem Grund ist speziell Quadraturamplitudenmodulation – in reiner oder weiterentwickelter Form – in sehr vielen modernen Kommunikationssystemen anzutreffen.

### 5.1.2 Modulation eines rechteckförmigen Trägersignals

Ein nicht moduliertes rechteckförmiges Trägersignal hat die Form  $x_c(t) = A_c \cdot f(t, f_p, \tau, \Delta T)$ . Neben der Amplitude  $A_c$  sind innerhalb der sehr formal gehaltenen Funktion  $f()$  einige wichtige Parameter aufgeführt und nachfolgend erläutert. Weitere, aufwendigere Modulationsmuster mit zusätzlichen Parametern sind für ein Rechtecksignal durchaus denkbar. Namentlich bekannt sind aber vor allem folgende grundlegende Modulationsarten:

- **Pulsamplitudenmodulation (pulse-amplitude modulation, PAM):** je höher die Amplitude von  $m(t)$ , desto grösser die Amplitude  $A_c(t)$  des Rechtecksignals.

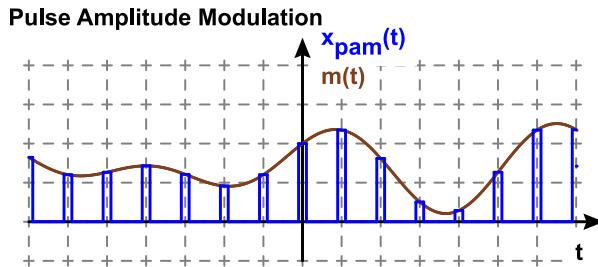


Abbildung 5.4: Pulsamplitudenmodulation (PAM)

- **Pulsweitenmodulation (pulse-width modulation, PWM):** je höher die Amplitude von  $m(t)$ , desto grösser die Pulsbreite  $\tau(t)$ .

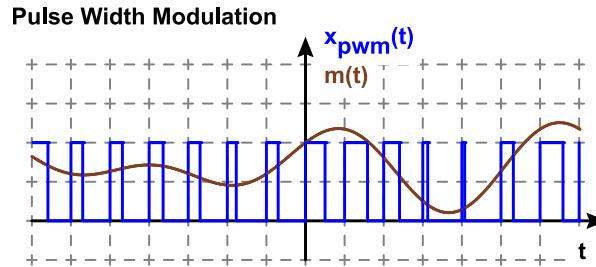


Abbildung 5.5: Pulsweitenmodulation (PWM)

- **Pulsphasenmodulation (pulse-position modulation PPM):** je höher die Amplitude von  $m(t)$ , desto grösser die Verzögerung  $\Delta T(t)$  des Pulses im Vergleich zur nominalen Position im nicht-modulierten Rechtecksignal.

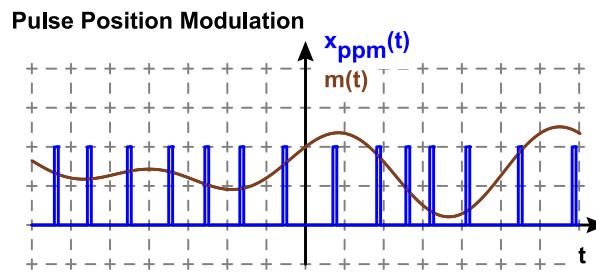


Abbildung 5.6: Pulsphasenmodulation (PPM)

- **Pulsfrequenzmodulation (pulse-frequency modulation PFM):** je höher die Amplitude von  $m(t)$ , desto grösser die momentane Pulsrate  $f_p(t)$  im Vergleich zur nominalen Pulsrate des nicht-modulierten Rechtecksignal.

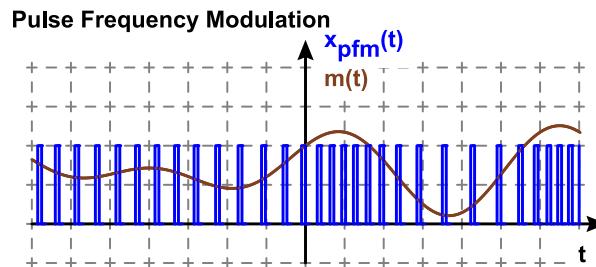


Abbildung 5.7: Pulsfrequenzmodulation (PFM)

## 5.2 Trägersignale für Amplitudenmodulation

Bei Amplitudenmodulation prägt das Nachrichtensignal  $m(t)$  seinen Signalverlauf einem Trägersignal auf. Dieses Trägersignal ist vor der Modulation ein informationsloses, periodisches Hilfssignal, z.B. ein Rechtecksignal oder ein Sinussignal.

Bei der Amplitudenmodulation werden nun die Grundharmonische des Trägersignals wie auch – falls vorhanden – sämtliche Oberwellen durch das Nachrichtensignal  $m(t)$  gewichtet. Diese fortlaufende Skalierung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation von modulierendem Signal  $m(t)$  mit dem periodischen Trägersignal  $x_c(t)$ . Sie kann auch einzeln auf die Harmonischen  $x_{ci}(t)$  des Trägers angewandt werden:

$$m(t) \cdot x_c(t) = \sum_{i=1}^{\infty} m(t) \cdot x_{ci}(t) \quad (5.1)$$

Aufgrund des Modulationssatzes der Fouriertransformation ist sofort ersichtlich, dass durch diese Multiplikation die diskreten Spektrallinien des Trägersignals  $x_c(t)$  im Spektrum verbreitert werden, nicht nur bei der Grundharmonischen, sondern auch bei allen Oberwellen. Um im Hinblick auf Frequenzmultiplexing möglichst wenig Bandbreite des Übertragungskanals mit dem modulierten Signal zu belegen, sollte das Trägersignal somit frei von Oberwellen sein, d.h. einen sinusförmigen Verlauf besitzen.

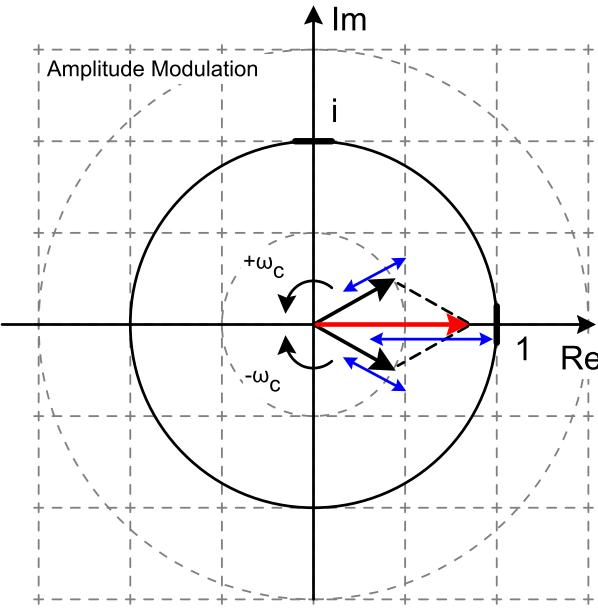
Einerseits besitzt also ein rein sinusförmiges Signal bezüglich der Bandbreiteneffizienz Vorteile gegenüber anderen periodischen Trägersignalen. Andererseits können bei vorhandener Linearität die Berechnungen am sinusförmigen Trägersignal direkt auch auf die Oberwellen von anderen periodischen Trägersignalen angewandt werden. Beide Erkenntnisse rechtfertigen, dass in diesem Kapitel nur noch Modulationen von sinusförmigen Trägersignalen betrachtet werden. Dabei ist der Cosinus das bevorzugte Trägersignal, da er als gerades Signal ein reellwertiges Spektrum besitzt. Somit wird in nachfolgenden Abschnitten jeweils folgendes nicht moduliertes Trägersignal verwendet:

$$x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) \quad (5.2)$$

Bei der Fouriertransformation wird dieses Trägersignal gemäß der Eulerschen Formel wie folgt in zwei komplexe Schwingungen augeteilt:

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} \cdot e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} \cdot e^{-j\omega_c t} \quad (5.3)$$

Die negative Frequenz der zweiten komplexen Schwingung ist zwingend erforderlich, damit sich in der Summe immer ein reellwertiges Cosinus-Trägersignal ergibt. Die beiden Schwingungen sind als schwarze Zeiger in nachfolgender komplexen Ebene dargestellt, wobei vereinfachend  $A_c = 1$  angenommen wurde. Sie drehen sich mit der Kreisfrequenz  $+\omega_c$  bzw.  $-\omega_c$  um den Ursprung.



**Abbildung 5.8:** Zeigerdiagramm eines amplitudenmodulierten Trägersignals

Addiert ergeben die beiden komplexwertigen Zeiger den rot dargestellten Vektor, welcher immer reellwertig ist und dessen Amplitude gerade die Cosinusschwingung  $x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t)$  des nicht-modulierten Trägers vollzieht.

Wird die Amplitude des Trägersignals nun moduliert, was im Vergleich zur Kreisbewegung der Zeiger ein eher langsam ablaufender Vorgang ist, verändert sich die Länge der beiden komplexwertigen Zeiger synchron, was mit den beiden blauen Pfeilen angedeutet ist. Damit wird aber auch die schneller vollzogene cosinusförmige Bewegung auf der reellen Achse noch zusätzlich mit der sich eher langsam verändernden Amplitude  $m(t)$  des Nachrichtensignal gewichtet, was ebenfalls mit dem blauen Doppelpfeil angedeutet ist.

Diese Darstellung eines Bandpasssignals in der komplexen Ebene ist zwar korrekt, aber etwas überladen und damit auch nicht ganz übersichtlich. Dank der weiter unten behandelten äquivalenten Basisbanddarstellung eines Bandpasssignals kann dieses Zeigerdiagramm vereinfacht werden. Dies führt zu einer übersichtlichen Charakterisierung verschiedener Modulationsarten und ist im Zusammenhang mit Rauschsignalen nützlich, um die Qualität einer Übertragung abschätzen zu können.

## 5.3 Gewöhnliche Amplitudenmodulation

### 5.3.1 Gewöhnliche AM im Zeitbereich

Durch eine Amplitudenmodulation bildet sich der Signalverlauf des Nachrichtensignals  $m(t)$  auf die Umhüllende des modulierten Signals  $x_{AM}(t)$  ab. Um beim Empfänger das Nachrichtensignal wieder zurückgewinnen zu können, scheint es somit naheliegend, für die Demodulation eine Schaltung zu verwenden, welche den Spitzenwerten des modulierten Signals folgt. Ein solcher Hüllkurvendetektor kann sehr einfach realisiert werden:

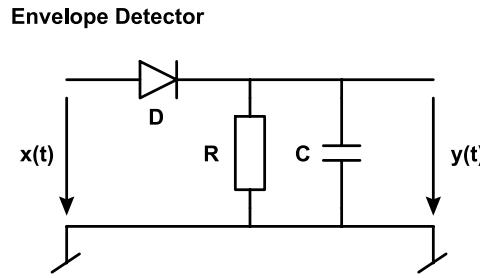


Abbildung 5.9: Hüllkurvendetektor

Die Diode  $D$  sorgt dafür, dass die Spitzenwerte des modulierten Signals  $x(t)$  zur Kapazität  $C$  hin durchgelassen werden, wo dieser maximale Amplitudenwert gehalten wird. Mit einem geeignet dimensionierten Widerstand  $R$  wird die Kapazität mit kontrollierter Geschwindigkeit wieder entladen. Als Ausgangssignal  $y(t)$  erhält man die resultierende Hüllkurve.

Diese naheliegende Lösung funktioniert aber nur bei positiven Amplituden des Nachrichtensignals  $m(t)$ . Besitzt aber das modulierende Nachrichtensignal  $m(t)$  zwischenzeitlich ein negatives Vorzeichen, müsste der vorhin vorgestellte Hüllkurvendetektor nicht mehr den positiven Spitzenwerten, sondern den negativen Maxima des modulierten Signals folgen.

Dadurch wird aber die Realisierung dieser Detektorschaltung deutlich komplizierter. Die Ergänzung mit einem zweiten Hüllkurvendetektor für negative Amplituden wäre dabei nur ein Teil des erhöhten Aufwands. Zusätzlich wird noch eine Schaltung benötigt, welche entscheidet, in welchen Zeitabschnitten die positiven und in welchen die negativen Spitzenwerte des modulierten Signals für die Demodulation des Nachrichtensignals verwendet werden sollen. Beispielsweise müssten dazu Phasensprünge von  $180^\circ$  im Trägersignal detektiert werden, welche bei jedem Nulldurchgang des modulierenden Nachrichtensignals  $m(t)$  auftreten.

Aus historischer Sicht war jedoch eine sehr einfache Empfangsschaltung Voraussetzung, dass sich das Radio in den 1930er Jahren als Massenkommunikationsmittel etablieren konnte. Die wohl einfachste Massnahme war, dafür zu sorgen, dass das modulierende Signal gar nie negative Werte annehmen kann. Durch Beigabe eines genügend grossen DC-Offsets, welcher in der Lage ist, auch die grössten negativen Spitzenwerte (d.h. die Talwerte) zu kompensieren, kann dies sehr einfach erreicht werden.

In normierter Schreibweise, bei welchem das dimensionslose Nachrichtensignal  $m_n(t)$  eine maximale Amplitude  $|m_n(t)| \leq 1$  besitzt, reicht ein DC-Offset von  $x_{DC} = 1$  aus, um sämtliche negativen Amplitudenwerten von  $m_n(t)$  zu kompensieren. Die folgende Gleichung gibt die gewöhnliche Amplitudenmodulation (Englisch: ordinary AM) im Zeitbereich wieder:

$$x_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + \mu \cdot m_n(t)) \cdot \cos(\omega_c t). \quad (5.4)$$

Der zusätzliche Parameter, der Modulationsgrad  $\mu$ , gibt an, wie stark die negativen Werte des Nachrichtensignal  $m_n(t)$  den beigefügten DC-Offset  $x_{DC} = 1$  ausnutzen sollen. Bei  $\mu = 100\%$  ist die Aussteuerung maximal und die kleinsten Amplitudenwerte des DC-beladenen modulierenden Signals sind gerade 0. Bei  $\mu > 100\%$  werden wieder negative Amplitudenwerte im modulierenden Signal auftreten. Man spricht dann von einer *Übermodulation*, welche vom Hüllkurvendetektor nicht richtig verarbeitet werden kann. Ist  $\mu$  deutlich kleiner als 100%, wird unverhältnismässig viel Sendeleistung nur für den beigefügten DC-Anteil verwendet, welcher aber als Hilfssignal beim Empfänger weggefiltet wird und so keinen Beitrag zur Empfangsqualität des Nachrichtensignals liefert.

Gewöhnliche AM hat im Zeitbereich folgenden möglichen Signalverlauf:

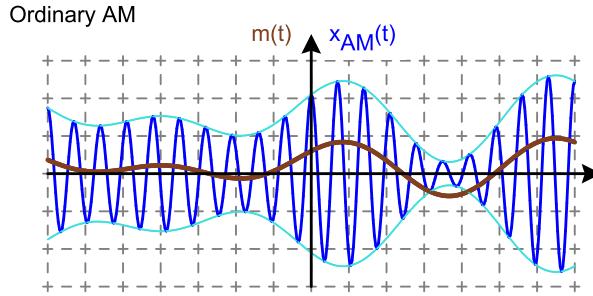


Abbildung 5.10: Zeitlicher Verlauf von gewöhnlicher AM

In der zusätzlich dargestellten Umhüllenden erkennt man deutlich den um den beigefügten DC-Offset ergänzten Signalverlauf des Nachrichtensignals  $m(t)$ .

Nachfolgend ist ein Blockschaltbild eines Modulators dargestellt, welcher mit Hilfe des Trägersignals  $x_c(t) = \cos(\omega_c \cdot t)$  eine gewöhnliche AM mit Modulationsgrad  $\mu$  generiert, welche nach der Modulation mit einem Leistungsverstärker auf die Amplitude  $A_c$  verstärkt wird.

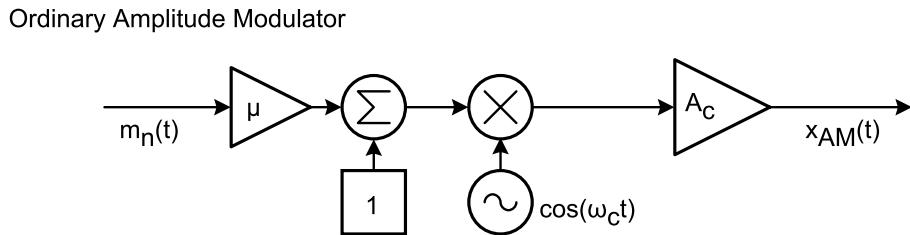


Abbildung 5.11: Blockschaltbild eines Modulators für gewöhnliche AM

### 5.3.2 Gewöhnliche AM im Frequenzbereich

Ein Ziel der Modulation besteht darin, mehrere Nachrichtensignale von verschiedenen Sendern gleichzeitig in verschiedenen Frequenzbereichen über den gleichen Kanal zu senden. Um dieses Frequenzmultiplexing störungsfrei und mit einer Vielzahl von Teilnehmern durchführen zu können, muss die spektrale Beschaffenheit der modulierten Signale möglichst gut bekannt sein.

Dank des Modulationssatzes der Fouriertransformation lässt sich das Spektrum eines gewöhnlichen AM Signals sofort bestimmen:

$$A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \cos(\omega_c t) \xrightarrow{\mathcal{F}} A_c \pi (\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)) + \frac{A_c \mu}{2} \cdot (M_n(\omega - \omega_c) + M_n(\omega + \omega_c)) \quad (5.5)$$

Das zweiseitige Spektrum des Nachrichtensignals  $M(\omega)$  wird mit dem Faktor  $\frac{A_c \mu}{2}$  gewichtet und einmal nach  $+\omega_c$  und einmal nach  $-\omega_c$  verschoben. Dies führt im Vergleich zum Basisbandsignal zu einer Verdopplung der Bandbreite mit je einem Seitenband links und rechts der Trägerfrequenz. Weiter beinhaltet das Amplitudendichtespektrum je eine Deltafunktion mit Gewicht  $A_c \pi$  an den Stellen  $\pm \omega_c$ , d.h. ein fester, nicht-modulierter Amplitudenanteil bei der eigentlichen Trägerfrequenz.

Das Amplitudendichtespektrum ist im nachfolgenden Graphen für  $A_c = 1$  und  $\mu = 100\%$  dargestellt.

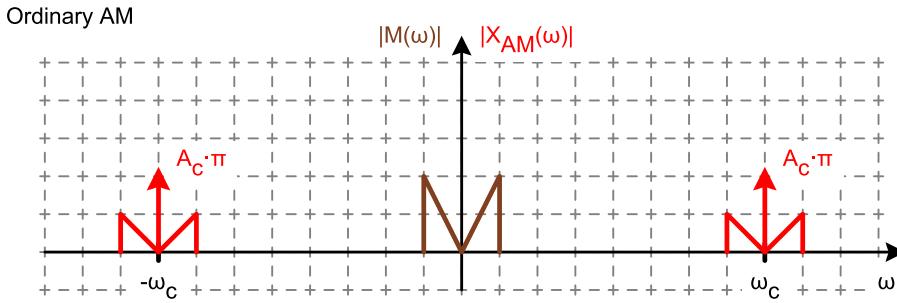


Abbildung 5.12: Amplitudendichtespektrum von gewöhnlicher AM

Für das Nachrichtensignal wurde in diesem Graph mit einem Keil symbolhaft ein Amplitudendichtespektrum  $|M(\omega)|$  gewählt, bei welchem der Anteil auf der positiven und jener auf der negativen Frequenzachse visuell gut auseinandergehalten werden können. Ein solch geformtes Spektrum wird aber in der Praxis kaum je auftreten: bei periodischen Testsignalen besteht das Nachrichtensignal aus einem Linienspektrum, bei einem Energiesignal mit zufälligem Verlauf aus einem kontinuierlichen Spektrum, welches jedoch nicht auf diese einfache Art geformt sein wird.

### 5.3.3 Äquivalente Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM

Das Zeigerdiagramm des übertragenen Signals in der komplexen Ebene, wie es in der Einführung der Amplitudenmodulation dargestellt wurde, kann in vielen Fällen vereinfacht werden, ohne dass Information verloren geht.

Da es sich prinzipiell bei allen tatsächlich übertragenen Signalen um reellwertige und nicht komplexwertige Signale handelt, ist der mit  $-\omega_c$  rotierende Zeiger immer das konjugiert-komplexe Abbild des mit  $+\omega_c$  rotierenden Zeigers, unabhängig davon, ob eine Modulation des Trägersignals stattfindet. Dieser zweite rotierende muss somit nicht speziell dargestellt werden, auch wenn er natürlich immer als additive Ergänzung benötigt wird, um aus der komplexwertigen Schwingung ein reell-wertiges Sinus- oder Cosinussignal zu bilden.

Die Summe der beiden in entgegengesetzter Richtung drehenden Vektoren kann auch als eine mit dem Faktor 2 skalierte Realteilbildung jedes einzelnen Vektors aufgefasst werden:

$$x_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cos(\omega_c t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \frac{1}{2} (e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) = \Re [A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot e^{j\omega_c t}]$$

Auch die eigentliche Drehbewegung mit  $+\omega_c$  des verbleibenden Vektors, die Multiplikation mit  $e^{j\omega_c t}$  beinhaltet wenig Information. Im Zeitbereich entspricht die Trägerfrequenz  $f_c$  der reziproken Periodendauer  $T$  der Trägerschwingung, und im Frequenzbereich nur gerade demjenigen Ort der Frequenzachse, wohin das Spektrum des modulierenden Signals  $M(\omega)$  gemäß dem Frequenzverschiebungssatzes hingeschoben wird.

Zusammenfassend werden also folgende Vereinfachungen gemacht: anstatt die gesamte reellwertige Trägerschwingung darzustellen, kann die Realteilbildung (bzw. der zweite konjugiert-komplexe Zeiger) und die Drehung (bzw. Frequenzverschiebung) weggelassen werden und es verbleibt für den mit gewöhnlicher AM modulierten Cosinusträger folgendes äquivalentes Basisbandsignal:

$$x_{eq}(t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t))$$

Der mögliche Verlauf dieses Signals im Sinne einer Ortskurve in der komplexen Ebene entspricht der äquivalenten Basisbanddarstellung eines mit gewöhnlicher AM modulierten Cosinusträgers. Dies ist nachstehend mit einem Modulationsgrad  $\mu = 25\%$  und  $A_c = 1$  dargestellt:

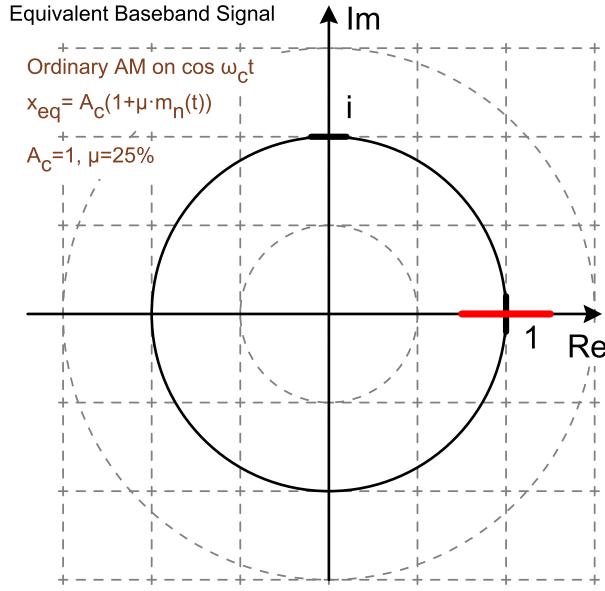


Abbildung 5.13: Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit Cosinus-Trägersignal

Dieselben Überlegungen können alternativ auch für einen modulierten Sinusträger vollzogen werden:

$$x_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \sin(\omega_c t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \frac{1}{2j} (e^{+j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}) = \Re [-j \cdot A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot e^{j\omega_c t}]$$

Dies führt zu folgendem äquivalenten Basisbandsignal:

$$x_{eq}(t) = -j \cdot A_c \cdot (1 + \mu m_n(t))$$

Mit wiederum frei gewählten Parametern  $A_c = 1$  und dem Modulationsgrad  $\mu = 50\%$  ist nachfolgend die äquivalente Basisbanddarstellung eines mit gewöhnlicher AM modulierten Sinusträgers dargestellt:

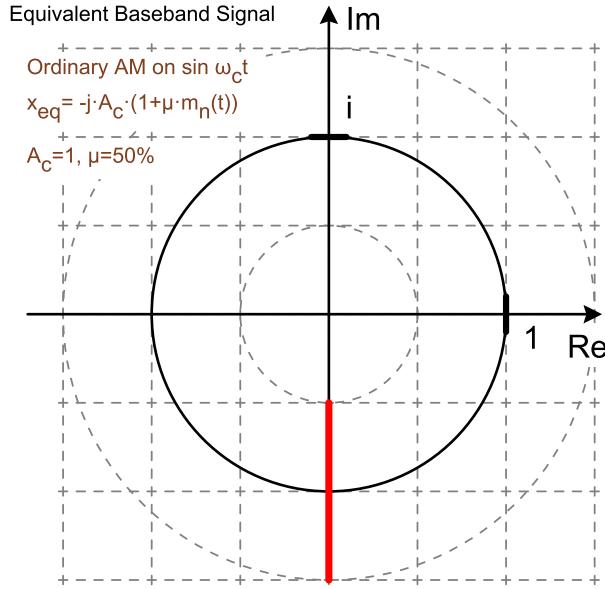


Abbildung 5.14: Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit Sinus-Trägersignal

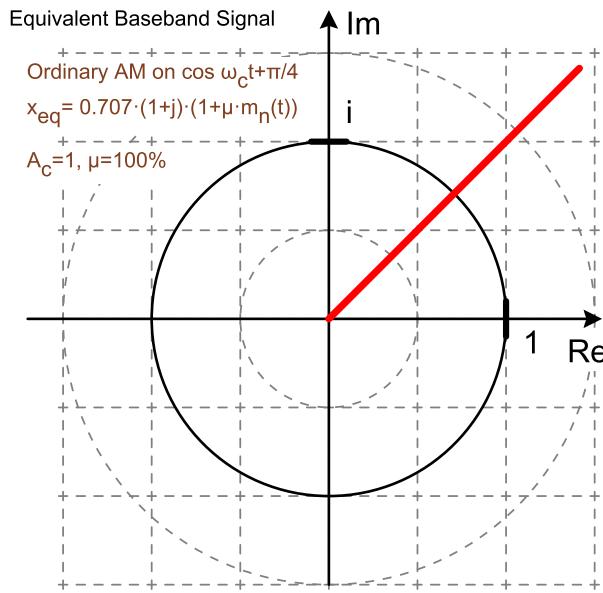
Und als letztes Beispiel noch ein modulierter Cosinusträger mit einer vorlaufenden Phase von  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ :

$$x_{AM}(t) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \cos(\omega_c t + \frac{\pi}{4}) = A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot \frac{1+j}{\sqrt{2}} (e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) = \Re \left[ \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot A_c \cdot (1 + \mu m_n(t)) \cdot e^{j\omega_c t} \right]$$

Dies führt zu folgendem äquivalenten Basisbandsignal:

$$x_{\text{eq}}(t) = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \cdot A_c \cdot (1 + \mu m_n(t))$$

Und mit willkürlich gewählten Parametern  $A_c = 1$  und  $\mu = 100\%$  ergibt sich folgende äquivalente Basisbanddarstellung:



**Abbildung 5.15:** Basisbanddarstellung von gewöhnlicher AM mit phasenverschobenem Trägersignal

### 5.3.4 Leistungseffizienz von gewöhnlicher AM

Der bei gewöhnlicher Amplitudenmodulation beigefügte DC-Anteil findet sich nach dem Anwenden des Modulationssatzes im nicht-modulierten Trägersignal wieder. Die Leistung dieses nicht-modulierten Anteils ist sehr hoch, selbst wenn der Modulationsgrad mit  $\mu = 100\%$  maximal gewählt wird.

Aufgrund von gesetzlichen Auflagen und erteilten Betriebsbewilligungen ist die maximale Sendeleistung im Normalfall begrenzt. Bei mobilen Geräte ist die Sendeleistung für die Drahtloskommunikation zudem meist das Hauptkriterium, wie lange sie mit einer Akkuladung betrieben werden können. Und schliesslich ist für die Empfangsqualität im Wesentlichen nur der modulierte Anteil der Sendeleistung massgebend, da der nicht-modulierte Term des Trägersignals keinen nutzbaren Anteil des Nachrichtensignals enthält und so höchstens noch die Erkennung des Signals vereinfachen und die Synchronisation des Empfängers unterstützen kann.

Ziel muss deshalb sein, einen möglichst grossen Anteil des Trägersignals für eine gute Empfangsqualität des demodulierten Nachrichtensignals zu nutzen, um gleichzeitig auch die gesamte Sendeleistung tief halten zu können.

Unter der Leistungseffizienz  $\eta$  der gewöhnlichen AM versteht man das Verhältnis zwischen der Signalleistung  $P_{\text{sb}}$  der beiden Seitenbänder zur Gesamtleistung  $P_{\text{AM}}$  des AM-Signals:

$$\eta = \frac{P_{\text{sb}}}{P_{\text{AM}}} \quad (5.6)$$

Diese Effizienz beschreibt, welcher Anteil der Gesamtleistung zur Steigerung der Empfangsqualität des demodulierten Nachrichtensignals genutzt werden kann.

#### Beispiel: Leistungseffizienz von gewöhnlicher AM

Wie gross ist bei gewöhnlicher AM die Leistungseffizienz  $\eta$ , wenn ein Eintonsignal  $m(t) = \cos(\omega_m t)$  den Träger  $A_c \cos(\omega_c t)$  mit dem Modulationsindex  $\mu$  moduliert?

- $x_{\text{AM}}(t) = A_c \cos(\omega_c t) \cdot (1 + \mu m(t))$
- $= A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c}{2} \mu \cos((\omega_c + \omega_m)t) + \frac{A_c}{2} \mu \cos((\omega_c - \omega_m)t)$

- Wie erwartet besteht das Signal aus drei Anteilen, dem Träger und den beiden Seitenbändern, welche sich beim Eintonsignal auf je eine Seitenlinie an den Stellen  $\omega_c \pm \omega_m$  beschränken.
- Die mittlere Leistung  $P_c$  des nicht-modulierten Trägeranteils  $A_c \cos(\omega_c t)$  kann sofort hingeschrieben werden:  $P_c = \frac{A_c^2}{2}$
- Die mittlere Gesamtleistung  $P_{AM}$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{AM} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{AM}^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_c^2 \cos^2(\omega_c t) \cdot (1 + 2\mu \cos(\omega_m t) + \mu^2 \cos^2(\omega_m t)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_c^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_c t)}{2} \right) \cdot (1 + 2\mu \cos(\omega_m t) + (\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^2 \cos(2\omega_m t)}{2})) dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} + \frac{\mu^2 A_c^2}{4} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde berücksichtigt, dass sämtliche Sinus- bzw. Cosinusförmigen Anteile der *momentanen* Leistung keinen Anteil an die *mittlere* Leistung liefern und dass wegen  $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$  auch Produkte von zwei Cosinusanteilen unterschiedlicher Frequenz zu keiner mittleren Leistung führen.

- Die Effizienz berechnet sich jetzt wie folgt:  $\eta = \frac{P_{sb}}{P_{AM}} = \frac{P_{AM} - P_c}{P_{AM}} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$
- Für gewöhnliche AM ist der Modulationsgrad  $\mu \leq 100\%$  zu wählen, d.h. die maximale Effizienz  $\eta$  ist (bei  $\mu = 100\%$ ) nur gerade  $\eta = 33.3\%$ . Bei  $\mu = 50\%$  beschränkt sich der Anteil der Signalleistung an der Gesamtleistung des Signals sogar auf bescheidene  $\eta = 11.1\%$ .

Der grösste Anteil der übertragenen Leistung befindet sich somit im nicht-modulierten Trägeranteil, dessen konstante Parameter sich zeitlich nicht ändern und der somit keine Information über den zeitlichen Verlauf des Nachrichtensignals enthält.

Die Effizienz von gewöhnlicher AM kann auch noch etwas verallgemeinert berechnet werden. Aufgrund des Modulationssatz der Fouriertransformation ist bekannt, dass eine Multiplikation mit dem Trägersignal  $x_c = A_c \cdot \cos(\omega_c t)$  das modulierende Spektrum mit einem Faktor  $\frac{A_c}{2}$  gewichtet und nach  $\pm \omega_c$  hin verschiebt. Betrachtet man nur eine einzelne dieser spektralen Verschiebungen, wird die Leistung  $P_{bb}$  des Basisbandsignals mit  $(\frac{A_c}{2})^2 = \frac{A_c^2}{4}$  skaliert. Diese Leistung des modulierenden Basisbandsignals setzt sich aufgrund des Satzes von Plancherel aus der Leistung des mittelwertfreien und mit  $\mu$  skalierten Nachrichtensignals und des DC-Anteils wie folgt zusammen:

$$P_{bb} = P_{DC} + \mu^2 \cdot P_m = P_{DC} + \mu^2 \cdot m_{rms}^2 \quad (5.7)$$

Weiter kann festgehalten werden, dass sich die verschobenen Anteile nicht überlappen, solange  $\omega_c > 2\pi \cdot B_m$  gilt, d.h. die Trägerfrequenz  $f_c$  grösser als die Bandbreite  $B_m$  des Nachrichtensignals ist. Dadurch können aufgrund des Satzes von Plancherel die Leistungen der beiden verschobenen und skalierten Spektren addiert werden und es ergibt sich für die Gesamtleistung eines AM-modulierten Signals:

$$P_{AM} = 2 \cdot \frac{A_c^2}{4} \cdot P_{bb} = \frac{A_c^2}{2} \cdot P_{bb} = \frac{A_c^2}{2} \cdot (P_{DC} + \mu^2 \cdot m_{rms}^2) \quad (5.8)$$

Die Berechnung der Leistungseffizienz  $\eta$  von gewöhnlicher AM kann schliesslich auch nur mit Hilfe des Basisbandsignals berechnet werden, d.h. der Faktor  $\frac{A_c^2}{2}$  bildet bei dieser Berechnung einen skalierenden Faktor, der herausgekürzt werden kann. Ebenso darf bei diesem Leistungsvergleich die Berechnung mit dem normierten Nachrichtensignal  $m_n(t)$  und entsprechend einem DC-Anteil  $P_{DC} = 1$  durchgeführt werden. Mit dem Crestfaktor  $C = \frac{m_{pk}}{m_{rms}}$  sowie  $m_{pk} = 1$  des normierten Nachrichtensignals ergibt sich:

$$\eta = \frac{P_{sb}}{P_{AM}} = \frac{P_m}{P_{bb}} = \frac{\mu^2 \cdot m_{rms}^2}{1 + \mu^2 \cdot m_{rms}^2} = \frac{(\frac{\mu}{C})^2}{1 + (\frac{\mu}{C})^2} \quad (5.9)$$

Selbst bei einem Modulationsgrad von  $\mu = 100\%$  wird sich somit in Abhängigkeit des Scheitelfaktors  $C$  nur ein sehr kleiner Anteil der Leistung im modulierten Anteil der gewöhnlichen AM befinden und ein Grossteil der Leistung im nicht-modulierten Trägesignal konzentriert sein.

Wären nun aber die Empfänger in der Lage, auch negative Amplitudenwerte des modulierenden Signals korrekt zu demodulieren, könnte beim Sender auf die Zugabe des DC-Offsets verzichtet werden. Bei gleicher

Empfangsqualität kann so viel Sendeleistung gespart oder aber bei gleicher Sendeleistung die Empfangsqualität beziehungsweise die Reichweite des Senders deutlich verbessert werden.

Die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger (Englisch: double-sideband suppressed-carrier, DSB-SC) besitzt im Vergleich zur gewöhnlichen AM genau diesen überzeugenden Vorteil.

## 5.4 Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger (DSB-SC)

### 5.4.1 DSB-SC im Zeitbereich

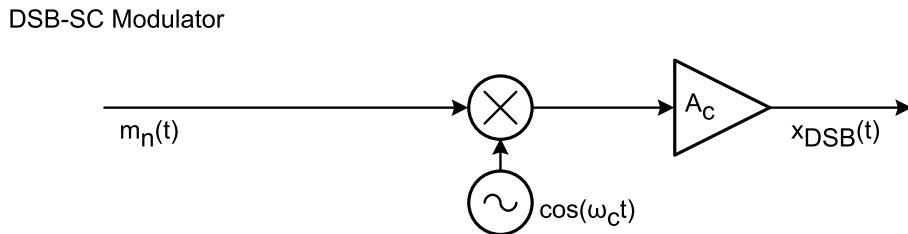
Bei einer Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger (auch: Doppelseitenband-Amplitudenmodulation mit unterdrücktem Träger) wird dem Nachrichtensignal  $m(t)$  vor der Modulation kein zusätzlicher DC-Anteil beigegeben. Dadurch wird bei einem DC-freien Nachrichtensignal das modulierende Signal Abschnitte mit negativer Amplitude aufweisen. Ohne diese Beigabe eines konstanten DC-Anteils handelt es sich bei dieser Amplitudenmodulation nur noch um eine simple Multiplikation des Nachrichtensignals mit dem nicht-modulierten Trägersignal:

$$x_{\text{DSB}}(t) = A_c \cdot m_n(t) \cdot \cos(\omega_c t) \quad (5.10)$$

Alternativ zum Cosinus-Träger könnte das sinusförmige Trägersignal auch eine beliebige andere Phasenlage aufweisen. Im Falle eines Sinusträgers ergibt sich im Zeitbereich:

$$x_{\text{DSB}}(t) = A_c \cdot m_n(t) \cdot \sin(\omega_c t) \quad (5.11)$$

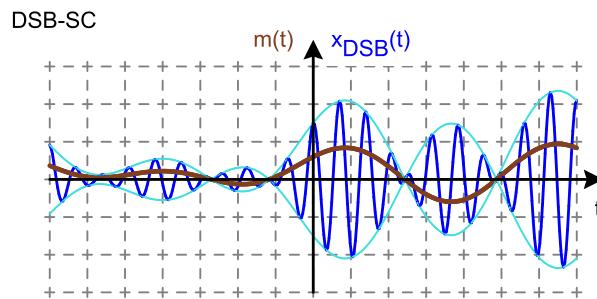
Da bei DSB-SC die Beigabe eines normierten DC-Anteils entfällt, vereinfacht sich bei ihr auch das Blockschaltbild (hier wieder mit einem Cosinus-Trägersignal):



**Abbildung 5.16:** Blockschaltbild eines Modulators für Zweiseitenband-AM ohne Träger

Der Einfachheit halber wird im Blockschaltbild die Multiplikation wiederum mit einem dimensionslosen und normierten Nachrichtensignal  $|m_n(t)| \leq 1$  und einem ebensolchen lokalen Oszillatorkanal  $x_{\text{LO}} = \cos(\omega_c t)$  dargestellt. In der Praxis sind diese beiden Signale typischerweise analoge Spannungsverläufe mit wenigen Volt Amplitude. Ein Leistungsverstärker skaliert anschliessend mit einer Verstärkung  $A_c$  das modulierte Signal auf eine Amplitude, welche eine genügend hohe Leistung für die Signalübertragung aufweist.

Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger hat im Zeitbereich folgenden möglichen Signalverlauf:



**Abbildung 5.17:** Zeitlicher Verlauf von Zweiseitenband-AM ohne Träger

Die Hüllkurve gibt zwar prinzipiell den Verlauf des Nachrichtensignals  $m(t)$  wieder, doch wird dieser je nach Vorzeichen von  $m(t)$  auf die positiven oder negativen Spitzenwerte des modulierten Signals abgebildet.

Wie schon ausgeführt ist die Demodulation nicht mehr so einfach im Zeitbereich umsetzbar, wie dies für die gewöhnliche Amplitudenmodulation der Fall war. Um die Demodulation dennoch mit kleinem technischen Aufwand realisieren zu können, helfen einfache Überlegungen im Frequenzbereich.

### 5.4.2 DSB-SC im Frequenzbereich

Wie schon bei der gewöhnlichen AM hilft der Modulationssatz der Fouriertransformation, das Spektrum von Zweiseitenband-Amplitudenmodulation ohne Träger zu bestimmen. Da kein DC-Anteil vor der Modulation beigefügt wird, fällt der nicht-modulierte Trägeranteil im Vergleich zur gewöhnlichen AM weg, oder man könnte – wie der Name DSB-SC es ausdrückt – sagen, er wird unterdrückt.

$$A_c \cdot m_n(t) \cdot \cos(\omega_c t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A_c}{2} \cdot (M_n(\omega - \omega_c) + M_n(\omega + \omega_c)) \quad (5.12)$$

Handelte es sich beim nicht-modulierten Trägersignal um einen Sinus-Träger, ergibt sich für die zu den Trägerfrequenzen  $\pm \omega_c$  hin verschobenen Amplitudendichtespektren ein zusätzlicher Faktor  $-j$  bzw.  $+j$ . Diese beiden Faktoren wirken sich aber nur auf das Phasenspektrum des modulierten Trägers aus.

$$A_c \cdot m_n(t) \cdot \sin(\omega_c t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A_c}{2} \cdot (-j \cdot M_n(\omega - \omega_c) + j \cdot M_n(\omega + \omega_c)) \quad (5.13)$$

Das Amplitudendichtespektrum von DSB-SC ist im nachfolgenden Graphen für  $A_c = 1$  dargestellt.

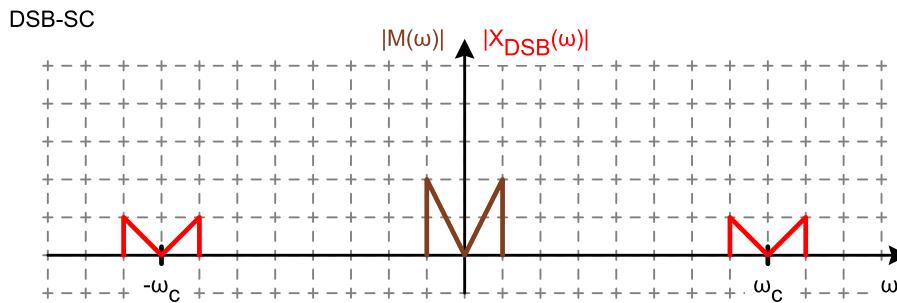


Abbildung 5.18: Amplitudendichtespektrum von Zweiseitenband-AM ohne Träger

Für die Demodulation kann das zur Trägerfrequenz hin verschobene Nachrichtensignal wieder in sein ursprüngliches Frequenzband zurückgeschoben werden. Dies kann mathematisch sehr einfach mit einer erneuten Multiplikation mit dem nicht-modulierten Trägersignal erfolgen:

$$x_{\text{DSB}}(t) \cdot \cos(\omega_c t) = m(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}m(t) \cdot \cos(2\omega_c t) \quad (5.14)$$

Der resultierende Anteil im Basisband kann von jenem bei der doppelten Trägerfrequenz  $2\omega_c$  mit einem anspruchslosen Tiefpassfilter einfach getrennt werden.

DSB-SC Modulation System

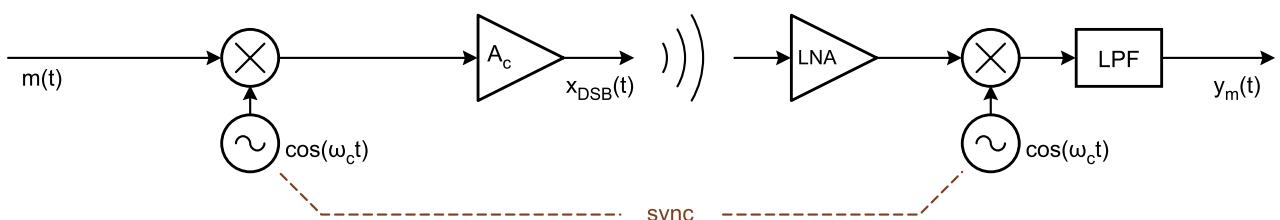


Abbildung 5.19: Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Zweiseitenband-AM ohne Träger

Die Frequenz des lokalen Oszillators  $\cos(\omega_c t)$  muss der Empfänger aus dem modulierten Signal zurückgewinnen. Gleichzeitig ist auch wichtig, dass die Phasenlage des lokalen Oszillators in Bezug auf das empfangene Signal nicht verschoben ist.

Wegen dieser Notwendigkeit, dass Frequenz und Phase des lokalen Oszillators  $x_{\text{LO}} = \cos(\omega_c t)$  genau mit dem Trägersignal des modulierten Empfangssignals übereinstimmen müssen, spricht man bei dieser multiplikativen Demodulationsart auch von *kohärenter Demodulation* beziehungsweise von einem *kohärenten Detektor*.

#### Beispiel 1: Phasenabweichung beim kohärenten Detektor

Wie wirkt sich ein Phasenfehler im lokalen Oszillator des Demodulators aus?

- Demodulator:  

$$x_{\text{osc}} = \cos(\omega_c t + \varphi)$$
- Trigonometrie:  

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$
- Demoduliertes Signal vor Tiefpassfilter:  

$$y_{\text{mixer}}(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi) = \frac{1}{2} m(t) \cdot (\cos(\varphi) + \cos(2\omega_c t + \varphi))$$
- Demoduliertes Signal nach Tiefpassfilter:  

$$y_{\text{TP}}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\varphi)$$

Liegt eine Phasenverschiebung  $\varphi$  im kohärenten Demodulator vor, so führt dies nach dem Tiefpassfilter zu einer Abschwächung des demodulierten Nachrichtensignals um  $\cos(\varphi)$ . Diese Abschwächung kann für  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  sogar vollständig sein, d.h. bei einer Phasenverschiebung von  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  verschwindet das Nachrichtensignal am Ausgang des Tiefpassfilters vollständig.

#### Beispiel 2: Frequenzabweichung beim kohärenten Detektor

Wie wirkt sich ein Frequenzfehler im lokalen Oszillator des Demodulators aus?

- Demodulator:  

$$x_{\text{osc}} = \cos((\omega_c + \Delta\omega)t)$$
- Im vorhergehenden Beispiel kann  $\varphi = \Delta\omega t$  eingesetzt werden.
- Damit folgt für das Signal vor dem Tiefpassfilter:  

$$y_{\text{mixer}}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cdot (\cos(\Delta\omega t) + \cos((2\omega_c + \Delta\omega)t))$$
- Und für das demodulierte Signal nach dem Tiefpassfilter:  

$$y_{\text{TP}}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\Delta\omega t)$$

Liegt eine (Kreis-)Frequenzverschiebung  $\Delta\omega$  im kohärenten Demodulator vor, so führt dies nach dem Tiefpassfilter zu einer sinusförmigen Anschwelling und Abschwächung des demodulierten Signals, wobei zwischenzeitlich das Signal sogar ganz verschwindet.

Zusammengefasst gilt somit: kleinere Phasenabweichungen beim kohärenten Detektor führen zu Dämpfungen, Abweichungen von  $\pm 90^\circ$  zur totalen Auslöschung des demodulierten Signals im Basisband. Leichte Frequenzabweichungen führen zu stetig wechselnden Phasenlagen und äußern sich als scheinbar instabile Empfangsverhältnisse.

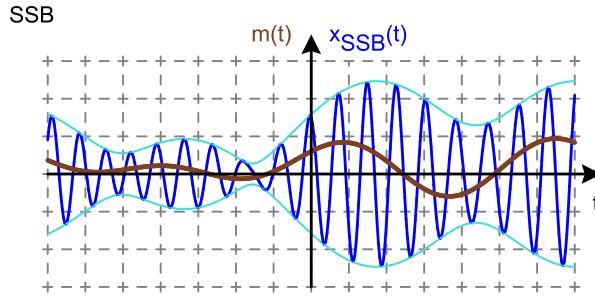
## 5.5 Einseitenband-Amplitudenmodulation (SSB)

Ist das Nachrichtensignal  $m(t)$  kein komplexwertiges sondern ein übliches reellwertiges Signal, ist dessen Spektrum gemäß den Eigenschaften der Fouriertransformation auf der negativen Frequenzachse konjugiert-komplex zum Spektrum der positiven Frequenzachse.

Durch diesen Zusammenhang zwischen links- und rechtsseitigem Spektrum stehen auch die beiden Seitenbänder einer DSB-SC in einer festen Beziehung zueinander: jeweils in gleichem Abstand links und rechts der Trägerfrequenz sind die Amplitudenanteile identisch, während die Phasenabweichungen zur Phase des nicht-modulierten Trägersignals gerade das umgekehrte Vorzeichen aufweisen.

Ist das modulierende Signal einer DSB-SC oder gewöhnlichen AM reellwertig, gibt es also im zweiten Seitenband keine Information über den Signalverlauf des Nachrichtensignals, welche nicht schon im ersten Seitenband enthalten wäre. Somit kann sehr einfach die Hälfte der Bandbreite eines DSB-SC Signals eingespart werden, indem nur eines der beiden Seitenbänder übertragen wird.

Einseitenband-AM hat im Zeitbereich folgenden möglichen Signalverlauf, bei welchem das obere Seitenband weggelassen wurde (wobei im Zeitbereich nicht offensichtlich ist, welches Seitenband entfernt wurde):



**Abbildung 5.20:** Zeitlicher Verlauf von Einseitenband-AM

Die Hüllkurve hat nur noch wenig Ähnlichkeit mit dem Verlauf des Nachrichtensignals  $m(t)$ . Zudem fällt auf, dass die Momentanfrequenz des Trägersignals nicht mehr konstant ist, d.h. bei SSB findet neben einer Amplituden- auch eine Phasenmodulation des Trägers statt.

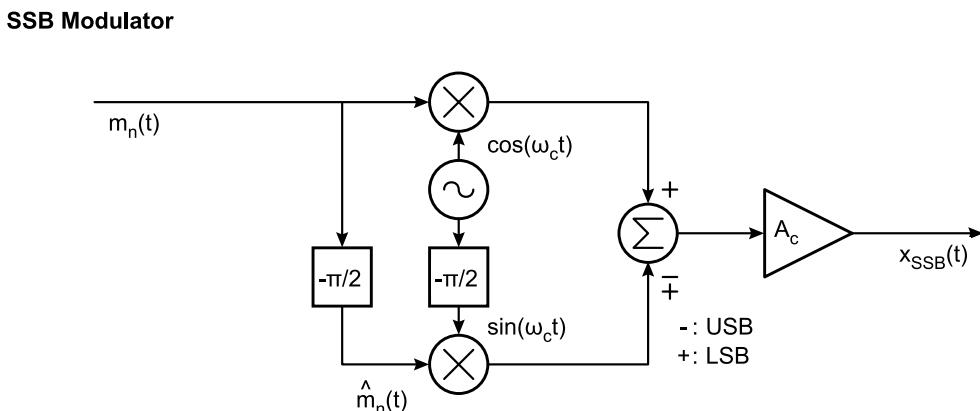
### 5.5.1 Filtermethode

Um ein Einseitenband-Signal zu erzeugen, ist es naheliegend, mit einem Bandpassfilter nur das obere Seitenband (Englisch: upper sideband, USB) oder nur das untere Seitenband (Englisch: lower sideband, LSB) unverändert durchzulassen und das jeweils andere komplett zu eliminieren.

Allerdings zeigt sich, dass die Anforderung an die Flankensteilheit eines solchen Bandpassfilters sehr hoch ist: innerhalb eines Bereichs von wenigen Hertz sollte dieses Filter vom komplett durchlässigen in den komplett sperrenden Bereich übergehen. Anzumerken gilt noch, dass sich dieses Filter bei der hohen Frequenz des Übertragungsbands oder – im Falle eines mehrstufigen Frequenzmixers – zumindest bei dessen Zwischenfrequenz befindet. Dadurch gestaltet sich die Implementierung dieser sehr steilen Filterflanke nochmals aufwändiger, als dies bei einem Filter im Basisband des Nachrichtensignals der Fall wäre.

### 5.5.2 Phasenmethode

Eine zweite Möglichkeit, eine Einseitenband-Amplitudenmodulation zu implementieren, bietet die Phasenmethode, welche in folgendem Blockdiagramm dargestellt ist:



**Abbildung 5.21:** Einseitenband-Modulator mit Phasenmethode

Ein Nachrichtensignal  $m(t)$  moduliert ein erstes sinusförmiges Nachrichtensignal, beispielsweise einen Cosinus  $\cos(\omega_c t)$  und erzeugt so ein DSB-SC Signal. Gleichzeitig wird  $m(t)$  mit einem über seine ganze Bandbrei-

te reichenden Quadraturfilter frequenzabhängig um jeweils  $90^\circ$  verzögert, was zur Hilbert-Transformierten  $\hat{m}(t)$  des Nachrichtensignals  $m(t)$  führt. Diese Hilbert-Transformierte moduliert den zum ersten Trägersignal orthogonalen Träger, in diesem Beispiel somit den Sinus  $\sin(\omega_c t)$  zu einem zweiten DSB-SC Signal.

Die beiden Zweiseitenband-AM Signale sind sich sehr ähnlich und besitzen insbesondere dasselbe Betragspektrum. In Bezug auf die Phase der beiden DSB-SC Signale sind aber sämtliche Frequenzkomponenten oberhalb der Trägerfrequenz (d.h. für  $|\omega| > 2\pi f_c$ ) zueinander um  $180^\circ$  gedreht, d.h. sie haben ein unterschiedliches Vorzeichen. Dadurch werden bei einer Addition der beiden DSB-SC Signale die Amplituden des oberen Seitenbands ausgelöscht und im unteren Seitenband gerade verdoppelt. Bei einer Subtraktion kompensieren sich die Amplituden des unteren Seitenbands zu Null und es werden diejenigen des oberen Seitenbands verdoppelt.

Dieser Sachverhalt kann mit Hilfe der Eigenschaften der Fouriertransformation sehr einfach nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned} \text{Hilberttransformation im Frequenzbereich: } \hat{m}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -j \operatorname{sgn}(\omega) \cdot M(\omega) \\ \text{Modulationssatz für Sinus-Trägersignal: } m(t) \cdot \sin(\omega_c t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} M(\omega - \omega_c) - \frac{1}{2j} M(\omega + \omega_c) \end{aligned}$$

Für einen mit dem Hilbert-transformierten Nachrichtensignal  $\hat{m}(t)$  modulierten Sinus ergibt sich somit:

$$\hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega - \omega_c) \cdot M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega + \omega_c) M(\omega + \omega_c)$$

Bis auf das Vorzeichen im ersten Term und die beiden Vorzeichenfunktionen  $\operatorname{sgn}()$  ist dieses Spektrum aber mit der Fouriertransformierten von  $m(t) \cdot \cos(\omega_c t)$  identisch:

$$\text{Modulationssatz für Cosinus-Trägersignal: } m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c)$$

Auf der positiven Frequenzachse werden durch das negative Vorzeichen alle Spektralanteile negiert, ausser für den Bereich  $\omega < \omega_c$ , wo die Signumfunktion das negative Vorzeichen gerade wieder aufhebt. Auf der negativen Frequenzachse findet keine Negation statt, ausser für den Bereich  $\omega < -\omega_c$ , wo durch die Signumfunktion ein negatives Vorzeichen resultiert. Insgesamt ergibt sich somit tatsächlich durch Addition bzw. Subtraktion der beiden modulierten orthogonalen Trägersignale nur noch das untere bzw. obere Seitenband.

Das Amplitudendichtespektrum von SSB ist in Abbildung 5.22 für eine Trägeramplitude  $A_c = 1$  dargestellt, einmal für eine Übertragung des oberen und einmal des unteren Seitenbands.

Ein breitbandiges Quadraturfilter kann aufgrund der Kausalität nur approximiert werden und ist auch so mit einem Implementierungsaufwand verbunden. Bei der Phasenmethode kann dieses Filter aber im Basisband realisiert werden, d.h. typischerweise in einem viel tieferen Frequenzbereich als die Zwischenfrequenz oder sogar das Übertragungsband. Damit bietet sich auch eine digitale Implementierung der Hilberttransformation mit einem schnellen Prozessor, DSP oder FPGA an, speziell natürlich dann, wenn das Nachrichtensignal sowieso schon in digitaler Form vorliegen sollte.

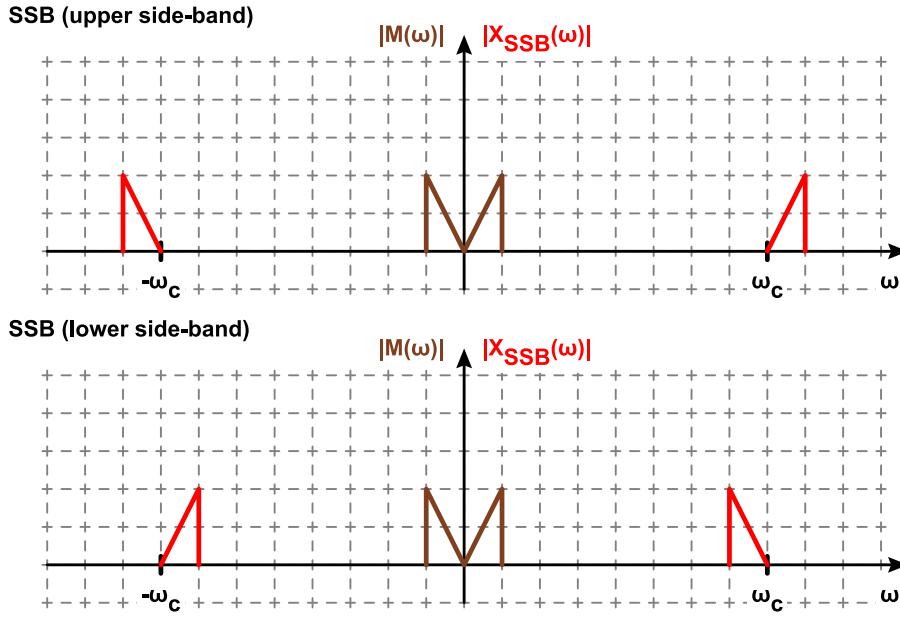


Abbildung 5.22: Amplitudendichespektrum von Einseitenband-AM: oberes bzw. unteres Seitenband

### 5.5.3 Demodulation einer SSB

Die Demodulation eines Einseitenband AM Signals kann prinzipiell sehr einfach mit einem kohärenten Produktdemodulator vollzogen werden, welcher durch die Multiplikation mit dem lokalen Oszillatoren  $x_{LO} = \cos(\omega_c t)$  das Übertragungsband ins Basisband zurückverschiebt. Die zur doppelten Trägerfrequenz geschobenen Anteile werden dabei durch ein einfaches Tiefpassfilter eliminiert.

#### SSB Modulation System

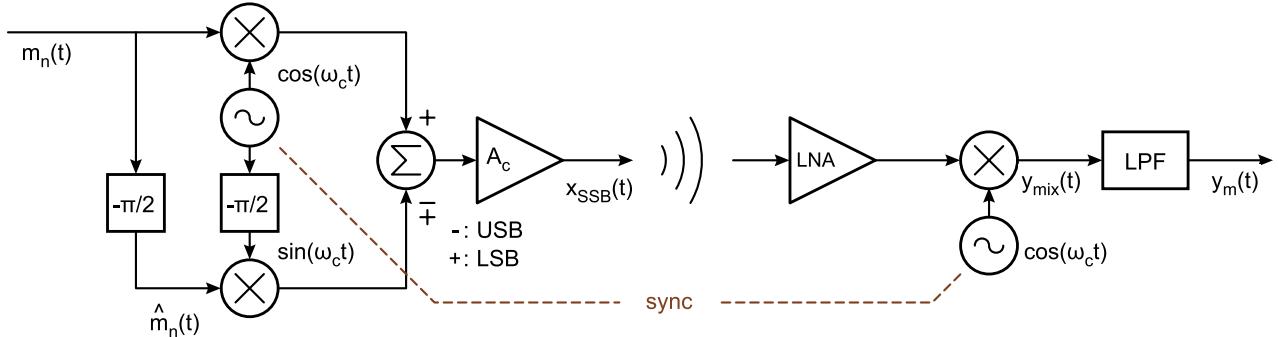


Abbildung 5.23: Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Einseitenband-AM

Da bei einer SSB nur ein Seitenband vorhanden ist, kommt es im Basisband zu keiner Überlappung der Anteile, welche einerseits vom Übertragungsband der positiven Frequenzachse und andererseits vom Übertragungsband der negativen Frequenzachse ins Basisband zurückgeschoben werden. Somit ist in Bezug auf die Amplitude eine kohärente Phase nicht zwingend erforderlich, doch wirkt sich eine Phasenabweichung des lokalen Oszillators als Phasendrehung sämtlicher Spektralanteile im Basisband aus. So würde bei der Demodulation mit einem Sinus die Hilberttransformierte  $\hat{m}(t)$  anstatt das ursprüngliche Nachrichtensignal  $m(t)$  empfangen. Spielt – wie bei Audiosignalen – das Phasenspektrum des Empfangssignals nur eine untergeordnete Rolle, kann auf eine Phasensynchronisation des lokalen Oszillators gänzlich verzichtet werden.

Allerdings ist im Vergleich zur Zweiseitenband-AM die Rückgewinnung der korrekten Frequenz und Phase des Trägersignals ohne zusätzliche Massnahmen (wie zum Beispiel die Beigabe von nicht-moduliertem

Trägeranteil) nicht durchführbar.

## 5.6 Restseitenband-Amplitudenmodulation (VSB)

Auch bei der Restseitenband-Amplitudenmodulation (Englisch: vestigial side-band amplitude modulation, VSB) soll nicht das ganze Doppelseitenband übertragen werden, aber die technische Implementierung auf Kosten von etwas mehr Bandbreite einfach gehalten werden.

Bei der Restseitenband-Amplitudenmodulation wird wiederum die Filtermethode verwendet. Das dafür verwendete Bandpassfilter (bei der Trägerfrequenz oder bei einer Zwischenfrequenz) lässt das eine Seitenband mit voller Bandbreite durch, das zweite Seitenband mit typischerweise einem Viertel der Bandbreite, angrenzend an das erste Seitenband.

Der Übergang vom Durchlass- zum Sperrbereich muss wegen dieser teilweisen Übertragung des zweiten Seitenbands keine steile Flanke aufweisen. Zudem wird das Bandpassfilter mit Vorteil (vgl. unten) auch das mit voller Bandbreite übertragene Seitenband in der Nähe der Trägerfrequenz leicht dämpfen.

Der Sender könnte mit dem Bandpassfilters ausschliesslich die Begrenzung des Übertragungsbands verfolgen, wofür irgend ein beliebiges Bandpassfilter mit gewünschtem Durchlass- und Sperrbereich ausreichen würde. Er kann aber auch durch die Wahl eines geeigneten Filters dem Empfänger die Demodulation erleichtern, wie gleich gezeigt wird.

Bei der kohärenten Demodulation werden die Anteile des Übertragungsbands auf der negativen Frequenzachse und jene auf der positiven Frequenzachse im Basisband zusammengeführt. Im Gegensatz zur SSB Modulation führt dies zu einer Überlappung der beiden Anteile im Basisband. Diese ist nicht vollständig, wie bei DSB-SC sondern vollzieht sich nur im Bereich des zurückverschobenen Restseitenbands. Ziel sollte es nun sein, dass sich diese überlagerten Anteile von zurückgeschobene Restseitenband und dem Seitenband mit voller Bandbreite gerade wieder zum ursprünglichen Spektrum des Nachrichtensignal  $M(\omega)$  ergänzen.

Erreicht werden kann das durch ein Bandpassfilter mit Bandbreite  $B \approx 1.25 \cdot B_m = 1.25 \cdot \frac{\omega_m}{2\pi}$  welches bei der Trägerfrequenz eine in Bezug auf die Amplitude sogenannte anti-symmetrische Filterflanke aufweist, bei welcher im gleichen Abstand von  $\omega_c$  im Restseitenband gerade soviel Amplitudenanteil durchgelassen wird, wie im Band mit voller Bandbreite gedämpft wurde. In der nachfolgenden Gleichung ist dies besonders kompakt notiert, unter Einbezug beider (der positiven und negativen) Frequenzachsen:

$$H(\omega - \omega_c) + H(\omega + \omega_c) = \text{constant} \quad 0 < \omega < \omega_m \quad (5.15)$$

## 5.7 Quadraturamplitudenmodulation (QAM)

Bei der Demodulation einer DSB-SC mit dem kohärenten Detektor wurde festgestellt, dass Phasenabweichungen zwischen dem Trägersignal des Senders und dem lokalen Oszillatoren des Empfängers zu einer Dämpfung des demodulierten Signals führen, die im Falle von  $90^\circ$  Abweichung sogar vollständig ist: die Anteile vom Übertragungsbau auf der positiven und negativen Frequenzachse, welche ins Basisband zurückgeschoben werden, löschen sich dann dort gerade gegenseitig aus.

Der Nachteil dieser Auslösung eröffnet nun aber auch eine zusätzliche Möglichkeit des Multiplexings: bei einer Phasenverschiebung des lokalen Oszillators von  $\varphi_{LO1} = 90^\circ$  ist der Empfänger grundsätzlich in der Lage, ein zweites Trägersignal  $x_{c2}(t) = \cos(\omega_c t + \varphi_2)$  mit gleicher Trägerfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  aber Phasenlage  $\varphi_2$  (mit  $\varphi_2 \neq k \cdot \pi$ ,  $k$  ganzzahlig) störungsfrei zu empfangen.

Für ein Multiplexing muss es für dieses zweite Trägersignal aber ebenfalls eine Phasenlage des lokalen Oszillators geben, wo dessen Empfang verstummt, das erste Trägersignal aber in guter Qualität vorliegt. Dies ist bei  $\varphi_{LO2} = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$  der Fall.

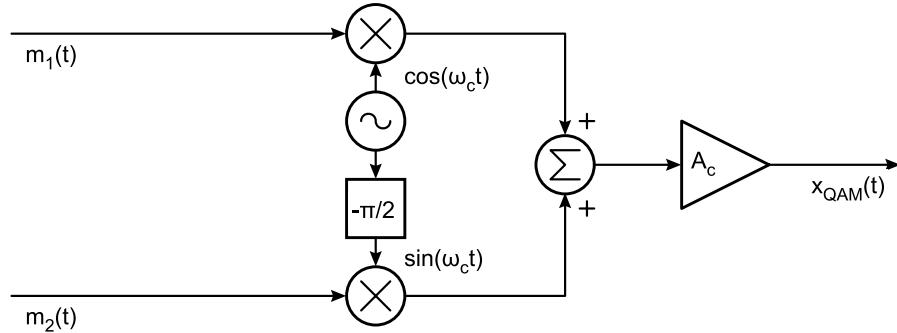
Weitere Trägersignale mit gleicher Frequenz aber zusätzlichen Phasenlagen, die unabhängig von den ersten beiden empfangen werden können, lassen sich nicht mehr gleichzeitig übertragen, da es kein  $\varphi_2$  (mit weiterhin  $\varphi_2 \neq k \cdot \pi$ ) gibt, bei welchem die ersten beiden Trägersignale im Empfänger gemeinsam verstummen.

Somit soll  $\varphi_2$  so gewählt werden, dass bei der Nullstelle des einen empfangenen Nachrichtensignals das andere jeweils gerade mit maximaler Empfangsamplitude vorliegt. Dies ist bei zwei orthogonalen Trägersignalen der Fall, d.h. einer Phasendifferenz von  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  bzw. im einfachsten Beispiel bei einem Cosinusträger  $x_{c1}(t) = \cos(\omega_c t)$  und einem Sinusträger  $x_{c2}(t) = \sin(\omega_c t)$ .

Beim modulierenden Signal  $m_1(t)$  des Cosinus-Trägers handelt es sich dabei um das sogenannte In-Phase-Signal oder I-Signal, beim modulierenden Signal  $m_2(t)$  des Sinus-Trägers um das Quadratur-Signal oder Q-Signal.

Dies ergibt folgendes Blockschaltbild für den QAM-Modulator:

**Quadrature Amplitude Modulator**



**Abbildung 5.24:** Blockschaltbild für einen QAM-Modulator

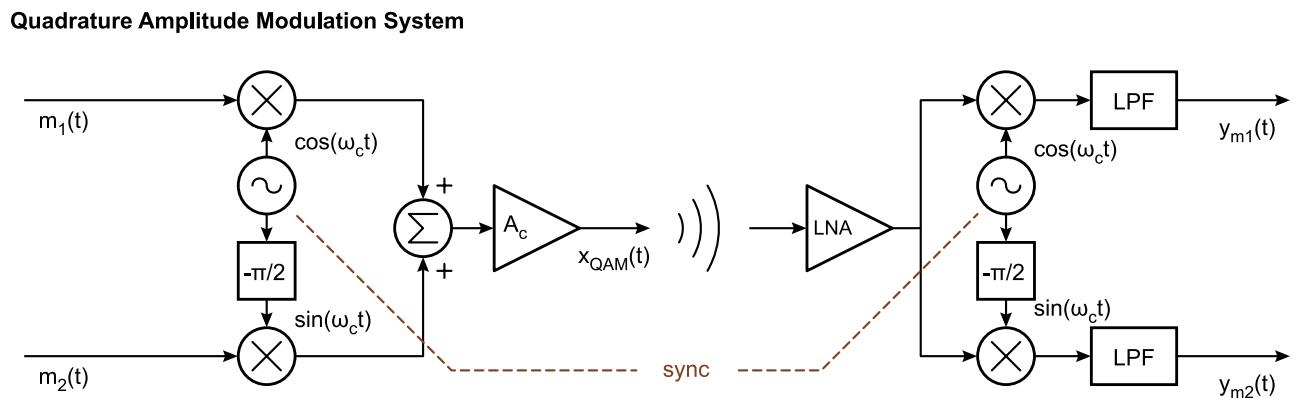
Das In-Phase-Signal  $m_1(t)$  kann aus dem QAM-modulierten Trägersignal  $x_{\text{QAM}}(t)$  wie bei einer DSB-SC mit einem kohärenten Demodulator empfangen werden, welcher phasensynchron zum Cosinus-Trägersignal ist. Der Empfänger multipliziert somit zuerst das QAM-Signal mit  $x_{\text{LO1}}(t) = \cos(\omega_c t)$  und eliminiert mit einem anschliessenden Tiefpassfilter  $\mathcal{T}_{\text{LP}}[\cdot]$  alle Signalanteile bei der doppelten Trägerfrequenz:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[x_{\text{QAM}}(t) \cdot \cos(\omega_c t)] \\
 &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[m_1(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) + m_2(t) \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \cos(\omega_c t)] \\
 &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[m_1(t) \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_c t)) + m_2(t) \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega_c t)] \\
 &= \frac{1}{2}m_1(t)
 \end{aligned}$$

Für den Empfang des Quadratursignals  $m_2(t)$  muss der Demodulator kohärent zum Sinus-Trägersignal sein, d.h. die Multiplikation erfolgt mit  $x_{\text{LO2}}(t) = \sin(\omega_c t)$ :

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[x_{\text{QAM}}(t) \cdot \sin(\omega_c t)] \\
 &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[m_1(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \sin(\omega_c t) + m_2(t) \cdot \sin^2(\omega_c t)] \\
 &= \mathcal{T}_{\text{LP}}[m_1(t) \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega_c t) + m_2(t) \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_c t))] \\
 &= \frac{1}{2}m_2(t)
 \end{aligned}$$

Dies ist im nachfolgenden Blockdiagramm eines gesamten QAM-Systems dargestellt.



**Abbildung 5.25:** Blockschaltbild für Modulation und Demodulation von Quadraturamplitudenmodulation

## 5.8 Winkelmodulationsarten

Als weiterer Parameter, um ein sinusförmiges Trägersignal  $x_c = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \varphi)$  zu modulieren, bietet sich neben der Amplitude  $A_c$  auch der Phasenwinkel  $\varphi$  oder die momentane Frequenzabweichung  $\frac{d\varphi}{dt}$  an. John Carson hat allerdings schon 1922 erkannt, dass die Übertragung eines winkelmodulierten Signals im Vergleich zu einem amplitudenmodulierten Signal mehr Bandbreite beansprucht [1]. Wegen dieses offensichtlichen Nachteils war sein praktisches Interesse an der Winkelmodulation erloschen.

Erst im Jahre 1935 zeigte Edwin Armstrong, dass Winkelmodulation im Vergleich zu Amplitudenmodulation auch einen ganz gewichtigen Vorteil besitzt: mit Hilfe der zusätzlichen Bandbreite erzielen diese Signale eine höhere Störfestigkeit, d.h. man kann bei gleicher Sendeleistung die Reichweite des Senders erhöhen oder bei vorgegebener Reichweite die Sendeleistung reduzieren.

Bei der Phasenmodulation (Englisch: phase modulation, PM) erzeugt das Nachrichtensignal  $m(t)$  eine Phasenabweichung  $\varphi(t)$  des modulierten Trägersignals im Vergleich zum nicht-modulierten Träger. Sie ist proportional zum Nachrichtensignal  $m(t)$  durch eine Skalierung mit der Phasenhubkonstanten (Englisch: phase deviation constant)  $k_p$  [rad], welche die Amplitude des Nachrichtensignals auf die Phasenabweichung des modulierten Trägersignals abbildet:  $\varphi(t) = k_p \cdot m(t)$ . Damit ergibt sich für das phasenmodulierte Trägersignal:

$$x_{PM}(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + k_p \cdot m(t)) \quad (5.16)$$

Die modulierte Phase  $\varphi(t)$  verändert dabei auch die Momentanfrequenz (Englisch: instantaneous frequency)  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ , welche wie folgt berechnet wird:

$$\omega_i(t) = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (5.17)$$

Bei der Frequenzmodulation (Englisch: frequency modulation, FM) ist die Abweichung der momentanen Kreisfrequenz  $\omega_i$  von der Trägerkreisfrequenz  $\omega_c$  proportional zum Nachrichtensignal  $m(t)$ . Sie ergibt sich, indem  $m(t)$  mit der (Kreis-)Frequenzhubkonstanten (Englisch: frequency deviation constant)  $k_f$  [rad/s] skaliert wird:  $\omega_i(t) = \omega_c + k_f \cdot m(t)$ . Diese sich zeitlich verändernde Abweichung von der Kreisfrequenz  $\omega_c$  verursacht gleichzeitig auch Schwankungen der Phase  $\varphi(t)$ , welche wie folgt berechnet wird:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \omega_i(\tau) - \omega_c \, d\tau = \int_{-\infty}^t k_f \cdot m(\tau) \, d\tau \quad (5.18)$$

Somit ergibt sich für das frequenzmodulierte Trägersignal:

$$x_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) \, d\tau\right) \quad (5.19)$$

Die Phase  $\varphi(t)$  hat dabei einen kontinuierlichen Verlauf, d.h. das FM-modulierte Signal  $x_{FM}(t)$  weist keine Stellen auf, wo sich die Phase sprunghaft ändert. Aus diesem Grund spricht man bei frequenzmodulierten Signalen – speziell auch bei digitalen FM-Signalen – von einer Modulation mit kontinuierlicher Phase (Englisch: continuous phase modulation).

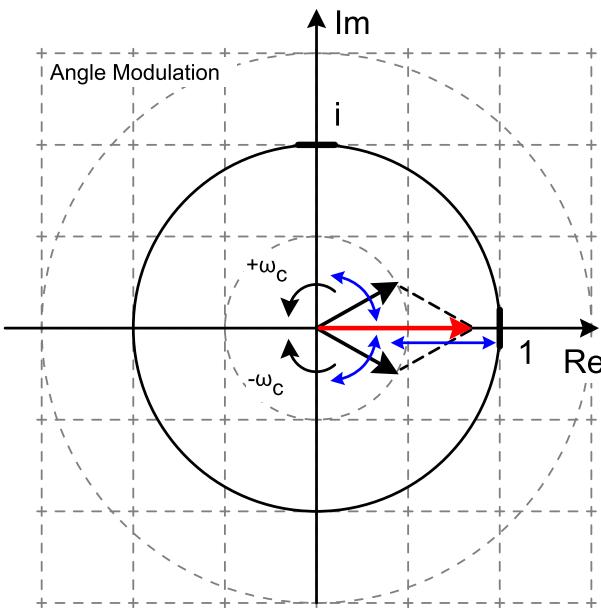
Wie aus diesen Ausführungen hervorgeht, sind Phasenmodulation und Frequenzmodulation äquivalente Modulationsverfahren. Beide variieren sowohl die Phase  $\varphi$  wie auch die Momentanfrequenz  $\omega_i$ . Dadurch kann man leider nicht – wie vielleicht erhofft – je mit einem eigenen Nachrichtensignal ein gemeinsames Trägersignal unabhängig PM- und FM-modulieren, ohne dass sich diese Modulationen für den Empfänger untrennbar vermischen würden.

Aus vorhergehenden Formeln sind auch nachfolgende Äquivalenzen bei der technischen Umsetzung der Winkelmodulation sofort ersichtlich. Ein FM-Modulator kann mit Hilfe eines PM-Modulators realisiert werden, wenn das Nachrichtensignal vor der Phasenmodulation integriert und skaliert wird. Entsprechend kann ein FM-Demodulator mit einem PM-Demodulator realisiert werden, wenn nach der Demodulation – neben zusätzlich korrekter Skalierung – eine Differentiation durchgeführt wird.

Weiter kann auch eine PM-Modulation durch eine Differentiation und eine anschliessende FM-Modulation, ein PM-Demodulator durch einen FM-Demodulator mit anschliessender Integration ersetzt werden.

Um die mathematische Behandlung der nicht-linearen Winkelmodulation etwas zu verkürzen, ist es aufgrund dieser Äquivalenzen gerechtfertigt, dass PM und FM gemeinsam behandelt werden. Jeweils vor der Modulation bzw. nach der Demodulation kann dann noch eine Differentiation oder Integration durchgeführt wird, um von der einen Modulationsart zur anderen zu gelangen.

Wie schon bei der Amplitudenmodulation kann das Trägersignal in zwei komplexe Schwingungen aufgeteilt werden, welche sich mit der Kreisfrequenz  $+\omega_c$  bzw.  $-\omega_c$  um den Ursprung drehen. Sie sind unter der Annahme von  $A_c = 1$  als schwarze Vektoren in der nachfolgenden komplexen Ebene eingezeichnet:



**Abbildung 5.26:** Zeigerdiagramm eines winkelmodulierten Trägersignals

Addiert ergeben die beiden komplexwertigen Zeiger den rot dargestellten Vektor, welcher auch bei Winkelmodulation immer reellwertig ist und dessen Amplitude gerade die Cosinusschwingung  $x_c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t)$  des nicht-modulierten Trägers vollzieht.

Wird nun der Winkel oder die Momentanfrequenz des Trägersignals (wiederum eher langsam) moduliert, addiert bzw. subtrahiert sich dieser Winkel zur Position der beiden komplexwertigen Zeiger synchron. Dies ist mit den beiden blauen, gerkrümmten Pfeilen angedeutet. Für die cosinusförmige Bewegung des roten summierten Vektors muss dies nicht als Amplitudenänderung interpretiert werden, sondern vielmehr als ein zeitlicher Vorsprung oder Rückstand der Schwingung im Vergleich zum nicht-modulierten Cosinus-Träger. Dies ist mit dem blauen, geraden Doppelpfeil angedeutet.

## 5.9 Winkelmodulation im Frequenzbereich

Ein winkelmoduliertes PM- oder FM-Signal  $x_{\phi M}(t)$  kann wie folgt als Realteil einer komplexen Schwingung notiert werden:

$$x_{\phi M}(t) = A_c \cdot \Re \left[ e^{j(\omega_c t + \varphi(t))} \right] \quad (5.20)$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Reihenentwicklung für den zeitvarianten Phasenterm  $e^{j\varphi(t)}$  weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} x_{\phi M}(t) &= A_c \cdot \Re \left[ e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\varphi(t)} \right] \\ &= A_c \cdot \Re \left[ e^{j\omega_c t} \cdot \left( 1 + j\varphi(t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} - j\frac{\varphi^3(t)}{3!} + \dots + j^n \frac{\varphi^n(t)}{n!} \right) \right] \\ &= A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \Re \left[ 1 + j\varphi(t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} - j\frac{\varphi^3(t)}{3!} + \dots + j^n \frac{\varphi^n(t)}{n!} \right] - \\ &\quad A_c \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \Im \left[ 1 + j\varphi(t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} - j\frac{\varphi^3(t)}{3!} + \dots + j^n \frac{\varphi^n(t)}{n!} \right] \\ &= A_c \cdot \left[ \cos(\omega_c t) - \varphi(t) \cdot \sin(\omega_c t) - \frac{\varphi^2(t)}{2!} \cos(\omega_c t) + \frac{\varphi^3(t)}{3!} \sin(\omega_c t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Folgende Aussagen können aufgrund der letzten Zeile dieser Umformung über das Spektrum eines PM- oder FM-Signals gemacht werden:

- Der allererste Term erzeugt einen nicht-modulierten Trägeranteil:  $A_c \cdot \cos(\omega_c t)$ .
- Der zweite Term entspricht einer DSB-SC mit einem Sinusträger:  $-\varphi(t) \cdot A_c \cdot \sin(\omega_c t)$ .
- Auch die nachfolgenden Terme sind DSB-SC auf Cosinus- oder Sinusträgern gleicher Frequenz  $\frac{\omega_c}{2\pi}$ .
- In der Summe aller Terme löschen sich modulierte und nicht-modulierte Trägeranteile auch wieder aus.
- Die modulierenden Faktoren sind ab dem dritten Term ausgeprägt nicht-lineare Ausdrücke von  $\varphi(t)$ .
- Diese Nicht-Linearität erhöht die Bandbreite dieser modulierenden Faktoren im Vergleich zu  $\varphi(t)$ .
- Die Terme werden ab ca. jener n-ten Potenz  $\varphi^n(t)$  schnell irrelevant, wo  $n > \max(\varphi(t))$  gilt.

Eine äusserst vorsichtige Schätzung der Bandbreite des winkelmodulierten Signals kann mit diesen Aussagen zusätzlich noch erfolgen. Da die Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich entspricht, ergibt sich für jeden modulierenden  $\varphi^n(t)$ -Terms gerade eine maximale Bandbreite  $B_{n\varphi} = n \cdot B_{n\varphi}$ . Da jeder Term einer DSB-SC entspricht, wird für jeden Term jeweils die Bandbreite des modulierenden  $\varphi^n(t)$  noch verdoppelt.

In Bezug auf  $\varphi(t)$  wird insgesamt für das winkelmodulierte Signal also nicht nur einfach eine Frequenzverschiebung zur Trägerfrequenz  $\pm f_c = \pm \frac{\omega_c}{2\pi}$  durchgeführt. Stattdessen wird  $\varphi(t)$  vor dieser Verschiebung bei der jeweiligen Potenzierung  $\varphi^n(t)$  ausgeprägt nicht-linear verformt. Daher spricht man bei PM oder FM auch von einer nicht-linearen oder exponentiellen Modulation.

Diese starken Nicht-Linearitäten verunmöglichen es aber, eine analytische Lösung für das PM- bzw. FM-Spektrum von beliebigen modulierenden Nachrichtensignalen  $m(t)$  zu finden. Für die Berechnung solcher Spektren muss man sich auf numerische Lösungen beschränken. Zwei Spezialfälle sollen dennoch weiterverfolgt werden: einerseits die Kleinhubwinkelmodulation (Englisch: narrowband angle modulation) und, als einziger Vertreter einer Grosshubwinkelmodulation (Englisch: wideband angle modulation), ein Eintonsignal, d.h. ein sinusförmig moduliertes FM- oder PM-Signal.

### 5.9.1 Kleinhubsignale

Die Idee bei einem Kleinhubsignal bzw. bei der Kleinhubwinkelmodulation besteht darin, die Aussteuerung des Winkels  $\varphi$  so klein zu halten, dass die nicht-linearen Terme von  $\varphi(t)$  in der Reihenentwicklung im Vergleich zum linearen Term verschwindend klein bleiben, d.h.  $\frac{|\varphi(t)|^n}{n!} \ll |\varphi(t)|$ . Dies ist ungefähr so lange der Fall, wie  $|\varphi(t)| < 0.2$  rad gilt, d.h. bei einer maximalen Phasenabweichung von ca. 10 bis 12 Grad.

Die Reihenentwicklung kann dann in guter Näherung nach dem linearen Term abgebrochen werden:

$$x_{\text{NB}\phi\text{M}}(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \varphi(t) \cdot \sin(\omega_c t) \quad (5.22)$$

Oder separiert für Phasen- und Frequenzmodulation:

$$x_{\text{NBPM}}(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot k_p \cdot m(t) \cdot \sin(\omega_c t) \quad (5.23)$$

$$x_{\text{NBFM}}(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \cdot \sin(\omega_c t) \quad (5.24)$$

Der Vergleich mit gewöhnlicher AM drängt sich bei einem winkelmodulierten Kleinhubsignal auf. Wie bei gewöhnlicher AM besteht das Kleinhubsignal zur Hauptsache aus dem nicht-modulierten Trägeranteil  $A_c \cdot \cos(\omega_c t)$ , welcher keine Information trägt und beim Empfänger weggefiltet wird. Das Nachrichtensignal  $m(t)$  vollzieht zusätzlich noch eine Zweiseitenband-Amplitudenmodulation, allerdings nicht in gleicher Phasenlage wie der nicht-modulierte Trägeranteil, sondern orthogonal zu diesem, auf dem Sinusträgersignal mit negativem Vorzeichen.

Mit einer maximalen Aussteuerung von ungefähr  $\varphi_{\max} < 0.2$  rad kann wie bei der gewöhnlichen AM die Leistungseffizienz  $\eta$  berechnet werden, welche beschreibt, welcher Anteil der gesamten Sendeleistung für die Demodulation des Nachrichtensignals genutzt werden kann. Selbst wenn ein kleiner Scheitelfaktor  $C = \frac{|x|_{pk}}{x_{\text{RMS}}} = \sqrt{2}$  eines modulierenden Sinussignals angenommen wird, bleibt die Leistungseffizienz bei einem bescheidenen Wert von  $\eta < 2\%$ . Bei realen Nachrichtensignalen mit einem in der Regel höherem Scheitelfaktor  $C$  sinkt diese tiefe Leistungseffizienz der Kleinhubwinkelmodulation noch weiter.

Eine verbesserte Empfangsqualität im Vergleich zur Amplitudenmodulation kann mit Kleinhub PM- oder FM-Signalen somit nicht erzielt werden. Dies darf erst erwartet werden, wenn eine Grosshubwinkelmodulation durchgeführt wird, was im Modul Nachrichtentechnik 2 noch aufgezeigt wird.

### 5.9.2 Grosshubsignal

Bei einem Grosshubsignal können die nicht-linearen Terme von  $\varphi(t)$  nicht mehr vernachlässigt werden. Durch die nicht-linearen Terme entstehen neue Frequenzkomponenten, welche die Bandbreite des modulierten PM- oder FM-Signals erhöht. Durch die Nicht-Linearitäten ist zudem eine kompakte analytische Bestimmung des Spektrums für beliebige Nachrichtensignale  $m(t)$  nicht mehr durchführbar.

Weiter ist auch der Überlagerungssatz nicht mehr gültig und selbst eine Skalierung des Nachrichtensignals hat im Spektrum des winkelmodulierten Signals ausgeprägt nicht-lineare Veränderungen zur Folge, was das intuitive Verständnis für den Frequenzbereich winkelmodulierter Signale sehr stark erschwert.

Für Eintonsignale, d.h. sinusförmig modulierte PM- und FM-Signale, soll das Spektrum bei Grosshubwinkelmodulation dennoch bestimmt werden, da diese Signale in der Praxis als Testsignale oft verwendet werden und das Spektrum Rückschlüsse auf die bei der Modulation verwendete Phasenhubkonstante  $k_p$  bzw. Frequenzhubkonstante  $k_f$  erlaubt.

Um das Spektrum für PM und FM gemeinsam berechnen zu können, werden die modulierenden Nachrichtensignale  $m_{\text{PM}}(t)$  bzw.  $m_{\text{FM}}(t)$  unterschiedlich angesetzt:

$$m_{\text{PM}}(t) = A_m \cdot \sin(\omega_m t) \quad (5.25)$$

$$m_{\text{FM}}(t) = A_m \cdot \cos(\omega_m t) \quad (5.26)$$

Mit diesen Nachrichtensignalen kann die Phase  $\varphi(t)$  des modulierten Trägersignals sofort bestimmt werden, bei PM durch eine einfach Skalierung mit der Phasenhubkonstanten  $k_p$ , bei FM mit der Frequenzhubkonstanten  $k_f$  und anschliessender Integration, wodurch aus dem frequenzmodulierenden Cosinus ebenfalls ein phasenmodulierender Sinus wird:

$$\varphi_{\text{PM}}(t) = k_p \cdot A_m \cdot \sin(\omega_m t) \quad (5.27)$$

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = k_f \cdot A_m \cdot \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \quad (5.28)$$

Die Phase verändert sich für PM und FM sinusförmig mit einer maximale Phasenabweichung  $\beta$ , welche sich – zur Unterscheidung nachfolgend einmalig als  $\beta_{\text{PM}}$  bzw.  $\beta_{\text{FM}}$  bezeichnet – wie folgt berechnet:

$$\beta_{\text{PM}} = k_p \cdot A_m \quad (5.29)$$

$$\beta_{\text{FM}} = \frac{k_f \cdot A_m}{\omega_m} \quad (5.30)$$

Diese maximale Phasenabweichung  $\beta$  wird auch als Modulationsgrad (Englisch: modulation index) der Winkelmodulation bezeichnet, ist aber nur für Eintonsignale, d.h. sinusförmig modulierte PM- und FM-Signale definiert. Die Unterscheidung von  $\beta_{\text{PM}}$  und  $\beta_{\text{FM}}$  in den vorhergehenden Formeln soll nur unterstreichen, dass der Modulationsgrad für PM und FM unterschiedlich berechnet wird. In allen nachfolgenden Formeln wird zusammengefasst nur noch ein einziges  $\beta$  verwendet. Für diesen allgemeinen Modulationsgrad  $\beta$  muss dann aber jeweils die Formel für  $\beta_{\text{PM}}$  bzw.  $\beta_{\text{FM}}$  verwendet werden, je nachdem ob eine Phasen- oder Frequenzmodulation vorliegt.

Mit dieser maximalen Phasenabweichung  $\beta$  kann das winkelmodulierte Eintonsignal wie folgt umgeschrieben werden:

$$x_{\text{ST}\phi\text{M}}(t) = A_c \cdot \Re \left[ e^{j(\omega_c t + \varphi(t))} \right] = A_c \cdot \Re \left[ e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} \right] \quad (5.31)$$

Der erste Term  $e^{j\omega_c t}$  wird mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes der Fouriertransformation (bzw. des Modulationssatzes aufgrund der Realteilbildung) verrechnet. Der zweite Term  $e^{j\beta \sin(\omega_m t)}$  ist das modulierende Signal. Da das Argument der Exponentialfunktion ( $\sin(\omega_m t)$ ) ein periodisches Signal ist und somit nach jeder Periodendauer  $T$  die gleichen wiederkehrenden Werte erzeugt, besitzt auch die komplexe Exponentialfunktion  $e^{j\beta \sin(\omega_m t)}$  die gleiche Periodizität und kann als periodisches Signal mit Hilfe einer Fourier-Reihe ausgedrückt werden.

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist aufwändig und soll hier nicht durchgeführt werden. Stattdessen wird das Ergebnis gleich hingeschrieben und anschliessend erläutert.

$$x_{\text{ST}\phi\text{M}}(t) = A_c \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \cos((\omega_c + n\omega_m)t) \quad (5.32)$$

Bei  $J_n(\beta)$  handelt es sich um Besselfunktionen erster Art und  $n$ -ter Ordnung. Ähnlich wie Exponentialfunktionen oder sinusförmige Funktionen werden auch Besselfunktionen durch eine Reihenentwicklungen definiert. Ein wichtiges Anwendungsgebiet für Besselfunktionen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die Besselfunktionen bilden die Koeffizienten für die Cosinussignale, welche bei der Trägerfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  sowie in einem linken und rechten Seitenband im Raster von  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$  auftreten. In Abbildung 5.27 sind die Besselfunktionen für positive Ordnung  $n$  mit  $0 \leq n \leq 19$  und  $\beta < 15$  dargestellt.

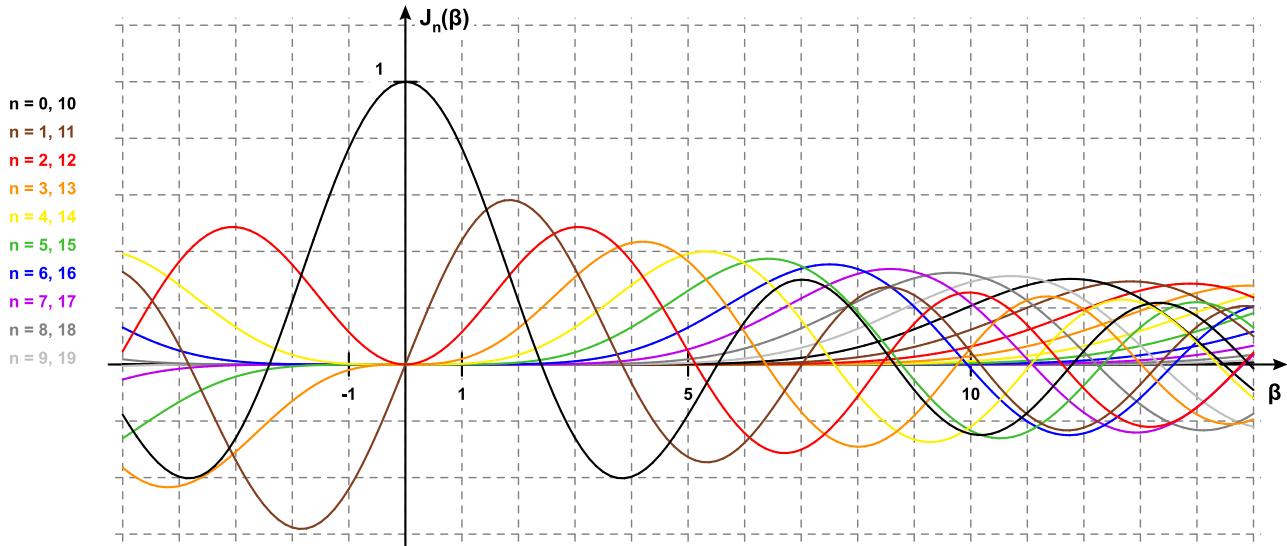


Abbildung 5.27: Besselfunktionen erster Art und  $n$ -ter Ordnung

Für Besselfunktionen mit negativer Ordnung  $-n$  gilt folgende Beziehung im Vergleich zu den Besselfunktionen mit positiver Ordnung  $n$ :

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n \cdot J_n(\beta) = J_n(-\beta) \quad (5.33)$$

Zur Illustration wurde in Abbildung 5.27 auch ein Abschnitt von  $J_n(-\beta)$  dargestellt. Man erkennt daraus, dass für gerade Ordnungen  $n$  die Besselfunktion erster Art eine gerade Funktion ist (d.h.  $J_n(-\beta) = J_n(\beta)$ ) und damit  $J_{-n}(\beta) = J_n(\beta)$  gilt. Für ungerade Ordnungen  $n$  ist die Besselfunktion erster Art eine ungerade Funktion (d.h.  $J_n(-\beta) = -J_n(\beta)$ ), womit gleichzeitig  $J_{-n}(\beta) = -J_n(\beta)$  gilt.

Unabhängig von  $\beta$  ergibt weiter die Summe aller quadrierten Besselkoeffizienten  $J_n(\beta)$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (5.34)$$

Berechnet man die Leistung eines FM-Signals mit Hilfe des Satzes von Parseval, folgt dank dieser Summenformel sofort, dass das winkelmodulierte Eintonsignal dieselbe Leistung aufweist wie der nicht-modulierte Träger, d.h.  $P = \frac{A_c^2}{2}$ . Mit sehr guter Näherung trifft dies auch für FM- und PM-Signale zu, welche mit einem beliebigen Nachrichtensignal  $m(t)$  moduliert wurden.

Als weitere Eigenschaft (im Rahmen des Moduls Nachrichtentechnik allerdings von untergeordneter Bedeutung) existiert folgende Rekursionsformel:

$$J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta) = \frac{2n}{\beta} J_n(\beta) \quad (5.35)$$

Die graphische Darstellung der Besselfunktionen kann im Hinblick auf winkelmodulierte Eintonsignale wie folgt interpretiert werden: bei kleinem  $\beta$ , das heißt kleiner maximalen Phasenabweichung, wie sie bei Kleinhubmodulation vorliegt, besteht das Spektrum des winkelmodulierten Eintonsignals hauptsächlich aus einem grossen Trägeranteil ( $n = 0$ ) sowie zwei Seitenlinien ( $|n| = \pm 1$ ). Alle anderen Seitenlinien ( $|n| > 1$ ) haben

zwar auch schon Koeffizienten  $J_n(\beta) > 0$  sind aber in Bezug auf ihren Amplitudenanteil und somit erst recht auch ihrer Leistung vernachlässigbar klein.

Theoretisch besitzt somit ein winkelmoduliertes Eintonsignal schon bei sehr kleinen maximalen Phasenabweichungen  $\beta < 0.2$  rad ein Spektrum mit unendlich grosser Bandbreite, doch können bei Kleinhubsignalen in praktischer Hinsicht sämtliche Koeffizienten mit  $|n| > 1$  vernachlässigt werden.

Bei grösser werdender maximalen Phasenabweichung  $\beta$  wird der nicht-modulierte Trägeranteil (Ordnung  $n = 0$ ) immer kleiner, hat zwischenzeitlich bei  $\beta \approx 2.4$  den Wert Null, steigt dann mit negativem Vorzeichen wieder an und oszilliert anschliessend mit zunehmendem  $\beta$  abklingend weiter. Zugleich steigt die erste Seitenlinie (Ordnung  $n = 1$ ) mit grösser werdendem  $\beta$  bis zu einem Maximum bei  $\beta \approx 2$  rad an, um dann ebenfalls oszillierend abzuklingen. Je grösser der Modulationsgrad  $\beta$  wird, umso mehr Seitenlinien im Spektrum kommen mit relevanten Amplituden zum Vorschein.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Koeffizientenanteile von Träger ( $J_0(\beta)$ ) und Seitenlinien für verschiedene Werte des Modulationsgrades  $\beta$  aufgeführt.

$\beta$	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$	$J_8(\beta)$	$J_9(\beta)$	$J_{10}(\beta)$
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.9900	0.0995	0.0050	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.3	0.9776	0.1483	0.0112	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4	0.9604	0.1960	0.0197	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.9385	0.2423	0.0306	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.9120	0.2867	0.0437	0.0044	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.7	0.8812	0.3290	0.0588	0.0069	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.8	0.8463	0.3688	0.0758	0.0102	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.9	0.8075	0.4059	0.0946	0.0144	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.7652	0.4401	0.1149	0.0196	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2	0.6711	0.4983	0.1593	0.0329	0.0050	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.4	0.5669	0.5419	0.2074	0.0505	0.0091	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.6	0.4554	0.5699	0.2570	0.0725	0.0150	0.0025	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.8	0.3400	0.5815	0.3061	0.0988	0.0232	0.0043	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2.0	0.2239	0.5767	0.3528	0.1289	0.0340	0.0070	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
2.2	0.1104	0.5560	0.3951	0.1623	0.0476	0.0109	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
2.4	0.0025	0.5202	0.4310	0.1981	0.0643	0.0162	0.0034	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
2.6	-0.0968	0.4708	0.4590	0.2353	0.0840	0.0232	0.0052	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000
2.8	-0.1850	0.4097	0.4777	0.2727	0.1067	0.0321	0.0079	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000
3.0	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3091	0.1320	0.0430	0.0114	0.0025	0.0005	0.0001	0.0000
3.5	-0.3801	0.1374	0.4586	0.3868	0.2044	0.0804	0.0254	0.0067	0.0015	0.0003	0.0001
4.0	-0.3971	-0.0660	0.3641	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152	0.0040	0.0009	0.0002
4.5	-0.3205	-0.2311	0.2178	0.4247	0.3484	0.1947	0.0843	0.0300	0.0091	0.0024	0.0006
5.0	-0.1776	-0.3276	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.1310	0.0534	0.0184	0.0055	0.0015
5.5	-0.0068	-0.3414	-0.1173	0.2561	0.3967	0.3209	0.1868	0.0866	0.0337	0.0113	0.0034
6.0	0.1506	-0.2767	-0.2429	0.1148	0.3576	0.3621	0.2458	0.1296	0.0565	0.0212	0.0070
6.5	0.2601	-0.1538	-0.3074	-0.0353	0.2748	0.3736	0.2999	0.1801	0.0880	0.0366	0.0133
7.0	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392	0.2336	0.1280	0.0589	0.0235
7.5	0.2663	0.1352	-0.2303	-0.2581	0.0238	0.2835	0.3541	0.2832	0.1744	0.0889	0.0390
8.0	0.1717	0.2346	-0.1130	-0.2911	-0.1054	0.1858	0.3376	0.3206	0.2235	0.1263	0.0608
8.5	0.0419	0.2731	0.0223	-0.2626	-0.2077	0.0671	0.2867	0.3376	0.2694	0.1694	0.0894
9.0	-0.0903	0.2453	0.1448	-0.1809	-0.2655	-0.0550	0.2043	0.3275	0.3051	0.2149	0.1247
9.5	-0.1939	0.1613	0.2279	-0.0653	-0.2691	-0.1613	0.0993	0.2868	0.3233	0.2577	0.1650
10.0	-0.2459	0.0435	0.2546	0.0584	-0.2196	-0.2341	-0.0145	0.2167	0.3179	0.2919	0.2075

**Tabelle 5.1:** Werte der Besselfunktionen erster Art und  $n$ -ter Ordnung  $J_n(\beta)$

Eine Abschätzung der Bandbreite kann sowohl für Kleinhubwinkelmodulation (ungefähr  $\beta \leq 0.2$  rad) wie auch für Grosshubwinkelmodulation (ungefähr  $\beta \geq 1$  rad) nach Carson durchgeführt werden. John Carson

hat gezeigt, dass alle Spektralanteile ab  $|n| > \beta + 1$  höchstens noch 2% der Signalleistung beinhalten. Die sogenannte Carson-Bandbreite eines winkelmodulierten Eintonsignals ist gerade so definiert, dass sie mindestens 98% der Signalleistung des modulierten Signals umfasst. Da ein winkelmoduliertes Signal sowohl ein oberes wie auch ein unteres Seitenband besitzt, verdoppelt sich die Bandbreite, was den Faktor 2 in der folgenden Formel nach Carson erklärt, welche die Bandbreite eines winkelmodulierten Eintonsignals wiedergibt:

$$B_{\text{ST}\phi\text{M}} = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot \frac{\omega_m}{2\pi} \quad (5.36)$$

Neben dieser Carson-Bandbreite gibt es auch andere Näherungsformeln, welche die Bandbreitengrenze noch eine weitere Spektrallinie weiter entfernt von der Trägerfrequenz ziehen. Die Bandbreite eines winkelmodulierten Eintonsignals berechnet sich dann mit:  $B_{\text{ST}\phi\text{M}} = 2 \cdot (\beta + 2) \cdot \frac{\omega_m}{2\pi}$ .

Die maximale Phasenabweichung  $\beta$  eines Eintonsignals kann auch mit Hilfe der Frequenz des modulierenden Signals  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$  und dem Frequenzhub  $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ , d.h. der maximalen Abweichung von der nicht-modulierten Trägerfrequenz ausgedrückt werden, was speziell für FM-Signale folgende praktische Formel ergibt:

$$\beta = \frac{\Delta\omega_m}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (5.37)$$

Durch Einsetzen in die Bandbreitenformel nach Carson und ausmultiplizieren erhält man:

$$B_{\text{ST}\phi\text{M}} = 2 \cdot (\Delta f + f_m) \quad (5.38)$$

Die Carson-Bandbreite des winkelmodulierten Eintonsignals ergibt sich somit aus den 2 Seitenbändern mit Spektrallinien im Raster  $f_m$ . Beide Seitenbänder umfassen jeweils die maximale Frequenzaussteuerung  $\Delta f$  (Frequenzhub) und darüber hinaus noch eine zusätzliche Spektrallinie im Abstand  $f_m$ .

Ohne Beweis kann diese Bandbreitenformel auch auf beliebige modulierende Nachrichtensignale mit Bandbreite  $B_m$  erweitert werden:

$$B_{\phi\text{M}} = 2 \cdot (\Delta f + B_m) \quad (5.39)$$

Oder ausgedrückt mit Hilfe des Hubverhältnisses (Englisch: deviation ratio)  $D = \frac{\Delta f}{B_m}$ :

$$B_{\phi\text{M}} = 2 \cdot (D + 1) \cdot B_m \quad (5.40)$$

## 5.10 Technische Entwicklung des UKW-Radios

Die Anfänge und die weitere Entwicklung von UKW-Radio in der Schweiz wurde in [2] dokumentiert, woraus ein paar technisch interessante Details nachfolgend beschrieben und erläutert werden.

UKW-Radio wurde in der Schweiz versuchsweise schon seit 1949, ab 1952 in regulärem Betrieb ausgestrahlt, zuerst in Mono, ab 1978 in Stereo. Im Monobetrieb bildet das bandbegrenzte Audiosignal von 30 Hz bis 15 kHz das Nachrichtensignal. Der maximale Frequenzhub beträgt 75 kHz, womit sich für einen UKW-Rasdiosender im Monobetrieb eine Bandbreite gemäss Carson von 180 kHz ergibt.

Die Frequenzmodulation besitzt die Eigenschaft, dass sich weisses (d.h. bzgl. der Frequenz konstantes) Kanalrauschen nach der Demodulation bei höheren Frequenzen stärker bemerkbar macht als bei tieferen Frequenzen. Um diesem Effekt entgegenzuwirken werden beim Sender die höheren Frequenzanteile des Nachrichtensignals vor der Modulation angehoben (Preemphase). Der Empfänger korrigiert diese Anhebung wieder mit einer entsprechenden Dämpfung, welche aber auch die Rauschanteile bei den höheren Frequenzen vermindert (Deemphasis). Die Grenzfrequenz, ab welcher die Anhebung (bzw. beim Empfänger die Absenkung) einsetzt, liegt bei 3.18 kHz (USA: 2.1 kHz) [10].

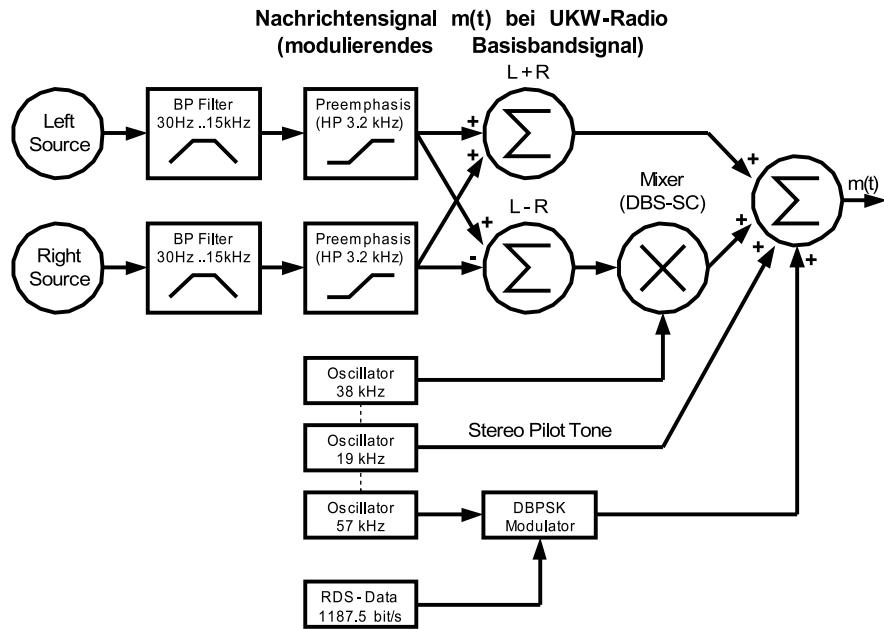
Das Nachrichtensignal wurde in einem zweiten Schritt für die Stereoübertragung ergänzt. Um die Kompatibilität mit dem Monosignal beizubehalten, wird der linke und rechte Kanal nicht einzeln sondern als Summensignal (entspricht dem Monosignal) und Differenzsignal übertragen (beide mit Preemphase). Das Differenzsignal wird mit einer DSB-SC auf einem 38 kHz-Träger aufmoduliert und befindet sich so komplett ausserhalb des Hörbereichs. Für die korrekte Demodulation wird ein 19 kHz Trägersignal als sogenannter Pilotton mitgeliefert, welcher gleichzeitig auch anzeigt, dass es sich beim Nachrichtensignal um eine Stereoübertragung handelt. Die Kombination von L+R Monosignal, Pilotton und L-R DSB-SC wird als Multiplex-Signal bezeichnet. Es bildet beim Stereobetrieb das Nachrichtensignal welches in den FM-Modulator eingespielen wird.

Ab 1980 wurde das modulierende Multiplex-Signal ergänzt mit dem von der ARD entwickelten ARI (Autofahrer-Rundfunk-Informationssystem), welches innerhalb des Nachrichtensignals auf einem 57 kHz-Träger aufmoduliert war. Die Informationen über das aktuelle Sendegebiet sowie die Anzeige, dass eine Verkehrs durchsage vorliegt, wurde durch Amplitudenmodulation des 57 kHz-Trägers mit Sinussignalen verschiedener Frequenzen realisiert.

Das sehr rudimentäre ARI wurde ab 1988 durch RDS (radio data system) ergänzt und seit 2003 komplett abgelöst. RDS wird ebenfalls auf einem 57 kHz-Träger als differentielles binäres Phase-Shift Keying (DBPSK) übertragen. Damit in der Übergangsphase der Betrieb von ARI und RDS gleichzeitig möglich war, verwendete man aber für RDS das zum ARI-System orthogonale 57 kHz Trägersignal. Dank dem im Nachrichten-Multiplex schon vorhandenen 19 kHz-Pilotton war beim Empfänger eine sehr einfach implementierbare Synchronisation für die kohärente Demodulation von Inphase-Signal (ARI) und Quadratur-Signal (RDS) möglich.

Diese kurze Beschreibung zeigt, dass die im Unterricht behandelten Grund-Modulationsarten in der Praxis oft nicht in reiner Form sondern kombiniert vorkommen, selbst bei einfachen Anwendungen, wie dem UKW-Radio. Sogar beim ursprünglichen Monobetrieb liegt keine reine Frequenzmodulation vor, da durch die differentielle Charakteristik der Preemphase die höherfrequenten Anteile des Audiosignals im Grunde genommen nicht mehr eine Frequenzmodulation sondern eine Phasenmodulation des Trägersignals vollziehen.

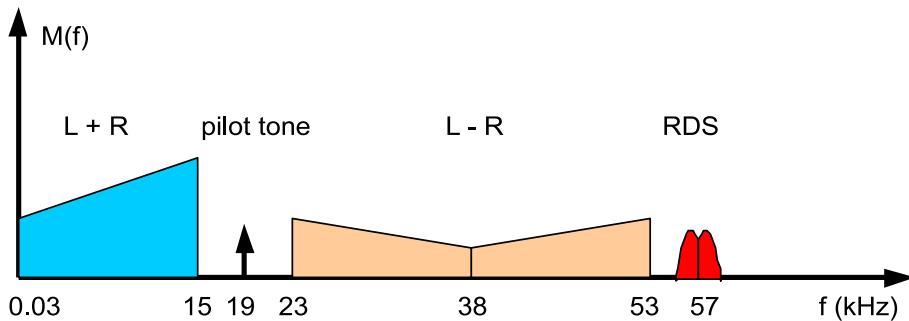
In Abbildung 5.28 ist ein einfaches Blockschaltbild dargestellt, wie bei UKW-Radio das Nachrichtensignal vor der Frequenzmodulation zusammengestellt wird.



**Abbildung 5.28:** Blockschaltdiagramm des modulierenden Signals bei UKW-Radio

Nach der Demodulation des FM-Signals beim Empfänger müssen die einzelnen Anteile des modulierenden Nachrichtensignals wieder voneinander getrennt werden. Da alle diese Signalanteile des Nachrichtensignals beim Sender noch vor der Frequenzmodulation als Frequenzmultiplex zusammengestellt wurden, müssen sie nun beim Empfänger nach der FM-Demodulation mit Filtern und zugehörigen Mixern wieder in ihre ursprüngliche Form im Basisband gebracht werden. Die spektrale Zusammensetzung dieses Frequenzmultiplexes ist in 5.29 vereinfacht als einseitiges Spektrum dargestellt.

**Spektrum des Nachrichtensignals  $m(t)$  bei UKW-Radio  
(modulierendes Basisbandsignal)**



**Abbildung 5.29:** Spektrale Zusammensetzung des modulierenden Signals bei UKW-Radio



# Kapitel 6

## Digitalisierung von Signalen

### 6.1 Welche Vorteile bringt die Digitalisierung von Signalen?

Die Idee der Digitalisierung von Signalen besteht darin, analoge zeitliche Signalverläufe mit Zahlen darzustellen. Dazu wird die Amplitude des Signals in regelmässigen Zeitabständen gemessen und als Zahlenwert ausgedrückt. Diese Zahlen können anschliessend verarbeitet, gespeichert oder übertragen werden. Oft erfolgt anschliessend oder zu einem späteren Zeitpunkt wieder eine Rückwandlung in ein analoges Signal.

Damit ein analoges Signal mit einer endlichen Anzahl von Bit digitalisiert werden kann, muss sowohl die Anzahl gemessener Abtastpunkte pro Zeiteinheit beschränkt, als auch die Genauigkeit der Zahlenwerte auf eine endliche Anzahl von Bit pro Abtastwert reduziert werden.

Liegen diese zeitdiskreten und quantisierten Amplitudenwerte vor, muss schliesslich noch festgelegt werden, in welchem (binären) Zahlenformat die Amplitudenwerte codiert werden.

Diese drei Schritte sind die klassische Vorgehensweise, wie ein analoges Signal digitalisiert wird. Eine der ersten wichtigen Anwendungen, wo sich die Digitalisierung gegenüber einem schon bestehenden analogen System durchgesetzt hat, war die Sprachkommunikation per Telefon. Aus diesem Anwendungsfeld heraus entstand auch der Begriff Pulse-Code Modulation (PCM) für das eben beschriebene Standardverfahren der Digitalisierung.

In den 1950er Jahren experimentierten Ausrüsterfirmen der Telefongesellschaften mit Pulseamplitudenmodulation (Englisch: pulse-amplitude modulation, PAM) [3]. Dabei wurden analoge Telefongespräche durch Multiplikation mit einer periodischen Folge von kurzen Rechteckpulsen auf kurze Zeitabschnitte pro Pulsin intervall reduziert.

Die so gewichteten Rechteckpulse sind zeitlich diskretisierte aber noch nicht quantisierte Signale, die zusammen mit anderen PAM-Signalen im Zeitmultiplex ineinander verschachtelt übertragen wurden. Der Zeitmultiplex erlaubte es zudem, relativ einfach Vermittlungsfunktionen einer Telefonzentrale zu implementieren und dies erst noch mit elektronischen Komponenten anstatt den damals üblichen elektromechanischen Relais. Diese PAM-Systeme konnten sich aber dennoch nicht durchsetzen.

Erst die zusätzliche Quantisierung der Amplitudenwerte und die Übertragung dieser Werte als 8-Bit Code brachten den Durchbruch. Da Quantisierung und Codierung als Weiterentwicklung von Pulse Amplitude Modulation verstanden wurde, bezeichnete man dieses Verfahren der Digitalisierung als Pulse Code Modulation (PCM).

Auch wenn dieser Begriff aus heutiger Sicht etwas eigenständig wirkt, hat sich die Bezeichnung PCM oder auch Linear PCM (LPCM) für das Standardverfahren der Digitalisierung vor allem im Audiobereich bis heute gehalten. So wird dieser Begriff auch für das Format der Audiodaten von CDs verwendet, bei welcher die 16-Bit Abtastwerte pro Stereokanal „uncodiert“ vorliegen, d. h. nicht zusätzlich mit einem Audiokompressionsverfahren verarbeitet wurden.

Digitale Übertragungs- und Speichersysteme haben sich heute gegenüber analogen Lösungen in fast allen wichtigen Bereichen der Kommunikationstechnik durchgesetzt. Dennoch stellt sich die Frage, welche Vorteile

diese Umstellung von analog auf digital gebracht hat. Einige Punkte zu verschiedenen Anwendungsbereichen sind nachfolgend aufgeführt:

- **Fehlerfreie Übertragung:** auch über Kanäle, welche stark linear oder nicht-linear verzerrt sind und auf welche Störungen von aussen einwirken, können digitale Informationen aus praktischer Sicht und bei angepasster Datenrate zu 100% fehlerfrei übertragen werden. Bei analogen Signalen können die erwähnten Verzerrungen nur teilweise korrigiert werden. Zudem können Störsignale mit gleicher Charakteristik wie das Nutzsignal nicht mehr von diesem getrennt werden.
- **Weniger Bandbreite im Übertragungskanal:** zwar beansprucht die Übertragung von digitalisierten Signalen tendenziell eher mehr Bandbreite als deren direkte analoge Übertragung. Mit Hilfe der Quellenencodierung kann aber in vielen Fällen die Redundanz und Irrelevanz des digitalen Nachrichtensignals deutlich gesenkt werden. Für die so komprimierte Informationsmenge wird dann insgesamt weniger Bandbreite im Übertragungskanal benötigt als für das ursprüngliche analoge Signal.
- **Einheitliche Speicherung:** während für analoge Systeme pro Medium (z.B. Photo, Film, Audio) und für unterschiedliche Qualitäts- und Preisklassen jeweils eine eigene Speichertechnologie notwendig war (Papierkopie, Druckerzeugnisse, Photo, Diapositiv, Super-8, Video, Kassette, Tonband, etc.), ist die Speicherung unterschiedlicher digitaler Daten nicht mehr an anwendungsspezifische Technologien gebunden.
- **Vervielfältigung ohne Qualitätseinbusse:** die Kopie kommt nicht ans Original heran, ist eine Aussage aus der analogen Zeit. Qualitätseinbussen waren bei jeder weiteren Kopie der Kopie unumgänglich. Digitale Informationen können hingegen beliebig und bei gleich bleibender Qualität reproduziert werden, solange beim Kopiervorgang die gespeicherten Originaldaten im Hintergrund nicht algorithmisch beeinträchtigt werden.
- **Algorithmische Verarbeitung:** digitale Daten können mit aufwändigen Algorithmen auf kleinster Chipfläche beliebig aufbereitet und auf das Wesentliche reduziert werden, in einem Ausmass, welches bei analoger Verarbeitung auch bei beliebiger Baugröße und uneingeschränktem Budget den Rahmen des technisch umsetzbaren um Größenordnungen gesprengt hätte.
- **Chiffrierverfahren:** für den Schutz der übertragenen oder gespeicherten Information vor unerlaubtem Zugriff und gezielter Veränderung gab es im analogen Bereich nur sehr rudimentäre und unbefriedigende Lösungsansätze. Selbst wenn davon ausgegangen wird, dass es wohl niemals ein nicht knackbares Verschlüsselungsverfahren geben wird, muss anerkannt werden, dass algorithmische Verfahren zur Chiffrierung von digitalen Daten die Hürde für nicht autorisierte Personengruppen sehr hoch legen.

All diese Vorteile durch die Digitalisierung müssen durch zusätzliche planerische oder organisatorische Massnahmen unterstützt werden, damit sie überhaupt zum Tragen kommen. So kann auch eine digitale Datenübertragung sehr viele Fehler aufweisen, wenn die Fehlerrate im Übertragungskanal die Möglichkeiten der fehlerkorrigierenden Codierung sprengt. Eine Kopie einer JPEG-codierten Photographie kann durchaus schlechter sein als das ebenfalls schon JPEG-codierte Original, wenn beispielsweise während des Kopiervorgangs das Softwaretool die Daten ein zusätzliches Mal decodiert und mit leicht unterschiedlichen Parametern wieder frisch codiert. Und als weiteres Beispiel sind auch die besten Chiffrierverfahren natürlich nur so lange tauglich, wie Personengruppen, vor deren uneingeschränktem Zugriff die Daten geschützt werden sollen, sich nicht eine Zugangsberichtigung mit bewusster oder unbewusster Hilfe von autorisierten Personen erschleichen können.

## 6.2 Abtastung

Die Reduzierung eines zeitkontinuierlichen Signalverlaufs auf eine pro Zeiteinheit endliche Anzahl von repräsentativen Amplitudenwerten wird als Abtastung (Englisch: sampling) bezeichnet. Üblicherweise geschieht dies mit einer konstanten Abtastrate  $f_s$  [sample/s], bei welcher periodisch mit der Periodendauer  $T_s = \frac{1}{f_s}$  jeweils ein einzelner Amplitudenwert des Signals erfasst wird.

Es stellt sich hier sofort die Frage, ob durch diese zeitliche Diskretisierung nicht zuviel Information über den analogen Signalverlauf verloren geht und ob dieser überhaupt wieder rekonstruiert werden kann. Die Antwort auf diese Frage wird sicher auch von der Beschaffenheit des analogen Signals und der Abtastrate  $f_s$  abhängen. So wird vermutlich ein einziger Abtastwert alle 5 Minuten den Temperaturverlauf der Außenluft sehr gut wiedergeben, während diese tiefe Samplerate für ein ganzes Musikstück offensichtlich niemals ausreicht.

Um beurteilen zu können, ob die Abtastwerte den analogen Signalverlauf korrekt wiedergeben, muss als erstes der Abtastvorgang mathematisch verstanden werden.

### 6.2.1 Mathematische Beschreibung des Abtastvorgangs im Zeitbereich

#### Natural Sampling im Zeitbereich

Wird die Abtastung nur für sich betrachtet und die Quantisierung und Codierung noch nicht miteinbezogen, müssen drei Eigenschaften für ein einfaches und zugleich möglichst ideales Sampling erfüllt werden:

- Der Abtastvorgang soll periodisch mit der Periode  $T_s = \frac{1}{f_s}$  erfolgen.
- Die Erfassungszeit  $\tau > 0$  eines einzelnen Amplitudenwertes soll sehr kurz sein. Bei idealem Sampling soll diese Zeit gegen  $\tau \rightarrow 0$  streben.
- Obwohl die ursprünglichen Amplitudenwerte von  $m(t)$  bei kleinem  $\tau > 0$  nur über sehr kurze Zeit im abgetasteten Signal erscheinen, sollen das Amplitudendichtespektrum und die Gesamtleistung des abgetasteten Signals  $m_s(t)$  nicht verschwindend klein werden.

Mathematisch kann dieser Vorgang durch eine Multiplikation des analogen Signals mit einer Rechteckpulsfolge mit Periodendauer  $T_s$  und einer sehr kurzen Pulsbreite  $\tau$  aufgefasst werden. Dazu definieren wir den folgenden, einzelnen, normierten Rechteckpuls:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.1)$$

Hat der Rechteckpuls anstatt die Breite 1 die Breite  $\tau$  (von  $-\frac{\tau}{2}$  bis  $+\frac{\tau}{2}$ ), kann dies durch eine Skalierung der Zeitachse wie folgt ausgedrückt werden:

$$\text{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (6.2)$$

Wird dieser Puls nun periodisch im Abstand  $T_s$  wiederholt, ergibt dies folgende Rechteckpulsfolge  $\text{rect}_{T_s}(t/\tau)$ :

$$\text{rect}_{T_s}(t/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - n \cdot T_s}{\tau}\right) \quad (6.3)$$

Die Multiplikation des Nachrichtensignals  $m(t)$  mit dieser Rechteckpulsfolge  $\text{rect}_{T_s}(t/\tau)$  entspricht einem pulsamplitudenmodulierten Signal  $m_{\text{PAM}}(t)$ . Bei kleinem  $\tau$  ist die resultierende Amplitude von  $m_{\text{PAM}}(t)$  die meiste Zeit Null. Dadurch wird aber auch die mittlere Leistung und das Amplitudendichtespektrum von  $m_{\text{PAM}}(t)$  gegen Null streben. Um die mathematische Behandlung des abgetasteten Signals auch für sehr kurze Pulsbreiten  $\tau$  einfach zu halten, soll dieser Effekt kompensiert werden, weshalb eine Skalierung mit  $\frac{1}{\tau}$  vorgenommen wird.

Der gesamte Vorgang, d.h. Multiplikation mit der periodischen Rechteckpulsfolge und Skalierung mit  $\frac{1}{\tau}$  wird – bei endlich kurzem  $\tau > 0$  – als Natural Sampling bezeichnet. Dies ist in folgenden Graphen für  $\tau = \frac{T_s}{2}$  und  $\tau \ll T_s$  dargestellt, wobei für die einfache graphische Darstellung im Zeitbereich die eben beschriebene Skalierung von  $m_s(t)$  mit  $\frac{1}{\tau}$  durch eine Skalierung mit  $\tau$  wieder rückgängig gemacht wurde:

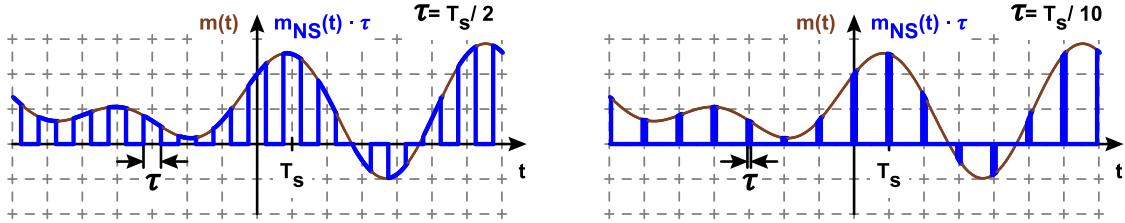


Abbildung 6.1: Natural Sampling mit  $\tau = 0.5 T_s$  und  $\tau = 0.1 T_s$  im Zeitbereich

Bei Natural Sampling resultiert im Zeitbereich folgendes abgetastetes Nachrichtensignal  $m_{NS}(t)$ :

$$m_{NS}(t) = m(t) \cdot \frac{1}{\tau} \operatorname{rect}_{T_s}(t/\tau) \quad (6.4)$$

### Ideales Sampling im Zeitbereich

Beim idealen Abtastvorgang (Englisch: ideal sampling) lässt man schliesslich die Pulsdauer  $\tau$  noch ganz gegen Null streben, um den Abtastvorgang anstatt auf ein kleines Zeitintervall auf einen einzelnen diskreten Zeitpunkt zu beschränken. Bei diesem Grenzübergang können die mit  $\frac{1}{\tau}$  skalierten Rechteckpulse durch Dirac'sche Deltafunktionen  $\delta(t)$  ersetzt werden:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \operatorname{rect}_{T_s}(t/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \operatorname{rect}\left(\frac{t - n \cdot T_s}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s) = \delta_{T_s}(t) \quad (6.5)$$

Damit ergibt sich für das ideale Sampling folgende kompakte Formel im Zeitbereich:

$$m_s(t) = m(t) \cdot \delta_{T_s}(t) \quad (6.6)$$

In mathematischer Hinsicht erweist sich ideales Sampling als sehr handlich, da diese Form ein einfacher Ausgangspunkt ist, um auch das Natural Sampling mit endlicher Pulsbreite  $\tau$  und weitere Einflüsse realer Abtastschaltungen zu berechnen. Dies wiegt den Nachteil auf, dass ideales Sampling in der Praxis nicht implementiert werden kann, da ein analoges Signal weder mit unendlich kurzer Zeit abgetastet werden kann, noch eine Skalierung mit  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau}$  durchführbar ist.

### 6.2.2 Abtastvorgang im Frequenzbereich

#### Natural Sampling im Frequenzbereich

Um das Spektrum eines mit Natural Sampling abgetasteten Signals zu bestimmen, soll als erstes die Fourierreihe des mit  $\frac{1}{\tau}$  skalierten periodischen Rechtecksignals  $\operatorname{rect}_{T_s}(t/\tau)$  berechnet werden. Dazu bestimmen wir die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe dieser Rechteckpulsfolge:

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-jn\frac{2\pi}{T_s}t} dt = \frac{1}{T_s} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{-jn\frac{2\pi}{T_s}} \cdot \left[ e^{-jn\frac{2\pi}{T_s}\frac{\tau}{2}} - e^{+jn\frac{2\pi}{T_s}\frac{\tau}{2}} \right] = \frac{1}{T_s} \cdot \frac{\sin(\frac{n\pi\tau}{T_s})}{\frac{n\pi\tau}{T_s}} \quad (6.7)$$

Mit diesen Koeffizienten lautet die Fourierreihe dieses skalierten periodischen Rechtecksignals:

$$\frac{1}{\tau} \cdot \operatorname{rect}_{T_s}(t/\tau) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi\tau}{T_s})}{\frac{n\pi\tau}{T_s}} \cdot e^{j\frac{2\pi n}{T_s}t} \quad (6.8)$$

Beim Natural Sampling wird nun das Nachrichtensignals  $m(t)$  mit dieser Summe von komplexen Schwingungen multipliziert. Auf jedes Teilprodukt von  $m(t)$  mit einem Summanden von (6.8) kann nun der Frequenzverschiebungssatz der Fouriertransformation angewendet werden. Mit  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$  ergibt sich damit für

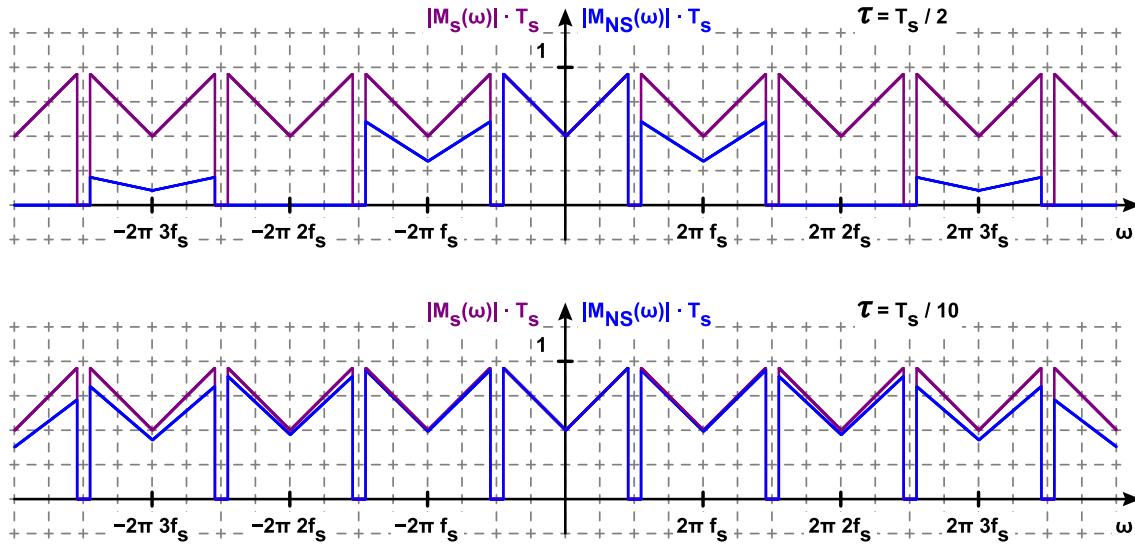
das mit Natural Sampling abgetastete Nachrichtensignal  $m_{\text{NS}}(t) = m(t) \cdot \frac{1}{\tau} \text{rect}_{T_s}(t/\tau)$ :

$$m_{\text{NS}}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\omega_s \tau}{2})}{\frac{n\omega_s \tau}{2}} \cdot M(\omega - n \cdot \omega_s) \quad (6.9)$$

Es handelt sich hierbei um ein im Raster der Samplefrequenz  $f_s$  repetiertes Spektrum des Nachrichtensignals  $M(\omega)$ , welches neben dem Faktor  $\frac{1}{T_s}$  noch mit der Sinc-Funktion  $\frac{\sin(\frac{n\omega_s \tau}{2})}{\frac{n\omega_s \tau}{2}}$  gewichtet ist.

Das Amplitudendichespektrum  $M_{\text{NS}}(\omega)$  ist in den folgenden Graphen blau dargestellt, einmal für  $\tau = \frac{T_s}{2}$  und einmal für  $\tau = \frac{T_s}{10}$ .

Um die Graphen in normierter Weise darzustellen, wurde  $M_{\text{NS}}(\omega)$  jeweils noch mit dem identischen Skalierungsfaktor  $T_s$  gewichtet.



**Abbildung 6.2:** Natural Sampling mit  $\tau = 0.5 T_s$  und  $\tau = 0.1 T_s$  im Frequenzbereich

Die violett hinterlegte Kurve repräsentiert das mit  $T_s$  skalierte Spektrum des abgetasteten Signals bei idealem Sampling, was im folgenden Abschnitt noch mathematisch behandelt wird.

### Ideales Sampling im Frequenzbereich

Als erster Schritt, um das Spektrum eines ideal abgetasteten Signals zu bestimmen, wird die Fourierreihe der periodischen Diracimpulsfolge  $\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$  berechnet:

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_{T_s}(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (6.10)$$

Und damit:

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jn\omega_s t} \quad (6.11)$$

Mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes der Fouriertransformation und  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$  kann nun wiederum das Spektrum für ein ideal abgetastetes Nachrichtensignal  $m_s(t) = m(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$  hingeschrieben werden:

$$m_s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n \cdot \omega_s) \quad (6.12)$$

Ideales Sampling präsentiert sich im Frequenzbereich noch einfacher als Natural Sampling: im Raster der Samplefrequenz  $f_s$  wird das Spektrum des Nachrichtensignals  $M(\omega)$  wiederholt und mit dem Faktor  $\frac{1}{T_s}$  gewichtet.

### 6.2.3 Nyquist-Shannon Abtasttheorem

#### Abtasttheorem für Basisbandsignale

Bei Natural Sampling wie auch idealem Sampling ist die Rückführung eines abgetasteten Nachrichtensignals  $m_s(t)$  in seine ursprüngliche analoge Form  $m(t)$  mathematisch sehr einfach realisierbar: mit einem Tiefpassfilter kann das Spektrum im Basisband (das heisst bei  $n = 0$  im repetitiven Spektrum) herausgefiltert werden. Nach einer Skalierung mit  $T_s$  liegt das ursprüngliche Spektrum wieder vor.

Die Rückwandlung mit diesem sogenannten Rekonstruktionsfilter wird aber nur dann das Spektrum des ursprünglichen analogen Signals  $M(\omega)$  korrekt wiedergeben, wenn die Teilspektren, das heisst die im Raster  $n \cdot \omega_s$  wiederholten Anteile  $M(\omega - n \cdot \omega_s)$  sich nicht überlappt haben. Dazu müssen schon bei der Abtastung zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Das ursprüngliche analoge Nachrichtensignal  $m(t)$  muss auf eine Bandbreite  $B_m$  bandbegrenzt sein.
- Die benachbarten Teilspektren, d. h. die in der Distanz der Abtastrate  $f_s = \pm \frac{\omega_s}{2\pi}$  verschobenen Spektralanteile müssen so weit vom ursprünglichen Spektrum im Basisband entfernt sein, dass sie im Basisband keine Überlappung verursachen.

Dies führt zum sehr einfachen aber ebenso wichtigen Nyquist-Shannon Abtasttheorem für Basisbandsignale, welches für korrektes Sampling eine Abtastrate  $f_s$  verlangt, die mehr als der doppelten Bandbreite  $B_m$  des Nachrichtensignals entspricht. Diese minimale Abtastrate wird auch als Nyquistrate  $f_{s_N}$ , der maximale zeitliche Abstand zwischen zwei Samples  $T_{s_N} = \frac{1}{f_{s_N}}$  als Nyquistintervall bezeichnet:

$$f_s > f_{s_N} = 2 \cdot B_m \quad (6.13)$$

Umgekehrt kann aus den vorhergehenden Überlegungen heraus gefolgert werden, dass bei einer gegebenen Abtastrate  $f_s$  das abzutastende analoge Nachrichtensignal  $m(t)$  eine maximale Bandbreite  $B_m < \frac{f_s}{2}$  haben darf, bzw. mit einem Tiefpassfilter auf diese Bandbreite begrenzt werden muss. Die maximale Frequenz im Basisbandsignal, welche bei vorgegebener Abtastrate noch korrekt erfasst werden kann, wird dabei als Nyquistfrequenz  $f_N$  bezeichnet.

#### Abtasttheorem für Bandpasssignale

Dieselbe Überlegung, welche minimale Abtastrate  $f_s$  beim Sampling verwendet werden muss, kann auch für Bandpasssignale durchgeführt werden, d.h. für Signale, deren tiefste Frequenzanteile nicht bis ins Basisband hinunter reichen. Bei Bandpasssignalen ist das Spektrum um eine Mittenfrequenz  $f_c$  herum gruppiert, welche typischerweise deutlich grösser als die Bandbreite des Nachrichtensignals ist:  $f_c \gg B_m$ .

Auch bei der Abtastung eines Nachrichtensignals als Bandpasssignal gelten die zwei Grundsätze:

- Das analoge Nachrichtensignal  $m(t)$  muss mit einer Bandbreite  $B_m$  bandbegrenzt sein.
- Die um jeweils  $n \cdot f_s = n \cdot \frac{\omega_s}{2\pi}$  verschobenen Spektren dürfen sich nicht überlappen.

Ist dies für eine gewählte Abtastrate  $f_s$  gewährleistet, kann aus dem Spektrum  $M_s(\omega)$  des abgetasteten Signals das ursprüngliche analoge Signal mit einem mit  $T_s$  skalierten Bandpassfilter wieder rekonstruiert werden.

Tiefe Abtastraten für Bandpasssignale zu finden, bei welchen sich die verschobenen Spektren nicht überlappen, ist ein rein geometrisches Problem, wie die wiederholten und verschobenen Spektren auf der Frequenzachse ohne Überlappung angeordnet werden können.

Die korrekte Abtastung von Bandpasssignalen mit einer tieferen Samplerate  $f_s$ , als sie für eine Basisbandabtastung nötig wäre, wird als Unterabtastung (Englisch: undersampling, sub-sampling oder sub-Nyquist sampling) bezeichnet, wobei der englische Begriff sub-sampling je nach Literatur üblich oder etwas umstritten ist.

Der Subsampling-Faktor  $n$  gibt an, wie oft sich das Spektrum des Bandpasssignals von der Frequenz 0 bis und mit dem Frequenzbereich des ursprünglichen Spektrums unterbringen lässt, ohne dass eine Überlappung erfolgt. Dabei wechseln sich auf der Frequenzachse jeweils das verschobene Frequenzband der positiven Frequenzachse mit jenem der negativen Frequenzachse ab.

Der Subsampling-Faktor und die zulässigen Sampleraten berechnen sich wie folgt:

- $1 \leq n < \frac{f_u}{f_u - f_l} \quad \frac{2f_u}{n} < f_s < \frac{2f_l}{n-1}$
- $f_u$ : Höchster (upper) Frequenzanteil des Bandpasssignals.
- $f_l$ : Tiefster (lower) Frequenzanteil des Bandpasssignals.
- $f_s$ : Samplingfrequenz.
- $n$ : Subsampling-Faktor (Integer).

### Aliasing

Übersteigt bei Basisbandsignalen die Bandbreite  $B_m$  die halbe Samplingrate  $\frac{f_s}{2}$ , führt dies zu einer Überlappung der sich auf der Frequenzachse wiederholenden Teilspektren. Auch eine falsche Wahl von  $f_s$  bei der Unterabtastung von Bandpasssignalen wird zu einer unerwünschten Überlagerung des repetitiven Spektrums führen. Bei der Rekonstruktion des analogen Signals mit einem Tiefpassfilter (bzw. Bandpassfilter bei Bandpasssignalen) entstehen durch diese Überlappung Spektralanteile im rekonstruierten Signal, welche im ursprünglichen Signal nicht vorhanden waren.

Diese Falschsignale werden als Aliasing oder Alias-Effekte bezeichnet. Aliasing kann bei Basisbandabtastung sehr einfach verhindert werden, indem vor der Abtastung die Bandbreite des Nachrichtensignals mit einem Anti-Aliasing Filter auf den Wert  $B < \frac{f_s}{2}$  begrenzt wird. Die Begrenzung der Bandbreite auf  $B < \frac{f_s}{2}$  ist auch bei der Unterabtastung eines Bandpasssignals eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Aliasing-freie Abtastung. Zusätzlich muss die Abtastrate  $f_s$  auch noch allen anderen Bedingungen genügen, die im zuvor behandelten Abschnitt Unterabtastung aufgeführt wurden.

#### 6.2.4 Rekonstruktion

Bei einem realen A/D-Wandler kommt die Abtastung sehr nahe an ideales Sampling heran und Effekte des Natural Samplings und seiner nachfolgenden Schaltungsblöcke müssen höchstens bei Wandlern mit sehr hoher Abtastrate beachtet werden. Bei einem D/A-Wandler weicht hingegen die technische Realisierung, wie abgetastete Signale in ihre analoge Form zurückgewandelt werden, deutlich stärker von den idealen theoretischen Verhältnissen ab.

Technisch ist es nicht möglich, Folgen von idealen Diracimpulsen auf ein Tiefpassfilter auszugeben, welches das analoge Signal im Basisband rekonstruiert, da solch riesige (genauer: unendlich grosse) Amplitudenwerte nicht verarbeitet werden können.

Sollen aber Pulse mit adäquaten d. h. endlichen Amplitudenwerten ausgegeben werden, dürfen diese Pulse, damit das rekonstruierte analoge Signal auch eine brauchbar hohe mittlere Leistung aufweist, bei der Ausgabe durch den D/A-Wandler auch nicht mehr unendlich kurz sein, sondern müssen auf eine brauchbare zeitliche Ausdehnung verlängert werden.

Nur auf den ersten Blick bestechend ist die Idee, den Effekt der Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters

in die Amplitudenausgabe des D/A-Wandlers schon miteinzubeziehen, d.h. direkt eine Überlagerung von gewichteten Sinc-Pulsen durch den D/A-Wandler ausgeben zu lassen. Dies ist vom technischen Aufwand aber kaum umsetzbar, unter anderem auch, weil die Überlagerung der mit den Sampleamplituden gewichteten Sinc-Pulse bei unglücklich verlaufenden Sequenzen von Samples sehr schlecht (bis gar nicht) konvergiert.

In einem weiteren Lösungsansatz bietet es sich vielleicht an, anstatt mit Sincpulsen die Amplitudenwerte zwischen zwei Samples einfach nur linear zu interpolieren, was auf Englisch im Zusammenhang mit der Interpolation durch Polynome auch als First-Order Interpolation bezeichnet wird.

Stattdessen wenden aber alle üblichen D/A-Wandler noch ein einfacheres und noch ungenaueres Rekonstruktionsverfahren an, welches als Zero-Order Hold bezeichnet wird: der D/A-Wandler gibt dabei für jeden neuen Sample entsprechend seinem Gewicht eine Amplitude aus, welche über die ganze Samplezeit  $T_s$  gehalten wird.

Als mögliche Variante werden diese Rechteckpulse auch verkürzt mit der Pulsbreite  $\tau \leq T_s$  (und damit wiederum mit verkleinerter Leistung) ausgegeben, um anschliessend während der restlichen Zeit des Abtastintervalls  $T_s$  auf den Amplitudenwert Null zurückzufallen.

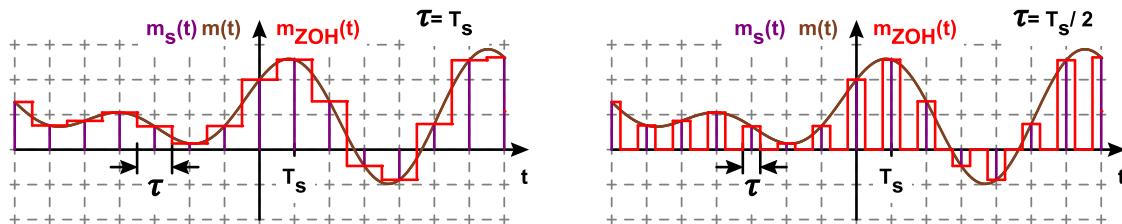


Abbildung 6.3: Rekonstruktion mit Zero-Order Hold mit unterschiedlichen Pulslängen  $\tau$  im Zeitbereich

Im Gegensatz zu Natural Sampling, bei welchem das abgetastete Signal während der Pulsdauer  $\tau$  dem ursprünglichen Amplitudenverlauf von  $m(t)$  folgt, ist bei dieser Ausgabe die Amplitude während der ganzen Pulsdauer  $\tau$  konstant. In Anlehnung an diese Eigenschaft wird die Rekonstruktion mit Zero-Order Hold auch *Flat-top Sampling* oder auch – im Zusammenhang mit dem Abtastvorgang bei A/D-Wandlern – *Sample & Hold* genannt.

Im Vergleich zur idealen Rückwandlung eines abgetasteten Signals in den analogen Bereich, wo durch ein Rekonstruktionsfilter direkt aus einer Folge von Dirac-Impulsfunktionen das analoge Basisbandsignal zurückgewonnen wird, besitzt Zero-Order Hold aus systemtechnischer Sicht einen zusätzlichen, dem Tiefpassfilter vorgelagerter Block, welcher folgende Impulsantwort  $h(t)$  besitzt:

$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (6.14)$$

Dieser Zero-Order-Hold-Block ist ein LTI-System und wandelt jeden Diracpuls in ein Rechtecksignal mit voller Pulsbreite  $\tau = T_s$  oder verkürzt mit  $\tau < T_s$  um. Systemtechnisch kann somit immer noch mit idealen Samples und ihren einfachen repetitiven Spektren gerechnet werden und die reale Ausgabe durch einen D/A-Wandler entspricht nur noch einem LTI-System gemäss Gleichung (6.14), welches von den idealen Samples durchlaufen wird.

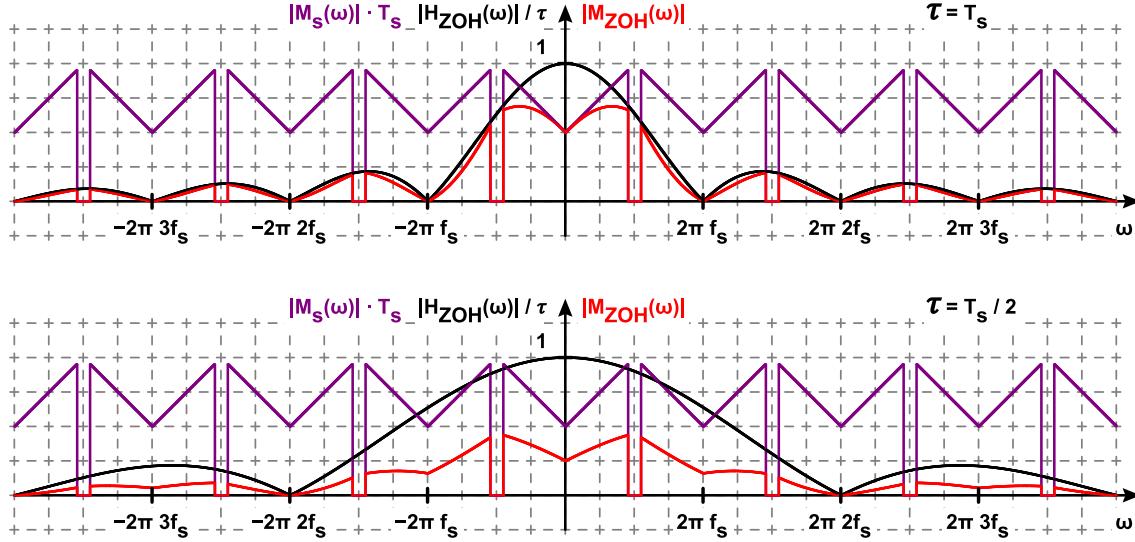
Da die Impulsantwort  $h_{ZOH}(t)$  bekannt ist, kann auch die Frequenzantwort  $H_{ZOH}(\omega)$  bestimmt werden, mit welchem das abgetastete Signal vor dem Reconstruction-Filter gewichtet wird:

$$H_{ZOH}(\omega) = \tau \cdot \frac{\sin \frac{\tau \omega}{2}}{\frac{\tau \omega}{2}} \quad (6.15)$$

Dieses bei fast allen D/A-Wandlern angewandte Ausgabeverfahren des Zero-Order-Holds vollführt somit im Basisband eine beträchtliche Verfälschung des Frequenzgangs, speziell bei den Spektralanteilen in der Nähe

der Nyquistfrequenz  $f_N = \frac{f_s}{2}$ .

In den folgenden Graphen wurde die Frequenzantwort  $H_{ZOH}(\omega)$  (schwarz, skaliert mit dem Faktor  $\frac{1}{\tau}$ ) als spektrale Gewichtsfunktion auf das Spektrum  $M_s$  der idealen Samples angewandt. Die beiden resultierende Amplitudendichtespektren  $|M_{ZOH}(\omega)|$  sind wiederum für die Pulslängen  $\tau = T_s$  sowie  $\tau = \frac{T_s}{2}$  ohne zusätzliche Skalierung rot dargestellt. Abgesehen vom insgesamt resultierenden Gewichtsfaktor  $\frac{\tau}{T_s}$  fallen bei den verkürzten Pulsen die Unterschiede zwischen dem roten rekonstruierten Spektrum und dem ursprünglichen Spektrum  $M(\omega)$  des Nachrichtensignals deutlich kleiner aus.



**Abbildung 6.4:** Rekonstruktion mit Zero-Order Hold mit unterschiedlichen Pulslängen  $\tau$  im Frequenzbereich

Die zusätzlich verbleibenden roten Anteile der wiederholten Teilspektren sind nach der Ausgabe mit Zero-Order Hold ebenfalls nur ungenügend gedämpft. Diese Spektralanteile sollten nun noch vom nachfolgenden analogen Rekonstruktionsfilter möglichst gut eliminiert werden.

Der Übergangsbereich von Durchlass- zu Sperrbereich eines solchen Filters ist sehr schmal, speziell, wenn im Basisband die Spektralanteile nahe der Nyquistfrequenz  $f_N = \frac{f_s}{2}$  tatsächlich genutzt werden. Die Anforderungen an die Flankensteilheit des Rekonstruktionsfilters sind dann sehr hoch. Gefordert ist somit ein Tiefpassfilter mit Eckfrequenz  $f_c = \frac{f_s}{2}$  von sehr hoher Ordnung, was wegen den Toleranzen von passiven Bauteilen bei einer Serieproduktion mit aufwendigem Abgleichen des Filters einhergeht.

Zugleich könnte allerdings ein solches aufwendiges, analoges Rekonstruktionsfilter so implementiert werden, dass es im Basisband gleichzeitig die leicht gedämpften Anteile in der Nähe der Nyquistfrequenz wieder richtigstellt.

### 6.2.5 Interpolation im digitalen Bereich

Steht auf digitaler Seite (z.B. des Mikroprozessors, DSPs, FPGAs oder ASICs) genügend Rechenleistung zur Verfügung, kann durch Berechnen von zusätzlichen interpolierten Zwischenwerten das analoge Rekonstruktionsfilter wesentlich vereinfacht werden.

Die Idee bei  $n$ -facher digitaler Interpolation mit  $n$ -facher Samplerate  $f_{s_n} = n \cdot f_s$  besteht in einem ersten Schritt darin, die Zero-Order Hold Funktion mit ursprünglicher Samplerate  $f_s$  und den verkürzten Pulsen  $\tau = \frac{T_s}{n}$  durch Einfügen von jeweils  $n - 1$  Nullen zwischen zwei ursprünglichen Samples schon im digitalen Bereich nachzubilden.

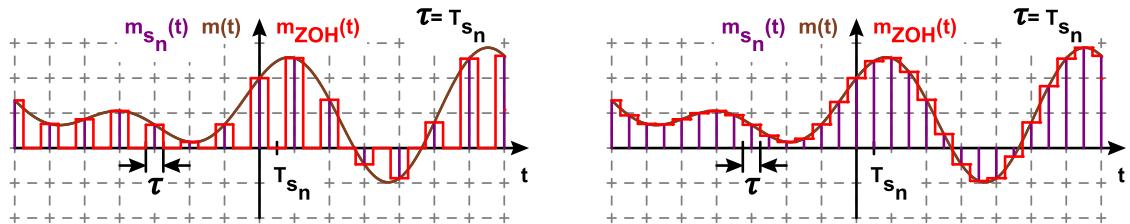


Abbildung 6.5: Zweifach interpoliertes Zero-Order Hold Signal, vor und nach dem digitalen Tiefpassfilter

Wird dieses neue digitale Signal  $m_{s,n}$  ( $k \cdot T_{s,n}$ ) mit  $n$ -facher Samplerate als Zero-Order Signal mit voller neuer Pulslänge  $\tau_n = T_{s,n} = \frac{T_s}{n}$  ausgegeben, ist es im Zeitbereich und damit natürlich auch im Spektralbereich identisch mit der Ausgabe des ursprünglichen digitalen Signals  $m_s$  ( $k \cdot T_s$ ), bei welchem die Zero-Order Hold Pulse auf  $\tau = \frac{T_s}{n}$  verkürzt wurden.

Durch die erhöhte Samplerate  $f_{s,n} = n \cdot f_s$  hat sich auch die Nyquistfrequenz auf  $f_{N,n} = \frac{f_{s,n}}{2} = n \cdot f_N$  erhöht. Dadurch kann nun mit einem möglichst idealen digitalen Tiefpassfilter der ursprüngliche Frequenzbereich zwischen 0 und  $f_N$  durchgelassen und die zusätzlichen Frequenzanteile zwischen  $f_N$  und  $f_{N,n} = n \cdot f_N$  unterdrückt werden.

Aufgrund der Kausalität ist auch im digitalen Bereich ein ideales Tiefpassfilter nicht realisierbar. Ein qualitatives hochstehendes Tiefpassfilter ist zudem mit erheblichem Rechenaufwand verbunden, mit einer Vielzahl von Filterkoeffizienten hoher Auflösung. Im Vergleich zu einem analogen Filter liegt jedoch der grosse Vorteil eines digitalen Filters in der präzisen Realisierung, da diese – solange die gefilterten Signale den digitalen Bereich nicht verlassen – komplett unabhängig von Bauteiltoleranzen ist.

Mit dem (idealen) digitalen Tiefpassfilter resultiert ein Spektrum des interpolierten Zero-Order Hold Signals, welches in nachfolgendem Graphen für zweifache Interpolation ( $n = 2$ ) dargestellt ist.

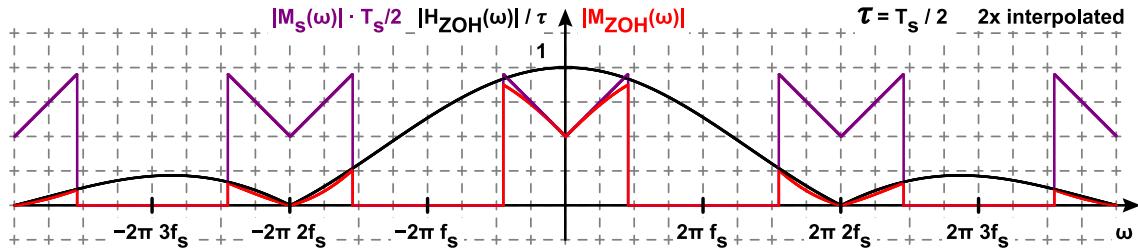


Abbildung 6.6: Zweifach interpoliertes Zero-Order Hold Signal im Frequenzbereich

Aus dem hinterlegten violetten Spektrum der idealen, zweifach interpolierten Samples geht hervor, dass sich das Basisbandspektrum nur noch im Raster der neuen Samplerate  $f_{s,n} = 2f_s$  wiederholt. Weiter wurden im nun erweiterten Basisband bis  $f_N = \frac{f_{s,n}}{2} = f_s$  – dank dem digitalen Filter – die spektralen Anteile zwischen  $\frac{f_s}{2}$  und  $f_s$  unterdrückt. Dadurch sind die Anforderungen an die Flankensteilheit des analogen Rekonstruktionsfilters um eine Größenordnung gefallen.

Mit einem nun deutlich einfacher realisierbaren analogen Rekonstruktionsfilter können nun noch die im Raster  $2f_s$  wiederholten Frequenzanteile weggefiltert werden. Die leichte Dämpfung der höheren Spektralanteile im Basisband kann schliesslich ebenfalls noch korrigiert werden, entweder als ergänzender Teil des digitalen Interpolationsfilters oder im Rahmen des analogen Rekonstruktionsfilters.

### 6.3 Quantisierung

Nach dem Sampling liegen die zeitdiskreten Abtastwerte noch immer amplitudenkontinuierlich vor. In einem zweiten Schritt sollen sie nun auf eine endliche Anzahl diskreter Amplitudenwerte eingeschränkt werden, die

mit einer begrenzten Anzahl Bit pro Sample codiert werden können.

### 6.3.1 Gleichförmige Quantisierung

Bei der gleichförmigen Quantisierung (Englisch: linear quantization) wird der Amplitudenbereich zwischen der kleinsten zulässigen Amplitude  $a_{\min}$  und dem grössten zulässigen Wert  $a_{\max}$  in  $L = 2^n$  gleich grosse Intervalle  $\Delta$  unterteilt. Dabei entspricht  $n$  der Anzahl Bit pro Sample. Jedem der  $L$  Quantisierungsintervalle wird bei der Codierung eine eindeutige Bitkombination der Länge  $n$  zugeordnet.

Die Grösse des Intervalls  $\Delta$  ergibt sich sowohl aus der Anzahl Intervalle  $L$  wie auch aus der Grösse des zulässigen Amplitudenbereich  $a_{\max} - a_{\min}$  am Eingang des Analog-Digital-Wandlers. Bei einem normierten Eingang des A/D-Wandlers mit maximalen Amplituden  $a_{\max} = 1$  und  $a_{\min} = -1$  ergibt sich für  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{L} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (6.16)$$

Alle Abtastwerte des zeitdiskreten Nachrichtensignals  $m_s(t)$ , welche in das gleiche Quantisierungsintervall fallen, werden auf den selben Amplitudenwert in der Mitte dieses Intervalls abgebildet. Durch diese Quantisierung ergibt sich aus dem zeitdiskreten Signal  $m_s(t)$  das digitale Signale  $m_d(t)$ , welches nun sowohl zeitdiskret wie auch amplitudendiskret ist.

Bei der Quantisierung entsteht folgendes Fehlersignal  $q_e(k \cdot T_s)$ :

$$q_e(k \cdot T_s) = m_d(k \cdot T_s) - m_s(k \cdot T_s) \quad (6.17)$$

Dieser sogenannte Quantisierungsfehler ist ebenfalls zeitdiskret, hat aber für ein zufälliges Nachrichtensignal  $m(t)$  eine kontinuierliche Amplitude im Bereich  $\pm \frac{\Delta}{2}$ . Verfügt zudem die Auflösung der Abtastwerte über eine genügend hohe Anzahl Bit pro Sample  $n$ , wird der Quantisierungsfehler  $q_e(k \cdot T_s)$  weder mit dem Nachrichtensignal  $m_s(k \cdot T_s)$  noch mit vorhergehenden oder nachfolgenden Werten des Quantisierungsfehlers  $q_e(i \cdot T_s)$  korreliert sein, d.h. keine statistische Ähnlichkeit zu diesen aufweisen.

Der Begriff und die mathematischen Eigenschaften der Korrelation werden erst in einem späteren Kapitel eingehend behandelt. Die nachfolgenden Eigenschaften des korrelationsfreien Quantisierungsfehlers werden somit ohne Beweis aufgeführt:

- Der Quantisierungsfehler  $q_e(k \cdot T_s)$  ist statistisch gleichverteilt im Intervall  $-\frac{\Delta}{2} \dots + \frac{\Delta}{2}$ .
- Die Leistung des Quantisierungsrauschen beträgt  $N_q = \langle q_e^2 \rangle = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} q_e^2 dq_e = \frac{\Delta^2}{12}$
- Die spektrale Leistungsdichte von  $N_q$  ist über den gesamten Frequenzbereich konstant.

Mit einem solchen frequenzunabhängigen Leistungsdichtespektrum entspricht der Quantisierungsfehler einem weissen Rauschen. Deshalb hat sich für das Fehlersignal der Quantisierung der Begriff Quantisierungsrauschen durchgesetzt.

Bei periodischen Signalen mit Periodendauer  $T$  (und insbesondere, wenn  $T$  ein ganzzahliges Vielfaches der Sampleperiode  $T_s$  ist), wiederholen sich die Quantisierungsfehler  $q_e(k \cdot T_s)$  nach einem wiederkehrenden Muster. Dies führt dazu, dass dieses Fehlersignal nicht der Charakteristik von einem spektral gleichverteilten weissen Rauschen entspricht, sondern vielfache Harmonische  $k \cdot \frac{1}{T}$  der Grundfrequenz  $f_0 = \frac{1}{T}$  des periodischen Signals aufweist. Diese periodischen Fehlersignale entsprechen dann vielmehr einem Klirr als einem statistisch unabhängigen Rauschsignal.

Um starke nicht-lineare Verzerrungen am Eingang des A/D-Wandlers durch Clipping zu verhindern, dürfen die Peak-Amplituden des analogen Signals die Eingangsgrenzen  $a_{\max}$  und  $a_{\min}$  nicht über- bzw. unterschreiten. Das Eingangssignal muss daher so tief skaliert werden, dass auch seltene Spitzenwerte noch richtig digitalisiert werden. Dadurch sinkt aber auch die Signalleistung  $S$  im Vergleich zur Leistung  $N_q$  des Quantisierungsrauschen.

Bei normiertem Eingangsbereich ( $a_{\max} = +1$  und  $a_{\min} = -1$ ) sowie einem normierten Nachrichtensignal  $|m_n(t)| \leq 1$  mit Scheitelfaktor  $C$  berechnet sich der Störabstand des Signals zum Quantisierungsrauschen  $\text{SNR}_q$  dann wie folgt:

$$\text{SNR}_q = \frac{S}{N_q} = \frac{m_{\text{RMS}}^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{\left(\frac{1}{C}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}{12}} = \frac{3}{C^2} \cdot 2^{2n} \quad (6.18)$$

Wird der Störabstand des Quantisierungsrauschen in Dezibel ausgedrückt ergibt sich folgende, in Bezug auf die  $n$  Bit pro Sample einfache zu merkende Formel:

$$\text{SNR}_q = n \cdot 6.02 + 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{3}{C^2} \right) \text{ dB} \quad (6.19)$$

Pro zusätzlichem Bit Auflösung des A/D-Wandlers kann somit mit einem vierfach höheren Störabstand zum Quantisierungsrauschen  $\text{SNR}_q$  gerechnet werden.

Bei einem 16 Bit A/D-Wandler, der mit einem Sinussignal (Crestfaktor  $C = \sqrt{2}$ ) voll ausgesteuert wird, ergibt sich somit eine  $\text{SNR}_q = 16 \cdot 6.02 + 10 \cdot \log_{10}(\frac{3}{2}) = 98.1 \text{ dB}$ .

Wird mit dem gleichen A/D-Wandler ein analoges Signal digitalisiert, dessen Amplitude gleichverteilt ist im Bereich  $a_{\min} \dots a_{\max}$ , wie dies beispielsweise bei einem periodischen Dreiecksignal oder Sägezahn der Fall ist, ergibt sich eine  $\text{SNR}_q = 16 \cdot 6.02 = 96.3 \text{ dB}$ .

Liegen als Nachrichtensignale Sprache, Musik oder andere breitbandige Zufallssignale vor, ist der Crestfaktor noch deutlich höher als bei einem Sinus- oder Dreiecksignal, wodurch sich der Störabstand zum Quantisierungsrauschen ohne weiteres 10 dB unterhalb der einfachen Regel von  $\text{SNR}_q = n \cdot 6 \text{ dB}$  befinden kann, zumindest, wenn ein Übersteuern des A/D-Wandlers jederzeit mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit verhindert werden soll.

### 6.3.2 Ungleichförmige Quantisierung

Ist die Anzahl Bit pro Sample für eine A/D-Wandlung einmal festgelegt, kann bei gleichförmiger Quantisierung die Leistung  $N_q$  des Quantisierungsrauschen sofort berechnet werden. Aber je nachdem, wie stark das Nachrichtensignal  $m(t)$  den A/D-Wandler aussteuert, wird die Signalleistung  $S$  des Nachrichtensignals deutlich variieren. Dies wirkt sich direkt auf den Störabstand zum Quantisierungsrauschen  $\text{SNR}_q$  aus.

Verschiedene Gründe können aus praktischer Sicht zu einer tiefen Aussteuerung führen:

- Das analoge Nachrichtensignal  $m(t)$  besitzt einen hohen Crest-Faktor  $C$ , weshalb der zeitliche Signalverlauf mehrheitlich kleine Amplituden und nur wirklich selten Spitzenwerte aufweist. Die optimale Aussteuerung eines A/D-Wandlers orientiert sich jedoch an den Spitzenwerten und nicht an der mittleren Signalleistung.
- Die Signalleistung variiert zeitlich sehr stark. Als Beispiel dazu dient klassische Musik auf einer CD, wo sich oft imposante Forte-Stellen des gesamten Orchester mit sehr leisen Passagen abwechseln.
- Die zu erwartenden analogen Amplitudenwerte sind zu wenig bekannt. Oft führt dies dazu, dass zuviel Sicherheitsmarge einberechnet wird, um Übersteuern zu verhindern, wodurch der maximale Bereich des A/D-Wandlers gar nicht ausgenutzt wird.

Die wohl naheliegendste Möglichkeit, das Problem einer für kleine Signalamplituden zu tiefen  $\text{SNR}_q$  zu beheben, besteht darin, die Anzahl Bit pro Sample des A/D-Wandlers zu erhöhen. Dadurch werden zwar Signalanteile mit grossen Amplituden mit einer unnötig hohen Qualität codiert, doch ist andererseits sicher gestellt, dass auch Signale mit deutlich tieferer Amplitude durch das Quantisierungsrauschen nicht zu stark beeinträchtigt werden.

Die höhere Auflösung pro Abtastwert wirkt sich aber nicht nur überproportional auf den Preis eines A/D-Wandlers aus, sondern verursacht auch einen erhöhten Bedarf an Kapazität auf dem Speichermedium bzw. Bandbreite im Übertragungskanal.

Diese Einschränkungen waren vor allem in vergangenen Jahrzehnten von grosser Bedeutung. Über eine Stunde Musik in bester Qualität auf ein massentaugliches Medium zu bringen war in den 1980er Jahren bei der Einführung der CD eine technische Meisterleistung, zu einer Zeit, als sich die digitale Kommunikation auf analoge Modems mit einer Datenrate von 300 bis 1200 Bit pro Sekunde beschränkte.

Seither hat jedoch in Bezug auf die verfügbare Speicherkapazität und die Übertragungsbandbreite eine Revolution stattgefunden, welche selbst heute noch grenzenlos scheint. Zudem gibt es für digitale Audiofiles, Photos und Video ausgeklügelte Quellencodierungsverfahren, welche mit optimierten Algorithmen (Sprachcodecs, MP3, AAC, JPEG, MPEG, etc.) die Datenmenge auf die Wahrnehmungsfähigkeit der menschlichen Sinne reduzieren.

Solche Reduktionsverfahren gehen historisch gesehen auf die ungleichförmige Quantisierung (Englisch: non-linear quantization) im Telefoniebereich zurück, bei welcher Sprachkommunikation mit der amerikanischen  $\mu$ -Law Codierung bzw. der etwas später eingeführten europäischen A-Law Codierung digitalisiert wird. Diese Technik wurde bis zur Ablösung durch Voice over IP in den Telefonzentralen für analoge Teilnehmer sowie direkt von ISDN-Telefonen angewandt.

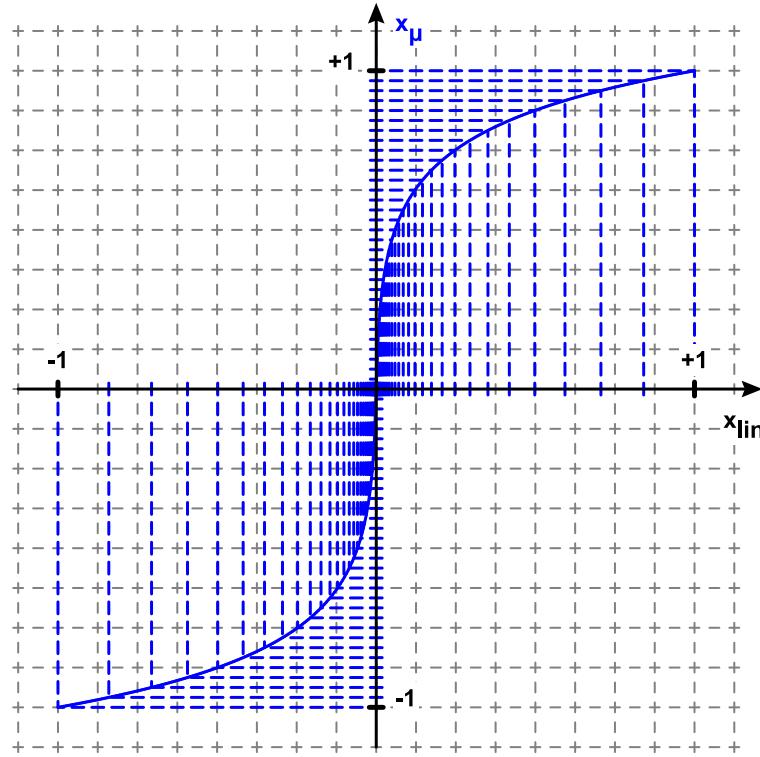
Die Idee besteht darin, grosse Amplituden mit grossen Quantisierungsintervallen  $\Delta$  und kleine Amplituden mit kleineren Intervallen zu quantisieren. Dadurch ergeben sich weniger Quantisierungsintervalle als bei gleichförmiger Quantisierung, wo über den ganzen Amplitudenspektrum mit der gleichen feinen Auflösung operiert wird. In der Telefonie wurde so insgesamt mit 8 Bit pro Sample selbst bei leisen, um 30 dB abgeschwächten Signalen noch eine  $\text{SNR}_q$  von ca. 30 bis 40 dB erreicht. Dies entspricht etwa einer Audioqualität, wie sie bei gleichförmiger Quantisierung mit etwa  $n = 12$  Bit/Sample erreicht wird.

Eine einfache Möglichkeit, eine ungleichförmige Quantisierung zu realisieren, besteht darin, das Audiosignal über eine analoge, nicht-lineare Kompressorkennlinie in Bezug auf die grossen Amplituden zu komprimieren, und das komprimierte Signal anschliessend gleichförmig zu quantisieren. Nach der Rückwandlung in den analogen Bereich müssen natürlich mit einer Expander-Kennlinie genannten Kurvenform die ursprünglichen Amplitudenverhältnisse wieder hergestellt werden. Da es sich um die gleiche (invers angewandte) Kennlinie handelt, verwendet man für sie das Kunstwort Komander-Kennlinie.

Im klassischen digitalen Telefonnetz gab es zwei Verfahren, die amerikanische  $\mu$ -Law und die europäische A-Law Codierung. Die  $\mu$ -Law Kennlinie der nordamerikanischen Telefonie berechnete sich für normiertes  $-1 \leq x_{\text{lin}} \leq +1$  sowie dem Parameter  $\mu = 255$  wie folgt:

$$x_\mu = \text{sign}(x_{\text{lin}}) \cdot \frac{\ln(1 + \mu \cdot |x_{\text{lin}}|)}{\ln(1 + \mu)} \quad (6.20)$$

Dabei resultierte folgende Kompressionskennlinie, bei welcher das Ausgangssignal  $x_\mu$  ebenfalls auf  $\pm 1$  normiert ist:



**Abbildung 6.7:** Amerikanische  $\mu$ -Law Komanderkennlinie

Kleine Amplituden  $x_{\text{lin}}$  werden mit dieser Kennlinie auf grössere Werte  $x_{\mu}$  abgebildet. Amplitudendifferenzen bei grossen  $x_{\text{lin}}$  führen aber nur noch zu einem kleinen Anstieg von  $x_{\mu}$ .

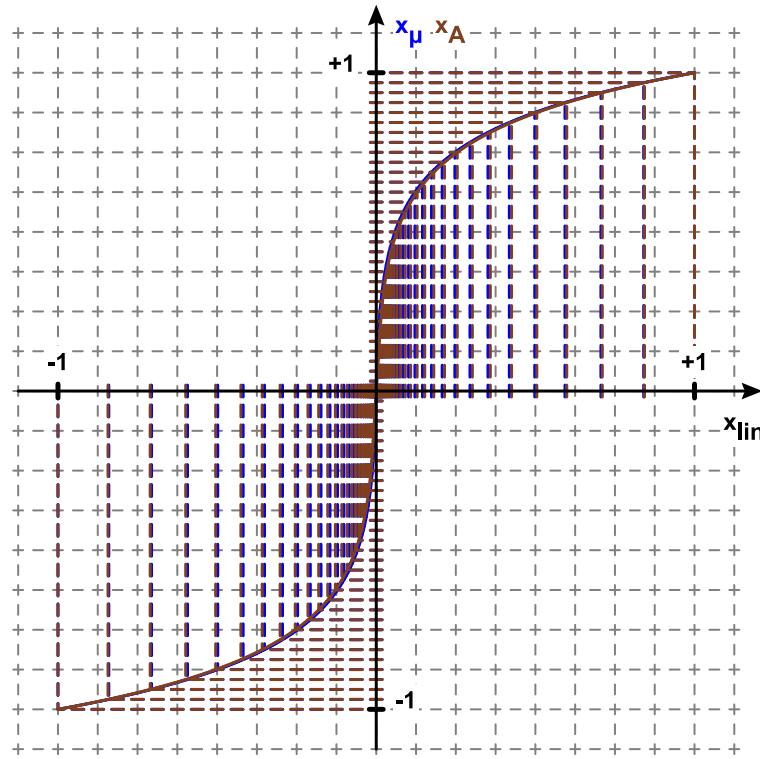
Wird nun das komprimierte Signal  $x_{\mu}$  gleichförmig quantisiert, im Graphen mit 6 Bit oder 64 Quantisierungsintervallen (im Gegensatz zur Telefonie, wo die Unterteilung mit 8 Bit bzw. durch 256 Intervalle geschieht), ergibt dies für die ursprüngliche Amplitude  $x_{\text{lin}}$  eine ungleichförmige Quantisierung, bei welcher kleine Amplitudenwerte  $x_{\text{lin}}$  fein, grosse Amplitudenwerte  $x_{\text{lin}}$  recht grob quantisiert werden. Die Quantisierungsintervalle sind im Graphen der Abbildung 6.7 gestrichelt dargestellt.

Um dieses ungleichförmig quantisierte digitale Signal wieder in seinen ursprünglichen analogen Verlauf umzuwandeln, können als erstes die analogen Amplitudenwerte  $x_{\mu}$  durch einen gleichförmigen D/A-Wandler gebildet werden. Dieses Signal  $x_{\mu}(t)$  wird nun an der inversen  $\mu$ -Law Kennlinie wieder auf die ursprünglichen Signalverlauf  $x_{\text{lin}}(t)$  abgebildet.

Wie schon erwähnt wurde in der europäischen Telefonie die A-Law Kennlinie für die ungleichförmige Quantisierung verwendet, wobei die nachfolgende Formel wiederum für normierte Ein- und Ausgangsamplituden gilt:

$$x_A = \begin{cases} \frac{A}{1+\ln A} \cdot x_{\text{lin}} & \text{für } |x_{\text{lin}}| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1+\ln(A \cdot |x_{\text{lin}}|)}{1+\ln A} \cdot \text{sign}(x_{\text{lin}}) & \text{für } \frac{1}{A} \leq |x_{\text{lin}}| \leq 1 \end{cases} \quad (6.21)$$

Mit dem in der europäischen Telefonie verwendeten Parameter  $A = 87.6$  verläuft die Kennlinie praktisch identisch zur amerikanischen  $\mu$ -Law Kurve. Auch die (für wiederum 6 anstatt 8 Bit) dargestellten Quantisierungsintervalle unterscheiden sich nur geringfügig:



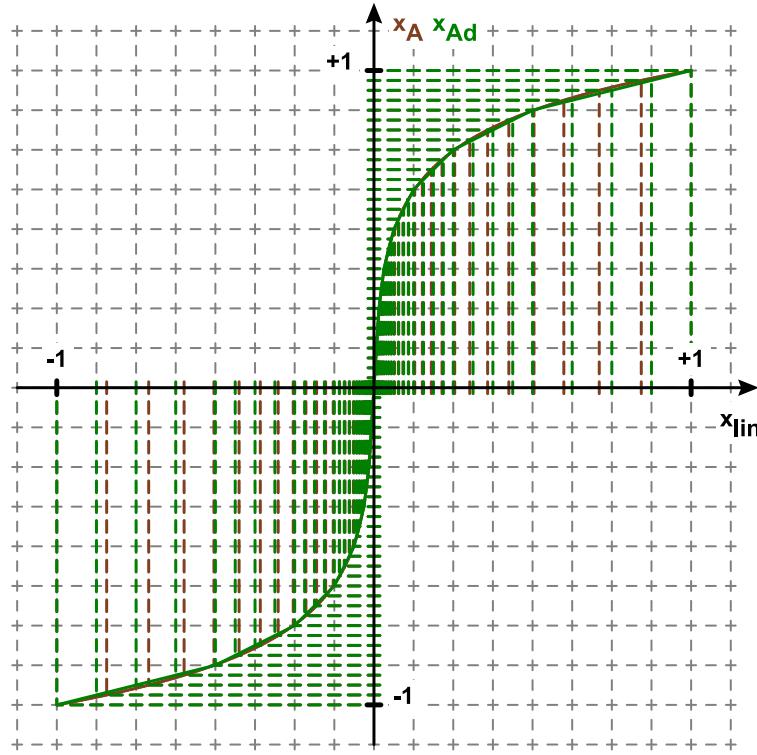
**Abbildung 6.8:** Kompanderkennlinie von A-Law im Vergleich zu  $\mu$ -Law

Mit folgender digitalen Approximation kann die Implementierung der A-Law Codierung zusätzlich vereinfacht werden: als erstes wird das analoge Signal mit einer relativ feinen Auflösung quantisiert. Anschliessend werden bei den grossen Amplitudenwerten mehrere dieser Intervalle zu einem einzigen, grösseren Intervall zusammengefasst.

In der europäischen Telefonie erfolgte die Quantisierung als erstes mit 12 Bit Auflösung. Die dabei entstandenen 4096 Intervalle wurden wie folgt für beide Vorzeichen in sieben lineare, gleichförmig quantisierte Abschnitte und insgesamt 256 Intervalle zusammengefasst:

- Symmetrischer Eingangsbereich des A/D-Wandlers mit maximaler Amplitude  $\pm 1$ .
- 1 Bit Vorzeichen, d.h. es bleiben je 128 Quantisierungsintervalle pro Vorzeichenbereich.
- $0 < x_{\text{lin}} < \frac{1}{64}$ : 32 Codes mit  $\Delta = \frac{1}{2048}$  (entspricht einer 12-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{64} < x_{\text{lin}} < \frac{1}{32}$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{2}{2048} = \frac{1}{1024}$  (entspricht einer 11-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{32} < x_{\text{lin}} < \frac{1}{16}$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{4}{2048} = \frac{1}{512}$  (entspricht einer 10-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{16} < x_{\text{lin}} < \frac{1}{8}$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{8}{2048} = \frac{1}{256}$  (entspricht einer 9-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{8} < x_{\text{lin}} < \frac{1}{4}$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{16}{2048} = \frac{1}{128}$  (entspricht einer 8-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{4} < x_{\text{lin}} < \frac{1}{2}$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{32}{2048} = \frac{1}{64}$  (entspricht einer 7-Bit Auflösung).
- $\frac{1}{2} < x_{\text{lin}} < 1$ : 16 Codes mit  $\Delta = \frac{64}{2048} = \frac{1}{32}$  (entspricht einer 6-Bit Auflösung).

Die insgesamt 256 Intervalle können mit 8 Bit codiert werden, wobei für kleine Amplituden die 12-Bit Auflösung erhalten bleibt. Der folgende Graph zeigt die Unterschiede in der Kompanderkennlinie und den Quantisierungsintervallen zwischen der A-Law Kompanderkennlinie und der digitalen Approximation. Um die graphische Darstellung übersichtlicher zu halten, wurde anstelle der 256 Quantisierungsintervalle die Auflösung wiederum auf 64 Quantisierungsintervalle reduziert.



**Abbildung 6.9:** Komanderkennlinie und digitale Approximation von A-Law

#### Zahlenbeispiel:

Für die Abtastung eines analogen Telefonsignals mit einer Bandbreite  $B \approx 3.1$  kHz im Bereich von ca. 300 Hz bis 3.4 kHz ist das Nyquist-Shannon Abtasttheorem für Basisbandsignale einzuhalten, da Unterabtastung nicht möglich ist. Mit etwas zusätzlicher Reserve ergibt sich dadurch eine Samplerate von 8 kSample/s, d.h. alle 125  $\mu$ s muss die Amplitude des Sprachsignal erfasst werden. Die Taktrate von 8 kHz ist übrigens auch im heutigen, durch Datenkommunikation geprägten Backbone des Telefonnetzes eine immer noch wichtige Grundfrequenz. Zusammen mit den 8 Bit pro Sample des A-Law codierten Signals ergab dies folgende Datenrate  $d_{\text{bps}}$  für ein digitalisiertes analoges Telefonsignal:

$$d_{\text{bps}} = 8 \text{ Bit/Sample} \cdot 8 \text{ kSample/s} = 64 \text{ kBit/s}$$

### 6.3.3 Heutige Audiokompressionsverfahren

Digitale ISDN-Telefone und analoge Telefongeräte, deren Signale in der Telefonzentrale digitalisiert wurden, sind heute durch IP-Telefone und Mobiltelefone mit raffinierten Voice-Codecs abgelöst worden. Damit hat aber auch die ungleichförmige Quantisierung im Zeitbereich ihre vormals wichtige technische Bedeutung verloren.

Die Idee, ungleich grosse analoge Amplitudenwerte mit ungleich grossen Quantisierungsintervallen zu quantisieren, hat aber nichts an Aktualität eingebüßt. Heutige Audiokompressionsverfahren vollziehen jedoch die ungleichförmige Quantisierung im Frequenzbereich. Zu ihnen zählen neben der wohl bekanntesten, heute aber überholten MP3-Codierung auch das Advanced Audio Coding (AAC) und seine Weiterentwicklungen, welche unter anderem bei DAB+, iTunes Store oder bei Streaming-Diensten verwendet werden.

Warum sich der Aufwand lohnt, ein Audiosignal in den Frequenzbereich zu transformieren und die ungleichförmige Quantisierung im Spektrum zu realisieren, hat vor allem physiologische und psychoakustische Gründe. Unser Gehör bzw. unsere akustische Wahrnehmung hat jeweils innerhalb eines schmalen Frequenzbandes einen stark eingeschränkten Dynamikbereich, d.h. wir nehmen kleinere Amplituden von Frequenzanteilen kaum noch wahr, wenn in unmittelbarer spektraler Nähe gleichzeitig auch lautere Töne vorhanden sind. Dies

bedeutet nun aus nachrichtentechnischer Sicht, dass jedes schmalbandige Frequenzband mit ein paar wenigen, den grössten dort aufzufindenden Spektrallinien angepassten Quantisierungsintervallen digitalisiert werden kann, ohne dass die Qualität der akustischen Wahrnehmung deutlich verschlechtert wird, da das Nutzsignal den adaptiv vergrösserten Quantisierungsfehler maskiert.

Indem nun ein Audiosignal pro schmalbandigem Frequenzband nur noch mit ein paar wenigen Bit codiert wird, kann die Datenrate eines digitalisierten Musik- oder Sprachsignals deutlich stärker gesenkt werden, als dies bei ähnlicher Qualität mit einer ungleichförmigen Quantisierung im Zeitbereich möglich wäre.

Wieviel Bitrate in welchen Lebenssituation für eine genügende Audioqualität ausreicht, wird wohl von jedem unterschiedlich beurteilt. Die Eidgenössische Kommunikationskommission (ComCom) verlangt aber bei der Ausschreibung von terrestrischen T-DAB+ – Konzessionen im Band III (174 bis 230 MHz), dass eine Mehrheit der Radiostationen in einem zu vergebenden Frequenzblock von 1.536 MHz mit einer Qualität von mindestens 64 kBit/s übertragen wird. Diese Bitrate eines HE AAC v2 codierten DAB+ – Radisignals, welche bei der A-Law Quantisierung in der Telefonie gerade einmal für eine einkanalige Audiobandbreite von < 4 kHz ausreichte, entspricht im Alltag einer Quasi-UKW Qualität bei Stereoübertragung.

## 6.4 Weitere Verfahren der A/D-Wandlung

Die einführend behandelte Pulse-Code Modulation ist auch heute noch das meist verwendete Verfahren, um in einem ersten Schritt ein analoges Signal in den digitalen Bereich zu wandeln. In diesem Kapitel sollen mit dem Deltamodulator und dem Delta-Sigma A/D-Wandler noch alternative Verfahren vorgestellt werden, wobei vor allem letzterer eine immer grössere Verwendung findet.

### 6.4.1 Deltamodulator

Anstatt die Amplituden jedes Abtastwerts mit voller Auflösung zu erfassen und zu codieren, versucht der Delta-Modulator das analoge Eingangssignal mit einer Treppenstufe nachzubilden.

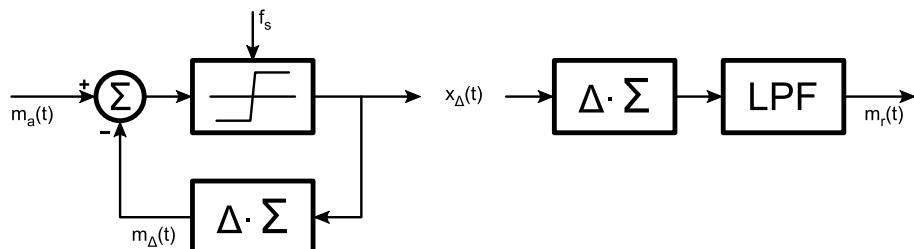


Abbildung 6.10: Mit Summator implementierter Deltamodulator

Im Takt der sehr hohen Samplerate  $f_s$ , welche typischerweise auch für moderate Wortbreiten  $n$  mindestens zwei Größenordnungen höher ist als die Nyquistfrequenz, vergleicht der Komparator das analoge Eingangssignal  $m_a(t)$  mit der Nachbildung des Deltamodulators  $m_\Delta(t)$ . Ist  $m_\Delta(t) < m_a(t)$ , wird  $m_\Delta(t)$  um eine weitere Quantisierungsstufe  $\Delta$  erhöht, im anderen Fall ( $m_\Delta(t) > m_a(t)$ ), um eine Quantisierungsstufe  $\Delta$  vermindert. Der digitalisierte Bitstrom  $x_\Delta(t)$  besitzt die Bitrate  $d_{\text{bps}} = f_s$ . Einer und Nullen repräsentieren die Treppenstufen  $+\Delta$  bzw.  $-\Delta$ . Die Rekonstruktion des analogen Signals erfolgt durch Aufsummieren der Treppenstufen und einer Glättung mit einem Tiefpassfilter. Dies ist auf der rechten Seite des vorhergehenden Blockdiagramms dargestellt.

Anstatt mit einem Summator „eckig“ die Treppenstufen am Anfang jedes Taktzyklus  $T_s = \frac{1}{f_s}$  auf einmal zu erklimmen, kann ein Integrator den Ausgang des Komparators (mit Amplituden  $\pm 1$ ) aufintegrieren.

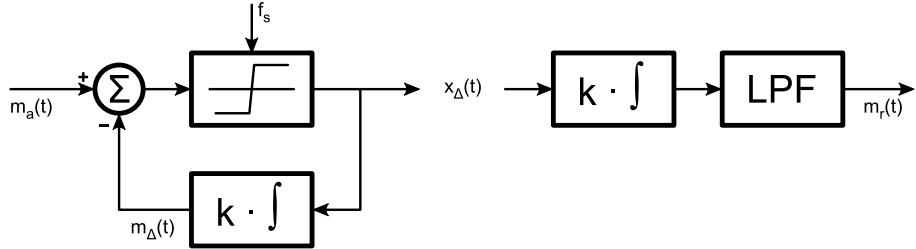


Abbildung 6.11: Mit Integrator implementierter Deltamodulator

Mit der Integrationskonstanten  $k = \frac{\Delta}{T_s}$  wird der um ein  $\Delta$  veränderte neue Amplitudenwert gerade am Ende des Taktzyklus  $T_s$  erreicht. Diese Integration ist im Vergleich zur zeitdiskreten Summation einfacher implementierbar. Bei der Rückwandlung in den analogen Bereich erleichtern zudem diese kurzen integrierten Rampen im Vergleich zu den harten summierten Stufen die Glättung des Signals mit dem Tiefpassfilter.

Obwohl die Deltamodulation schaltungstechnisch sehr einfach realisiert werden kann, hat sie sich wohl aus einem einzigen Grund nicht in markttauglichen Produkten durchsetzen können: für eine gute  $\text{SNR}_q$  ist die benötigten Samplerate  $f_s$  viel zu hoch, ein Schwachpunkt, welcher der Delta-Sigma ADC ohne nennenswerte andere Nachteile deutlich entschärfen kann.

#### 6.4.2 Delta-Sigma A/D-Wandler

Delta-Sigma Wandler decken heute einen immer grösser werdenden Anteil des Marktes ab. Sie eignen sich für sehr feine Auflösungen von 32 Bit/Sample bei sehr tiefen Wandelraten, liefern eine Auflösung von 24 Bit im Audio-Bereich bis 192 kSample/s und erreichen heute bei einer Auflösung von 16 Bit/Sample Wandlungsralten von bis zu 10 MSample/s, bei einer Auflösung von 12 Bit/Sample ca. 50 MSample/s.

Das Blockschaltbild eines Delta-Sigma A/D-Wandlers ist nachfolgend dargestellt. Systemtechnisch scheint sich vorerst im Vergleich zum Deltamodulator nichts verändert zu haben: die beiden Integratoren der Rückwandlung und im Rückkopplungspfad wurden in den Vorwärtspfad verschoben. Da es sich aber bei der Komparorschaltung um eine abgetastete (d.h. zeitvariante) und vor allem auch nicht-lineare Operation handelt und somit kein LTI-System vorliegt, hat sich durch diese Umstellung allerdings das Verhalten dieser neuen Schaltung verändert.

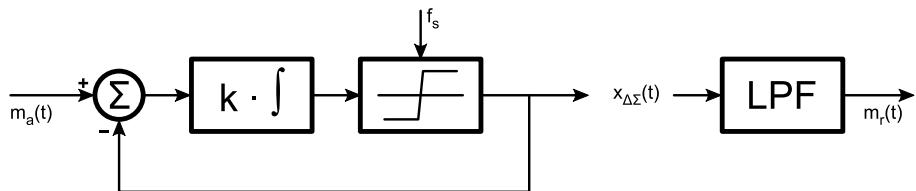


Abbildung 6.12: Delta-Sigma A/D-Wandler mit anschliessender analoger Rekonstruktion

Die Rückwandlung eines Delta-Sigma codierten Bitstreams in ein analoges Signal besteht nur noch aus einem Tiefpassfilter.

Das Eingangssignal soll nachfolgend als normiert  $|m_a(t)| \leq 1$  angenommen werden, ebenso der Ausgang des zeitdiskreten Komparators mit Amplitudenwerten  $\pm 1$ , welche jeweils über einen ganzen Taktzyklus  $T_s = \frac{1}{f_s}$  konstant sind.

Liegt nun beispielsweise mit  $m_a(t) = 0.8$  ein konstanter, deutlich positiver analoger Amplitudenwert vor, ist die Abweichung zur Komparatoramplitude  $+1$  relativ klein, jene zur Amplitude  $-1$  jedoch recht gross. Der Integrator nach der Differenzbildung vollzieht somit eine schnelle Gegenbewegung wenn  $x_{\Delta\Sigma}(t) = -1$  gilt, während die Korrektur bei  $x_{\Delta\Sigma}(t) = +1$  langsamer erfolgt. Der Amplitudenwechsel von „-1“ zu „+1“ erfolgt in diesem Fall somit nach einem einzigen Taktzyklus  $T_s$ , während der Wechsel von „+1“ zu „-1“ erst

nach einigen Taktzyklen vollzogen wird.

Der Delta-Sigma A/D-Wandler schaltet somit regelmässig seinen Komparatorausgang um, doch wird die statistische Verteilung zugunsten von „+1“ ausfallen, wenn  $m_a(t) > 0$  gilt, bzw. zugunsten von „-1“ bei  $m_a(t) < 0$ . Die statistische Mittelung des Komparatorausgangs (z.B. mit einem Tiefpassfilter) ergibt die analoge Eingangsamplitude, während das sehr häufige Umschalten dazu führt, dass die meisten spektralen Anteile der riesigen Quantisierungsfehler  $q_e(k \cdot T_s) \leq \pm(a_{\max} - a_{\min})$  in einen so hohen Frequenzbereich verschoben werden, dass sie mit dem Tiefpassfilter bei der Wandlung in den analogen Bereich eliminiert werden.

Bei handelsüblichen Delta-Sigma A/D-Wandlern wird dieser 1-Bit Samplestrom mit digitalen Tiefpassfiltern wieder in das PCM-Format umgerechnet, womit die Samplerate wieder in den Bereich der Nyquistrate  $f_{s_N}$  sinkt und die Anzahl Bit pro Sample wieder auf typischerweise  $n = 12 \dots 32$  Bit/Sample steigt.

#### 6.4.3 Delta-Sigma D/A-Wandler und Pulsweitenmodulation

Die Art und Weise, wie der Delta-Sigma A/D-Wandler das analoge Eingangssignal digital approximiert, kann auch für die Rückwandlung vom digitalen in den analogen Bereich mit einem Delta-Sigma D/A-Wandler verwendet werden.

Liegt ein digitales Signal als PCM-Signal mit Samplerate  $f_s$  und Auflösung  $n$  vor, muss als erstes ein Samplestrom mit einer Auflösung von nur noch  $n = 1$  Bit/Sample und einem Vielfachen der Samplerate  $f_s$  erzeugt werden.

Dies geschieht durch eine digitale Nachbildung der Approximation, wie sie der Delta-Sigma A/D-Wandler vornimmt, inklusive dem dazu benötigten, nun digitalen Tiefpassfilter. Bei einer sehr einfachen Implementierung kann anschliessend diese schnelle Bitfolge auf ein einfaches *RC*-Tiefpassfilter ausgegeben werden.

Das Verfahren ist sehr ähnlich zur Pulsweitenmodulation (PWM), weshalb die Delta-Sigma D/A-Wandlung und das PWM-Verfahren einander gegenüber gestellt werden sollen.

Die Idee bei PWM ist, die Amplitudenwerte der Samples auf die Pulsbreite bzw. das Tastverhältnis eines Rechtecksignals abzubilden. Die Pulsbreite kann digital mit einem sehr schnell getakteten Logiksignal generiert werden, wobei die Taktrate um Größenordnungen höher als die Nyquistrate der digitalen Samples ist. Somit handelt es sich bei PWM eigentlich um eine Oversampling-Technik.

Hohe Amplituden werden auf ein hohes Tastverhältnis des PWM-Signals (d.h. eine lange „1“-Phase und kurze „-1“-Phase des bipolaren Logiksignals), mittlere Amplituden auf ein Tastverhältnis von 50% (gleich lange „1“- und „-1“-Phase) und tiefe Amplituden auf ein tiefes Tastverhältnis (kurze „1“- und lange „-1“-Phase) abgebildet. Mit einem anschliessenden analogen Tiefpassfilter wird das PWM-Signal gemittelt, wodurch sich wieder der kontinuierliche Verlauf des ursprünglich abgetasteten analogen Signals ergibt.

Beim Delta-Sigma D/A-Wandler wird versucht, anstatt mit einem relativ langen PWM-Puls mit unterschiedlichen Tastverhältnissen die D/A-Wandlung mit möglichst kurzen „1“- und „-1“-Pulsen und möglichst häufigen Amplitudenwechseln zu erzeugen, wobei die Einer und Nullen ungleich häufig vorkommen.

In statistischer Hinsicht entspricht beim Delta-Sigma DAC das Verhältnis von Anzahl „1“ zur gesamten Anzahl ausgegebener Bit gerade dem Tastverhältnis des PWM-Signals, bzw. der relativen Aussteuerung des zu erzeugenden analogen Amplitudenwertes. Da im Vergleich zum PWM-Verfahren der Delta-Sigma DAC das Quantisierungsrauschen zu noch höheren Frequenzen hin verschiebt, besitzt er bei gleicher Oversampling-Rate und tendziell einfacherem analogen Filter sogar die höhere Auflösung, als dies bei einer Ausgabe mit PWM der Fall ist.

Zur Illustration sind nachfolgend die beiden Pulsfugen des Delta-Sigma D/A-Wandlers und des PWM-Verfahrens dargestellt:



**Abbildung 6.13:** Delta-Sigma D/A-Wandler im Vergleich zu PWM

# Kapitel 7

# Übertragung von digitalen Signalen

## 7.1 Digitale Information auf analogen Signalen

Wie schon bei den analogen Kommunikationssystemen wird auch bei der digitalen Signalübertragung unterschieden, ob das Nachrichtensignal im Basisband übertragen wird oder ob es ein Trägersignal moduliert und so als Bandpasssignal über den Kanal gesendet wird.

Der Begriff digitale Signalübertragung ist aber – wortwörtlich interpretiert – etwas irreführend. Die übertragenen Signale haben immer kontinuierlichen und nicht diskreten Charakter, so dass man besser von einer Übertragung von digitaler Information mit Hilfe von analogen Signalen sprechen sollte. Denn: selbst wenn diskrete Übergänge der Amplitude oder Phase bei Nachrichtensignalen angestrebt werden, sind die Anstiegs- und Abfallzeiten solch harter Amplitudenübergänge nicht unendlich kurz, was zumindest in einem kurzeitigen Übergangsbereich zu kontinuierlichen Amplituden führen wird.

Meist sind aber solch harte Übergänge unerwünscht, da der Bandbreitenbedarf dadurch stark ansteigt. Deshalb werden Amplitudenübergänge mit – im Rahmen der Datenrate – möglichst langsam ablaufenden, kontinuierlichen Signalverläufen implementiert, um gezielt Bandbreite zu sparen.

Trotzdem werden nachfolgend in einem ersten Schritt die digitalen Basisbandsignale wie auch die modulierenden Signale von digitalen Modulationsverfahren als Zero-Order Hold Pulse dargestellt. Diese Signale weisen zwar an den harten Amplitudenübergängen Unstetigkeitsstellen auf, bleiben aber so in ihrer einfachen und übersichtlichen Form sehr überschaubar. In einem zweiten Schritt wird dann anschliessend gezeigt, wie „digitale Signale“ möglichst optimal mit bandbreitesparenderen stetigen Signalformen übertragen werden können. Beide Ausprägungen dieser digitalen Signale erfüllen ihren eigentlichen Zweck: digitale Information wird vom Sender zum Empfänger übertragen.

Digitale Information kann entweder paketweise oder als kontinuierlicher Datenstrom vom Sender zum Empfänger gelangen. In beiden Fällen wird der Signalverlauf in einzelne Symbolzeiten unterteilt, während der ein binäres oder mehrwertiges Symbol gesendet wird. Eine wichtige Aufgabe des Empfängers besteht darin, sich aufgrund des Signalverlaufs (oder mit der Unterstützung von Hilfssignalen wie einem Clocksignal) auf dieses periodische Raster von Symbolzeiten aufzusynchronisieren.

Pro Symbolzeit wird je nach System oder Konfiguration ein binäres oder mehrwertiges Symbol übertragen. Alle möglichen Symbolwerte bilden zusammen das Alphabet der digitalen Übertragung.

Im binären Fall besteht das Alphabet aus 2 Symbolwerten, welche in der Übertragungstechnik auch mit Mark (übertragene Eins) und Space (übertragene Null) bezeichnet werden. Bei mehrwertigen Symbolen ist das Alphabet der Übertragung umfangreicher und besitzt oft eine Anzahl von  $2^n$  Symbolen. Solche Symbolwerte von mehrwertigen Symbolen besitzen keine einheitlichen Bezeichnungen mehr, sondern erhalten bei Bedarf meist eine Bezeichnung, die an ihre Bedeutung im höheren Kommunikationslayer des Übertragungsprotokoll angelehnt ist.

Bei einer binären Übertragung wird jeweils ein Bit pro Symbolzeit übertragen. Einfache Beispiele dafür sind Logikschaltungen auf der Leiterplatte oder in einem FPGA oder ASIC, die serielle Schnittstelle RS-232, USB 2.0 oder 10 Mbit/s Ethernet 10BASE-T.

Bei mehrwertigen Symbolen, werden pro Symbolzeit gleich mehrere Bit übertragen. Beispiele dafür sind die klassischen Modems oder Faxgeräte des analogen Telefonnetzes, 1 Gbit/s Ethernet 1000BASE-T, sowie die Vielzahl von OFDM-modulierten Übertragungsverfahren, wie sie bei ADSL, terrestrischem Digital Audio Broadcasting (DAB-T), WLAN oder Powerline Communications eingesetzt werden.

Sowohl bei binären wie auch bei mehrwertigen Übertragungsverfahren soll jeder Symbolwert des Alphabets auf eine ganz spezifische Signalform abgebildet werden. Je besser sich die Signalformen der verschiedenen Symbolwerte unterscheiden, umso weniger Fehler wird der Empfänger beim Erkennen dieser Werte generieren, auch wenn solche wegen starker Signaldämpfung, Verzerrungen und Störungen nie ganz verhindert werden können.

Ist der Empfänger in der Lage, den Frequenzgang des Kanals zu korrigieren und Störsignale in hohem Massen zu unterdrücken, kann die Anzahl unterschiedbarer Signalformen gesteigert werden, was zu einer höheren Anzahl Bit pro Symbolzeit und damit zu einer höheren Datenrate führt. Sind die Empfangsbedingungen zu schlecht, muss die Übertragung auf ein binäres Verfahren reduziert werden, in der Hoffnung, dass der Empfänger wenigstens noch zwei unterschiedliche Signalformen auseinanderhalten kann.

Schliesslich gibt es bestimmte Übertragungsverfahren, denen zwei unterschiedliche Signalformen für den gleichen Symbolwert zur Verfügung stehen. Dadurch können sie beispielsweise die spektralen Eigenschaften des Signals verbessern oder die Synchronisation beim Empfänger vereinfachen. Werden im binären Fall zwei Symbolwerte auf total drei Signalformen abgebildet, so spricht man von pseudoternären Signalen. Diese pseudoternäre Übertragungsart war im klassischen Telekommunikations-Backbone PDH/SDH bei elektrischen Schnittstellen (wie E1, DS1, E3, DS3) weit verbreitet, wird aber auch – in differenzierter Ausprägung – bei 100 Mbit/s 100BASE-TX verwendet.

## 7.2 Digitale Basisbandübertragung

Sowohl binäre wie auch mehrwertige Signale werden im Basisband mit Hilfe von Leitungscodes (Englisch: line codes) übertragen. Sie definieren, wie die unterschiedlichen Symbolwerte auf Signalformen abgebildet werden.

Leitungscodes sind mehr oder weniger aufwendig implementiert und erfüllen so eines oder gleich mehrere von folgenden Zielen:

- Anpassung des Spektrums an die Eigenschaften des Kanals (z.B. DC-freie Übertragung).
- Minimieren des Bandbreitenbedarfs.
- Einfache Synchronisation beim Empfänger (Taktrückgewinnung, Englisch: clock/data recovery CDR).
- Hohe Störfestigkeit bei der Übertragung (d.h. kleine Fehlerrate bei hoher Reichweite und tiefer Sendeleistung).
- Erkennung von Übertragungsfehlern (evtl. auch nur statistische Aussagen zur Fehlerrate).
- Tiefe Kosten, d.h. geringe Komplexität bei der Implementierung.

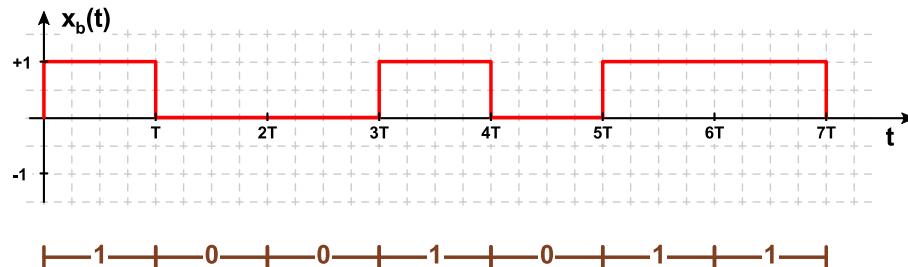
Je nach Kombination der Anforderungen eignen sich unterschiedliche Verfahren, womit sich eine Vielzahl von Leitungscodes etablieren konnten. Eine Auswahl von sehr bekannten Leitungscodes wird in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben.

Neben der Wahl eines geeigneten Übertragungsverfahrens sind vor allem auch die physikalischen Kanaleigenschaften entscheidend für eine erfolgreiche Kommunikation. Aus Kostengründen versucht man beim Übertragungskanal aber oft, diesen so einfach wie möglich zu halten und ihn dafür mit aufwendigerer Technik beim Sender und Empfänger maximal auszunutzen. Nachfolgend sind ein paar wichtige Kanaleigenschaften aufgeführt, ohne näher auf diese Themen einzugehen:

- Wahl des Mediums (Eindrahtleitung, ungeschirmte oder geschirmte Zweidrahtleitung, Coaxialkabel, Drahtlosübertragung).
- Eigenschaften des Mediums (Wellenimpedanz, Linearität, Übertragungsdämpfung, Schirmdämpfung, Reflexionen, Übersprechen auf andere Verbindungen).
- Ein- und Auskopplung aufs Medium (asymmetrisches Signal, symmetrisches Signal, erdfreie Verbindung).

### 7.2.1 Unipolares NRZ-Signal

Bei einem unipolaren NRZ-Signal wird über die gesamte Bitzeit  $T$  ein Mark mit der Amplitude  $A$  (z.B.  $A = 1$ ) und ein Space mit der Amplitude 0 gesendet. NRZ bedeutet Non-Return-to-Zero, d.h. die Amplitudenwert bleibt über die Bitzeit konstant und fällt im Gegensatz zu einem Return-to-Zero Signal in der Mitte der Bitzeit nicht auf Null zurück. Da der Amplitudenwert direkt den Bitwert repräsentiert, spricht man bei diesem Code auch von einem NRZ-Level (oder NRZ-L) Signal.



**Abbildung 7.1:** Unipolares NRZ-Signal im Zeitbereich

Die beschriebene Zuordnung der beiden Amplitudenwerte zu den Bitwerten ist so zwar sehr üblich, aber eigentlich willkürlich gewählt. Ebenso gut ist diese Zuweisung umgekehrt denkbar, d.h. die Amplitude  $A$  steht für ein Space und entsprechend die Amplitude 0 für ein Mark. Auf der Leiterplatte, an den Ein- und Ausgängen von ICs, wird eine solch umgekehrte Amplitudenzuweisung beispielsweise als low-aktives Signal bezeichnet. Solche unterschiedlich definierten Implementierungen sind in der Übertragungstechnik leider die Regel und nicht die Ausnahme. In Bezug auf Leitungscodes scheint sowieso zu gelten, dass alles, was so oder gerade andersherum implementiert werden kann, mit Sicherheit auch in beiden möglichen Varianten schon realisiert wurde.

Eigenschaften des unipolaren NRZ-Signals:

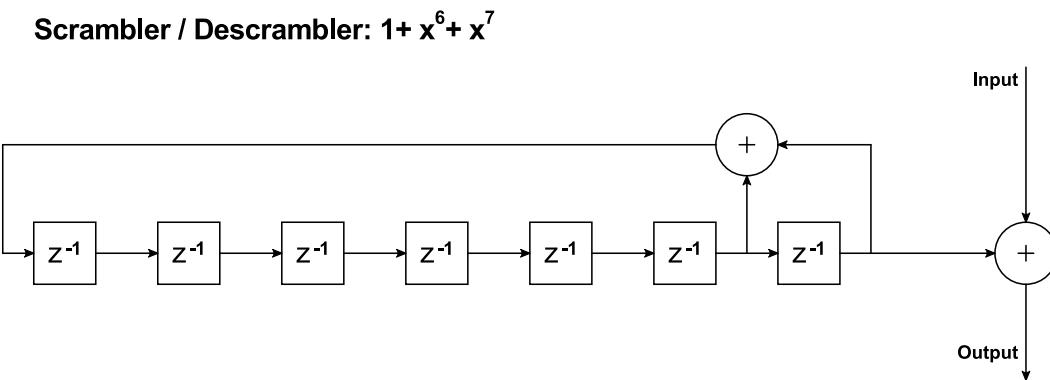
- **Komplexität:** sehr klein, da die bei digitalen Logikschaltungen übliche elektrische Darstellung der Bitwerte mit einer kleinen Treiberschaltung direkt ausgegeben werden kann und somit kein Codierungsaufwand nötig ist.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** nicht DC-frei, selbst bei statistisch gleich häufigen Mark und Space. Lange Folgen von gleichen Symbolen (d.h. grosse sogenannte Run-Length) führen zudem zu tieffrequenten DC-Fluktuationen.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** schwierig, speziell bei hohen Run-Length. Mit einem Scrambler kann aber das Auftreten von grossen Run-Length verhindert, mit zusätzlich eingefügten Bitwerten (Bitstopfen, Englisch: bit stuffing) oder durch zusätzliche Codebits (z.B. durch eine 8b/10b-Codierung) sogar ganz vermieden werden.
- **Beispiele:** CMOS-Signale auf Leiterplatte, optische Kommunikation über Lichtwellenleiter (mit Scrambler oder 8b/10b-Code).

In den nachfolgenden Unterabschnitten sollen Scrambling, Bitstopfen und 8b/10b-Codierung kurz erläutert werden. Im Vergleich zu den weiteren vorgestellten Line-Codes handelt es sich aber bei allen drei Verfahren um Massnahmen, welche in Bezug auf die Implementierung deutlich aufwendiger sind.

### Scrambling

Mit Scrambling möchte man die Abfolge von Mark und Space in eine gleichverteilte zufällige Verteilung zwingen, unabhängig davon, welche Nutzdaten übertragen werden. Erreicht werden kann dies zum Beispiel, indem die Nutzdaten mit einer pseudo-zufälligen Bitsequenz Modulo-2 addiert werden. Die Modulo-2 Addition entspricht einer XOR-Verknüpfung der beiden Bitwerte.

Diese pseudo-zufällige Bitsequenz kann zum Beispiel mit einem rückgekoppelten Schieberegister erzeugt werden, wie dies beim unten dargestellten SDH/SONET-Scrambler realisiert wird. Bei SDH und SONET handelt es sich um Gigabitverbindungen im Glasfaser-Backbone des Telekommunikationsnetzes.



**Abbildung 7.2:** Additiver Scrambler von SDH/SONET

Sowohl beim Scrambling des Senders wie auch beim Descrambling des Empfängers kann die gleiche Schaltung eingesetzt werden. Der Startwert im Schieberegister darf bei einem additiven Scrambler (wie dem in Abbildung (7.2) dargestellten SDH/SONET-Scrambler) nicht aus lauter Nullen bestehen. Startwert und Startzeitpunkt müssen zudem beim Sender und Empfänger bitsynchron sein.

Neben dem additiven Scrambler gibt es auch noch selbstsynchronisierende Scrambler, welche im Vergleich zu additiven Scramблern zwar vereinfachte Startbedingungen, dafür aber eine von der Anzahl Abgriffen des Scramblers abhängige Vervielfachung der Übertragungsfehler aufweisen.

Bei beiden Typen von Scramблern gibt es zwar keine Garantie, dass Mark und Space anschliessend gleichverteilt auftreten und die Run-Length tatsächlich beschränkt wird. Man darf aber annehmen, dass die zu übertragenden Nutzdaten mit der Pseudozufallssequenz des Scramblers nicht korreliert sind. Grosse Run-Length werden damit in der Praxis nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten. Der amerikanische SONET-Standard wie auch das europäische SDH spezifizieren zudem einen so stabilen, jitterfreien Bittakt, dass selbst in extremen Fällen von Run-Length über mehrere hundert Bit die Taktrückgewinnung des Empfängers die Synchronisation nicht verlieren würde.

### Bitstopfen

Beim sogenannten Bitstopfverfahren (Englisch: bit stuffing) erzwingt der Sender nach einer definierten Anzahl gleicher Datenbit (z.B. 6 nacheinander folgende Mark) einen Bitwechsel, indem er ein zusätzliches informationsloses Bit mit einem zur Sequenz invertierten Bitwert (im Beispiel: ein Space) einfügt. Dies passiert unabhängig davon, ob das nachfolgende Datenbit diesen Wechsel sowieso schon erzeugt hätte.

Der Empfänger kann diese Stopfbit sehr einfach erkennen und aus dem Datenstrom wieder entfernen, indem er nach der Sequenz mit maximal zulässiger Run-Length das nachfolgende Bit einfach wieder löscht.

### 8b/10b-Codierung

Bei der 8 Bit zu 10 Bit Codierung (8b/10b-Code) werden jeweils 8 Datenbit so auf 10 Codebit abgebildet, dass unabhängig von den Nutzdaten Mark und Space immer gleich häufig im übertragenen Bitstrom auftreten. Zudem garantiert diese Codierung, dass die Run-Length auf eine maximale Länge von 5 aufeinanderfolgenden gleichen Bit begrenzt bleibt.

Der 8b/10b-Code wurde ursprünglich von IBM für Glasfaserverbindungen entwickelt, findet aber heute auch Anwendung bei SuperSpeed USB 3.0, S-ATA, PCI Express, optischem Gigabit-Ethernet und in leicht modifizierter Form auch bei den HDMI- und DVI-Schnittstellen. Ganz offensichtlich lohnt es sich, eine um 25% höhere Übertragungsrate wegen der 8b/10b-Codierung hinzunehmen, um die spektralen Eigenschaften des Signals zu kontrollieren und dem Empfänger die Synchronisation zu erleichtern.

#### 7.2.2 Bipolares NRZ-Signal

Bei einem bipolaren NRZ-Signal wird über die gesamte Bitzeit  $T$  ein Mark mit der Amplitude  $A$  (z.B. +1), ein Space mit der Amplitude  $-A$  (z.B. -1) gesendet. Wiederum handelt es sich um eine NRZ-L Codierung, bei welcher der Amplitudenwert direkt den Bitwert repräsentiert. Je nach Literatur wird diese Übertragungsart auch als *polares* NRZ-Signal bezeichnet und der Begriff *bipolar* für das weiter unten vorgestellte Alternate Mark Inversion (AMI) verwendet.

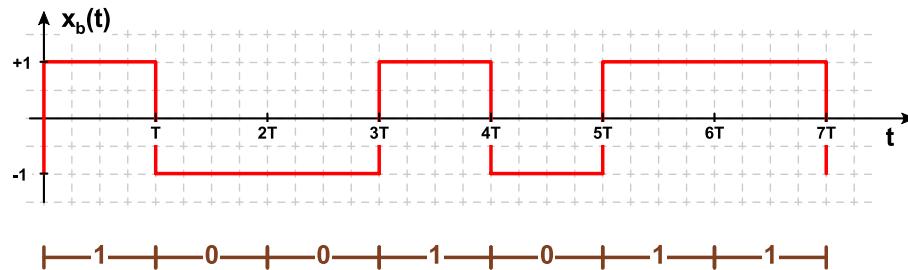


Abbildung 7.3: Bipolares NRZ-Signal im Zeitbereich

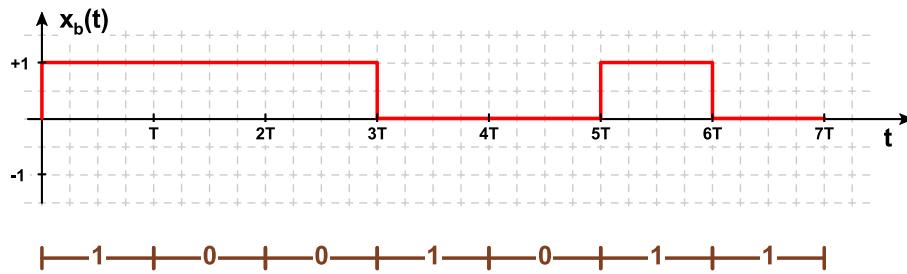
Die Zuordnung der beiden Amplitudenwerte zu den Bitwerten ist wiederum beliebig.

- **Komplexität:** sehr klein, da wiederum kein Codierungsaufwand sondern nur eine Treiberschaltung mit entsprechenden Ausgangspegeln notwendig ist.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** DC-Freiheit deutlich besser als unipolares NRZ, speziell wenn Mark und Space statistisch gleich häufig vorkommen. Große Run-Length oder zeitliche Abschnitte mit einseitiger statistischer Verteilung von Mark und Space führen aber weiterhin zu tieffrequenten DC-Fluktuationen (Abhilfe: Scrambler, 8b/10b-Code).
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** schwierig bei hohen Run-Length (Abhilfe: Scrambler, Bit-Stuffing, 8b/10b-Code)
- **Beispiele:** Serielle RS-232 Schnittstelle, LVDS-Signale auf Leiterplatte.

#### 7.2.3 Unipolares oder bipolares NRZ-inverted Signal

Im Gegensatz zu den beiden vorhergehenden NRZ-L Codes kann bei einer NRZ-inverted Codierung (NRZI) der Bitwert nicht direkt aus dem Amplitudenwert herausgelesen werden. Vielmehr geben die Amplitudenumwechsel an, ob ein Mark oder ein Space übertragen wird. Neben dem unten dargestellten unipolaren NRZI

gibt es auch ein bipolares NRZI.



**Abbildung 7.4:** Unipolares NRZ-inverted Signal (NRZ-M) im Zeitbereich

Bei NRZI oder NRZ-M (M wie Mark), repräsentiert ein Amplitudenwechsel ein Mark. Liegt kein Amplitudenwechsel vor, handelt es sich um ein übertragenes Space.

Bei NRZ-S (S wie Space) ist es gerade umgekehrt, d.h. jedes Space erzeugt einen Amplitudenwechsel, während bei einem Mark die aktuelle Amplitude des Signals beibehalten wird.

Zwei Vorteile besitzen NRZ-inverted Signale im Vergleich zu NRZ-Level. Erstens können lange Run-Length gleicher Amplitude nur noch bei einem der beiden Bitwerte auftreten, da beim anderen Bitwert automatisch immer ein Amplitudenwechsel erfolgt. Bitstopfen für diesen einen Bitwert unterbindet dann nicht nur lange Run-Length, sondern sorgt tendenziell (jedoch ohne Garantie) auch für eine gewisse DC-Freiheit. Dies wird zum Beispiel bei USB 2.0 genutzt, wo die Daten mit bipolarem NRZ-S übertragen werden und grundsätzlich ein Stopfbitspace nach 6 aufeinander folgenden Mark eingefügt wird.

Zweitens werden NRZI codierte Daten auch dann richtig decodiert, wenn die Amplituden in invertierter Form vorliegen. Ein solcher Empfang mit invertierten Amplituden tritt einfacher auf, als man vielleicht vermutet: zum Beispiel beim Vertauschen der beiden Adern einer Zweidrahtverbindung, der Verstärkung des Signals über einen invertierenden Verstärker, oder wegen eines PLLs, der auf die um 180 Grad verschobene Phase eines Trägersignals einrastet.

- **Komplexität:** klein. Allerdings kann NRZI erst im Zusammenhang mit Bit Stuffing seine Stärken voll ausspielen, was dann aber den Implementierungsaufwand deutlich erhöht.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** bei bipolarem NRZI ist die DC-Freiheit gut, speziell wenn z.B. durch Bit Stuffing die Amplitudenwerte tendenziell gleich häufig vorkommen.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** es sind nur noch hohe Run-Length bei einem der beiden Bitwerte zu befürchten (Abhilfe: Scrambler, Bit-Stuffing, 8b/10b-Code)
- **Beispiele:** CD-ROM (NRZ-M), Highspeed USB 2.0 (NRZ-S).

#### 7.2.4 Unipolares RZ-Signal

Beim unipolaren RZ-Signal wird wie beim unipolaren NRZ-Signal der eine Bitwert mit dem Amplitudenwert  $A$ , der andere mit dem Amplitudenwert 0 gesendet. Allerdings fällt die Amplitude  $A$  nach typischerweise der halben Bitzeit wieder auf 0 zurück.

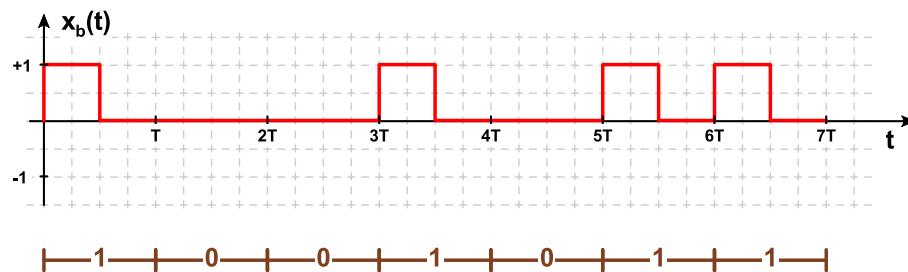


Abbildung 7.5: Unipolares RZ-Signal im Zeitbereich

Es können so zumindest keine langen Zeitabschnitte mit konstanter Amplitude  $A$  mehr auftreten, so dass sich die Problematik einer hohen Run-Length nur noch auf den Bitwert mit der Amplitude 0 beschränkt.

- **Komplexität:** klein. Allerdings muss mit zusätzlichem Aufwand (Scrambling, Bit Stuffing oder 8b/10b-Code) auch noch eine lang andauernde Amplitude 0 verhindert werden.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** nicht DC-frei, wozu es auch keine Abhilfe gibt. Wegen den kürzeren Pulsbreiten der Amplitude  $A$  vergrößert sich der Bandbreitenbedarf im Vergleich zu unipolarem NRZ.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** besser als bei unipolarem NRZ aber immer noch nicht ausreichend gut, da über eine lange, ununterbrochene Zeit die Amplitude 0 vorkommen kann.

### 7.2.5 Bipolares RZ-Signal

Beim bipolaren RZ-Signal wird wie beim bipolaren NRZ-Signal der eine Bitwert mit dem Amplitudenwert  $A$ , der andere mit dem Amplitudenwert  $-A$  gesendet. Allerdings fällt die Amplitude nach typischerweise der halben Bitzeit wieder auf 0 zurück.

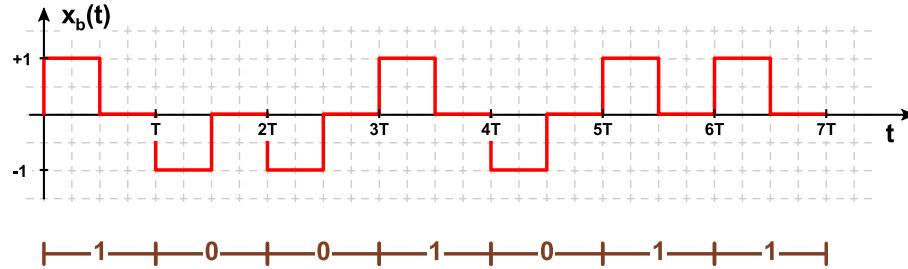


Abbildung 7.6: Bipolares RZ-Signal im Zeitbereich

Bei einem bipolaren RZ-Signal können keine langen Zeitabschnitte mit konstanter Amplitude  $A$  oder  $-A$  mehr auftreten. Das Synchronisationsproblem ist gelöst: ein Clocksignal kann z.B. sehr einfach durch Gleichrichten des Datensignals aus diesem extrahiert werden.

- **Komplexität:** klein.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** nur DC-frei, falls Mark und Space statistisch gleich häufig vorkommen. Große Run-Length oder zeitliche Abschnitte mit einseitiger statistischer Verteilung von Mark und Space führen aber weiterhin zu tieffrequenten DC-Fluktuationen (Abhilfe: Scrambler, 8b/10b-Code). Wegen den kürzeren Pulsbreiten der Amplitude  $A$  vergrößert sich der Bandbreitenbedarf im Vergleich zu bipolarem NRZ.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** auf einfache Weise vollständig gelöst.

### 7.2.6 Alternate Mark Inversion

Bei Alternate Mark Inversion (AMI-Code) wird für ein Space die Amplitude 0 und für ein Mark abwechselungsweise die Amplitude  $A$  bzw.  $-A$  gesendet. AMI-codierte Signale zeichnen sich durch ein Spektrum aus, welches nicht nur DC-frei ist sondern welches auch keine sehr tieffrequente Spektralanteile aufweist, da unabhängig von den übertragenen Daten keine DC-Fluktuationen auftreten. AMI-Signale gibt es als NRZ- und RZ-Signale mit leicht unterschiedlichem Spektrum.

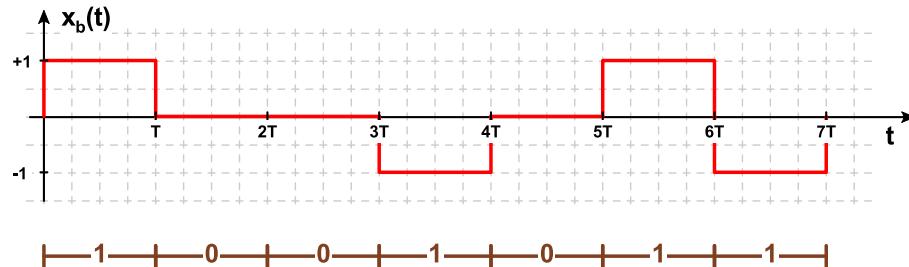


Abbildung 7.7: AMI NRZ-Signal im Zeitbereich

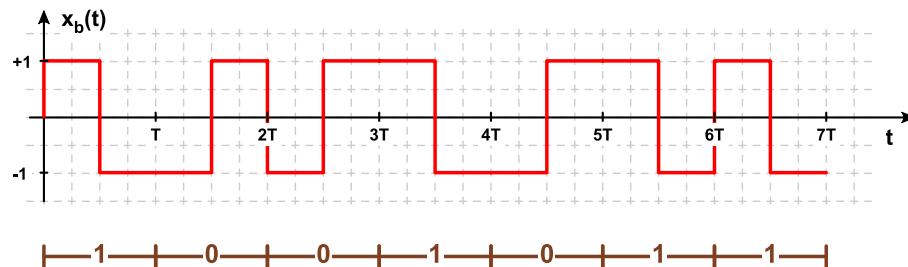
In Bezug auf Mark können keine langen Zeitabschnitte von gleicher Amplitude auftreten, womit genügend Synchronisationsinformationen in hohen Run-Length von Mark vorhanden ist. In Bezug auf Space kann aber die Amplitude 0 über sehr lange Zeit konstant anliegen. Dieses Problem kann mit einer leicht modifizierten AMI-Codierung leicht umgangen werden, indem z.B. für das vierte aufeinanderfolgende Space anstatt die Amplituden 0 ein AMI-Puls gesendet wird, welcher nicht der alternierenden Abfolge von Mark-Pulsen entspricht. Mit dieser Verletzung der AMI-Codierungsregel (Englisch: code violation) kann trotz gesendetem Puls ein Space von einem Mark unterschieden werden.

Solche modifizierte AMI-Codes sind vom Implementierungsaufwand etwas aufwendiger, aber im PDH-Telekomunikationsnetz weit verbreitet: z.B. der europäische HDB3-Code, oder die amerikanischen B3ZS-, B6ZS- und B8ZS-Codes.

- **Komplexität:** klein.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** inhärent DC-frei und frei von ganz tieffrequenten Anteilen. Sehr bandbreiteeffizient.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** nicht ausreichend für grosse Run-Length von Space, was aber mit leicht modifizierten AMI-Codes behoben werden kann.
- **Beispiele:** IMFS Eurocom A, modifizierte AMI-Codes bei PDH E1, DS1, DS2 und DS3.

### 7.2.7 Manchester-Code

Der Manchester-Code wurde 1948 von G. E. Thomas an der University of Manchester erfunden. Er besitzt ein DC-freies Spektrum und löst sämtliche Synchronisationsanforderungen. Gemäß Thomas wird ein Mark mit Amplitude  $+A$  begonnen, welche in der Bitmitte auf  $-A$  wechselt. Ein Space startet mit der Amplitude  $-A$  und wechselt in der Bitmitte auf  $+A$ . Auch die umgekehrte Zuordnung von Mark und Space zu den beiden Signalverläufen ist üblich, z.B. bei 10 Mbit/s Ethernet 10BASE-T. Der Manchester-Code wird auch als **Biphase-Level Code** bezeichnet.



**Abbildung 7.8:** Manchester codiertes Signal im Zeitbereich

Jedes übertragene Bit ist für sich genommen DC-frei, womit auch der gesamte codierte Bitstrom inhärent DC-frei ist. Zudem ist in der Bitmitte immer ein Amplitudenübergang vorhanden, womit für den Empfänger unabhängig von den gesendeten Daten immer genügend Signalflanken für die Synchronisation vorhanden sind.

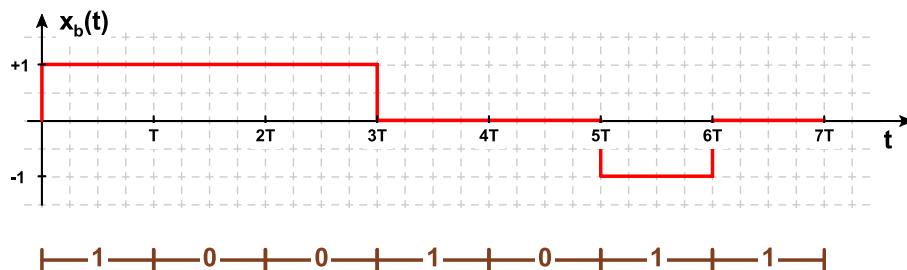
Der Wunsch, dass – ähnlich wie bei NRZI – auch ein Signal mit invertierten Amplituden wieder mit den korrekten Bitwerten dekodiert wird, ist ebenfalls leicht zu erfüllen. So wird beispielsweise beim sogenannten **Biphase-Mark Code** bei jedem neuen Space zwischen den beiden Signalformen des Manchester-Codes gewechselt, während für ein Mark nochmals dieselbe Signalform wie schon im vorhergehenden Bit ausgegeben wird. Dadurch entsteht bei jedem Mark zu Beginn der Bitzeit ein Amplitudenwechsel, welcher bei einem Space ausbleibt. In der Bitmitte ist unabhängig vom Bitwert immer eine Flanke vorhanden. Beim **Biphase-Space Code** ist das Verhalten in Bezug auf Mark und Space gerade umgekehrt. Diese beiden Codierungsvarianten sind auch als **Differentieller Manchester-Code** bekannt.

Eigenschaften des Manchester-Codes:

- **Komplexität:** klein.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** inhärent DC-frei und frei von ganz tieffrequenten Anteilen. Im Vergleich zu NRZ-codierten Signalen ist aber der Bandbreitenbedarf deutlich höher.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** sehr gut, ohne dass weitere Massnahmen notwendig wären.
- **Beispiele:** 10 Mbit/s Ethernet 10BASE-T, RS-485 basierte Wired Train Bus (WTB) und Profibus, AES-3 und S/PDIF Schnittstellen im digitalen Audiobereich.

### 7.2.8 MLT3-Code

Multi-Level Transmit 3 (MLT3) ist ein pseudoternärer differentieller Leitungscode, welcher bei 100 Mbit/s Ethernet 100BASE-TX verwendet wird. Die drei Amplitudenwerte  $+A$ ,  $0$  und  $-A$  werden dabei als sich wiederholende, sequentielle Folge  $0 +A 0 -A$  durchlaufen, wobei ein Mark einen Wechsel zum nächsten Amplitudenwert bewirkt und bei einem Space die aktuelle Amplitude beibehalten wird. Dies entspricht einer NRZI-Codierung, welche aber bei MLT3 auf 3 verschiedene Amplitudenwerte erweitert wurde.



**Abbildung 7.9:** MLT3 codiertes Signal im Zeitbereich

Eigenschaften des MLT3 Codes:

- **Komplexität:** klein.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** Nur etwa die halbe Bandbreite von NRZ-Signalen, aber viel tieffrequente Signalanteile bei kleinem Anteil von Mark.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** heikel bei langen Space-Folgen.
- **Beispiel:** 100 Mbit/s Ethernet 100BASE-TX

Um sehr tieffrequente Spektralanteile (und damit auch einen DC-Anteil) zu verhindern und um die Synchronisation durch Vermeidung grosser Run-Length von Space zu vereinfachen, wird bei 100BASE-TX vor der MLT3 Leitungscodierung eine 4B5B-Codierung vorgenommen. Diese 4B5B-Codierung bildet 4 Datenbit auf 5 Codebit ab. Die insgesamt  $2^5 = 32$  möglichen 5-Bit Codeworte werden wie folgt verwendet:

- **Data (0 ... F):** 16 verschiedene Codeworte für die 4 Eingangsdatenbit (0x0 bis 0xF) des Coders.
- **Idle (I):** 1 informationsloses Codewort, wenn weder Datenworte noch Steuerbefehle übertragen werden.
- **Start (J, K):** 2 aufeinanderfolgende Codeworte als Steuerbefehl für den Start eines Datenpakets.
- **End (T, R):** 2 aufeinanderfolgende Codeworte als Steuerbefehl für das Ende eines Datenpakets.
- **Halt (H):** 1 Codewort um ein Datenpaket abzubrechen und schon empfangene Datenbit zu verwerfen.
- **Quiet (Q):** Folge von „00000“-Codeworten, welche sich ohne weiteres Dazutun bei einem Signalverlust ergeben.
- **Violation (V):** Die insgesamt 9 verbleibenden, unbenutzten und ungültigen 5-Bit Codeworte.

Name	Data[3:0]	Code[4:0]	Name	Data[3:0]	Code[4:0]
0	0000	11110	I	—	11111
1	0001	01001	J	0101 *	11000
2	0010	10100	K	0101 *	10001
3	0011	10101	T	—	01101
4	0100	01010	R	—	00111
5	0101	01011	H	—	00100
6	0110	01110	Q	—	00000
7	0111	01111	V	—	00001
8	1000	10010	V	—	00010
9	1001	10011	V	—	00011
A	1010	10110	V	—	00101
B	1011	10111	V	—	00110
C	1100	11010	V	—	01000
D	1101	11011	V	—	01100
E	1110	11100	V	—	10000
F	1111	11101	V	—	11001

\*) Das erste der 7 Byte langen Ethernet Präambel (0x55) wird vom 4B5B-Code als Start (J,K) codiert.

**Tabelle 7.1:** 4B5B-Codierung bei IEEE 802.3 100BASE-TX

Aus der Tabelle geht hervor, dass die 4B5B-Codierung Codeworte mit weniger als 2 Mark nicht verwendet (mit Ausnahme des Halt-Steuersignals, welches einmalig und nur bei einem Paketabbruch gesendet wird). Im Zeitbereich werden so grosse Run-Length gleicher Amplitude verhindert, im Spektrum die tieffrequenten Spektralanteile reduziert. Gleichzeitig hilft die auf minimal vier Bitzeiten erhöhte Periodizität der pseudoternen MLT3 Codierung, die hochfrequenten spektralen Anteile wirkungsvoll zu beschränken.

Eigenschaften des MLT3 Codes in Kombination mit 4B5B-Codierung:

- **Komplexität:** mittel.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** Im Vergleich zu NRZ-Signalen hat der MLT3-Code weiterhin ca. die halbe Bandbreite. DC-frei, da nun dank hohem Anteil von Marks tieffrequente Spektralanteile vermieden werden.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** Dank hohem Mark-Anteil werden lange Run-Length gleicher Amplituden vermieden, wodurch die Synchronisation gewährleistet ist.
- **Beispiel:** 100 Mbit/s Ethernet 100BASE-TX.

### 7.2.9 PAM5 Codierung

Pulse-Amplitude Modulation (PAM) wurde im Kapitel 5.1.2 behandelt und ist namensgebend für die fünfwertige (quinäre) PAM5 Codierung, bei welchem pro Symbolzeit 5 verschiedene Amplitudenwerte und somit theoretische  $\log_2(5) = 2.3$  bit übertragen werden können. Beim bekanntesten Vertreter dieser Übertragungsart, 1 GBit/s Ethernet 1000BASE-T werden diese Amplitudenwerte normiert mit  $-2, -1, 0, 1$  und  $2$  bezeichnet, weisen aber bei ungedämpften Einzelpulsen eine nominale Spannung von  $-0.75 \text{ V}_p$ ,  $-0.375 \text{ V}_p$ ,  $0 \text{ V}$ ,  $+0.375 \text{ V}_p$  und  $+0.75 \text{ V}_p$  auf [5].

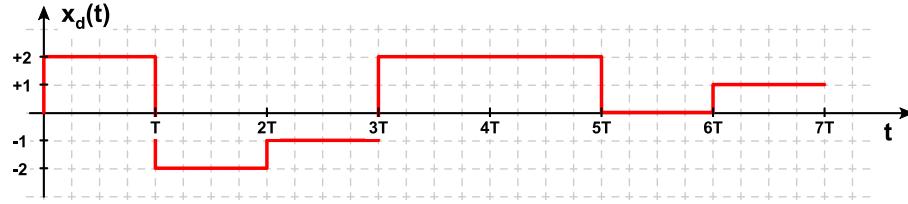


Abbildung 7.10: PAM5 codiertes Signal im Zeitbereich

Im Gegensatz zur MLT3 Codierung, wo die Amplitudenwerte in einer festen, vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden, werden die 5 Amplitudenwerte grundsätzlich in beliebiger Reihenfolge ausgegeben, wobei bei 1000BASE-T lange Run-Length von gleichbleibenden Amplituden und damit sehr tieffrequente spektrale Anteile ebenfalls vermieden werden.

Bei IEEE 1000BASE-T erfolgt die Datenübertragung gleichzeitig über vier Aderpaare (d.h. mit Space Division Multiple Access) und dies sogar zeitgleich bidirektional (vollduplex) dank einer richtungstrennenden elektrischen Beschaltung mit einem Hybrid und einem mit digitaler Signalverarbeitung implementierten Echo-Canceller. So werden in Tx- und Rx-Richtung unabhängig jeweils pro Symbolzeit  $T_s = 8 \text{ ns}$  vier solche PAM5 codierten Symbole ausgegeben, was als vierdimensionale 4D-PAM5 Codierung bezeichnet wird.

Diese 4D-PAM5 erlaubt pro Symbolzeit  $5^4 = 625$  verschiedene Amplitudenkombinationen zu generieren, was genügend Möglichkeiten eröffnet, um pro Symbolzeit 8 Bit Nutzdaten oder alternativ Steuerinformation zu übertragen und gleichzeitig auch noch Platz für die erwähnte Vermeidung von grossen Run-Length lässt. Insgesamt wird also bei 1000BASE-T ein hoher Codierungs- und Implementierungsaufwand betrieben, um eine Datenrate von 1 Gbit/s innerhalb des Frequenzbandes von nominal 1 bis 62.5 MHz übertragen zu können.

Der Begriff Modulation bei PAM5 impliziert eine spektrale Verschiebung vom Basisband zum Übertragungsband des Trägersignals. Dies ist jedoch bei IEEE 1000BASE-T nicht der Fall, da sich die Pulsbreite  $\tau$  wie bei einer NRZ-Codierung über die ganze Symbolzeit erstreckt und das Signal dazwischen nicht auf den Amplitudenwert 0 zurückfällt. Eine unendlich lange Folge von solchen nicht-modulierten Pulsen ergibt also ein DC-Signal und kein Trägersignal. Dadurch bleibt bei der Formung dieser Pulse mit dem Datensignal eine spektrale Verschiebung aus. Bei IEEE 1000BASE-T handelt es sich somit (wie der Ausdruck „BASE“ im Namen besagt) um eine Basisbandübertragung und nicht um eine Bandpassübertragung eines modulierten Trägersignals.

Eigenschaften der 4D-PAM5 Codierung von 1000BASE-T:

- **Komplexität:** hoch.
- **DC-Freiheit, Spektrum:** Hohe Bitrate bei kleiner Bandbreite, dank vierfachem Space-Multiplex, zeitgleichem bidirektionalem Datenverkehr und mehrwertigen Symbolen. Tieffrequente Spektralanteile werden durch Codierung vermieden.
- **Taktrückgewinnung, Synchronisation:** Durch Codierung gewährleistet.
- **Beispiel:** 1 Gbit/s Ethernet 1000BASE-T.

## 7.3 Bandbreitenbedarf von digitalen Signalen

### 7.3.1 Bandbreitenbedarf eines PCM-Signals

Wird ein analoges Signal mit PCM digitalisiert, ergibt sich aus der Abtastrate  $f_s$  und der Sampleauflösung  $n$  sofort die Datenrate  $d_{\text{bps}}$  des erzeugten logischen Bitstroms:

$$d_{\text{bps}} = f_s \cdot n \text{ Bit/s} \quad (7.1)$$

Obwohl die zu übertragende Datenmenge somit bekannt ist, kann die benötigte Bandbreite dieses PCM-Signals nicht als explizite Zahl angegeben werden. Einerseits ist sie abhängig von der Anzahl Bit, welche gleichzeitig pro Symbolzeit übertragen werden. Andererseits wird die Bandbreite auch von der Signalform des verwendeten digitalen Leitungscodes abhängen.

Trotzdem soll nachfolgend der minimale Bandbreitenbedarf eines binären PCM-Signals abgeschätzt werden, d.h. von einem mit PCM digitalisierten analogen Signal, bei welchem die Bitwerte in binärer Form als NRZ-Signal übertragen werden.

Bei den vorhergehenden Leitungscodes wurde die Signalform in eckiger Form dargestellt d.h. die Signale werden über die ganze Bitzeit (bzw. bei RZ-Signalen und beim Manchester-Code je zweimal über die halbe Bitzeit) mit konstanten Amplituden übertragen.

Mathematisch kann dies für ein NRZ-Signal so dargestellt werden, dass jeder zeitdiskrete Symbolwert (im binären Fall Mark oder Space), auf das Gewicht einer Dirac'schen Impulsfunktion abgebildet wird. Am Ausgang des Sender befindet sich dann ein Pulsformfilter, welches aus dem Dirac-Impuls einen Codepuls generiert. Bei den eckigen Signalen handelt es sich bei diesem Pulsformfilter um eine Zero-Order-Hold Funktion mit folgender Impulsantwort über die Bitzeit  $T$ :

$$h_{\text{NRZ}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.2)$$

Bei RZ-Signalen oder beim Manchestercode werden mit zwei gewichteten Dirac-Funktionen zwei solche Pulse pro Bitzeit generiert, wodurch sich die Pulsantwort der Zero-Order-Hold Funktion verkürzt auf:

$$h_{\text{RZ}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.3)$$

Um Bandbreite zu sparen, soll nun ein Pulsformfilter verwendet werden, das einen runderen, weicheren Verlauf aufweist und nur noch zum Auswertzeitpunkt des Empfängers (z.B. in der Mitte oder am Ende des Pulses) den exakten gewichteten Amplitudenwert von  $+A$  für ein Mark und  $-A$  für ein Space ausgibt.

Für ein NRZ-codiertes Signal ist also insgesamt ein Signalverlauf mit minimaler Bandbreite gesucht, welcher im Raster der Bitzeit diese Amplitudenwerte  $+A$  oder  $-A$  aufweist. Ein sehr guter Lösungsansatz besteht darin, diese mit der Datenrate  $d_{\text{bps}}$  auftretenden Amplitudenwerte als Samples eines digitalisierten Signals mit Samplerate  $f_d = d_{\text{bps}}$  aufzufassen und mit einem Rekonstruktionsfilter mit Eckfrequenz  $f_c = \frac{1}{2}f_d$  ein analoges Signal daraus zu konstruieren.

Dies führt zu folgender Bandbreite für das PCM-Signal mit der Datenrate von  $d_{\text{bps}} = f_s \cdot n$  Bit/s:

$$B_{\text{PCM}} = \frac{1}{2}f_d = \frac{1}{2} \cdot f_s \cdot n \text{ Hz} \quad (7.4)$$

Für ein Telefoniesignal mit einer analogen Bandbreite von  $B_m = 3.1$  kHz im Bereich von 300 Hz bis 3.4 kHz, einer gemäss Abtasttheorem mit etwas Marge gewählten Abtastrate von 8 kSample/s sowie einer Auflösung von  $n = 8$  Bit/Sample, führt dies bei binärer Übertragung zu einer minimalen Bandbreite von  $B_{\text{PCM}} = 32$  kHz, also etwa 10 Mal mehr als die ursprüngliche analoge Bandbreite  $B_m$ .

Stehen für Sender und Empfänger anstatt 2 Amplitudenwerte deren 4, 8 oder allgemein  $k$  Werte zur Verfügung, können anstatt nur 1 Bit deren 2, 3 bzw.  $\log_2 k$  Bit pro Symbolzeit übertragen werden, was die Bandbreite  $B_{\text{PCM}}$  sofort um den Faktor 2, 3 bzw.  $\log_2 k$  reduziert. Die Anzahl Bit pro Symbol steigt aber nur mit dem Zweierlogarithmus aus der Grösse des Alphabets verschiedener Symbolwerte. Die maximal erreichbare Anzahl Bit pro Symbol wird ausserdem schnell einmal durch den Störabstand des Signals im Übertragungs-kanal beschränkt.

Wie nun Bandbreite sparende Rekonstruktionsfilter am besten gewählt werden, zeigt folgender Abschnitt über Pulsformfilter.

## 7.4 Pulsformfilter

Werden die digitalen Basisbandsignale – so wie im Abschnitt 7.2 der Leitungscodes dargestellt – als Zero-Order-Hold Pulse mit diskreten Amplitudenwerten übertragen, benötigen sie viel unnötige Bandbreite. Diese hohe Bandbreite ist einerseits ein Nachteil, wenn die digitalen Nachrichtensignale  $m_d(t)$  als modulierendes Signal auf einem Trägersignal übertragen werden und gleichzeitig ein Frequenzmultiplex angestrebt wird. Andererseits ist aber auch bei Basisbandübertragung damit zu rechnen, dass der Kanal diese hohe Bandbreite gar nicht zur Verfügung stellt und so durch lineare Verzerrung das Signal  $m_d(t)$  verformt.

Prinzipiell wird man versuchen, schon am Ausgang des Senders das Signal auf die Bandbreite des Kanals abzustimmen, um die Bandbegrenzung unter eigener Kontrolle zu haben und nicht irgendeinem unkontrollierbaren Verhalten des Kanals zu überlassen.

Unabhängig davon, ob die Signale in passiver Weise durch den Kanal bandbegrenzt werden oder vom Sender anstatt eckig schon mit bandbegrenztem Spektrum ausgegeben werden, führt diese Bandbegrenzung zu einer Verbreiterung der Pulsformen über die eigentliche Symbolzeit hinaus. Der Grund dafür ist, dass jedes streng bandbegrenzte Signal eine theoretisch unendliche zeitliche Ausdehnung hat. In der Praxis heißt das, dass die Signalformen der Symbole sich mit mindestens einem oder sogar mehreren Nachbarsymbolen signifikant überlappen.

Diese Überlappung der Signale führt dazu, dass die Amplitudenwerte des einen Symbols mit dem Ein- und Ausschwingen der Nachbarsymbole überlagert werden und so durch diese in ihrem Wert verfälscht werden. Diese gegenseitige Störung benachbarter Symbole wird als Intersymbolinterferenz (Englisch: inter-symbol interference, ISI) bezeichnet.

Auch wenn bei einer binären Übertragung die Störung nicht so gross ist, dass diese direkt zu Bitfehlern führt, verliert man durch die Intersymbolinterferenz dennoch einen grossen Anteil an Marge im Störabstand. Bei mehrwertigen Symbolen kann aber die Intersymbolinterferenz durchaus dazu führen, dass alleine durch sie schon Übertragungsfehler auftreten.

Bei bandbegrenzten Kanälen ist Intersymbolinterferenz unumgänglich und macht sich umso mehr bemerkbar, je weniger Bandbreite für die Übertragung zur Verfügung steht. Gelingt es jedoch, zum Auswertzeitpunkt des Empfängers (z.B. in der Mitte oder am Ende der Symbolzeit) die Intersymbolinterferenz zu minimieren oder sogar zu eliminieren, kann weiterhin der korrekte Amplitudenwert des einzelnen Pulses korrekt detektiert werden. Dieser Ansatz führt uns zum ersten Nyquist-Kriterium der digitalen Signalübertragung.

### 7.4.1 Erstes Nyquist-Kriterium

Das erste Nyquist-Kriterium formuliert die Bedingung, wie ein digitales Signal mit bandbegrenztem Spektrum beschaffen sein muss, damit es ohne Intersymbolinterferenz zum Auswertzeitpunkt empfangen und ausgewertet werden kann.

Mathematisch sollen dabei die zu sendenden binären oder mehrwertigen Symbole als eine Reihe von Dirac Impulsfunktionen im Abstand der Symbolzeit  $T$  (bei RZ-Signalen oder Manchesterpulsen im Abstand von  $\frac{T}{2}$ ) aufgefasst werden, welche je nach zu sendendem Amplitudenwert ein Gewicht  $A_i$  besitzen sollen:

$$m_d(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \cdot \delta(t - i \cdot T) \quad (7.5)$$

Anstatt nun daraus mit einem Zero-Order Hold eine über die ganze Symbolzeit  $T$  (oder halbe Symbolzeit  $\frac{T}{2}$ ) konstante Amplitude  $A_i$  zu erzeugen, soll mit einer geeigneteren Impulsantwort  $h(t)$  eine Pulsform mit bandbegrenztem Spektrum erzeugt werden, welche nach einer zeitlichen Verzögerung  $t_0$  gerade den gewünschten Amplitudenwert  $A_i$  ausgibt.

Ausgehend von  $t_0$  soll zudem im Abstand von  $n \cdot T$  (oder  $n \cdot \frac{T}{2}$ ), d.h. im Raster der Pulse, eine Nullstelle vorhanden sein, damit das Gesamtsignal trotz Überlappung der benachbarten Symbole jeweils bei  $t = t_0 + n \cdot T$  gerade die gewünschten Amplitudenwerte der einzelnen Pulse wiedergibt:

$$h(n \cdot T - t_0) = \begin{cases} h_0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Bei einem normierten Signalpuls kann  $h_0 = 1$  gesetzt werden. Die zeitliche Verzögerung  $t_0$  hilft, das Filter überhaupt kausal implementieren zu können, und muss nicht riesig gross gewählt werden, da in der Praxis nach wenigen Nachbarpulsen  $n$  die Approximation der Impulsantwort abgebrochen wird. Mit einer solchen Approximation ergibt sich zwar wieder eine zeitlich begrenzte Pulsform, was ein theoretisch unendlich breites Spektrum zur Folge hat, aber die spektralen Anteile werden dank der Verbreiterung des Pulses viel steilflankiger gegen Null konvergieren.

Vereinfachend (und mathematisch eleganter) setzen wir nun  $t_0 = 0$ , d.h. die Kausalität soll nur bei der eigentlichen Implementierung und nicht schon bei dieser mathematischen Behandlung berücksichtigt werden:

$$h(n \cdot T) = \begin{cases} h_0 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Ausserhalb der Stellen  $t = n \cdot T$  ist für eine ISI-freie Pulsform der Signalverlauf irrelevant, so dass beliebige Pulsformen  $x_p(t)$ , welche an den abgetasteten Stellen  $t = n \cdot T$  den Vergleich  $x_p(n \cdot T) = h(n \cdot T)$  erfüllen, denkbar und zulässig sind. Diese einzige Bedingung ist nachfolgend als Summe festgehalten. Diese Summe kann aber sofort vereinfacht werden, da ausser bei  $t = 0$  alle Stützstellen Null sind. Somit lautet das erste Nyquist-Kriterium im Zeitbereich:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n \cdot T) \cdot \delta(t - n \cdot T) = h_0 \cdot \delta(t) \quad (7.8)$$

Das erste Nyquist-Kriterium im Frequenzbereich ergibt sich aus der Fouriertransformation der vorhergehenden Formel:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\omega - n \cdot \frac{2\pi}{T}\right) = h_0 \quad (7.9)$$

Somit führen nur jene Pulsformen zu einer ISI-freien Übertragung zu den Auswertzeitpunkten  $t = n \cdot T$ , wenn die Summe ihres im Raster  $\omega = n \cdot \frac{2\pi}{T}$  wiederholten Spektrums insgesamt konstant ist.

Insbesondere lässt sich aus dem ersten Nyquist-Kriterium im Frequenzbereich auch schliessen, dass dieses wiederholte Spektrum nur dann in der Summe konstant sein kann, wenn die minimale Bandbreite eines ISI-freien übertragenen Signals  $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T}$ , d.h. die Hälfte der Symbolrate beträgt. Andernfalls würden sich zwischen den wiederholten Anteilen Lücken mit dem Wert Null ergeben.

Mit dieser Erkenntnis kann man nochmals auf die minimale Bandbreite eines binär übertragenen Datensignals mit Datenrate  $d_{\text{bps}}$  zurückkommen: Soll die Übertragung im Raster der Symbolzeit ISI-frei sein, gilt für die Bandbreite des binär übertragenen Nachrichtensignals  $m_d(t)$ :

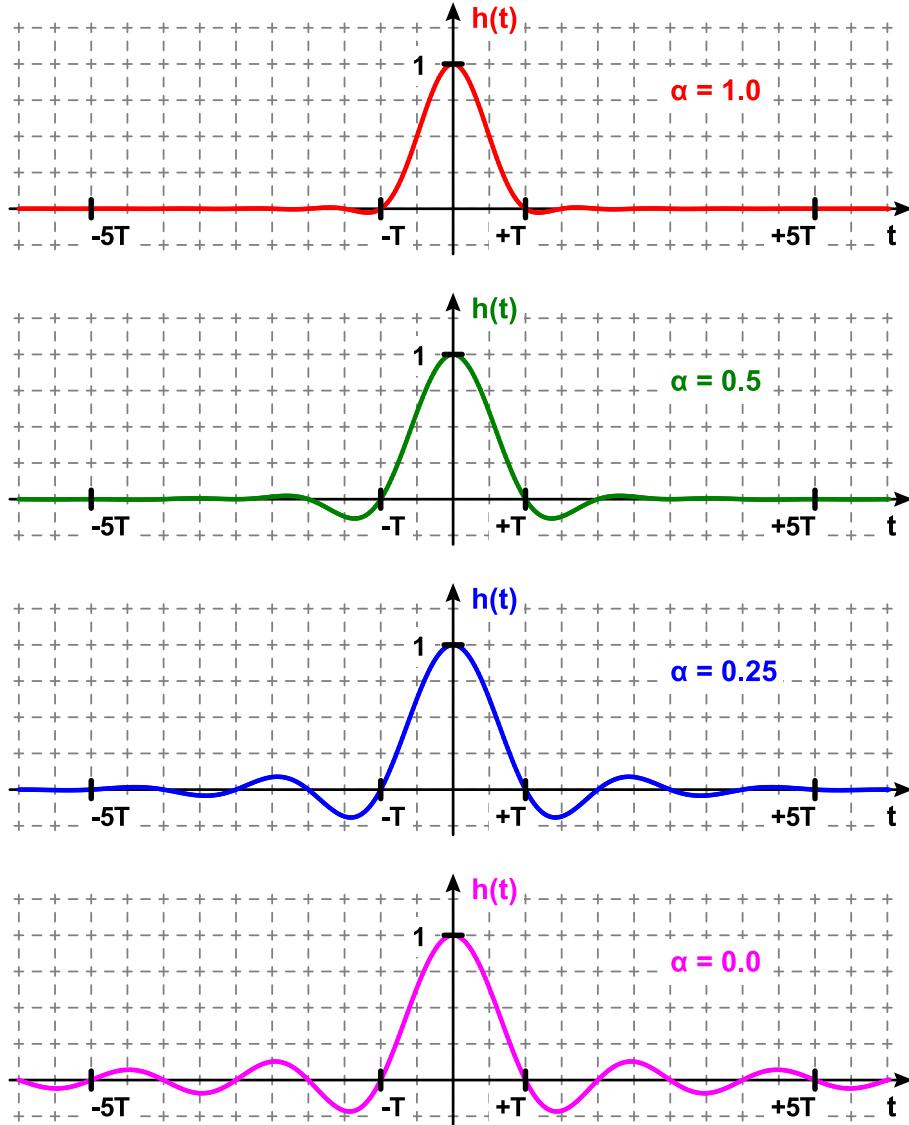
$$B_d = \frac{1}{2} \cdot d_{\text{bps}} \quad (7.10)$$

### 7.4.2 Raised-Cosine Puls

Ein beliebtes Pulsformfilter, welches das erste Nyquist-Kriterium erfüllt, ist das Raised-Cosine Filter. Die Pulsform ist im Zeitbereich wie folgt definiert:

$$h(t) = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t} \cdot \frac{\cos \alpha \frac{\pi}{T} t}{1 - (2\alpha \frac{\pi}{T} t / \pi)^2} \quad (7.11)$$

Der erste Term, die Sinc-Funktion, sorgt für die gewünschten Nullstellen des Raised-Cosine Pulses an den Stellen  $t = n \cdot T$  (mit  $n \neq 0$ ). Der zweite Term sorgt für ein unterschiedlich schnelles Abklingen der Pulsform im Zeitbereich, je nach gewähltem Roll-off Faktor  $\alpha$  im Bereich  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

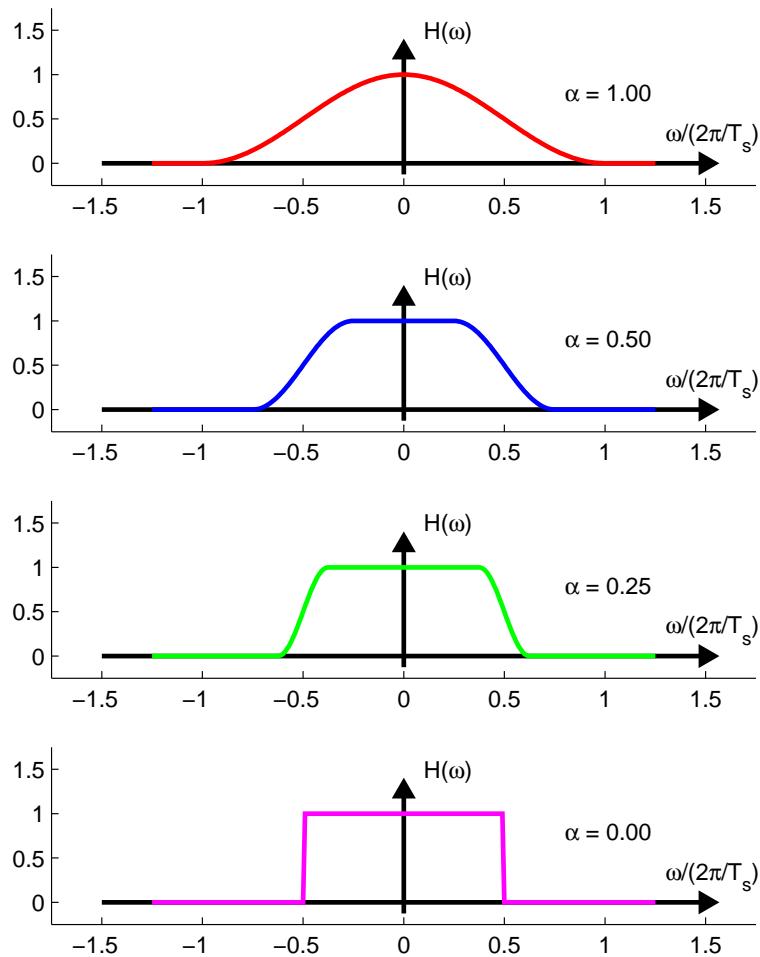


**Abbildung 7.11:** Raised-Cosine Pulse mit unterschiedlichen Roll-off Faktoren  $\alpha$

Im Frequenzbereich ergibt sich die namensgebende angehobene Cosinus-Form:

$$H(\omega) = \begin{cases} T & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)\frac{\pi}{T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi}{2\alpha\frac{\pi}{T}} (|\omega| - \frac{\pi}{T}) \right) \right] & \text{für } (1 - \alpha)\frac{\pi}{T} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)\frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{für } |\omega| > (1 + \alpha)\frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (7.12)$$

Mit Roll-off Faktor  $\alpha = 0$  ergibt sich die kleinste Bandbreite  $B = \frac{1}{2T}$  und eine Pulsform, welche gerade der Sinc-Funktion entspricht und somit nur sehr langsam gegen Null konvergiert. Mit Roll-off Faktor  $\alpha = 1$  ergibt sich die vergleichsweise doppelte Bandbreite  $B = \frac{1}{T}$  und eine Pulsform, welche sehr rasch gegen Null konvergiert.



**Abbildung 7.12:** Raised-Cosine Pulse im Frequenzbereich

Im sogenannten Augendiagramm werden sämtliche möglichen Signalformen in Bezug auf die Symbolzeit exakt übereinandergelegt. Im unten dargestellten binären Fall sind dies zwar nur zwei verschiedene Pulsformen. Da sich jedoch – vor allem bei kleinem Roll-off Faktor  $\alpha$  – eine grössere Anzahl von Nachbarpulsen durch Intersymbolinterferenz bemerkbar machen können, ergibt dies eine Vielzahl von leicht abweichenden Signalverläufen:

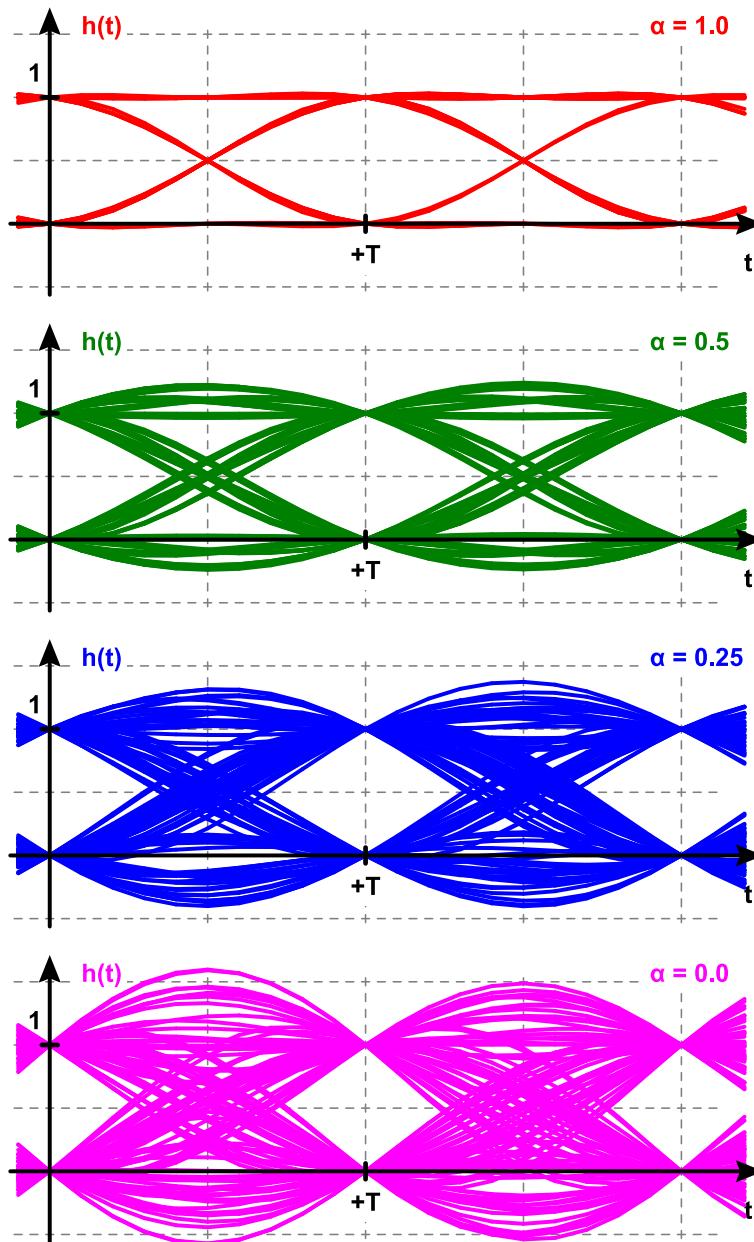


Abbildung 7.13: Augendiagramme der Raised-Cosine Pulse

Bei allen vier Augendiagrammen ist ersichtlich, dass zum Zeitpunkt  $t = 0 \cdot T = 0$  keine Intersymbolinterferenz auftritt, und das digitale Signale entweder die Amplitude  $A = +1$  oder  $A = 0$  besitzt, welche bei einem unipolaren NRZ-Level Signal beispielsweise Mark und Space repräsentieren.

Da bei einem Roll-off Faktor  $\alpha = 1$  die Impulsantwort  $h(t)$  sehr schnell abklingt, führen nur die direkten Nachbarpulse und eventuell – in viel kleinerem Masse – die übernächsten Nachbarn zu unterschiedlichen Signalverläufen, womit die Anzahl der sich deutlich unterscheidenden Signalverläufe recht klein ist.

Bei einem Roll-off Faktor  $\alpha = 0$  konvergiert  $h(t)$ , ein Sinc-Puls, sehr langsam gegen Null, womit sehr viele Nachbarn an der Überlagerung der Pulsformen beteiligt sind. Die entsprechend riesige Anzahl von Bitkombinationen führt zu einer grossen Vielfalt von Signalverläufen.

### 7.4.3 Zweites Nyquist-Kriterium

Die Augendiagramme zeigen auch auf, wie viel Marge verloren geht, wenn die Synchronisationsschaltung beim Empfänger leicht vom idealen Auswertzeitpunkt abweicht. Je grösser diese Abweichung ist, desto genauer muss der Threshold des Empfängers exakt in der Mitte der beiden nominalen Amplitudenwerte liegen, damit der Detektor nicht versehentlich ein Mark als ein Space auswertet oder umgekehrt. Bei mehrwertigen Symbolen wird die sowieso schon viel kleinere Marge bei kleinsten zeitlichen Abweichungen noch schneller verlorengehen.

Dem Empfänger wird somit die fehlerfreie Auswertung erleichtert, wenn das Augendiagramm nicht nur zu den Zeitpunkten  $t = n \cdot T$  in Bezug auf die Amplitude maximal offen ist, sondern auch auf der Zeitachse für die Synchronisation möglichst viel Marge lässt.

Idealerweise sind bei den Übergängen zwischen zwei Pulsformen, d.h. zum Zeitpunkt  $t = \pm \frac{T}{2}$  nur die beiden Nachbarn beteiligt und nicht noch weiter entfernte Pulse. Dazu muss die Pulsform  $h(t)$  nicht nur gemäss dem ersten Nyquist-Kriterium an den Stellen  $t = n \cdot T$  (mit  $n \neq 0$ ) Nullstellen aufweisen, sondern auch an den Stellen  $t = \pm \frac{3T}{2}, t = \pm \frac{5T}{2}, t = \pm \frac{7T}{2}$ , etc.

Bei dieser Anforderung, welche das Augendiagramm auch auf der Zeitachse maximal öffnet, handelt es sich um das zweite Nyquist-Kriterium. Von den Raised-Cosine Pulsen erfüllt nur die Pulsform mit dem Roll-off Faktor  $\alpha = 1$  das zweite Nyquist-Kriterium.

## 7.5 Digitale Modulation von Trägersignalen

Anstatt im Basisband können digitale Informationen auch mit Hilfe eines modulierten Trägersignals in den höheren Frequenzbereichen beliebiger Übertragungsbänder übertragen werden. Es gibt hauptsächlich zwei Gründe, welche für die Nutzung eines Trägersignals sprechen:

- Anpassung an die physikalischen Kanaleigenschaften (z.B. Funkübertragung mit kleinen Antennen).
- Frequenzmultiplexing zur mehrfachen Nutzung des Kanals.

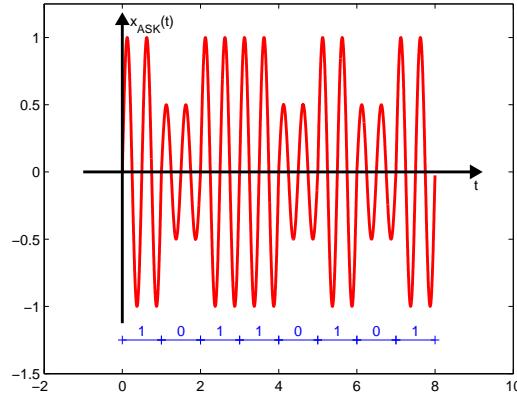
Im Gegensatz zu rein analogen Modulationsverfahren fällt der dritte Grund, die Übertragungsqualität, prinzipiell weg. Bei analogen Signalen bot eine FM- oder PM-Übertragung bei gleicher Sendeleistung die bessere Empfangsqualität als eine Amplitudenmodulation oder eine Übertragung im Basisband. Bei digitalen Kommunikationssystemen bieten sich sehr viel mehr Möglichkeiten, die Datenrate, Bandbreite des Signals und die Bitfehlerrate unabhängig vom Modulationsverfahren aufeinander abzustimmen und die Empfangsqualität bei kleiner Sendeleistung zu optimieren. Aus Sicht der Störfestigkeit eignen sich somit sowohl Basisbandsignale wie auch Bandpasssignale für eine sichere Datenübertragung, selbst bei einem sehr kleinen Störabstand im Übertragungskanal.

Als formbare Parameter bieten sich immer noch die drei von den analogen Signalen bekannten Parameter eines Trägersignals an: Amplitude, Phase und Momentanfrequenz. Werden sie von einem binären Datensignal verändert bzw. zwischen zwei Werten umgeschaltet, spricht man im Englischen von Switching oder Keying. Die drei Grundformen von binärer Signalübertragung mit Hilfe von Trägersignalen lauten daher:

- **Amplitude Shift Keying (ASK):** das modulierende digitale Signal schaltet zwischen zwei Amplitudenwerten des Trägers um.
- **Phase Shift Keying (PSK):** das modulierende digitale Signal schaltet zwischen zwei Phasenlagen des Trägers um.
- **Frequency Shift Keying (FSK):** das modulierende digitale Signal schaltet zwischen zwei Momentanfrequenzen des Trägers um.

### 7.5.1 Digitale Amplitudenmodulation

#### Amplitude Shift Keying (ASK)



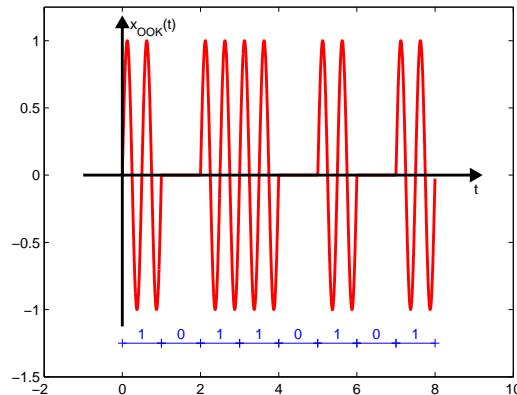
**Abbildung 7.14:** Amplitude Shift Keying im Zeitbereich

Je nach Symbol  $s_i$ , welches übertragen wird, besitzt das Trägersignal eine unterschiedliche Amplitude  $A_i$ . ASK kann sowohl für binäre wie auch für mehrwertige Symbole realisiert werden. Die durch die Symbolwerte erzeugte Abfolge von Amplituden  $A_i$  bilden hintereinander gereiht das modulierende Nachrichtensignal  $m(t)$ . Im oben dargestellten binären Fall ist  $m(t) = 1$  für ein Mark und  $m(t) = 0.5$  für ein Space.

Dieses Nachrichtensignal  $m(t)$  vollzieht mit dem Träger eine Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (DSB-SC), d.h. das Spektrum des Nachrichtensignals im Basisband wird zu den 2 Seitenbändern links und rechts der Trägerfrequenz verschoben. Es ist schon jetzt offensichtlich, dass ein eckiger Verlauf des Nachrichtensignals  $m(t)$  auch im Übertragungsband viel Bandbreite beanspruchen wird, was meist unerwünscht ist. Ziel wird somit sein, zum Beispiel mit Raised-Cosine-Pulsfiltern ein modulierendes Signal  $m(t)$  mit glattem Verlauf und tieferem Bandbreitenbedarf zu erzeugen.

Da aber die eigentliche Charakteristik der verschiedenen digitalen Modulationsarten bei eckigen modulierenden Signalen deutlicher erkennbar ist, wird in den prinzipiellen Darstellungen dieses Abschnittes am eckigen Verlauf von  $m(t)$  vorerst festgehalten.

#### On-Off Keying (OOK)

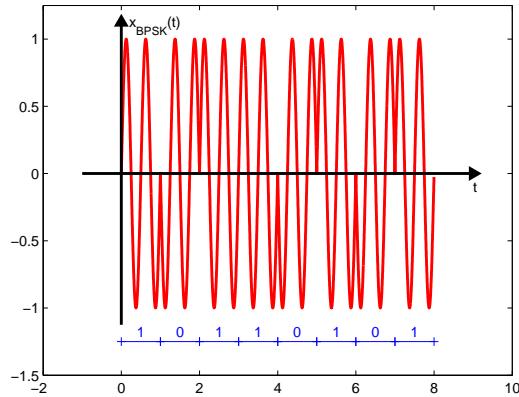


**Abbildung 7.15:** On-Off Keying im Zeitbereich

Ein Spezialfall bei der Übertragung von binären Symbolen ist das On-Off Keying, bei welchem einer der beiden Symbolwerte auf die Amplitude  $m(t) = 0$  abgebildet wird. On-Off Keying entspricht einer Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (DSB-SC) mit einem modulierenden unipolaren NRZ-Signal.

### 7.5.2 Digitale Phasenmodulation

#### Binary Phase Shift Keying (BPSK)

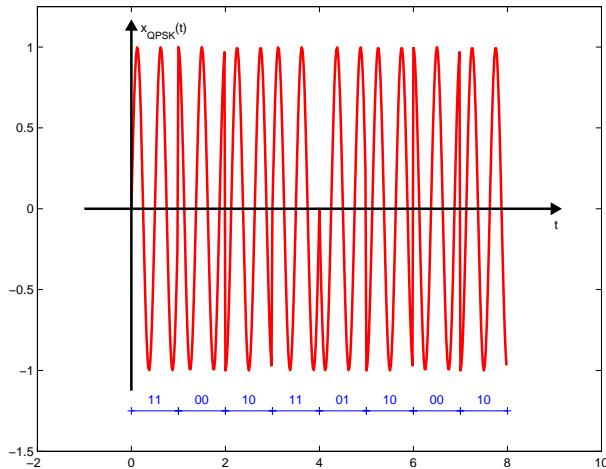


**Abbildung 7.16:** Binary Phase Shift Keying im Zeitbereich

Bei Binary Phase Shift Keying (BPSK) handelt es sich um ein binäres Modulationsverfahren, bei welchem der Träger zum Beispiel für Mark mit der Phasenlage  $\varphi = 0^\circ$  und entsprechend für Space mit der Phasenlage  $\varphi = 180^\circ$  übertragen wird.

BPSK kann somit auch als Zweiseitenband-Amplitudenmodulation mit den Amplitudenwerten  $A_i = \pm 1$  realisiert werden und entspricht daher einer DSB-SC mit einem modulierenden bipolaren NRZ-Signal.

#### Quaternary Phase Shift Keying (QPSK)



**Abbildung 7.17:** Quaternary Phase Shift Keying im Zeitbereich

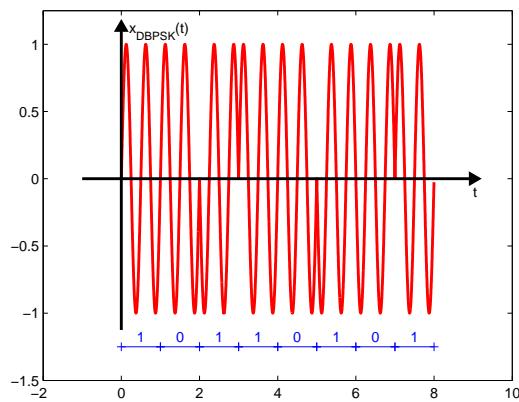
Bei vierwertigem Phase Shift Keying können pro Symbolzeit vier unterschiedliche Symbole übertragen werden, was einer Informationsmenge von 2 Bit pro Symbol entspricht.

Die Phasenlagen für die vier möglichen Bitkombinationen werden von Vorteil in zueinander maximaler Distanz verteilt und lauten zum Beispiel gemäß obenstehender Darstellung:  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \pi$  und  $\varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$ .

Ausgehend von QPSK kann die Anzahl zulässiger Phasenlagen nochmals erhöht werden und so die Anzahl Bit pro Symbolzeit weiter gesteigert werden. Meist erfolgt die Steigerung um einen Faktor 2, was zu einem 8-PSK oder n-PSK Signal führt, mit welchem  $\log_2(n)$  Bit/Symbol übertragen werden können.

Je mehr zulässige nominale Phasenlagen genutzt werden, umso mehr Information kann pro Zeit übertragen werden, doch umso präziser muss der Empfänger diese Phasenlagen auch wieder detektieren können. Wegen Verzerrungen im Kanal und den darin vorhandenen Störungen und Rauschen kann diese Anzahl nominaler Phasenlagen nicht auf einen beliebig hohen Wert gesteigert werden.

### Differential Binary Phase Shift Keying (DBPSK)



**Abbildung 7.18:** Differential BPSK im Zeitbereich

Differential Binary Phase Shift Keying ist eine Variante von BPSK, welche die Anforderungen an die Synchronisation vereinfacht.

Beim vorgestellten BPSK sind ohne zusätzliche Information Mark und Space kaum oder gar nicht unterscheidbar, speziell auch im allgemeinen Fall, wo das modulierende Nachrichtensignal nicht mit der Trägerperiode synchronisiert ist. Ein Wechsel des Symbolwertes ist zwar für den Empfänger sofort erkennbar, aber es ist unklar, ob das modulierende Signal dabei eine fallende oder steigende Flanke ausgeführt hat, weil sein Vorzeichen mit dem Vorzeichen der aktuellen Phasenlage des Trägersignals in unbekannter Weise verknüpft ist.

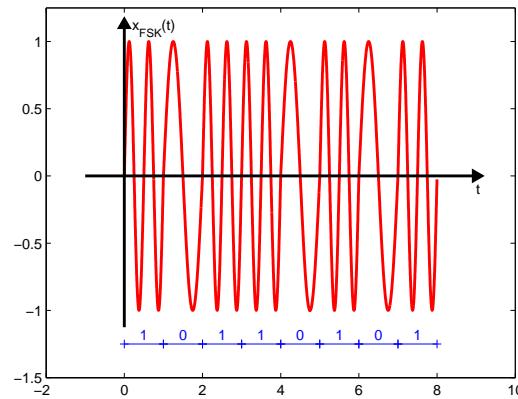
Bei Basisbandübertragung wurde die Schwierigkeit, das Vorzeichen richtig zu erkennen, mit einem NRZ-inverted Code gelöst. Dieser NRZ-inverted Code bildet nun auch das modulierende Signal einer DBPSK-Modulation: beispielsweise soll bei jedem Mark ein Phasenwechsel des BPSK-Signals stattfinden und bei einem Space soll die Phasenlage beibehalten werden.

Ein Nachteil von DBPSK ist, dass ein einzelner Bitfehler sofort einen zweiten Bitfehler nach sich zieht. Auch wenn dies nicht nach einer grossen Einschränkung tönt, erhöhen solche regelmässige Burstfehler und die insgesamt leicht erhöhte Übertragungsfehlerrate die Anforderungen an Fehler erkennende und korrigierende Codes markant.

Ein Anwendungsbeispiel für DBPSK ist das schon früher erwähnte Radio Data System (RDS) Signal bei UKW-Radio.

### 7.5.3 Digitale Frequenzmodulation

#### Frequency Shift Keying (FSK)



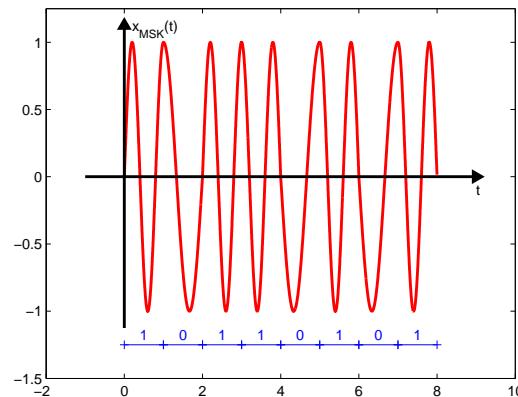
**Abbildung 7.19:** Frequency Shift Keying im Zeitbereich

Bei Frequency Shift Keying wird jedem Symbolwert eine über die Symbolzeit  $T$  konstante Momentanfrequenz des Trägersignals zugewiesen.

Im einfachsten Fall kann FSK durch Umschalten zwischen verschiedenen Oszillatoren erzeugt werden. Allerdings wird solch hartes Umschalten zu beliebigen Phasensprüngen im modulierten Trägersignal führen, was zu einer starken Verbreiterung des Spektrums führt.

Um Bandbreite zu sparen ist es von Vorteil, die Umschaltung zwischen den Momentanfrequenzen mit einem FM-Modulator durchzuführen. Im binären Fall kann dabei das modulierende Signal ein NRZ-Signal sein. Da es bei der Verwendung eines FM-Modulators zu keinen Phasensprüngen kommt, spricht man in diesem Zusammenhang auch von Continuous Phase Frequency Shift Keying (CPFSK), oder ganz allgemein von Continuous Phase Modulation (CPM).

#### Minimum Shift Keying (MSK)



**Abbildung 7.20:** Minimum Shift Keying im Zeitbereich

Bei Minimum Shift Keying handelt es sich um ein binäres Continuous Phase Frequency Shift Keying. Im Vergleich zum nicht-modulierten Trägersignal gewinnt beispielsweise ein Mark während der Symbolzeit  $T$

einen Phasenvorsprung von  $\frac{\pi}{2}$ , während sich ein Space einen ebensolchen Rückstand einhandelt. Dadurch werden die beiden Symbole Mark und Space orthogonal zueinander und können vom Empfänger einfacher, d.h. mit einer tieferen Fehlerrate detektiert werden.

Dank der phasenkontinuierlichen Modulation (CPM) hat MSK ebenfalls eine kleinere Bandbreite als ein hart umgeschaltetes FSK-Signal. Allerdings wird in der vorhergehenden Darstellung die Momentanfrequenz, d.h. die erste zeitliche Ableitung der Phase, immer noch hart umgeschaltet. Um weiter Bandbreite zu sparen, ist es von Vorteil, wenn auch die Momentanfrequenz und höhere Ableitungen der Phase keine Unstetigkeitsstellen aufweisen.

Dies kann zum Beispiel erreicht werden, indem die binären Pulse des modulierenden Signals mit einem Gauss-Filter erzeugt werden. Das daraus entstehende Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK) ist eine Modulationsart, wie sie bei Schnurlostelefonen nach dem DECT-Standard oder beim ersten digitalen Mobilfunk-Standard GSM (2G-Netz) eingesetzt wird bzw. wurde.

## 7.6 Äquivalente Basisbanddarstellung von Bandpasssignalen

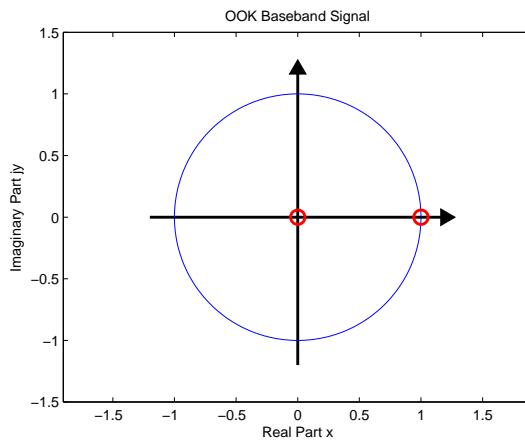
Im Kapitel der analogen Modulationsarten wurde für ein Bandpasssignal  $x_{\text{BP}}(t)$  die äquivalente Darstellung im Basisband  $x_{\text{eq}}(t) = a(t) + j \cdot b(t)$  eingeführt, welche im Allgemeinen ein komplexwertiges Signal ist.

$$x_{\text{BP}}(t) = \Re [x_{\text{eq}}(t) \cdot e^{j\omega_c t}] = a(t) \cos(\omega_c t) - b(t) \sin(\omega_c t)$$

Es zeigt sich, dass diese Darstellung sehr hilfreich ist, um digitale Modulationsarten zu charakterisieren und in einem weiteren Schritt zu analysieren, wann Übertragungsfehler bei einer digitalen Signalübertragung auftreten.

### 7.6.1 Basisbanddarstellung von ASK und PSK

Für binäres oder mehrwertiges Amplitude Shift Keying (ASK) und Phase Shift Keying (PSK) ist die Basisbanddarstellung besonders aufschlussreich, da zum Auswertzeitpunkt im Idealfall nur einzelne diskrete Amplituden- und Phasenwerte vorliegen, welche Punkte in der komplexen Ebene darstellen. Als erstes Beispiel dient Amplitude Shift Keying (ASK), hier konkret das binäre On-Off Keying (OOK):



**Abbildung 7.21:** Basisbanddarstellung eines OOK-Signals

Die Amplitudenwerte des Basisbandsignals betragen entweder  $z_0 = 0 + 0 \cdot i$  oder (in der Länge normiert)  $z_1 = 1 + 0 \cdot i$ . Somit ist das modulierte Signal im zeitlichen Verlauf entweder Null oder schwingt konstant als Cosinussignal.

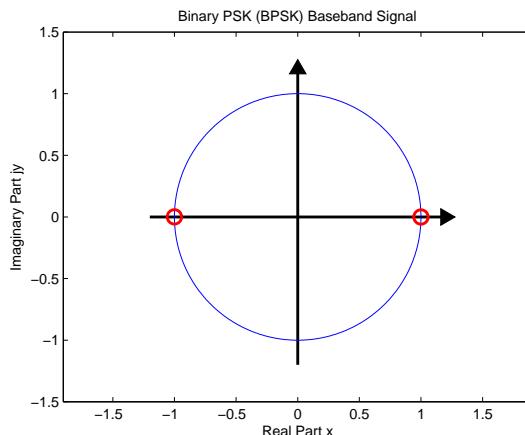
Der Empfänger wird mit einem QAM-Demodulator aus dem Bandpasssignal  $x_{BP}(t)$  das äquivalente Basisbandsignal  $x_{eq}(t)$  zurückgewinnen. Dabei ergeben sich bei der kohärenten Demodulation mit dem Cosinus der Realteil der komplexen Amplitude in Basisbanddarstellung, bei der kohärenten Demodulation mit dem Sinus den negativen Imaginärteil. Aufgabe des OOK-Empfängers ist es nun, zum idealen Auswertzeitpunkt für jedes empfangene Symbol zu entscheiden, welcher der beiden diskreten Amplitudenwerte vorliegt.

Diese Entscheidung wird dadurch erschwert, dass das modulierte Signal verzerrt und verrauscht ist und zudem beim Verschieben in das Basisband ein Frequenz- oder Phasenoffset auftreten kann. Schliesslich führt ein Abweichen der Synchronisationsschaltung vom idealen Entscheidungszeitpunkt meist dazu, dass sich der empfangene Wert im Basisband vom nominalen Punkt in der komplexen Ebene entfernt.

Bis auf das Rauschen (und evtl. andere stochastische Störquellen) handelt es sich bei diesen Beeinträchtigungen um systematische Fehler, welche bei entsprechendem technischen Aufwand meist korrigiert werden können, z.B. mit einem Entzerrer für die Korrektur der Frequenzantwort des Kanals oder mit einem PLL zur Nachführung der Träger-Synchronisation sowie des optimalen Entscheidungszeitpunktes. Grundlage für solche Korrekturen ist die statistisch gemittelte Auswertung des äquivalenten Basisbandsignals.

Je nachdem, wieviel Aufwand für diese einzelnen Korrekturen betrieben wird, kann dies zu unterschiedlichen Entscheidungsgrenzen zwischen den nominalen komplexen Amplitudenpunkten führen. Bei On-Off Keying wird der Detektor vermutlich die Grenze am besten mit einem Kreis mit Radius  $0 < r < 1$  um den Ursprung legen. Liegt der Empfangswert innerhalb des Kreises, d.h. liegen nur kleine Amplituden (z.B. Rauschen oder Übersprechen) vor, wird auf 0 entschieden, liegt er ausserhalb dieses Kreises, auf 1. Eine solche Entscheidung wäre damit unabhängig von der Phaselage des empfangenen komplexen Amplitudenwertes.

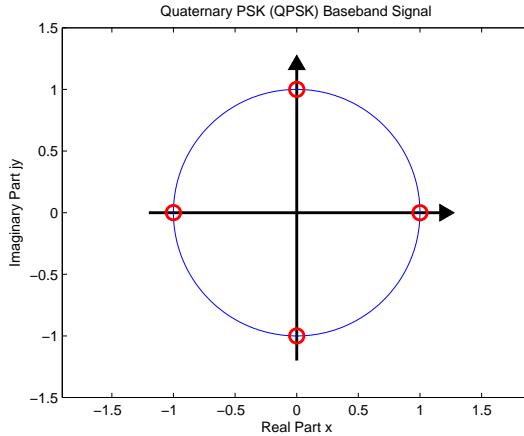
Als zweites Beispiel dient binäres Phase Shift Keying (BPSK).



**Abbildung 7.22:** Basisbanddarstellung eines BPSK-Signals

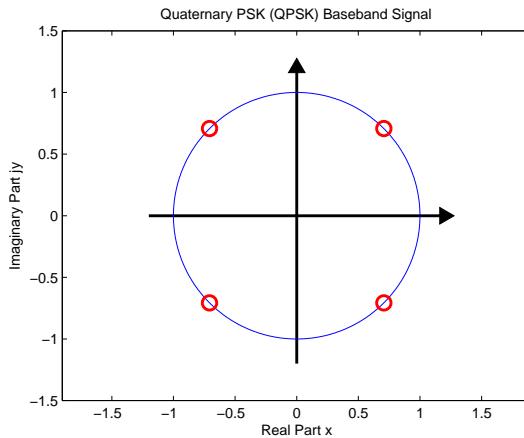
Die einfachste Grenze, für welchen der beiden Phasenwerte sich der Empfänger entscheiden wird, bildet die Ordinate. Sind aber unterschiedliche Auftretenswahrscheinlichkeiten von Mark und Space zu erwarten, kann die optimale Grenze sogar etwas weiter entfernt vom häufigeren und etwas näher beim seltener auftretenden komplexen Amplitudenwert liegen. Die optimale Grenze wird im Zusammenhang mit dem Maximum-Likelihood Detector in Nachrichtentechnik 2 behandelt.

Die Erweiterung von Phase Shift Keying auf ein vierwertiges Signal, Quaternary PSK (QPSK), ist nachfolgend dargestellt.



**Abbildung 7.23:** Basisbanddarstellung eines QPSK-Signals

QPSK erlaubt die Übertragung von 2 Bit pro Symbolzeit. Dabei sind aber die diskreten Punkte im Vergleich zu BPSK deutlich näher zusammengerückt, was sich bei verrauschten Signalen oder bei Synchronisationsabweichungen in einer höheren Bitfehlerrate bemerkbar machen kann. Wird diese sogenannte Konstellation des Basisbandsignals um  $\pi/4$  gedreht, führt dies zu folgender neuen Konstellation, bei welcher je ein Bit für die Amplitude des Realteils und eines für den Imaginärteil zuständig ist. So kann mit einem QAM-Modulator dieses QPSK-Signal, welches in dieser Art oft auch als QAM-4 Signal bezeichnet wird, besonders einfach gebildet werden.



**Abbildung 7.24:** Basisbanddarstellung eines QAM-4 Signals

### 7.6.2 Quadraturamplitudenmodulation QAM

Quadraturamplitudenmodulation (QAM) wurde bisher nur anhand von analogen Signalen vorgestellt. Sehr viel wichtiger ist aber QAM bei digitaler Signalübertragung.

Bei einer digitalen QAM-Modulation erzeugen das Inphase-Signal (welches den Cosinus moduliert) und das Quadratursignal (welches den Sinus moduliert) je ein Amplitude Shift Keying, wobei sowohl positive wie auch negative Amplitudenwerte zugelassen sind. Die Amplituden dieser beiden ASK-Signale werden in gewissen QAM-Konstellationen sogar mit vollkommen unabhängigen Bitwerten gesteuert.

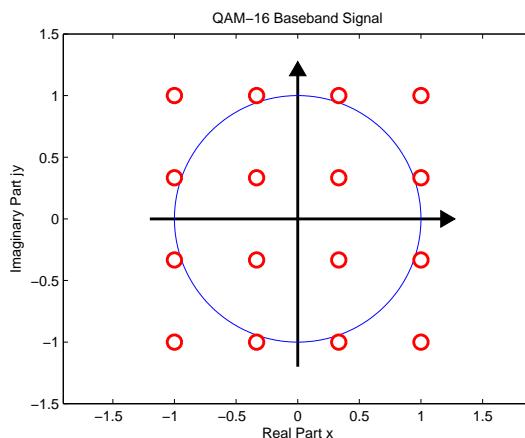
In Basisbanddarstellung entspricht der Amplitudenwert des modulierten Cosinusträgersignals dem Realteil

eines Konstellationspunktes, die Amplitude des Sinusträgersignals dem negativen Imaginärteil. Trotz der zwei Trägersignale bleibt QAM in Basisdarstellung somit sehr übersichtlich und die Umsetzung der komplexwertigen Konstellationspunkte in ein Bandpasssignal ist mit dem QAM-Modulator sofort implementierbar.

Die Konstellationspunkte sind in der komplexen Ebene regelmässig angeordnet, mit dem Ziel, trotz einer zum Teil grossen Anzahl von Punkten die minimale Distanz zwischen zwei nominalen komplexen Amplitudenwerten möglichst gross zu halten. So kann einerseits eine hohe Anzahl von Bit pro Symbolzeit übertragen werden. Andererseits bleibt die Gefahr von Verwechslung zweier Symbolwerte und damit von Bitfehlern relativ klein, auch wenn das Signal durch die Übertragung beim Empfänger etwas verzerrt und ein wenig verrauscht vorliegt.

Durch die verhältnismässig grossen Distanzen zwischen den zahlreichen Konstellationspunkten ist QAM eine sehr effektive digitale Modulationsart, um zuverlässig eine hohe Datenübertragungsrate zu erzielen. Entsprechend wird es in reiner Form (z.B. analoges Telefonmodem, Richtstrahlverbindungen etc.) oder als Teilfunktion bei der Modulation von Subträgern bei OFDM (DAB, DVB, WLAN, ADSL, etc.) in vielen aktuellen Kommunikationssystemen eingesetzt.

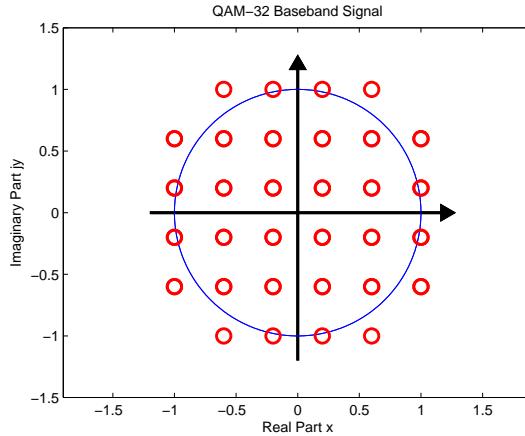
Die nachfolgende Konstellation zeigt QAM-16:



**Abbildung 7.25:** Basisbanddarstellung eines QAM-16 Signals

Je zwei Bit sind für das Inphase-Signal (Realteil welcher den Cosinus moduliert) und das Quadratur-Signal (Imaginärteil, welcher den negativen Sinus moduliert) zuständig.

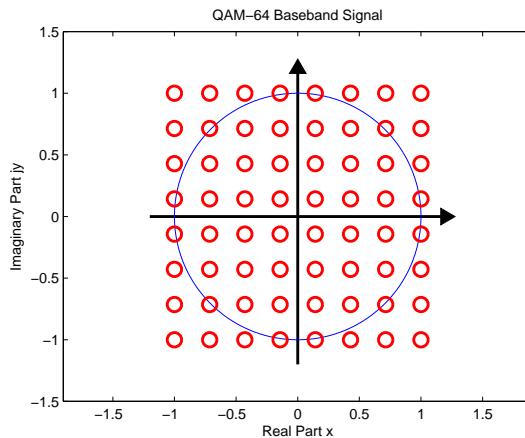
Soll pro Symbolzeit ein weiteres, fünftes Bit übertragen werden, eignet sich folgende QAM-32 Konstellation:



**Abbildung 7.26:** Basisbanddarstellung eines QAM-32 Signals

Die fünf Bit können jetzt nicht mehr separat auf Inphase- und Quadratursignal verteilt werden. Stattdessen müssen die 32 möglichen Bitkombinationen gemeinsam den 32 Konstellationspunkten zugewiesen werden.

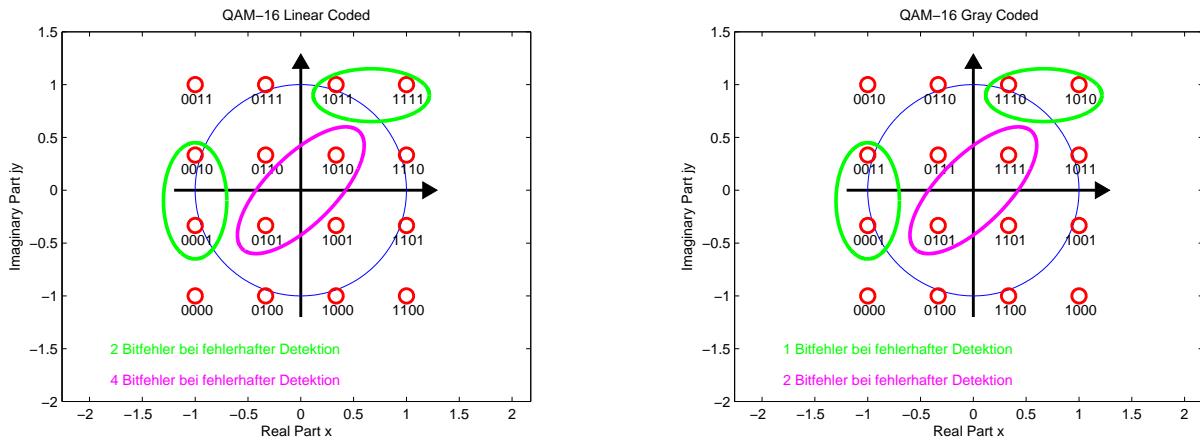
Mit QAM-64 lassen sich 6 Bit übertragen:



**Abbildung 7.27:** Basisbanddarstellung eines QAM-64 Signals

Im Vergleich zu QAM-32 ist der Gewinn an Übertragungsrate schon relativ bescheiden (20% von 5 auf 6 Bit/Symbol). Der Abstand zwischen zwei nominalen Konstellationspunkten hat sich bei diesem Schritt aber erneut deutlich verkleinert, wodurch im Vergleich zu QAM-32 die Übertragung störanfälliger sein wird und mit einer höheren Bitfehlerrate zu rechnen ist. Je nach Rauschanteil ist diese Fehlerrate immer noch verschwindend klein und somit noch nicht relevant oder erreicht schon eine Größe, die z.B. QAM-16 oder QAM-32 zur besseren Wahl als QAM-64 machen.

Die Konstellationspunkte bei QAM-Modulation werden jeweils nicht in aufsteigender Weise mit der Amplitude des Inphase- bzw. Quadratursignals durchnummieriert. Stattdessen erfolgt die Zuordnung zu den Bitwerten mit einem Gray-Code:



**Abbildung 7.28:** Bitfehler durch benachbarten QAM-Konstellationspunkt bei linearer und Gray Codierung

Eingezeichnet sind drei mögliche Bitfehler, wie sie mit grosser Wahrscheinlichkeit auftreten können: anstatt dem gesendeten Symbol wird wegen einer kleinen Störung oder aufgrund von Rauschen im Kanal fälschlicherweise ein Nachbarsymbol detektiert. Bei einer linear duchnummierierten Codierung von QAM-16 können bei einer horizontalen oder vertikalen Abweichung bis zu 2, in der Diagonale bis zu vier Bitfehler auftreten. Durch Gray-Codierung werden benachbarte Empfangsfehler auf 1 bzw. diagonal auf 2 Fehler reduziert.

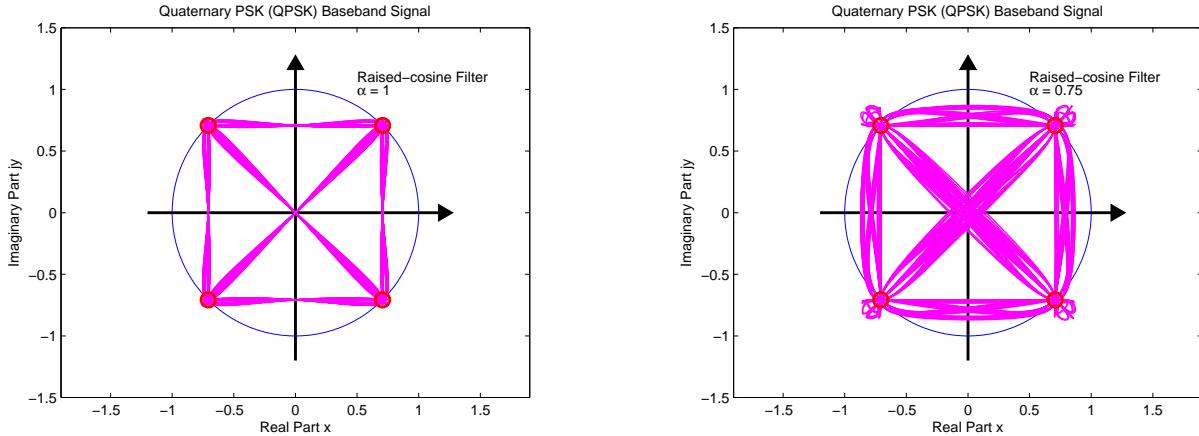
### 7.6.3 Bandbegrenzte digitale Modulation

Bei Amplitude Shift Keying (ASK) oder Quadraturamplitudenmodulation (QAM) wird die Bandbreite des modulierten Signals  $B_{\text{BP}}$  im Übertragungsband im Vergleich zur Bandbreite  $B_{\text{BB}}$  des modulierenden Nachrichtensignals gerade verdoppelt. Eine nachträgliche Bandbegrenzung im Übertragungsband würde nach der Demodulation zu Intersymbolinterferenz (ISI) führen, wie dies schon bei Basisbandübertragung der Fall war.

Um einerseits Bandbreite zu sparen, sollen die digitalen modulierenden Signale anstatt mit einem eckigen Amplitudenverlauf und konstanten Amplituden über die ganze Symbolzeit  $T$  (Zero-Order-Hold) mit einem Pulsformfilter erzeugt werden, welches einen kontinuierlichen und möglichst glatten Amplitudenverlauf aufweist. Um andererseits Intersymbolinterferenz zum Auswertzeitpunkt zu verhindern, müssen solche Pulse beim Empfänger das erste Nyquist-Kriterium erfüllen.

Damit kommen wieder die Raised-Cosine-Filter ins Spiel. Oft wird dieses Pulsformfilter noch auf Sender und Empfänger aufgeteilt, was je ein Root-Raised-Cosine Filter ergibt. Welche Vorteile dies bringt, wird im Zusammenhang mit Matched Filtern in Nachrichtentechnik 2 erläutert.

Für QAM (bzw. QPSK) sind untenstehend die Amplitudenverläufe der modulierenden Raised-Cosine-Pulse im Basisband dargestellt. Im linken Graphen beträgt der Roll-off Faktor  $\alpha = 1$ , im rechten Graphen  $\alpha = 0.75$ .



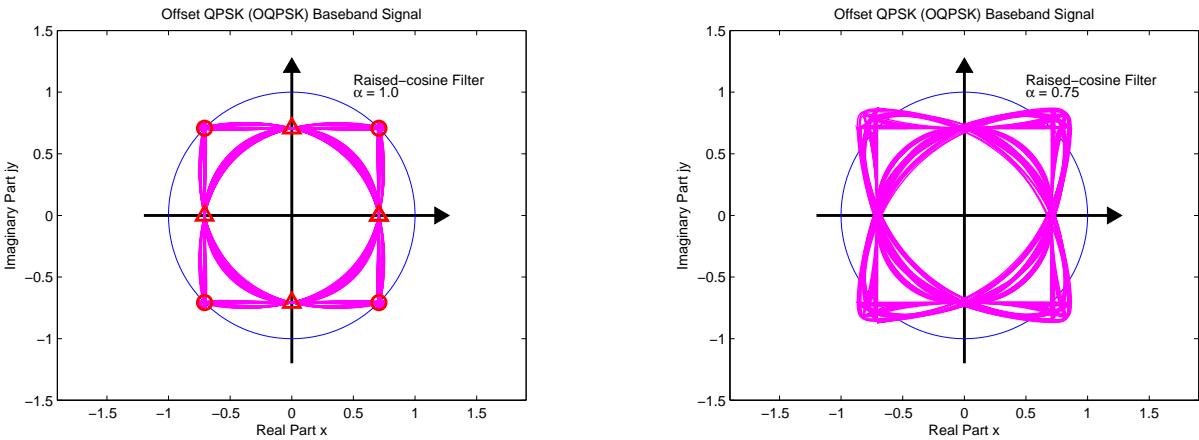
**Abbildung 7.29:** Basisbanddarstellung von QPSK mit bandbegrenztem Spektrum

Nur zum Auswertzeitpunkt ist garantiert, dass sich die nominale komplexe Amplitude gerade auf einem Konstellationspunkt befindet.

### Offset QPSK

Tritt bei QPSK sowohl auf dem Inphasesignal wie dem Quadratursignal ein Bitwechsel auf, ergibt dies einen diagonalen Übergang zwischen den beiden Konstellationspunkten, wobei die komplexe Amplitude durch den Ursprung verläuft und das modulierte Signal zwischenzeitlich kurz verschwinden würde. Dies ist sowohl für den Sender ein Nachteil, welcher hohe Leistungssprünge zu verarbeiten hat, wie auch für den Empfänger, bei welchem zum Beispiel die Synchronisation erschwert wird.

Abhilfe schafft hier ein kleiner Trick, indem die Bitzeiten des Inphase- und Quadratursignals um eine halbe Symbolzeit  $T$  zueinander verschoben werden. Diese Modulationsart ist unter dem Namen Offset-QPSK bekannt. Die Basisbanddarstellung ist für beide Roll-off Faktoren des Raised-Cosine-Filters nochmals dargestellt:



**Abbildung 7.30:** Basisbanddarstellung von Offset-QPSK mit bandbegrenztem Spektrum

Ausgewertet wird das Signal mit doppelter Symbolrate, aber jeweils nur abwechselnd je einmal pro Symbolzeit für das Inphase, bzw. Quadratursignal. Als Konstellationspunkte treten neben den bisherigen, mit roten Kreisen markierten Punkten zusätzlich auch noch die mit roten Dreiecken markierten Übergangspunkte auf.

# Kapitel 8

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen

### 8.1 Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Nachrichtentechnik

Dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Nachrichtentechnik eine ganz zentrale Bedeutung besitzt, mag auf den ersten Blick vielleicht etwas erstaunen. Aus Sicht des Ingenieurs ist Ziel einer jeden technischen oder nicht-technischen Kommunikation, eine Information des Senders frei von Zufälligkeiten und Missverständnissen einem oder mehreren Adressaten zukommen zu lassen.

Dieser Vorstellung von idealer Kommunikation steht aber die Realität gegenüber, wo der Empfang der informationstragenden Signale von Störungen derart beeinträchtigt werden kann, dass Fehler bei der Auswertung der Nachricht unvermeidbar sind.

Solche Übertragungsfehler können durch diese Störsignale überhaupt erst verursacht werden, weil auch die übertragene Information einen zufälligen Charakter hat und damit der Verlauf des Nachrichtensignals stochastisch ist. Wüsste nämlich der Empfänger zu jedem Zeitpunkt, welche Information als nächstes gerade ansteht, könnte er unabhängig von der Empfangsqualität den richtigen Informationsfluss immer perfekt nachbilden.

Aus technischer Sicht macht aber eine Kommunikation erst dann wirklich Sinn, wenn der Empfänger eben gerade nicht diese exakte Vorkenntnis über den eintreffenden Informationsfluss besitzt. Andernfalls könnte man ja auf die Übertragung des Nachrichtensignals gleich ganz verzichten, da der Empfänger sowieso schon alles weiß.

Kommunikation beinhaltet aus technischer Sicht somit immer einen gewissen Grad an zufälligem Charakter, sowohl in Bezug auf das Nutzsignal, wie auch auf allfällige Störungen. Je mehr Information pro Zeit in ein Nachrichtensignal gepackt wird, umso zufälliger wird auch sein Verlauf sein und schon kleinste Variationen im Signalverlauf werden einen leicht unterschiedlichen Informationsgehalt der Nachricht repräsentieren.

Mit dieser Überlegung wird zugleich ein Grundprinzip der Informationstheorie veranschaulicht: will man die Übertragungsrate eines Kommunikationssystems signifikant erhöhen, stösst man früher oder später an eine Grenze, wo sich auch das Risiko für einzelne Übertragungsfehler markant vergrößert.

Die Zufälligkeit erschwert es auch, die Charakteristik eines Kommunikationssystems zu bestimmen. Die unendlich grosse Anzahl unterschiedlicher Informationsfolgen und Signalformen erlaubt es nicht, für jedes einzelne Signal die Übertragung über ein Kommunikationssystem zu berechnen oder auszumessen. Trotzdem wünscht man sich eine Charakterisierung der beteiligten Signale und Systeme, beispielsweise wie die spektrale Zusammensetzung eines Manchester-codierten digitalen Ausgangssignals ist, und zwar unabhängig davon, welche konkreten Bitfolgen gerade gesendet werden. Eine solche zusammenfassende Beschreibung kann nur auf statistische Art und Weise erfolgen.

Weiter möchte man dank einer Charakterisierung der Störsignale statistische Aussagen darüber machen können, wie gut die Qualität des empfangenen analogen Nachrichtensignals sein wird, beziehungsweise wie hoch die Bitfehlerrate bei digitalen Signalen ausfallen wird. Solche Berechnungen helfen, ein Kommunikationssystem korrekt zu planen und zu implementieren. Verbessernde Massnahmen können rechtzeitig getroffen

werden, indem z.B. die Sendeleistung erhöht wird, die Datenrate gesenkt wird oder mächtigere fehlerkorrigierende Codes eingesetzt werden.

Schliesslich findet bei vielen Kommunikationssystemen ein stochastischer Zugriff von verschiedenen Teilnehmern auf begrenzte Ressourcen statt. Dies war schon beim analogen Telefonnetz der Fall, welches in Bezug auf die Anzahl Verbindungen so dimensioniert wurde, dass zwar nicht sämtliche Teilnehmer gleichzeitig telefonieren konnten, aus statistischer Sicht aber trotzdem eine Netzüberlastung praktisch ausgeschlossen werden konnte. Ähnliche ressourcenbegrenzte Zugriffe ergeben sich bei digitaler Kommunikation, z.B. immer dann, wenn ein physikalischer Übertragungskanal im Zeitmultiplex mehrfach genutzt wird, oder auch, wenn mehrere Informationsströme durch eine begrenzte maximale IP-Paketraten von Routern oder einen maximal möglichen Datendurchsatz von Kommunikationsschnittstellen beschränkt werden.

Auch für die Analyse solcher Zugriffsverfahren ist der Einsatz von Wahrscheinlichkeitsrechnung unumgänglich, wobei dieses letzte Thema im Rahmen der beiden Module Nachrichtentechnik 1 und 2 nicht behandelt wird.

Mit einer kurzen Zusammenfassung in Wahrscheinlichkeitsrechnung soll der Begriff der Zufallsvariablen nochmals aufgegriffen und anschliessend auf den zweidimensionalen Fall erweitert werden. Zweidimensionale Zufallsvariablen bilden die Grundlage für den im folgenden Kapitel behandelten Zufallsprozess, mit welchem das Leistungsdichespektrum von stochastischen Signalen statistisch beschrieben werden kann.

## 8.2 Zufallsexperiment

Ein Experiment ist ein Beobachtungsprozess, bei welchem ein Vorgang ausgelöst oder eine Messung gestartet wird und das Ergebnis anschliessend ausgewertet wird.

Bei einem Zufallsexperiment ist der Ausgang des Experiments unbestimmt, d.h. es kann bei mehreren gleichen oder gleichartigen Durchführungen des Experiments jeweils ein unterschiedliches Ergebnis resultieren.

Klassische Zufallsexperimente, ergänzt mit Beispielen aus nachrichtentechnischer Sicht, sind nachfolgend aufgeführt:

- Münzwurf.
- Würfeln.
- Fussballspiel.
- Empfang eines einzelnen Symbols innerhalb eines digitalen Datenstroms.
- Anzahl der zu verarbeitenden IP-Pakete bei einem Router.
- Amplitude einer Rauschspannung.

Um die verschiedenen denkbaren Ergebnisse zu kategorisieren und mit ihnen anschliessend statistische Aussagen zu machen, soll als erstes ein Modell des Zufallsexperiments erstellt werden. Als wohl wichtigste Eigenheit dieses Modells muss dabei festgelegt werden, welche relevanten und sich gegenseitig ausschliessenden Ergebnisse bei einem Zufallsexperiment überhaupt vorkommen können.

Diese so identifizierten Ergebnisse  $\lambda_i$  bilden zusammen eine Menge, den sogenannten Ergebnisraum  $S$ .

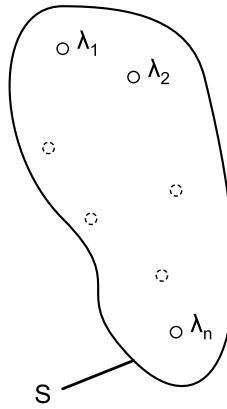


Abbildung 8.1: Ergebnisraum eines Zufallsexperiments

Die Definition des Ergebnisraums ist ein Teil des Wahrscheinlichkeitsmodells, also einer mathematischen Abstraktion, welche sich von der Wirklichkeit unterscheiden kann. So scheint es naheliegend, dass beim Münzwurf die Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ einen Teil des Ergebnisraums  $S$  bilden, während der Vorfall „Münze unter dem Tisch verloren“ nicht zu  $S$  gehören wird.

Denkbare Ergebnisräume können eine endliche, abzählbar unendliche oder nicht-abzählbar unendliche Anzahl von verschiedenen Ergebnissen aufweisen, wie nachfolgende Beispiele zeigen:

Experiment	Grösse des Ergebnisraums	Ergebnisse
Münzwurf	endlich	$S = \{\text{„Kopf“, „Zahl“}\}$
Würfeln	endlich	$S = \{\text{„1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“}\}$
Fussballspiel	abzählbar unendlich	$S = \{\text{„0:0“, „1:0“, „0:1“, „2:0“, „1:1“, „0:2“, „3:0“, ...}\}$
Empfang eines Bits	endlich	$S = \{\text{„1“, „0“}\}$
Rauschamplitude	nicht-abzählbar unendlich	$S = \{\dots, -1.00 \text{ V}, \dots, 0.00 \text{ V}, \dots, 0.01 \text{ V}, \dots, 1.00 \text{ V}, \dots\}$

Tabelle 8.1: Ergebnisräume mit unterschiedlicher Anzahl Ergebnissen

In jedem definierten Ergebnisraum  $S$  können nun beliebige Teilmengen  $A, B, C, D \dots$  gebildet werden. Diese Teilmengen bilden die Ereignisse des Zufallsexperiments.

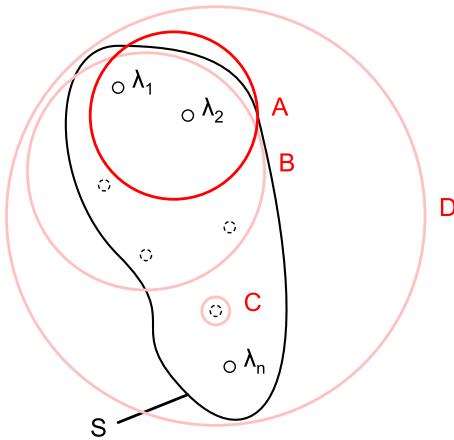


Abbildung 8.2: Ereignisse als Teilmengen des Ergebnisraums

Gehört das Ergebnis  $\lambda_i$  eines Experiments beispielsweise der Teilmenge  $A$  an, spricht man davon, dass das Ereignis  $A$  eingetroffen ist. Pro Ergebnis  $\lambda_i$  können mehrere Ereignisse auftreten, nämlich all jene, in welchen  $\lambda_i$  als Element dieser Teilmengen enthalten ist.

In folgender Tabelle sind einige ausgesuchte Beispiele für Ereignisse:

Experiment	Ereignis	Teilmenge von $S$
Münzwurf	Ereignis „Kopf“	$A = \{\text{Kopf}\}$
Würfeln	Ereignis „gerade Augenzahl“	$A = \{\text{,,2``}, \text{,,4``}, \text{,,6``}\}$
Fussballspiel	Ereignis „unentschieden“	$A = \{\text{,,0:0``}, \text{,,1:1``}, \text{,,2:2``}, \text{,,3:3``}, \dots\}$
Empfang eines Bits	Ereignis „Mark“	$A = \{\text{,,1``}\}$
Rauschamplitude	Ereignis $, U  \leq 0.1 \text{ V}$ “	$A = \{-0.1 \text{ V}, \dots, 0.00 \text{ V}, \dots, 0.1 \text{ V}\}$

**Tabelle 8.2:** Beispiele von Ereignissen verschiedener Zufallsexperimente

Besteht ein Ereignis  $A$  (mit  $A \subset S$ ) aus einem einzigen Ergebnis  $\lambda$ , spricht man von einem Elementarereignis. Ausgesuchte Beispiele dafür sind:

Experiment	Elementarereignis	Teilmenge von $S$
Münzwurf	Elementarereignis „Kopf“	$A = \{\text{,,Kopf``}\}$
Würfeln	Elementarereignis „Augenzahl 5“	$A = \{\text{,,5``}\}$
Fussballspiel	Elementarereignis „torlos“	$A = \{\text{,,0:0``}\}$
Empfang eines Bits	Elementarereignis „Mark“	$A = \{\text{,,1``}\}$
Rauschamplitude	Elementarereignis „ $U = 0.1 \text{ V}$ “	$A = \{0.1 \text{ V}\}$

**Tabelle 8.3:** Beispiele von Elementarereignissen verschiedener Zufallsexperimente

Bei der Menge aller Ereignisse, d.h. der Menge aller möglichen Teilmengen  $A \subset S$ , handelt es sich um den sogenannten Ereignisraum oder das Ereignisfeld  $\Sigma$  von  $S$ . Das sichere Ereignis  $S$  und das unmögliche Ereignis  $\emptyset = \{\}$  gehören per Definition immer zum Ereignisraum  $\Sigma$ .

Selbst bei einer endlichen Anzahl  $n$  von Ergebnissen wird das Ereignisfeld  $\Sigma$  sehr gross und umfasst eine Anzahl von  $2^n$  Teilmengen  $A_i \subset S$ . Beim Münzwurf bleibt das Ereignisfeld  $\Sigma$  mit vier Teilmengen  $A_i$  noch überschaubar, weshalb dieser als Beispiel herhalten soll:

$$\Sigma = \{\emptyset, \{\text{Kopf}\}, \{\text{Zahl}\}, \{\text{Kopf, Zahl}\}\}$$

Die Ereignisse können jetzt nach bekannter Art der Mengenlehre zusätzlich verrechnet werden. Die wichtigsten Begriffe und Formeln sind nachfolgend aufgeführt:

Komplementäres Ereignis von $A$ :	$\bar{A} = S/A$
Vereinigung von $A$ und $B$ :	$C = A \cup B$
Durchschnitt von $A$ und $B$ :	$C = A \cap B$
Sicheres Ereignis:	$C = S$
Unmögliches Ereignis:	$C = \emptyset$
Ereignisse $A$ und $B$ sind disjunkt, falls gilt:	$A \cap B = \emptyset$

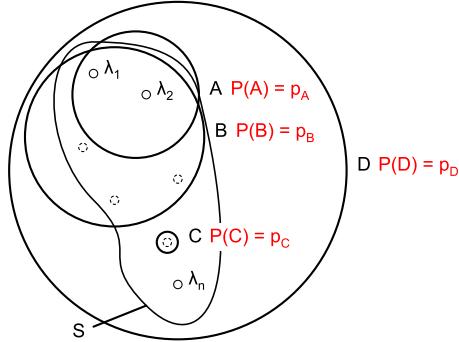
**Tabelle 8.4:** Verknüpfungen von Ereignissen

Ein paar einfache, spezielle Verknüpfungen sind nachfolgend noch festgehalten:

$$\begin{array}{ll} \bar{S} = \emptyset & \bar{\emptyset} = S \\ S \cup A = S & S \cap A = A \\ A \cup \bar{A} = S & A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \bar{\bar{A}} = A \end{array}$$

### 8.3 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Bei der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen handelt es sich um eine Funktion  $P(A)$ , welche jedem Ereignis  $A \subset S$  eine reelle Zahl zuweist.



**Abbildung 8.3:** Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Dabei sollen die Axiome von Kolmogorow eingehalten werden, welche in einfachster Form lauten:

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(S) = 1$
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  falls  $A$  und  $B$  disjunkt sind.

Aus diesen drei Axiomen von Kolmogorow lassen sich sofort weitere Eigenschaften ableiten:

- Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses  $P(\bar{A})$ :  
Es gilt:  $\bar{A} \cap A = \emptyset, \quad \bar{A} \cup A = S$   
Sowie per Axiom 2:  $P(S) = 1$   
Mit Axiom 3 folgt:  $P(S) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$   
Und somit:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses  $P(\emptyset)$ :  
Es gilt:  $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$   
Mit Axiom 3 folgt:  $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$   
Und somit:  $P(\emptyset) = 0$
- Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  einer Teilmenge  $B \subset A$  des Ereignisses  $A$ :  
Es gilt:  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}), \quad (A \cap B) = B$   
Mit Axiom 1 folgt:  $P(A \cap \bar{B}) \geq 0$   
Und somit:  $P(B) \leq P(A)$
- Obere Grenze für Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $P(A)$ :  
Es gilt:  $A \subset S$   
Mit vorhergehender Regel folgt:  $P(A) \leq P(S)$   
Und somit mit Axiom 2:  $P(A) \leq 1$
- Wahrscheinlichkeit der Vereinigung  $P(A \cup B)$  zweier nicht-disjunkter Ereignisse  $A$  und  $B$ :  
Es gilt:  $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B), \quad$  wobei  $A$  und  $\bar{A} \cap B$  disjunkt sind.  
Mit Axiom 3 folgt:  $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$   
Weiter gilt:  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B), \quad$  wobei  $A \cap B$  und  $\bar{A} \cap B$  disjunkt sind.  
Mit Axiom 3 folgt:  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B), \quad$  d.h.  $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ .  
Einsetzen in Zeile 2:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Zusammengefasst ergibt sich aus den drei Axiomen und den soeben abgeleiteten Eigenschaften folgender Regelsatz für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{8.1}$$

$$P(S) = 1 \quad (8.2)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (8.3)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (8.4)$$

$$P(B) \leq P(A) \quad \text{für } B \subset A \quad (8.5)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{für disjunkte } A \text{ und } B \quad (8.6)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (8.7)$$

Der axiomatische Ansatz des Wahrscheinlichkeitsmaßes nach Kolmogorow definiert noch nicht, welche Zahlenwerte die Wahrscheinlichkeit  $P(A_i)$  den Ereignissen  $A_i$  zuweisen soll. So ist beispielsweise beim Münzwurf eine Zuweisung von  $P(„Kopf“) = 0.9$  und  $P(„Zahl“) = 0.1$  formal absolut korrekt.

In der Praxis wird aber die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  mit der relativen Auftretenshäufigkeit von  $A$  in einem Zufallsexperiment gleichgesetzt. Ist  $n_A$  die Anzahl eingetretene Ereignisse  $A$ , wenn das Experiment  $n$  Mal ausgeführt wurde, ergibt sich daraus folgenden Praxisbezug für die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (8.8)$$

Bei diesem Praxisbezug wird davon ausgegangen, dass die relative Häufigkeit beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  auf einen Zahlenwert hin konvergiert, was theoretisch nicht zwingend der Fall sein muss, beispielsweise, wenn sich im Verlauf der zahlreichen Durchführungen des Experiments die Rahmenbedingungen für die Auftretenshäufigkeit eines Ereignisses ändern.

Bei einem üblichen, idealisierten Münzwurf ergibt sich folgende Zuordnung:  $P(„Kopf“) = P(„Zahl“) = 0.5$ .

### 8.3.1 Laplace-Experiment

Bei einem Laplace-Experiment handelt es sich um ein Zufallsexperiment mit einer endlichen Anzahl Elementarereignissen, welche alle gleich wahrscheinlich auftreten.

Der Ergebnisraum besteht somit aus folgenden  $n$  Ergebnissen  $\lambda$ :

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n\}$$

Und die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse  $\{\lambda_i\}$  beträgt bei einem Laplace-Experiment:

$$P(\{\lambda_i\}) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n \quad (8.9)$$

Beispiele für Laplace-Experimente sind der ideale Münzwurf mit  $P(„Kopf“) = P(„Zahl“) = \frac{1}{2}$  oder ideales Würfeln, bei welchem die verschiedenen Augenzahlen je mit der Wahrscheinlichkeit  $P(\{\lambda_i\}) = \frac{1}{6}$  auftreten.

### 8.3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(B | A)$  drückt aus, wie gross die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  des Ereignisses  $B$  ist, unter der Voraussetzung, dass gleichzeitig auch Ereignis  $A$  eingetroffen ist. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B$  unter der Bedingung von  $A$  berechnet sich wie folgt:

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (8.10)$$

Gleichermassen kann auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$  unter der Bedingung, dass  $B$  eingetroffen ist, ausgedrückt werden:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Durch Umformen der Gleichung (8.10) ergibt sich sofort folgende Formel zur Berechnung der Schnittwahrscheinlichkeit oder Verbundwahrscheinlichkeit (Englisch: joint probability)  $P(A \cap B)$  zweier Ereignisse  $A$  und  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = P(A | B) \cdot P(B) \quad (8.11)$$

Anzumerken ist, dass die Ereignisse  $A$  und  $B$  und somit auch deren Durchschnitt  $A \cap B$  sehr selten sein können und dadurch mit kleiner Wahrscheinlichkeit  $P(.)$  auftreten, die bedingte Wahrscheinlichkeit aber trotzdem sehr hoch (aber natürlich nie über 100%) sein kann. So sind beispielsweise rote Autos heute wohl nur im einstelligen Prozentbereich (Ereignis  $A$ ) auf unseren Strassen anzutreffen. Die Wahrscheinlichkeit dass ein Ferrari vorbeifährt (Ereignis  $B$ ), ist noch deutlich seltener. Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A | B)$ , dass ein vorbeifahrender Ferrari rot ist, dürfte aber vermutlich weit über 50% betragen.

### A-priori und a-posteriori Wahrscheinlichkeiten

Bei vielen Zufallsexperimenten liegen Naturgesetze zugrunde oder man versucht mit technischen Mitteln eine gewisse Verteilung der Wahrscheinlichkeiten zu erzwingen. Einige Beispiele sollen dies illustrieren:

- Vorzeichen des Rauschsignals bei thermischem Rauschen:  $P(,,+“) = P(,,-“) = 0.5$
- Münzwurf:  $P(,,Kopf“) = P(,,Zahl“) = 0.5$
- Würfeln:  $P(,,1“) = P(,,2“) = P(,,3“) = P(,,4“) = P(,,5“) = P(,,6“) = \frac{1}{6}$
- Bitstrom, mit durch 8b/10b-Codierung erzwungener DC-Freiheit:  $P(,,Mark“) = P(,,Space“) = 0.5$

Ohne je überhaupt ein Zufallsexperiment durchzuführen, stehen diese Wahrscheinlichkeiten im Voraus schon fest, weshalb von einer A-priori-Wahrscheinlichkeit gesprochen wird.

In anderen Fällen wird die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen aus vorangegangenen Zufallsexperimenten ermittelt oder durch Beobachten von anderen Ereignissen (wie zum Beispiel Messgrößen) abgeschätzt:

- Sportwetten: Wahrscheinlichkeit eines nächsten Heimsiegs des FC Basel in der heimischen Liga.
- Wetter: Regenwahrscheinlichkeit aufgrund von Luftdruck-, Luftfeuchtigkeit- und Windmessungen.
- Medizin: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten gewisser Krankheiten bei bestimmten Risikofaktoren.
- Wahrscheinlichkeiten eines gesendeten Marks wenn der Empfänger ein Mark bzw. ein Space detektiert.
- Wahrscheinlichkeit, dass ein empfangener Amplitudenwert einem gesendeten Mark entspricht.

Wird durch solche zusätzlichen Beobachtungen eine Wahrscheinlichkeit ermittelt, spricht man von einer A-posteriori-Wahrscheinlichkeit.

Oft werden aus diesem Grund generell bedingte Wahrscheinlichkeiten  $P(B | A)$  als A-posteriori-Wahrscheinlichkeit bezeichnet, da das Vorwissen, dass ein anderes Ereignis  $A$  eingetroffen ist, oft eine aussagekräftigere Vorhersage für das Eintreffen des Ereignisses  $B$  erlaubt, als dies mit einer reinen A-priori-Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  möglich ist.

### Statistisch unabhängige Ereignisse

Nicht immer können aufgrund eines eingetretenen Ereignisses  $A$  genauere Rückschlüsse auf die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $B$  gezogen werden. So ist die Farbe des Autos vielleicht abhängig von der Automarke, aber vermutlich nicht von der Blutgruppe des Autofahrers. Sinnvollere Beispiele könnten lauten:

- Die Augenzahl des einen Würfels ist unabhängig von der Augenzahl des zweiten geworfenen Würfels.
- Die Amplitude des Rauschsignals auf dem Q-Anteil ist unabhängig vom aktuellen I-Anteil.
- Der Bitwert auf dem Q-Anteil ist bei QAM-4 unabhängig vom Bitwert auf dem I-Anteil.
- Die Amplitude des Quantisierungsrauschens ist unabhängig von der Amplitude des Musiksignals.

Mathematisch spricht man von *statistisch unabhängigen Ereignissen A und B*, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$P(B | A) = P(B) \quad \text{sowie} \quad P(A | B) = P(A) \quad (8.12)$$

Sofort folgt dann mit Gleichung (8.11) für statistisch unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (8.13)$$

### Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit kann die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  eines Ereignisses  $B$  bestimmt werden, wenn alle bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(B | A_i)$  unter der Bedingung der  $n$  Ereignisse  $A_i$  sowie die A-priori-Wahrscheinlichkeit  $P(A_i)$  dieser Ereignisse bekannt sind.

Damit keine Anteile von  $P(B)$  unberücksichtigt bleiben, muss die Vereinigung sämtlicher  $n$  Ereignisse  $A_i$  den gesamten Ergebnisraum  $S$  umfassen, d.h.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$ .

Damit keine Anteile von  $P(B)$  mehrfach gezählt werden, müssen die Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  unvereinbar sein, d.h. der Durchschnitt der Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  muss jeweils eine leere Menge sein:  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

Sind beide Bedingungen erfüllt, wird die Menge der Ereignisse  $A_i$  eine paarweise unvereinbare und vollständig abgeschlossene Ereignismenge  $M$  genannt. Diese Ereignismenge  $M$  ist eine Teilmenge des gesamten Ereignisfeldes  $\Sigma$ .

Liegt eine solche vollständig abgeschlossene Ereignismenge  $M = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$  mit paarweise unvereinbaren Ereignissen  $A_i$  vor, sind für ein beliebiges weiteres Ereignis  $B$  auch die Durchschnitte  $B \cap A_i$  paarweise unvereinbar und es gilt:

$$B = \bigcup_{i=1}^n B \cap A_i$$

Somit kann nun die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  des Ereignisses  $B$  wie folgt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i) \quad (8.14)$$

Als einfaches Beispiel sei der Anteil der verkauften roten Personenwagen von allen Fahrzeugherstellern bekannt  $P(B | A_i)$ , ebenso wie der Marktanteil dieser Automarken  $P(A_i)$ . Daraus kann die Wahrscheinlichkeit, dass als nächstes ein rotes Auto vorbeifährt  $P(B)$  mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit bestimmt werden.

Im folgenden einfach gehaltenen nachrichtentechnischen Beispiel sei ein AMI-Linecode gegeben, bei welchem der Empfänger die drei Amplitudenwerte „+A“, „0“ und „-A“ unterscheidet. Bei gleichen Anteilen von Mark und Space sind die Auftretenswahrscheinlichkeiten  $P(+A) = P(-A) = 0.25$  und  $P(0) = 0.5$ . Beim Empfang treten Fehler (Ereignis  $E$ ) auf, mit einer hier fiktiv gewählten Fehlerrate von  $P(E | +A) = 0.001$ ,  $P(E | -A) = 0.002$  und  $P(E | 0) = 0.003$ . Daraus berechnet sich die totale Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | +A) \cdot P(+A) + P(E | -A) \cdot P(-A) + P(E | 0) \cdot P(0) \\ &= 0.25 \cdot 0.001 + 0.25 \cdot 0.002 + 0.5 \cdot 0.003 \\ &= 0.00225 \end{aligned}$$

### Satz von Bayes

Der Satz von Bayes ist hilfreich zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(A_i | B)$ , wenn die Wahrscheinlichkeiten  $P(B | A_i)$  und die A-priori-Wahrscheinlichkeiten  $P(B)$  und  $P(A_i)$  bekannt sind. Im einfachsten Fall von zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  ergibt sich der Satz von Bayes direkt durch Umformen der Gleichung (8.11):

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (8.15)$$

Im Falle von  $n$  paarweise unvereinbaren und vollständig abgeschlossenen Ereignissen  $A_i$  kann die Formel von Bayes noch allgemeiner gefasst werden, wobei  $P(B)$  im Nenner der Formel (8.15) mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird.

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) \cdot P(A_j)} \quad (8.16)$$

Im Beispiel mit den Farben der Personenwagen erlaubt diese Formel zu berechnen, wie gross die Wahrscheinlichkeit  $P(A_i | B)$  ist, dass es sich bei einem sich nähernden roten Auto um einen Ferrari handelt, wenn wiederum der Anteil der verkauften roten PWs pro Fahrzeughersteller  $P(B | A_i)$ , und der Marktanteil der Automarken  $P(A_i)$  bekannt ist.

## 8.4 Zufallsvariablen

Ausgehend vom Ergebnisraum  $S$  eines Zufallsexperiments wird durch eine Zufallsvariable  $X(\lambda_i)$  jedem Ergebnis  $\lambda_i \in S$  eine Zahl auf der reellen Achse zugewiesen. Der Definitionsbereich (Englisch: domain) ist somit der Ergebnisraum  $S$ , der Wertebereich (Englisch: range) die reelle Zahlenachse.

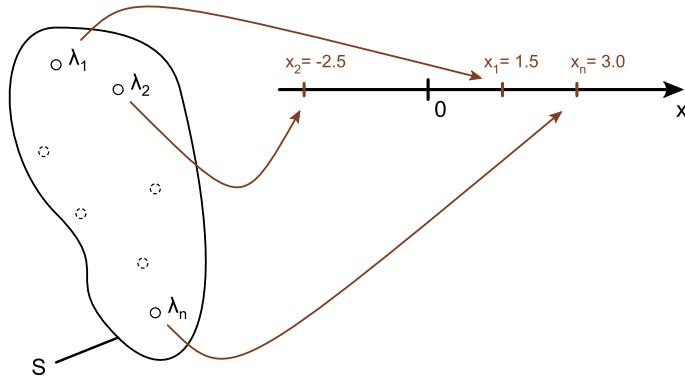


Abbildung 8.4: Zufallsvariable

Der grosse Gewinn durch die Einführung von Zufallsvariablen (Englisch: random variable, RV) besteht darin, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff  $P(\cdot)$ , welcher sich auf Ereignisse (d.h. Teilmengen des Ergebnisraums  $S$ ) bezieht, nun auf Zahlenwerte ausgeweitet werden kann. Dies geschieht mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ , der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x)$  und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$ , welche weiter unten behandelt werden.

Einige Beispiele von Zufallsvariablen  $X(\lambda)$  sind in nachfolgender Tabelle aufgeführt:

Experiment	Zufallsvariable $X(\lambda)$	Zuweisungen
Münzwurf	Willkürliche Definition von $X(\lambda)$	$X(\text{,,Kopf"}) = 1, \quad X(\text{,,Zahl"}) = 0$
Würfeln	Augenzahl $X(\lambda)$	$X(\text{,,1"}) = 1, \quad X(\text{,,2"}) = 2, \quad \dots, \quad X(\text{,,6"}) = 6$
Fussballspiel	Anzahl Tore $X(\lambda)$	$X(\text{,,0:0"}) = 0, \quad X(\text{,,1:0"}) = 1, \quad \dots$
Empfang eines Bits	Bitwert $X(\lambda)$	$X(\text{,,Mark"}) = 1, \quad X(\text{,,Space"}) = 0$
Rauschamplitude	Absolute Amplitude $X(\lambda)$	$X(\text{,,-0.1V"}) = 0.1, \quad \dots, \quad X(\text{,,0V"}) = 0, \quad \dots$

Tabelle 8.5: Beispielhafte Definitionen von Zufallsvariablen

Manchmal ist dabei die Zuweisung durch die Zufallsvariable  $X(\lambda_i) = x_i$  so intuitiv klar, dass diese gar nicht als solche wahrgenommen wird, wie dies bei der Augenzahl beim Würfeln der Fall ist. In anderen Fällen handelt es sich bei  $X(\lambda_i) = x_i$  um willkürliche Definitionen.

Jedem Elementarereignis  $\lambda_i$  wird exakt ein Wert zugewiesen. Andererseits können mehrere Elementarereignisse denselben reellwertigen Wert besitzen, wie dies beispielsweise bei der Anzahl Toren eines Fussballspiels der Fall ist.

#### 8.4.1 Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist diskret (Englisch: discrete RV), wenn der Wertebereich von  $X(\lambda)$  nur aus einer endlichen oder abzählbar-unendlichen Anzahl von Werten besteht.

Bei einer diskreten Zufallsvariablen kann nun die Wahrscheinlichkeit  $P(\cdot)$  auf einzelne Zahlenwerte  $x_k$  angewandt werden. Dabei werden diejenigen Ergebnisse  $\lambda_i$  zu einem Ereignis  $E_k$  zusammengefasst, bei welchen  $X(\lambda_i) = x_k$  ist. Von diesem Ereignis kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P(E_k) = P(X(\lambda_i) = x_k)$$

### 8.4.2 Stetige Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist stetig (Englisch: continuous RV), wenn der Wertebereich von  $X(\lambda)$  beliebige Werte innerhalb eines oder mehrerer (eventuell offener) Intervalle der reellen Achse annehmen kann.

Bei einer stetigen Zufallsvariablen wird die Wahrscheinlichkeit  $P(X(\lambda_i) = x_k)$  im Allgemeinen gleich Null sein, da ein ausgesuchter Wert  $x_k$  nur eines von unendlich vielen möglichen Resultaten von  $X(\lambda_i)$  ist. Damit wird aber in einer Grenzwertbetrachtung dieser einzelne ausgesuchte Wert nur mit einer verschwindend kleinen Wahrscheinlichkeit auftreten, d.h. statistisch gesehen eigentlich überhaupt nie angenommen. Damit gilt aber:

$$P(E_k) = P(X(\lambda_i) = x_k) = 0$$

Bei stetigen Zufallsvariablen kann nun jedoch die Wahrscheinlichkeit  $P(\cdot)$  auf ein ganzes Intervall von Werten um  $x_k$  herum angewandt werden. Dann wird in gewissen Bereichen der reellen Achse die Wahrscheinlichkeit, dass Ergebnisse von  $X(\lambda_i)$  in dieses Intervall fallen, wieder grösser Null sein.

Anstelle von  $\lambda_i$ , welches mit dem Index  $i$  eine abzählbare Anzahl von möglichen Ergebnissen  $\lambda_i$  impliziert, wird bei stetigen Zufallsvariablen oft eine Schreibweise mit der nicht indexierten Variable  $\lambda$  verwendet. Vereinfachend kann das Argument  $\lambda$  auch ganz weggelassen werden, was zu folgender Schreibweise führt:

$$P(X \leq x) = P(X(\lambda) \leq x)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X(\lambda) \leq x_2)$$

### 8.4.3 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  (Englisch: distribution function, cumulative distribution function, CDF) gibt an, welcher statistische Anteil von Ergebnissen der Zufallsvariable  $X(\lambda)$  einen kleineren Wert als  $x$  aufweist.

Die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  ist wie folgt definiert:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{für } -\infty < x < \infty \quad (8.17)$$

Sie besitzt folgende Eigenschaften:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{für } x_1 < x_2$$

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(+\infty) = 1$$

$$F_X(a^+) = F_X(a) \quad \text{wobei } a^+ \text{ für } \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} a + \epsilon \text{ steht}$$

Mit diesen Eigenschaften lassen sich weitere Rechenregeln herleiten:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X < b) = F_X(b^-) \quad \text{wobei } b^- \text{ für } \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} b - \epsilon \text{ steht}$$

#### 8.4.4 Diskrete Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsfunktion

Bei einer diskreten Zufallsvariablen besteht der Wertebereich aus einer endlichen oder abzählbar-unendlichen Anzahl von Werten  $x_i$ . An diesen Stellen  $x_i$  steigt die Verteilungsfunktion  $F_X(x_i)$  stufenweise an und bildet somit eine ansteigende Treppenfunktion mit endlich vielen oder mit abzählbar-unendlich vielen Stufen.

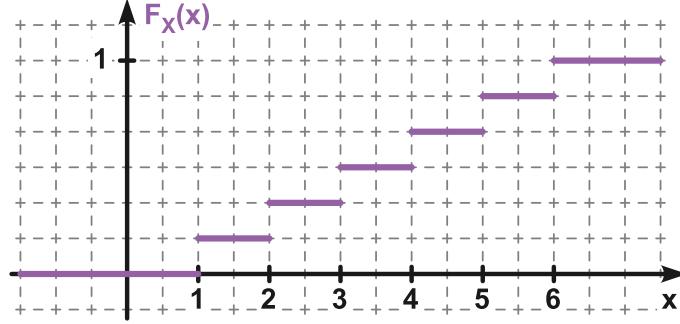


Abbildung 8.5: Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen

Werden nun die Stellen  $x_i$  so durchnummeriert, dass für  $i < j$  jeweils  $x_i < x_j$  gilt, kann folgender Zusammenhang festgehalten werden:

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) = P(X = x_i)$$

Beim letzten Term handelt es sich um die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X(x)$  (auch: Wahrscheinlichkeitsmassefunktion, Englisch: probability mass function, PMF):

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \text{für } -\infty < x < \infty \quad (8.18)$$

Sie besitzt folgende Eigenschaften:

$$0 \leq p_X(x_i) \leq 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$

$$p_X(x) = 0 \quad \text{für } x \neq x_i$$

$$\sum_i p_X(x_i) = 1$$

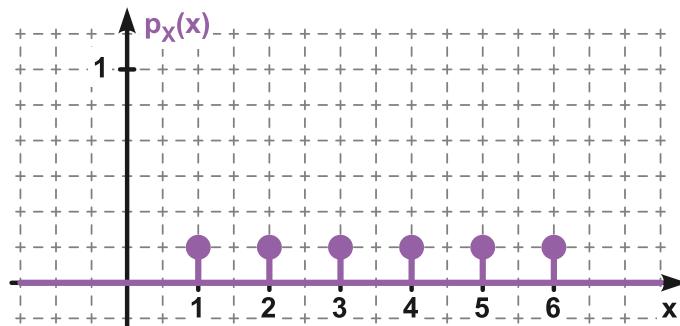


Abbildung 8.6: Wahrscheinlichkeitsmassefunktion einer diskreten Zufallsvariablen

Ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X(x)$  bekannt, kann daraus die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  sehr einfach berechnet werden:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \quad (8.19)$$

### 8.4.5 Stetige Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Eine stetige Zufallsvariable nimmt beliebige Werte innerhalb eines oder mehrerer Intervalle auf der reellen Achse an und ihre Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  ist über die ganze reelle x-Achse hinweg stetig.

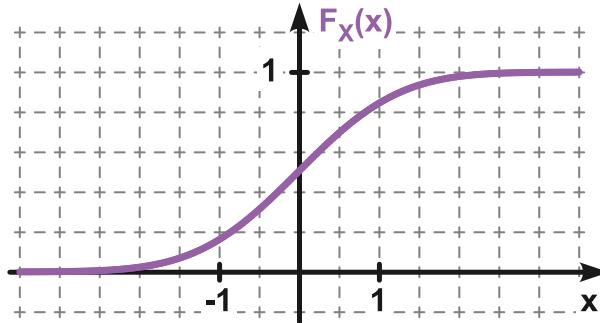


Abbildung 8.7: Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen

Dadurch gilt für die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_X(x)$ :

$$p_X(x) = P(X = x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x) - F_X(x - \varepsilon) = 0$$

Da die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x)$  somit keine Aussagekraft mehr besitzt, wird stattdessen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Englisch: probability density function, PDF)  $f_X(x)$  beigezogen. Sie gibt relativ zu einem kleinen Intervall um  $x$  herum an, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsvariable  $X(\lambda)$  ein Ergebnis besitzt, welches gerade in dieses Intervall fällt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  wird wie folgt definiert:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (8.20)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  besitzt folgende Eigenschaften:

$f_X(x)$  ist stückweise stetig

$f_X(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$P(a < X \leq b) = \int_{a^+}^b f_X(x) dx$$

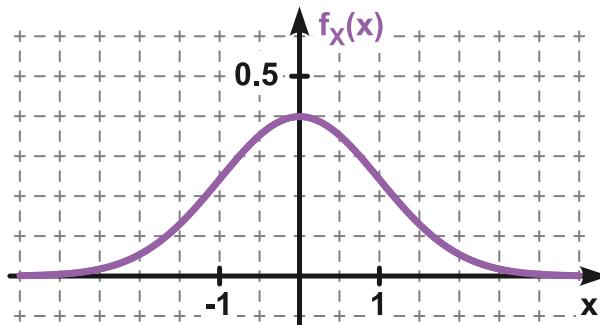


Abbildung 8.8: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  bekannt, kann daraus die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  sehr einfach berechnet werden:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (8.21)$$

### 8.4.6 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von diskreten und gemischten Zufallsvariablen

Eine gemischte Zufallsvariable besitzt sowohl Werte  $x_i$ , welche im Sinne einer diskreten Zufallsvariablen mit einer Wahrscheinlichkeit  $P(X(\lambda) = x_i) > 0$  gehäuft angenommen werden, wie auch Abschnitte, bei welchen im Sinne einer stetigen Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable  $X(\lambda)$  einen ausgesuchten Wert annimmt, gleich Null ist, da in seiner allernächsten Umgebung beliebig viele weitere Ergebnisse hätten angenommen werden können.

Als Beispiel einer gemischten Zufallsvariablen kann ein Limiter genommen werden, welcher kontinuierlich verteilte Spannungswerte eines zufälligen Signals auf einen maximalen Amplitudenwert  $\pm A_{pk}$  hart begrenzt. Würde diese Begrenzung bei beispielsweise je 10% der Amplitudenwerte auftreten, hätte die resultierende Zufallsvariable  $Y(\lambda)$  des amplitudenbegrenzten Rauschens einen diskreten Anteil bei  $-A_{pk}$  mit  $P(Y(\lambda) = -A_{pk}) = 0.1$ , einen stetigen Anteil von  $-A_{pk}$  bis  $+A_{pk}$ , welcher insgesamt 80% der resultierenden Werte von  $Y(\lambda)$  ausmacht, und wiederum einen diskreten Anteil bei  $+A_{pk}$  mit  $P(Y(\lambda) = +A_{pk}) = 0.1$ .

Wie schon erläutert weist die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  bei einer diskreten oder gemischten Zufallsvariablen Sprungstellen auf und zwar bei allen  $x = x_i$ , wo die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x_i) > 0$  ist. An solchen Sprungstellen ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  als Ableitung der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  nicht definiert (da sie einen „unendlich grossen“ Wert hätte).

Mit Hilfe der Dirac'schen Impulsfunktion  $\delta(x)$  kann aber bekanntlich dieses Problem umgangen werden. An den Sprungstellen  $x = x_i$  der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  besitzt somit die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  eine Impulsfunktion  $\delta(x - x_i)$ , welche gerade mit der Sprunghöhe der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  an der Stelle  $x_i$  gewichtet ist.

Als einfaches Beispiel betrachten wir den Wurf eines Würfels mit der Zufallsvariablen  $X(\lambda)$ , welche die Augenzahl des Würfelwurfs wiedergibt. Bei dieser diskreten Zufallsvariablen  $X(\lambda)$  besteht die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  aus einer Treppenstufenfunktion, welche jeweils an den Stellen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 je um einen Sechstel ansteigt. Dadurch ergibt sich eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}$ , welche auf der ganzen x-Achse Null ist außer an ebendiesen Stellen  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  und 6, wo sie einen Wert  $f_X(x_i) = \frac{1}{6}\delta(x - x_i)$  annimmt.

## 8.5 Zweidimensionale und n-dimensionale Zufallsvariablen

### 8.5.1 Verbundverteilungsfunktion

Gegeben ist wiederum ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum  $S$ , welcher sich aus den Ergebnissen (Elementarereignissen)  $\lambda_i$  zusammensetzt. Für diesen Ergebnisraum sollen nun zwei Zufallsvariablen  $X(\lambda_i)$  und  $Y(\lambda_i)$  definiert werden, d.h. jedem Ergebnis  $\lambda_i$  wird je eine Zahl auf der reellen Achse  $x$  und der reellen Achse  $y$  zugewiesen. Das Paar  $(X, Y)$  bildet eine zweidimensionale Zufallsvariable. Für dieses Paar kann nun auch die Verbundverteilungsfunktion (Englisch: joint CDF) bestimmt werden.

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (8.22)$$

Beispiele:

- Jedem abgehenden Telefongespräch wird mit zwei Zufallsvariablen X, Y die Dauer des Gesprächs und die Distanz des Gesprächs zugeordnet. Es kann sich dabei um stetige Zufallsvariablen oder um diskrete

Zufallsvariablen (z.B. für Tarifberechnung: Minuten-Takt sowie nationale / internationale Verbindungen) handeln.

- Bei jeder Schadensmeldung hält die Versicherung Alter des haftenden Fahrers, seine Fahrpraxis in Jahren, die Schadenssumme und viele weitere Daten für Ihre Statistiken fest. Die Schadensmeldung entspricht dann dem Ergebnis  $\lambda_i$  des Zufallsexperiment und die festgehaltenen Daten einer n-dimensionalen Zufallsvariablen.
- Wurf zweier Würfel: Die beiden gewürfelten Zahlen können separat als Zufallsvariablen X und Y aufgefasst werden.
- Empfang zweier Amplitudenwerte, die z.B. den I- und Q-Anteil eines QAM-Signals repräsentieren.

Zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bezeichnet man als *statistisch unabhängig*, falls die Verbundverteilungsfunktion  $F_{XY}(x, y)$  für alle  $x$  und  $y$  die folgende Eigenschaft besitzt:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Beispiele:

- Beim Wurf zweier Würfel sind die beiden Zufallsvariablen, welche den gefallenen Würfeln je eine Augenzahl von 1 bis 6 zuordnen, unabhängig voneinander. So ist beispielsweise  $F_{XY}(1, 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$  und  $F_{XY}(6, 6) = 1 \cdot 1 = 1$ . Verifizieren Sie die Verteilungsfunktion für alle 36 Kombination von Augenzahlen, falls Sie an der statistischen Unabhängigkeit dieser Zufallsvariablen zweifeln.
- Beim Vergleich von Alter  $X$  und Fahrpraxis  $Y$  wird die Altersgruppe von 18 bis 25 Jahren im Vergleich zu anderen Altersgruppen einen überproportionalen Anteil an wenig erfahrenen Fahrern aufweisen. So unterscheidet sich  $F_{XY}(25, 1)$ , d.h. Autofahrer bis 25 Jahre  $F_X(25)$  mit maximal einem Jahr Fahrpraxis  $F_Y(1)$ , von  $F_{XY}(70, 1)$  vermutlich nur wenig, während  $F_X(25)$  (Fahrer bis 25 Jahre) für sich alleine genommen natürlich viel kleiner ist als  $F_X(70)$  (Fahrer bis 70 Jahre). Damit gilt natürlich  $F_{XY}(x, 1) \neq F_X(x) \cdot F_Y(1)$ , d.h. die beiden Zufallsvariablen Alter ( $X$ ) und Fahrpraxis ( $Y$ ) sind statistisch abhängig voneinander.

### 8.5.2 Randverteilungsfunktion

Bei einer n-dimensionalen Zufallsvariablen kann die Verteilung  $F_K(k)$  einer einzelnen dieser n Zufallsvariablen bestimmt werden, indem bei allen anderen Dimensionen sämtliche Werte vom kleinsten bis zum grössten berücksichtigt werden. Dies bedeutet im Falle des Schadensereignisses, dass sämtliche Altersgruppen und Schadenssummen in die Statistik miteinbezogen werden, falls zum Beispiel nur die Fahrpraxis der Unfallverursacher von Interesse wäre.

Im zweidimensionalen Fall kann dies mathematisch sehr einfach beschrieben werden, und zwar für  $X$ :

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$$

Und ebenso für die Zufallsvariable  $Y$ :

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$$

Die aus einer Verbundverteilungsfunktion  $F_{XY}(x, y)$  berechneten eindimensionale Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  bzw.  $F_Y(y)$  wird als Randverteilungsfunktion (Englisch: marginal CDF) bezeichnet.

### 8.5.3 Verbundwahrscheinlichkeitsfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion, welche weiter oben schon für eine eindimensionale Zufallsvariable definiert wurde, existiert natürlich auch im n-dimensionalen Raum als Verbundfunktion für  $n$  diskrete Zufallsvariablen. Zweidimensional lautet die Definition:

$$p_{XY}(x_i, y_k) = P(X=x_i, Y=y_k) \quad (8.23)$$

Oder ausgedrückt mit der zweidimensionalen Verbundverteilungsfunktion:

$$p_{XY}(x_i, y_k) = F_{XY}(x_i, y_k) - F_{XY}(x_{i-1}, y_k) - F_{XY}(x_i, y_{k-1}) + F_{XY}(x_{i-1}, y_{k-1}) \quad (8.24)$$

Auch bei der Verbundwahrscheinlichkeitsfunktion kann vom n-dimensionalen Fall auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer einzelnen Zufallsvariable geschlossen werden, welche als Randwahrscheinlichkeitsfunktion bezeichnet wird:

$$p_X(x) = \sum_{y_k} p_{XY}(x, y_k)$$

Beziehungsweise für die Zufallsvariable Y:

$$p_Y(y) = \sum_{x_i} p_{XY}(x_i, y)$$

Nur wenn zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  *statistisch unabhängig* sind, gilt folgende Eigenschaft:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

#### 8.5.4 Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Handelt es sich bei den  $n$  Zufallsvariablen um stetige Zufallsvariablen, ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion, welche im zweidimensionalen Fall lautet:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (8.25)$$

Entsprechend ergibt sich auch die Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Beziehungsweise für die Zufallsvariable Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Sind  $X$  und  $Y$  *statistisch unabhängig*, gilt wiederum folgende Eigenschaft:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

#### 8.5.5 Anwenden von Funktionen auf Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable  $X$  kann nun mit beliebigen Funktionen  $g(X)$  weiter verrechnet werden. Einfache Beispiele:

- Dem Kunden verrechnete Gebühren für ein Telefongespräch aufgrund der Zufallsvariable  $X$ , welche die Dauer des Gesprächs darstellt.
- Steuerbeträge aufgrund der deklarierten Einkommen  $X$ .

Das Ergebnis,  $Y = g(X)$ , ist wiederum eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion, Wahrscheinlichkeitsmassefunktion und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann nun auch für die neue Zufallsvariable  $Y$  bestimmt werden. Dazu werden einzig Kenntnisse wie Kettenregel oder Variablensubstitution bei Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt, am besten aber gleich im n-dimensionalen Fall mit Mehrfachintegralen und partieller Ableitung.

Der folgende Abschnitt setzt solche Kenntnisse, wie sie zum Beispiel an der HSR im Modul „Funktionen mehrerer Variablen“ unterrichtet werden, voraus und ist damit recht knapp gehalten.

Die Verteilungsfunktion der neuen Zufallsvariablen  $Y = g(X)$  kann mit Hilfe der für  $X$  bekannten Wahrscheinlichkeit berechnet werden.  $D_y$  bezeichnet dabei alle Intervalle von  $X$ , für welche  $g(X) \leq y$  ist. Dann kann man schreiben:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in D_y)$$

Falls  $X$  eine stetige Zufallsvariable ist, dann gilt:

$$F_Y(y) = \int_{D_y} f_X(x) dx$$

Ist die Funktion  $y = g(x)$  bijektiv (d.h. die Zuordnung der Werte  $y$  zu  $x$  eineindeutig), dann existiert eine eindeutige Umkehrfunktion  $x = g^{-1}(y) = h(y)$  und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_Y(y)$  kann dann wie folgt aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  berechnet werden:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot \left| \frac{dh(y)}{dy} \right| = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Beispiel:

- Die Gebühren pro Minute betragen CHF 0.10 / Minute, wobei wir für dieses Beispiel vereinfachend die Gesprächszeit als stetige Zufallsvariable betrachten und die Gebühren rappenspalterisch ebenfalls nicht auf diskrete Stufen reduzieren:

$$\begin{aligned} Y &= g(X) = 0.1 \cdot X \\ X &= g^{-1}(Y) = h(Y) = 10 \cdot Y \\ f_Y(y) &= f_X(10 \cdot y) \cdot \left| \frac{10}{dy} \right| = 10 f_X(10y) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gebühren bei 1 Franken entspricht also dem zehnfachen Wert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gesprächsdauer bei 10 Minuten.

Ist  $y = g(x)$  nicht eineindeutig, muss die Umkehrfunktion in mehrere Abschnitte von  $g(x)$  aufgeteilt werden. Es sollen also  $x_k$  die Lösungen von  $y = g(x)$  sein, d.h.

$$y = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = \dots = g(x_k)$$

Ist an den Stellen  $x_k$  jeweils die Ableitung nach  $x$  berechenbar und  $g'(x_k) \neq 0$ , so gilt:

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|}$$

### 8.5.6 Funktionen von n-dimensionalen Zufallsvariablen

Seien jetzt  $Z = g(X, Y)$  und  $W = h(X, Y)$  zwei Funktionen der Zufallsvariablen X und Y. Beispiele:

- Die beim Carrier entstandenen Kosten  $Z$  (z.B. Roaming-Entschädigung) und die dem Kunden effektiv

verrechneten Gebühren  $W$  eines Telefongesprächs, welches mit den Zufallsvariablen  $X$  für die Dauer des Gesprächs und  $Y$  für die Distanz der beiden Teilnehmer charakterisiert wird.

- Die Verteilung der Treffer auf einer Zielscheibe wird in X- und Y-Richtung vermutlich gaussverteilt sein (Glockenkurve; der Begriff wird später exakt eingeführt). Wir interessieren uns jetzt aber für die Zufallsvariable  $Z$ , welche dem Abstand des Treffers von der Mitte der Scheibe entspricht, und für die Zufallsvariable  $W$ , welche dem Winkel auf der Scheibe entspricht. Intuitiv vermuten wir, dass der Winkel gleichverteilt ist zwischen  $0 < \varphi \leq 2\pi$ , während beim Radius die Wahrscheinlichkeitsdichte bei 0 eher hoch ist und mit zunehmendem Radius abnimmt. Diese Intuition werden wir überprüfen, speziell auch, da dieses Beispiel eine Analogie für einen verrauschten QAM-Konstellationspunkt beim Empfänger ist.

Wie schon beim eindimensionalen Fall bezeichne  $D_{zw}$  jenes Gebiet des Wertebereichs  $R_{XY}$  für welches  $g(x, y) \leq z$  und  $h(x, y) \leq w$  ist. Für den stetigen Fall gilt dann:

$$F_{ZW}(z, w) = \int \int_{D_{zw}} f_{XY}(x, y) dx dy$$

Sind die Funktionen  $g(x, y)$  und  $h(x, y)$  ein-eindeutig, lässt sich die neue Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion wie folgt berechnen:

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{f_{XY}(x, y)}{|\det J(x, y)|}$$

Dabei ist  $|\det J(x, y)|$  der Betrag der Jacobi-Determinante. Diese Determinante lautet im zweidimensionalen Fall:

$$\det J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

- Werden bei den in x- und y-Richtung gaussverteilten Treffern auf die Zielscheibe bzw. beim empfangenen QAM-Konstellationspunkt die kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten umgerechnet, geschieht dies mit folgenden Funktionen:

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi(x, y) = \arg(x, y) \approx \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{vereinfacht, ohne Fallunterscheidung in Bezug auf Quadrant})$$

Die Umkehrfunktionen lauten:

$$x(r, \phi) = r \cos \phi$$

$$y(r, \phi) = r \sin \phi$$

Damit ergibt sich für die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\det J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial r(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial r(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung die Berechnung der 2x2 Determinante:  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Somit:

$$\det J(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

Die zweidimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion der in kartesischen Koordinaten gaussverteilten Treffer lautet:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Dabei wurde vereinfachend angenommen, dass die Abweichungen in x- und y-Richtung identisch sind ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ). Nun kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Treffer auch in Polarkoordinaten hingeschrieben werden:

$$f_{R\Phi}(r, \phi) = \frac{f_{XY}(x, y)}{|\det J(x, y)|} = r \cdot f_{XY}(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für } r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

## 8.6 Statistische Kennwerte

### 8.6.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert  $\mu_X$  oder lineare statistische Mittelwert (Englisch: expectation, mean) gibt den Mittelwert der Zufallsvariable  $X(\lambda)$  wieder, wobei die Werte  $X(\lambda) = x$  mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten  $p_X(x) = P(X = x)$  gewichtet werden. Mit  $E[.]$  wird diese gewichtete Mittelung ausgedrückt. Bei einer diskreten Zufallsvariable lautet somit die Formel für den Erwartungswert:

$$\mu_X = E[X] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i) \quad (8.26)$$

Bei einer stetigen Zufallsvariable lautet die Formel für den Erwartungswert:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (8.27)$$

Wie jeder statistische Kennwert ist auch der Erwartungswert eine Reduktion von vielen statistischen Daten auf eine einzige Zahl. Damit geht bei realen Daten sehr viel Information verloren, wenn man diese Daten nur auf solche Kennwerte beschränkt. Gleichzeitig ist es aber natürlich auch die Stärke von statistischen Kennwerten, dass sie eine Zufallsvariable mit wenigen Zahlenwerten recht treffend beschreiben können.

Der lineare Mittelwert wird allerdings oft gar nicht als Ergebnis der Zufallsvariable  $X(\lambda)$  auftreten. Wenn in einer Fußballliga beispielsweise pro Spiel statistisch 2.8 Tore fallen, darf beim Besuch eines Matches ja nicht erwartet werden, dass man auch exakt diese 2.8 Tore zu sehen bekommt. Selbst dann nicht, wenn Sie regelmäßig Fußballspiele besuchen.

Diese einfache Erkenntnis kann durchaus auch für stetige Zufallsvariablen  $X$  zutreffen. Ein reales unipolares NRZ-Signal, leicht verrauscht, mit zwar endlichen aber sehr schnellen Anstiegszeiten und realisiert mit 3.3V CMOS-Logik wird bei gleich häufigen Mark und Space einen Erwartungswert der Amplitude von ca. 1.65V aufweisen, obwohl dieser Wert in der „verbotenen“ Übergangszone liegt und in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  völlig irrelevant ist.

Eine wichtige Anmerkung soll schon an dieser Stelle erfolgen: die beiden Beispiele verleiten möglicherweise dazu, den Erwartungswert als zeitlichen Mittelwert zu sehen. Diese Sichtweise ist falsch, was speziell bei der Behandlung von Zufallsprozessen offensichtlich wird. Vielmehr entspricht der Erwartungswert einer Mittelung der potentiell möglichen Resultate eines Zufallsexperiments.

Als Beispiel nehme man den Erwartungswert eines Gewinns in Franken bei Swiss Lotto oder Euromillions. Die Wahrscheinlichkeit von hohen Gewinnsummen oder auch der statistische Erwartungswert von mittleren Gewinnen kann recht genau vorhergesagt werden. Ist der Jackpot hoch dotiert, wird generell auch eine hohe Summe ausbezahlt. Falls Sie ein Gelegenheitsspieler sind, werden Sie also nur an der Statistik dieser nächsten

Ziehung interessiert sein und nicht an zeitlichen Mittelwerten, welche auch Ziehungen mit weniger attraktiv gefüllten Jackpots beinhalten.

Wird auf die Zufallsvariable  $X$  die Funktion  $g(X)$  angewandt, so kann auch der neue Erwartungswert  $E[Y]$  der Zufallsvariablen  $Y = g(X)$  berechnet werden:

$$\mu_Y = E[Y] = E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p_X(x_i) \quad \text{bei einer diskreten Zufallsvariablen } X$$

$$\mu_Y = E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx \quad \text{bei einer stetigen Zufallsvariablen } X$$

Und bei einer Funktion  $h(X, Y)$  zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ergibt sich für den Erwartungswert der berechneten Zufallsvariablen  $Z = h(X, Y)$ :

$$\mu_Z = E[h(X, Y)] = \sum_k \sum_i h(x_i, y_k) \cdot p_{XY}(x_i, y_k) \quad \text{bei diskreten Zufallsvariablen } X \text{ und } Y$$

$$\mu_Z = E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy \quad \text{bei stetigen Zufallsvariablen } X \text{ und } Y$$

Beim Erwartungswert handelt es sich im Gegensatz zu anderen statistischen Kennwerten um eine lineare Funktion, das heisst es gilt für die Summe zweier Zufallsvariablen oder die Skalierung mit der Konstanten  $c$ :

$$\mu_Z = E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\mu_Z = E[c \cdot X] = c \cdot E[X]$$

### 8.6.2 Zweites Moment

Das zweite Moment kann als statistische Leistung aufgefasst werden, wobei wiederum nicht eine zeitlich gemittelte Leistung gemeint ist. Bei diskreten Zufallsvariablen lautet die Berechnung:

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 \cdot p_X(x_i) \tag{8.28}$$

Und bei stetigen Zufallsvariablen:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx \tag{8.29}$$

Als Beispiel dient Quantisierungsrauschen bei einem Quantisierungsintervall  $\Delta$ , wo das Fehlersignal im Bereich  $-\frac{\Delta}{2} \leq x_e \leq +\frac{\Delta}{2}$  liegt. Es ist anzunehmen, dass das Fehlersignal  $x_e$  in diesem Intervall stetig und gleich verteilt ist, d.h.  $f_{X_e}(x_e) = \frac{1}{\Delta}$  im Bereich  $-\frac{\Delta}{2} \leq x_e \leq +\frac{\Delta}{2}$  und 0 ausserhalb dieses Bereichs. Die Leistung des Quantisierungrauschens berechnet sich somit zu:

$$E[X_e^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x_e^2 \cdot \frac{1}{\Delta} dx_e = \frac{\Delta^2}{12}$$

Wiederum sei hier angemerkt dass es sich um eine statistische Leistung handelt, das heisst einer Annahme, wie die Leistung des Quantisierungsfehlers aufgrund der vermuteten Verteilung des Quantisierungsfehlers aussehen wird. Bei einem tatsächlich digitalisierten Signal  $m(t)$  muss sich aber das zeitliche Verhalten des Quantisierungsfehlers nicht unbedingt an die angenommene statistische Vorgabe halten, zum Beispiel im einfach überblickbaren Fall, wo eine konstante DC-Spannung  $m(t) = c$  digitalisiert wird; dort wird nicht nur die DC-Spannung sondern auch der Quantisierungsfehler zeitlich konstant sein.

Neben dem zweiten Moment gibt es auch noch höhere, n-te Momente, welche aber hier nicht weiter von Bedeutung sind:

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \sum_i x_i^n \cdot p_X(x_i) && \text{bei einer diskreten Zufallsvariablen } X \\ E[X^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) dx && \text{bei einer stetigen Zufallsvariablen } X \end{aligned}$$

### 8.6.3 Varianz und Standardabweichung

Bei der Varianz (Englisch: variance) handelt es sich um ein statistisches Leistungsmass, welches die mittlere Abweichung vom Erwartungswert ausdrückt. Bei diskreten Zufallsvariablen lautet die Berechnnung:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_X(x_i) \quad (8.30)$$

Bei stetigen Zufallsvariablen lautet die Varianz:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad (8.31)$$

Als Beispiel stelle man sich eine einstellbare DC-Spannungsquelle vor, über welche man statistische Angaben machen möchte, wie stark die Spannung in Abhängigkeit von Rauschen, Laständerungen, Temperatur etc. variiert. Es kann dann durchaus Sinn machen, den einstellbaren DC-Wert für die Statistik der Variationen auszuschliessen, da eventuell nur die Abweichung vom Nominalwert von Interesse ist. Die Varianz drückt dies als statistische Leistung der Abweichungen aus.

Dank der Linearität des Erwartungswerts gilt für die Varianz :

$$\sigma^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - 2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

Die Standardabweichung (Englisch: standard deviation) ist die Wurzel aus der Varianz, entspricht also von der Dimension her wieder dem linearen x-Wert und kann als statistischer Effektivwert (RMS-Wert) der Abweichung verstanden werden:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]} \quad (8.32)$$

### 8.6.4 Korrelation

Bei der Korrelation (Englisch: correlation) handelt es sich um einen statistischen Kennwert zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , mit welchem ausgedrückt wird, ob zwischen den beiden Zufallsvariablen ein linearer Zusammenhang besteht. Diese Ähnlichkeit zueinander drückt sich statistisch in einer Kreuzleistung zwischen den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  aus. Im Gegensatz zur nachfolgend vorgestellten Kovarianz werden bei der Korrelation die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  vor dem Vergleich *nicht* um ihre Erwartungswerte  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  bereinigt. Bei diskreten Zufallsvariablen lautet die Berechnung:

$$m_{11} = E[X \cdot Y] = \sum_k \sum_i x_i \cdot y_k \cdot p_{XY}(x_i, y_k) \quad (8.33)$$

Bei stetigen Zufallsvariablen lautet die Korrelation:

$$m_{11} = E[X \cdot Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{XY}(x, y) dx dy \quad (8.34)$$

Zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind zueinander *orthogonal* falls  $m_{11} = 0$  ist.

Fallen beim Zufallsexperiment statistisch mehrheitlich positive Werte von  $X$  auf positive Werte von  $Y$  sowie negative Werte von  $X$  auf negative Werte von  $Y$ , wird die Kreuzleistung positiv sein. Ist es vom Vorzeichen her gerade mehrheitlich umgekehrt, wird die Kreuzleistung negativ sein. Besteht kein Zusammenhang zwischen den Werten von  $X$  und jenen von  $Y$ , wird die Kreuzleistung zu Null und es liegt Orthogonalität vor.

Neben der Korrelation  $m_{11}$  gibt es auch noch höhere, (n,k)-te Momente, welche aber hier nicht weiter von Bedeutung sind:

$$\begin{aligned} m_{nk} &= E[X^n Y^k] = \sum_i \sum_j x_i^n \cdot y_j^k \cdot p_X(x_i, y_j) && \text{bei diskreten Zufallsvariablen } X \text{ und } Y \\ m_{nk} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot y^k \cdot f_{XY}(x, y) dx dy && \text{bei stetigen Zufallsvariablen } X \text{ und } Y \end{aligned}$$

### 8.6.5 Kovarianz

Bei der Kovarianz (Englisch: covariance) handelt es sich um einen statistischen Kennwert zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , mit welchem wie schon bei der Korrelation ausgedrückt wird, ob zwischen den beiden Zufallsvariablen ein linearer Zusammenhang besteht. Diese Ähnlichkeit zueinander drückt sich statistisch in einer Kreuzleistung zwischen der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  aus. Im Gegensatz zur Korrelation werden aber die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  vor dem Vergleich um ihre Erwartungswerte  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  bereinigt.

Bei diskreten Zufallsvariablen lautet die Berechnung:

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] = \sum_k \sum_i (x_i - \mu_X) \cdot (y_k - \mu_Y) \cdot p_{XY}(x_i, y_k) \quad (8.35)$$

Bei stetigen Zufallsvariablen lautet die Kovarianz:

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy \quad (8.36)$$

Oft ist der Gleichanteil in einer Zufallsvariablen ohne wirkliche Aussagekraft, da dieser je nach betrachteten statistischen Daten zwingend einen positiven Wert haben wird. Möchte man beispielsweise untersuchen, ob das Alter von Arbeitnehmenden einen Zusammenhang hat mit der Anzahl Krankheitstage, dann ist offensichtlich, dass alle Arbeitnehmenden eine positive Anzahl Jahre alt sind und auch deren Anzahl Krankheitstage nie negativ ist. Mit dem Nachweis mit Hilfe der Korrelation, dass eine positive Kreuzleistung vorliegt, lässt sich die eigentlich interessierende Frage nicht beantworten. Denn es ist klar, dass Arbeitnehmende mit einem Alter  $> 0$  mehr Krankheitstage aufweisen, als solche mit einem Alter  $< 0$ . DC-bereinigt aber, d.h. ob Mitarbeiter über dem Altersdurchschnitt überdurchschnittlich oder unterdurchschnittlich viele Krankheitstage aufweisen, lässt sich aus dem Vorzeichen der Kovarianz die Antwort direkt herauslesen.

Zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind zueinander *unkorreliert* falls  $\sigma_{XY} = 0$  ist. Unkorreliert heisst, dass  $X$  und  $Y$  keine lineare statistische Ähnlichkeit zueinander aufweisen.

Leider ist der Begriff dieser Eigenschaft etwas irreführend, weshalb nochmals hervorgehoben werden soll:

*unkorriert* heisst, dass die *Kovarianz* gleich Null ist. Ist die *Korrelation* gleich Null, sind  $X$  und  $Y$  *orthogonal* zueinander.

Soll nicht nur das Vorzeichen der Kovarianz ausgewertet werden, sondern in normierter Weise auch dargestellt werden, wie ausgeprägt der lineare Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  ausfällt, ist der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$  hilfreich:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad \text{mit } -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (8.37)$$

## 8.7 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 8.7.1 Gleichverteilung

Bei der Gleichverteilung handelt es sich um eine Verteilung einer diskreten oder stetigen Zufallsvariablen  $X$ .

Bei einer diskreten Gleichverteilung treten sämtliche  $n$  Werte  $X(\lambda) = x_i$  gleich häufig auf und zwar mit der Wahrscheinlichkeit  $p_X(x_i) = \frac{1}{n}$ . Teilweise wird in der Literatur nur dann von einer diskreten Gleichverteilung gesprochen, wenn die Abstände der vorkommenden Werte  $x_i$  zu ihrem nächsten Nachbarwert alle gleich gross sind.

Als Beispiel ist in den untenstehenden Graphen die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x)$  und die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  der Augenzahl beim Würfelwurf dargestellt.

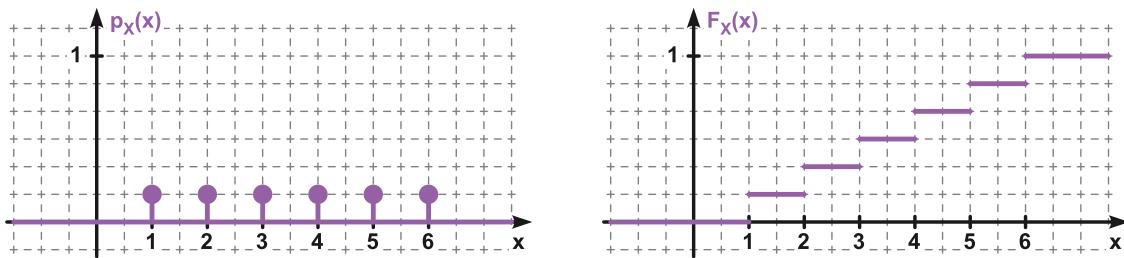


Abbildung 8.9: Diskrete Gleichverteilung:  $p_X(x)$  und  $F_X(x)$  der Augenzahl beim Würfelwurf

Bei einer stetigen Gleichverteilung fallen sämtliche Werte  $x$  von  $X(\lambda) = x$  in das Intervall  $a \leq x \leq b$  und treten dort mit der folgenden konstanten Wahrscheinlichkeitsdichte auf:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (8.38)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  und die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  einer stetig gleichverteilten Zufallsvariablen sind nachfolgend dargestellt:

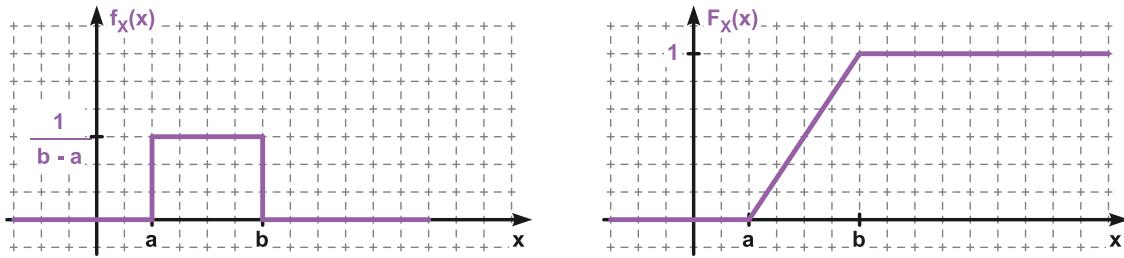


Abbildung 8.10: Stetige Gleichverteilung:  $f_X(x)$  und  $F_X(x)$

Der Erwartungswert beträgt  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ , die Varianz  $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

Als Beispiel für eine stetige Gleichverteilung dient das Quantisierungsrauschen von gleichförmig quantisiertem PCM.

### 8.7.2 Binomialverteilung

Bei der Binomialverteilung handelt es sich um eine Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen. Das Standardbeispiel für die Nachrichtentechnik ist die Anzahl  $k$  von Mark, welche in einer Folge von  $n$  Bit auftreten, wenn die binäre Quelle kein Gedächtnis hat, d.h. unabhängig von der Vorgeschichte ein Mark mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  und ein Space mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  generiert.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung lautet:

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (8.39)$$

Dabei gilt:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  und  $q = 1 - p$ .

Der Erwartungswert der Binomialverteilung beträgt  $\mu_X = n \cdot p$ , die Varianz  $\sigma_X^2 = n \cdot p \cdot q$ .

### 8.7.3 Poissonverteilung

Bei der Poissonverteilung handelt es sich um eine Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen. Sie entspricht einer Binomialverteilung bei welcher  $n$  sehr gross und die Wahrscheinlichkeit  $p$  sehr klein ist. Die Berechnung mit Fakultäten erweist sich in solchen Fällen als sehr unhandlich, wobei viele Taschenrechner auf eine Approximation zurückgreifen und dieses Problem so nicht in Erscheinung tritt. Dennoch bietet es sich an, auf die einfacheren Formeln der Poissonverteilung auszuweichen.

Das Standardbeispiel für die Nachrichtentechnik ist die Anzahl Fehler  $k$  in einem grossen Block mit  $n$  Bit, wenn der Fehler erzeugende Kanal kein Gedächtnis hat, d.h. unabhängig von der Vorgeschichte für jedes Bit einen Fehler mit der sehr kleinen Wahrscheinlichkeit  $p$  erzeugt.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung lautet:

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-n \cdot p} \cdot \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \quad (8.40)$$

Der Erwartungswert der Poissonverteilung beträgt  $\mu_X = n \cdot p$ , ebenso wie die Varianz  $\sigma_X^2 = n \cdot p$ .

### 8.7.4 Gaussverteilung

Bei der Gaussverteilung handelt es sich um eine Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen. Das Standardbeispiel für die Nachrichtentechnik sind die Amplitudenwerte einer thermischen Rauschquelle.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gaussverteilung lautet:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.41)$$

Diese sogenannte Glockenkurve hat den Erwartungswert  $\mu_X = \mu$  und die Varianz  $\sigma_X^2 = \sigma^2$ , was mit  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  geschrieben wird.

Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion liegt bei  $f_X(\mu_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$  und die beiden Wendepunkte bei  $x = \mu_X \pm \sigma$ .

Bei der normierten Standardnormalverteilung ist  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ , d.h.  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Im Gegensatz zu den Verteilungen der diskreten Zufallsvariablen kann bei der Gaussverteilung die Verteilungsfunktion  $F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$  nicht mehr einfach berechnet werden, da dieses Integral nicht in geschlossener Form bestimmt werden kann. Es muss numerisch gelöst werden.

Anstatt der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  haben sich verschiedene andere Funktionen in Tabellenwerken oder als numerische Funktion z.B. in Matlab durchgesetzt: die üblichste ist die Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$ , die in der Nachrichtentechnik wichtigste die Q-funktion  $Q(x)$ .

### Fehlerfunktion

Die Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  entspricht dem bestimmten Integral einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$  (d.h. mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ) mit Integrationsgrenzen  $-x$  bis  $x$ .

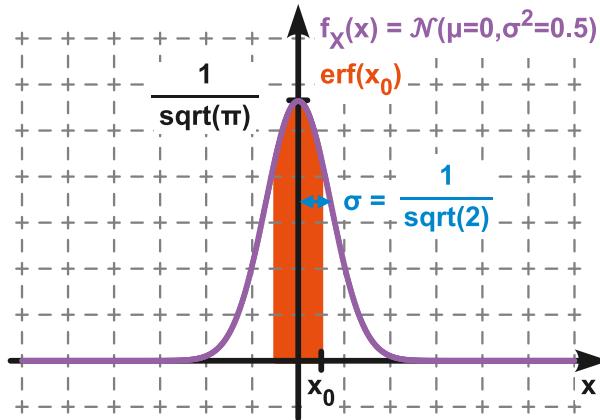


Abbildung 8.11: Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (8.42)$$

Diese Formel hält sich an die Definition, wie sie auch in Matlab verwendet wird. Es gibt aber leider unter der Bezeichnung Fehlerfunktion auch Varianten mit anders skalierten Gaußkurven, welche zum Beispiel von der Standardnormalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  ausgehen.

Die Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  gibt an, wie gross der statistische Anteil von Werten einer Gaußverteilten Zufallsvariablen ist, welche in einem Fehlerintervall  $\pm x$  um den Erwartungswert  $\mu$  herum auftreten.

Die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  einer Gaußverteilung kann mit  $\text{erf}(x)$  ausgedrückt werden, indem  $F_X(x)$  geeignet umgeformt wird. Als erstes wird berücksichtigt, dass  $F_X(\mu) = \frac{1}{2}$  gilt:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{-(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mu}^x e^{-\frac{-(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi \quad (8.43)$$

Durch Substitution  $u = \frac{\xi-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$  ergibt sich:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma}} e^{-u^2} du \quad (8.44)$$

Der zweite Summand im letzten Term entspricht gerade  $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$ , womit folgt:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right) \right) \quad (8.45)$$

Neben der Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$  ist auch die komplementäre Fehlerfunktion  $\operatorname{erfc}(x)$  eine häufig verwendete Funktion:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (8.46)$$

Sie gibt für  $x \geq 0$  an, welcher kumulative Anteil einer Gaussverteilung ausserhalb des Bereichs  $\mu \pm x$  ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind einige mit der MATLAB-Funktion `erf` numerisch berechneten Werte der Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$  aufgelistet. Eine viel aufführlichere Tabelle befindet sich im Anhang G.

$x$	$\operatorname{erf}(x)$
0.00	0.000 000 000 000 000
0.25	0.276 326 390 168 237
0.50	0.520 499 877 813 047
0.75	0.711 155 633 653 515
1.00	0.842 700 792 949 715
1.25	0.922 900 128 256 458
1.50	0.966 105 146 475 311
1.75	0.986 671 671 219 182
2.00	0.995 322 265 018 953

$x$	$\operatorname{erf}(x)$
2.25	0.998 537 283 413 319
2.50	0.999 593 047 982 555
2.75	0.999 899 378 077 880
3.00	0.999 977 909 503 001
3.25	0.999 995 697 220 536
3.50	0.999 999 256 901 628
3.75	0.999 999 886 272 743
4.00	0.999 999 984 582 742

$x$	$\operatorname{erf}(x)$
4.25	0.999 999 998 149 426
4.50	0.999 999 999 803 384
4.75	0.999 999 999 981 515
5.00	0.999 999 999 998 463
5.25	0.999 999 999 999 887
5.50	0.999 999 999 999 993
5.75	1.000 000 000 000 000
6.00	1.000 000 000 000 000

Tabelle 8.6: Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$

## Q-Funktion

Die Q-Funktion  $Q(x)$  entspricht dem Flächeninhalt unter einer Standardnormalverteilung (d.h.  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ) ausgehend vom Punkt  $x$  bis  $+\infty$ :

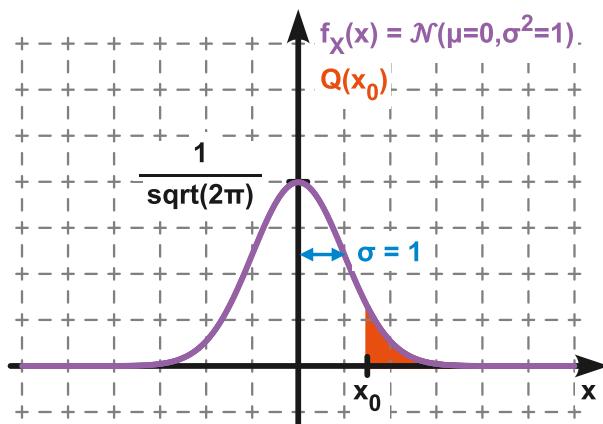


Abbildung 8.12: Q-Funktion  $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (8.47)$$

In Tabellen sind oft nur die Werte von  $Q(x)$  für positive  $x$  aufgeführt, da für  $x < 0$  folgende einfache Rechenregel gilt:

$$Q(x) = 1 - Q(-x)$$

Mit Hilfe der Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  lässt sich  $Q(x)$  ebenfalls berechnen:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Bis auf die unterschiedliche Skalierung von Argument und Ergebnis entspricht die Q-Funktion  $Q(x)$  somit der komplementären Fehlerfunktion  $\text{erfc}(x)$  und wird in der Literatur teilweise leider auch so benannt. Die beiden Funktionen sollen hier aber klar auseinandergehalten werden.

Die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  kann auch für  $\mu \neq 0$  und  $\sigma^2 \neq 1$  mit der Q-Funktion  $Q(x)$  ausgedrückt werden, indem man als erstes  $F_X(x)$  geeignet umformt:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

Dieser letzte Term entspricht aber gerade  $Q\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ , womit für  $F_X(x)$  gilt:

$$F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

In der nachfolgenden Tabelle sind einige mit der MATLAB-Funktion `qfunc` numerisch berechneten Werte der Q-Funktion  $Q(x)$  aufgelistet. Eine viel aufführlichere Tabelle befindet sich im Anhang H.

$x$	$Q(x)$
0.00	0.500 000 000 000 000
0.25	0.401 293 674 317 076
0.50	0.308 537 538 725 987
0.75	0.226 627 352 376 868
1.00	0.158 655 253 931 457
1.25	0.105 649 773 666 855
1.50	0.066 807 201 268 858
1.75	0.040 059 156 863 817
2.00	0.022 750 131 948 179

$x$	$Q(x)$
2.25	0.012 224 472 655 045
2.50	0.006 209 665 325 776
2.75	0.002 979 763 235 055
3.00	0.001 349 898 031 630
3.25	0.000 577 025 042 391
3.50	0.000 232 629 079 036
3.75	0.000 088 417 285 201
4.00	0.000 031 671 241 833

$x$	$Q(x)$
4.25	0.000 010 688 525 775
4.50	0.000 003 397 673 125
4.75	0.000 001 017 083 243
5.00	0.000 000 286 651 572
5.25	0.000 000 076 049 605
5.50	0.000 000 018 989 562
5.75	0.000 000 004 462 172
6.00	0.000 000 000 986 588

**Tabelle 8.7:** Q-Funktion  $Q(x)$

### 8.7.5 Rayleigh-Verteilung

Eine Rayleigh-Verteilung liegt vor, wenn eine in kartesischen Koordinaten zweidimensionale Gaussverteilung als Funktion des Radius ausgedrückt wird.

Im Beispiel mit den Treffern auf der Scheibe bzw. dem QAM-Konstellationspunkt wurde die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{R\Phi}(r, \phi)$  schon berechnet:

$$f_{R\Phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

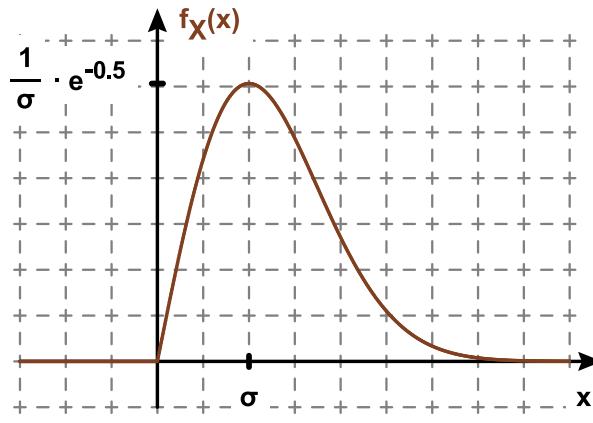
Als Randfunktionen können die eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen  $f_\Phi(\phi)$  und  $f_R(r)$  berechnet werden:

$$f_{\Phi}(\phi) = \int_0^{+\infty} f_{R\Phi}(r, \phi) dr = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.48)$$

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\Phi}(r, \phi) d\phi = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & \text{für } r \geq 0 \\ 0 & \text{für } r < 0 \end{cases} \quad (8.49)$$

Erwartungsgemäss ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{\Phi}(\phi)$  unabhängig vom Winkel  $(\phi)$ , d.h. konstant bzw. gleichverteilt im Intervall  $0 \leq \phi \leq 2\pi$

Bei  $f_R(r)$  handelt es sich um eine Rayleigh-Verteilung deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  folgenden Verlauf hat:



**Abbildung 8.13:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x)$  der Rayleigh-Verteilung

Radius  $R$  und Phase  $\Phi$  sind zudem statistisch unabhängig, da  $f_{R\Phi}(r, \phi) = f_R(r) \cdot f_{\Phi}(\phi)$  gilt.

Die Verteilungsfunktion  $F_R(r)$  kann bei der Rayleigh-Verteilung als geschlossene Formel hingeschrieben werden, im Gegensatz zur Gaussverteilung, bei welcher die Verteilungsfunktion nur numerisch (bzw. über die Tabellen der Fehlerfunktion oder Q-Funktion) bestimmt werden kann. Sie lautet bei einer Rayleigh-Verteilung:

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & \text{für } r \geq 0 \\ 0 & \text{für } r < 0 \end{cases}$$

# Kapitel 9

## Zufallsprozess

### 9.1 Was ist ein Zufallsprozess?

Wie dies schon bei einer Zufallsvariablen  $X(\lambda)$  der Fall war, steht am Anfang eines Zufallsprozesses  $X(t, \lambda)$  ein Zufallsexperiment mit Ergebnisraum  $S$ , welcher alle möglichen Ergebnisse  $\lambda_i$  enthält. Wiederum können endlich viele Ergebnisse  $\lambda_i$ , abzählbar unendlich viele oder nicht-abzählbar unendlich viele Ergebnisse zum Ergebnisraum  $S$  gehören.

Anstatt ein einziger Wert  $x_i$  wie bei einer Zufallsvariable  $X(\lambda)$  wird nun bei einem Zufallsprozess  $X(t, \lambda)$  ein ganzer zeitlicher Ablauf, das heisst ein Signal  $x_i(t)$ , einem Ergebnis  $\lambda_i$  zugeordnet.

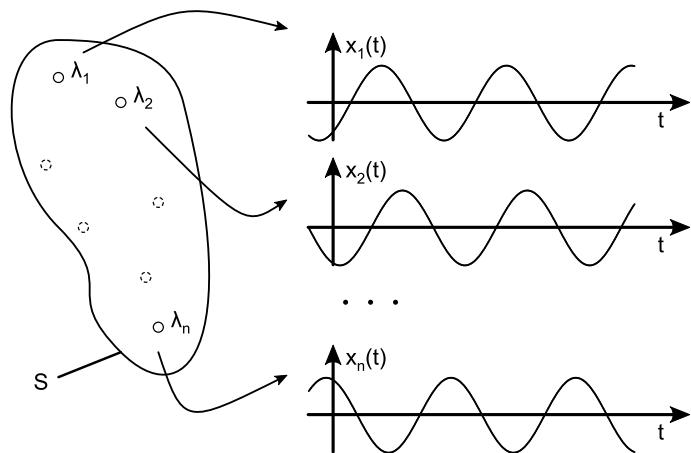


Abbildung 9.1: Zufallsprozess

Die Signalformen  $x_i(t)$  sollen dabei determiniert sein, das heisst, sie besitzen keinen zufälligen, sondern einen definierten Verlauf. Die Zufälligkeit eines Zufallsprozesses liegt also nicht in einem stochastischen zeitlichen Verlauf der einzelnen Signalformen, sondern beim Zufallsexperiment, welches durch sein Ergebnis bestimmt, welche von all diesen schon vordefinierten Signalformen konkret ausgewählt wird.

Das Beispiel in der vorhergehenden Darstellung illustriert dies schön. Durch das Zufallsexperiment wird ein sinusförmiges Trägersignal ausgesucht, welches abhängig vom Ergebnis des Zufallsexperiments eine unterschiedliche Phasenlage aufweist. Ist aber diese Phasenlage als Ergebnis des Zufallsexperiments einmal bekannt, hat das Signal einen determinierten Verlauf, welcher vollkommen frei von Zufälligkeiten ist.

Weitere Beispiele sollen den Begriff des Zufallsprozesses zusätzlich veranschaulichen.

- Wir fassen eine binäre Datenquelle als Zufallsexperiment auf, mit den Ergebnissen Mark und Space. Den beiden Ergebnissen wird je eine Pulsform (d.h. ein zeitlicher Signalverlauf) zugeordnet, z.B. die beiden Pulsformen des Manchester-Codes.
- Ein Ethernet-Adapter sendet Ethernet-Pakete, wobei die Bitkombination von jedem neuen Datenpaket als Ergebnis eines Zufallsexperiments aufgefasst werden kann, welche zu einem ganz bestimmten Signalverlauf führt. Der Ergebnisraum ist zwar wiederum nicht unendlich gross, da die maximale Länge von Standard-Ethernetpaketen auf 1518 Bytes begrenzt ist. und es daher nur eine endliche Anzahl

unterschiedlicher Pakete geben kann. Dennoch ist die Anzahl möglicher Bitkombinationen so gross, dass es wenig Sinn macht, interessierende Eigenschaften, wie etwa das Spektrum, für jedes einzelne Paket zu berechnen. Anstatt an solchen einzelnen Resultaten im Frequenzbereich ist man wohl vielmehr am gesamten Spektrum interessiert, das heisst einer statistischen Betrachtung über alle Pakete hinweg.

- Bei thermischem Rauschen (oder auch anderen zufälligen Störsignalen) kann der zeitliche Verlauf der Rauschspannung nicht vorhergesagt werden. Trotzdem soll das mathematische Modell des Zufallsprozesses weiterhin beibehalten werden, welches jedem der unendlich vielen Ergebnissen einen determinierten Signalverlauf des Rauschsignals zuweist. Als Beobachter wissen wir jedoch erst nach Ablauf des gesamten Signals (d.h. eigentlich nach unendlich langer Zeit), welcher genaue Signalverlauf vorliegt und damit auch welches Ergebnis des Zufallsprozesses diesem Signalverlauf zugrunde liegt. Eine deterministische Bestimmung des weiteren zeitlichen Verlaufs des Rauschsignals ist somit nur deshalb nicht möglich, da zu keinem Zeitpunkt klar ist, welcher der unendlich vielen Signalverläufe als Ergebnis des Zufallsexperiments tatsächlich abläuft. Was etwas umständlich tönt, erlaubt aber, auch solch zufällig verlaufende Signale in das einheitliche Modell des Zufallsprozesses einzubinden.

## 9.2 Definitionen und Notationen für Zufallsprozesse

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit den Ergebnissen  $\lambda$  im Ergebnisraum  $S$ . Diesem Zufallsexperiment soll ein Zufallsprozess zugewiesen werden, welcher folgende Eigenschaften hat:

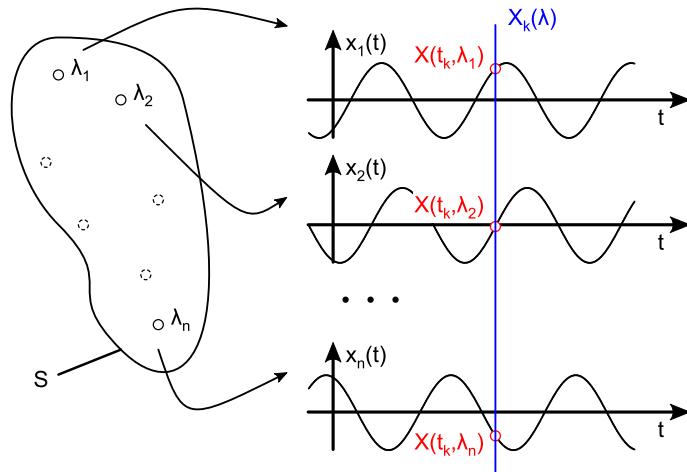


Abbildung 9.2: Notationen des Zufallsprozesses

- Jedem Ergebnis  $\lambda$  wird eine reellwertige Zeitfunktion  $x(t) = X(t, \lambda)$  zugeordnet.
- Jeder Zufallsprozess besitzt somit zwei Parameter:  $t$  und  $\lambda$
- Für ein spezifisches  $\lambda_i$  ergibt sich eine *determinierte* Zeitfunktion  $x_i(t) = X(t, \lambda_i)$ .
- $x_i(t)$  ist eine sogenannte Musterfunktion (Englisch: sample function).
- Die Gesamtheit dieser Musterfunktionen bilden ein Ensemble bzw. eine Schar.
- Zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  bildet  $X_k = X(t_k, \lambda)$  eine Zufallsvariable  $X_k(\lambda)$ .
- $x_i(t_k) = X(t_k, \lambda_i)$  ist eine Zahl.
- $X(t, \lambda)$  wird normalerweise verkürzt als  $X(t)$  geschrieben.
- $X(t)$  kann als Sammlung von indizierten Zufallsvariablen  $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$  etc. betrachtet werden, wobei die Indexmenge  $T$  (d.h. die Zeit) diskret ( $t_1, t_2, t_3$ , etc.) oder als  $t \in R$  kontinuierlich sein kann. Entsprechend handelt es sich um einen zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen Zufallsprozess.

## 9.3 Statistische Eigenschaften von Zufallsprozessen

### 9.3.1 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeits(dichte)funktion

Da bei einem Zufallsprozess, egal ob zeitdiskret oder zeitkontinuierlich, zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  eine Zufallsvariable  $X_k$  vorliegt, kann in Abhängigkeit dieses zeitlichen Parameters  $t_k$  der Zufallsprozess statistisch so beschrieben werden, wie dies schon bei den Zufallsvariablen der Fall war.

$X_k$  besitzt folgende Verteilungsfunktion:

$$F_{X_k}(x_k; t_k) = P(\{X_k(t_k) \leq x_k\}) \quad (9.1)$$

Dabei ist  $t_k$  ein fester zeitlicher Index, der die Zufallsvariable  $X_k$  innerhalb des Zufallsprozesses  $X(t)$  festlegt und  $x_k$  der reelle Zahlenwert, über welchen die statistische Verteilungsfunktion ermittelt wird.

Ist die Zufallsvariable  $X_k$  diskret, d.h. kommen nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte  $x_k$  in der Zufallsvariablen  $X_k$  vor, kann folgende Wahrscheinlichkeitsmassefunktion bestimmt werden:

$$p_{X_k}(x_k; t_k) = P(\{X_k(t_k) = x_k\}) \quad (9.2)$$

Wiederum ist  $t_k$  ein zeitlicher Index, welcher innerhalb des Zufallsprozesses  $X(t)$  auf die Zufallsvariable  $X_k$  zeigt und  $x_k$  der reelle Zahlenwert, von welchem die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion bestimmt wird.

Ist die Zufallsvariable  $X_k$  stetig, kann die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wie folgt bestimmt werden:

$$f_{X_k}(x_k; t_k) = \frac{\partial F_{X_k}(x_k; t_k)}{\partial x_k} \quad (9.3)$$

Um nun aufzuzeigen, ob und in welcher Art sich die Verteilung der Zahlenwerte  $x_k$  zwischen zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  (oder zwischen beliebig vielen Zeitpunkten  $t_i$ ) verändert, kann auf zweidimensionale oder n-dimensionale Zufallsvariablen zurückgegriffen werden.

Für zwei Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  lautet dann die zweidimensionale Verteilungsfunktion:

$$F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}) \quad (9.4)$$

Ebenso kann für diskrete Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsmassefunktion bestimmt werden:

$$p_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2\}) \quad (9.5)$$

Und für stetige Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  lautet die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9.6)$$

### 9.3.2 Statistische Kennwerte

Für jede Zufallsvariable  $X_k$ , welche sich zum Zeitpunkt  $t_k$  aus dem Zufallsprozess  $X(t)$  ergibt, können statistische Kennwerte berechnet werden, die dann ebenfalls als zeitliche Abfolge vorliegen.

Bei diesen Kennwerten handelt es sich somit um statistische Angaben über das Ensemble der Musterfunktion und nicht um zeitliche Mittelwerte der Funktionen selbst, welche weiter unten betrachtet werden. Diese zeitliche Abfolge von statistischen Kennwerten bilden einen eigenen zeitlichen Verlauf, sind also eine Funktion der Zeit  $t$ .

## Erwartungswert

Der Erwartungswert  $\mu_X(t)$  eines Zufallsprozesses  $X(t)$  entspricht dem zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  berechneten linearen statistischen Mittelwert der Zufallsvariable  $X(t_k)$ .

Sind die Zufallsvariablen  $X_k$  diskret, berechnet sich der Erwartungswert  $\mu_X(t)$  mit der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x; t)$ :

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i; t) \quad (9.7)$$

Handelt es sich bei  $X_k$  um stetige Zufallsvariablen, kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(x; t)$  verwendet werden:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x; t) dx \quad (9.8)$$

## Autokorrelationsfunktion

Bei der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  wird eine Korrelation zwischen zwei Zufallsvariablen  $X(t_1)$  und  $X(t_2)$  berechnet. Die beiden Zufallsvariablen entsprechen den statistischen Momentaufnahmen des Zufallsprozesses zum Zeitpunkt  $t_1$  bzw.  $t_2$ .

Da es sich trotz den unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  letztendlich um den selben Zufallsprozess  $X(t)$  handelt, spricht man von der Autokorrelationsfunktion. Eine Kreuzkorrelationsfunktion würde vorliegen, wenn verschiedene Zufallsprozesse  $X(t)$  und  $Y(t)$  miteinander verrechnet würden.

Wie bei jeder Korrelation gibt das Resultat im Sinne einer Kreuzleistung wieder, wie gross der lineare statistische Zusammenhang zwischen den Werten der Zufallsvariable  $X(t_1)$  und jenen von  $X(t_2)$  ist.

Sind die Zufallsvariablen  $X_k$  diskret, berechnet sich die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  mit der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sum_i \sum_j x_{1i} \cdot x_{2j} \cdot p_{XX}(x_{1i}, x_{2j}; t_1, t_2) \quad (9.9)$$

Handelt es sich bei  $X_k$  um stetige Zufallsvariablen, kann für die Berechnung von  $R_{XX}(t_1, t_2)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{XX}(x; t)$  verwendet werden.

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (9.10)$$

Wählt man für  $t_2$  und  $t_1$  den gleichen Zeitpunkt  $t_2 = t_1$  geht die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  in das zweite Moment  $E[X^2(t)]$  über.

## Autokovarianz

Bei der Autokovarianz  $C_{XX}(t_1, t_2)$  wird wie bei der Autokorrelation zwischen den zwei Zufallsvariablen  $X(t_1)$  und  $X(t_2)$  eine statistische Kreuzleistung berechnet, wobei die Zahlenwerte vor dem Verrechnen um den jeweiligen Erwartungswert  $\mu_X(t_1)$  bzw.  $\mu_X(t_2)$  bereinigt werden. Somit wird mit der Autokovarianz eine Art statistische AC-Kreuzleistung berechnet.

Da es sich um den selben Zufallsprozess  $X(t)$  handelt, von dem zwei Momentaufnahmen der Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  verrechnet werden, spricht man von der Autokovarianz. Bei einer Kreuzkovarianz würden zwei verschiedene Zufallsprozesse  $X(t)$  und  $Y(t)$  miteinander verrechnet.

Eine Kovarianz drückt aus, wie gross der lineare statistische Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen ist, wobei die Erwartungswerte  $\mu_X$  der beiden Zufallsvariablen von der Berechnung ausgeschlossen werden:

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1)) \cdot (X(t_2) - \mu_X(t_2))] \quad (9.11)$$

Sind die Zufallsvariablen  $X_k$  diskret, berechnet sich die Autokovarianz  $C_{XX}(t_1, t_2)$  mit der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ :

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \sum_i \sum_j (x_{1i} - \mu_{X_1}) \cdot (x_{2j} - \mu_{X_2}) \cdot p_{XX}(x_{1i}, x_{2j}; t_1, t_2) \quad (9.12)$$

Handelt es sich bei  $X_k$  um stetige Zufallsvariablen, kann für die Berechnung von  $C_{XX}(t_1, t_2)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{XX}(x; t)$  verwendet werden.

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{X_1}) \cdot (x_2 - \mu_{X_2}) \cdot f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (9.13)$$

Wählt man für  $t_2$  und  $t_1$  den gleichen Zeitpunkt  $t_2 = t_1$  geht die Autokovarianz  $C_{XX}(t_1, t_2)$  in das zweite Zentralmoment (d.h. die Varianz  $\sigma^2$ ) der Zufallsvariable  $X_k = X(t_k)$  über.

Sowohl bei diskreten wie auch stetigen Zufallsvariablen  $X_k$  kann die Autokovarianz aus der Autokorrelation wie folgt berechnet werden:

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2) \quad (9.14)$$

## 9.4 Stationarität von Zufallsprozessen

Zufallsprozesse sind einfach ausgedrückt immer dann stationär, wenn ihre statistischen Eigenschaften zeitlich unverändert bleiben. Mathematisch unterscheidet man zwei Arten von stationären Prozessen: streng stationäre (Englisch: strict sense stationary, SSS) und schwach stationäre (Englisch: wide sense stationary, WSS).

### 9.4.1 Streng stationäre Prozesse

Ein Zufallsprozess ist in n-ter Ordnung stationär wenn seine n-dimensionalen statistischen Eigenschaften unabhängig von einer beliebigen zeitlichen Verschiebung  $t_c$  sind.

Werden also bei einem Zufallsprozess  $n$  beliebige Zeitpunkte  $t_i$  gewählt, welche im Sinne einer Momentaufnahme den Zufallsprozess auf je eine Zufallsvariable  $X_i$  abbilden, soll im Falle von diskreten Zufallsvariablen für die n-dimensionale Verteilungsfunktion und die n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsmassefunktion unabhängig von  $t_c$  gelten:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_c, t_2 + t_c, \dots, t_n + t_c) \quad (9.15)$$

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_c, t_2 + t_c, \dots, t_n + t_c) \quad (9.16)$$

Ebenso soll im Falle von stetigen Zufallsvariablen für die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gelten:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_c, t_2 + t_c, \dots, t_n + t_c) \quad (9.17)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_c, t_2 + t_c, \dots, t_n + t_c) \quad (9.18)$$

Für einen streng stationären Prozess (SSS) muss die neue statistische Verteilung, welche sich durch die zeitliche Verschiebung  $t_c$  ergibt, für eine beliebig grosse Ordnung  $n$  unverändert bleiben. Bei einem SSS-Prozess sind damit sämtliche statistischen Kennwerte keine Funktion des absoluten Zeitpunkts  $t$  mehr, d.h. es gilt insbesondere für den linearen Erwartungswert  $\mu_X$ , die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  und die Kovarianz  $C_{XX}(t_1, t_2)$ :

$$E[X(t)] = \mu_X \quad (9.19)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau) \quad (9.20)$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 \quad (9.21)$$

Dabei gilt jeweils  $\tau = t_2 - t_1$ .

Neben diesen drei schon bekannten statistischen Kennwerten sind bei streng stationären Prozessen auch beliebige weitere n-dimensionale Kennwerte unabhängig vom absoluten Zeitpunkt  $t$ . Eine solch starke, zeitlich invariante Statistik besitzen in der Praxis nur wenige Zufallsprozesse, am ehesten noch physikalische Prozesse, wie zum Beispiel thermisches Rauschen.

Mathematisch kann aber eine starke Stationarität eines Zufallsprozesses einfach erzwungen werden, indem sämtliche Musterfunktionen mit beliebigem zeitlichen Versatz und ohne bevorzugte Phasenlage auftreten dürfen. Dieser kleine Trick wird weiter unten benutzt, um die Spektren von Leitungscodes zu berechnen.

#### 9.4.2 Schwach stationäre Prozesse

Ein Zufallsprozess heisst schwach stationär, wenn die statistischen Eigenschaften bei einer zeitlichen Verschiebung  $t_c$  wiederum unverändert bleiben, wobei dies aber nur noch für maximal 2-dimensionale Verteilungen zwingend zutreffen muss. Schwach stationäre Prozesse sind somit eine weniger eng gefasste Erweiterung der streng stationären Prozesse. Man spricht bei schwach stationären Prozessen auch von einer Stationarität zweiter Ordnung.

Im Falle von diskreten Zufallsvariablen muss damit bei einer beliebigen zeitlichen Verschiebung  $t_c$  für die Verteilungsfunktion  $F_{XX}(x_1, x_2)$  und die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_{XX}(x_1, x_2)$  gelten:

$$F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_{XX}(x_1, x_2; t_1 + t_c, t_2 + t_c) \quad (9.22)$$

$$p_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{XX}(x_1, x_2; t_1 + t_c, t_2 + t_c) \quad (9.23)$$

Ebenso gilt bei schwacher Stationarität im Falle von stetigen Zufallsvariablen für die Verteilungsfunktion  $F_{XX}(x_1, x_2)$  und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{XX}(x_1, x_2)$ :

$$F_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_{XX}(x_1, x_2; t_1 + t_c, t_2 + t_c) \quad (9.24)$$

$$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{XX}(x_1, x_2; t_1 + t_c, t_2 + t_c) \quad (9.25)$$

Auch bei einem schwach stationären Prozess ist der lineare Erwartungswert  $\mu_X$  keine zeitabhängige Funktion mehr. Und wiederum gilt für die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  und die Kovarianz  $C_{XX}(t_1, t_2)$ , dass sie nur noch von der Zeitdifferenz  $\tau = t_2 - t_1$  aber nicht von den absoluten Zeitpunkten  $t_1$  bzw.  $t_2$  abhängig sind.

$$E[X(t)] = \mu_X \quad (9.26)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X(\tau) \quad (9.27)$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 \quad (9.28)$$

Dabei gilt auch hier jeweils  $\tau = t_2 - t_1$ .

Umgekehrt kann aber auch von diesen Eigenschaften auf einen schwach stationären Prozess geschlossen werden: ist der lineare Erwartungswert  $\mu_X$  eines Zufallsprozesses  $X(t)$  zeitlich konstant und sind die Autokorrelationsfunktion  $R_X(\tau)$  und die Autokovarianz  $C_X(\tau)$  nur eine Funktion der Zeitdifferenz  $\tau = t_2 - t_1$  aber nicht der absoluten Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$ , dann handelt es sich bei  $X(t)$  um einen schwach stationären Prozess.

Streng stationäre Prozesse sind eine enger gefasste Teilmenge der schwach stationären Prozesse und erfüllen somit ebenfalls die Kriterien von schwacher Stationarität.

Weiter kann das zweite Moment von  $E[X^2(t)]$  des Zufallsprozesses  $X(t)$ , das heisst die mittlere statistische Leistung der ganzen Schar von Musterfunktionen, wiederum bestimmt werden, indem die Autokorrelationsfunktion für  $t_2 = t_1$  berechnet wird. Es gilt dann sowohl für streng wie auch schwach stationäre Prozesse  $X(t)$ :

$$E[X^2(t)] = R_X(0) \quad (9.29)$$

Erwartungsgemäss ist somit die mittlere statistische Leistung des Zufallsprozesses  $X(t)$  ebenfalls eine stationäre Grösse, welche sich über die Zeit hinweg nicht verändert.

Zwei Zufallsprozesse  $X(t)$  und  $Y(t)$  heissen Verbund-schwachstationär, wenn beide Prozesse für sich schwach stationär sind und für die Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{XY}$  gilt:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau) \quad (9.30)$$

Gleichzeitig ist dann auch die Kreuzkovarianz  $C_{XY}(\tau)$  der beiden Prozesse eine stationäre Grösse und nur von der Zeitdifferenz  $\tau = t_2 - t_1$  abhängig:

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y \quad (9.31)$$

An dieser Stelle soll abschliessend nochmals betont werden, dass es sich bei diesen Betrachtungen der Stationarität um zeitlich konstante statistische Grössen des gesamten Prozesses handelt und einzelne Musterfunktionen keinesfalls die gleichen zeitlich gemittelten oder sogar zeitlich unabhängigen Eigenschaften haben müssen. Die statistischen Eigenschaften des gesamten Prozesses sollen aber gleich nachfolgend mit den zeitlichen Eigenschaften seiner Musterfunktionen verglichen werden.

## 9.5 Zeitmittelwerte und Ergodizität

Mit spitzen Klammern  $\langle x(t) \rangle$  oder einem Querstricht über einer Funktion  $\overline{x(t)}$  wird in diesem Skript der zeitliche Mittelwert dargestellt.

### 9.5.1 Linearer zeitlicher Mittelwert

Der lineare zeitliche Mittelwert  $\overline{x_i}$  einer Musterfunktion  $x_i(t)$  wird wie folgt berechnet:

$$\overline{x_i} = \langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) dt \quad (9.32)$$

Der lineare zeitliche Mittelwert  $\overline{x_i}$  ist dabei pro Musterfunktion ein einzelner Zahlenwert, das heisst,  $\overline{X}$  ist eine neue Zufallsvariable, welche aus dem Zufallsprozess  $X(t)$  heraus berechnet werden kann. Von dieser Vielzahl von zeitlichen Mittelwerten, welche zu je einer Musterfunktion gehören, kann nun ebenfalls der Erwartungswert berechnet werden. Besitzt zudem der Prozess eine (schwache) Stationarität, kann der statistisch gemittelte Zeitmittelwert  $E[\overline{x(t)}]$  vereinfacht ausgedrückt werden:

$$E[\overline{x(t)}] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[x(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mu_X dt = \mu_X \quad (9.33)$$

Der über alle Musterfunktionen statistisch gemittelte lineare Zeitmittelwert  $E[\overline{x(t)}]$  entspricht also bei einem stationären Prozess gerade dem stationären, zeitlich konstanten statistischen Erwartungswert  $\mu_X$ .

### 9.5.2 Zeitliche Autokorrelationsfunktion

Die zeitliche Autokorrelationsfunktion  $\overline{R_{x_i x_i}}(\tau)$  einer Musterfunktion  $x_i(t)$  kann ebenfalls berechnet werden:

$$\overline{R_{x_i x_i}}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) dt \quad (9.34)$$

Mit der zeitlichen Autokorrelationsfunktion wird untersucht, wie gross der lineare Zusammenhang einer um  $\tau$  verschobenen Funktion  $x_i(t + \tau)$  im Vergleich zur ursprünglichen Funktion  $x_i(t)$  ist, das heisst wie ähnlich sich die beiden Signale nach einer kleineren oder grösseren zeitlichen Verschiebung  $\tau$  sind.

Für jede zeitliche Verschiebung  $\tau$  ergibt  $\overline{R_{XX}}(\tau)$  einen Wert pro Musterfunktion, das heisst  $\overline{R_{XX}}(\tau)$  ist für jedes  $\tau$  eine aus  $X(t)$  heraus berechnete Zufallsvariable. Von diesem pro Musterfunktion berechneten Wert der zeitlichen Autokorrelationsfunktion  $\overline{R_{x_i x_i}}(\tau)$  kann wiederum der Erwartungswert berechnet werden, der bei vorhandener schwachen Stationarität vereinfacht werden kann:

$$\begin{aligned} E[\overline{R_{XX}}(\tau)] &= E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[x(t)x(t + \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} R_{XX}(\tau) dt = R_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

Die statistisch über alle Musterfunktionen gemittelte zeitliche Autokorrelationsfunktion  $E[\overline{R_{XX}}(\tau)]$  entspricht also bei einem stationären Prozess gerade der stationären, zeitlich konstanten und über das Ensemble berechneten statistischen Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$ .

### 9.5.3 Ergodizität von stationären Prozessen

Ein stationärer Prozess ist zusätzlich noch bezüglich dem linearen Mittelwert ergodisch, wenn der zeitliche Mittelwert  $\overline{x_i(t)}$  jeder einzelnen Musterfunktion  $x_i(t)$  gerade dem Scharmittelwert  $\mu_X$  (d.h. dem zeitlich konstanten linearen Erwartungswert über das Ensemble) entspricht:

$$\overline{x_i} = \overline{\overline{x_i(t)}} = E[x(t)] = \mu_X \quad (9.35)$$

Ist ein Zufallsprozess ergodisch, kann aus der Beobachtung des zeitlichen Verlaufs einer *einzig* Musterfunktion  $x_i(t)$  auf die statistischen Eigenschaften des gesamten Ensembles geschlossen werden. Diese Eigenschaft ist noch viel stärker und seltener anzutreffen als Stationarität, welche oft bei genauerem Hinsehen auch nicht zweifelsfrei gegeben ist. Folgende Beispiele sollen dies illustrieren:

- In erster Näherung kann davon ausgegangen werden, dass sich die durchschnittliche Punktzahl sowie deren statistische Verteilung bei einem jährlich durchgeführten Schützenfest nicht verändern wird und der Prozess damit stationär ist. Bei genauerem hinsehen ist wohl schon diese Annahme falsch, da die Wetterverhältnisse oder technischer Fortschritt durchaus zu einer sich zeitlich ändernden Statistik führen können. Selbst wenn aber Stationarität gegeben wäre, heisst das noch lange nicht, dass ein wenig treffsicherer Schütze im Verlauf seiner Karriere an einem Schützenfest je eine durchschnittliche Punktzahl oder sogar ein Spitzenresultat erreichen wird. Der Prozess ist somit bezüglich dem linearen Mittelwert sicher nicht ergodisch.
- Würde man ein riesiges engmaschiges Netz von weltweit verteilten und ständig abgefragten Temperatursensoren besitzen, liegt eine erste Vermutung nahe, dass sich die Statistik der Temperaturverteilung zeitlich nicht ändern wird und der Prozess somit stationär ist. Ohne viel von Wetterdaten zu verstehen, ist aber diese Vermutung wohl falsch, da aufgrund von unterschiedlicher Verteilung der Landmassen, wechselnder Sonnenaktivität sowie der atmosphärischen Zusammensetzung die Temperaturstatistik vermutlich sowohl täglichen, jahreszeitlichen wie auch epochalen Veränderungen unterworfen ist.

Selbst wenn aber Stationarität gegeben wäre, wird die zeitliche Temperaturstatistik weder von Reykjavík, London noch von Dubai repräsentativ sein für eine Momentaufnahme des gesamten Netzes von Temperatursensoren. Der Prozess ist somit sicher nicht ergodisch.

Neben der Ergodizität bezüglich dem linearen Mittelwert kann ein Prozess auch in Bezug auf die Autokorrelation ergodisch sein, falls gilt:

$$\overline{R_{x_i x_i}}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = E[X(t) \cdot X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (9.36)$$

Auf ein anschauliches Beispiel, welches aufzeigt, ob ein Prozess auch in Bezug auf die Autokorrelation ergodisch ist, wird hier verzichtet. Generell ist der Nachweis der Ergodizität wie gesagt sehr schwierig. Trotzdem wird in der Praxis, zum Beispiel bei Messungen, Ergodizität oft gedankenlos vorausgesetzt: man erwartet meist, dass zeitlich aufeinanderfolgende Messwerte repräsentativ sind für die Statistik des Prozesses. Ergodizität sollte aber immer hinterfragt werden und ist ein Argument mehr, um mit statistischen Daten und ihren teils wagemutigen Interpretationen sehr vorsichtig umzugehen.

Thermisches Rauschen besitzt diese beiden Ergodizitäten. Das Quantisierungsrauschen im Vergleich dazu nur, wenn das Eingangssignal selber einen zufälligen Charakter hat, das Quantisierungsintervall klein genug gewählt wird und kein massives Oversampling vorliegt.

*Nur* bei ergodischen Prozessen (und wirklich *nur* bei diesen) können folgende zeitliche und statistische Mittelwerte gleichgesetzt werden. Als Analogien zwischen zeitlicher und statistischer Mittelung hilft die nachfolgende Darstellung aber auch bei nicht-ergodischen Prozessen, die Begriffe Erwartungswert, zweites Moment und Varianz besser einordnen zu können.

$E[X(t)] = \mu_X = \langle x(t) \rangle$	DC-Level
$E[X(t)]^2 = \mu_X^2 = \langle x(t) \rangle^2$	DC-Leistung
$E[X^2(t)] = R_X(0) = \langle x^2(t) \rangle$	Gesamtleistung
$E[(X(t) - \mu_X)^2] = C_X(0) = \sigma_X^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$	AC-Leistung
$\sqrt{C_X(0)} = \sigma_X(t) = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}$	RMS-Level (Effektivwert) des AC-Signals

## 9.6 Eigenschaften von stationären Zufallsprozessen

Bei stationären Prozessen vereinfachen sich im Vergleich zu nicht-stationären Prozessen viele statistische Kennwerte, da der Erwartungswert konstant ist und die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz  $\tau = t_2 - t_1$  abhängt. Zudem sind Autokorrelation und Autokovarianz (im Gegensatz zu Kreuzkorrelation und Kreuzkovarianz) symmetrisch zu  $\tau = 0$ , da es bei der Berechnung dieser Kennwerte keine Rolle spielt ob  $t_1 < t_2$  oder  $t_1 > t_2$  ist.

### Autokorrelation $R_{XX}(\tau)$

Definition im stationären Fall:  $R_{XX}(\tau) = E[X(t_k)X(t_k + \tau)]$  gültig für beliebige  $t_k$

Berechnung bei diskreten  $X_k$ :  $R_{XX}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{ki} \cdot x_{\tau j} \cdot p_{XX}(x_{ki}, x_{\tau j}; t_k, t_k + \tau)$

Berechnung bei stetigen  $X_k$ :  $R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_k \cdot x_{\tau} \cdot f_{XX}(x_k, x_{\tau}; t_k, t_k + \tau) dx_k dx_{\tau}$

Wertebereich:  $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Symmetrie:  $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$

Vergleich mit zweitem Moment:  $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$

**Kreuzkorrelation**  $R_{XY}(\tau)$ 

- Definition im stationären Fall:  $R_{XY}(\tau) = E[X(t_k)Y(t_k + \tau)]$
- Wertebereich:  $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$
- Enger gefasster Wertebereich:  $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$
- Keine wirkliche Symmetrie:  $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$  (Reihenfolge der Indizes beachten!)
- Orthogonalität von  $X(t)$  und  $Y(t)$ :  $X(t)$  und  $Y(t)$  sind zueinander orthogonal, falls  $R_{XY}(\tau) = 0$  für alle  $\tau$  gilt.

**Autokovarianz**  $C_{XX}(\tau)$ 

- Definition im stationären Fall:  $C_{XX}(\tau) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (X(t + \tau) - E[X(t + \tau)])]$
- Vergleich zu Autokorrelation:  $C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$  („DC-bereinigte“ Autokorrelation).

**Kreuzkovarianz**  $C_{XY}(\tau)$ 

- Definition im stationären Fall:  $C_{XY}(\tau) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (Y(t + \tau) - E[Y(t + \tau)])]$
- Vergleich zur Kreuzkorrelation:  $C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y$  („DC-bereinigte“ Kreuzkorrelation).
- Unkorreliertheit  $X(t)$  und  $Y(t)$  sind zueinander *unkorreliert*, falls  $C_{XY}(\tau) = 0$  für alle  $\tau$  gilt.

## 9.7 Spektrale Leistungsdichte

Die Leistungsspektraldichte (auch das Leistungsdichtespektrum oder die spektrale Leistungsdichte genannt, Englisch: power spectral density, PSD) eines Zufallsprozesses wird wie folgt definiert:

$$S_{XX}(\omega) = E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot |X(\omega)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [|X(\omega)|^2] \quad (9.37)$$

Dabei soll im Zeitbereich  $x_i(t)$  ein Energiesignal von  $-\frac{T}{2}$  bis  $+\frac{T}{2}$  sein, d.h.  $x_i(t) = 0$  für  $|t| > \frac{T}{2}$ . Gemäss Satz von Plancherel ist dann  $|X(\omega)|^2$  die zugehörige Energiespektraldichte (Englisch: energy spectral density). Durch die Division mit  $T$  wird diese Energiespektraldichte zur Leistungsspektraldichte, welche mit dem Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  auch für Leistungssignale und damit auch für die Musterfunktionen von stationären Prozessen berechnet werden kann. Wie immer bei Zufallsprozessen, werden statistische Eigenschaften durch die Bildung des Erwartungswertes über die ganze Schar von Musterfunktionen gemittelt, was auch beim Leistungsdichtespektrum eines Zufallsprozesses durchgeführt wird.

Für diese Leistungsspektraldichte  $S_{XX}(\omega)$  gilt nun das überaus wichtige Wiener-Chintschin-Theorem, welches für stationäre Prozesse vereinfacht mit folgendem Fourier-Paar beschrieben wird:

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (9.38)$$

**Beweis:** bei stationären Prozessen gilt:

$$R_{XX}(\tau) = E[\overline{R_{XX}}(\tau)] = E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [x(\tau) * x(-\tau)]$$

Dabei ergibt sich der letzte Schritt durch Substitution von  $t + \tau = \theta$  und Anwendung der Definition der Faltungsfunktion:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta - \tau) \cdot x(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot x(\theta - \tau) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot x(-(\tau - \theta)) d\theta = x(\tau) * x(-\tau) \end{aligned}$$

Mit dem Zeitumkehrssatz der Fourier-Transformation gilt für alle  $x(t)$ :

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega)$$

Für reellwertige  $x(t)$  gilt zudem  $X(-\omega) = X^*(\omega)$ , d.h. das Spektrum auf der negativen Frequenzachse ist konjugiert-komplex zum Spektrum auf der positiven Frequenzachse. Damit folgt für die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion eines stationären Zufallsprozesses:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{XX}(\tau)] &= \mathcal{F}\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[x(\tau) * x(-\tau)]\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[\mathcal{F}(x(\tau) * x(-\tau))] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X(\omega) \cdot X^*(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X(\omega)|^2] = S_{XX}(\omega) \end{aligned}$$

Die Leistungsspektraldichte  $S_{XX}(\omega)$  von stationären Prozessen mit reellwertigen Musterfunktionen besitzt folgende Eigenschaften:

$S_{XX}(\omega)$  ist reellwertig.

$S_{XX}(\omega) \geq 0$

$S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$

Die mittlere statistische Leistung des Zufallsprozesses  $X(t)$  (d.h. das zweite Moment  $E[X^2(t)]$ ) kann bei bekanntem Leistungsdichtespektrum durch integrieren über den gesamten Frequenzbereich bestimmt werden.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = E[X^2(t)]$$

### 9.7.1 Kreuzspektraldichte

Die Kreuzspektraldichte ist die Fourier-Transformierte der Kreuzkorrelation und zeigt als solche einen linearen statistischen Zusammenhang von zwei Zufallsprozessen  $X(t)$  und  $Y(t)$  im Frequenzbereich auf. Sind solche Ähnlichkeiten vorhanden, zeigt die Kreuzspektraldichte, in welchem Frequenzbereich sie auftreten, oder wo zum Beispiel ein orthogonaler Charakter vorherrscht.

Beispielsweise möchte man wissen, in welchen Frequenzbereichen Crosstalk zwischen zwei Übertragungskanälen auftritt, etwa wie ein Signal eines Aderpaars von einem Ethernetkabel auf ein zweites Aderpaar überspricht. Die Kreuzspektraldichte zwischen den Signalamplituden beider Aderpaare würde dies gerade aufzeigen.

Im Gegensatz zum Leistungsdichtespektrum  $S_{XX}(\omega)$  ist die Kreuzspektraldichte  $S_{XY}(\omega)$  im allgemeinen eine komplexwertige Funktion und kann damit insbesondere auch ein negatives Vorzeichen annehmen.

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

Mit  $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$  folgt:  $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$

## 9.8 Übertragung von Zufallsprozessen über LTI-Systeme

Ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System) sei gegeben durch  $Y(t) = \mathcal{T}[X(t)]$ , mit  $X(t)$  als Eingangsprozess,  $Y(t)$  als Ausgangsprozess und dem Operator  $\mathcal{T}[\cdot]$ , welcher das LTI-System repräsentiert.

Das LTI-System kann mit der Impulsantwort  $h(t)$  oder mit der Frequenzantwort  $H(\omega)$  vollständig charakterisiert werden. Mit der Impulsantwort  $h(t)$  gilt:

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t - \alpha) d\alpha \quad (9.39)$$

Diese Gleichung drückt in sehr kompakter Weise aus, dass für jede Musterfunktion  $x_\lambda(t)$  des Zufallsprozesses  $X(t)$  mit Hilfe der Faltungsfunktion und der Impulsantwort  $h(t)$  das Ausgangssignal  $y_\lambda(t)$  berechnet werden kann. Die Schar der Ausgangssignale  $y_\lambda(t)$  bilden alle zusammen den Zufallsprozess  $Y(t)$ .

### 9.8.1 Erwartungswert und Autokorrelationsfunktion am Ausgang des LTI-Systems

Ohne Beweis ist nachfolgend aufgeführt, wie der Erwartungswert  $\mu_Y(t)$  und die Autokorrelationsfunktion  $R_{YY}(t_1, t_2)$  des Ausgangsprozesses  $Y(t)$  mit Hilfe der Impulsantwort  $h(t)$  berechnet werden kann:

$$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t) \quad (9.40)$$

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \cdot h(\beta) \cdot R_{XX}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) d\alpha d\beta \quad (9.41)$$

Handelt es sich beim Eingangsprozess um einen stationären Prozess (d.h. zumindest WSS), können diese Formeln noch weiter vereinfacht werden, wobei  $H(0)$  für die Frequenzantwort  $H(\omega)$  bei  $\omega = 0$  steht.

$$\mu_Y = H(0) \cdot \mu_X \quad (9.42)$$

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \cdot h(\beta) \cdot R_{XX}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \quad (9.43)$$

Ist ein Zufallsprozess am Eingang eines LTI-Systems stationär (zumindest WSS) erzeugt er auch am Ausgang des LTI-Systems einen stationären WSS-Prozess.

### 9.8.2 Leistungsdichtespektrum am Ausgang des LTI-Systems

Auch beim Ausgangsprozess  $Y(t)$  berechnet sich das Leistungsdichtespektrum  $S_{YY}(\omega)$  mit der Fouriertransformierten der Autokorrelationsfunktion  $R_{YY}(\tau)$ :

$$S_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (9.44)$$

Diese spektrale Leistungsdichte kann auch direkt im Frequenzbereich berechnet werden:

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) \quad (9.45)$$

Die Berechnung der spektralen Leistungsdichte  $S_{YY}(\omega)$  durch Multiplikation im Frequenzbereich ist deutlich weniger rechenintensiv als die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{YY}(\tau)$  mit den beiden Faltungen im Zeitbereich. Zur Berechnung von  $R_{YY}(\omega)$  lohnt sich deshalb der Umweg mit der Fouriertransformation des Eingangsprozesses in den Frequenzbereich und der Rücktransformation des Ausgangsprozesses zurück in den Zeitbereich:

$$R_{YY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \quad (9.46)$$

Die statistische Leistung des Ausgangsprozesses  $Y(t)$ , d.h. sein zweites Moment  $E[Y^2(t)]$ , kann mit Hilfe der Fourierreücktransformation des Leistungsdichtespektrums für  $\tau = 0$  sehr einfach berechnet werden:

$$E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) d\omega \quad (9.47)$$

## 9.9 Ausgesuchte Zufallsprozesse

Nachfolgend werden fünf wichtige Kategorien von Zufallsprozessen mit ihren Eigenschaften kurz vorgestellt:

- Gauss'scher Zufallsprozess
- Weisses Rauschen
- Farbige Rauschen
- Bandbegrenztes Rauschen
- Schmalbandige Zufallsprozesse

Beim gauss'schen Zufallsprozess handelt es sich um eine Eigenschaft im Zeitbereich, konkret der statistischen Amplitudenverteilung zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t_k$ . Bei den vier Rauschsignalen handelt es sich um Eigenschaften im Frequenzbereich, konkret der Ausprägung des Leistungsdichtespektrums  $S_{XX}(\omega)$ .

Die gauss'sche Eigenschaft im Zeitbereich kann (aber muss nicht) mit einer der Ausprägungen im Frequenzbereich kombiniert auftreten. So spricht man zum Beispiel bei einem gauss'schen Zufallsprozess mit weissem Spektrum, welcher zum Beispiel als thermisches Rauschen einem Nutzsignal überlagert ist, von einem additiven weißen gauss'schen Rauschen (Englisch: additive white Gaussian noise, AWGN).

### 9.9.1 Gauss'scher Zufallsprozess

- Beispiel: thermisches Rauschen von Widerständen.
- Zweidimensionaler Fall (gauss'sche Verbunddichte):

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \cdot e^{-\frac{(x_1 - \mu_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2}} \cdot e^{-\frac{(x_2 - \mu_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$$

- Zu jedem Zeitpunkt  $t_i$  ist die Zufallsvariable  $X(t_i)$  gaussverteilt.
- $\mu_X(t)$  und  $R_{XX}(t_1, t_2)$  charakterisieren einen gauss'schen Zufallsprozess vollständig.
- Sind die Zufallsvariablen  $X(t_1)$  und  $X(t_2)$  unkorreliert ( $C_{XX}(t_1, t_2) = 0$ ), so sind die Zufallsvariablen auch unabhängig voneinander, d.h.:  $f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) \cdot f_X(x_2; t_2)$
- Ist ein gauss'scher Prozess WSS ist er zugleich auch SSS.
- Ein gauss'scher Zufallsprozess  $X(t)$  ist am Ausgang eines LTI Systems ( $Y(t)$ ) wiederum gaussisch.

### 9.9.2 Weisses Rauschen

- Beispiel: thermisches Rauschen von Widerständen.
- „weiss“ ist eine Analogie zum Licht und bedeutet eine konstante Leistungsdichte über den gesamten Frequenzbereich:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2} \cdot \delta(\tau)$$

- Ist  $S_{XX}(\omega)$  konstant, dann ist eigentlich die Leistung des Zufallsprozesses unendlich gross, d.h. in der Praxis kann weisses Rauschen nur in einem begrenzten Frequenzbereich vorkommen.

### 9.9.3 Farbige Rauschen

Wiederum mit Namen, welche eine Analogie zum Licht bilden, haben farbige Rauschsignale eine spektrale Leistungsdichte, welche proportional zu  $\omega$  oder  $\omega^2$  ansteigt oder abfällt.

- Brown'sches oder rotes Rauschen (brownian noise):  $S_{XX}(\omega) \propto \frac{1}{\omega^2}$
- Rosa Rauschen (pink noise):  $S_{XX}(\omega) \propto \frac{1}{\omega}$
- Blaues Rauschen (azure noise):  $S_{XX}(\omega) \propto \omega$
- Violettes Rauschen (purple noise):  $S_{XX}(\omega) \propto \omega^2$

Während Brown'sches Rauschen durch einfache Integration von weissem Rauschen und violettes Rauschen durch Differentiation gebildet werden kann, muss die Erzeugung von rosa Rauschen, welches eine für die Audiotechnik interessante konstante Leistung pro Oktave besitzt, sowie blaues Rauschen mit mehrstufigen Filtern approximiert werden.

### 9.9.4 Bandbegrenztes weisses Rauschen

- Bei einem Zufallsprozess  $X(t)$  handelt es sich um bandbegrenztes Rauschen, falls gilt:

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |\omega| \leq \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \end{cases}$$

- Daraus kann die Autokorrelationsfunktion berechnet werden:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{+\omega_b} \frac{\eta}{2} \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\eta\omega_B}{2\pi} \frac{\sin(\omega_B\tau)}{\omega_B\tau}$$

### 9.9.5 Schmalbandiges Rauschen

Ist die Bandbreite  $B_{BP} = 2B$  eines Bandpasssignals  $x_{BP}(t)$  sehr klein im Vergleich zu seiner Mittenfrequenz  $f_c$  (d.h.  $2B \ll f_c$ ) spricht man von einem schmalbandigen Bandpasssignal. Handelt es sich bei  $x_{BP}(t)$  um ein stochastisches Rauschsignal, wird es als schmalbandiger Zufallsprozess oder schmalbandiges Rauschen bezeichnet.

Ein gutes Beispiel für schmalbandiges Rauschen bilden Störsignale im Kanal, welche einem schmalbandigen Nachrichtensignal überlagert sind und nach dem Eingangsverstärker auf die Bandbreite des Nachrichtensignals reduziert werden.

Eine Messung von schmalbandigem Rauschen im Zeitbereich ergibt ein sinusförmiges Signal mit zufälliger Amplitude und Phase:

$$X(t) = V(t) \cdot \cos [\omega_c t + \phi(t)] \quad (9.48)$$

Dabei bezeichnen  $V(t)$  und  $\phi(t)$  folgende Zufallsprozesse:

$V(t)$ : Enveloppen-Funktion

$\phi(t)$ : Phasenfunktion.

Anstatt in Polarkoordinaten kann dieses schmalbandige Rauschen auch in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden:

$$X(t) = X_a(t) \cos \omega_c(t) - X_b(t) \sin \omega_c(t) \quad (9.49)$$

Dabei sind  $X_a(t)$  und  $X_b(t)$  Zufallsprozesse, welche den Cosinus- bzw. den negativen Sinusträger modulieren. Die Umrechnung geschieht wie folgt:

$$X_a(t) = V(t) \cos \phi(t) \quad : \text{Inphase-Anteil der Basisbanddarstellung}$$

$$X_b(t) = V(t) \sin \phi(t) \quad : \text{Quadratur-Anteil der Basisbanddarstellung}$$

$$V(t) = \sqrt{X_a^2(t) + X_b^2(t)}$$

$$\phi(t) = \arg \frac{X_b(t)}{X_a(t)}$$

Die beiden Prozesse  $X_a(t)$  und  $X_b(t)$  im Basisband besitzen folgende Eigenschaften:

- $S_{X_a X_a}(\omega) = S_{X_b X_b}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega - \omega_c) + S_{XX}(\omega + \omega_c) & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$
- Bei  $X_a(t)$  und  $X_b(t)$  handelt es sich damit um bandbegrenztes Rauschen im Basisband.
- $\mu_{X_a} = \mu_{X_b} = \mu_X = 0$
- $\sigma_{X_a}^2 = \sigma_{X_b}^2 = \sigma_X^2$
- $E[X_a(t)X_b(t)] = 0$  (unkorriert und orthogonal)
- Ist  $X(t)$  ein Gauss-Prozess, sind auch  $X_a(t)$  und  $X_b(t)$  gaussisch (ohne Beweis).
- Ist  $X(t)$  ein Gauss-Prozess, gilt:  
 $V(t)$ : Rayleigh-verteilt zu jedem Zeitpunkt  $t$   
 $\Phi(t)$ : gleichverteilt ( $0..2\pi$ ) zu jedem Zeitpunkt  $t$ .

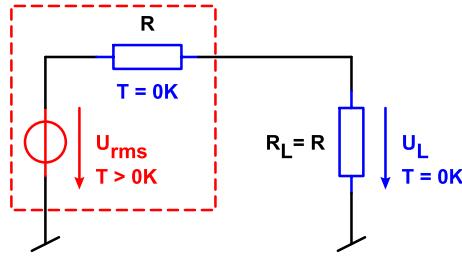
## 9.10 Praxisnahe Rauschquellen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden ein paar Klassen von Rauschsignalen vorgestellt, wie sie exemplarisch in verschiedenen Verarbeitungsstufen von Kommunikationssystemen auftreten können. Nachfolgend soll nun dargelegt werden, von wo solche Rauschsignale herrühren und mit welcher Leistung und welcher spektralen Charakteristik sie auftreten.

### 9.10.1 Thermisches Widerstandsrauschen

Thermisches Rauschen von Widerständen kommt der Idealisierung von weissem gauss'schem Rauschen recht nahe. Es entsteht durch die thermisch bedingte Bewegung von Elektronen in leitendem Material, welche durch ihre Verschiebung Strom- und Spannungsschwankungen verursachen.

Die thermische Rauschspannung eines Widerstands  $R$  kann als stochastische Spannungsquelle mit einer rauschfreien Quellenimpedanz  $R$  modelliert werden. Dies ist nachfolgend innerhalb der rot gestrichelten Linie für eine Temperatur von  $T > 0$  K dargestellt:



**Abbildung 9.3:** Thermische Rauschspannung eines Widerstand  $R$

Soll diese thermische Rauschquelle elektrische Leistung an ein Netzwerk oder eine Last abgeben, wird diese genau dann maximal, wenn die Lastimpedanz denselben Wert wie der thermisch rauschende Widerstand besitzt. Dadurch entsteht ein Impedanzteiler der die Amplitude der Rauschspannung halbiert. Die Last soll ebenfalls die Temperatur  $T = 0$  haben, da sie in diesem einfachen Modell auch eine Leitungsimpedanz repräsentieren soll. Ansonsten würden sich die Rauschspannungen der beiden Widerstände überlagern, was hier nicht weiter verfolgt werden soll. Die von der Rauschquelle übertragene spektrale Leistungsdichte beträgt im einseitigen Spektrum:

$$\eta = k_B \cdot T_{\text{abs}} \quad (9.50)$$

Die einzelnen Variablen haben dabei folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \eta &\quad \text{Spektrale Leistungsdichte des *einseitigen* Spektrums} \\ k_B = 1.38065 \cdot 10^{-23} \text{ WsK}^{-1} &\quad \text{Boltzmann-Konstante} \\ T_{\text{abs}} &\quad \text{Absolute Temperatur in Kelvin} \end{aligned}$$

Diese spektrale Leistungsdichte  $\eta$  des thermischen Rauschens ist unabhängig vom Widerstandswert  $R$  und konstant bis ca. 1 THz. Anschliessend fällt sie leicht, ab 10 THz deutlich ab. Würde kein solches Abfallen des Leistungsdichtespektrums stattfinden, ergäbe die Gesamtleistung über den gesamten Frequenzbereich einen unendlich grossen Wert, was physikalisch keinen Sinn ergibt.

Bei Zimmertemperatur ( $T = 293$  K) ist somit die spektrale Leistungsdichte über einen weiten Frequenzbereich konstant und hat für das einseitige Spektrum einen Wert von  $\eta = -174$  dBm/Hz

Unterhalb von 1 THz ergibt sich an der Last  $R_L = R$  für eine Messbandbreite  $B$  folgende thermische Rauschleistung:

$$P_L = \eta \cdot B = k_B \cdot T_{\text{abs}} \cdot B \quad (9.51)$$

Der Effektivwert der Rauschspannung im vorhergehenden Modell berechnet sich damit zu:

$$U_{\text{rms}} = 2\sqrt{R \cdot k_B \cdot T_{\text{abs}} \cdot B} \quad (9.52)$$

Damit beträgt die interne thermische Rauschleistung der modellierten Rauschquelle (ohne Last) bei einer Messbandbreite  $B$ :

$$P = 4 \cdot k_B \cdot T_{\text{abs}} \cdot B$$

Wie schon erwähnt ist diese Quelle nur dann in der Lage, einen grossen Teil ihrer Leistung an eine äussere Last abzugeben, wenn die Lastimpedanz an die Quellenimpedanz angepasst. Damit verringert sich aber der Effektivwert der Rauschspannung an der Last um den Faktor 2, jener der mittleren Leistung um den Faktor 4.

Beispiel: Bei der als Referenz oft verwendeten (mit  $16.85^\circ\text{C}$  leicht kühlen) Zimmertemperatur von  $T = 290$  K erzeugen Widerstände eine Rauschleistung von  $0.016$  pW/MHz. Bei einer Bandbreite von 1 MHz und einem Widerstand  $R = 1$  MΩ beträgt der

Effektivwert somit  $U_{\text{rms}} = 0.13 \text{ mV}$ . Wird diese Leistung an eine angepasste Last abgegeben, verringert sich dort die aufgenommene Leistung auf einen Viertel, d.h.  $0.004 \text{ pW/MHz}$  was in diesem Beispiel einen Effektivwert von  $U_{L\text{rms}} = 0.065 \text{ mV}$  ergibt.

### 9.10.2 Rauschverhalten von Halbleiterverstärkern

Verstärker skalieren den am Eingang anliegenden Effektivwert  $u_{i\text{rms}}$  des Rauschens nicht nur um den Verstärkungsfaktor  $k$  zum Ausgang hin hoch, sondern tragen auch selber einen Teil zum Rauschen bei. Neben den wiederum thermischen Rauschanteilen durch die Widerstände in den Arbeitspunkten der Verstärkerschaltung, gesellt sich bei Halbleiterverstärkern auch das Schrotrauschen als weisses gauss'sches Rauschen zum verstärkerinternen Rauschen. Dieses entsteht durch den Übergang der Ladungsträger über die Potentialbarrieren der PN-Übergänge.

Das interne Rauschen des Verstärkers und das Rauschen der externen Beschaltung ergeben zusammen am Ausgang des Verstärkers einen Effektivwert, welcher grösser ist als der reine Anteil des verstärkten Eingangsrauschen, d.h.  $u_{o\text{rms}} > k \cdot u_{i\text{rms}}$ . Dieser zusätzliche Rauschanteil wird oft als Rauschzahl  $F$  (Englisch: noise figure) in Dezibel ausgedrückt. Die Rauschzahl berechnet sich wie folgt:

$$F = 20 \log_{10} \left( \frac{u_{o\text{rms}}}{k \cdot u_{i\text{rms}}} \right) \quad (9.53)$$

Bei Operationsverstärkern wird im Datenblatt das Rauschen oft als Spannungsrauschen (zwischen den Anschlüssen + und -, in  $[\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}]$ ) und Stromrauschen (je separat für die Anschlüsse + und -, in  $[\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}]$ ) spezifiziert. Das Stromrauschen multipliziert sich jeweils mit der Impedanz der äusseren Beschaltung an den beiden Verstärkereingängen und kann, wenn diese Beschaltung zu hochohmig realisiert wird, das Spannungsrauschen dominieren.

Da alle drei Rauschquellen nicht korreliert zueinander sind, müssen diese Leistungen zur gesamten Rauschleistung am Eingang des Verstärkers summiert werden, bevor der resultierende RMS-Wert der Rauschspannung zum Ausgang hin mit dem Verstärkungsfaktor  $k$  des Verstärkers zur Ausgangsrauschspannung hochskaliert wird.

Neben den frequenzunabhängigen Rauschanteilen des thermischen Rauschens und des Schrotrauschen weisen Halbleiterverstärker noch das sogenannte 1/f-Rauschen auf, welches im Frequenzbereich unterhalb einiger kHz die weissen Rauschanteile des Verstärkers dominiert. In den Datenblättern der Operationsverstärker ist üblicherweise die Frequenz, unter welcher 1/f-Rauschen berücksichtigt werden muss, als Zahlenwert oder in graphischer Darstellung spezifiziert.

### 9.10.3 Rauschen am Antenneneingang

Am Antenneneingang eines Funkempfängers befinden sich neben dem Nutzsignal auch eine Vielzahl von verschiedenen Störsignalen, welche sich im Raum als elektromagnetische Wellen fortbewegen. Neben Einzelergebnissen, wie elektrostatischen Entladungen, Bursts (Schaltvorgänge, z.B. von Relais) oder Surges (Blitzentwicklungen) sowie rein lokalen Störsignalen von benachbarten Geräten und Systemen wird der Empfang des Nutzsignals auch durch stationäres Rauschen beeinträchtigt. Je nach Frequenzbereich sind unterschiedliche Ursachen für dieses Rauschen dominant:

- Atmosphärische Störungen, verursacht durch die weltweite Gewitteraktivität.
- Galaktisches Rauschen, verursacht durch Aktivität der Sonne, Planeten und anderer Gestirne.
- Man-made Noise: Summe der elektromagnetischen Störungen sämtlicher elektrischer Geräte.

In der ITU-Recommendation ITU-R P.372 sind die typischen Leistungsdichtespektren dieser verschiedenen Rauschquellen dargestellt und werden in folgendem Graphen wiedergegeben:

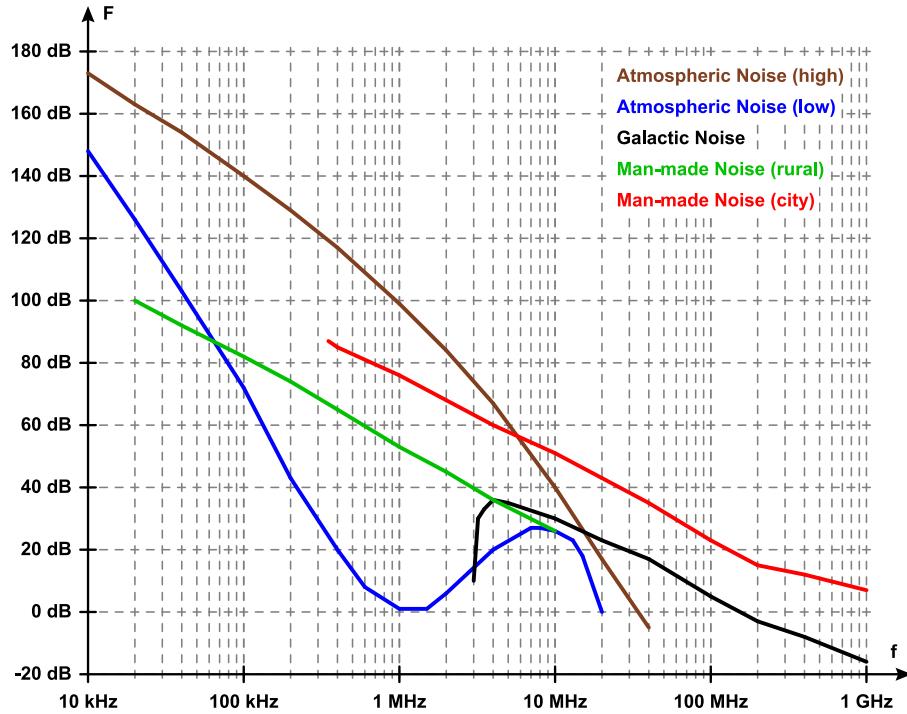


Abbildung 9.4: Leistungdichtespektren von Rauschsignalen gemäss ITU-R P.372

In dieser Darstellung wird wiederum die Rauschzahl  $F$  in Dezibel verwendet, welche sich auf die Referenzleistung das thermische Widerstandsrauschen bei 290 K bezieht.

Dieses störende Rauschen beschränkt sich nicht nur auf den Empfang von Funksignalen, da auch Kabel und Geräte mehr oder weniger effiziente Empfangsantennen darstellen. Mit einer üblichen EMV-gerechten Realisierung von Geräten und Verkabelung, welche zum Beispiel das Verdrillen und Schirmen von symmetrischen Leitungen beinhaltet, können jedoch sehr hohe Dämpfungswerte realisiert werden, welche den Einfluss dieser Rauschquellen minimieren.

Idealerweise ist bei drahtgebundenen Kommunikationssystemen der Aufbau so gut realisiert, dass im höheren Frequenzbereich ab ein paar MHz nur noch das thermische Widerstandsrauschen von Belang ist. Bei einem schlechten Aufbau der Verkabelung, wie sie bei Power-Line Communication oft vorzufinden ist, bilden diese äusseren Rauschquellen jedoch einen wichtigen limitierenden Faktor für den Durchsatz und die Reichweite der Datenkommunikation.

## 9.11 Leistungdichtespektren von Leitungscodes

In Nachrichtentechnik 1 wurden einige Leitungscodes vorgestellt, welche dank verschiedenen nützlichen Eigenschaften für bestimmte Anwendungszwecke mehr oder weniger gut geeignet waren. Wichtige Kriterien zur Auswahl des am besten geeigneten Leitungscodes sind hier nochmals aufgelistet:

- Gute Synchronisationseigenschaften zur Clockrückgewinnung.
- Spektraler Aufbau des codierten Signals (und speziell die DC-Freiheit).
- Bandbreiteneffizienz der Übertragung.
- Qualitätsüberwachung der Übertragung (Bestimmung der Bitfehlerrate).
- Fähigkeit neben den Nutzdaten auch eine Signalisierung zu übertragen.
- Einfache Implementierbarkeit („nur so aufwendig wie nötig“).

Synchronisationseigenschaften, Qualitätsüberwachung, Signalisierung und Implementierbarkeit sind Eigenarten, welche sich auf den sequentiellen Verlauf des codierten Signals und somit auf den Zeitbereich beziehen. Diese sind meist relativ einfach überblickbar. Um die DC-Freiheit und die Bandbreiteneffizienz beurteilen zu können, muss das Spektrum eines Leitungscodes bestimmt werden und zwar in zusammenfassender statistischer Art, d.h. unabhängig davon, welche Datensequenz zur Codierung gerade vorliegt. Ziel ist damit, auf statistische Weise sämtliche denkbaren Codesequenzen auf einmal zu untersuchen.

Das Leistungsdichtespektrum eines Zufallsprozesses  $X(t)$  kann am einfachsten bestimmt werden, indem die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  berechnet wird. Die spektrale Leistungsdichte  $S_{XX}(\omega)$  ergibt sich dann sofort durch eine Fouriertransformation  $\mathcal{F}(R_{XX}(\tau))$  dieser Autokorrelationsfunktion. Dieser einfache Sachverhalt gilt aber nur, wenn es sich bei  $X(t)$  um einen (schwach-)stationären Zufallsprozess handelt.

In einem ersten Schritt muss deshalb gewährleistet werden, dass der interessierende Zufallsprozess  $X(t)$  tatsächlich stationär ist. Dies kann mit dem schon erwähnten, sehr einfachen Trick erzwungen werden: anstatt die codierten Bitsequenzen geordnet so darzustellen, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  z.B. ein Bitwechsel oder exakt die Mitte eines übertragenen Bits vorliegt, lassen wir es zu, dass die untersuchte Gesamtheit der Codesequenzen zusätzlich noch in beliebiger Phasenlage (d.h. mit beliebigem zeitlichen Versatz der periodischen Bitwechsel im Vergleich zu  $t = 0$ ) vorliegen darf und keine dieser zeitlichen Verschiebungen bevorzugt auftritt. So wird erreicht, dass die n-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen komplett unabhängig vom Zeitpunkt  $t$  werden und dadurch ein stark-stationärer Prozess vorliegt.

Untersucht werden nachfolgend nur ein paar geläufige, mit einem Zero-Order Hold geformte („eckige“) Leitungscodes, um die Berechnung zu vereinfachen. Liegt das Leistungsdichtespektrum dieser „eckigen“ Leitungscodes einmal vor, kann dieses immer noch umgerechnet werden für den Fall, dass die Pulse der Leitungscodes z.B. mit einem Raised-Cosine-Pulsformfilter gebildet wurden. Die Beschränkung auf Line-Codes, welche abschnittsweise mit einem Zero-Order Hold gebildet werden, hat den grossen Vorteil, dass der Zufallsprozess zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  aus diskreten Zufallsvariablen besteht und die Autokorrelationsfunktion ausschliesslich mit der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j}; t_k, t_k + \tau)$  berechnet werden kann:

$$R_{XX}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j}; t_k, t_k + \tau) \quad (9.54)$$

Als nächstes wird ein – dank der Stationarität beliebiger – Zeitpunkt  $t_k$  festgehalten, bei welchem die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  durchgeführt werden soll. Es bietet sich natürlich an, durch die Wahl  $t_k = 0$  die Berechnung möglichst einfach und übersichtlich zu halten.

Mit der Autokorrelationsfunktion wird das Produkt sämtlicher Amplitudenkombinationen aufsummiert, wobei diese einzelnen Produkte mit ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit gewichtet werden. Es gilt nun, diese Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Verschiebung  $\tau$  zu bestimmen.

Ist die Verschiebung  $\tau$  im Vergleich zur Bitzeit  $T$  sehr klein, werden dadurch nur bei sehr wenigen Musterfunktionen  $x_\lambda(t)$  unterschiedliche Amplituden vorliegen, nämlich nur bei jenen  $x_\lambda(t)$ , bei denen ein Amplitudenübergang am Ende der Bitzeit (oder bei gewissen Leitungscodes evtl. auch in der Mitte der Bitzeit) ganz nahe beim festgehaltenen Zeitpunkt  $t_k = 0$  stattfand. Je grösser  $\tau$  gewählt wird, umso mehr Musterfunktionen  $x_\lambda(t)$  werden auftreten, bei welchen ein Amplitudenübergang zu verzeichnen ist. Ab einer Verschiebung  $\tau \geq \frac{T}{2}$  wird es keine Musterfunktionen mehr geben, bei welchen die untersuchten Amplituden von der gleichen Bithälfte stammen. Ab  $\tau \geq T$  werden die zur Berechnung von  $R_{XX}(\tau)$  verwendeten Amplitudenkombinationen bei sämtlichen Musterfunktionen  $x_\lambda(t)$  von unterschiedlichen Bit stammen.

Es bietet sich nun an, bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  eine Fallunterscheidung durchzuführen, ob die Amplitudenkombinationen der Musterfunktion vom selben Bit oder von unterschiedlichen Bitzeiten stammen. Bei RZ-Codes und beim Manchester-Code ist zudem eine zusätzliche Unterteilung sinnvoll, ob die Amplitudenkombination von derselben Bithälfte oder von unterschiedlichen Bithälften stammen:

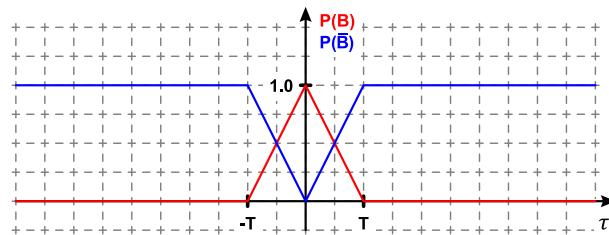
- Ereignis  $B$ : die Amplitudenwerte der Musterfunktion stammen vom selben Bit.  
Ereignis  $\bar{B}$ : die Amplitudenwerte der Musterfunktion stammen von unterschiedlichen Bit.

- Ereignis  $B1$ : die Amplitudenwerte stammen vom selben Bit und derselben Bithälfte.  
Ereignis  $B2$ : die Amplitudenwerte stammen vom selben Bit aber unterschiedlichen Bithälften.  
Ereignis  $B3$ : die Amplitudenwerte stammen von unterschiedlichen Bit aber jeweils derselben Bithälfte.  
Ereignis  $B4$ : die Amplitudenwerte stammen von unterschiedlichen Bit und unterschiedlichen Bithälften.

Anschliessend können die bedingten Wahrscheinlichkeiten (z.B.  $p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B)$ ) sehr einfach bestimmt werden und die Anteile zur Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  aus den Ereignissen  $B$  und  $\bar{B}$  (bzw.  $B1, B2, B3$  und  $B4$ ) addiert werden.

Prinzipiell sind auch andere Unterteilungen in Ereignisse denkbar, welche helfen, die Wahrscheinlichkeiten der Amplitudenkombination zu berechnen (oder auch gar keine Unterteilung, falls dadurch die Übersicht nicht verloren geht). Wichtig bei einer Unterteilung ist aber natürlich, dass im Sinne des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit sämtliche Musterfunktionen genau einmal ihren Anteil zur Autokorrelationsfunktion beitragen. Dazu muss die Unterteilung in die gewählten Ereignisse eine paarweise unvereinbare und vollständig abgeschlossene Ereignismenge  $M$  bilden.

Die Wahrscheinlichkeiten  $P(B)$  und  $P(\bar{B})$  in Abhängigkeit von  $\tau$  können einfach bestimmt werden:



**Abbildung 9.5:** Wahrscheinlichkeiten  $P(B)$  und  $P(\bar{B})$  in Abhängigkeit der Verschiebung  $\tau$

Selbes Bit: 
$$P(B) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & \text{für } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{für } |\tau| \geq T \end{cases}$$

Unterschiedliches Bit: 
$$P(\bar{B}) = \begin{cases} \frac{|\tau|}{T} & \text{für } |\tau| \leq T \\ 1 & \text{für } |\tau| \geq T \end{cases}$$

Es sei hier nochmals erwähnt, dass die Unterteilung in die Ereignisse  $B$  und  $\bar{B}$  sämtliche Musterfunktionen abdeckt, d.h.  $B$  und  $\bar{B}$  bilden eine unvereinbare und vollständig abgeschlossene Ereignismenge  $M$ . Daraus folgt auch, dass unabhängig von  $\tau$  für die Summe von  $P(B)$  und  $P(\bar{B})$  gilt:

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

Die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  kann jetzt aus dem Anteil  $R_{XX|B}(\tau)$  der Musterfunktion, für welche Ereignis  $B$  zutrifft, und dem Anteil  $R_{XX|\bar{B}}(\tau)$  der Musterfunktionen, die zum Ereignis  $\bar{B}$  gehören bestimmt werden:

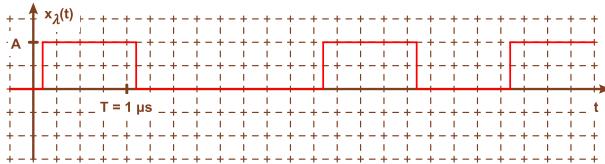
$$R_{XX}(\tau) = R_{XX|B}(\tau) \cdot P(B) + R_{XX|\bar{B}}(\tau) \cdot P(\bar{B}) \quad (9.55)$$

Aufgrund des linearen Verlaufs von  $P(B)$  und  $P(\bar{B})$  im Intervall  $0 \leq |\tau| \leq T$  und  $P(\bar{B}) = 1$  für  $|\tau| \geq T$  reicht es zudem, die Autokorrelationsfunktion an der Stelle  $\tau = 0$  (d.h.  $R_{XX|B}(\tau)$ ) und an der Stelle  $\tau = T$  (d.h.  $R_{XX|\bar{B}}(\tau)$ ) zu berechnen, die Werte dieser beiden Berechnungen im Intervall  $-T \dots 0$  und  $0 \dots +T$  linear zu verbinden und den Wert von  $R_{XX}(\tau)$  an der Stelle  $\tau = \pm T$  für  $|\tau| \geq T$  beizubehalten.

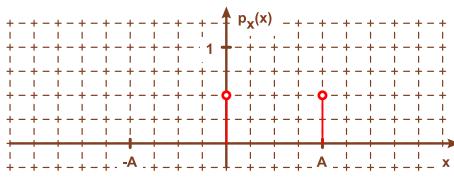
**Beispiel:** gegeben ist eine binäre 1 MBit/s Datenquelle, welche statistisch zu gleichen Anteilen Mark und Space ausgibt, die unabhängig von den Bitwerten der vorhergehenden Symbole ist. Eine Quelle, welche Symbolwerte nur aufgrund ihrer Auftretenswahr-

scheinlichkeit aber unabhängig von der Vorgeschichte ausgibt, wird gedächtnisfrei genannt. Die Daten werden codiert mit unipolarem NRZ und „eckig“ (d.h. mit Zero-Order Hold) mit den über die ganze Bitzeit  $T = 1 \mu\text{s}$  konstanten Amplituden  $A$  für Mark und 0 für Space ausgegeben. Das Spektrum dieser Übertragung soll nun bestimmt werden.

Eine mögliche Musterfunktion ist im nachfolgenden Graphen im Zeitbereich dargestellt. Die Datensequenz wurde bewusst mit einem leichten zeitlichen Versatz der Bitübergänge zur Bitzeit  $k \cdot T$  dargestellt, um zu illustrieren, dass mit beliebigen Phasenlagen der Musterfunktionen die Stationarität des ganzen Zufallsprozesses  $X(t)$  erzwungen wurde.

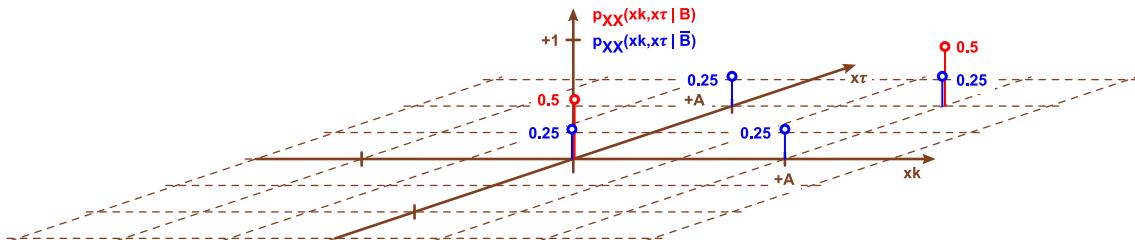


Zu jedem beliebigen Zeitpunkt ergibt dies folgende Amplitudenverteilung :



Da bei einer „eckigen“ Übertragung mit Zero-Order Hold nur die zwei Amplitudenwerte 0 und  $A$  existieren, ist der Zufallsprozess  $X(t)$  diskret. Damit handelt es sich bei der Amplitudenverteilung um eine Wahrscheinlichkeitsmasse- und nicht um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Diese eindimensionale Wahrscheinlichkeitsmassefunktion  $p_X(x)$  kann zur Kontrolle der (alle Ereignisse zusammenfassenden) zweidimensionalen Verteilung verwendet werden, deren Randfunktionen in beiden Dimensionen unabhängig von der Verschiebung  $\tau$  immer diesem eindimensionalen  $p_X(x)$  entsprechen müssen.

Die zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen in Abhängigkeit der zuvor definierten Ereignisse  $B$  (selbes Bit) und  $\bar{B}$  (unterschiedliches Bit) sind nachfolgend dargestellt:



Musterfunktion, bei welchen ausgehend vom Zeitpunkt  $t_k$  und bei einer Verschiebung  $\tau$  noch die Amplitude des selben Bits aufweisen, liefern somit folgenden Anteil an die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$ :

$$R_{XX|B}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B) = 0 \cdot 0 \cdot 0.5 + A \cdot A \cdot 0.5 = \frac{A^2}{2}$$

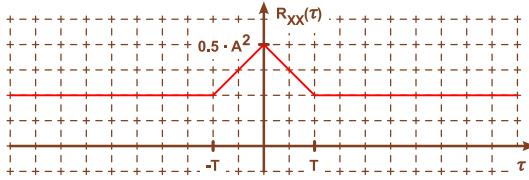
Alle anderen Musterfunktion liefern folgenden Anteil an  $R_{XX}(\tau)$ :

$$R_{XX|\bar{B}}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | \bar{B}) = 0 \cdot 0 \cdot 0.25 + 0 \cdot A \cdot 0.25 + A \cdot 0 \cdot 0.25 + A \cdot A \cdot 0.25 = \frac{A^2}{4}$$

Insgesamt ergibt dies für die Autokorrelationsfunktion:

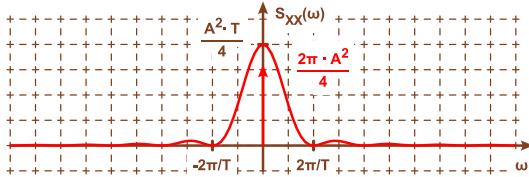
$$R_{XX}(\tau) = R_{XX|B}(\tau) \cdot P(B) + R_{XX|\bar{B}}(\tau) \cdot P(\bar{B}) = \frac{A^2}{2} \cdot P(B) + \frac{A^2}{4} \cdot P(\bar{B})$$

Dies ergibt folgende graphische Darstellung für  $R_{XX}(\tau)$ :



Um das Leistungsdichtespektrum zu berechnen, muss die Fouriertransformierte von  $R_{XX}(\tau)$  bestimmt werden. Da es sich bei der Fouriertransformation um eine lineare Operation handelt, kann  $R_{XX}(\tau)$  in Anteile aufgeteilt werden, welche jeweils einzeln leicht transformiert werden können. Es bietet sich an,  $R_{XX}(\tau)$  in den Gleichanteil  $\frac{A^2}{4}$  und die verbleibende Dreiecksfunktion aufzuteilen. Damit ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum  $S_{XX}(\omega)$

$$S_{XX}(\omega) = 2\pi \cdot \frac{A^2}{4} \cdot \delta(\omega) + \frac{A^2}{4} \cdot T \cdot \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right)^2$$



Somit wurde das Spektrum dieses NRZ-Signals berechnet. Es zeigt sich, dass wegen der Impulsfunktion  $\delta(\omega)$  das Signal einen DC-Offset besitzt und zudem auch im Rest des Leistungsdichtespektrums viel Signalleistung im tiefen Frequenzbereich auftritt.

Ist ein Leitungscode in zwei unterschiedliche Bithälften unterteilt (wie dies bei einem RZ-Signal oder beim Manchester-Code der Fall ist), kann prinzipiell genau gleich wie im vorhergehenden Abschnitt vorgegangen werden, wobei wir anstatt 2 Ereignisse  $B$  und  $\bar{B}$  nun 4 Ereignisse  $B1$  bis  $B4$  unterscheiden. Mit kaum grössem Aufwand lassen sich wiederum die Wahrscheinlichkeiten  $P(B1)$ ,  $P(B2)$ ,  $P(B3)$  und  $P(B4)$  bestimmen und in sehr kompakter Schreibweise notieren:

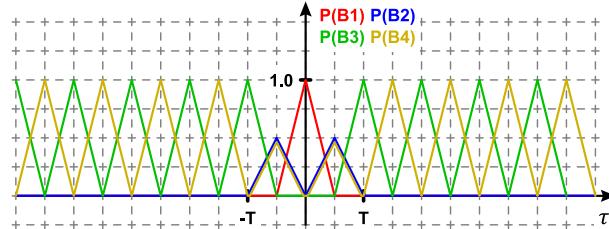


Abbildung 9.6: Wahrscheinlichkeiten  $P(B1)$ ,  $P(B2)$ ,  $P(B3)$  und  $P(B4)$  in Abhängigkeit der Verschiebung  $\tau$

$$\text{Selbes Bit, selbe Hälfte: } P(B1) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T/2} & \text{für } |\tau| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |\tau| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\text{Selbes Bit, andere Hälfte: } P(B2) = \begin{cases} 1 \cdot \left| \frac{\tau}{T} - \text{ROUND}\left(\frac{\tau}{T}\right) \right| & \text{für } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{für } |\tau| \geq T \end{cases}$$

$$\text{Anderes Bit, selbe Hälfte: } P(B3) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\tau| \leq \frac{T}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left| \frac{\tau}{T} - \text{ROUND}\left(\frac{\tau}{T}\right) \right| & \text{für } |\tau| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\text{Anderes Bit, andere Hälfte: } P(B4) = \begin{cases} 1 \cdot \left| \frac{\tau}{T} - \text{ROUND}\left(\frac{\tau}{T}\right) \right| & \text{für } |\tau| \leq T \\ 2 \cdot \left| \frac{\tau}{T} - \text{ROUND}\left(\frac{\tau}{T}\right) \right| & \text{für } |\tau| \geq T \end{cases}$$

Wiederum muss unabhängig von  $\tau$  für die Summe von  $P(B1)$ ,  $P(B2)$ ,  $P(B3)$  und  $P(B4)$  gelten:

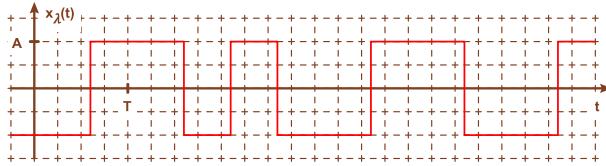
$$P(B1) + P(B2) + P(B3) + P(B4) = 1$$

Die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$  kann erneut aus den Anteilen  $R_{XX|B_i}(\tau)$  jener Musterfunktion berechnet werden, für welche Ereignis  $B_i$  zutrifft:

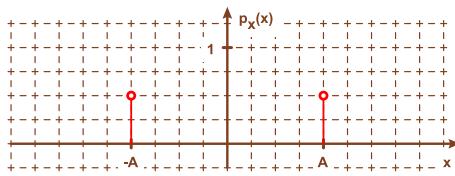
$$R_{XX}(\tau) = \sum_{i=1..4} R_{XX|B_i}(\tau) \cdot P(B_i) \quad (9.56)$$

**Beispiel:** gegeben ist eine zufällige, gedächtnisfreie, binäre 10 MBit/s Datenquelle, welche statistisch zu gleichen Anteilen Mark und Space ausgibt. Die Daten werden Manchester-codiert (wie z.B. bei 10BASE-T) und „eckig“ (d.h. mit Zero-Order Hold) mit den über die halbe Bitzeit  $T = 50$  ns konstanten Amplituden  $\pm A$  ausgegeben. Das Spektrum dieser Ethernet-Übertragung soll nun bestimmt werden.

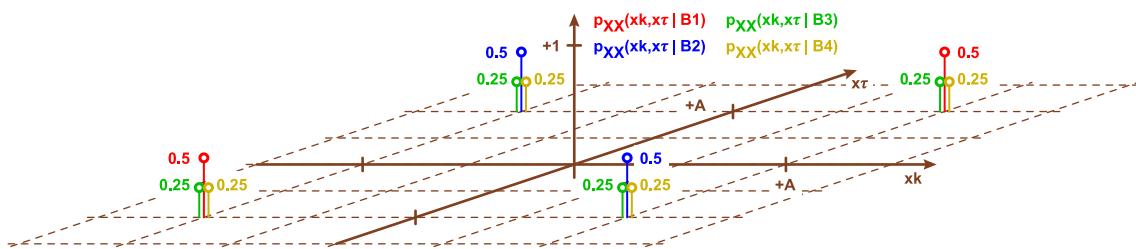
Eine mögliche Musterfunktion ist – wiederum mit zeitlichem Versatz – im nachfolgenden Graphen dargestellt:



Zu jedem beliebigen Zeitpunkt ergibt dies folgende Amplitudenverteilung :



Die zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen in Abhängigkeit der zuvor definierten Ereignisse  $B_i$  sind nachfolgend dargestellt:



Dies ergibt folgende vier Anteile zur Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(\tau)$ :

$$R_{XX|B1}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B1) = A \cdot A \cdot 0.5 + (-A) \cdot (-A) \cdot 0.5 = A^2$$

$$R_{XX|B2}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B2) = -A \cdot A \cdot 0.5 + A \cdot (-A) \cdot 0.5 = -A^2$$

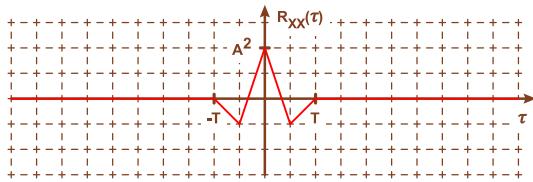
$$R_{XX|B3}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B3) = A \cdot A \cdot 0.25 + (-A) \cdot (-A) \cdot 0.25 - A \cdot A \cdot 0.25 + A \cdot (-A) \cdot 0.25 = 0$$

$$R_{XX|B4}(\tau) = \sum_i \sum_j x_{k_i} \cdot x_{\tau_j} \cdot p_{XX}(x_{k_i}, x_{\tau_j} | B4) = A \cdot A \cdot 0.25 + (-A) \cdot (-A) \cdot 0.25 - A \cdot A \cdot 0.25 + A \cdot (-A) \cdot 0.25 = 0$$

Insgesamt ergibt dies für die Autokorrelationsfunktion:

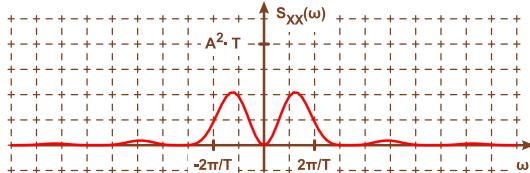
$$R_{XX}(\tau) = R_{XX|B1}(\tau) \cdot P(B1) + R_{XX|B2}(\tau) \cdot P(B2) + R_{XX|B3}(\tau) \cdot P(B3) + R_{XX|B4}(\tau) \cdot P(B4) = A^2 \cdot P(B1) - A^2 P(B2)$$

Dies ergibt folgende graphische Darstellung für  $R_{XX}(\tau)$ :



Hier bietet es sich an,  $R_{XX}(\tau)$  in zwei überlagerte Dreiecksfunktionen aufzuteilen. Damit ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum  $S_{XX}(\omega)$

$$S_{XX}(\omega) = A^2 \cdot T \cdot \left( \frac{\sin(\omega T/4)}{(\omega T/4)} \right)^2 - A^2 \cdot T \cdot \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right)^2$$



Deutlich kommt hier zum Vorschein, dass der Manchester-Code nicht nur keinen diskreten DC-Anteil aufweist (d.h. keine Dirac-Impulsfunktion bei  $\omega = 0$ ), sondern generell im tiefen Frequenzbereich nur kleine Leistungsanteile aufweist.

# Kapitel 10

## Rauschen in analogen Kommunikationssystemen

### 10.1 Rauschen verschlechtert die Empfangsqualität

Rauschsignale sind zufällig ablaufende Störsignale, welche die Leistungsfähigkeit von analogen und digitalen Kommunikationssystemen beeinträchtigen. Durch ihren stochastischen Charakter kann ihr genauer zeitlicher Verlauf nicht vorausgesagt werden, doch erlauben statistische Kennwerte zumindest, ihre zu erwartende Leistung und deren spektralen Aufbau zu bestimmen.

Einige Rauschanteile können vom Empfänger eliminiert werden, da sie zum Beispiel aufgrund ihres Frequenzbereichs offensichtlich nicht zum Nutzsignal gehören. Sie sind damit out-of-band, das heisst, sie befinden sich ausserhalb des genutzten Frequenzbandes. Der Begriff out-of-band kann aber auch weiter gefasst werden und steht dann für Signale und Signalanteile, welche in irgendeiner Form separat vom Nutzsignal geführt werden oder von diesem vollständig separierbar sind. Sie weisen damit eine Orthogonalität zum Nutzsignal auf.

Andere Rauschanteile sind in-band, das heisst, eine solche Orthogonalität ist nicht vorhanden und der Empfänger kann diese zufälligen Störanteile vom ebenfalls zufälligen Nutzsignal nicht unterscheiden.

Bei einer Übertragung über einen verrauschten Kanal überlagern sich Nutzsignal und Störsignal. Dabei führen die In-Band-Anteile des Störsignals bei analogen Kommunikationssystemen direkt zu einer Veränderung der übertragenen Information. Das Leistungsverhältnis zwischen Nutz- und Störanteil kann mit dem Störabstand (SNR) ausgedrückt werden und ist ein Mass dafür, wie originalgetreu die Information des Senders im empfangenen Signal noch vorhanden ist.

Als Beispiel für ein Nutzsignal nehme man ein analoges Audio- oder Videosignal. Ab einer gewissen unteren Schwelle der SNR werden die Störungen von einem Zuhörer oder Zuschauer als verminderte Qualität registriert. Diese kann zu Problemen mit der optischen Wahrnehmung oder der akustischen Verständlichkeit bis hin zum kompletten Ausfall der Kommunikation führen.

Digitale Systeme weisen meist einen ausgeprägten Schwellwerteffekt auf: erst unterhalb einer Grenze des Störabstands treten statistisch mehr als nur einzelne Übertragungsfehler auf. Versucht man aber, diese Schwelle noch ein wenig mehr zu unterschreiten und ein Nutzsignal bei noch tieferer SNR zu übertragen, steigt die Anzahl der Fehler überproportional schnell an.

Solange noch keine Übertragungsfehler aufgetreten sind, kann ein digitales Signal wieder perfekt aufbereitet werden, indem zum Beispiel ein Repeater die Information aus dem verrauschten Signal vollständig und korrekt dekodiert und diese wieder als neues digitales Signal frisch versendet. Mit fehlererkennenden und fehlerkorrigierenden Codes kann zudem ein zu 100 Prozent zuverlässiger Informationstransfer selbst dann noch gewährleistet werden, wenn erste vereinzelte Übertragungsfehler schon aufgetreten sind.

Nachfolgend wird der Einfluss von Rauschsignalen auf analoge Übertragungssysteme betrachtet. In einem späteren Kapitel wird dann analysiert, wie Rauschen auch eine digitale Datenübertragung beeinträchtigen kann. In beiden Abschnitten wird das gleiche Modell verwendet, bei welchem ein Nachrichtensignal über

einen gauss'schen Kanal gesendet wird.

## 10.2 Gauss'scher Kanal

Ein gauss'scher Kanal fügt einem übertragenen Nachrichtensignal ein additives weisses gauss'sches Rauschen (Englisch: additive white Gaussian noise, AWGN) bei.

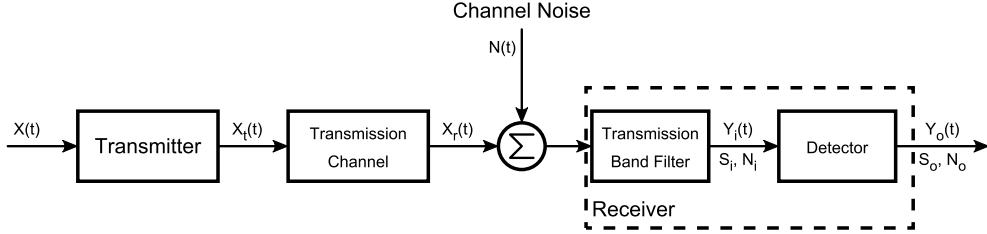


Abbildung 10.1: Gauss'scher Kanal

Das AWGN-Rauschen  $N(t)$  besitzt folgende Eigenschaften, welche teilweise direkt aus seiner Bezeichnung hervorgehen:

- $N(t)$  ist ein stationärer ergodischer gauss'scher Prozess mit Musterfunktionen  $n_\lambda(t)$ .
- $N(t)$  besitzt eine Gauss-verteilte Amplitudenverteilung.
- $N(t)$  ist weiss, d.h. sein Leistungsdichtespektrum ist konstant:  $S_{NN}(\omega) = \frac{\eta}{2}$ .
- $N(t)$  ist mittelwertfrei:  $E[N(t)] = 0$ .
- $N(t)$  ist nicht korreliert mit  $X(t)$ :  $C_{XN}(\tau) = E[X(t) \cdot N(t + \tau)] - E[X(t)] \cdot E[N(t)] = 0$ .
- Somit ist das mittelwertfreie  $N(t)$  zu  $X(t)$  auch orthogonal:  $R_{XN}(\tau) = E[X(t) \cdot N(t + \tau)] = 0$ .

Bei einer linearen Empfangsschaltung gilt der Überlagerungssatz, womit auch am Ausgang des Empfängers das zurückgewonnene Signal  $Y_o(t)$  in einen additiven Nutzsignal- und Rauschanteil aufgeteilt werden kann, d.h.  $Y_o(t) = X_o(t) + N_o(t)$ . Für die Gesamtleistung gilt dann dank der Orthogonalität von  $X_o(t)$  und  $N_o(t)$ :

$$E[Y_o^2(t)] = E[(X_o(t) + N_o(t))^2] = E[X_o^2(t)] + E[2 \cdot X_o(t) \cdot N_o(t)] + E[N_o^2(t)] = S_o + N_o$$

Dabei bezeichnet  $S_o = E[X_o^2(t)]$  die Leistung des Nutzsignals am Empfängerausgang und  $N_o = E[N_o^2(t)]$  die dort vorhandene Rauschleistung.

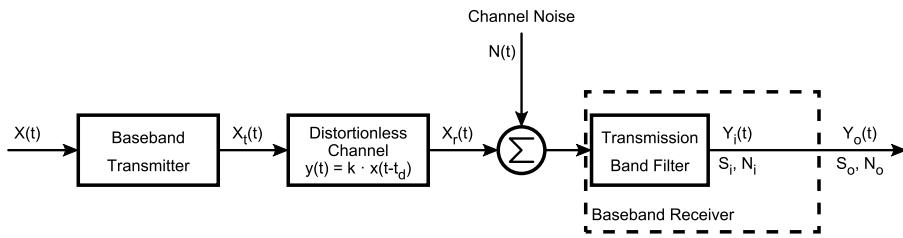
Als Mass für die Übertragungsqualität soll der Störabstand am Empfängerausgang dienen:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{E[X_o^2(t)]}{E[N_o^2(t)]}$$

Der Störabstand am Empfängerausgang  $\text{SNR}_o$  soll nun bei verschiedenen Übertragungsarten verglichen werden. Dabei dient die direkte Übertragung eines analogen Nachrichtensignals im Basisband als Referenzsystem.

## 10.3 Übertragung im Basisband

Die Übertragung eines analogen Nachrichtensignals im Basisband soll als Referenzsystem verwendet werden. Unter dem Begriff Nachrichtensignal wird jetzt aber nicht mehr eine einzelne determinierte Funktion  $m(t)$ , sondern eine Vielzahl von möglichen Musterfunktionen  $x_\lambda(t)$  verstanden, welche zum Zufallsprozess  $X(t)$  gehören.



**Abbildung 10.2:** Übertragung eines Basisbandsignals über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal

Um die Berechnung zu vereinfachen, werden für alle Übertragungsarten folgende Annahmen zum Nutzsignal, dem Zufallsprozess  $X(t)$ , getroffen:

- $X(t)$  ist ein stationärer ergodischer Zufallsprozess mit Musterfunktionen  $x_\lambda(t)$ .
- $X(t)$  und alle  $x_\lambda(t)$  sind mittelwertfrei, d.h.  $E[X(t)] = 0$  und  $\langle x_\lambda(t) \rangle = 0$ .
- $X(t)$  und alle  $x_\lambda(t)$  sind in der Amplitude normiert, d.h.  $|x_\lambda(t)|_{\text{pk}} = 1$ .
- $X(t)$  und alle  $x_\lambda(t)$  besitzen eine mittlere Leistung  $S_X$ .
- $X(t)$  ist bandbegrenzt mit Bandbreite  $B$ , d.h.  $S_{XX}(\omega) = 0$  für  $|\omega| > 2\pi B$ .
- Der Kanal ist frei von linearen und nicht-linearen Verzerrungen.
- Damit ist der Zufallsprozess  $X_r(t)$  beim Empfänger im Vergleich zum gesendeten  $X_t(t)$  nur um  $t_d$  verzögert und mit einem Faktor  $k > 0$  skaliert.
- Im folgenden Vergleich der Übertragungsarten ist der Kanal mit  $k = 1$  zusätzlich auch dämpfungsfrei.

Dank der Vielzahl von vereinfachenden Annahmen sind Sender und Empfänger für die Übertragung im Basisband sehr simpel. Der Sender gibt das Nachrichtensignal unverändert auf den Kanal aus, d.h. es gilt  $X_t(t) = X(t)$ . Der Kanal überträgt das Signal ohne Verzerrungen und im folgenden Vergleich auch dämpfungsfrei, womit  $X_r(t) = X_t(t - t_d)$  gilt. Das Filter am Eingang des Empfängers minimiert lediglich den out-of-band Anteil des Rauschens, ohne dass der Nutzsignalanteil des Empfangssignals in irgendeiner Art verändert wird, d.h. es gilt  $X_i(t) = X_r(t)$ .

Mit diesem Filter wird jedoch das weisse Rauschen  $N(t)$  (mit seiner theoretisch unendlich grossen Leistung!) auf die Übertragungsbandbreite des Nutzsignals begrenzt, wodurch sich die Rauschleistung  $N_i$  des Prozesses  $N_i(t)$  auf einen endlichen Wert reduziert. Bei der Basisbandübertragung soll dieses Filter vereinfachend ein ideales Tiefpassfilter mit Bandbreite  $B$  sein.

Dank der Linearität dieses Eingangsfilters entspricht das verrauschte Empfangssignal  $Y_i(t)$  gerade der Summe von  $X_i(t)$  und  $N_i(t)$ .

Mit all diesen getroffenen Annahmen sind beim Empfänger keine Verarbeitungsschritte für das Nutzsignal nötig. Eine Entzerrung oder eine Detektorschaltung fällt weg und der Prozess  $Y_o(t)$  am Empfängerausgang ist identisch mit dem gefilterten Empfangssignal  $Y_i(t)$ .

Da dank dem vereinfachten, verzerrungs- und dämpfungsfreien Kanal das Nutzsignal auf dem ganzen Pfad von der Quelle bis zum Empfängerausgang unverändert bleibt, folgt für die Signalleistung  $S_o$  am Empfängerausgang:

$$S_o = S_i = S_r = S_t = S_X \quad (10.1)$$

Das AWGN-Rauschen wird durch das Tiefpassfilter am Empfängereingang auf folgende Leistung beschränkt:

$$N_o = N_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\eta}{2} d\omega = \eta \cdot B \quad (10.2)$$

Damit ergibt sich für den Störabstand am Ausgang des Basisbandempfängers:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{S_X}{\eta \cdot B} \quad (10.3)$$

Um einen fairen Vergleich mit allen anderen Übertragungsverfahren zu ermöglichen, sollen möglichst identische Bedingungen am Empfängereingang vorliegen:

- Identische Bandbreite  $B$  des Nachrichtensignals  $X(t)$  bei allen Übertragungsarten.
- Identische spektrale Leistungsdichte  $S_{NN} = \frac{\eta}{2}$  des AWGN-Rauschens bei allen Übertragungsarten.
- Identische Signalleistung  $S_i$  des übertragenen Nutzsignals am Empfängereingang.

Aus diesem Grund wird jeweils die berechnete  $\text{SNR}_o$  mit Hilfe der Größen  $B$ ,  $\eta$  und  $S_i$  ausgedrückt, um Unterschiede zwischen den Übertragungsarten aufzuzeigen. Im Falle der Basisbandübertragung ist dies dank  $S_i = S_X$  sehr simpel:

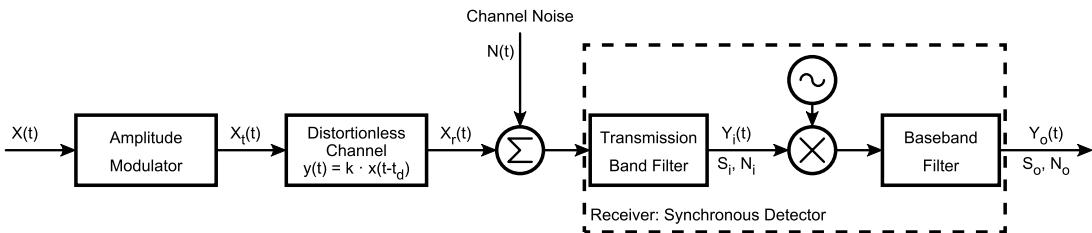
$$\text{SNR}_o = \frac{S_i}{\eta \cdot B} = \gamma \quad (10.4)$$

Da die Basisbandübertragung als Referenzgröße herhalten soll, wird dieser Referenzwert der  $\text{SNR}_o$  vereinfachend mit  $\gamma$  abgekürzt, d.h.  $\gamma = \frac{S_i}{\eta \cdot B}$ .

## 10.4 Übertragung mit Amplitudenmodulation

### 10.4.1 Empfänger mit kohärentem Detektor

Stellvertretend auch für SSB und QAM soll der Empfang eines DSB-SC Signals mit einem kohärenten Detektor betrachtet werden. Zusätzlich wird anschliessend noch der kohärente Empfang von gewöhnlicher AM analysiert.



**Abbildung 10.3:** Übertragung von DSB-SC über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal

Bei DSB-SC ist das Filter am Empfängereingang wiederum an die Übertragungsbandbreite angepasst. Es handelt sich hierbei um ein Bandpassfilter mit einer Bandbreite  $B_{BPF} = 2 \cdot B$  im Falle von DSB-SC und QAM, bzw.  $B_{BPF} = B$  im Falle von SSB.

Durch dieses Filter wird das AWGN-Rauschen auf ein schmalbandiges Rauschen begrenzt. Somit ist die gefilterte Rauschamplitude Rayleigh-verteilt und die Phase gleichverteilt.

Aufgrund dieser Phasenverteilung ist auch sofort klar, dass die nach dem kohärenten Detektor auftretende Rauschleistung  $N_o$  unabhängig von einer Phasenverschiebung  $\varphi$  des Lokalen Oszillators ist, ganz im Gegensatz zum demodulierten Nutzsignal einer DSB-SC, welches mit  $\cos(\varphi)$  gewichtet wird.

Damit gilt für ein DSB-SC Signal mit Trägeramplitude  $A_c$  und Trägerfrequenz  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  am Eingang des Demodulators:

$$Y_i(t) = A_c X(t) \cos(\omega_c t) + N_i(t) = [A_c X(t) + N_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t) - N_b(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

$N_a(t)$  ist dabei der Inphase-Anteil des Bandpassrauschen in Basisbanddarstellung und  $N_b(t)$  der Quadraturanteil. Inphase- und Quadraturanteil sind dabei ebenfalls Gauss-verteilt und mittelwertfrei. Die beiden Signale im Basisband besitzen zudem die gleiche Leistung wie das schmalbandige Rauschen  $N_i(t)$  im Übertragungsband:

$$E[N_a^2(t)] = E[N_b^2(t)] = E[N_i^2(t)] = 2\eta \cdot B$$

Um das Ausgangssignal korrekt zu skalieren, setzen wir die Amplitude des lokalen Oszillators auf  $A_{LO} = 2$ . Dieser Wert hat keinen Einfluss auf die  $\text{SNR}_o$ , da er in gleicher Weise auf das Nutz- und Störsignal einwirkt.

Nach dem kohärenten Detektor (mit  $\varphi = 0$ ) bleibt einzig der Inphase-Anteil übrig:

$$Y_o(t) = X_o(t) + N_o(t) = A_c X(t) + N_a(t)$$

Bei der Leistung des Nutzsignals  $S_o$  am Ausgang des kohärenten Detektors wird nun eine allfällige Phasenabweichung  $\varphi$  des lokalen Oszillators berücksichtigt, welche die mit  $A_c^2$  skalierte Leistung des ursprünglichen Nachrichtensignal  $S_X$  abschwächt:

$$S_o = E[(A_c \cdot X(t) \cdot \cos \varphi)^2] = A_c^2 \cdot S_X \cdot \cos^2 \varphi$$

Die Rauschleistung am Ausgang des kohärenten Detektors ist unabhängig von  $\varphi$ :

$$N_o = E[N_a^2(t)] = 2\eta \cdot B$$

Damit ergibt sich folgender Störabstand am Ausgang des kohärenten Detektors:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 \cdot S_X \cdot \cos^2 \varphi}{2\eta \cdot B}$$

Für den fairen Vergleich mit der Basisbandübertragung muss jeweils die Signalleistung am Eingang des Empfängers übereinstimmen. Durch Einsetzen folgt mit  $S_i = \frac{1}{2}A_c^2 S_X$  für den kohärenten Detektor mit  $\varphi = 0$ :

$$\text{SNR}_o = \frac{S_i}{\eta \cdot B}$$

Diese  $\text{SNR}_o$  stimmt exakt mit dem Referenzwert  $\gamma$  bei Basisbandübertragung überein. Somit ist bezüglich Störfestigkeit die Übertragungsqualität von DSB-SC ebenbürtig zu einer Basisbandübertragung.

Bei SSB ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei DSB-SC. Die Bandbreite im Übertragungsband ist zwar nur halb so gross wie bei DSB-SC, womit sich die Rauschleistung  $E[N_i^2(t)]$  am Empfängereingang halbiert, doch gehen bei einer kohärenten Demodulation mit einem Cosinus die Quadraturanteile auf dem Sinus des SSB-Signals verloren, wodurch sich auch die demodulierte Signalleistung halbiert.

Werden stattdessen sowohl Inphase- wie auch Quadraturanteil mit je einer kohärenten Demodulation (mit Cosinus bzw. Sinus) zurückgewonnen, um diesen Verlust zu umgehen, verdoppelt sich gleichzeitig aber auch der demodulierte Rauschanteil, da sowohl Inphase- wie auch Quadraturanteil des schmalbandigen Rauschens im demodulierten Signal ihre Wirkung entfalten können.

Insgesamt gilt somit auch für SSB:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_i}{\eta \cdot B}$$

Der Detektorgewinn  $\alpha_d$  (Gütemass des Empfängers, englisch: figure of merit) gibt an, um wieviel sich die  $\text{SNR}_o$  am Empfängerausgang im Vergleich zur  $\text{SNR}_i$  am Detektoreingang verbessert. Für DSB-SC ergibt sich unter Berücksichtigung einer allfälligen Phasenabweichung  $\varphi$  des lokalen Oszillators:

$$\alpha_d = \frac{\text{SNR}_o}{\text{SNR}_i} = \frac{\frac{S_i}{\eta \cdot B} \cdot \cos^2 \varphi}{\frac{S_i}{2\eta \cdot B}} = 2 \cos^2(\varphi) \leq 2$$

### Kohärenter Detektor für gewöhnliche AM

Bei gewöhnlicher AM liegt folgendes Signal am Empfängereingang an:

$$Y_i(t) = A_c \cdot (1 + \mu X(t)) \cdot \cos(\omega_c t) + N_i(t) \quad \text{mit } \mu \leq 1 \text{ und weiterhin } X(t) \leq 1.$$

Dies ergibt eine Signalleistung  $S_i$  am Empfängereingang:

$$S_i = \frac{1}{2} E [A_c^2 \cdot (1 + \mu^2 X^2(t))] = \frac{1}{2} A_c^2 \cdot (1 + \mu^2 S_X)$$

Die Rauschleistung am Eingang beträgt weiterhin  $N_i = 2\eta \cdot B$ .

Als Ausgangsfilter für das Basisbandsignal wird wiederum ein Tiefpassfilter mit Bandbreite  $B$  verwendet, welches aber zusätzlich noch den für die Modulation beigefügten DC-Anteil blockt (d.h. es handelt sich eigentlich um ein Bandpassfilter mit annähernd der Bandbreite  $B$ ).

Damit ergibt sich folgendes Ausgangssignal am Ausgang des Demodulators, wiederum vereinfachend für  $\varphi = 0$ :

$$Y_o(t) = X_o(t) + N_o(t) = A_c \mu X(t) + N_a(t)$$

Die Signalleistung am Detektorausgang beträgt:

$$S_o = A_c^2 \mu^2 S_X$$

Im Hinblick auf den fairen Vergleich drücken wir  $S_o$  mit Hilfe von  $S_i$  aus, indem in der vorhergehenden Gleichung für  $S_i$  nach  $A_c^2$  aufgelöst wird und  $A_c^2$  mit diesem Term hier ersetzt wird:

$$S_o = \frac{2\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} S_i$$

Der Störabstand am Empfängerausgang beträgt noch:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 \mu^2 \cdot S_X}{2\eta \cdot B}$$

Beziehungsweise im Vergleich mit der Referenz  $\gamma$  der Basisbandübertragung:

$$\text{SNR}_o = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \frac{S_i}{\eta \cdot B} = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \cdot \gamma$$

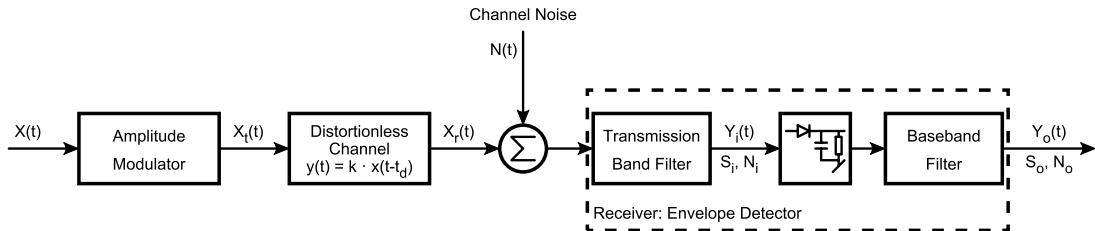
Somit ist eine mit einem kohärenten Detektor demodulierte gewöhnliche AM in Bezug auf den Störabstand des Ausgangssignals um mindestens den Faktor  $\frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \leq \frac{1}{2}$  schlechter als eine Basisbandübertragung oder eine DSB-SC. Besitzt zudem  $X(t)$  einen Crestfaktor, welcher deutlich grösser als 1 ist, verschlechtert sich der Störabstand im Vergleich zu den anderen Übertragungsarten nochmals erheblich.

Der Detektorgewinn (figure of merit) ist bei gewöhnlicher AM ebenfalls kleiner als 1, da bei der  $\text{SNR}_o$  im Vergleich zur  $\text{SNR}_i$  der starke Signalanteil des nicht-modulierten Trägers durch die DC-Entkopplung unterdrückt wird:

$$\alpha_d = \frac{\text{SNR}_o}{\text{SNR}_i} = \frac{2\mu^2 S_X \cdot \cos^2 \varphi}{1 + \mu^2 S_X} \leq 1$$

#### 10.4.2 Empfänger mit Hüllkurvendetektor

Nur für gewöhnliche AM kann anstelle des kohärenten Detektors auch ein Hüllkurvendetektor für die Demodulation des Trägersignals verwendet werden.



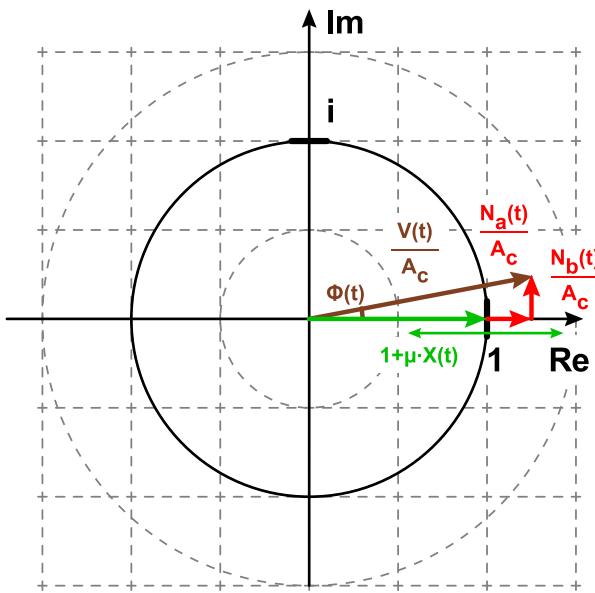
**Abbildung 10.4:** Übertragung von gewöhnlicher AM über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal

Am Eingang des Demodulators liegt folgendes Signal an:

$$Y_i(t) = A_c \cdot (1 + \mu X(t)) \cdot \cos(\omega_c t) + N_i(t) = V(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

## Hüllkurvendetektor bei grossem Störabstand am Eingang

Liegt eine grosse SNR<sub>i</sub> vor, ist  $X_i(t)$  im Vergleich zu  $N_i(t)$  so dominant, dass nur Inphase-Anteile des Rauschens einen Einfluss auf die Amplitudenspitzen und somit auf die Hüllkurve haben. Dies geht deutlich aus nachfolgender Basisbanddarstellung hervor, bei welcher das Eingangsrauschen  $N_i$  durch den Inphaseanteil  $N_a(t)$  und den Quadraturanteil  $N_b(t)$  repräsentiert wird, und alle Amplituden durch Skalierung mit  $\frac{1}{A_c}$  normiert wurden:



**Abbildung 10.5:** Verrauschttes AM-Signal in Basisbanddarstellung bei grossem Störabstand SNR<sub>i</sub>

Bei grosser SNR<sub>i</sub> wirkt sich nur der Inphaseanteil  $N_a(t)$  auf die Amplitude von  $V(t)$  aus, während  $N_b(t)$  die Abweichung des Phasenwinkels  $\Phi(t)$  bestimmt.

Somit ergibt sich am Ausgang des Hüllkurvendetektors:

$$Y_o(t) \approx A_c \mu X(t) + N_a(t)$$

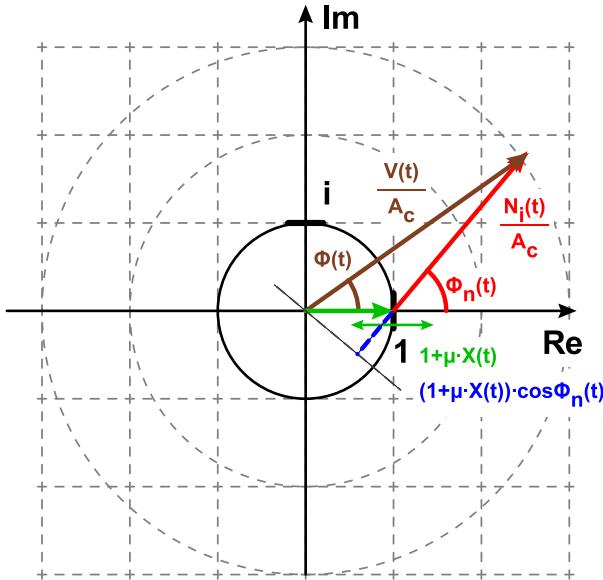
Dieses Ausgangssignal entspricht aber dem demodulierten Nachrichtensignal, welches sich bei der Demodulation der gewöhnlichen AM mit dem kohärenten Detektor ergeben hat, d.h. unabhängig vom Detektor ergibt sich bei hohem Eingangstörabstand  $\text{SNR}_i$  am Ausgang des Empfängers:

$$\text{SNR}_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2 \mu^2 \cdot S_X}{2\eta \cdot B}$$

### Hüllkurvendetektor bei geringem Störabstand am Eingang

Anders sieht es aus, wenn bei  $Y_i(t)$  das Nutzsignal durch  $N_i(t)$  dominiert wird. Die Amplitude  $V(t)$  entspricht dann mehrheitlich dem Betragswert von  $N_i(t)$ . Aus nachfolgender Basisbanddarstellung geht hervor, dass der Anteil des Nutzsignals in der gesamten Länge des Vektors  $V(t)$  in guter Näherung nur noch der blau-gestrichelt dargestellten Projektion von  $X_i(t)$  auf den Vektor des Rauschsignals  $N_i(t)$  entspricht:

$$Y_o(t) \approx N_i(t) + A_c(1 + \mu X(t)) \cdot \cos(\phi_n(t))$$



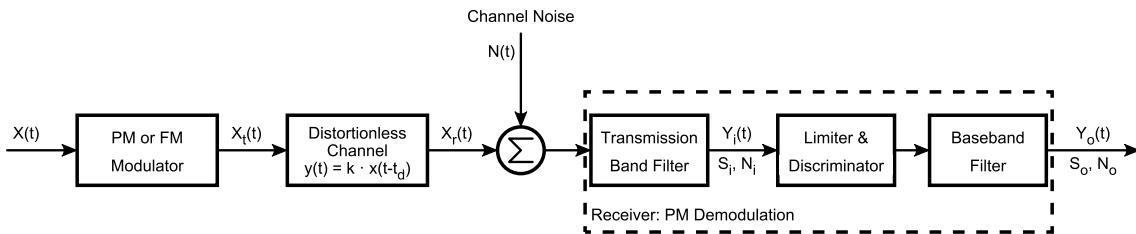
**Abbildung 10.6:** Verrausches AM-Signal in Basisbanddarstellung bei zu geringem Störabstand  $\text{SNR}_i$

In dieser Darstellung wurden alle Amplituden durch Skalierung mit  $\frac{1}{A_c}$  normiert.

Unterhalb eines gewissen Schwellwerts wird also das demodulierte Nutzsignal durch  $\cos(\phi_n(t))$  sehr stark verformt und verschwindet gleichzeitig im dominierenden Rauschsignal. Die Schwelle, unterhalb welcher sich die  $\text{SNR}_o$  im Vergleich zur  $\text{SNR}_i$  überproportional verschlechtert, liegt für eine mit einem Hüllkurvendetektor demodulierte gewöhnliche AM bei  $\text{SNR}_i \approx 10 \text{ dB}$ .

## 10.5 Übertragung mit Winkelmodulation

Für folgenden PM- oder FM-Empfänger soll untersucht werden, wie gross der Störabstand am Empfänger-ausgang ausfällt:



**Abbildung 10.7:** Übertragung von PM und FM über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal

Das winkelmodulierte Signal hat ein Hubverhältnis  $D = \frac{\Delta f}{B}$ , welches grundsätzlich als Parameter frei gewählt werden kann.

Da die Übertragungsbandbreite  $B_c = 2(D + 1) \cdot B$  mit höherem Hubverhältnis ansteigt, erhöht sich damit auch die Rauschleistung  $N_i$  am Detektoreingang in Abhängigkeit von  $D$ :

$$N_i = 2(D + 1) \cdot B \cdot \eta$$

Der Zufallsprozess nach dem Bandpassfilter am Empfängereingang entspricht wiederum einem schmalbandigen Rauschen:

$$N_i(t) = N_a(t) \cdot \cos(\omega_c t) - N_b(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

Das mit dem Zufallsprozess  $X(t)$  winkelmodulierte Trägersignal am Eingang des Detektors kann wie folgt geschrieben werden, wenn wiederum vereinfachend angenommen wird, dass der Kanal für das Trägersignal verzerrungs- und dämpfungsfrei ist:

$$X_i(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

Dabei gilt für  $\phi(t)$ :

$$\phi(t) = k_p \cdot X(t) \quad \text{für PM, wobei } |X(t)| \leq 1 \text{ gelten soll.}$$

$$\phi(t) = k_f \cdot \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau \quad \text{für FM, wobei } |X(t)| \leq 1 \text{ gelten soll.}$$

Die statistische Gesamtleistung (d.h. das zweite Moment) des Prozesses  $X_i(t)$  ist dabei in sehr guter Näherung unabhängig vom modulierenden Nachrichtensignal:

$$S_i = \frac{1}{2} A_c^2$$

Damit ergibt sich folgender Störabstand am Eingang des Detektors, welcher nur in Bezug auf die Bandbreite  $B$  vom modulierenden Signal abhängig ist:

$$\text{SNR}_i = \frac{A_c^2}{4(D+1) \cdot B \cdot \eta}$$

Da die Signalleistung  $S_i$  bei winkelmodulierten Trägersignalen unabhängig vom modulierenden Signal  $X(t)$  ist, spricht man beim Störabstand von solchen Signalen oft von einem Träger-Rausch-Verhältnis (Englisch: carrier-to-noise ratio, CNR) anstatt von einem Signal-Rausch-Verhältnis (Englisch: signal-to-noise ratio, SNR).

Das Eingangssignal  $Y_i(t) = X_i(t) + N_i(t)$  kann auch in Polarkoordinaten umgeschrieben werden, wobei das Rauschen am Eingang des Detektors in Polarkoordinaten mit  $N_i(t) = V_N(t) \cos(\omega_c t + \phi_N(t))$  ausgedrückt wird.

$$Y_i(t) = V(t) \cdot \cos(\omega_c t + \Theta(t)) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t)) + V_N(t) \cdot \cos(\omega_c t + \phi_N(t))$$

Inphase- und Quadraturanteile von  $X_i(t)$  beziehungsweise  $N_i(t)$  sind in gleicher Phasenlage und dürfen so jeweils direkt addiert werden, womit sich für  $V(t)$  und  $\Theta(t)$  sogleich ergibt:

$$V(t) = \sqrt{(A_c \cos \phi(t) + V_N \cdot \cos \phi_N(t))^2 + (A_c \sin \phi(t) + V_N \cdot \sin \phi_N(t))^2}$$

$$\Theta(t) = \arg Y_i(t) \cong \arctan \frac{A_c \sin \phi(t) + V_N \cdot \sin \phi_N(t)}{A_c \cos \phi(t) + V_N \cdot \cos \phi_N(t)}$$

Der Limiter als erste Verarbeitungsstufe des Detektors eliminiert sämtliche Amplitudenschwankungen. Nach der Demodulation wirksame Signal- und Rauschanteile sind daher nur in der Phase  $\Theta$  enthalten und das Ausgangssignal des Diskriminators kann somit für PM und FM wie folgt sofort hingeschrieben werden:

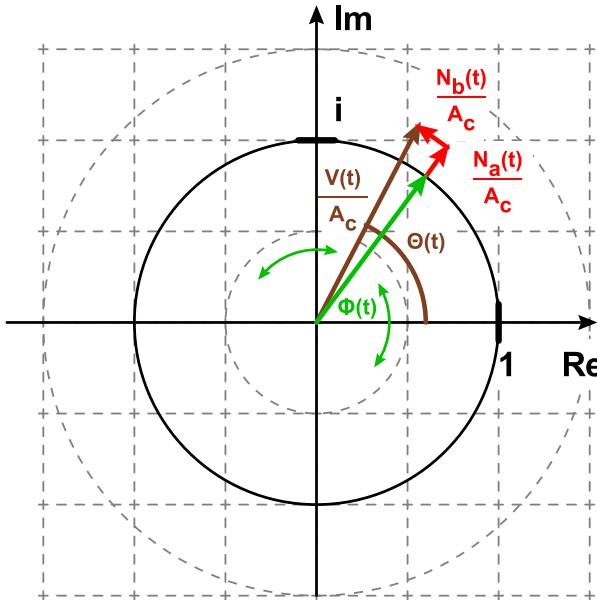
$$Y_o(t) = \Theta(t) \quad \text{für PM}$$

$$Y_o(t) = \frac{d \Theta(t)}{dt} \quad \text{für FM}$$

Um den Störabstand  $\text{SNR}_o$  in guter Näherung vereinfacht zu berechnen, werden nun ähnlich wie beim Hüllkurvendetektor für gewöhnliche AM zwei Fälle unterschieden: grosser und geringer Störabstand  $\text{SNR}_i$  am Eingang des Empfängers.

### 10.5.1 Empfang eines winkelmodulierten Signals mit grossem Störabstand

Das Nutzsignal  $X_i(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$  dominiert das Rauschsignal  $N_i(t)$  am Eingang des Empfängers:  $\text{SNR}_i \gg 1$ :



**Abbildung 10.8:** Verrausches PM- oder FM-Signal in Basisbanddarstellung bei hohem Störabstand  $\text{SNR}_i$

- $\Theta(t)$  wird hauptsächlich vom Winkel des Nutzsignals  $\phi(t)$  bestimmt.
- Das Rauschsignal  $N_i(t)$  verändert  $\phi(t)$  nur relativ zu  $A_c$  mit dem zu  $X_i(t)$  orthogonalen Anteil.
- Das Rauschsignal  $N_i(t)$  ist unkorreliert mit dem Nutzsignal  $X_i(t)$ .
- Der Winkel  $\phi_N(t)$  des Rauschsignals  $N_i(t)$  ist gleichverteilt.
- Dank dieser Gleichverteilung kann die Richtung von Inphase- und zugehörigem Quadraturanteil beliebig gewählt werden.
- Die Wahl von  $N_a(t)$  in Richtung von  $X_i(t)$  vereinfacht die Rechnung.

- In guter Näherung verändert dann nur der Quadraturanteil  $N_b(t)$  den Winkel  $\Theta(t)$ .
- Für PM gilt damit:  $Y_o(t) = \Theta(t) = k_p \cdot X(t) + \frac{1}{A_c} \cdot N_b(t)$ .
- Für FM gilt damit:  $Y_o(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt} = k_f \cdot X(t) + \frac{1}{A_c} \cdot \frac{dN_b(t)}{dt}$ .

In der Praxis liegt ein grosser Störabstand der Winkelmodulation vor, wenn dieser einen Wert von ca.  $\text{SNR}_i > 10 \text{ dB}$  aufweist. Der Übergang zum zweiten Fall, geringer Störabstand  $\text{SNR}_i$  am Eingang des Empfängers, erfolgt sehr schnell, d.h. bei einem Störabstand  $\text{SNR}_i < 10 \text{ dB}$  verschlechtert sich die Qualität des demodulierten Empfangssignals deutlich, wenn die  $\text{SNR}_i$  nur wenig zusätzlich abnimmt. Wegen dieses schnellen Übergangs spricht man von einem Schwellwerteffekt der Winkelmodulation.

### 10.5.2 Empfang eines winkelmodulierten Signals mit geringem Störabstand

Bei einem Störabstand des Empfangssignals von ca.  $\text{SNR}_i = 10 \text{ dB}$  dominiert die Leistung des Nutzsignals das Rauschen zwar noch deutlich mit  $\frac{A_c^2}{2} = 10\sigma^2$ . Dennoch ist in Basisbanddarstellung die Rayleigh-verteilte Amplitude des Rauschsignals mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 1 - F(\sqrt{20}\sigma) = e^{-10} = 0.0045\%$  grösser als das Trägersignal des PM- oder FM-Signals. Trifft dieser Fall ein, führt die Summe von Nachrichten- und Rauschsignal zu einem Vektor mit beliebiger Phasenlage, wie in der nachfolgenden Basisbanddarstellung der Verhältnisse bei geringem Störabstand mit dem rot gestrichelten Kreis dargestellt wird:

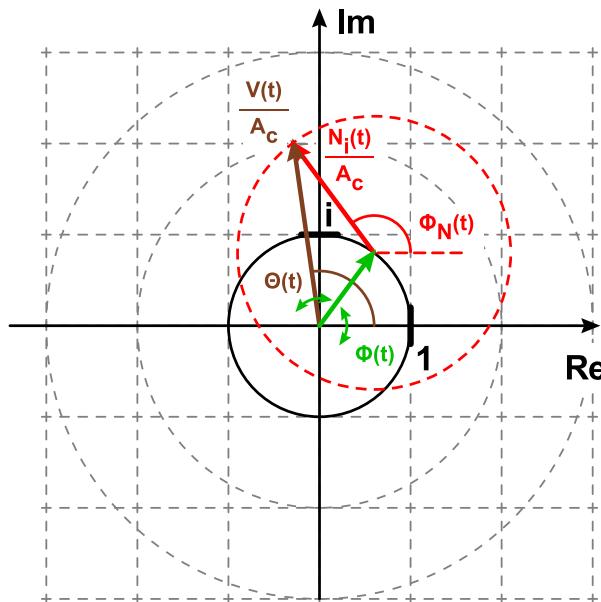


Abbildung 10.9: Verrausches PM- oder FM-Signal in Basisbanddarstellung bei geringem Störabstand  $\text{SNR}_i$

Je nach zeitlichem Verlauf des Rauschsignals kann der Summenvektor in der Basisbanddarstellung den Ursprung sogar einmal oder mehrfach umkreisen, was grossen Sprüngen von  $2\pi$  in der Phasenlage des modulierten Signals und sehr kurzen, aber hohen Spitzen in der Momentanfrequenz entspricht. Sinkt der Störabstand noch weiter unter  $\text{SNR}_i < 10 \text{ dB}$ , steigt die Wahrscheinlichkeit des beschriebenen Effekts sehr schnell an, bei welchem das Rauschsignal  $N_i(t)$  das Nutzsignal  $X_i(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$  dominiert:

- Der vom Empfänger detektierte Winkel  $\Theta$  wird hauptsächlich vom Winkel des Rauschsignals  $\phi_N(t)$  bestimmt.
- Das Nutzsignal  $X_i(t)$  beeinflusst  $\Theta(t)$  nur relativ zur  $N_i(t)$  mit dem zu  $N_i(t)$  orthogonalen Anteil.
- Dieser orthogonale Anteil entspricht  $A_c \cdot \sin(\phi(t) - \phi_N(t))$ .
- Für  $\Theta(t)$  ergibt sich so vereinfacht:  $\Theta(t) = \phi_N(t) + \frac{A_c}{N_i(t)} \cdot \sin(\phi(t) - \phi_N(t))$ .
- Der ursprünglich modulierte Winkel  $\phi(t)$  ist hier nur noch ein stark reduzierter und verzerrter Anteil innerhalb von  $\Theta(t)$ .

### 10.5.3 Störabstand am Empfängerausgang bei Phasenmodulation

Wird das Eingangssignal  $Y_i(t)$  vom Nutzsignal dominiert, kann aus  $Y_o(t) = \Theta(t) = k_p \cdot X(t) + \frac{1}{A_c} \cdot N_b(t)$  die Leistung  $S_o$  des Nachrichtensignals und die Rauschleistung  $N_o$  am Empfängerausgang bestimmt werden:

$$S_o = E \left[ (k_p \cdot X(t))^2 \right] = k_p^2 \cdot S_X$$

$$N_o = E \left[ \mathcal{T}_{\text{LPF}} \left[ \left( \frac{1}{A_c} \cdot N_b(t) \right)^2 \right] \right] = \frac{1}{A_c^2} \cdot 2\eta \cdot B$$

Damit ergibt sich für den Störabstand am Ausgang eines PM-Empfängers:

$$\text{SNR}_o = \frac{A_c^2 \cdot k_p^2 \cdot S_X}{2\eta \cdot B}$$

Für den fairen Vergleich ersetzen wir  $S_i = \frac{1}{2} A_c^2$  zusammen mit  $\frac{1}{\eta \cdot B}$  wieder durch das normierte  $\gamma$ :

$$\text{SNR}_o = k_p^2 \cdot S_X \cdot \gamma$$

Dieses Resultat kann wie folgt interpretiert werden:

- Obwohl die  $\text{SNR}_i$  unabhängig ist vom modulierenden Nachrichtensignal  $X(t)$ , ist die  $\text{SNR}_o$  proportional zur Leistung des Nachrichtensignals  $S_X$ .
- Je grösser die Phasenhubkonstante  $k_p$  gewählt wird, desto besser wird die  $\text{SNR}_o$  am Empfängerausgang.
- Bei genügend grossem  $k_p$  übertrifft der Störabstand einer Übertragung mit Phasenmodulation jenen der Basisbandübertragung oder einer Amplitudenmodulation.
- Aus den ersten beiden Punkten folgt: je stärker der Sender die Phase aussteuert, desto besser wird die  $\text{SNR}_o$  am Empfängerausgang.
- Dies ist im Zeitbereich intuitiv nachvollziehbar: je ausgeprägter das Nachrichtensignal auf eine Phasenbewegung abgebildet wird, desto kleiner wird die Empfindlichkeit gegenüber dem Phasenrauschen, dessen Effektivwert nicht linear mit  $k_p$  sondern höchstens proportional zu  $\sqrt{k_p}$  ansteigt.

### 10.5.4 Störabstand am Empfängerausgang bei Frequenzmodulation

Wird das Eingangssignal  $Y_i(t)$  vom Nutzsignal dominiert, kann aus  $Y_o(t) = \Theta(t) = k_f \cdot X(t) + \frac{1}{A_c} \cdot \frac{d N_b(t)}{dt}$  die Leistung  $S_o$  des Nachrichtensignals und die Rauschleistung  $N_o$  am Empfängerausgang bestimmt werden:

$$S_o = E \left[ (k_f \cdot X(t))^2 \right] = k_f^2 \cdot S_X$$

$$N_o = E \left[ \mathcal{T}_{\text{LPF}} \left[ \left( \frac{1}{A_c} \frac{d N_b(t)}{dt} \right)^2 \right] \right] = E \left[ \frac{1}{A_c^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \omega^2 \eta \, d\omega \right] = \frac{2}{3} \frac{\eta}{A_c^2} \frac{(2\pi B)^3}{2\pi}$$

Zu beachten ist, dass die Rauschleistung  $N_o$  wegen der Differentiation kein weisses Leistungsdichtespektrum mehr besitzt, sondern proportional mit  $\omega^2$  ansteigt.

Für den Störabstand am Ausgang eines FM-Empfängers ergibt sich:

$$\text{SNR}_o = \frac{3A_c^2 \cdot 2\pi \cdot k_f^2 \cdot S_X}{2\eta \cdot (2\pi B)^3}$$

Für den fairen Vergleich ersetzen wir  $S_i = \frac{1}{2} A_c^2$  zusammen mit  $\frac{1}{\eta \cdot B}$  wieder durch das normierte  $\gamma$ :

$$\text{SNR}_o = \frac{3k_f^2 \cdot S_X}{(2\pi B)^2} \cdot \gamma = 3D^2 S_x \cdot \gamma$$

Dieses Resultat kann wie folgt interpretiert werden:

- Obwohl die  $\text{SNR}_i$  unabhängig ist vom modulierenden Nachrichtensignal  $X(t)$ , ist die  $\text{SNR}_o$  proportional zur Leistung des Nachrichtensignals  $S_X$ .
- Je grösser die Frequenzhubkonstante  $k_f$  gewählt wird, desto besser wird die  $\text{SNR}_o$  am Empfängerausgang.
- Bei genügend grossem  $k_f$  übertrifft der Störabstand einer Übertragung mit Frequenzmodulation jenen der Basisbandübertragung oder einer Amplitudenmodulation.
- Aus den ersten beiden Punkten folgt: je stärkere Abweichungen der Momentanfrequenz der Sender erzeugt, desto besser wird die  $\text{SNR}_o$  am Empfängerausgang.
- Vor allem bei den tieffrequenten Anteilen des Nachrichtensignals bietet Frequenzmodulation im Vergleich zu Phasenmodulation im Hinblick auf die  $\text{SNR}_o$  nochmals bessere Werte.

## 10.6 Zusammenfassende Tabelle

Um die Berechnung des Signal-Rausch Abstands in analogen Übertragungssystemen zu vereinfachen, wurden einige Annahmen getroffen, welche auch in nachfolgender Tabelle Voraussetzung für die einfachen Formeln sind:

- Das Nachrichtensignal (d.h. der Zufallsprozess  $X(t)$ ) wird als stationärer Prozess (WSS) angenommen, welcher zudem noch mittelwertfrei ist.
- Bei den modulierten Signalen  $X_c(t)$  soll es sich um stationäre Prozesse handeln. Diese Annahme ist für PM und FM unproblematisch, für DSB-SC und AM hingegen nicht selbstverständlich, wie dies in den Übungsaufgaben zur Stationarität nachgewiesen wurde. Erst mit der Einführung einer zufälligen Phase kann auch für DSB-SC und AM eine WSS-Stationarität von  $X_c(t)$  erzwungen werden.
- Der Kanal fügt dem Nachrichtensignal lediglich weisses, gauss'sches Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte  $\eta/2$  bei, d.h. das Nachrichtensignal wird weder linear noch nicht-linear verzerrt.
- Die Zeitverzögerung beim Empfänger wird in dieser Tabelle vernachlässigt. So wird z.B. beim Basisbandsignal  $X_o(t) = X_i(t) = X(t)$  angenommen, auch wenn korrekterweise  $X(t - t_d)$  stehen müsste.
- Die  $\text{SNR}_i$  befindet sich für nachfolgende Tabelle jeweils über dem kritischen Schwellwert, wo die  $\text{SNR}_o$  beim Spitzenvwertdetektor bei AM sowie auch bei PM und FM sehr schnell abfällt. Dieser Wert liegt etwa bei 10 dB, ist bei PM und FM aber auch stark von der Technologie des Empfängers abhängig (z.B. Locking-Verhalten eines PLL-Empfängers). Ein Schwellwertverhalten kann auch bei der kohärenten Demodulation von DSB-SC und AM auftreten, z.B. bei der Rückgewinnung des nicht-modulierten Trägersignals mit einem PLL.
- Bei der kohärenten Demodulation wird ein lokaler Oszillatator mit der Amplitude 2 benutzt welcher sich zudem in korrekter Phasenlage befindet, d.h.  $x_{lo} = 2 \cos(\omega_{ct})$ . Dieser Faktor 2 fliesst in die Berechnung der Ausgangsleistung  $S_o$  bei AM und DSB-SC ein.

	Basisband	DSB-SC	gewöhnliche AM	PM	FM
Nachrichtensignal	Zufallsprozess $X(t)$ mit $ X(t)  \leq 1$ bzw. $ x_\lambda(t)  \leq 1$ für alle $\lambda$ des Ergebnisraums $S$				
Leistung $S_X$ von $X(t)$	$S_X = S_X(t) = E[X^2(t)] \leq 1$ , (weil $ X(t)  \leq 1$ )				
Bandbreite von $X(t)$	B				
Eingangsnutzsignal $X_i(t)$	$X(t)$	$X(t)A_c \cos(\omega_c t)$	$A_c(1+\mu X(t)) \cos(\omega_c t)$	$A_c \cos(\omega_c t + k_p X(t))$	$A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau)$
Leistung $S_i$ von $X_i(t)$	$S_X$	$\frac{1}{2} A_c^2 S_X$	$\frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_X)$	$\frac{1}{2} A_c^2$	$\frac{1}{2} A_c^2$
Bandbreite von $X_i(t)$	$B$	$2B$	$2B$	$2(D+1)B$	$2(D+1)B$
Eingangsrauschleistung	$\eta B$	$2\eta B$	$2\eta B$	$2(D+1)\eta B$	$2(D+1)\eta B$
SNR am Eingang $\left(\frac{S}{N}\right)_i$	$\frac{S_i}{\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_X)}{2\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2}{2(D+1)\eta B}$	$\frac{\frac{1}{2} A_c^2}{2(D+1)\eta B}$
Ausgangsnutzsignal $X_o(t)$	$X(t)$	$A_c X(t)$	$A_c \mu X(t)$	$k_p X(t)$	$k_f X(t)$
Leistung $S_o$ von $X_o(t)$	$S_X$	$A_c^2 S_X$	$A_c^2 \mu^2 S_X$	$k_p^2 S_X$	$k_f^2 S_X$
Ausgangsrauschleistung	$\eta B$	$2\eta B$	$2\eta B$	$\frac{1}{A_c^2/2} \eta B$	$\frac{1}{3} \frac{(2\pi B)^2}{A_c^2/2} \eta B$
SNR am Ausgang $\left(\frac{S}{N}\right)_o$	$\frac{S_o}{\eta B}$	$\frac{A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{A_c^2 \mu^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{k_p^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$	$\frac{3D^2 A_c^2 S_X}{2\eta B}$
$\left(\frac{S}{N}\right)_o$ mit $\gamma = \frac{S_o}{\eta B}$	$\gamma$	$\gamma$	$\frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma$	$k_p^2 S_X \gamma$	$3D^2 S_X \gamma$

Tabelle 10.1: Rauschen und Störabstände in analogen Kommunikationssystemen

Wichtige Anmerkung: Die Formeln der Tabelle gelten für dimensionslose Signale. Der Zufallsprozess liegt zudem in normierter Form vor, wie aus der Tabelle hervorgeht. Soll die SNR für konkrete physikalisch vorliegende Signale berechnet werden, müssen für die Amplituden und Leistungen am Eingang des Empfängers geeignete Skalierungsfaktoren verwendet werden. Handelt es sich beim Empfänger zudem um einen aktiven Schaltungsblock, ist das Signal (sowie der Rauschanteil) am Ausgang des Empfängers ebenfalls mit den Parametern des Empfängers zu skalieren.

# Kapitel 11

## Digitale Datenübertragung über einen AWGN-Kanal

### 11.1 Rauschen führt zu Bitfehlern

In analogen Kommunikationssystemen können nicht-orthogonale Anteile des In-Band-Rauschens nicht mehr aus dem empfangenen Signal entfernt werden und verändern direkt die Information des ursprünglich gesendeten Nachrichtensignals.

Digitale Kommunikationssysteme sind in dieser Hinsicht toleranter gegenüber In-Band-Störungen. Da der Sender zu jeder Symbolzeit jeweils nur eine Signalform generiert, welche aus einer endlichen Menge mit unterschiedlicher Signalverläufen stammt, ergibt die Überlagerung des Nutzsignals mit einem AWGN-Rauschen – von konstruierten theoretischen Fällen abgesehen – keinen neuen gültigen Signalverlauf.

Aufgabe des Empfängers ist es nun, anhand des durch additives Rauschen modifizierten Empfangssignals eine Schätzung durchzuführen, welche ursprüngliche digitale Information vom Sender als Signal übertragen wurde. Diese Aufgabe sollte der Empfänger möglichst fehlerfrei durchführen.

Solange der Rauschanteil im Empfangssignal genügend klein ist, wird der Empfänger mit seiner Schätzung durchwegs richtig liegen, womit eine fehlerfreie Übertragung der Information stattgefunden hat. Erst wenn die Leistung des Rauschens ein gewisses Mass überschreitet, werden die geschätzten Symbolwerte vereinzelt und mit steigender Rauschleistung vermehrt fehlerhaft sein.

Sind fehlerkorrigierende Codes implementiert, ermöglichen diese bei kleinen Fehlerraten trotzdem noch einen fehlerfreien Informationstransfer. Falls keine solche Codes verwendet werden oder falls die Fehlerrate die Möglichkeiten dieser Kanalcodierung übersteigt, werden Bitfehler in den Nutzdaten auftreten. Erst wenn dieser Fall eintritt, beeinträchtigt ein additives Rauschsignal die Integrität der Nutzdaten und damit die Übertragungsqualität des digitalen Kommunikationssystems.

Um aber nun Übertragungsfehler auch bei schlechten Empfangsbedingungen zu vermeiden, muss der Empfänger eines digitalen Kommunikationssystems in einem ersten Schritt einen möglichst grossen Anteil des Nutzsignals aus dem Eingangssignal herausschälen und gleichzeitig den Rauschanteil minimieren.

Anschliessend wird eine Schätzung durchgeführt, wie gut dieses optimal aufbereitete Eingangssignal mit den möglichen gesendeten Signalverläufen übereinstimmt.

Zwei Entscheidungsstrategien kommen dabei zur Anwendung:

- **Hard Decision:** der Detektor des Empfängers entscheidet sich für jene Signalform, welche mit der höchsten Wahrscheinlichkeit dem empfangenen verrauschten Signal zugrunde liegt. Fehlerkorrigierende Codes können allenfalls einzelne dieser Entscheidungen des Detektors nachträglich noch korrigieren. Für den Decoder dieser Fehlerkorrektur liegt aber keine Information darüber vor, wie sicher oder unsicher der Detektor vorgängig seine Entscheidung für eines der jeweils möglichen Symbole getroffen hat.
- **Soft Decision:** für jedes empfangene Symbol weist der Empfänger mit einer Metrik sämtlichen mög-

lichen Symbolwerten, welche zum Alphabet des Senders gehören, einen Wert zu, der ein Mass dafür ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit es sich beim empfangenen Signal gerade um diesen Symbolwert handeln könnte. Aus diesen pro Symbolzeit erzeugten und zeitlich aufeinander folgenden Wertevektoren vollziehen dann fehlerkorrigierende Codes in einem zweiten Schritt – und oft auch iterativ über mehrere Runden – die endgültige Decodierung, bei welchem Symbole mit unsicherem Empfangswert bevorzugt modifiziert und korrigiert werden. Es sei hier aber angemerkt, dass nicht alle fehlerkorrigierenden Codes die Fähigkeit besitzen, mit Hilfe einer solchen Metrik der Soft-Decision die Fehlerrate im Vergleich zu den Entscheidungen der Hard-Desicion weiter zu senken.

Ziel dieses Kapitels ist es, den sogenannten Optimalen Detektor zu implementieren, bei dem jeder Teil seiner Empfangsschaltung in einer Weise optimiert wird, dass die geschätzten Symbole, welche dem nachfolgenden Decoder der Fehlerkorrektur übergeben werden, eine minimale Fehlerrate aufweisen.

## 11.2 Empfang von binären Signalen

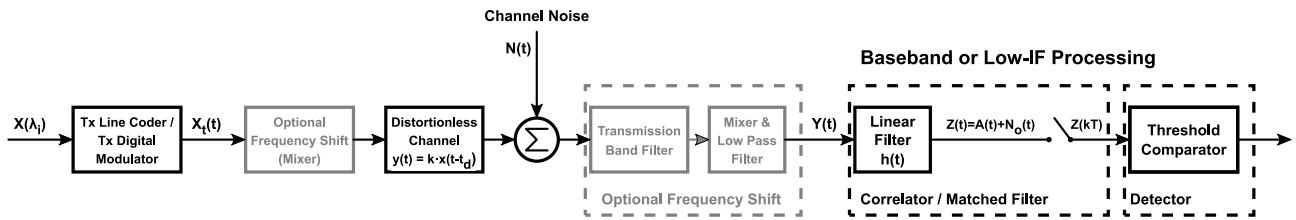


Abbildung 11.1: Übertragung von digitalen Signalen über einen verzerrungsfreien AWGN-Kanal

Eine digitale Quelle  $X(\lambda_i)$  erzeugt pro Symbolzeit  $T$  Symbole  $x_i$  mit den zugehörigen Signalformen  $s_i(t)$ . Dabei kann es sich um Signale im Basisband (z.B. Linecodes) oder um ein moduliertes Trägersignal handeln, z.B. bei einer relativ tiefen Zwischenfrequenz. Optional können diese Signale anschliessend mit einem Mixer zu einer viel höheren Frequenz eines Übertragungsbands verschoben werden.

Zur Vereinfachung wird wie schon im analogen Fall angenommen, dass die digitalen Signale über einen gauss'schen Kanal übertragen werden. Ein gauss'scher Kanal hat die Eigenschaft, dass er die übertragenen Signale weder linear noch nicht-linear verzerrt. Neben einer allfälligen zeitlichen Verzögerung und einer Skalierung überlagert ein gauss'scher Kanal dem Nutzsignal ein additives weisses gauss'sches Rauschen (AWGN) mit Mittelwert 0. Dieser Rauschprozess  $N(t)$  sei stationär und ergodisch.

Trotz den starken Vereinfachungen ist dieses Modell für viele Übertragungssysteme anwendbar, da einerseits viel technischer Aufwand betrieben wird, um Verzerrungen zu verhindern oder zu kompensieren und andererseits verschiedenartige Rauschquellen – wovon zumindest thermisches Widerstandsräuschen physikalisch unvermeidbar ist – jedes Übertragungssystem mehr oder weniger stark beeinträchtigen.

Bei binären Signalen werden pro Zeitintervall  $T$  nur zwei verschiedene Signalformen übertragen:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= s_1(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für ein Mark (Ereignis } S_1\text{)} \\ s_i(t) &= s_2(t) & 0 \leq t \leq T & \text{für ein Space (Ereignis } S_2\text{)} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Die gesendeten Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  werden also vereinfachend auf die Symbolzeit  $T$  begrenzt, d.h. sie überlappen sich nicht mit den Signalformen der vorangehenden oder nachfolgenden Symbole. Das vom Sender generierte Signal eines gesamten Bitstreams, d.h. die fortlaufende zufällige Abfolge von Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ , ist unter dieser Annahme somit frei von Intersymbolinterferenz (ISI).

Mögliche Signalformen für  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  wurden schon in früheren Kapiteln besprochen. Beispiele sind NRZ-Signale, der Manchester-Code, FSK oder ASK.

Da der idealisierte gauss'sche Kanal die übertragenen Signale nicht verzerrt, sind die Signalformen auch

beim Empfänger auf die Dauer ihrer Symbolzeit  $T$  begrenzt und überlappen sich weiterhin nicht mit den Signalen benachbarter Symbole.

Das Signal am Empfängereingang lautet jeweils für jedes gesendete binäre Symbol wie folgt:

$$y_i(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 1, 2 \text{ und } 0 \leq t \leq T \quad (11.2)$$

Sowohl die beiden zur Auswahl stehenden Nutzsignale  $s_i(t)$  wie auch die Musterfunktion  $n(t)$  des ergodischen Rauschprozesses  $N(t)$  sind zeit- und amplitudenkontinuierlich. Die hier erfolgte Annahme einer wer-tekontinuierlichen Amplitude soll aber nicht ausschliessen, dass  $s_i(t)$  auch „eckig“, d.h. mit Zero-Order Hold erzeugt und somit mit diskreten Amplitudenwerten übertragen werden kann.

Das Empfangssignal  $y_i(t)$  wird wie folgt aufbereitet:

- Maximieren der SNR mit geeignetem Filter:

$$z(t) = y_i(t) * h(t) = a_i(t) + n_o(t) \quad (11.3)$$

- Zum jeweils optimalen Abtastzeitpunkt  $k \cdot T$  wird  $z(t)$  abgetastet:

$$z(kT) = a_i(kT) + n_o(kT) \quad (11.4)$$

Ziel des Filters muss sein, den Rauschanteil  $n_o(t)$  zum Abtastzeitpunkt zu minimieren und zum selben Zeitpunkt die unterschiedliche Charakteristik von Mark und Space im Signal  $a_i(t)$  maximal herauszuschälen. Statistisch gesehen gibt es dabei periodisch pro Symbolzeit  $T$  einen Zeitpunkt, wo die SNR von  $z(t)$  maximal ist. Dies ist der optimale Abtastzeitpunkt des aufbereiteten Signals  $z(t)$ . Um die Schreibweise der Formeln einfach zu halten, soll nun für  $z(t)$  der Zeitnullpunkt  $t = 0$  gerade so gelegt werden, dass bei einer Abtastung zum Zeitpunkt  $t = k \cdot T$  gerade diese maximale SNR erfasst wird.

Dieser Lösungsansatz, bei welchem nur noch ein einziger zeitdiskreter Abtastwert pro Symbolzeit  $T$  ausgewertet wird, ist selbst dann noch anwendbar, wenn die Aufbereitung mit dem Filter  $h(t)$  in digitaler Weise erfolgt und hierfür das analoge Eingangssignal mehrmals pro Symbolzeit  $T$  digitalisiert wird. Auch bei einer digitalen Verarbeitung soll am Schluss der Aufbereitung von  $z(t)$  ein einziger Wert pro Symbolzeit  $T$  vorliegen, für welchen statistisch gesehen die SNR von  $z(t)$  maximiert wurde.

Bei einer rauschfreien Übertragung reduziert sich das zeitdiskrete Signal  $z(kT)$  auf  $a_i(kT)$  und hat pro Symbolwert  $S_i$  einen einzelnen, determinierten und charakteristischen Amplitudenwert  $a_i$ . Ohne Rauschen liegen damit im binären Fall nur noch zwei verschiedene Zahlenwerte  $a_i$  für  $z(kT)$  vor, nämlich  $a_1$  für ein empfan-genes, aufbereitetes Mark sowie  $a_2$  für ein Space.

Das Filter  $h(t)$  ist ein LTI-System, d.h. es soll linear und zeitinvariant sein. Damit hat aber auch  $n_o(kT)$ , d.h. das aufbereitete und abgetastete gauss'sche Kanalrauschen am Ausgang des Filters, immer noch eine gauss'sche Verteilung. Durch diese gaussverteilten Rauschwerte  $n_o(kT)$ , welche den diskreten Amplitudenwerten des Nutzsignals  $a_i(kT)$  überlagert sind, hat somit  $z(kT)$  keinen diskreten sondern immer noch einen kontinuierlichen Amplitudenspektrum.

Im zweiten Block wird aufgrund des Amplitudenwerts  $z(kT)$  mit einer Schätzung entschieden, welcher binäre Wert vom Sender höchstwahrscheinlich gesendet wurde. In diese Entscheidung werden allenfalls vorhandene statistische Vorkenntnisse über das übertragene Signal oder das Übertragungssystem miteinbezogen. Dabei wird pro Symbolzeit der zeitdiskrete Wert  $z(kT)$  mit einem Schwellwert  $\lambda_0$  verglichen, welcher sich zwischen den beiden nominalen Werten  $a_1$  und  $a_2$  befindet. Unter der Annahme, dass  $a_1 > a_2$  ist, vollzieht der Empfänger folgende Hypothesen:

$$\begin{aligned} \text{Hypothese } H_1, \text{ falls } z(kT) > \lambda_0: & \quad s_1(t) \text{ wurde gerade empfangen.} \\ \text{Hypothese } H_2, \text{ falls } z(kT) < \lambda_0: & \quad s_2(t) \text{ wurde gerade empfangen.} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Die Zuordnung  $> \lambda_0$  bzw.  $< \lambda_0$  wäre gerade umgekehrt, wenn  $a_1 < a_2$  gelten würde.

Im Falle einer Hard-Decision bilden die beiden Hypothesen  $H_1$  und  $H_2$  direkt das Resultat des Detektors. Im Falle einer Soft-Decision werden alle denkbaren Hypothesen mit einer Wahrscheinlichkeits-Metrik bewertet und die abschliessende Auswertung dem Decoder des fehlerkorrigierenden Codes überlassen.

Neben der geeigneten Wahl des Filters  $h(t)$  bleibt für die Implementierung eines optimalen Empfängers nur noch offen, die Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  zu definieren, bis zu welcher er sich für den einen oder anderen Symbolwert (d.h. für die Hypothese  $H_1$  oder  $H_2$ ) entscheidet. Diese Grenze  $\lambda_0$  soll ebenfalls so gewählt werden, dass die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  minimiert wird.

Im Anschluss an die nun folgende Berechnung der Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  (nach dem MAP-Kriterium sowie gemäss einem Maximum-Likelihood-Detektor) wird schliesslich noch mit dem Matched Filter das optimale Filter  $h(t)$  hergeleitet, welches den Störabstand SNR zum Abtastzeitpunkt  $t = k \cdot T$  maximiert.

### 11.3 MAP-Kriterium und Maximum-Likelihood Detektor

Prinzipiell unabhängig davon, welche Art von Detektor eingesetzt wird und ob ein Detektor eine Hard-Decision durchführt oder ob mit einer Soft-Decision die abschliessende Hypothese vom Decoder der Fehlerrerkorrektur vorgenommen wird, können bei einer binären Übertragung Fehler nur dann auftreten, wenn die Hypothesen  $H_1$  oder  $H_2$  des Empfängers mit den Ereignissen des Senders,  $S_1$  (d.h.  $s_1(t)$  wurde gesendet) und  $S_2$  ( $s_2(t)$  wurde gesendet), nicht übereinstimmen:

Hypothese  $H_1$  wird vom Empfänger gewählt, obwohl Ereignis  $S_2$  eintrat ( $s_2(t)$  wurde gesendet).

Hypothese  $H_2$  wird vom Empfänger gewählt, obwohl Ereignis  $S_1$  eintrat ( $s_1(t)$  wurde gesendet).

Damit kann rein formal auch die Fehlerwahrscheinlichkeit einer binären Übertragung wie folgt mathematisch ausgedrückt werden:

$$p_e = P(H_2 | S_1) \cdot P(S_1) + P(H_1 | S_2) \cdot P(S_2) \quad (11.6)$$

Dieser Ausdruck kann bei Übertragungen mit statistisch gleich häufigen Mark und Space vereinfacht werden:

$$\text{Falls } P(S_1) = P(S_2) \implies p_e = \frac{1}{2} [P(H_2 | S_1) + P(H_1 | S_2)] \quad (11.7)$$

Im nachfolgenden Abschnitt wird die optimale Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  mit dem Maximum-a-posteriori Kriterium (MAP-Kriterium) bestimmt, welches die Berechnung mit Hilfe der nominalen Amplitudenwerte  $a_1$  und  $a_2$ , der Auftretenswahrscheinlichkeit von Mark und Space sowie der Amplitudenverteilung des Rauschens  $n_o(kT)$  durchführt.

Sind die Auftretenswahrscheinlichkeiten von Mark und Space unbekannt, dann kann die Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  nur eingeschränkt optimiert werden. Beim sogenannten Maximum-Likelihood-Detektor wird dann eine gleich grosse Wahrscheinlichkeit von Mark und Space  $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$  angenommen, was bei vielen Übertragungen nicht nur eine korrekte Annahme ist, sondern die Berechnung der Schwelle  $\lambda_0$  auch noch vereinfacht, welche nun nur noch mit Hilfe der nominalen Amplitudenwerte  $a_1$  und  $a_2$  bestimmt werden kann.

### 11.3.1 MAP-Kriterium nach einem gauss'schen Kanal

Ist ein Detektor nach dem MAP-Kriterium implementiert, werden die namensgebenden A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten  $P(S_1 | z)$  und  $P(S_2 | z)$  mit Hilfe des Satzes von Bayes (8.15) vorgängig berechnet:

$$\begin{aligned} P(S_1 | z) &= \frac{f_Z(z|S_1) \cdot P(S_1)}{f_Z(z)} \\ P(S_2 | z) &= \frac{f_Z(z|S_2) \cdot P(S_2)}{f_Z(z)} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Der Detektor entscheidet sich anschliessend für jenes Symbol, deren bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(S_i | z)$  in Abhängigkeit des Amplitudenwerts  $z(kT)$  am grössten ist.

Liegt aber beim Empfänger der Amplitudenwert  $z(kT)$  einmal vor, dann ist für die Hypothese, welches Symbol gesendet wurde, nicht mehr relevant, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $f_Z(z)$  dieser Amplitudenwert  $z(kT)$  überhaupt erst einmal eintreten konnte. Das MAP-Kriterium reduziert sich somit auf den Vergleich der beiden Ausdrücke  $f_Z(z | S_1) \cdot P(S_1)$  und  $f_Z(z | S_2) \cdot P(S_2)$ , welcher nun für ein AWGN-Rauschen realisiert werden soll.

Die Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  seien weiterhin frei von Intersymbolinterferenz und die Übertragungsfunktion des Kanals determiniert und zeitinvariant. Dann werden die beiden rauschfreien und aufbereiteten Signalformen gemäss Gleichung (11.4) jeweils immer auf einen der beiden nominalen Amplitudenwerte  $a_i(kT) = a_1$  bzw.  $a_i(kT) = a_2$  abgebildet.

Ist zudem das Filter  $h(t)$  am Empfängereingang ein LTI-System, dann bleibt die gauss'sche Charakteristik des Kanalrauschen am abgetasteten Ausgang des Filters  $n_o(kT)$  erhalten. Dieses gauss'sche Ausgangsrauschen  $n_o$  besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_{n_o}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{n_o}} \cdot e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma_{n_o}^2}} \quad (11.9)$$

Das Ausgangsrauschen ist mit  $\mu = 0$  weiterhin mittelwertfrei und besitzt eine Varianz  $\sigma^2 = \sigma_{n_o}^2$ , deren Grösse sowohl vom Leistungsdichtespektrum  $\eta$  des Kanalrauschen wie auch vom Eingangsfilter  $h(t)$  abhängt.

Da das Eingangsfilter  $h(t)$  ein LTI-System ist, ist das Ausgangsrauschen  $n_o$  den nominalen Amplitudenwerten  $a_i$  additiv überlagert. In Abhängigkeit vom gesendeten Symbolwert ergibt sich damit für  $z(kT)$  folgende bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

$$\begin{aligned} f_Z(z | S_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{n_o}} \cdot e^{\frac{-(z-a_1)^2}{2\sigma_{n_o}^2}} \\ f_Z(z | S_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{n_o}} \cdot e^{\frac{-(z-a_2)^2}{2\sigma_{n_o}^2}} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Diese sind in nachfolgendem Graphen dargestellt:

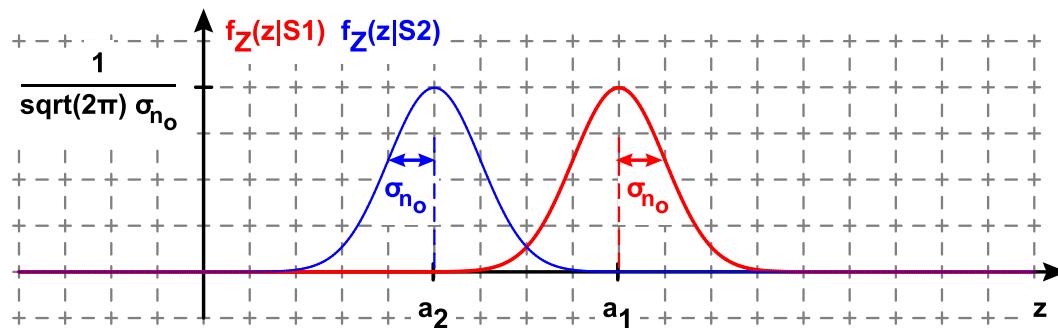


Abbildung 11.2: Amplitudenverteilung in Abhängigkeit vom Symbolwert

Die beiden Gaussverteilungen haben in Abhängigkeit vom gesendeten Symbol den Erwartungswert  $\mu = a_1$  bzw.  $\mu = a_2$ . Da sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_Z(z)$  einer Gaussverteilung für grösser werdende Abweichungen vom Erwartungswert schnell dem Wert 0 annähert, diesen aber nie ganz erreicht, führt dies zwingend zu einer Überlappung der beiden Gausskurven.

Die Amplitudenverteilung der gesamten Datenübertragung ist nun noch abhängig von der Auftretenswahrscheinlichkeit von Mark und Space. Diese ist in nachfolgendem Graph für einen allgemeinen Fall von voneinander abweichenden Häufigkeiten von Mark und Space dargestellt. Neben der gesamten Amplitudenverteilung wird im Graph jeweils separat noch der Amplitudenanteil für die empfangenen Mark wie auch Space farbig hervorgehoben.

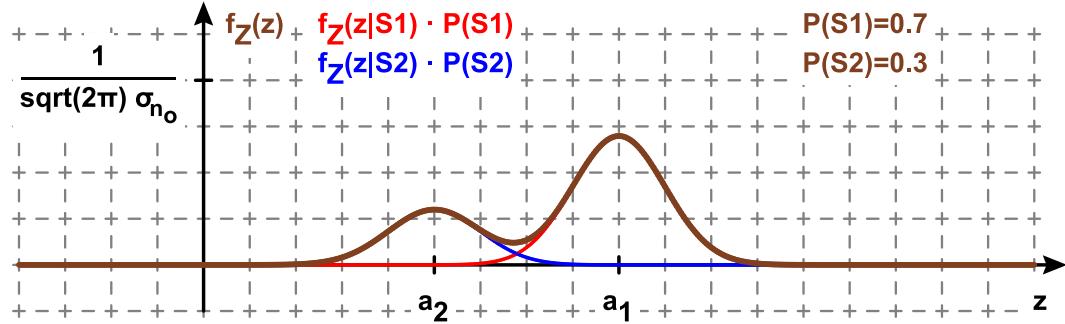


Abbildung 11.3: Amplitudenverteilung der gesamten Übertragung bei ungleich häufigen Mark und Space

Ist die Grenze  $\lambda_0$  einmal berechnet, können die Wahrscheinlichkeiten für die beiden falschen Hypothesen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P(H_2 | S_1) &= \int_{-\infty}^{\lambda_0} f_Z(z | S_1) dz \\ P(H_1 | S_2) &= \int_{\lambda_0}^{\infty} f_Z(z | S_2) dz \end{aligned} \quad (11.11)$$

Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_e = P(H_2 | S_1) \cdot P(S_1) + P(H_1 | S_2) \cdot P(S_2)$ , welche in Gleichung (11.6) rein formal festgehalten wurde, kann jetzt ebenfalls bestimmt werden:

$$p_e = P(S_1) \cdot \int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{n_o}} \cdot e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_{n_o}^2}} dz + P(S_2) \cdot \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{n_o}} \cdot e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_{n_o}^2}} dz \quad (11.12)$$

Diese Integrale entsprechen gerade der Q-Funktion, welche bekannterweise nicht analytisch berechnet, aber zum Beispiel tabellarisch bestimmt werden kann. Mit der Q-Funktion ergibt sich folgender Ausdruck für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_e = Q\left(\frac{|a_1 - \lambda_0|}{\sigma_{n_o}}\right) \cdot P(S_1) + Q\left(\frac{|a_2 - \lambda_0|}{\sigma_{n_o}}\right) \cdot P(S_2) \quad (11.13)$$

Um die optimale Schwelle  $\lambda_0$  für eine minimale Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  zu finden, kann in Gleichung (11.12)  $p_e$  nach  $\lambda_0$  abgeleitet werden und die Nullstelle dieser Ableitung bestimmt werden. Dazu wird als erstes diese Gleichung vereinheitlichend so umgeformt, dass die Integrationsgrenzen des zweiten Integrals jenen des ersten Integrals entsprechen:

$$p_e = P(S_1) \cdot \int_{-\infty}^{\lambda_0} f_Z(z | S_1) dz + P(S_2) \cdot \left[ 1 - \int_{-\infty}^{\lambda_0} f_Z(z | S_2) dz \right] \quad (11.14)$$

Die beiden Integrale können anschliessend zusammengefasst werden:

$$p_e = P(S_2) + \int_{-\infty}^{\lambda_0} P(S_1) \cdot f_Z(z | S_1) - P(S_2) \cdot f_Z(z | S_2) dz \quad (11.15)$$

Nun ist die Ableitung nach  $\lambda_0$  berechenbar und muss für das Auffinden des Minimums an der Stelle  $z = \lambda_0$  gerade Null ergeben:

$$\frac{d p_e}{d \lambda_0} = P(S_1) \cdot f_Z(\lambda_0 | S_1) - P(S_2) \cdot f_Z(\lambda_0 | S_2) = 0 \quad (11.16)$$

Die beiden Terme dieser Differenz können gleichgesetzt werden:

$$f_Z(\lambda_0 | S_1) \cdot P(S_1) = f_Z(\lambda_0 | S_2) \cdot P(S_2) \quad (11.17)$$

Die Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  befindet sich also an jener Stelle, wo die beiden mit  $P(S_1)$  bzw.  $P(S_2)$  gewichteten Gaußfunktionen in Abbildung (11.3) ihren Schnittpunkt haben.

Der Detektor muss sich daher nach folgender Regel entscheiden, um die Bitfehlerrate zu minimieren:

$$\begin{aligned} \text{Hypothese } H_1: & \text{ falls } f_Z(z | S_1) \cdot P(S_1) > f_Z(z | S_2) \cdot P(S_2) \\ \text{Hypothese } H_2: & \text{ falls } f_Z(z | S_1) \cdot P(S_1) < f_Z(z | S_2) \cdot P(S_2) \end{aligned} \quad (11.18)$$

Diese Regel für die Wahl der Hypothesen entspricht aber gerade dem eingangs mit Gleichung (11.8) erläuterten MAP-Kriterium, welches jenes Symbol auswählt, bei welchem die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(S_i | z)$  in Abhängigkeit des Amplitudenwerts  $z(kT)$  am grössten ist.

Der exakte Wert des Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  soll nun berechnet werden. In Gleichung (11.17) werden die Wahrscheinlichkeiten  $P(S_1)$  und  $P(S_2)$  auf der rechten und die Amplitudendichtefunktionen auf der linken Seite der Gleichung zusammengefasst und für  $f(\lambda_0 | S_i)$  die entsprechende Gaußfunktion gemäss Gleichung (11.12) eingesetzt:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{n_o}^2}} \cdot e^{-\frac{(\lambda_0 - a_1)^2}{2\sigma_{n_o}^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{n_o}^2}} \cdot e^{-\frac{(\lambda_0 - a_2)^2}{2\sigma_{n_o}^2}}} = \frac{P(S_2)}{P(S_1)} \quad (11.19)$$

Der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{n_o}^2}}$  kann gekürzt werden und der Quotient der beiden Exponentialfunktionen kann als Differenz im Exponenten zusammengefasst werden, wobei gleichzeitig die quadratische Funktion im Exponenten ausmultipliziert und der Exponent anschliessend vereinfacht wurde:

$$e^{\frac{2\lambda_0 \cdot (a_1 - a_2) - (a_1^2 - a_2^2)}{2\sigma_{n_o}^2}} = \frac{P(S_2)}{P(S_1)} \quad (11.20)$$

Durch logarithmieren von beiden Seiten der Gleichung werden keine zusätzlichen, ungültigen Lösungen generiert, da der Logarithmus eine stetig ansteigende Funktion ist und die Ausdrücke links und rechts der Gleichung keine negativen Werte aufweisen können. Damit:

$$\frac{2\lambda_0 \cdot (a_1 - a_2) - (a_1^2 - a_2^2)}{2\sigma_{n_o}^2} = \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} \quad (11.21)$$

Auflösen nach  $\lambda_0$  ergibt schliesslich:

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma_{n_o}^2}{a_1 - a_2} \cdot \ln \frac{P(S_2)}{P(S_1)} \quad (11.22)$$

Dieser Entscheidungsschwelle  $\lambda_0$  ist nicht nur abhängig von den nominalen Amplitudenwerten  $a_1$  und  $a_2$ , sondern auch von den Auftretenswahrscheinlichkeiten  $P(S_1)$  und  $P(S_2)$  von Mark und Space sowie der statistischen AC-Leistung  $\sigma_{n_o}^2$  des aufbereiteten und abgetasteten Kanalrauschen.

Die Häufigkeit von Mark und Space sowie das Kanalrauschen sind vor einer tatsächlich durchgeföhrten Datenkommunikation noch unbekannt und müssten als Parameter dem Empfänger übergeben oder von diesem geschätzt werden. Diese beiden Schätzungen beeinflussen einerseits die Ergebnisse des Detektors, sind aber umgekehrt auch von diesen Ergebnissen abhängig.

### 11.3.2 Maximum-Likelihood Detektor

Sind die Wahrscheinlichkeiten  $P(S_1)$  und  $P(S_2)$  unbekannt, dann kann die Schwelle  $\lambda_0$  des Detektors nicht nach dem MAP-Kriterium optimiert werden. In diesen Fällen kann auf den Maximum-Likelihood-Detektor (oder abgekürzt: ML-Detektor) ausgewichen werden, welcher gleich grosse Wahrscheinlichkeiten  $P(S_i)$  für alle Symbole annimmt, was im binären Fall für Mark und Space eine Wahrscheinlichkeit von  $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$  ergibt.

Dies scheint vorerst eine erhebliche Einschränkung bei der Optimierung der Entscheidungsschwelle zu sein. Allerdings ist die Annahme von 50% Mark und Space in vielen Fällen eine gute Wahl, da man in Kommunikationssystemen oft auch aus Gründen des Spektrums, der Synchronisation oder zur Maximierung des Informationsflusses eine solche ausgeglichene Verteilung von Mark und Space anstrebt.

Anstatt wie beim MAP-Kriterium das empfangene Signal aufgrund der grössten A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit  $P(S_i | z)$  zu bestimmen, reduziert sich die hierzu benutzte Gleichung (11.8) noch auf den Vergleich der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten  $f_Z(z | S_i)$ .

Dies bedeutet, dass der ML-Detektor jenes Symbol  $S_i$  als gerade empfangenes Symbol wählen soll, für welches (unabhängig von der relativen Häufigkeit  $P(S_i)$  dieses Symbols) die gerade empfangene Amplitude  $z(kT)$  am wahrscheinlichsten generiert wird.

Um den Vergleich zu normieren, kann für jeden Wert  $z$  das Verhältnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der sogenannten Likelihood Ratio  $\Lambda(z) = \frac{f(z|S_1)}{f(z|S_2)}$  berechnet werden.

Dann lautet die Regel für die beiden Hypothesen  $H_1$  und  $H_2$

$$\begin{aligned} \text{Hypothese } H_1: & \text{ falls } \Lambda(z) > 1 \\ \text{Hypothese } H_2: & \text{ falls } \Lambda(z) < 1 \end{aligned} \quad (11.23)$$

Die Amplitudenverteilung  $f_Z(z)$  beim Empfänger für den Fall von gleich häufigen Mark und Space ist im nachfolgenden Graphen dargestellt:

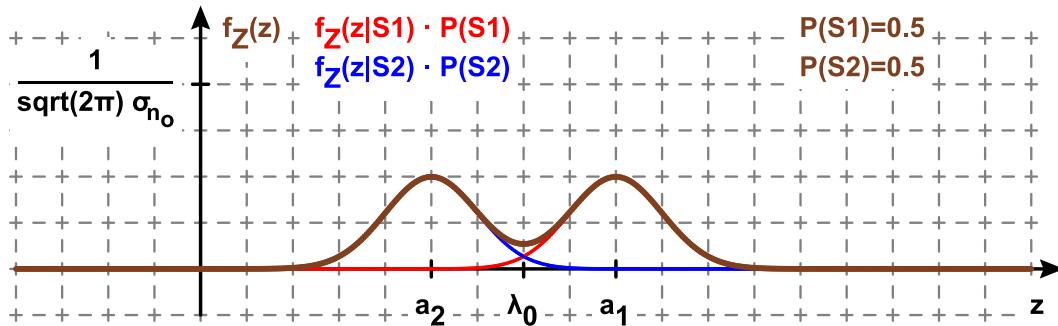


Abbildung 11.4: Amplitudenverteilung der gesamten Übertragung bei gleich häufigen Mark und Space

Aus Symmetriegründen ist sofort klar, dass die optimale Schwelle  $\lambda_0$  des ML-Detektors auf folgende sehr einfache Weise berechnet werden kann:

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (11.24)$$

Dieses Ergebnis wird bestätigt wenn in Gleichung (11.22)  $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$  eingesetzt wird.

Auch die Berechnung der Bitfehlerrate  $p_e$  gemäss Gleichung (11.13) vereinfacht sich für den ML-Detektor, da  $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$  gilt und auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(H_2 | S_1)$  und  $P(H_1 | S_2)$  aus Symmetriegründen identisch sind.

$$p_e = P(H_2 | S_1) = P(H_1 | S_2) = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right) \quad (11.25)$$

Unabhängig davon, ob nun ein Detektor nach dem MAP-Kriterium oder ein ML-Detektor verwendet wird, kann festgehalten werden: die verbleibende unumgängliche Wahrscheinlichkeit  $p_e$  eines Übertragungsfehlers kann für gegebene Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ , gegebenes Leistungsdichtespektrum  $\frac{\eta}{2}$  des AWGN-Rauschens sowie gegebenes Eingangsfilter  $h(t)$  berechnet werden. Die Frage, wie nun auch noch das Eingangsfilter  $h(t)$  beschaffen sein muss, damit die Bitfehlerrate  $p_e$  minimiert wird, soll im nächsten Abschnitt geklärt werden.

## 11.4 Optimales Empfangsfilter

In diesem Abschnitt wird untersucht, auf welche Weise das lineare Filter  $h(t)$  optimiert werden kann, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  der Übertragung minimiert wird.

### 11.4.1 Matched Filter

Beim Matched Filter handelt es sich um ein an die Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  angepasstes Filter, welches den Unterschied zwischen Mark und Space zu den Abtastzeitpunkten  $t = k \cdot T$  maximiert und gleichzeitig den Rauschanteil  $n_o(kT)$  minimiert. Damit ergibt sich zu den Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  ein grösstmöglicher Störabstand  $\text{SNR}_o$ , welcher zur Minimierung der Bitfehlerrate  $p_e$  führt.

Da es gilt, einerseits den Unterschied zwischen Mark und Space d.h. die Differenz der Amplitudenwerte  $a_1$  und  $a_2$  zu maximieren und gleichzeitig die Verarbeitung im Eingangsfilter  $h(t)$  linear ist, werden die nachfolgenden Überlegungen gleich mit dem Differenzsignal von Mark und Space  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$  vollzogen:

- $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$  sei das Differenzsignal der beiden determinierten und bekannten Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ .
- $n(t)$  sei jeweils eine Musterfunktion des ergodischen AWGN-Rauschen  $N(t)$ , welches  $s(t)$  überlagert ist.
- $h(t)$  sei die Impulsantwort des zu bestimmenden Filters, an dessen Ausgang zum Ende der Bitzeit  $T$  die SNR des verrauschten Differenzsignals  $s(t) + n(t)$  maximal ist.
- $a(t) = s(t) * h(t)$  sei das Ausgangssignal des Eingangsfilters  $h(t)$ , wenn an dessen Eingang das rauschfreie Differenzsignal  $s(t)$  anliegt.
- $a(T) = a_1 - a_2$  kann auch als Fourier-Rücktransformierte geschrieben werden, wenn das Spektrum  $S(\omega)$  mit dem Frequenzgang  $H(\omega)$  des Empfangsfilters gewichtet wird:

$$a(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega \quad (11.26)$$

- Mit der mittleren Ausgangsleistung des Rauschens  $N_o = E[n_o^2(T)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2} \cdot |H(\omega)|^2 d\omega$  folgt für den Störabstand  $\text{SNR}_o$  am Eingang des Detektors:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_o = \frac{a^2(T)}{N_o} = \frac{(1/2\pi)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{(\eta/2)(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (11.27)$$

Um den Ausdruck der  $\text{SNR}_o$  zu vereinfachen, kann auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung zurückgegriffen werden, welche ohne Beweis lautet:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) f_1(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx \quad (11.28)$$

Das Gleichheitszeichen gilt bei dieser Ungleichung nur, falls  $f_2(x)$  bis auf eine Skalierung mit einer reellwertigen konstanten  $C$  jeweils konjugiert komplex zu  $f_1(x)$  ist, d.h. falls  $f_2(x) = C \cdot f_1^*(x)$  gilt. Für die Konstante  $C$  kann dabei auch ganz simpel  $C = 1$  oder  $C = -1$  gewählt werden.

Wählen wir  $x = \omega$  und als zweite Funktion  $f_2(x)$  den Frequenzgang des gesuchten optimalen Filters  $f_2(\omega) = H(\omega)$ , ergibt sich im Zähler von Gleichung (11.27) gleichzeitig für  $f_1(x)$  als erste Funktion:  $f_1(\omega) = S(\omega) \cdot e^{j\omega T}$ . Da  $e^{j\omega T}$  nur ein Phasenterm ist, gilt weiter  $|S(\omega) \cdot e^{j\omega t}| = |S(\omega)|$ , womit der Zähler der  $\text{SNR}_o$  in Gleichung (11.27) wie folgt vereinfacht werden kann:

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \cdot S(\omega) \cdot e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \leq \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (11.29)$$

Durch Kürzen von  $\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$  in Gleichung (11.27) ergibt sich folgende obere Grenze des Störabstands  $\text{SNR}_o$  zum optimalen Abtastzeitpunkt  $T$ :

$$\text{SNR}_o \leq \frac{2}{\eta} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2 \cdot E_d}{\eta} \quad (11.30)$$

Bei  $E_d$  handelt es sich dabei um die Energie des Differenzsignals der beiden Signalformen von Mark und Space, das heisst der Energie von  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$ .

Die obere Grenze der  $\text{SNR}_o = \frac{2 \cdot E_d}{\eta}$  ist nur abhängig von den beiden Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  am Eingang des digitalen Empfängers, sowie dem Leistungsdichtespektrum  $\frac{\eta}{2}$  des AWGN-Rauschens.

Der maximale Störabstand  $\text{SNR}_o$  zum Abtastzeitpunkt  $T$  wird erreicht, falls  $H(\omega) = C \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$ . Dieses Filter ist optimiert im Hinblick auf die beiden Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  von Mark und Space und wird als Matched Filter (angepasstes Filter) bezeichnet.

Da das Differenzsignal  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$  reellwertig ist, gilt  $S^*(\omega) = S(-\omega)$ , wobei  $S(-\omega)$  die Fourier-Transformierte von  $s(-t)$  ist. Der Multiplikation mit  $e^{-j\omega T}$  im Frequenzbereich entspricht eine zeitliche Verzögerung um  $T$  im Zeitbereich.

Wird nun die Konstante  $C = 1$  gewählt, ergibt sich folgende Impulsantwort  $h(t)$  des angepassten Filters:

$$h(t) = s(T - t) \quad (11.31)$$

Graphisch kann die Impulsantwort  $h(t)$  des Matched Filters sehr einfach konstruiert werden:

- Spiegeln des Differenzsignals  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$  an der Ordinate, was  $s(-t)$  entspricht.
- Anschliessend verzögern (nach rechts schieben) des gespiegelten Signals um  $T$ , was  $h(t) = s(T - t)$  entspricht.

### 11.4.2 Korrelator

Der beste Störabstand  $\text{SNR}_o$  zum Abtastzeitpunkt  $T$  wird gemäss vorhergehendem Abschnitt erzielt, indem das Empfangssignal  $r(t)$  mit dem Matched Filter  $h(t) = s(T - t)$  aufbereitet wird. Der Filterausgang  $z(t)$  ergibt sich aus der Faltung von Eingangssignal  $r(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$  des angepassten Filters:

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^t r(\tau)s(T - (t - \tau)) d\tau \quad (11.32)$$

Dabei handelt es sich bei  $s(t)$  wie nun schon vielmals erwähnt um das Differenzsignal  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$  der beiden Signalformen von Mark und Space.

Die Auswertung dieses Ausdrucks zum optimalen Abtastzeitpunkt  $T$  ergibt:

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(T - (T - \tau)) d\tau = \int_0^T r(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \quad (11.33)$$

Dies entspricht aber gerade der Kreuzkorrelation von  $r(t)$  und  $s(t)$ .

Für den optimalen Abtastzeitpunkt  $T$  kann also anstelle des Matched Filters äquivalent ein Korrelator verwendet werden, welcher das empfangene Signal  $r(t)$  mit dem Differenzsignal  $s(t)$  korreliert. Die Peakwerte dieser Kreuzkorrelation  $R_{rs}(\tau)$  werden bei einer zeitlichen Verschiebung zwischen  $r(t)$  und  $s(t)$  von  $\tau = 0$  erwartet. Sie haben einen positiven Wert für ein empfangenes Mark  $r(t) = s_1(t)$  und einen negativen Wert für ein empfangenes Space  $r(t) = s_2(t)$ .

### 11.4.3 Minimale Bitfehlerrate dank optimalem Detektor

Für den Fall  $P(S_1) = P(S_2) = \frac{1}{2}$  von gleich wahrscheinlichen Mark und Space wurde die Bitfehlerrate  $p_e$  in Gleichung (11.25) schon berechnet und lautete:

$$p_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right)$$

Für eine minimale Bitfehlerrate muss nun das Argument der Q-Funktion maximal werden. Dieses Argument der Q-Funktion ist bis auf einen Faktor  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  identisch mit der Wurzel aus der  $\text{SNR}_o$  zum optimalen Abtastzeitpunkt. Von dieser  $\text{SNR}_o$  wurde der Maximalwert aber soeben berechnet.

Somit kann die minimale Bitfehlerrate bei gleich häufigen Mark und Space bestimmt werden:

$$\text{Falls } P(S_1) = P(S_2) \implies p_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_o}}\right) \geq Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) \quad (11.34)$$

Dieses Ergebnis bezieht sich ausschliesslich auf Eingangsgrössen des Empfängers. Sind also die Signalformen  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  einmal gewählt und das Leistungsdichtespektrum des AWGN-Rauschens bekannt, kann die minimale und unumgängliche Bitfehlerrate berechnet werden, welche selbst bei bestmöglicher Verarbeitung durch den Einsatz eines optimalen Detektors nicht verhindert werden kann.

Da die Bitfehlerrate von der Energie des Differenzsignals abhängt, kann ihr Wert wie folgt verbessert werden:

- Gute Wahl von  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$ , deren Differenz  $s(t)$  auch bei kleiner Sendeleistung gross ist.
- Erhöhung der Empfangsleistung (z.B. durch höhere Sendeleistung oder kleinere Kanaldämpfung).
- Erhöhung der Symbolzeit  $T$ , was aber zugleich eine Reduzierung der Datenrate mit sich bringt.

Abschliessend soll noch betont werden, dass Bitfehler in jedem Kommunikationssystem unumgänglich sind. Da aber die Q-Funktion  $Q(x)$  für Argumente  $x > 5 \dots 6$  extrem schnell gegen Null strebt, kann in der Praxis durch eine genügend hohe Empfangsleistung und/oder eine genügend lange Symbolzeit  $T$  eine de facto fehlerfreie Übertragung realisiert werden.

#### Beispiel 1: unipolares NRZ-Signal

Ein unipolares NRZ-Signal mit Bitzeit  $T$  habe beim Empfänger eine konstante Amplitude  $s_1 = A$  für Mark und  $s_2 = 0$  für Space, wobei Mark und Space gleich häufig vorkommen. Die spektrale AWGN-Leistungsdichte des Rauschens betrage  $S_{NN} = \frac{n}{2}$ .

Differenzsignal über Symbolzeit  $T$ :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t) = A$

Differenzenergie pro Symbol:  $E_d = A^2 \cdot T$

Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{2\eta}}\right)$

Für einen fairen Vergleich mit anderen Leitungscodes soll nun die mittlere Leistung beim Empfänger  $\bar{P}$  jeweils gleich gross gewählt werden.

Mittlere Leistung bei je 50% Mark und Space:  $\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{A^2}{2}$

Einsetzen in Formel für Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\bar{P} \cdot T}{\eta}}\right)$

### Beispiel 2: bipolares NRZ-Signal

Ein bipolares NRZ-Signal mit Bitzeit  $T$  habe beim Empfänger eine konstante Amplitude  $s_1 = A$  für Mark und  $s_2 = -A$  für Space, wobei Mark und Space gleich häufig vorkommen. Die spektrale AWGN-Leistungsdichte des Rauschens betrage  $S_{NN} = \frac{\eta}{2}$ .

Differenzsignal über Symbolzeit  $T$ :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t) = 2 \cdot A$

Differenzenergie pro Symbol:  $E_d = 4 \cdot A^2 \cdot T$

Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4 \cdot A^2 \cdot T}{2\eta}}\right)$

Für einen fairen Vergleich mit anderen Leitungscodes soll nun die mittlere Leistung beim Empfänger  $\bar{P}$  jeweils gleich gross gewählt werden.

Mittlere Leistung bei je 50% Mark und Space:  $\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{1}{2} \cdot A^2 = A^2$

Einsetzen in Formel für Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot \bar{P} \cdot T}{\eta}}\right)$

Vergleicht man die Bitfehlerrate  $P_e$  mit jener des unipolaren NRZ-Signals, ist das Argument der Q-Funktion um einen Faktor  $\sqrt{2}$  höher. Ein Blick in die Tabelle der Q-Funktion zeigt, dass dieser Faktor 1.41 bei sehr hohen Bitfehlerraten  $P_e \approx 0.1$  eine relativ kleine, bei moderaten Bitfehlerraten  $P_e < 0.001$  eine massive Verbesserung der Bitfehlerrate ergibt.

Erklären kann man sich diese Verbesserung dadurch, dass ein unipolares NRZ-Signal viel DC-Leistung enthält, welche keinen informationstragenden Beitrag beim Empfänger liefert.

### Beispiel 3: OOK

Ein OOK-Signal mit Bitzeit  $T$  sendet  $s_1 = A \cdot \cos(\omega_c t)$  für Mark und  $s_2 = 0$  für Space, wobei Mark und Space gleich häufig vorkommen. Die spektrale AWGN-Leistungsdichte des Rauschens betrage  $S_{NN} = \frac{\eta}{2}$ .

Differenzsignal über Symbolzeit  $T$ :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t) = A \cdot \cos(\omega_c t)$

Differenzenergie pro Symbol:  $E_d \approx \frac{1}{2} A^2 \cdot T$  (exakt, falls  $T = n \cdot \frac{1}{f_c}$ )

Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{4\eta}}\right)$

Für einen fairen Vergleich mit anderen Leitungscodes soll nun die mittlere Leistung beim Empfänger  $\bar{P}$  jeweils gleich gross gewählt werden.

Mittlere Leistung bei je 50% Mark und Space:  $\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{A^2}{4}$

Einsetzen in Formel für Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\bar{P} \cdot T}{\eta}}\right)$

Bei gleicher Empfangsleistung  $\bar{P}$  ergibt sich für OOK dieselbe Bitfehlerrate  $P_e$  wie bei einem unipolaren NRZ-Signal.

### Beispiel 4: BPSK

Ein BPSK-Signal mit Bitzeit  $T$  sendet  $s_1 = A \cdot \cos(\omega_c t)$  für Mark und  $s_2 = -A \cdot \cos(\omega_c t)$  für Space, wobei Mark und Space gleich häufig vorkommen. Die spektrale AWGN-Leistungsdichte des Rauschens betrage  $S_{NN} = \frac{\eta}{2}$ .

Differenzsignal über Symbolzeit  $T$ :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t) = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega_c t)$

Differenzenergie pro Symbol:  $E_d \approx 2A^2 \cdot T$  (exakt, falls  $T = n \cdot \frac{1}{f_c}$ )

Bitfehlerwahrscheinlichkeit:  $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{\eta}}\right)$

Für einen fairen Vergleich mit anderen Leitungscodes soll nun die mittlere Leistung beim Empfänger  $\bar{P}$  jeweils gleich gross gewählt werden.

$$\text{Mittlere Leistung bei je 50\% Mark und Space: } \bar{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Einsetzen in Formel für Bitfehlerwahrscheinlichkeit: } P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot \bar{P} \cdot T}{\eta}}\right)$$

Bei gleicher Empfangsleistung  $\bar{P}$  weist (analog zu einem bipolarem NRZ-Signal) auch das BPSK-Signal im Vergleich zum OOK-Signal eine deutlich tiefere Bitfehlerrate  $P_e$  auf.



# Kapitel 12

## Informationstheorie

### 12.1 Informationstheorie nach Claude Shannon

Die Informationstheorie wurde mit der Veröffentlichung des dazu wegweisenden Papers von Claude Shannon begründet. Der Informationsgehalt von digitalen Signalen kann mit Hilfe dieser Informationstheorie quantifiziert und die Fähigkeit von Kanälen, diese Information zu transferieren, bestimmt werden.

Als erstes soll die Sichtweise auf den Informationsbegriff nach Shannon etwas umrissen werden. Es geht bei diesem Begriff weniger um wissenswerte Neuigkeiten, welche der Sender dem Empfänger mitteilt, sondern eher um die Beantwortung von konkreten Fragen, welche der Empfänger an den Sender richtet. Ein gutes Beispiel für eine solche Frage des Empfängers könnte lauten, welcher Bitwert als nächstes vom Sender übertragen wurde. Oder – wenn man den Empfang eines einzelnen Bits als Zufallsexperiment betrachtet und die Frage viel allgemeiner formuliert – welches das nächste Ergebnis eines Zufallsexperiments ist.

An dieser Stelle sollen Fragen als „gute“ und „schlechte“ Fragen bewertet werden, wobei diese Bewertung hier auf binäre „Ja/Nein“-Fragen, also Fragen, welche entweder mit Ja oder Nein beantwortet werden können, beschränkt werden soll.

Eine „gute“ Frage ist eine Frage, bei welcher die Antwort möglichst viel Ungewissheit beseitigt. Dies trifft zu, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein „Ja“ oder ein „Nein“ gleich gross ist, d.h.  $P(\text{,,Ja''}) = P(\text{,,Nein''}) = 0.5$  gilt. Die Antwort auf diese Frage entspricht einem Bit, was im Zusammenhang mit der Informationstheorie nicht Binary Digit, sondern Binary Unit bedeutet. Eine gute Frage könnte lauten, ob beim Münzwurf als nächstes das Ergebnis „Kopf“ herauskommt.

Bei einer „schlechten“ Frage ist die Beseitigung von Unsicherheit gering, da sich die Wahrscheinlichkeit für ein „Ja“ von jener eines „Neins“ deutlich unterscheidet. Ein Beispiel für eine „schlechte“ Fragestellung ist zum Beispiel, ob es morgen in der Sahara regnen wird. Auch im herbstlichen London wird die Antwort auf diese Frage nur einen kleinen Gewinn an Information erzielen. Der Fragesteller kann aufgrund der ungleich verteilten Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse dieses Zufallsexperiments die resultierende Antwort schon mit grosser Sicherheit erahnen, das heisst, es wird mit der Antwort nur wenig Unsicherheit beseitigt.

Bei wiederholten „schlechten“ Fragen besteht grundsätzlich immer die Möglichkeit, die gleiche Informationsmenge auch mit weniger aber geschickteren Fragen einzuholen. Anstatt täglich nach dem Regen in der Sahara zu fragen, könnte man sich ja auch kurz und knapp mit einer einzigen Frage erkundigen, ob es die ganze kommende Woche einmal regnen wird. Sollte dies in einem seltenen Fall tatsächlich einmal zutreffen, kann immer noch mit zusätzlichen „Ja/Nein“-Fragen nachgehakt werden, an welchen Wochentagen dies der Fall sein wird. Im Schnitt wird sich so aber die Anzahl der Fragen deutlich reduzieren.

Somit besitzen Zufallsexperimente mit ungleich wahrscheinlichen Ergebnissen offenbar pro Durchführung weniger Information, als solche, wo kein Vorwissen vorhanden ist, welches Ergebnis zu favorisieren ist. Dieses a-priori Wissen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung ermöglicht es, die Anzahl Fragen im Mittel zu reduzieren, indem Fragen gestellt werden, bei welchen häufig auftretende Ergebnisse des Zufallsexperiments nach wenigen Antworten feststehen, während man für die selteneren Ereignisse einige Fragen mehr investieren darf, da deren Anzahl im statistischen Mittel weniger ins Gewicht fallen.

Wenn man diese Strategie der geschickten Fragerei auf die Ergebnisse eines Zufallsexperiments herunterbricht, stellt man fest, dass Ergebnisse mit hoher Auftretenswahrscheinlichkeit einen kleineren Informationsgehalt haben als Ergebnisse, die statistisch seltener auftreten.

### 12.1.1 Diskrete gedächtnisfreie Quellen und Kanäle

Um ein einfaches Modell für die nachfolgenden Kapitel erstellen zu können, sind folgende zwei Begriffe von Bedeutung:

- **Diskrete gedächtnisfreie Quelle** (Englisch: discrete memoryless source, DMS)

Eine zeitdiskrete Quelle generiert zu den Zeitpunkten  $t = k \cdot T$  Symbole. Die Quelle selber nennt man diskret, wenn die Symbole nur Werte aus einem endlichen Alphabet annehmen können. Eine diskrete Quelle ist genau dann gedächtnisfrei, wenn die ausgegebenen Symbolwerte nur aufgrund ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit generiert werden und statistisch unabhängig von den vorangehenden und nachfolgenden Symbolwerten sind. Die diskrete gedächtnisfreie Quelle kann als zeitdiskreter Zufallsprozess  $X(t)$  modelliert werden, bei welchem statistisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_k = X(k \cdot T)$  zeitlich aneinander gereiht sind.

- **Diskreter gedächtnisfreier Kanal** (Englisch: discrete memoryless channel, DMC)

Ein diskreter gedächtnisfreier Kanal überträgt zu den diskreten Zeitpunkten  $k \cdot T$  Symbole einer diskreten Quelle zu einem Empfänger. Den Kanal selber nennt man diskret, wenn er die diskreten Zufallsvariablen  $X_k$  auf wiederum diskrete Zufallsvariablen  $Y_k$  am Kanalausgang abbildet. Der diskrete Kanal ist genau dann gedächtnisfrei, wenn die Ausgangszufallsvariable  $Y_k$  nur von der aktuellen Eingangsvariable  $X_k$  abhängt und die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p(y_j | x_i)$ , welche definieren, wie Eingangssymbolwerte  $x_i$  auf die Ausgangssymbolwerte  $y_j$  korrekt oder fehlerhaft abgebildet werden, unabhängig von zeitlich vorangehenden und nachfolgenden Symbolübertragungen sind.

### 12.1.2 Mathematische Definition von Information

Der Informationsgehalt eines Zufallsexperiments ist aufgrund der einleitenden Überlegungen offensichtlich mit der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen verbunden. Seltene Ereignisse haben einen hohen, statistisch häufig auftretende Ereignisse einen tiefen Informationsgehalt.

Weiter soll der Informationsgehalt sinnvollerweise mit einem positiven Wert ausgedrückt werden können: jedes neu durchgeführte Zufallsexperiment, dessen Ergebnis nicht aus vorhergehenden Experimenten mit Sicherheit vorausgesagt werden kann, erhöht den Informationsgehalt einer Versuchsreihe.

Schliesslich scheint es auch sinnvoll, dass bei zwei oder mehreren statistisch unabhängigen Ereignissen, die jeweils gewonnene Information  $I(x)$  jedes einzelnen Experiments aufsummiert wird. Während sich bei statistisch unabhängigen Ereignissen die Verbundwahrscheinlichkeit  $P(A_i, A_j)$  durch Multiplizieren der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse  $P(A_i)$  und  $P(A_j)$  ergibt, wird dies beim Informationsgehalt  $I(A_i, A_j)$  durch eine Addition ausgedrückt:

$$\text{Falls } P(A_i, A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \text{ soll gelten: } I(A_i, A_j) = I(A_i) + I(A_j)$$

Mit diesen drei Eigenschaften ergibt sich zwingend ein logarithmischer Zusammenhang zwischen Informationsgehalt und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen. Im Sinne der „Ja/Nein“-Fragen bietet sich der Zweierlogarithmus als sehr praktische Einheit an (doch hätte der Informationsgehalt auch mit einer anderen Basis des Logarithmus definiert werden können):

$$I(x_i) = -\log_2 P(x_i) \tag{12.1}$$

Die Einheit des so definierten Informationsgehalts  $I(x_i)$  ist das Binary Unit (bit). Es besitzt zwar in abgekürzter Schreibweise die Einheit bit wie das Binary Digit, muss aber von diesem unterschieden werden: nur wenn Mark und Space statistisch gleich häufig von einer gedächtnisfreien Quelle generiert werden, besitzt ein Binary Digit den Informationsgehalt eines Binary Units. In allen anderen Fällen ist der Informationsgehalt in Binary Unit insgesamt kleiner als die Anzahl der zur Codierung verwendeten Binary Digits.

### 12.1.3 Entropie

Ist der Informationsgehalt jedes Symbols einer diskreten gedächtnisfreien Quelle (DMS) oder der möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bekannt, kann der mittlere Informationsgehalt dieser DMS bzw. des Experiments bestimmt werden. Dieser statistisch gemittelte Informationsgehalt der Zufallsvariable  $X$  wird als Entropie  $H(X)$  bezeichnet.

Besitzt die Quelle bzw. das Zufallsexperiment  $X$  kein Gedächtnis, entspricht ihre Entropie  $H(X)$  gerade dem Erwartungswert des Informationsgehalts von statistisch unabhängigen Ereignissen:

$$H(X) = E[I(x_i)] = \sum_i P(x_i) \cdot I(x_i) = -\sum_i P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.2)$$

Die Entropie  $H(X)$  nimmt je nach Verteilung der Wahrscheinlichkeiten  $P(x_i)$  Werte in folgendem Bereich an:

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 m \quad \text{für eine Quelle mit } m \text{ unterschiedlichen Symbolen}$$

$$0 \leq H(X) \leq 1 \quad \text{im binären Fall mit } m = 2$$

Die maximale Entropie  $H_{\max}(X) = \log_2 m$  wird erzielt, wenn alle Symbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Genau dann ist die Unsicherheit über das Ergebnis eines Zufallsexperiments am grössten.

Der Beweis, dass die maximale Entropie  $H_{\max}(X) = \log_2 m$  ist, kann mit folgender Abschätzung durchgeführt werden. Die Annahmen scheinen vorerst etwas willkürlich, liefern aber zum Schluss das gewünschte Ergebnis.

Als erstes soll daran erinnert werden, dass der natürliche Logarithmus jederzeit mit einem Logarithmus anderer Basis  $a$  ausgedrückt werden kann:

$$\ln(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(e)} \quad \text{z.B.} \quad \ln(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(e)}$$

Weiter erfüllt der natürliche Logarithmus  $\ln(x)$  folgende Ungleichung, wobei die rechte Seite der Ungleichung die Logarithmuskurve gerade an der Stelle  $x = 1$  berührt:

$$\ln(x) \leq x - 1$$

Seien nun  $X(\lambda)$  und  $Y(\lambda)$  zwei diskrete gedächtnisfreie Quellen, welche beide über ein Alphabet mit  $m$  Symbolen verfügen, deren Auftretenswahrscheinlichkeiten  $p_x(x_i)$  und  $p_y(y_i)$  vorerst je beliebig verteilt seien. Mit der soeben festgestellten oberen Grenze für  $\ln(x)$  kann nun folgende Ungleichung aufgestellt werden, welche in den nachfolgenden Zeilen umgeformt wird:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{p_y(y_i)}{p_x(x_i)}\right) &\leq \frac{p_y(y_i)}{p_x(x_i)} - 1 \\ \ln(p_y(y_i)) - \ln(p_x(x_i)) &\leq \frac{p_y(y_i)}{p_x(x_i)} - 1 \\ p_x(x_i) \cdot \ln(p_y(y_i)) - p_x(x_i) \cdot \ln(p_x(x_i)) &\leq p_y(y_i) - p_x(x_i) \\ \frac{p_x(x_i) \cdot \log_2(p_y(y_i)) - p_x(x_i) \cdot \log_2(p_x(x_i))}{\log_2 e} &\leq p_y(y_i) - p_x(x_i) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung soll nun über sämtliche  $m$  Symbole summiert werden. Damit werden rechter Hand die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Symbole von  $X(\lambda)$  bzw.  $Y(\lambda)$  aufsummiert, was jeweils den Wert 1 und in der Differenz 0 ergibt. Linkerhand entspricht die Summe des zweiten Terms im Zähler gerade der Definition der Entropie der Quelle  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^m p_x(x_i) \cdot \log_2(p_y(y_i))}{\log_2 e} + \frac{H(X)}{\log_2 e} &\leq 0 \\ H(X) &\leq -\sum_{i=1}^m p_x(x_i) \cdot \log_2(p_y(y_i)) \end{aligned}$$

Während nun die Wahrscheinlichkeiten  $p_x(x_i)$  für die Symbole der Quelle  $X(\lambda)$  weiterhin beliebig verteilt sein sollen, nehmen wir etwas willkürlich an, dass die Symbole  $y_i$  der Quelle  $Y(\lambda)$  gleich häufig mit  $p_y(y_i) = \frac{1}{m}$  vorkommen sollen. Dieser Schritt ändert nichts an der Korrektheit der Ungleichung, doch hilft er, den rechten Term weiter zu vereinfachen:

$$H(X) \leq -\sum_{i=1}^m p_x(x_i) \cdot \log_2\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$H(X) \leq \log_2(m) \cdot \sum_{i=1}^m p_x(x_i)$$

Wiederum ergibt die Summe der Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Symbole  $x_i$  von  $X(\lambda)$  den Wert 1, unabhängig davon, wie diese Wahrscheinlichkeiten  $p_x(x_i)$  tatsächlich verteilt sind. Und damit:

$$H(X) \leq \log_2(m)$$

Die Frage, ob der Wert  $\log_2(m)$  von  $H_{\max}(X)$  überhaupt erreicht werden kann, ist schnell beantwortet: treten alle Symbole von  $X(\lambda)$  gleich häufig mit der Wahrscheinlichkeit  $p_x(x_i) = \frac{1}{m}$  auf, dann besitzt diese Quelle gerade die Entropie  $H(X) = \log_2(m)$  und erreicht somit die abgeschätzte Grenze. Bei dieser gleichverteilten Auftretenswahrscheinlichkeit der Symbole  $x_i$  ist somit auch die Entropie  $H(X)$  der Quelle  $X(\lambda)$  maximal.

Ist die Entropie einer Quelle nicht maximal, erzeugt sie einen Datenstrom von Symbolen mit einem Informationsgehalt, welcher kleiner ist, als was theoretisch möglich wäre. Bei diesem Unterschied zwischen der maximal möglichen Entropie  $H_{\max}(X)$  und der tatsächlich generierten mittleren Informationsmenge pro Symbol  $H(X)$  handelt es sich um die Redundanz der Quelle  $R(X)$ :

$$R(X) = H_{\max}(X) - H(X) = \log_2 m + \sum_i P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.3)$$

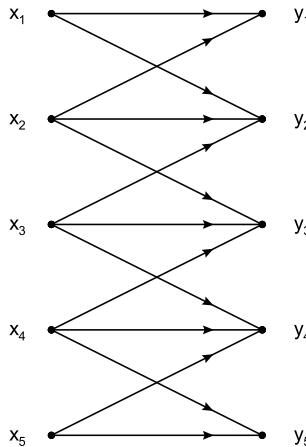
Mit Hilfe der Symbolrate  $d_{\text{sps}}$  kann die Informationsrate einer Quelle  $I_{\text{bps}}$  auch in einer Anzahl Binary Unit pro Sekunden ausgedrückt werden:

$$I_{\text{bps}} = d_{\text{sps}} \cdot H(X) \quad [\text{bit/s}] \quad (12.4)$$

Diese Informationsrate kann durch eine möglichst hohe Entropie  $H(X)$  maximiert werden. Optimieren der Entropie  $H(X)$  ist Aufgabe der Quellencodierung, welche versucht, eine Quelle  $X_1$  mit Alphabet  $\alpha_1$ , Entropie  $H(X_1)$  und Redundanz  $R(X_1)$  so auf eine zum Beispiel binär codierte neue Quelle  $X_2$  mit Alphabet  $\alpha_2$  abzubilden, dass deren Entropie  $H(X_2)$  maximiert und deren Redundanz  $R(X_2)$  minimiert wird.

#### 12.1.4 Klassifikation von Kanälen

Ein Kanal bildet die Symbole aus dem Alphabet des Senders auf Symbole eines Empfangsalphabets ab.



**Abbildung 12.1:** Allgemeines Kanalmodell

Ziel bei einer Informationsübertragung ist, dass der Empfänger aufgrund der empfangenen Symbole die ursprünglich gesendete Information wieder rekonstruieren kann. Es ist aber mit Übertragungsfehlern im Kanal zu rechnen, das heisst es gibt für jedes gesendete Symbol eine gewisse Anzahl von Übergängen auf Empfangssymbole am Kanalausgang, welche mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auftreten.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten dieser Übergänge können in Matrizendarstellung in der Kanalmatrix festgehalten werden:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1|x_m) & P(y_2|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix}$$

Alternativ dazu können die Auftretenswahrscheinlichkeiten der Symbole  $x_i$  ebenfalls in die Matrzedarstellung miteinbezogen werden. In der Verbundmatrix stehen die absoluten Auftretenswahrscheinlichkeiten sämtlicher korrekten und fehlerhaften Übertragungsvarianten des Kanals:

$$[P(Y, X)] = \begin{bmatrix} P(y_1, x_1) & P(y_2, x_1) & \dots & P(y_n, x_1) \\ P(y_1, x_2) & P(y_2, x_2) & \dots & P(y_n, x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1, x_m) & P(y_2, x_m) & \dots & P(y_n, x_m) \end{bmatrix}$$

Da der Kanal wegen seines zufällig fehlerhaften Verhaltens die Eingangssymbole auf verschiedene Ausgangssymbole abbilden kann, wirkt sich dies insgesamt auf die tatsächlich übertragene Information vom Sender zum Empfänger aus. Statistisch gemittelt kann dies mit bedingten Entropien ausgedrückt werden:

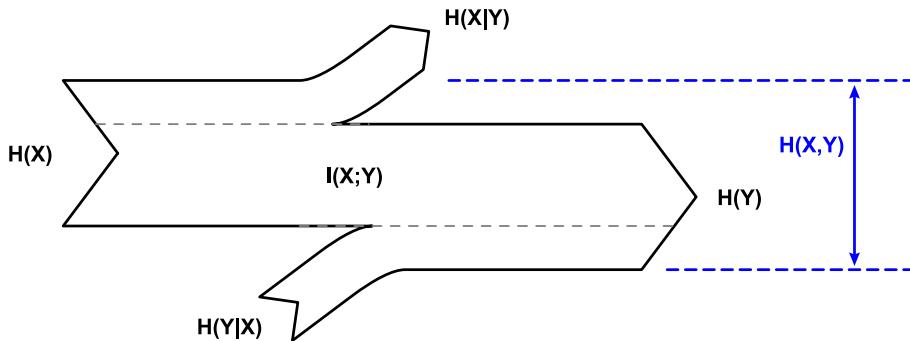


Abbildung 12.2: Informationsfluss über einen verrauschten Kanal

Aus Sicht des Senders gibt es neben der Entropie  $H(X)$  des Eingangsalphabets noch eine gewisse Informationsmenge  $H(Y|X)$  über den Kanal selber, welche fehlt, um zu wissen, wie sich der Ausgangsprozess  $Y$  exakt verhält.

Ebenso gibt es aus Sicht des Empfängers neben der Entropie  $H(Y)$  noch einen gewissen Informationsbedarf  $H(X|Y)$  welcher im Kanal verloren ging, um exakt zu wissen, welche Symbole der Eingangsprozess  $X$  generiert hat.

Ist in beiden Fällen diese zusätzliche Informationsmenge vorhanden, verfügt man über das ganze Wissen des Eingangsprozesses, des Ausgangsprozesses und sämtlicher zufälligen Abläufe im Kanal. Dies kann mit der Verbundentropie ausgedrückt werden:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.5)$$

Weiter geht aber einerseits mit  $H(X|Y)$  Information vom Eingangsprozess  $X$  verloren, da der Empfänger nicht mehr über diese Information verfügt. Gleichzeitig wird durch den Kanal mit seinem zufälligen Verhalten eine Informationsmenge  $H(Y|X)$  generiert, welche nicht von der Quelle  $X$  stammt, sich aber beim Empfänger  $Y$  bemerkbar macht.

Bei der tatsächlich übertragenen Informationsmenge von der Quelle  $X$  zum Empfänger  $Y$  handelt es sich um die Transinformation (Englisch: mutual information)  $I(X; Y)$ , welche wie folgt definiert wird:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.6)$$

Sie gibt an, wieviel Information über die Zufallsvariable  $X$  in der Zufallsvariable  $Y$  enthalten ist. Zu beachten in der Schreibweise ist das Semikolon, mit welchem speziell in nachfolgender Gleichung (12.7) die Transinformation  $I(x_i; y_j)$  von der Verbundinformation  $I(x_i, y_j)$  unterschieden werden kann, bei deren Schreibweise

die beiden Argumente durch ein Komma getrennt sind.

Die Transinformation kann (ohne Beweis) auch für einzelne diskrete Werte  $x_i$  und  $y_j$  bestimmt werden:

$$I(x_i; y_j) = \log_2 \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} = \log_2 \frac{P(y_j | x_i)}{P(y_j)} \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.7)$$

Dabei erreicht  $I(x_i; y_j)$  sein Maximum  $-\log_2 P(x_i)$ , wenn  $P(x_i | y_j) = 1$  gilt und somit aus der Beobachtung eines empfangenen  $y_j$  zu hundert Prozent auf ein gesendetes  $x_i$  geschlossen werden kann, womit der gesamte Informationsgehalt  $I(x_i)$  übertragen wird.

Bei statistischer Unabhängigkeit ist  $P(x_i | y_j) = P(x_i)$  und somit  $I(x_i; y_j) = 0$ , d.h. aus  $y_j$  kann nicht weiter auf  $x_i$  geschlossen werden, womit auch keine Information von der Quelle übertragen wurde.

Ist schliesslich  $P(x_i | y_j) < P(x_i)$ , dann wird  $I(x_i; y_j) < 0$ . Es handelt es sich dabei um eine unerwartete bzw. fehlerhafte Übertragung, welche umso seltener auftritt, je kleiner  $P(x_i | y_j)$  im Vergleich zu  $P(x_i)$  ist. Solche Fehlerfälle reduzieren statistisch gesehen die Transinformation  $I(X; Y)$ .

Für die Zufallsvariablen  $X(\lambda)$  und  $Y(\lambda)$  kann nun Gleichung (12.6) auch wie folgt berechnet werden:

$$I(X; Y) = \sum_i \sum_j \log_2 \left( \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} \right) \cdot P(x_i, y_j) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.8)$$

Um möglichst viel Information übertragen zu können, muss diese Transinformation  $I(X; Y)$  maximiert werden. Es kann dabei durchaus sinnvoll sein, im Eingangsalphabet gewisse fehleranfällige Symbole weniger häufig oder gar nicht zu senden, auch wenn dies die Entropie  $H(X)$  verkleinert, wenn gleichzeitig der Informationsverlust  $H(X | Y)$  dadurch deutlich reduziert werden kann.

Durch eine geschickte Auswahl der Auftretenswahrscheinlichkeiten  $P(x_i)$  kann man somit versuchen, die Transinformation zu maximieren. Bei diesem Maximum handelt es sich um die Kanalkapazität  $C_s$ :

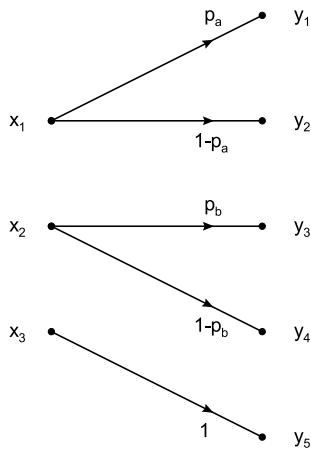
$$C_s = \max(I(X; Y)) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.9)$$

Durch Multiplikation von  $C_s$  mit der Symbolrate  $d_{\text{sps}}$  ergibt sich die Kanalkapazität  $C_{\text{bps}}$  in Binary Unit pro Sekunden:

$$C_{\text{bps}} = d_{\text{sps}} \cdot C_s \quad [\text{bit/s}] \quad (12.10)$$

### Verlustloser Kanal

Beim verlustlosen Kanal (Englisch: lossless channel) geht von der Entropie  $H(X)$  keine Information im Kanal verloren, d.h.  $H(X | Y) = 0$ . Das Kanaldiagramm sieht somit wie folgt aus:

**Abbildung 12.3:** Kanalmodell eines verlustlosen Kanals

Die Kanalmatrix lautet damit beispielsweise wie folgt:

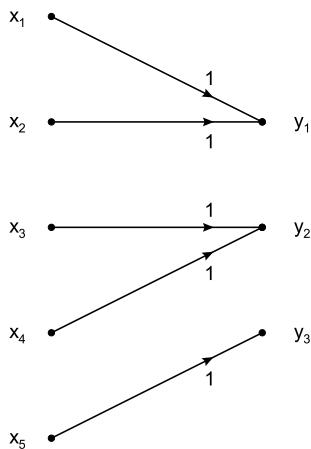
$$[P(Y | X)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Kanalkapazität entspricht gerade der maximalen Informationsmenge, welche die Quelle generieren kann. Dies bedeutet bei einer Anzahl  $m$  Eingangssymbole:

$$C_s = H(X) = \log_2 m \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.11)$$

### Deterministischer Kanal

Beim deterministischen Kanal (Englisch: deterministic channel) sind sämtliche Übergänge vom Eingangsalphabet der Grösse  $m$  auf das Ausgangsalphabet der Grösse  $n$  eindeutig bestimmt. Der Kanal erzeugt damit keine Zufälligkeit, d.h.  $H(Y | X) = 0$ . Allerdings geht Information verloren, wenn das Ausgangsalphabet kleiner ist als das genutzte Eingangsalphabet:

**Abbildung 12.4:** Kanalmodell eines deterministischen Kanals

Die Kanalmatrix lautet damit wie folgt:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

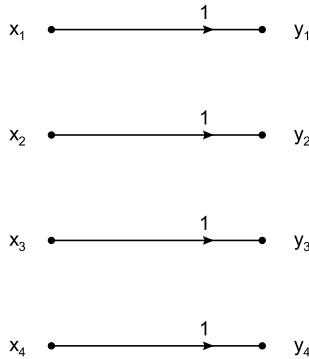
Die Kanalkapazität entspricht gerade der maximalen Informationsmenge, welche am Ausgang des Kanals vorhanden sein kann. Dies bedeutet bei einer Anzahl  $n$  Ausgangssymbole:

$$C_s = H(Y) = \log_2 n \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.12)$$

Die Kanalkapazität wird somit nicht erreicht, wenn die Entropie  $H(X)$  maximal ist, sondern wenn die Symbole  $x_i$  mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gesendet werden, bei welcher die Ausgangssymbole alle gleich häufig auftreten.

### Rauschfreier Kanal

Ein rauschfreier Kanal (Englisch: noiseless channel) ist sowohl verlustlos wie auch deterministisch. Sämtliche  $m$  Eingangssymbole werden eineindeutig auf die gleiche Anzahl  $n = m$  Ausgangssymbole abgebildet. Es geht weder Information verloren (d.h.  $H(X | Y) = 0$ ), noch erzeugt der Kanal irgendwelche zufälligen Übergänge (d.h.  $H(Y | X) = 0$ ):



**Abbildung 12.5:** Kanalmodell eines rauschfreien Kanals

Werden die Ausgangssymbole entsprechend den sie erzeugenden Eingangssymbolen durchnummieriert, besteht die Kanalmatrix aus einer Einheitsmatrix:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Die Kanalkapazität entspricht gerade der maximalen Informationsmenge am Eingang bzw. am Ausgang:

$$C_s = H(X) = \log_2 m = H(Y) = \log_2 n \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.13)$$

### Binärer symmetrischer Kanal

Ein binärer Kanal überträgt nur zwei verschiedene Symbolwerte, d.h. für Ein- und Ausgangsalphabet gilt  $m = n = 2$ . Der Kanal ist weiter symmetrisch, wenn der fehlerhafte Übergang unabhängig vom Symbolwert mit gleicher Fehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  auftritt:

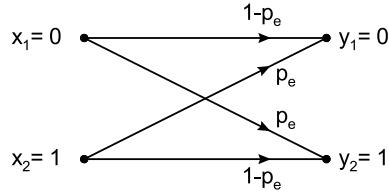


Abbildung 12.6: Kanalmodell des binären symmetrischen Kanals

Die Kanalmatrix lautet damit wie folgt:

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} (1 - p_e) & p_e \\ p_e & (1 - p_e) \end{bmatrix}$$

Die Kanalkapazität berechnet sich wie folgt:

$$C_s = 1 + p_e \cdot \log_2 p_e + (1 - p_e) \cdot \log_2 (1 - p_e) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.14)$$

### Gauss'scher Kanal

Um die Kanalkapazität beim Gauss'schen Kanal zu bestimmen, müsste auf kontinuierliche differentielle Entropie zurückgegriffen werden, worauf hier verzichtet wird.

Stattdessen soll nur das Ergebnis der Kanalkapazität hingeschrieben werden:

$$C_s = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/Symbol}] \quad (12.15)$$

Bei gegebener Übertragungsbandbreite  $B$  (und damit maximaler Symbolrate  $d_{\text{sps}} = 2 \cdot B$ ) ergibt sich folgende Kanalkapazität  $C_{\text{bps}}$  in Binary Unit pro Sekunden:

$$C_{\text{bps}} = 2 \cdot B \cdot C_s = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/s}] \quad (12.16)$$

## 12.2 Quellencodierung

Ziel der Quellencodierung (Englisch: source coding) ist es, ein diskretes Nachrichtensignal in möglichst effizienter Darstellung, das heißt mit einem Minimum an Redundanz, über einen vorgegebenen Kanal zu senden. Nachfolgend sollen der Einfachheit halber nur binäre Darstellungen der Quellencodierung betrachtet werden, auch wenn sich die Quellencodierung nicht nur auf den binären Fall beschränkt.

### 12.2.1 Klassifizierung von Codes

Mit nachfolgenden Klassen von Quellencodes sollen einige wichtige Eigenschaften der Quellencodierung vorgestellt werden. Zur Illustration dienen die unten dargestellten Beispiele von einfachen Codes für eine Quelle mit vier Symbolen  $x_1$  bis  $x_4$ , welche zu einer oder mehreren dieser Codeklassen gehören.

Symbol	Code 1	Code 2	Code 3	Code 4	Code 5	Code 6	Code 7
$x_1$	00	0000	00	0	0	0	0
$x_2$	01	0011	10	01	01	10	10
$x_3$	10	1111	11	001	011	110	110
$x_4$	11	1100	00	0001	0111	1110	111

Tabelle 12.1: Beispiele von binär codierten Symbolen

- **Verlustfreie Codierung:** bei einer verlustfreien Codierung wird die Redundanz der Quelle durch effizientere Codierung reduziert. Die ursprüngliche Information der Quelle kann aber vom Empfänger wieder vollständig und ohne Verluste rekonstruiert werden. Ein Beispiel für verlustfreie Codierung ist ein ZIP-File. Wegen der nicht ein-eindeutigen Codierung ist zum Beispiel Code 3 kein verlustfreier Code.
- **Verlustbehaftete Codierung:** bei einer verlustbehafteten Codierung versucht man sämtliche Information der Quelle zu eliminieren, welche für den Empfänger nicht relevant sind, da dieser sie gar nicht auswerten oder wahrnehmen kann. Aus Sicht des Senders geht durch diese Reduktion von Irrelevanz aber Information verloren, das heisst der ursprünglich von der Quelle generierte Informationsgehalt kann vom Empfänger nicht mehr vollständig und korrekt rekonstruiert werden. Beispiele für verlustbehaftete Codierung sind das JPEG-Format für Bilder oder ein MP3-codiertes Audiofile. Code 3 ist kein typisches Beispiel für verlustbehaftete Codierung, da man für eine effiziente Codierung anstelle nicht ein-eindeutiger Codes vielmehr versuchen würde, die Übertragung eines Codes für die Symbole  $x_2$  und  $x_4$  ganz zu eliminieren oder zumindest in einem kürzeren Codewort (z.B. 0) zusammenzufassen.
- **Fixed-Length Code:** Jedes Symbol des Quellenalphabets wird mit einem Codewort gleicher Länge codiert. Ein Beispiel für einen fixed-length Code ist der 7-Bit oder 8-Bit ASCII-Code. Durch diese sehr simple und einfach zu verarbeitende Codierung wird aber meist ein bedeutender Anteil an Redundanz generiert. Code 1, 2 und 3 sind Beispiele für einen Fixed-Length Code.
- **Variable-Length Code:** Die Symbole des Quellenalphabets werden mit Codeworten unterschiedlicher Länge codiert. Je häufiger das Codewort auftritt, umso kürzer sollte das Codewort sein, damit die Codierung möglichst effizient wird. Variable-length Codes sind vor allem für gedächtnisfreie diskrete Quellen der Schlüssel, um Redundanz zu eliminieren. Beispiele für variable-length Codes sind der Morsecode, der Shannon-Fano Code und der Huffman-Code sowie die Codes 4 bis 7.
- **Run-Length Codierung:** Bei stark gedächtnisbehafteten Quellen bietet sich neben den Variable-Length Codes zusätzlich noch an, lange Sequenzen von identischen Symbolen oder wiederkehrende Patterns mit möglichst wenig Codebits zusammenzufassen. In den Algorithmen von ZIP-Files spielt run-length Codierung eine grosse Rolle.
- **Prefix-free Code:** Ein präfixfreier Code (auch Präfix-Code genannt) ist ein Code mit variabler Codewortlänge, bei welchem kein Codewort der Beginn (bzw. der Präfix oder die Vorsilbe) eines zweiten Codeworts darstellt. Ist dies nicht der Fall, muss nach dem Empfang eines korrekten Codeworts immer in einem weiteren Schritt analysiert werden, ob sich aufgrund von weiteren Codebits das Codewort nicht als ein ganz anderes, längeres Codewort entpuppt. Präfixfreie Codes sind beispielsweise der Shannon-Fano und der Hufmann-Code sowie die Codes 1, 2, 6 und 7. Die anderen Codebeispiele sowie der Morsecode sind nicht präfixfrei. Der Buchstabe E (ein einzelner Punkt) ist zum Beispiel der Beginn des Buchstabens S (drei Punkte). Nach dem Empfang eines einzelnen Punkts ist somit noch nicht klar, ob es sich nun um ein E oder den Beginn eines S handelt. Beim Morsecode wurde diese Mehrdeutigkeit durch eine kurze Sendepause zwischen den Zeichen elegant gelöst.
- **Uniquely Decodable Code:** Ein eindeutig decodierbarer Code kann nach einer mehr oder weniger langen Auswertung der aktuellen und nachfolgenden Codebits wieder eindeutig decodiert werden. Eigentlich sollte jede Quellencodierung eindeutig decodierbar sein. Code 3 und Code 4 sind Beispiele für Codes, welche nicht eindeutig decodierbar sind.
- **Instantaneous Code:** Ein Instantaneous Code kann sofort nach dem Empfang der aktuellen Codesequenz eindeutig decodiert werden. Der Shannon-Fano und der Hufmann-Code sind sofort decodierbar, da sie präfixfreie Codes sind. Dank der kleinen Sendepause zwischen den Symbolen ist auch der Morsecode ein Instantaneous Code. Fixed-Length Codes mit ein-eindeutigen Codeworten sind Instantaneous Codes, ebenso wie präfixfreie Codes. Code 5 ist ein Beispiel für einen eindeutig decodierbaren Code, welcher aber kein Instantaneous Code ist.

### 12.2.2 Redundanz und Effizienz der Codierung

Eine diskrete, gedächtnisfreie Quelle (DMS)  $X$  besitzt ein Alphabet  $\alpha_s = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , dessen Symbole  $x_i$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(x_i)$  auftreten. Die Symbole  $x_i$  werden durch einen Quellencoder auf die binären Codeworte  $\underline{c}_i$  mit den Längen  $n_i$  abgebildet.

Effizient ist die Quellencodierung genau dann, wenn die mittlere Codelänge möglichst klein wird, das heisst häufig vorkommende Symbole  $x_i$  mit kurzen Codeworten  $\underline{c}_i$  codiert werden, auf Kosten von längeren Codeworten, welche jedoch seltener vorkommen.

Die mittlere Codelänge  $L$  berechnet sich wie folgt:

$$L = \sum_{i=1}^m P(x_i) \cdot n_i \quad (12.17)$$

Ohne Beweis gilt für diskrete gedächtnisfreie Quellen, dass die mittlere Codelänge  $L$  eines eindeutig decodierbaren Codes nicht kleiner sein kann als die Entropie  $H(X)$  der Quelle.

Bei der Differenz zwischen den benötigten Binary Digits der Codierung und den Binary Units des Informationsflusses der Quelle handelt es sich um die Redundanz der Codierung. Diese berechnet sich pro Symbol wie folgt:

$$R = L - H(X) \quad (12.18)$$

Ziel der Quellencodierung ist es, diese Redundanz der Codierung möglichst klein zu halten. Die Effizienz  $\eta$  der Codierung berechnet sich wie folgt:

$$\eta = \frac{H(X)}{L} \leq 1 \quad (12.19)$$

### 12.2.3 Kraft'sche Ungleichung

Ein präfixfreier binärer Code kann als Codebaum dargestellt werden, bei welchem jedes neue Codebit eines Codewortes zu einer weiteren Verästelung des Codebaums führt.

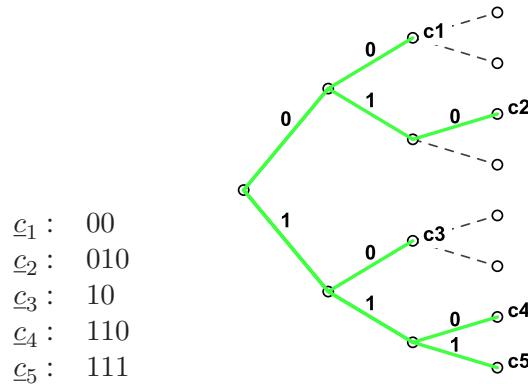


Abbildung 12.7: Codebaum eines präfixfreien Codes

Ist der Code präfixfrei, belegt jedes Codewort  $\underline{c}_i$  einen Endknoten dieses Baums, wobei die Verästelungstiefe gerade der Länge  $n_i$  des Codewortes entspricht.

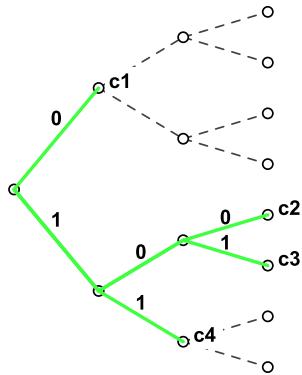
Die Kraft'sche Ungleichung erlaubt nun, eine Aussage zu machen, ob sich überhaupt ein präfixfreier (und damit gleichzeitig ein eindeutig und sofort decodierbarer) Code finden lässt, wenn die gewünschten Längen sämtlicher Codeworte schon vorgegeben sind. Sie lautet wie folgt:

$$\sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \leq 1 \quad (12.20)$$

Ist die Kraft'sche Ungleichung erfüllt, existiert ein präfixfreier (und somit sofort decodierbarer) Code, deren Codeworte die vorgegebenen Längen besitzen. Ist die Ungleichung nicht erfüllt, gibt es keinen solchen präfixfreien Code.

Beweis der Kraft'schen Ungleichung:

- Ein präfixfreier Code ist vorgegeben; die Kraft'sche Ungleichung muss damit erfüllt sein:  
Ein präfixfreier Code kann immer als Codebaum aufgezeichnet werden, bei welchem die Codeworte Endknoten des Baums bilden. Der Codebaum wird nun mit der gestrichelt gezeichneten, vollständigen Verästelung bis zur maximalen Länge  $n_{\max} = \max(n_i)$  ergänzt.



Aus dem Graph geht sofort hervor, dass der Codebaum  $2^{n_{\max}}$  Endknoten mit maximaler Verästelungstiefe besitzt und dass jedes Codewort  $c_i$  deren  $2^{n_{\max}-n_i}$  Endknoten beansprucht. Es gilt somit:

$$2^{n_{\max}-n_1} + 2^{n_{\max}-n_2} + \dots + 2^{n_{\max}-n_m} \leq 2^{n_{\max}}$$

Durch Division mit  $2^{n_{\max}}$  ergibt sich sofort die Kraft'sche Ungleichung.

- Die Kraft'sche Ungleichung ist erfüllt; dann muss sich auch ein präfixfreier Code finden lassen:  
Durch die Kraft'sche Ungleichung sind die Längen  $n_i$  der Codeworte  $c_i$  vorgegeben. Da es reicht, irgend einen beliebigen präfixfreien Code zu finden, dürfen die Symbole  $x_i$  nach aufsteigender Codewortlänge  $n_i$  sortiert werden und nochmals frisch durchnummeriert werden. Das kürzeste Codewort  $c_1$  wird nun einem Knoten der Verästelungstiefe  $n_1$  zugewiesen, wobei sämtliche von diesem Knoten weitergehenden Verästelungen wegen der Bedingung der Präfixfreiheit nicht mehr für andere Codeworte zur Verfügung stehen. Bzgl. der maximalen Verästelungstiefe fallen so von den  $2^{n_{\max}}$  Endknoten deren  $2^{n_{\max}-n_1}$  weg. Werden  $j$  Codeworte auf den Baum abgebildet, stehen somit für das folgende Codewort noch

$$2^{n_{\max}} - 2^{n_{\max}-n_1} - 2^{n_{\max}-n_2} - \dots - 2^{n_{\max}-n_j} = 2^{n_{\max}} \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^j 2^{-n_i} \right)$$

Endknoten zur Verfügung. Da aber aufgrund der Kraft'schen Ungleichung die Summe im letzten Term  $< 1$  ist, solange noch Codeworte abgebildet werden müssen, ist der Klammerausdruck sicher  $> 0$ . Da es sich beim Belegen der Knoten um Vorgänge im ganzzahligen Zahlenraum handelt, ist somit zumindest noch ein unbelegter Endknoten der Maximallänge im Baum vorhanden. Dank den nach den Längen  $n_i$  geordneten Codeworten folgt aber für den Zeitpunkt, zu welchem  $j$  (aber noch nicht alle) Codeworte im Baum abgebildet wurden, dass noch mindestens ein Endknoten mit der Verästelungstiefe  $n_j$  zur Verfügung stehen muss, um den Endknoten der Maximallänge auch erreichen zu können. Somit kann mit Sicherheit auch das nachfolgende Codewort  $c_{j+1}$  im Baum abgebildet werden.

### 12.2.4 Shannon-Fano Codierung

Ähnlich wie bei einem binären Suchalgorithmus packen wir die Codierung von der Wurzel des Baums an und möchten mit wenigen binären Ja/Nein-Fragen möglichst schnell auf das gewünschte Codewort kommen.

Beispiel: Um den Anfangsbuchstaben eines zufällig herausgepickten Namens aus der Klassenliste zu bestimmen (bzw. in unserem Fall mit einem binären Codewort zu versehen), fragen wir bei der ersten Verzweigung des Codebaums, ob der Buchstabe aus der vorderen oder hinteren Hälfte des Alphabets stammt. Liegt der Buchstabe in der vorderen Hälfte, stellen wir bei der nächsten Verzweigung die Frage, ob der Buchstabe im ersten oder zweiten Viertel liegt, usw.

Mit dieser Vorgehensweise würden alle Buchstaben mit denselben Anzahl Bits codiert, nämlich deren fünf. Richtigerweise kann noch festgehalten werden, dass mit diesen 5 benötigten Bits neben den Codes für die 26 Buchstaben noch 6 zusätzliche unbenutzte Bitkombinationen vorhanden sind.

Berücksichtigen wir jetzt aber, dass nicht alle Buchstaben gleich häufig vorkommen, können wir die Codierung optimieren. So würde es z.B. bei einer speziellen Klasse von Studierenden, bei welcher keine Namen im vorderen Teil des Alphabets vorkommen, wenig Sinn machen, die Frage nach der ersten oder zweiten Hälfte des Alphabets überhaupt zu stellen, da die Antwort auf diese Frage keine nutzbringende Information enthält, um den Anfangsbuchstaben eines Studierenden aus dieser Klasse näher identifizieren zu können.

Je nach Verteilung der Anfangsbuchstaben kann nun die erste Frage so optimiert werden, dass unabhängig von der erhaltenen Antwort jeweils ein möglichst grosser Teil (d.h. im optimalen Fall die Hälfte) der Studierenden im Findungsprozess ausgeschlossen werden kann. Die Grenze, bzgl. welchem Buchstaben sich die Studierenden weiter vorne oder hinten im Alphabet befinden, muss dazu bei jenem Buchstaben gezogen werden, welcher die Anzahl der Studierenden möglichst gut in zwei gleich grosse Hälften trennt.

In einem weiteren Schritt ordnen wir nun die zu codierenden Anfangsbuchstaben nicht alphabetisch, sondern nach absteigender Häufigkeit (bzw. Auftretenswahrscheinlichkeit) in der Klassenliste an. Eine solche Anordnung verbessert meist die Effizienz der Codierung, da nachfolgende Fragen so eher mit 50% Wahrscheinlichkeit mit Ja oder Nein beantwortet werden, als wenn Buchstaben mit sehr unterschiedlicher Häufigkeit benachbart sind. In einigen Fällen ist diese fixe Sortierung nach der Auftretenswahrscheinlichkeit und anschliessender Aufteilung in Teilgruppen jedoch nur suboptimal, und es kann mit der im folgenden Kapitel beschriebenen Huffman-Codierung ein effizienterer Code gefunden werden.

Ausgehend von der Wurzel, stellen wir nun für diese nach Auftretenswahrscheinlichkeit sortierten Anfangsbuchstaben bei jedem Verzweigungspunkt jene Frage, deren zweiwertige Antwort (Ja oder Nein) ein Maximum an Information enthält, d.h. deren beiden Antworten möglichst mit 50% Wahrscheinlichkeit zutreffen.

Bei dieser Vorgehensweise handelt es sich um die Shannon-Fano-Codierung.

<b>Shannon-Fano Codierung</b>
1. Symbole nach absteigenden Wahrscheinlichkeiten ordnen.
2. Die Symbole in zwei Gruppen möglichst gleicher Wahrscheinlichkeit trennen.
3. Oberer Teilmenge Bitwert 0, unterer Menge Bitwert 1 zuordnen.
4. Solange die Teilmengen weiter unterteilt werden können, fortfahren bei 2.

**Tabelle 12.2:** Ablauf der Shannon-Fano Codierung

### 12.2.5 Huffman Codierung

Im Gegensatz zum Shannon-Fano-Code packen wir beim Huffman-Code das Problem nicht von der Wurzel sondern von den Endpunkten des Codebaums her an und werden feststellen, dass der Huffman-Code die optimale Codierung (oder zumindest eine von mehreren möglichen optimalen Codierungen) liefert.

Eine Eigenschaft von optimalen Codes besteht darin, dass der am meisten verästelte Endpunkt, ein benachbarter Codewort besitzt, welches die gleiche Codelänge besitzt. Ist nämlich im Codebaum der direkt benachbarte

Endpunkt des längsten Codeworts nicht besetzt, kann dieses Codewort um eine Verästelungstiefe verkürzt werden und die mittlere Codelänge somit reduziert werden. Gibt es also in einem Code nicht zwei direkte Nachbarn maximaler Länge, handelt es sich nicht um einen optimalen Code.

Weiter weisen die beiden Symbole mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit gerade diese maximale Codelänge auf. Würde dies nicht zutreffen, könnte der Code eines Symbols grösserer Codelänge und zugleich höherer Wahrscheinlichkeit mit jenem eines weniger häufigen Symbols und kleinerer Codelänge getauscht werden. Diese Modifikation würde wiederum die mittlere Codelänge verbessern und damit eine effizientere Codierung bewirken.

Ohne etwas an den wesentlichen Codierungseigenschaften (wie Präfixfreiheit oder Effizienz) zu verändern, können die beiden Symbole mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit auf benachbarte Endknoten abgebildet werden, falls dies nicht schon der Fall sein sollte (z.B. wenn mehr als zwei Symbole die maximale Codelänge aufweisen).

Werden nun diese beiden Symbole  $x_i$  und  $x_j$  mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit zusammengefasst, entsteht eine kombinierte Codegruppe mit der Auftretenswahrscheinlichkeit  $p(x_i) + p(x_j)$ . Selbstverständlich muss zur Codierung der ursprünglichen Symbole dieser Reduktionsschritt wieder rückgängig gemacht werden, d.h. die ursprüngliche Verästelung des Codebaums mit einem Codebit wieder hergestellt werden.

Die so zusammengefasste Symbolgruppe kann nun zusammen mit den verbleibenden Symbolen wiederum als Alphabet einer Quelle aufgefasst werden, welche optimal codiert werden soll. Somit können auf dieses neu kreierte Alphabet die vorhergehenden Erkenntnisse (d.h. benachbartes Anordnen der Symbole/Symbolgruppe kleinster Wahrscheinlichkeiten und Bildung einer neuen Symbolgruppe) erneut angewandt werden, womit ein weiterer Reduktionsschritt stattfindet.

Durch iteratives Anordnen nach Auftretenswahrscheinlichkeit und Zusammenfassen der Codes und Codegruppen zu neuen Codegruppen, kann das Alphabet soweit reduziert werden, bis dass nur noch zwei Symbole vorliegen.

Die Huffman-Codierung erfolgt nun bitweise so, indem dem Symbol bzw. der Symbolgruppe mit der höheren Wahrscheinlichkeit jeweils der binäre Ziffernwert 0, jenem Symbol bzw. jener Symbolgruppe mit der tieferen Wahrscheinlichkeit der Ziffernwert 1 zugewiesen wird.

Huffman Codierung
1. Symbole nach absteigenden Wahrscheinlichkeiten ordnen.
2. Reduktionsschritt: unterste beiden Symbole werden zu Symbolgruppe zusammengefasst.
3. Weiter bei 1., bis nur noch zwei Symbolgruppen vorliegen.
4. Symbolgruppe mit höherer Wahrscheinlichkeit wird 0, der anderen Gruppe 1 zugewiesen.
5. Letzter Reduktionsschritt rückgängig machen.
6. Weiter bei 4., bis keine Symbolgruppen mehr expandiert werden können.

**Tabelle 12.3:** Ablauf der Huffman Codierung

# Kapitel 13

## Kanalcodierung

### 13.1 Prinzip der Kanalcodierung

Bei der im vorhergehenden Kapitel behandelten Quellencodierung wird eine sehr effiziente Codierung eines Nachrichtensignal angestrebt, um Information möglichst redundanzfrei über einen vorgegebenen Kanal zu senden. Bei der Kanalcodierung wird jetzt wieder gezielt Redundanz beigefügt, welche dank geeigneter Codierung ermöglicht, Fehler zu entdecken oder sogar zu korrigieren.

Folgendes Übertragungsmodell wird für die weiteren Betrachtungen angewendet:

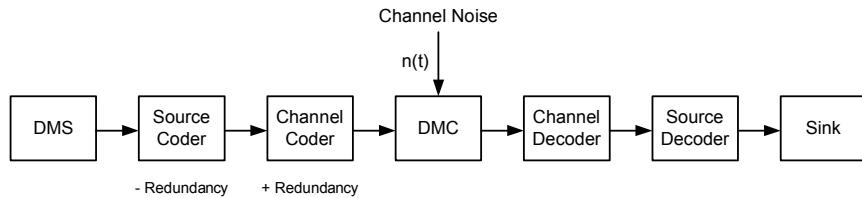


Abbildung 13.1: Kanalmödell mit Quellencodierung und Kanalcodierung

Ziel der Kanalcodierung ist die Korrektur oder zumindest die Erkennung von Fehlern, welche während der Übertragung auftreten. Im oben dargestellten Modell tritt dabei nur Rauschen als mögliche Ursache von Bitfehlern auf. In realen Systemen können aber auch weitere Störsignale oder Nicht-Idealitäten des Kanals wie lineare und nicht-lineare Verzerrungen oder Mehrfachausbreitungen auftreten, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung zusätzlich erhöhen.

#### 13.1.1 Kanalcodierungstheorem

Gegeben sei eine diskrete, gedächtnisfreie Quelle (DMS) mit einer Entropie  $H(X)$  bit/symbol. Gegeben sei weiter ein diskreter, gedächtnisfreier Kanal (DMC) mit einer Kanalkapazität  $C_s$  bit/symbol, welche besagt, dass aufgrund der Fehlerwahrscheinlichkeit im Kanal pro Symbol eine maximale Anzahl  $C_s$  bit (binary unit) übertragen werden kann. Das Kanalcodierungstheorem lautet wie folgt:

- $\exists$  Kanalcodierung mit beliebig kleiner Fehlerrate, falls  $H(X) < C_s$
- $\nexists$  Kanalcodierung mit beliebig kleiner Fehlerrate, falls  $H(X) > C_s$

Dies bedeutet, dass bei geeigneter Kanalcodierung ein fehlerfreier Informationstransfer selbst dann möglich ist, wenn Übertragungsfehler im Kanal auftreten. Dabei muss aber die Entropie  $H(X)$  der Quelle zwingend kleiner als die Kanalkapazität  $C_s$  des Übertragungskanals sein.

Ist dabei die Marge zwischen der Entropie  $H(X)$  und der Kanalkapazität  $C_s$  sehr klein, wird es allerdings in der Praxis schwierig, eine geeignete Kanalcodierung, welche diese quasi fehlerfreie Übertragung garantiert, zu finden und diese zu implementieren.

Bei der Kanalcodierung wird zwischen Blockcodes und Faltungscodes unterschieden. Diese beiden Codefamilien können noch weitere wichtige Eigenschaften und Merkmale besitzen, welche eine zusätzliche Klassifizierung erlauben.

## 13.2 Blockcodes

Ein Blockcode  $C$  teilt das eingehende Nachrichtensignal in gleich lange Blöcke der Länge  $k$  auf und erzeugt daraus Blöcke der Länge  $n$ , wobei zusätzliche Redundanz beigelegt wird und damit  $n > k$  ist.

Der Coder führt folgendes Mapping durch, wobei es sich bei  $m_\alpha$  um die Anzahl Symbolwerte des Alphabets  $\alpha$  handelt, welche bei der Codierung von Daten- und Codeworten verwendet werden:

$$T : U \rightarrow V$$

$U$ : Menge der  $m_\alpha^k$  Datenworte der Länge  $k$

$V$ : Menge der  $m_\alpha^n$  potentieller Codeworte der Länge  $n$

Dieser Code wird als  $(n, k)$ -Blockcode bezeichnet.

In diesem Skript sollen vereinfachend nur binäre Codes mit  $m_\alpha = 2$  betrachtet werden. Es sei hier aber betont, dass es neben der sehr wichtigen Klasse von binären Codes auch nicht-binäre Codes gibt, die einen weiten Anwendungsbereich gefunden haben. Ein Beispiel dafür sind Reed-Solomon Codes.

Bei binär codierten Daten- und Codeworten wird jedes der  $2^k$  Datenworte auf exakt eines der  $2^n$  gültigen Codeworte abgebildet, wobei bei den Codeworten eine Auswahl aus  $2^n$  möglichen Bitkombinationen getroffen werden muss. Die geschickte Auswahl dieser Teilmenge von  $2^k$  gültigen Codeworten aus  $2^n$  Bitkombinationen ist massgebend für die Möglichkeiten des Codes  $C$ , Fehler zu erkennen oder zu korrigieren.

Die Coderate  $R_c$  eines binären  $(n, k)$ -Blockcodes  $C$  ist wie folgt definiert:

$$R_c = \frac{k}{n} \quad (13.1)$$

Sie beschreibt, wie gross der Anteil der Nutzdaten in den Codeworten des  $(n, k)$ -Blockcodes  $C$  sind.

### 13.2.1 Lineare Blockcodes

Ein Galoiskörper (Englisch: Galois field) mit zwei Elementen, in abgekürzter Schreibweise ein GF(2), besteht aus der Menge  $K = \{0, 1\}$  und den beiden Operationen (lineare) Addition und Multiplikation.

- (lineare) Addition, modulo-2, d.h. ohne Berücksichtigung der Carry-Bit:

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

Im GF(2) entspricht die (modulo-2) Addition einer kombinatorischen XOR-Verknüpfung.

- Multiplikation:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Im GF(2) entspricht die Multiplikation einer kombinatorischen AND-Verknüpfung.

Bei Operationen in Galoiskörpern handelt es sich um Restklassenarithmetik, welche viele ähnliche Strukturen aufweist wie das Rechnen mit rationalen Zahlen.

Einfache binäre Codes im GF(2) können aber in weiten Teilen behandelt werden, ohne auf die vielfältigen

Strukturen und Eigenschaften solcher Galoiskörper zurückgreifen zu müssen. Trotzdem sei hiermit erwähnt, dass in der Kanalcodierung sehr viel mathematische Theorie steckt, welche aber wegen ihres grossen Umfangs in diesem Skript zu kurz kommt.

Elemente aus dem GF(2) können als Bitvektor zusammengefasst werden, welcher je nachdem, ob sich der Vektor am Eingang oder am Ausgang des Blockcoders befindet, als Datenwort oder Codewort bezeichnet wird.

Die Nummerierung der Vektorelemente beginnt in diesem Skript bei 0, was von früheren Ausgaben des Skripts abweicht, wo die Nummerierung der Vektorelemente mit 1 begann. Auch in der Literatur wird die 1-basierende Durchnummerierung eher häufiger verwendet, wobei zwei der wichtigsten Autoren auf dem Gebiet der Kanalcodierung, Shu Lin und Daniel J. Costello, wiederum die 0-basierte Nummerierung bevorzugen. Den Ausschlag, in diesem Skript die 0-basierte Nummerierung der Vektorelemente zu wählen, ergab die bessere Konsistenz mit den später behandelten zyklischen Codes sowie den Faltungscodes.

Ein binärer Code  $C$  aus dem GF(2) beinhaltet zwei Codeworte  $\underline{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$  und  $\underline{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$  auf welche wir folgende (modulo-2) Addition anwenden:

$$\underline{a} \oplus \underline{b} = [a_0 \oplus b_0, a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_{n-1} \oplus b_{n-1}] \quad (13.2)$$

Den Code  $C$  bezeichnet man als *linear*, falls die Summe zweier beliebiger Codeworte  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  aus  $C$  wiederum ein Codewort aus  $C$  ergibt. In einem linearen Code ist immer auch der Nullvektor  $\underline{0} = [0, 0, \dots, 0]$  als Codewort enthalten, was im binären Fall aus  $\underline{a} \oplus \underline{a} = \underline{0}$  hervorgeht.

### 13.2.2 Hamminggewicht und Hammingdistanz

Das Hamminggewicht  $w(\underline{c})$  eines Codewortes  $\underline{c}$  entspricht der Anzahl Elemente, welche im Codevektor ungleich Null sind. Bei einem binären Code  $C$  entspricht das Hamminggewicht somit der Anzahl Einer im Codewort  $\underline{c}$ .

Die Hammingdistanz  $d(\underline{a}, \underline{b})$  zweier Codeworte  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  aus dem binären Code  $C$  entspricht der Anzahl unterschiedlicher Stellen von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$

Hamminggewicht und Hammingdistanz lassen sich bei binären Codes  $C$  sehr einfach umrechnen:

$$w(\underline{c}) = d(\underline{c}, \underline{0}) \quad (13.3)$$

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = w(\underline{a} \oplus \underline{b}) \quad (13.4)$$

Bei linearen Codes lässt sich nun die *minimale Hammingdistanz*  $d_{\min}$  eines Codes  $C$ , das heisst die kleinste Distanz zwischen zwei beliebigen unterschiedlichen Codeworten von  $C$ , sehr einfach bestimmen:

$$d_{\min} = \min(d(\underline{a}, \underline{b})) = \min(w(\underline{c})) \quad (13.5)$$

Die minimale Hammingdistanz  $d_{\min}$  eines Codes  $C$  entspricht also dem kleinsten Gewicht eines Codewortes  $\underline{c} \neq \underline{0}$ , welches sich im Code  $C$  auffinden lässt.

### 13.2.3 Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Wird ein Codewort durch Übertragungsfehler modifiziert, ist es so lange als fehlerhaftes Codewort erkennbar, wie es nicht zu einem anderen gültigen Codewort mutiert ist.

Damit ein solches mutiertes gültiges Codewort entstehen kann, müssen mindestens  $d_{\min}$  Fehler genau an jenen Stellen des ursprünglichen Codewortes  $\underline{c}$  auftreten, welches dieses Codewort  $\underline{c}$  in ein nächstgelegenes gültiges Codewort überführen. Solange also maximal  $t_d = d_{\min} - 1$  Fehler auftreten, kann kein neues gültiges Codewort vorliegen und die fehlerhafte Übertragung wird mit Sicherheit erkannt.

Damit bestimmt die minimale Hammingdistanz  $d_{\min}$  die Fähigkeit eines Codes  $C$  aus GF(2), eine maximale Anzahl  $t_d$  von Bitfehlern mit Sicherheit erkennen zu können:

$$t_d = d_{\min} - 1 \quad (13.6)$$

Liegt ein gedächtnisfreier Kanal mit einer "kleinen" Fehlerrate  $p_e$  (z.B. mit einfacher oberer Grenze:  $p_e < \frac{1}{n}$  für Blockgrößen  $n \geq 2$ ) vor, sind wenige Übertragungsfehler pro Block wahrscheinlicher als eine grössere Anzahl von Fehlern. Sollen nun fehlerhaft empfangene Codeworte vom Decoder korrigiert werden, ist damit eine Korrektur des empfangenen Codewortes hin zum *nächstgelegenen* gültigen Codewort eine sinnvolle Strategie der Fehlerbehandlung.

Ist die Anzahl Fehler kleiner als die Hälfte der minimalen Hammingdistanz  $\frac{d_{\min}}{2}$ , liegt das empfangene Codewort mit Sicherheit näher beim ursprünglich gesendeten Codewort als bei irgendeinem anderen gültigen Codewort. Ist in (hoffentlich) seltenen Fällen die Anzahl Fehler grösser oder gleich der halben minimalen Hammingdistanz, kann der Abstand zu einem anderen gültigen Codewort gleich gross oder kleiner sein als zum ursprünglichen Codewort. Im letzteren Fall wird die Strategie, ein Minimum von Bitkorrekturen beim empfangenen Codewort vorzunehmen, zwar weiter ein gültiges Codewort ergeben, welches aber nicht mehr mit dem gesendeten Codewort übereinstimmt.

Aus dieser Erkenntnis ergibt sich folgende Formel für die Anzahl  $t_c$  Übertragungsfehler, welche mit Sicherheit richtig korrigiert werden kann:

$$t_c = \text{floor}\left(\frac{d_{\min} - 1}{2}\right) \quad (13.7)$$

### 13.2.4 Systematische Blockcodes

Ein  $(n, k)$ -Blockcode  $C$  bezeichnet man als systematisch, falls sämtliche Elemente  $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$  des ursprünglichen Datenvektors  $\underline{d}$  an ausgewählten Positionen des Codewortes  $\underline{c}$  unverändert wiederzufinden sind.

Ein systematischer Code lässt sich ohne Veränderung seiner primären Eigenschaften Linearität und Hammingdistanz so umordnen, dass diese  $k$  Symbole des Datenwortes  $\underline{d}$  gerade in den ersten oder letzten  $k$  Positionen des Codewortes  $\underline{c}$  auftauchen. Ein solcher Code wird als geordnet-systematisch bezeichnet.

### 13.2.5 Darstellung von linearen Blockcodes mit der Generatormatrix $G$

Dank seiner Linearitätseigenschaft muss bei einem linearen  $(n, k)$ -Blockcode nicht jedes Codewort einzeln definiert werden, sondern es genügt, eine Auswahl von  $k$  linear unabhängigen Codeworten  $\underline{c}_0$  bis  $\underline{c}_{k-1}$  zusammenzustellen. Sämtliche  $2^k$  Linearkombinationen dieser Auswahl von Codeworten bilden dann eines der möglichen gültigen Codeworte und dank der linearen Unabhängigkeit der gewählten Auswahl werden durch solche beliebige Linearkombinationen Codeworte auch nicht doppelt oder mehrfach generiert.

Diese Auswahl von linear unabhängigen Codeworten  $\underline{c}_0$  bis  $\underline{c}_{k-1}$  können nun als Zeilen einer Matrix, der  $k \times n$  Generatormatrix  $G$ , dargestellt werden:

$$G = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \dots & \dots & g_{0\ n-1} \\ g_{10} & g_{11} & \dots & \dots & g_{1\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{k-1\ 0} & g_{k-1\ 1} & \dots & \dots & g_{k-1\ n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{c}_1 \\ \dots \\ \underline{c}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

Mit dieser Generatormatrix  $G$  können sämtliche Codeworte  $\underline{c}$  des Codes  $C$  gebildet werden, indem eine Matrix-Multiplikation mit dem Vektor  $\underline{x}$  der Länge  $k$  durchgeführt wird. Bei dieser Operation wird die Multiplikation und Addition des Galoiskörpers GF(2) angewendet, d.h. bei der Addition ist zu beachten, dass diese modulo-2 zu erfolgen hat. Der beliebige Vektor  $\underline{x}$  bestimmt dabei, welche Linearkombination von Zeilen von  $G$  das Codewort  $\underline{c}$  bildet:

$$\underline{c} = \underline{x} \cdot G \quad (13.9)$$

Die Zuordnung von den Datenworten  $\underline{d}$  zu den Codeworten  $\underline{c}$ , welche sich aus diesen Linearkombinationen ergeben, ist prinzipiell beliebig und oft auch sekundär: die Stärke eines Codes, d.h. wie viele Fehler erkannt und/oder korrigiert werden können, ist unabhängig von dieser Zuordnung.

Es bietet sich aber an, in Gleichung (13.9) anstelle des Vektors  $\underline{x}$  gleich das Datenwort  $\underline{d}$  für die Linearkombination zu verwenden, welche aus der Generatormatrix  $G$  das Codewort  $\underline{c}$  bildet:

$$\underline{c} = \underline{d} \cdot G \quad (13.10)$$

Auf diese Weise ist eine einfache Zuordnung von Datenworten  $\underline{d}$  zu Codeworten  $\underline{c}$  vollzogen.

Mit einer solchen Zuordnung gibt es bei systematischen Codes für jede Zeile  $j$  jeweils mindestens eine Spalte  $i$  von  $G$ , in welcher nur das Element an der Stelle  $g_{ij}$  eine 1 ist und alle anderen Elemente dieser Spalte 0 sind.

Besonders einfach wird die Situation bei geordnet-systematischen Codes: für die Bildung der Matrix  $G$  werden jene linear unabhängigen Codeworte ausgewählt, bei welchen im geordnet-systematischen Teil nur gerade das  $i$ -te Bit mit  $0 \leq i \leq k - 1$  eine 1 und alle andern Bit 0 sind. Die Linearkombinationen dieser Zeilen werden weiterhin durch das Datenwort  $\underline{d}$  bestimmt. Zusammengefasst führt dies zur Bildung eines Codeworts  $\underline{c}$  mit folgender Generatormatrix  $G$ :

$$\underline{c} = \underline{d} \cdot G = [ \ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{k-1} \ ] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{00} & p_{10} & \dots & p_{m-1\ 0} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{01} & p_{11} & \dots & p_{m-1\ 1} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{0\ k-1} & p_{1\ k-1} & \dots & p_{m-1\ k-1} \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

In jedem Codewort  $\underline{c}$  werden dabei hinter den  $k$  Datenbits  $d_0$  bis  $d_{k-1}$  die  $m = n - k$  sogenannten Paritätsbits  $p_0$  bis  $p_{m-1}$  angefügt. Vereinfacht lässt sich die Generatormatrix  $G$  wie folgt schreiben:

$$G = [ \ I_k \ P^T \ ] \quad (13.12)$$

Eine zweite mögliche Variante von geordnet-systematischen Codes bringt das Datenwort auf der rechten Seite des Codeworts unter, d. h. bei den höherwertigen Elementen des Codevektors  $\underline{c}$ . Diese zweite übliche Darstellung wird vor allem auch bei den später behandelten zyklischen Codes verwendet.

$$\underline{c} = \underline{d} \cdot G = [ \ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{k-1} \ ] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{10} & \dots & p_{m-1\ 0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{01} & p_{11} & \dots & p_{m-1\ 1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ p_{0\ k-1} & p_{1\ k-1} & \dots & p_{m-1\ k-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

Vereinfacht lässt sich die zweite Variante der Generatormatrix  $G$  auch schreiben durch:

$$G = \begin{bmatrix} P^T & I_k \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

Bei  $P^T$  handelt es sich jeweils um die transponierte Schreibweise der Paritätsmatrix  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0\ k-1} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1\ k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-1\ 0} & p_{m-1\ 1} & \dots & p_{m-1\ k-1} \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

Aus den Spalten der Generatormatrix  $G$  können die Bildungsgleichungen des Codes bestimmt werden. Bei einem geordnet-systematischen Code gemäss Gleichung (13.11) lauten sie:

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0 \\ c_1 &= d_1 \\ \dots & \\ c_{k-1} &= d_{k-1} \\ c_k &= p_0 = p_{00} \cdot d_0 \oplus p_{01} \cdot d_1 \oplus \dots \oplus p_{0\ k-1} \cdot d_{k-1} \\ \dots & \\ c_{n-1} &= p_{m-1} = p_{m-1\ 0} \cdot d_0 \oplus p_{m-1\ 1} \cdot d_{m-1\ 2} \oplus \dots \oplus p_{m-1\ k-1} \cdot d_{k-1} \end{aligned} \quad (13.16)$$

Aus diesen Bildungsgleichungen geht die Bedeutung der Paritätsmatrix  $P$  sofort hervor: sie enthält ergänzend zu den trivialen vorgegebenen Zuweisungen des systematischen Codeteils  $c_0 \dots c_{k-1}$  die Bildungsregeln für die zusätzlichen  $m = n - k$  Paritätsbit  $p_0 \dots p_{m-1}$  und somit die essentielle Codierungsvorschrift eines geordnet-systematischen linearen Blockcodes  $C$ .

### 13.2.6 Paritätsprüfmatrix $H$

Die Paritätsprüfmatrix  $H$  (Englisch: parity check matrix) eines geordnet-systematischen Codes ist folgende  $m \times n$  Matrix, wenn die Datenbit im linken Teil des Codeworts gemäss Gleichung (13.11) untergebracht sind:

$$H = \begin{bmatrix} P & I_m \end{bmatrix} \quad (13.17)$$

Meist wird diese Matrix in transponierter Form benötigt:

$$H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

Sind die Datenbit im rechten Teil des Codeworts gemäss Gleichung (13.13) untergebracht, lautet die Paritätsprüfmatrix  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} I_m & P \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

Oder in transponierter Form:

$$H^T = \begin{bmatrix} I_m \\ P^T \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

Der Empfänger kann mit der transponierten Paritätsprüfmatrix  $H^T$  jedes Codewort auf seine Gültigkeit überprüfen:

$$\underline{c} \cdot H^T = \underline{d} \cdot G \cdot H^T = \underline{0} \quad (13.21)$$

In Gleichung (13.21) ist dabei mit  $\underline{0}$  der  $1 \times m$  Null-Vektor gemeint.

Der Aufbau dieser Prüfmatrix erklärt sich am Beispiel einer Generatormatrix gemäss Gleichung (13.11) wie folgt: der Decoder eines geordnet-systematischen Codes weiss, dass sich in den ersten  $k$  Codebits  $c_0$  bis  $c_{k-1}$  die ursprünglichen Datenbits  $d_0$  bis  $d_{k-1}$  befinden, und berechnet aus ihnen erneut die Paritätsbits  $p_0$  bis  $p_{m-1}$ . Diese vergleicht er durch eine weitere modulo-2 Addition mit den empfangenen Paritätsbits, welche sich an den Stellen  $c_k$  bis  $c_{n-1}$  befinden. Stimmen die erneut berechneten Paritätsbits mit den empfangenen Paritätsbits überein, führt diese letzte modulo-2 Addition zum Ergebnis 0, ansonsten zu einer 1.

Hinter der Paritätsprüfmatrix  $H$  stecken aber weit mehr mathematische Gesetzmässigkeiten, als aufgrund dieser einfachen Erklärung vermutet werden kann: zum mit  $G$  gebildeten Code  $C$  erzeugt die Paritätsprüfmatrix  $H$  einen dualen  $(m,n)$ -Code  $C_d$  dessen  $2^m$  Codeworte alle orthogonal zu den  $2^k$  Codeworten von  $C$  sind, d.h.  $\underline{c} \cdot \underline{c}_d^T = 0$ .

Mit etwas zusätzlicher Mathematik könnte bewiesen werden, dass nicht nur jedes Codewort  $\underline{c}$  multipliziert mit  $H^T$  den Vektor  $\underline{0}$  ergibt, sondern dass auch die Umkehrung gilt: ergibt  $\underline{c} \cdot H^T = \underline{0}$ , liegt mit Sicherheit ein gültiges Codewort des linearen Codes  $C$  vor, entweder das ursprünglich gesendete Codewort oder ein anderes, durch Bitfehler mutiertes gültiges Codewort.

Fehler bei der Übertragung können durch einen Fehlervektor  $\underline{e}$  der Länge  $n$  ausgedrückt werden, welcher aus dem ursprünglich gesendeten Codeworte  $\underline{c}$  das modifizierte empfangene Codewort  $\underline{c}_r$  bildet:

$$\underline{c}_r = \underline{c} \oplus \underline{e} \quad (13.22)$$

Durch die Prüfung mit  $H^T$  vollzieht der Empfänger somit folgende Berechnung des sogenannten Fehlersyndroms  $\underline{s}$ :

$$\underline{s} = \underline{c}_r \cdot H^T = (\underline{c} \oplus \underline{e}) \cdot H^T = \underline{e} \cdot H^T \quad (13.23)$$

Treten somit Bitfehler an den Stellen  $i, j, \dots$  des übertragenen Codewortes auf, ergibt die Syndromberechnung gerade die Linearkombination der Zeilen  $i, j, \dots$  von  $H^T$ :

Ohne Übertragungsfehler gilt:	$\underline{s} = \underline{0}$
Bei einem Einzelfehler an der Stelle $i$ gilt:	$\underline{s} = i\text{-te Zeile von } H^T$
Bei mehreren Fehlern an den Stellen $i, j, \dots$ gilt:	$\underline{s} = \text{Linearkombination der Zeilen } i, j, \dots \text{ von } H^T$

Fehler werden sofort erkannt, wenn  $\underline{s} \neq \underline{0}$  gilt. Die minimale Anforderung, um zumindest Einzelfehler mit Sicherheit erkennen zu können, verlangt somit, dass in keiner Zeile  $i$  von  $H^T$  ein Nullvektor  $\underline{0}$  steht, weil sonst Fehler an der Stelle  $i$  nicht erkannt werden könnten. Für einen geordnet-systematischen Code bedeutet dies, dass für eine Fehlererkennung (d.h. einem Code mit minimaler Hammingdistanz  $d_{\min} = 2$ ) jedes Datenbit in mindestens einer der Bildungsgleichungen der Paritätsbits enthalten sein muss.

Mehrere Fehler an den Stellen  $i, j, \dots$  werden genau dann nicht mehr erkannt, wenn die Linearkombination der Zeilen  $i, j, \dots$  von  $H^T$  gerade das Syndrom  $\underline{s} = \underline{0}$  ergibt. Damit entspricht die Hamming-Distanz eines Codes  $C$  gerade der minimalen Anzahl von Zeilen von  $H^T$ , welche modulo-2 addiert  $\underline{0}$  ergeben.

Um einen Einzelfehler korrigieren zu können muss die minimale Hammingdistanz  $d_{\min} = 3$  sein. Dies wird erreicht, wenn keine zwei Zeilen von  $H^T$  identisch sind. Mit dieser Erkenntnis lässt sich die transponierte Paritätsmatrix  $P^T$  sofort und sehr einfach konstruieren. Das Fehlersyndrom  $\underline{s}$  wird dann gerade mit jener Zeile  $i$  von  $H^T$  übereinstimmen, an deren Stelle  $i$  im Codewort der Fehler aufgetreten ist.

Soll der Code  $C$  in der Lage sein, zwei (oder mehr) Fehler zu korrigieren, müssen auch die Linearkombination von drei (oder mehr) Zeilen ein eindeutiges Fehlersyndrom  $\underline{s}$  ergeben, welches mit keinen anderen

Linearkombinationen dieses Umfangs generiert werden kann. Das Auffinden einer geeigneten Paritätsmatrix bei einer möglichst kleinen Anzahl von Paritätsbit ist ohne zusätzliche mathematische Sätze keine triviale Angelegenheit mehr. Die maximale Anzahl korrigierbarer Fehler bei einer vorgegebenen Anzahl Datenbit  $k$  und Paritätsbit  $m$  kann aber mit nachfolgender Hammingschranke abgeschätzt werden.

### 13.2.7 Hammingschranke

Sollen in einem linearen  $(n, k)$ -Blockcode  $t$  Fehler mit Sicherheit korrigiert werden können, müssen sämtliche Bitkombinationen in einer Hammingdistanz  $d \leq t$  zu einem beliebigen gültigen Codewort diesem zugeordnet sein, d.h. sie müssen näher beim ursprünglichen Codewort sein, als bei irgendeinem anderen gültigen Codewort. All diese Bitkombinationen bilden eine Art Pufferzone von fehlerhaften Empfangsworten um jedes der  $2^k$  gültigen Codeworte herum, in welcher sich der Empfänger mit Sicherheit für das im Zentrum liegende Codewort entscheiden wird.

Mit etwas Kombinatorik können sofort die folgende Anzahl von Bitkombinationen jedem gültigen Codewort zugeordnet werden:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 && \text{Bitkombination in Hamming-Distanz } d = 0, \text{ d.h. das Codewort selbst.} \\ \binom{n}{1} &= n && \text{Bitkombinationen in Hamming-Distanz } d = 1, \text{ d.h. das Codewort mit einem Einzelfehler.} \\ &\dots \\ \binom{n}{t} & && \text{Bitkombinationen in Hammingdistanz } d = t, \text{ d.h. das Codewort mit exakt } t \text{ Fehlern.} \end{aligned}$$

Von den insgesamt möglichen  $2^n$  Bitmustern müssen somit bei einem Code, welcher  $t$  Fehler korrigiert, folgende Anzahl von Kombinationen für die Codeworte selbst und deren Pufferzonen zur Verfügung gestellt werden:

$$2^k \cdot \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \leq 2^n \quad (13.24)$$

Durch teilen durch  $2^k$  ergibt sich sofort die Formel für die Hammingschranke:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (13.25)$$

Gilt für einen Code das Gleichheitszeichen bei der Hammingschranke, handelt es sich um einen perfekten Code. Einzelfehler korrigierende perfekte Codes nennt man Hammingcodes.

Die Erfüllung der Hammingschranke ist eine Bedingung für fehlerkorrigierende Blockcodes, welche  $t$  Fehler korrigieren sollen. Die Hammingschranke zeigt die grundsätzlichen fehlerkorrigierenden Möglichkeiten auf, welche mit einer geschickt gewählten  $(n, k)$ -Codierung erzielt werden kann. Ob ein konkret vorliegender  $(n, k)$ -Code tatsächlich so gebildet ist, dass er diese  $t$  Fehler korrigieren kann, muss mit der Bestimmung der minimalen Hammingdistanz  $d_{\min}$  immer noch zusätzlich untersucht werden.

### 13.2.8 Restfehlerwahrscheinlichkeit

Ist bei einem Codewort  $\underline{c}$  eines linearen  $(n, k)$ -Blockcodes die Anzahl der Übertragungsfehler  $t$  grösser oder gleich der minimalen Hammingdistanz  $d_{\min}$  des Codes und liegen die Positionen der Bitfehler innerhalb dieses Codewortes  $\underline{c}$  ungünstig, kann ein neues gültiges Codewort entstehen, ohne dass eine solch fehlerhafte Übertragung vom Empfänger detektiert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit solcher unentdeckt bleibenden Fehler soll nachfolgend für einen gedächtnisfreien Kanal mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  abgeschätzt

werden.

Ein Fehlervektor  $\underline{e}$  der Länge  $n$  kann bei einem linearen  $(n, k)$ -Blockcode nur gerade dann ein neues gültiges Codewort erzeugen, wenn dieser Vektor  $\underline{e}$  selber ebenfalls ein gültiges Codewort  $\underline{c}$  repräsentiert. Bei einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_e$  im gedächtnisfreien Kanal ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Fehlervektor  $\underline{e}$  mit den Fehlern an den Positionen der Marks eines solchen Codewort  $\underline{c}$  gebildet wird, gegeben durch:

$$P(\underline{e}) = p_e^{w(\underline{c})} \cdot (1 - p_e)^{n-w(\underline{c})} \quad (13.26)$$

Die Anzahl gültige Codeworte mit Hamminggewicht  $w(\underline{c}) = i$  sollen nun mit  $n_{w_i}$  bezeichnet werden. Dann ergibt sich zusammengefasst für alle Codeworte folgende Restfehlerwahrscheinlichkeit  $p_{u_c}$ , dass ein fehlerhaft übertragenes Codewort beim Empfänger unentdeckt bleibt, weil der Fehlervektor  $\underline{e}$  gerade einem gültigen Codewort entspricht:

$$p_{u_c} = \sum_{i=1}^n n_{w_i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} = \sum_{i=d_{\min}}^n n_{w_i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} \quad (13.27)$$

Dabei wurde im zweiten Term dieser Gleichung ausgenutzt, dass die Anzahl gültige Codeworte  $\underline{c}$  mit Gewicht  $w(\underline{c}) < d_{\min}$  gerade  $n_{w_i} = 0$  ist.

Diese Restfehlerwahrscheinlichkeit  $p_{u_c}$  soll nun noch genauer abgeschätzt werden, ohne dass der exakte Code und damit die Anzahl  $n_{w_i}$  der Codeworte mit Gewicht  $w(\underline{c}) = i$  bekannt sind.

Aus praktischer Sicht sind bei einer binären Datenübertragung einzig Bitfehlerwahrscheinlichkeiten  $p_e \leq 50\%$  relevant, da andernfalls mit einem Inverter die Mehrheit der Übertragungsfehler korrigiert werden kann (und die danach verbleibende Fehlerrate wiederum kleiner 50% ist). Mit  $p_e < 50\%$  treten aber Fehlervektoren mit kleinerem Gewicht  $w(\underline{e})$  mit höherer Wahrscheinlichkeit auf als Fehlervektoren mit grösserem Gewicht. Damit gilt aber für ein  $i < j$  und  $n \geq j$ :

$$p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} > p_e^j \cdot (1 - p_e)^{n-j} \quad (13.28)$$

Mit dieser Erkenntnis ergibt sich aus der Gleichung (13.27) folgende Abschätzung für die Restfehlerwahrscheinlichkeit  $p_{u_c}$  eines ganzen Codewortes:

$$p_{u_c} = \sum_{i=d_{\min}}^n n_{w_i} \cdot p_e^i \cdot (1 - p_e)^{n-i} < \sum_{i=d_{\min}}^n n_{w_i} \cdot p_e^{d_{\min}} \cdot (1 - p_e)^{n-d_{\min}} < (2^k - 1) \cdot p_e^{d_{\min}} \quad (13.29)$$

Dabei bezeichnet  $2^k - 1$  die gesamte Anzahl gültiger Codeworte ohne das Null-Codewort. Im letzten Teil der Ungleichung wurde zudem berücksichtigt, dass nicht nur  $1 - p_e < 1$  gilt sondern meist auch  $1 - p_e \approx 1$ , womit dieser Faktor in der Praxis keinen grossen Einfluss auf die Abschätzung von  $p_{u_c}$  hat.

In brauchbarer Näherung kann aus der Restfehlerwahrscheinlichkeit der Codeworte  $p_{u_c}$  auch eine mittlere Fehlerrate der decodierten Datenbit  $p_{u_b}$  berechnet werden:

$$p_{u_b} \approx \frac{d_{\min}}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot p_{u_c} < \frac{d_{\min}}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot (2^k - 1) \cdot p_e^{d_{\min}} \quad (13.30)$$

Dabei ist zu bemerken, dass diese Bitfehler innerhalb der decodierten Datenbit nicht mehr statistisch unabhängig sind, sondern im Bereich der unentdeckten fehlerhaften Codeworte gehäuft und somit leicht burstweise auftreten.

#### Beispiel 1: Parity-Check bei RS-232

Bei RS-232 kann optional ein Parity-Bit gesendet werden, welches als Even- oder Odd-Parity einem typischerweise 8 Bit breiten Datenwort angehängt wird und dem Empfänger eine einfache Fehler-Erkennung ermöglicht. Wir betrachten im folgenden Even-Parity, d.h. das 8 Bit breite Datenwort wird im neunten Bit so mit einem Einer oder Nuller ergänzt, dass die Anzahl Einer im 9 Bit breiten Codewort gerade ist.

- Bei diesem Code handelt es sich um einen (9, 8)-Blockcode.
- Der Code ist geordnet-systematisch. Die 8 Bit des Datenwertes treten unverändert als die acht ersten Bits des 9 Bit breiten Codewortes auf.
- Das Parity-Bit berechnet sich bei Even-Parity als Modulo-2 Addition sämtlicher Datenbits.
- Die Bildungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}c_0 &= d_0 \\c_1 &= d_1 \\c_2 &= d_2 \\c_3 &= d_3 \\c_4 &= d_4 \\c_5 &= d_5 \\c_6 &= d_6 \\c_7 &= d_7 \\c_8 &= d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \oplus d_4 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_7\end{aligned}$$

- Die Generatormatrix  $G$  ergibt sich demnach wie folgt:

$$G = \left[ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Der Code ist linear, da er vollständig mit einer Generatormatrix gebildet werden kann. Die Linearität ist aber eigentlich nicht ganz selbstverständlich: bei Odd-Parity ist die Eigenschaft der Linearität nicht gegeben, da zur Bildung des Parity-Bit die Modulo-2 Addition mit einem Offset von  $\oplus 1$  berechnet wird. Bei Odd-Parity kann entsprechend auch nicht das Codewort mit Hilfe einer Generatormatrix aus dem Datenwort berechnet werden.
- Die minimale Hamming-Distanz beträgt  $d_{\min} = 2$ , da jedes 9 Bit breite Codewort eine gerade Anzahl Einer besitzt. Ein Codewort mit einem Einzelfehler weist also eine ungerade Anzahl Einer auf und ist damit kein gültiges Codewort mehr. Zur Bestimmung der Hammingdistanz kann man natürlich auch das Hamming-Gewicht von allen möglichen Codeworten bestimmen. Offensichtlich ist sofort, dass ein Code mit Even-Parity keine Codeworte mit nur einem Einer bildet, womit sicher  $d_{\min} = 2$  ist. Mit  $d_{\min} = 2$  kann ein Fehler erkannt aber keiner korrigiert werden.
- Die Prüfmatrix  $H$  lautet wie folgt:

$$H = [P \ I_m] = [ \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ ]$$

- Keine Zeile von  $H^T$  (bzw. Spalte von  $H$ ) enthält den Nullvektor, weshalb der Code sämtliche Einzelbitfehler erkennen kann. Da aber andererseits nicht jede Zeile von  $H^T$  (bzw. Spalte von  $H$ ) ein unverwechselbares Bitmuster aufweist, kann der Empfänger des Codes solche Einzelfehler nicht mit Sicherheit korrigieren. In diesem Beispiel sind sogar alle Zeilen von  $H^T$  identisch, womit die Fehlersyndrome aller Einzelfehler gleich aussehen, d.h. unabhängig davon, wo der Einzelfehler aufgetreten ist, sind für den Empfänger immer alle Bitpositionen gleich valable Kandidaten für die Fehlerposition. Es fehlen somit jegliche Indizien für eine erfolgreiche Fehlerkorrektur.

### Beispiel 2: (7,4)-Hamming Code

Gegeben sei ein (7, 4)-Hamming Code, mit folgender Generatormatrix  $G$ :

$$G = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Für diesen  $(n, k)$ -Blockcode gilt  $n = 7$ ,  $k = 4$ .
- Wir bestimmen die Anzahl Fehler, die von einem geschickt gewählten (7, 4) Code korrigiert werden können. Für  $t = 1$  gilt gerade:

$$2^{n-k} = 2^3 \leq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = 1 + 7 = 8$$

d.h. der Code kann  $t = 1$  Fehler korrigieren, wie der Name Hammingcode ja schon besagt.

- Es handelt sich um einen systematischen Code, wie man leicht aus der  $4 \times 4$ -Einheitsmatrix in den ersten vier Spalten von  $G$  erkennen kann.

- Es gilt weiter:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die Bildungsgleichungen für  $\underline{c}$  lauten damit wie folgt:

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0 \\ c_1 &= d_1 \\ c_2 &= d_2 \\ c_3 &= d_3 \\ c_4 &= d_0 \oplus d_2 \oplus d_3 \\ c_5 &= d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \\ c_6 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \end{aligned}$$

- Die Datenworte  $\underline{d}$  gehen damit wie folgt in die Codeworte  $\underline{c}$  über:

$$\begin{aligned} 0000 &\Rightarrow 0000000 \\ 0001 &\Rightarrow 0001101 \\ 0010 &\Rightarrow 0010111 \\ 0011 &\Rightarrow 0011010 \\ 0100 &\Rightarrow 0100011 \\ 0101 &\Rightarrow 0101110 \\ 0110 &\Rightarrow 0110100 \\ 0111 &\Rightarrow 0111001 \\ 1000 &\Rightarrow 1000110 \\ 1001 &\Rightarrow 1001011 \\ 1010 &\Rightarrow 1010001 \\ 1011 &\Rightarrow 1011100 \\ 1100 &\Rightarrow 1100101 \\ 1101 &\Rightarrow 1101000 \\ 1110 &\Rightarrow 1110010 \\ 1111 &\Rightarrow 1111111 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie selbst an ein paar Beispielen die Linearität des Codes, die Hamming-Gewichte und die Hamming-Distanzen.

Wiederum kann man feststellen, dass es sich bei sämtlichen Zeilen der Generatormatrix  $G$  um Codeworte handelt (gebildet aus den Datenworten 1000, 0100, 0010, 0001). Mit diesem Set von Codeworten können alle anderen Codeworte durch (modulo-2) Additionen erzeugt werden. Die lineare Unabhängigkeit dieser Codeworte ist zudem direkt mit der Einheitsmatrix im linken Teil der Generatormatrix  $G$  gewährleistet.

- Die Prüfmatrix  $H$  lautet wie folgt:

$$H = [P \ I_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die transponierte Prüfmatrix  $H^T$  lautet wie folgt:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Als Beispiel empfangen wir jetzt folgende vier Codeworte, welche wir auf Fehler überprüfen. Ausgehend von einem korrekten Codewort verändern wir dabei bei jedem folgenden Codewort genau 1 Bit, wobei in diesem Beispiel die Fehlerbits ganz gezielt selektiert wurden, um die Hamming-Distanz und ihre Bedeutung für Fehlerkorrektur und Fehlererkennung deutlich zu machen.

Die ersten vier Bits, welche nach dem Empfang vom Empfänger evtl. noch korrigiert werden, bilden bei unserem systematischen Code gerade das ursprüngliche Datenwort, welches bei einer fehlerfreien Übertragung also nicht mehr aufwändig decodiert werden muss.

Die nachfolgend dargestellte Syndrom-Decodierung zeigt, ob ein Bit fehlerhaft empfangen wurde und an welcher Bitposition (unter Annahme eines Einzelfehlers) dieser Fehler aufgetreten ist:

$$\begin{aligned}\underline{c}_r = 1001011 \rightarrow \underline{s} = 000 & \quad \text{Kein Fehler d.h. } \underline{d} = 1001 \\ \underline{c}_r = 1000011 \rightarrow \underline{s} = 101 & \quad \underline{s} \text{ ist } 4. \text{ Zeile von } H^T, \text{ d.h. } 4. \text{ Bit von } \underline{c} \text{ korrigieren: } \underline{d} = 1001 \\ \underline{c}_r = 1000010 \rightarrow \underline{s} = 100 & \quad \underline{s} \text{ ist } 5. \text{ Zeile von } H^T, \text{ d.h. } 5. \text{ Bit von } \underline{c} \text{ korrigieren: } \underline{d} = 1000.\end{aligned}$$

Dieser zweite Fehler wird erkannt, aber falsch korrigiert, d.h. das fehlerhafte Codewort wird einem anderen als dem ursprünglichen Datenwort zugeordnet.

$$\underline{c}_r = 1000110 \rightarrow \underline{s} = 000 \quad \text{Kein Fehler d.h. } \underline{d} = 1000$$

Nach dieser (speziell ausgesuchten!) dritten Änderung des ursprünglichen Codewortes ergibt sich wieder ein gültiges fehlerfreies Codewort, was bei einem zufällig gewählten dritten Fehlerbit im Allgemeinen nicht der Fall wäre. Dieses Beispiel mit den drei ausgesuchten Bitfehlern zeigt, dass mit diesem  $(7, 4)$ -Blockcode Codeworte mit drei oder mehr Bitfehlern vom Empfänger nicht mehr mit Sicherheit als fehlerhafte Bitkombinationen erkannt werden.

### Beispiel 3: Bildung der Generatormatrix eines Hamming Codes

Im vorhergehenden Beispiel war ein  $(7, 4)$ -Hamming Code als Generatormatrix vorgegeben. Mit welchen Kombinationen von  $k$  und  $n$  kann ein solcher Hammingcode gebildet werden und wie lassen sich die Bildungsgleichungen des Codes bzw. dessen Generatormatrix finden?

Hammingcodes sind perfekte Einzelfehler korrigierende Codes. Für sie gilt demnach:

$$2^m = 2^{n-k} = \sum_{i=0}^1 \binom{n}{i} = 1 + n$$

Für jedes  $m \geq 2$  ist aufgrund der Hammingschranke die Suche nach einem Hammingcode erfolgsversprechend. Dabei gilt:

$$n = 2^m - 1$$

$$k = 2^m - 1 - m$$

Mit nachfolgenden Regeln lassen sich tatsächlich für jedes  $m \geq 2$  geordnet-systematische Hammingcodes konstruieren. Um Einzelfehler korrigieren zu können, müssen deren Syndrome  $\underline{s}$  eindeutig sein. Bei einem perfekten Code dürfen zudem keine Bitkombinationen für weitere Syndrome  $\underline{s}$  übrigbleiben. Sämtliche denkbaren Bitkombinationen für Syndrome  $\underline{s} \neq \underline{0}$  müssen somit exakt einmal in einer Zeile von  $H^T$  vorkommen. Der Nullvektor  $\underline{s} = \underline{0}$  bildet wie schon erwähnt das Syndrom für die fehlerfrei übermittelten Codeworte und taucht somit nicht als Zeile von  $H^T$  auf.

Die Zuordnung der Syndrome  $\underline{s}$  mit einem einzigen Einer zu den Zeilen von  $H^T$  ist durch die Einheitsmatrix im unteren Teil von  $H^T$  schon gegeben: es sind die Syndrome welche gerade durch Einzelfehler innerhalb der Paritybits entstehen.

Die Zuordnung von Syndromen mit mehr als einem Einer zu den  $k$  verbleibenden Zeilen von  $H^T$  darf nun völlig beliebig erfolgen. Die dabei entstehende transponierte Paritätsmatrix  $P^T$  bildet gleichzeitig auch den rechten Teil der Generatormatrix  $G$ . Der linke Teil von  $G$  ist bei einem solchen geordnet-systematischen Hammingcode eine  $k \times k$  Einheitsmatrix  $I_k$ .

Beispiel: Hammingcode mit  $m = 4$ .

$$n = 2^m - 1 = 15$$

$$k = 2^m - 1 - m = 11$$

Der untere Teil von  $H^T$  bildet eine  $4 \times 4$  Einheitsmatrix. Der obere Teil  $P^T$  besteht aus eindeutigen Zeilen mit sämtlichen Bitkombinationen, bei denen mehr als ein Einer auftritt. Zum Beispiel:

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und somit} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 13.3 Zyklische Blockcodes

Aufgrund der soeben dargestellten Einzelfehler korrigierenden Blockcodes liegt folgende (tatsächlich zutreffende) Vermutung nahe: anteilmässig muss umso weniger Redundanz in Form von Paritätsbit den Daten beigefügt werden, je höher die Anzahl der Daten- und Codebits des Blockcodes ist. Anders ausgedrückt heisst dies, dass die Coderate  $k/n$  mit zunehmender Blockgrösse steigt.

Allerdings steigt mit grossen Daten- bzw. Codeblöcken die Wahrscheinlichkeit gleichzeitig an, dass sich mehr Bitfehler bei der Übertragung eines Blockes einschleichen, als dies bei kleineren Blockgrössen der Fall ist. Wieviel Redundanz schlussendlich für eine sichere Datenübertragung zugefügt werden sollte, hängt somit stark von der erwarteten Übertragungsfehlerrate ab.

Fällt aber dank einer tiefen Fehlerrate die Entscheidung auf relativ grosse Datenblöcke, stellt sich oft das Problem einer komplexen Implementierung: für die Codierung müssen sehr viele modulo-2 Additionen aus einer hohen Anzahl von Eingangssymbolen berechnet werden. Auch eine Implementierung mit einer Look-up Table sprengt schnell einmal einen vernünftigen Ressourcenbedarf. Eine sehr elegante Alternative liefern hier jedoch die zyklischen Blockcodes.

Zyklische Blockcodes sind lineare Blockcodes mit zyklischen Eigenschaften und damit eine Untergruppe der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Codes. Sie zeichnen sich durch eine einfache Hardwarerealisierung aus, sowohl beim Coder wie auch beim meist aufwändigeren Decoder.

Um die Eigenschaft der Zyklizität von Codes herauszuschälen, muss als erstes eine zyklische Verschiebung und deren mathematische Beschreibung verstanden werden. Im Gegensatz zur Literatur über lineare Blockcodes, wo bei den Matrizendarstellungen sowohl 0-basierte wie auch 1-basierte Vektordarstellungen vorkommen, wird nun bei zyklischen Codes üblicherweise die Indizierung der Daten- und Codebits immer bei  $d_0$  bzw.  $c_0$  anstatt  $d_1$  bzw.  $c_1$  begonnen. In diesem Skript ändert sich diesbezüglich nichts, da eine konsistente Indizierung, welche immer bei 0 beginnt, angestrebt wurde.

Die zyklische Verschiebung  $\sigma(\underline{c})$  eines Codewortes  $\underline{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}]$  der Länge  $n$  ist wie folgt definiert:

$$\sigma(\underline{c}) = \underline{c}^{(1)} = [c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}] \quad (13.31)$$

Eine zweite zyklische Verschiebung ergibt damit:

$$\sigma^2(\underline{c}) = \underline{c}^{(2)} = [c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-3}] \quad (13.32)$$

Ein zyklischer Code ist ein linearer Blockcode, bei welchem jede zyklische Verschiebung eines gültigen Codewortes von  $C$  wieder zu einem neuen gültigen Codewort von  $C$  führt.

### 13.3.1 Polynomdarstellung

Um die Eigenschaften eines zyklischen Codes zu untersuchen, erweist es sich als einfacher, jedes Codewort als ein Polynom darzustellen, welches man als Codewortpolynom bezeichnet:

$$\underline{c} = [ c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-2} \ c_{n-1} ] \Rightarrow c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1}$$

Bei  $c(x)$  handelt es sich um ein Polynom  $(n - 1)$ -ten Grades, mit Koeffizienten  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ), welche Elemente der Menge  $K$  des Galoiskörpers GF(2) sind.

Solche Polynome können in herkömmlicher Weise addiert werden, wobei zu beachten ist, dass die resultierenden Koeffizienten wiederum zum GF(2) gehören, das heisst, dass die Addition modulo-2 zu erfolgen hat und somit  $1 \oplus 1 = 0$  bzw.  $x^i \oplus x^i = 0$  gilt. Addition und Subtraktion sind im GF(2) zudem identische Operationen. Beispiel:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= [110011] = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5 = 1 + x + x^4 + x^5 \\ \underline{b} &= [010101] = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5 = x + x^3 + x^5 \\ \underline{a} + \underline{b} &= [100110] = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 = 1 + x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt führt die Subtraktion im GF(2) zum selben Ergebnis, d.h.  $\underline{a} - \underline{b} = 1 + x^3 + x^4$

Neben Addition und Subtraktion kann nun weiter auch eine Multiplikation für 2 Codevektoren definiert werden, welche bis auf die modulo-2 Operation einer Multiplikation von 2 Polynomen im reellen Zahlenraum entspricht. Dies ergibt mit den beispielhaften Vektoren  $\underline{d} = [110011]$  und  $\underline{g} = [010101]$ :

$$\begin{aligned} \underline{d} \cdot \underline{g} &= (1 + x + x^4 + x^5) \cdot (x + x^3 + x^5) = x + x^2 + x^5 + x^6 + \\ &\quad x^3 + x^4 + x^7 + x^8 + \\ &\quad x^5 + x^6 + x^9 + x^{10} \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \\ &= [01111001111] \end{aligned}$$

Dabei wurden wie bei einer schriftlichen Multiplikation die Teilprodukte von  $d(x)$  mit den drei Potenzen  $x$ ,  $x^3$  und  $x^5$  von  $g(x)$  gebildet, deren jeweils gleiche Potenzen untereinander gestellt und dann addiert. Wie immer im GF(2) handelt es sich dabei um modulo-2 Additionen der einzelnen Potenzen von  $x$ .

Diese Multiplikation lässt sich in Hardware sehr einfach realisieren. Sie besteht aus modulo-2 Addierern (XOR-Verknüpfungen), welche die Koeffizienten von  $g(x)$  repräsentieren, sowie binären Register (Flip-Flops, in der Zeichnung  $z^{-1}$ ), durch welche der Vektor  $\underline{d}$  von links nach rechts durchgeschoben wird, entweder wie in Abbildung 13.2 mit dem least-significant Bit (LSB), oder wie in Abbildung 13.3 mit dem most-significant Bit (MSB) voraus.

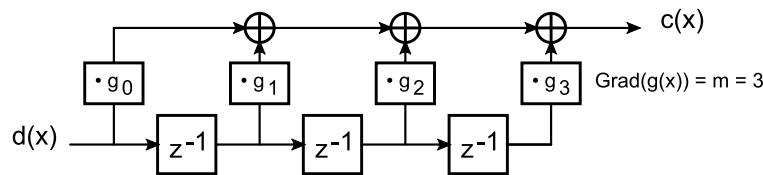


Abbildung 13.2: Implementierung der Multiplikation im GF(2) mit vorausgehendem LSB

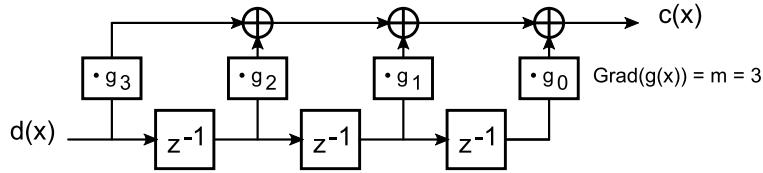


Abbildung 13.3: Implementierung der Multiplikation im GF(2) mit vorausgehendem MSB

Pro Clockzyklus wird dabei der Koeffizient von jeweils einer Potenz der resultierenden Multiplikation berechnet. Da die Addition der einzelnen Terme modulo-2 erfolgt, muss kein Übertrag bei der Berechnung des Koeffizienten der nächsten resultierenden Potenz berücksichtigt werden. Am Ende des Vektors  $\underline{d}$  wird mit Zero-Padding (d.h. Nachschieben von Nullen) die Operation weitergeführt, bis sämtliche Koeffizienten von  $\underline{d}$  aus dem Schieberegister hinausgeschoben wurden.

Ebenfalls in Anlehnung an eine Polynomdivision im reellen Zahlenraum lässt sich die Division von zwei Codepolynomen definieren. Die Menge aller Polynome über  $K$  bezeichnen wir mit  $K[x]$ . Sind jetzt  $c(x)$  und ein  $g(x) \neq 0$  beliebige Polynome aus  $K[x]$ , dann gibt es zwei eindeutige Polynome  $q(x)$  bzw.  $r(x)$ , für welche gelten:

$$c(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad (13.33)$$

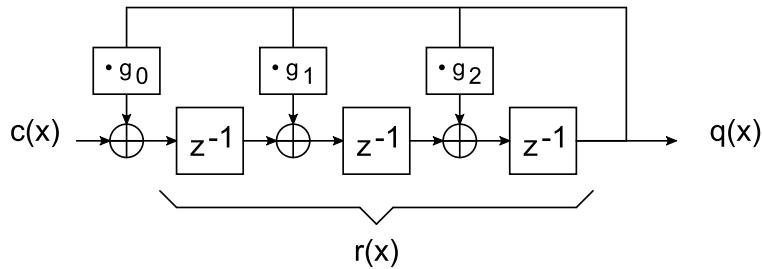
Bei  $q(x)$  handelt es sich um den Quotienten und bei  $r(x)$  um den Rest der modulo-2 Polynomdivision  $c(x)/g(x)$ , wobei der Rest entweder  $r(x) = 0$  ist oder einen kleineren Grad als  $g(x)$  aufweist.

Die Polynomdivision beginnt bei der höchsten Potenz von  $c(x)$ , welche bei einem Codewort  $c$  der Länge  $n$ , bei welchem das höchstwertige Bit eine 1 ist, gerade der Potenz  $x^{n-1}$  entspricht. Bei der Division durch ein  $g(x)$  mit Grad  $x^m$  ergibt sich ein erster Koeffizient  $q_{n-m-1} = 1$  von  $q(x)$ . Das Polynom  $g(x)$  wird somit mit  $x^{n-m-1}$  multipliziert und dieses Teilprodukt von  $c(x)$  subtrahiert. Mit dem verbleibenden Rest wird gleich verfahren.

Konkret für ein  $c(x) = 1 + x + x^3 + x^5 + x^6$  und ein  $g(x) = 1 + x + x^3$ :

$$\begin{array}{r}
 (1 + x + x^3 + x^5 + x^6) : (1 + x + x^3) = x^3 + x^2 + x + 1 = q(x) \\
 - \frac{x^3 + x^4 + x^6}{1 + x + x^4 + x^5} \\
 - \frac{x^2 + x^3 + x^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} \\
 - \frac{x + x^2 + x^4}{1 + x + x^3} \\
 - \frac{x^3}{x} = r(x)
 \end{array}$$

Subtraktion und Addition sind im GF(2) wie gesagt identische Operationen, auch bei der Abwicklung dieser Division. In Anlehnung an diese schriftlich durchgeführte Division lässt sich auch eine Divisionsschaltung sehr einfach in Hardware realisieren:



**Abbildung 13.4:** Implementierung der Division im  $\text{GF}(2)$  mit üblichem, vorausgehendem MSB

Das höchstwertige Bit von  $g(x)$  ist dabei immer gleich 1 und wird somit nicht als Koeffizient  $g_3$  gezeichnet, was aber eigentlich eine triviale Erkenntnis ist, denn wäre dieser Koeffizient 0, wäre  $x^3$  als höchste Potenz gar nicht vorhanden. Auch im reellen Zahlenraum werden ja bei einer Division durch 7 nur die sieben Einer notiert und wir fügen nicht noch beispielsweise zwei führende Stellen mit 0 hinzu, um die Division spannender zu gestalten.

Die Division ist abgeschlossen, wenn das Codewort  $c$  vollständig von links nach rechts mit dem MSB voraus in das Schieberegister hineingeschoben wurde. Im Schieberegister befindet sich dann gerade der Divisionsrest  $r(x)$ .

Weisen zwei Polynome  $c(x)$  und  $b(x)$  bei der (modulo-2) Division durch  $g(x)$  den gleichen Rest  $r(x)$  auf, wird dies in folgender eigentümlicher Schreibweise dargestellt:

$$c(x) \doteq b(x) \pmod{g(x)} \quad (13.34)$$

Mit dieser Darstellung können wir für eine beliebige Polynomdivision mit Polynomen aus  $K[x]$  schreiben:

$$r(x) \doteq c(x) \pmod{g(x)} \quad (13.35)$$

### 13.3.2 Theorem für zyklische Codes

Division und Multiplikation sind zwar amüsante Operationen, welche auch in Hardware einfach realisiert werden können, doch ist der Zusammenhang mit Blockcodes zurzeit nicht ersichtlich.

Es gilt nun aber folgendes fundamentales Theorem für zyklische Codes: alle Codewortpolynome eines  $(n, k)$ -zyklischen Codes sind Vielfache eines Generatorpolynoms  $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{n-k}x^{n-k}$ , wobei  $g(x)$  ein sogenanntes Faktorpolynom von  $x^n + 1$  sein muss. Dies bedeutet, dass  $x^n + 1$  modulo-2 dividiert durch  $g(x)$  den Rest  $r(x) = 0$  ergeben muss:

$$x^n + 1 \doteq 0 \pmod{g(x)} \quad \Rightarrow \quad c(x) = d(x) \cdot g(x) \text{ erzeugt Codeworte eines zyklischen } (n, k)\text{-Codes.}$$

Das Generatorpolynom  $g(x)$  besitzt dabei den Grad  $m = n - k$  und besitzt die zwei Koeffizienten  $g_m = g_0 = 1$ , welche mit Sicherheit 1 sind, da ohne  $g_m = 1$  das höchstwertige Codebit  $c_{n-1}$  (MSB) und ohne  $g_0 = 1$  das tiefstwertige Codebit  $c_0$  nicht gebildet werden könnte.

Das Polynom des Datenwortes besitzt den Grad  $k - 1$  d.h.  $k$  Koeffizienten von  $d_0$  bis  $d_{k-1}$ , welche beliebig 1 oder 0 sein können. Das Polynom des Codewortes besitzt den Grad  $n - 1$  d.h.  $n$  Koeffizienten von  $c_0$  bis  $c_{n-1}$ , welche ebenfalls alle sowohl 0 oder 1 sein können.

Das Theorem basiert darauf, dass eine  $i$ -fache zyklische Verschiebung eines Codewortes  $\sigma^i(c(x))$  grosse Ähnlichkeit mit dem Produkt  $x^i \cdot c(x)$  aufweist:

$$\begin{aligned}
 c(x) &= c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 \dots + c_{n-2} \cdot x^{n-2} + c_{n-1} \cdot x^{n-1} \\
 \sigma^i(c(x)) &= c_{n-i} + \dots + c_{n-1} \cdot x^{i-1} + c_0 \cdot x^i + c_1 \cdot x^{i+1} + \dots + c_{n-1-i} \cdot x^{n-1} \\
 x^i \cdot c(x) &= c_0 \cdot x^i + c_1 \cdot x^{i+1} + \dots + c_{n-1-i} \cdot x^{n-1} + c_{n-i} \cdot x^n + \dots c_{n-1} \cdot x^{n+i-1}
 \end{aligned}$$

Die beiden überseinstimmenden Anteile wurden gerade untereinander gestellt. Der linksseitige Anteil, welcher nur bei der zyklischen Verschiebung  $\sigma^i(c(x))$  auftritt, findet sich in selber Form mit  $x^n$  gewichtet auf der rechten Seite von  $x^i \cdot c(x)$  wieder.

Mit dem Korrekturterm  $(1 + x^n) \cdot (c_{n-i} + \dots + c_{n-1} \cdot x^{i-1})$  können somit die beiden Operationen gleichgesetzt werden:

$$\sigma^i(c(x)) = x^i \cdot c(x) + (1 + x^n) \cdot (c_{n-i} + \dots + c_{n-1} \cdot x^{i-1}) = x^i \cdot c(x) + (1 + x^n) \cdot q(x)$$

Der Quotient  $q(x)$  ist dabei ein (uns später nicht weiter interessierender) Term vom Grad i-1. Der Term  $x^i \cdot c(x)$  wird nun auf die linke, der Term  $\sigma^i(c(x))$  auf die rechte Seite der Gleichung genommen:

$$x^i \cdot c(x) = \sigma^i(c(x)) + (1 + x^n) \cdot q(x)$$

Eine zyklische Verschiebung  $\sigma^i$  um  $i$  Positionen kann also wie folgt mit Multiplikation und Division erzeugt bzw. implementiert werden:

- Multiplikation des Codewortes  $c(x)$  mit  $x^i$
- Anschliessende Division durch  $1 + x^n$
- Der Rest entspricht gerade dem zyklisch verschobenen Codewort:  $r(x) = \sigma^i(c(x))$

Nun ist aber bei der vorhin erhaltenen Gleichung  $\sigma^i(c(x)) = x^i \cdot c(x) + (1 + x^n) \cdot q(x)$  die rechte Seite durch  $g(x)$  teilbar, da  $c(x) = d(x) \cdot g(x)$  gilt und  $g(x)$  wie gefordert ein Faktor von  $1 + x^n$  sein muss. Damit ist aber auch  $\sigma^i(c(x))$  durch  $g(x)$  teilbar. Dies bedeutet aber, dass jedes zyklisch verschobene Codewort ebenfalls zum Code gehört, welcher mit  $g(x)$  gebildet wird.

### 13.3.3 Generatorpolynome für zyklische Codes

Zyklische Codes können sehr einfach in Hardware implementiert werden. Ob ein solch gebildeter zyklischer Code  $c(x) = d(x) \cdot g(x)$  aber auch gute fehlererkennende und/oder -korrigierende Eigenschaften besitzt, d.h. ob er eine grosse minimale Hammingdistanz  $d_{\min}$  aufweist, kann nicht auf einfache Art und Weise nur aus dem Polynom  $g(x)$  herausgelesen werden.

Es besteht aber bei gegebenem Generatorpolynom  $g(x)$  immer die Möglichkeit, die minimale Hammingdistanz  $d_{\min}$  des Codes zu bestimmen, indem sämtliche Codeworte gebildet werden und das Minimum ihrer Hamminggewichte gesucht wird.

Glücklicherweise gibt es zyklische Codes mit grosser minimalen Hammingdistanz, welche somit gute Codeeigenschaften mit einfacher Implementierung vereinen. In der nachfolgenden Tabelle sind Beispiele von geeigneten Generatorpolynomen  $g(x)$  für Hammingcodes mit  $m = 3 \dots 10$  aufgeführt (Quelle: Shu Lin and Daniel J. Costello, Error Control Coding, 2nd Edition, Pearson 2004):

$m$	$(n, k)$	$g(x)$
3	(7, 4)	$1 + x + x^3$
4	(15, 11)	$1 + x + x^4$
5	(31, 26)	$1 + x^2 + x^5$
6	(63, 57)	$1 + x + x^6$
7	(127, 120)	$1 + x^3 + x^7$
8	(255, 247)	$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^8$
9	(511, 502)	$1 + x^4 + x^9$
10	(1023, 1013)	$1 + x^3 + x^{10}$

**Tabelle 13.1:** Generatorpolynome von zyklischen Hamming-Codes

Sind solche Generatorpolynome  $g(x)$  gegeben, kann zudem sofort auch das Polynom  $h(x)$  des dualen Codes berechnet werden, indem  $x^n + 1$  durch  $g(x)$  modulo-2 dividiert wird. Der Quotient  $q(x)$  vom Grad  $k$  entspricht dann gerade  $h(x)$ , d.h.:

$$x^n + 1 = g(x) \cdot h(x) \quad (13.36)$$

Ähnlich wie die Bestimmung von Primfaktoren von natürlichen Zahlen ist auch die Zerlegung von  $x^n + 1$  in Faktorpolynome mit etwas pröbeln verbunden. Aus diesem Grund sind die unteilbaren Faktorpolynome von  $x^n + 1$  für  $2 \leq n \leq 15$  in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Polynom	Faktorisierung
$x^2 + 1$	$(x + 1)^2$
$x^3 + 1$	$(x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
$x^4 + 1$	$(x + 1)^4$
$x^5 + 1$	$(x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$x^6 + 1$	$(x + 1)^2 \cdot (x^2 + x + 1)^2$
$x^7 + 1$	$(x + 1) \cdot (x^3 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1)$
$x^8 + 1$	$(x + 1)^8$
$x^9 + 1$	$(x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^6 + x^3 + 1)$
$x^{10} + 1$	$(x + 1)^2 \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$
$x^{11} + 1$	$(x + 1) \cdot (x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$x^{12} + 1$	$(x + 1)^4 \cdot (x^2 + x + 1)^4$
$x^{13} + 1$	$(x + 1) \cdot (x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$x^{14} + 1$	$(x + 1)^2 \cdot (x^3 + x + 1)^2 \cdot (x^3 + x^2 + 1)^2$
$x^{15} + 1$	$(x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^4 + x + 1) \cdot (x^4 + x^3 + 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

**Tabelle 13.2:** Unteilbare Faktorpolynome von  $x^n + 1$  im GF(2)

Sämtliche aufgelisteten Faktoren sowie alle beliebigen Produkte dieser Faktoren bilden Polynome mit unterschiedlichem Grad  $m = n - k$ , welche jeweils ein Teiler von  $x^n + 1$  sind und somit als Generatorpolynom  $g(x)$  einen zyklischen  $(n, k)$ -Code bilden können. Wie schon erwähnt haben aber nicht alle diese Polynome  $g(x)$  in Bezug auf die Hammingdistanz gute Code-Eigenschaften.

### 13.3.4 Zyklische Codes und Generatormatrix

Da es sich bei zyklischen Codes um Vertreter von linearen Codes handelt, können sie auch mit Hilfe einer Generatormatrix  $G$  dargestellt werden. Es gibt verschiedene Lösungen für diese Generatormatrix  $G$ . Eine der

einfachsten besteht aus den  $k$  Zeilen  $g(x), x \cdot g(x), x^2 \cdot g(x), \dots, x^{k-1} \cdot g(x)$ . Mit diesem Ansatz ist auch gewährleistet, dass die Zeilen von  $G$  linear unabhängig sind.

Mit Linearkombinationen dieser Zeilen kann eine gefundene Matrix  $G$  auch in eine systematische Form gebracht werden. Durch solche Zeilenoperationen bleibt die Menge der Codeworte insgesamt unverändert, doch ändert sich die Zuordnung dieser Codeworte zu den Datenworten.

Mit Hilfe des Polynoms  $h(x)$  (d.h. dem Polynom des dualen Codes von  $g(x)$ ) kann in gleicher einfacher Art und Weise eine Paritätsprüfmatrix  $H$  zur Generatormatrix  $G$  erstellt werden. Für diese Paritätsprüfmatrix  $H$  gibt es ebenfalls mehrere Lösungen.

Da nun aber jedes Codewort ein Vielfaches des Generatorpolynoms  $g(x)$  ist, muss auf der Empfängerseite ein empfangenes Codewort  $\underline{c}_r$  nicht zwingend mit der Paritätsprüfmatrix  $H$  auf seine Gültigkeit überprüft werden. Stattdessen kann  $c_r(x)$  durch  $g(x)$  dividiert werden: ist  $c_r(x)$  ein gültiges Codewort, ergibt diese Division den Rest  $r(x) = 0$ .

Der Vektor  $\underline{c}_r$  sei nun ein empfangenes Codewort, welches durch einen Fehlervektor  $\underline{e}$  vom ursprünglichen Codewort  $\underline{c}$  abweicht. Folgendes wichtiges Theorem behandelt dann die Fehlerkorrektur für zyklische Codes: jedes Fehlerpolynom  $e(x)$  mit einem Hamming-Gewicht  $w(\underline{e}) < d_{\min}/2$  besitzt ein eindeutiges Syndrom-Polynom  $s(x)$  des Grades  $n - k$ , wobei für  $s(x)$  gilt:

$$s(x) \stackrel{\circ}{=} c_r(x) \pmod{g(x)} \quad (13.37)$$

Und damit zugleich:

$$s(x) \stackrel{\circ}{=} e(x) \pmod{g(x)} \quad (13.38)$$

Das Syndrompolynom  $s(x)$  kann also gewonnen werden, indem  $c_r(x)$  durch  $g(x)$  dividiert wird. Für jedes Errorpattern  $e(x)$  mit einem Hamming-Gewicht  $w(\underline{e}) < d_{\min}/2$  kann zudem das Syndrom  $s(x)$  schon im Voraus berechnet werden, indem  $e(x)$  durch  $g(x)$  dividiert wird. Diese Syndrome  $s(x)$  könnten zusammen mit den sie verursachenden Fehlervektoren in einer Tabelle abgelegt werden, welche aber für grosse Codelängen  $n$  wiederum riesig gross werden.

Zum Glück gibt es aber auch hier algorithmische Lösungen, um eine Fehlerkorrektur aufgrund eines Syndroms  $s(x) \leq 0$  vorzunehmen. Leider sind diese Algorithmen so aufwändig in der Anwendung und im mathematischen Beweis, dass sie den Rahmen dieser Einführung in fehlererkennende und fehlerkorrigierende Codes sprengen würden.

### 13.3.5 Einfache Bildung eines geordnet-systematischen zyklischen Codes

Gültige Codeworte eines zyklischen  $(n, k)$ -Codes, welche geordnet-systematisch sind, können wie folgt mathematisch beschrieben werden:

$$c(x) = x^{n-k} \cdot d(x) + p(x) \quad (13.39)$$

Damit  $c(x)$  ein gültiges zyklisches Codewort ist, muss das Generatorpolynom  $g(x)$  ein Faktor von  $c(x)$  sein, d.h. es gilt  $c(x) = q(x) \cdot g(x)$ . Wird dies in vorhergehender Gleichung (13.39) eingesetzt, ergibt sich:

$$q(x) \cdot g(x) = x^{n-k} \cdot d(x) + p(x) \quad (13.40)$$

Durch Umstellen dieser Gleichung lässt sich sofort bestimmen, wie das Polynom  $p(x)$  der dem Datenwort angefügten Paritätsbit berechnet werden muss:

$$x^{n-k} \cdot d(x) = q(x) \cdot g(x) + p(x) \quad (13.41)$$

Die Paritätsbit  $p(x)$  entsprechen also gerade dem Rest, welcher sich bei einer Division von  $x^{n-k} \cdot d(x)$  durch  $g(x)$  ergibt.

Diese Operation lässt sich in Hardware sehr einfach implementieren, was nachfolgend für einen zyklischen (14, 10)-Code mit Generatorpolynom  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$  dargestellt ist:

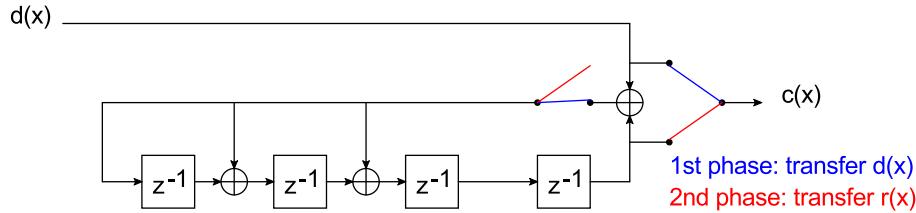


Abbildung 13.5: Implementierung eines systematischen zyklischen (14,10)-Codes

In der ersten Phase wird das 10-Bit Datenwort  $d(x)$  mit dem höchstwertigen Bit voraus (MSB first) ausgegeben und gleichzeitig die Division  $x^{n-k} \cdot d(x)$  durch  $g(x)$  durchgeführt. Sind alle Bit des Datenwertes  $d(x)$  ausgegeben, wird die Berechnung der Division gestoppt und die 4 Paritätsbits des Divisionsrests  $r(x) = p(x)$  werden den Datenbit angefügt, wodurch insgesamt das Codewort  $c(x)$  zu einem gültigen Codewort wird.

**Beispiel: zyklischer (7,4)-Code** Folgende Aufgabe soll einen Grossteil der behandelten Theorie über zyklische Codes nochmals illustrieren: implementieren Sie einen zyklischen (7, 4)-Code.

- Das Generatorpolynom  $g(x)$  muss ein Faktorpolynom von  $x^7 + 1$  mit einem Grad von  $n - k = 3$  sein.
- Durch Probieren finden wir:  $x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
- Von den zwei möglichen Generatorpolynomen dritten Grades wählen wir  $(1 + x + x^3)$
- Eine mögliche Generatormatrix wird durch die Zeilen  $g(x)$ ,  $xg(x)$ ,  $x^2g(x)$  und  $x^3g(x)$  gebildet:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Durch Matrix-Zeilensoperationen kann man diese Matrix in eine systematische Form bringen. Bei zyklischen Codes ist es dabei üblich, dass die unveränderten Datenbits als erstes mit den höchstwertigen Bit (MSBs) übertragen werden, gefolgt von den niedrigerwertigen Bit (LSBs) des Codes, welche die Paritätsbit enthalten. Die Einheitsmatrix soll sich somit im rechten Teil der Generatormatrix  $G$  befinden.

$$G_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} \text{Zeile 1} \\ \text{Zeile 2} \\ \text{Zeile 3 + Zeile 1} \\ \text{Zeile 4 + Zeile 1 + Zeile 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Es kann nun durch Bilden sämtlicher Codeworte überprüft werden, dass der gesamte Code aus insgesamt vier in Bezug auf die zyklische Verschiebung unabhängigen Codeworten besteht, welche durch eine Verschiebung wieder in sich selbst oder in ein anderes gültiges Codewort übergehen:

$$\begin{aligned} \underline{c}_0 &= [0000000] = 0 \\ \underline{c}_1 &= [1101000] = 1 + x + x^3 \\ \underline{c}_2 &= [1110010] = 1 + x + x^2 + x^5 \\ \underline{c}_3 &= [1111111] = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \end{aligned}$$

Mit dem Wissen um die Zyklizität des Codes kann auch die minimale Hammingdistanz des Codes sofort bestimmt werden. Die untenstehenden Hamminggewichte gelten sowohl für das aufgeführte Codewort selbst wie auch für sämtliche seiner zyklischen Verschiebungen:

$$\begin{aligned} \underline{c}_1: \quad w(\underline{c}_1) &= 3 \\ \underline{c}_2: \quad w(\underline{c}_2) &= 4 \\ \underline{c}_3: \quad w(\underline{c}_3) &= 7 \end{aligned}$$

- Die folgende Syndromtabelle listet sämtliche Syndrome von Einzelfehlern dieses Codes auf. Die Tabelle könnte zwar für Doppel- oder Mehrfachfehler erweitert werden. Dies macht bei diesem Beispiel aber wenig Sinn, da es sich beim vorliegenden Code um einen Hammingcode und somit einen Einzelfehler korrigierenden perfekten Code handelt, bei welchem sämtliche möglichen Syndrome  $s(x) \neq 0$  schon durch Einzelfehler abgedeckt werden. Eine sinnvolle Fehlerkorrektur wird

immer die kleinstmögliche Modifikation des empfangenen Codeworts vornehmen, um wieder ein gültiges Codewort zu erzielen und somit nicht Mehrfachfehler korrigieren, wenn schon durch eine Korrektur eines Einzelfehlers ein gültiges Codewort realisiert werden kann. Da sämtliche denkbaren Syndrome  $s(x) \neq 0$  durch die aufgelisteten Einzelfehler abgedeckt sind, wird eine Korrektur von Mehrfachfehlern gar nicht erst in Betracht gezogen.

$e(x)$	$g(x)$	$s(x)$
1	$1 + x + x^3$	1
$x$	$1 + x + x^3$	$x$
$x^2$	$1 + x + x^3$	$x^2$
$x^3$	$1 + x + x^3$	$1 + x$
$x^4$	$1 + x + x^3$	$x + x^2$
$x^5$	$1 + x + x^3$	$1 + x + x^2$
$x^6$	$1 + x + x^3$	$1 + x^2$

Der Empfänger kann nun aufgrund eines Syndroms  $s(x)$  durch Subtraktion des zugehörigen Fehlervektors  $e(x)$  vom empfangenen Codewort  $c_r(x)$  jenes gültige Codewort  $c(x)$  bilden, welches in kleinster Hammingdistanz zu  $c_r(x)$  liegt. Ist bei der Übertragung tatsächlich nur ein Einzelfehler aufgetreten, kann so das fehlerhafte  $c_r(x)$  erfolgreich korrigiert werden.

## 13.4 Zyklische Redundanzprüfung

Bei einer zyklischen Redundanzprüfung (Englisch: cyclic redundancy check, CRC) sollen Übertragungsfehler nicht korrigiert, sondern einfach nur mit möglichst kleiner Restfehlerwahrscheinlichkeit erkannt werden. Typische Anwendungsgebiete von CRC-Codes sind Datenpakete, welche vom Empfänger überprüft und im Falle eines Übertragungsfehlers nochmals angefordert werden. Dieses Verfahren wird auch ARQ-Protokoll (Englisch: Automatic Repeat reQuest) genannt.

Ist bei der Überprüfung eines Datenpakets nur die Fehlererkennung und keine Korrektur relevant, erweist es sich als praktisch, eine kurze charakteristische Signatur am Ende des Pakets anzufügen. Dadurch kann das eigentliche Datenwort ohne zusätzliche Codierung und Decodierung vom Sender zum Empfänger übertragen werden und dem Empfänger ist es freigestellt, die Korrektheit der Übertragung zu überprüfen oder die Daten ohne Decodierung ungeprüft entgegenzunehmen.

Je nachdem, ob neben der Überprüfung von zufälligen Übertragungsfehlern auch mutwilliges Verändern der Daten erkannt werden soll, werden unterschiedliche Verfahren angewendet:

- **Prüfsumme:** lineare, effiziente aber leicht manipulierbare Berechnung der Signatur (z.B. CRC).
- **Kryptographische Hash-Funktion:** nicht-lineare Berechnung der Signatur (z.B. MD5 oder SHA).

Bei einer zyklischen Redundanzprüfung wird ein Datenwort  $d(x)$  von beliebiger Länge  $k$  durch ein CRC-Polynom  $g(x)$  dividiert. Der Rest  $r(x)$  der Division wird dem Datenwort  $d(x)$  angehängt, was zusammen das Codewort  $c(x)$  ergibt. Diese Division und die Ausgabe der Prüfsumme  $r(x)$  am Ende des Datenwortes kann wie folgt realisiert werden (am Beispiel von  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ ):

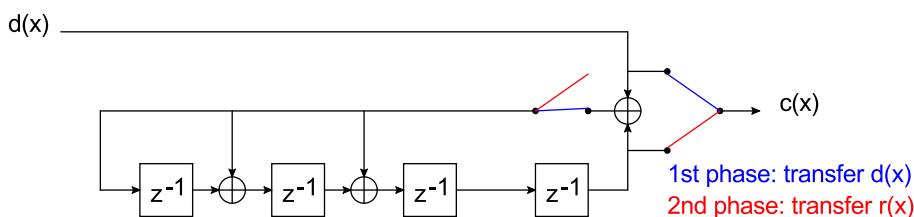


Abbildung 13.6: Implementierung der CRC-Berechnung für Polynom  $g(x) = x^4 + x^2 + x + 1$

Die CRC-Berechnung ist somit identisch mit der Erzeugung von geordnet-systematischen Codeworten eines zyklischen Blockcodes.

Auf Seite des Empfängers kann das gesamte Codewort (d.h. inkl. Prüfsumme) wieder durch  $g(x)$  geteilt werden. Ist dieser neue Divisionsrest  $r(x) = 0$ , war die CRC-Prüfung erfolgreich und es wurde ein gültiges Codewort empfangen. Ist  $r(x) \neq 0$ , sind ein oder mehrere Übertragungsfehler aufgetreten.

Die Linearität des Codes ist gewährleistet, da die Summe von zwei Codeworten, welche je durch das Generatorpolynom  $g(x)$  teilbar sind, mit Sicherheit ebenfalls ohne Rest durch  $g(x)$  geteilt werden kann.

Trotz ihres Namens ist bei der zyklischen Redundanzprüfung die Zyklizität der mit der Prüfsumme ergänzten Datenworte meist nicht vorhanden, speziell wenn eine beliebige Codewortlänge  $n$  vorgegeben wird. Oft könnte man zwar etwas krampfhaft argumentieren, dass das verwendete Generatorpolynom  $g(x)$  ein Teiler von  $x^n + 1$  ist, für ein  $n$ , welches grösser ist als die aktuelle Codewortlänge. Dann könnte man die Datenworte mit führenden Nullen ergänzen, welche keine Änderung bei der berechneten Prüfsumme verursachen, und welche in verkürzter Darstellung einfach weggelassen wurden. In Tat und Wahrheit ist aber die zyklische Eigenschaft der gebildeten Codeworte bei dieser Prüfsummenberechnung nicht wirklich relevant, weshalb man ihr auch nicht nachtrauern muss, wenn sie bei beliebigen Codewortlängen  $n$  verloren gegangen ist.

### 13.4.1 Eigenschaften der zyklischen Redundanzprüfung

- **Hammingdistanz:** die Hammingdistanz ist abhängig von der maximalen Codewortlänge  $n$ . Je grösser  $n$  gewählt wird, desto kleiner wird die Hammingdistanz. Die minimale Hammingdistanz eines CRC-Codes bei gegebenem  $n$  zu bestimmen, ist speziell für grosse  $n$  keine einfache Aufgabe und wird teilweise mit Brute-Force-Methoden durchgerechnet.
- **Erkennung einer ungeraden Anzahl von Fehlern:** Besitzt  $g(x)$  den Faktor  $x + 1$ , werden eine ungerade Anzahl Fehler mit Sicherheit erkannt. So ist garantiert, dass auch bei beliebig langen CRC-geschützten Codeworten Einzelfehler mit Sicherheit erkannt werden.
- **Erkennung von Burstfehlern:** Ist das empfangene Codewort durch einen einzelnen Burstfehler beeinträchtigt, dessen gesamte Länge kleiner ist als der Grad  $m$  des Generatorpolynoms, wird dieser mit Sicherheit erkannt. Wegen der Linearität des Codes müsste eine solche Burstsequenz durch  $g(x)$  teilbar sein, damit der Fehler unentdeckt bleibt. Unabhängig davon, wo diese Sequenz im Codewort auftaucht, wird sich der aktuelle Divisionsrest bei den fortlaufenden Divisionsschritten nie über die Länge  $m$  erstrecken und bleibt damit bis zum Schluss der Division als  $r(x) \neq 0$  erhalten.
- **Restfehler bei beliebigen Fehlervektoren:** Der Divisionsrest  $r(x)$  besitzt die Länge  $m$ . Da im Standardverfahren nur bei  $r(x) = 0$  ein gültiges Codewort vorliegt und die Wahrscheinlichkeit beliebiger Bitmuster im Divisionsrest jeweils gleich hoch ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehlervektor mit höherem Gewicht als die Hammingdistanz unerkannt bleibt:  $p_f = \frac{1}{2^m}$ . Je nach CRC-Code und Länge der Codeworte und der sich daraus ergebenden Hammingdistanz darf diese Failure-Rate des CRC-Checks noch mit der Fehlerwahrscheinlichkeit von ein- oder mehrfachen Bitfehlern im Codewort multipliziert werden, um die Restfehlerwahrscheinlichkeit  $p_{u_c}$  zu erhalten.
- **Erkennung von einer veränderten Anzahl führender Nullen:** Wie schon erwähnt, verändern führende Nullen bei einer Division der Datenworte durch  $g(x)$  die berechnete Prüfsumme nicht. Bei Datenworten mit variabler Länge kann es aber sehr störend sein, dass das Wegfallen oder Anfügen von führenden Nullen nicht erkannt werden kann. Abhilfe schafft, wenn vor der Durchführung der Division das Prüfsummenregister nicht mit lauter Nullen sondern mit einem anderen Wert (zum Beispiel alles Einer) initialisiert wird.
- **Erkennung von einer veränderten Anzahl nachfolgender Nullen:** Nicht gelöst ist im vorhergehenden Fall das Problem von nachfolgenden Nullen im Anschluss an die vom Sender übertragenen Prüfsumme  $r(x)$ . Auch diese Nullen bleiben ohne weitere Massnahmen unerkannt. Abhilfe schafft in diesem Fall, wenn der Sender die Prüfsumme  $r(x)$  invertiert überträgt. Diese Invertierung entspricht einer modulo-2 Addition des Codeworts mit dem Vektor  $v(x) = \sum_{i=0}^{m-1} 1 \cdot x^i$ . Führt nun der Empfänger zur

Redundanzprüfung eine Division bis zum Ende des Codeworts (d.h. inkl. Prüfsumme) durch, ergibt sich nicht der Rest  $r(x) = 0$  sondern der Divisionsrest von  $x^m \cdot (c(x) + v(x))$  durch  $g(x)$ , was bei einem gültigen Codewort dem Divisionsrest von  $x^m \cdot v(x)$  durch  $g(x)$  entspricht. Bei gültigen Codeworten ist sodann beim Empfänger der Divisionsrest nicht  $r(x) = 0$ , sondern ein anderes, jeweils unabhängig von den gültigen Codeworten gleichbleibendes, charakteristisches Polynom: die sogenannte Magic Number.

### 13.4.2 Beispiele von CRC-Polynomen

In nachfolgender Tabelle sind die CRC-Polynome von verschiedenen, breit eingesetzten Kommunikationsprotokollen aufgelistet. Die Tabelle wurde aus Angaben von Wikipedia [62] zusammengestellt.

CRC-Polynome von verschiedenen Anwendungen	
Name	Polynom
CRC-CCITT (CRC-4)	$x^4 + x + 1$
USB (CRC-5)	$x^5 + x^2 + 1$
Bluetooth	$x^5 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^4 + x + 1)$
SD/MMC-Card protocol (CRC-7)	$x^7 + x^3 + 1$
CRC-8 (Dallas/Maxim 1-Wire Bus)	$x^8 + x^5 + x^4 + 1$
CRC-8 (ITU-T I432.1)	$x^8 + x^2 + x + 1$
CRC-8 (AES/EBU SAE-J1850)	$x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
CAN-CRC	$x^{15} + x^{14} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + 1$
CRC-CCITT CRC-16 (ITU-T X.25)	$x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$
IBM-CRC-16	$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$
Ethernet CRC-32 (IEEE 802.3)	$x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Tabelle 13.3: CRC-Polynome von verschiedenen Anwendungen



# Anhang A

## Konstanten

### A.1 Griechische Buchstaben

A	$\alpha$	alpha	N	$\nu$	nu
B	$\beta$	beta	$\Xi$	$\xi$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	O	$o$	omikron
$\Delta$	$\delta$	delta	$\Pi$	$\pi$	pi
E	$\epsilon, \varepsilon$	epsilon	R	$\rho$	rho
Z	$\zeta$	zeta	$\Sigma$	$\sigma, \varsigma$	sigma
G	$\eta$	eta	T	$\tau$	tau
$\Theta$	$\theta, \vartheta$	theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	upsilon
I	$\iota$	iota	$\Phi$	$\phi, \varphi$	phi
K	$\kappa$	kappa	X	$\chi$	chi
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	$\Psi$	$\psi$	psi
M	$\mu$	mu	$\Omega$	$\omega$	omega

### A.2 Mathematische und physikalische Konstanten

$e$	=	2.718 281 828 459 045 235 360 287	Eulersche Zahl [23]
$\pi$	=	3.141 592 653 589 793 238 462 643	Kreiszahl $\pi$ (Archimedes-Konstante) [40]
$\epsilon_0$	=	8.854 187 812 813 $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	Elektrische Feldkonstante [21]
$\mu_0$	=	$4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 637 062 122 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$	Magnetische Feldkonstante [42]
$c_0$	=	$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 299 793 458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum [41]
$k_B$	=	$1.380 649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}}$	Boltzmann-Konstante [13]



# Anhang B

## Zehnerlogarithmus

### B.1 Berechnung von Summen, Produkten und Potenzen

$$\log_{10}(x + y) = \log_{10}(x) + \log_{10}\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$\log_{10}(x \cdot y) = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$$

$$\log_{10}(x^y) = \log_{10}(x) \cdot y$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{10}(x)$$

$$\log_{10}(x \cdot 10^y) = \log_{10}(x) + y$$

### B.2 Umrechnung auf eine andere logarithmische Basis

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$$

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} = \log_{10}(x) \cdot 2.302\,585\,093$$

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} = \log_{10}(x) \cdot 3.321\,928\,095$$

### B.3 Anwendungsbeispiel: Dezibel

Bestimmen Sie die Dämpfung  $L_{\text{dB}}$  eines Kanals in Dezibel, wenn ein Signal an dessen Ausgang noch die Leistung  $P_o = 0.002\,278 \cdot P_i$  der Eingangsleistung  $P_i$  aufweist. Die Lösung wird mit Hilfe der Tabelle bestimmt, wobei Zehnerpotenzen ausgeklammert werden können und mit linearer Interpolation die Präzision allenfalls noch gesteigert werden kann.

$$L_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(0.002\,278) \approx 10 \cdot \log_{10}(2.28 \cdot 10^{-3}) \approx 10 \cdot (0.357\,935 - 3) = -26.420\,65 \text{ [dB]}$$

$$L_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(0.002\,278) \approx 10 \cdot (0.8 \cdot \log_{10}(2.28 \cdot 10^{-3}) + 0.2 \cdot \log_{10}(2.27 \cdot 10^{-3})) = -26.424\,468 \text{ [dB]}$$

Die Präzision ist in diesem Beispiel auch bei der ersten Berechnung recht hoch, da Angaben in Dezibel in der Praxis meist auf eine oder in selteneren Fällen auf zwei Kommastellen gerundet werden.

## B.4 Tabelle des Zehnerlogarithmus

Sämtliche numerischen Werte wurden mit MATLAB-Funktion `log10` berechnet.

$x$	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
1.00	0.000 000	0.004 321	0.008 600	0.012 837	0.017 033	0.021 189	0.025 306	0.029 384	0.033 424	0.037 426
1.10	0.041 393	0.045 323	0.049 218	0.053 078	0.056 905	0.060 698	0.064 458	0.068 186	0.071 882	0.075 547
1.20	0.079 181	0.082 785	0.086 360	0.089 905	0.093 422	0.096 910	0.100 371	0.103 804	0.107 210	0.110 590
1.30	0.113 943	0.117 271	0.120 574	0.123 852	0.127 105	0.130 334	0.133 539	0.136 721	0.139 879	0.143 015
1.40	0.146 128	0.149 219	0.152 288	0.155 336	0.158 362	0.161 368	0.164 353	0.167 317	0.170 262	0.173 186
1.50	0.176 091	0.178 977	0.181 844	0.184 691	0.187 521	0.190 332	0.193 125	0.195 900	0.198 657	0.201 397
1.60	0.204 120	0.206 826	0.209 515	0.212 188	0.214 844	0.217 484	0.220 108	0.222 716	0.225 309	0.227 887
1.70	0.230 449	0.232 996	0.235 528	0.238 046	0.240 549	0.243 038	0.245 513	0.247 973	0.250 420	0.252 853
1.80	0.255 273	0.257 679	0.260 071	0.262 451	0.264 818	0.267 172	0.269 513	0.271 842	0.274 158	0.276 462
1.90	0.278 754	0.281 033	0.283 301	0.285 557	0.287 802	0.290 035	0.292 256	0.294 466	0.296 665	0.298 853
2.00	0.301 030	0.303 196	0.305 351	0.307 496	0.309 630	0.311 754	0.313 867	0.315 970	0.318 063	0.320 146
2.10	0.322 219	0.324 282	0.326 336	0.328 380	0.330 414	0.332 438	0.334 454	0.336 460	0.338 456	0.340 444
2.20	0.342 423	0.344 392	0.346 353	0.348 305	0.350 248	0.352 183	0.354 108	0.356 026	0.357 935	0.359 835
2.30	0.361 728	0.363 612	0.365 488	0.367 356	0.369 216	0.371 068	0.372 912	0.374 748	0.376 577	0.378 398
2.40	0.380 211	0.382 017	0.383 815	0.385 606	0.387 390	0.389 166	0.390 935	0.392 697	0.394 452	0.396 199
2.50	0.397 940	0.399 674	0.401 401	0.403 121	0.404 834	0.406 540	0.408 240	0.409 933	0.411 620	0.413 300
2.60	0.414 973	0.416 641	0.418 301	0.419 956	0.421 604	0.423 246	0.424 882	0.426 511	0.428 135	0.429 752
2.70	0.431 364	0.432 969	0.434 569	0.436 163	0.437 751	0.439 333	0.440 909	0.442 480	0.444 045	0.445 604
2.80	0.447 158	0.448 706	0.450 249	0.451 786	0.453 318	0.454 845	0.456 366	0.457 882	0.459 392	0.460 898
2.90	0.462 398	0.463 893	0.465 383	0.466 868	0.468 347	0.469 822	0.471 292	0.472 756	0.474 216	0.475 671
3.00	0.477 121	0.478 566	0.480 007	0.481 443	0.482 874	0.484 300	0.485 721	0.487 138	0.488 551	0.489 958
3.10	0.491 362	0.492 760	0.494 155	0.495 544	0.496 930	0.498 311	0.499 687	0.501 059	0.502 427	0.503 791
3.20	0.505 150	0.506 505	0.507 856	0.509 203	0.510 545	0.511 883	0.513 218	0.514 548	0.515 874	0.517 196
3.30	0.518 514	0.519 828	0.521 138	0.522 444	0.523 746	0.525 045	0.526 339	0.527 630	0.528 917	0.530 200
3.40	0.531 479	0.532 754	0.534 026	0.535 294	0.536 558	0.537 819	0.539 076	0.540 329	0.541 579	0.542 825
3.50	0.544 068	0.545 307	0.546 543	0.547 775	0.549 003	0.550 228	0.551 450	0.552 668	0.553 883	0.555 094
3.60	0.556 303	0.557 507	0.558 709	0.559 907	0.561 101	0.562 293	0.563 481	0.564 666	0.565 848	0.567 026
3.70	0.568 202	0.569 374	0.570 543	0.571 709	0.572 872	0.574 031	0.575 188	0.576 341	0.577 492	0.578 639
3.80	0.579 784	0.580 925	0.582 063	0.583 199	0.584 331	0.585 461	0.586 587	0.587 711	0.588 832	0.589 950
3.90	0.591 065	0.592 177	0.593 286	0.594 393	0.595 496	0.596 597	0.597 695	0.598 791	0.599 883	0.600 973
4.00	0.602 060	0.603 144	0.604 226	0.605 305	0.606 381	0.607 455	0.608 526	0.609 594	0.610 660	0.611 723
4.10	0.612 784	0.613 842	0.614 897	0.615 950	0.617 000	0.618 048	0.619 093	0.620 136	0.621 176	0.622 214
4.20	0.623 249	0.624 282	0.625 312	0.626 340	0.627 366	0.628 389	0.629 410	0.630 428	0.631 444	0.632 457
4.30	0.633 468	0.634 477	0.635 484	0.636 488	0.637 490	0.638 489	0.639 486	0.640 481	0.641 474	0.642 465
4.40	0.643 453	0.644 439	0.645 422	0.646 404	0.647 383	0.648 360	0.649 335	0.650 308	0.651 278	0.652 246
4.50	0.653 213	0.654 177	0.655 138	0.656 098	0.657 056	0.658 011	0.658 965	0.659 916	0.660 865	0.661 813
4.60	0.662 758	0.663 701	0.664 642	0.665 581	0.666 518	0.667 453	0.668 386	0.669 317	0.670 246	0.671 173
4.70	0.672 098	0.673 021	0.673 942	0.674 861	0.675 778	0.676 694	0.677 607	0.678 518	0.679 428	0.680 336
4.80	0.681 241	0.682 145	0.683 047	0.683 947	0.684 845	0.685 742	0.686 636	0.687 529	0.688 420	0.689 309
4.90	0.690 196	0.691 081	0.691 965	0.692 847	0.693 727	0.694 605	0.695 482	0.696 356	0.697 229	0.698 101

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorhergehender Seite											
$x$	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09	
5.00	0.698 970	0.699 838	0.700 704	0.701 568	0.702 431	0.703 291	0.704 151	0.705 008	0.705 864	0.706 718	
5.10	0.707 570	0.708 421	0.709 270	0.710 117	0.710 963	0.711 807	0.712 650	0.713 491	0.714 330	0.715 167	
5.20	0.716 003	0.716 838	0.717 671	0.718 502	0.719 331	0.720 159	0.720 986	0.721 811	0.722 634	0.723 456	
5.30	0.724 276	0.725 095	0.725 912	0.726 727	0.727 541	0.728 354	0.729 165	0.729 974	0.730 782	0.731 589	
5.40	0.732 394	0.733 197	0.733 999	0.734 800	0.735 599	0.736 397	0.737 193	0.737 987	0.738 781	0.739 572	
5.50	0.740 363	0.741 152	0.741 939	0.742 725	0.743 510	0.744 293	0.745 075	0.745 855	0.746 634	0.747 412	
5.60	0.748 188	0.748 963	0.749 736	0.750 508	0.751 279	0.752 048	0.752 816	0.753 583	0.754 348	0.755 112	
5.70	0.755 875	0.756 636	0.757 396	0.758 155	0.758 912	0.759 668	0.760 422	0.761 176	0.761 928	0.762 679	
5.80	0.763 428	0.764 176	0.764 923	0.765 669	0.766 413	0.767 156	0.767 898	0.768 638	0.769 377	0.770 115	
5.90	0.770 852	0.771 587	0.772 322	0.773 055	0.773 786	0.774 517	0.775 246	0.775 974	0.776 701	0.777 427	
6.00	0.778 151	0.778 874	0.779 596	0.780 317	0.781 037	0.781 755	0.782 473	0.783 189	0.783 904	0.784 617	
6.10	0.785 330	0.786 041	0.786 751	0.787 460	0.788 168	0.788 875	0.789 581	0.790 285	0.790 988	0.791 691	
6.20	0.792 392	0.793 092	0.793 790	0.794 488	0.795 185	0.795 880	0.796 574	0.797 268	0.797 960	0.798 651	
6.30	0.799 341	0.800 029	0.800 717	0.801 404	0.802 089	0.802 774	0.803 457	0.804 139	0.804 821	0.805 501	
6.40	0.806 180	0.806 858	0.807 535	0.808 211	0.808 886	0.809 560	0.810 233	0.810 904	0.811 575	0.812 245	
6.50	0.812 913	0.813 581	0.814 248	0.814 913	0.815 578	0.816 241	0.816 904	0.817 565	0.818 226	0.818 885	
6.60	0.819 544	0.820 201	0.820 858	0.821 514	0.822 168	0.822 822	0.823 474	0.824 126	0.824 776	0.825 426	
6.70	0.826 075	0.826 723	0.827 369	0.828 015	0.828 660	0.829 304	0.829 947	0.830 589	0.831 230	0.831 870	
6.80	0.832 509	0.833 147	0.833 784	0.834 421	0.835 056	0.835 691	0.836 324	0.836 957	0.837 588	0.838 219	
6.90	0.838 849	0.839 478	0.840 106	0.840 733	0.841 359	0.841 985	0.842 609	0.843 233	0.843 855	0.844 477	
7.00	0.845 098	0.845 718	0.846 337	0.846 955	0.847 573	0.848 189	0.848 805	0.849 419	0.850 033	0.850 646	
7.10	0.851 258	0.851 870	0.852 480	0.853 090	0.853 698	0.854 306	0.854 913	0.855 519	0.856 124	0.856 729	
7.20	0.857 332	0.857 935	0.858 537	0.859 138	0.859 739	0.860 338	0.860 937	0.861 534	0.862 131	0.862 728	
7.30	0.863 323	0.863 917	0.864 511	0.865 104	0.865 696	0.866 287	0.866 878	0.867 467	0.868 056	0.868 644	
7.40	0.869 232	0.869 818	0.870 404	0.870 989	0.871 573	0.872 156	0.872 739	0.873 321	0.873 902	0.874 482	
7.50	0.875 061	0.875 640	0.876 218	0.876 795	0.877 371	0.877 947	0.878 522	0.879 096	0.879 669	0.880 242	
7.60	0.880 814	0.881 385	0.881 955	0.882 525	0.883 093	0.883 661	0.884 229	0.884 795	0.885 361	0.885 926	
7.70	0.886 491	0.887 054	0.887 617	0.888 179	0.888 741	0.889 302	0.889 862	0.890 421	0.890 980	0.891 537	
7.80	0.892 095	0.892 651	0.893 207	0.893 762	0.894 316	0.894 870	0.895 423	0.895 975	0.896 526	0.897 077	
7.90	0.897 627	0.898 176	0.898 725	0.899 273	0.899 821	0.900 367	0.900 913	0.901 458	0.902 003	0.902 547	
8.00	0.903 090	0.903 633	0.904 174	0.904 716	0.905 256	0.905 796	0.906 335	0.906 874	0.907 411	0.907 949	
8.10	0.908 485	0.909 021	0.909 556	0.910 091	0.910 624	0.911 158	0.911 690	0.912 222	0.912 753	0.913 284	
8.20	0.913 814	0.914 343	0.914 872	0.915 400	0.915 927	0.916 454	0.916 980	0.917 506	0.918 030	0.918 555	
8.30	0.919 078	0.919 601	0.920 123	0.920 645	0.921 166	0.921 686	0.922 206	0.922 725	0.923 244	0.923 762	
8.40	0.924 279	0.924 796	0.925 312	0.925 828	0.926 342	0.926 857	0.927 370	0.927 883	0.928 396	0.928 908	
8.50	0.929 419	0.929 930	0.930 440	0.930 949	0.931 458	0.931 966	0.932 474	0.932 981	0.933 487	0.933 993	
8.60	0.934 498	0.935 003	0.935 507	0.936 011	0.936 514	0.937 016	0.937 518	0.938 019	0.938 520	0.939 020	
8.70	0.939 519	0.940 018	0.940 516	0.941 014	0.941 511	0.942 008	0.942 504	0.943 000	0.943 495	0.943 989	
8.80	0.944 483	0.944 976	0.945 469	0.945 961	0.946 452	0.946 943	0.947 434	0.947 924	0.948 413	0.948 902	
8.90	0.949 390	0.949 878	0.950 365	0.950 851	0.951 338	0.951 823	0.952 308	0.952 792	0.953 276	0.953 760	
9.00	0.954 243	0.954 725	0.955 207	0.955 688	0.956 168	0.956 649	0.957 128	0.957 607	0.958 086	0.958 564	
9.10	0.959 041	0.959 518	0.959 995	0.960 471	0.960 946	0.961 421	0.961 895	0.962 369	0.962 843	0.963 316	
9.20	0.963 788	0.964 260	0.964 731	0.965 202	0.965 672	0.966 142	0.966 611	0.967 080	0.967 548	0.968 016	
9.30	0.968 483	0.968 950	0.969 416	0.969 882	0.970 347	0.970 812	0.971 276	0.971 740	0.972 203	0.972 666	
9.40	0.973 128	0.973 590	0.974 051	0.974 512	0.974 972	0.975 432	0.975 891	0.976 350	0.976 808	0.977 266	
9.50	0.977 724	0.978 181	0.978 637	0.979 093	0.979 548	0.980 003	0.980 458	0.980 912	0.981 366	0.981 819	
9.60	0.982 271	0.982 723	0.983 175	0.983 626	0.984 077	0.984 527	0.984 977	0.985 426	0.985 875	0.986 324	
9.70	0.986 772	0.987 219	0.987 666	0.988 113	0.988 559	0.989 005	0.989 450	0.989 895	0.990 339	0.990 783	
9.80	0.991 226	0.991 669	0.992 111	0.992 554	0.992 995	0.993 436	0.993 877	0.994 317	0.994 757	0.995 196	
9.90	0.995 635	0.996 074	0.996 512	0.996 949	0.997 386	0.997 823	0.998 259	0.998 695	0.999 131	0.999 565	



# Anhang C

## Zweierlogarithmus

### C.1 Berechnung von Summen, Produkten und Potenzen

$$\log_2(x + y) = \log_2(x) + \log_2\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$\log_2(x \cdot y) = \log_2(x) + \log_2(y)$$

$$\log_2(x^y) = \log_2(x) \cdot y$$

$$\log_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_2(x)$$

$$\log_2(x \cdot 2^y) = \log_2(x) + y$$

### C.2 Umrechnung auf eine andere logarithmische Basis

$$\log_a(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(a)}$$

$$\ln(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(e)} = \log_2(x) \cdot 0.693\,147\,18$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(10)} = \log_2(x) \cdot 0.301\,030\,00$$

### C.3 Anwendungsbeispiel: Informationsgehalt

Bestimmen Sie den Informationsgehalt  $I(A)$  eines Ereignisses  $A$  mit Auftretenswahrscheinlichkeit  $P(A) = 0.0137$ . Die Lösung wird mit Hilfe der Tabelle bestimmt, wobei durch Anwenden von linearer Interpolation, geeigneter logarithmischer Gesetze oder Gebrauch von beidem die Präzision gesteigert werden kann.

$$I(A) = -\log_2(0.0137) \approx -\log_2(0.014) \approx 6.158\,429 \text{ [bit]}$$

$$I(A) = -\log_2(0.0137) \approx -0.7 \cdot \log_2(0.014) - 0.3 \cdot \log_2(0.013) \approx 6.190\,503\,8 \text{ [bit]}$$

$$I(A) = -\log_2(0.0137) = -\log_2(0.8768 \cdot 2^{-6}) = 6 - \log_2(0.877) \approx 6.189\,351 \text{ [bit]}$$

$$I(A) = -\log_2(0.0137) = -\log_2(0.8768 \cdot 2^{-6}) \approx 6 - 0.8 \cdot \log_2(0.877) - 0.2 \cdot \log_2(0.876) \approx 6.189\,680\,2 \text{ [bit]}$$

Mit der letzten Berechnung wurde das Ergebnis am präzisesten bestimmt: es ist bis zur zweitletzten Stelle korrekt.

## C.4 Tabelle des Zweierlogarithmus

Sämtliche numerischen Werte wurden mit der MATLAB-Funktion `log2` berechnet.

$x$	+0.000	+0.001	+0.002	+0.003	+0.004	+0.005	+0.006	+0.007	+0.008	+0.009
0.000	$-\infty$	-9.965 784	-8.965 784	-8.380 822	-7.965 784	-7.643 856	-7.380 822	-7.158 429	-6.965 784	-6.795 859
0.010	-6.643 856	-6.506 353	-6.380 822	-6.265 345	-6.158 429	-6.058 894	-5.965 784	-5.878 321	-5.795 859	-5.717 857
0.020	-5.643 856	-5.573 467	-5.506 353	-5.442 222	-5.380 822	-5.321 928	-5.265 345	-5.210 897	-5.158 429	-5.107 803
0.030	-5.058 894	-5.011 588	-4.965 784	-4.921 390	-4.878 321	-4.836 501	-4.795 859	-4.756 331	-4.717 857	-4.680 382
0.040	-4.643 856	-4.608 232	-4.573 467	-4.539 520	-4.506 353	-4.473 931	-4.442 222	-4.411 195	-4.380 822	-4.351 074
0.050	-4.321 928	-4.293 359	-4.265 345	-4.237 864	-4.210 897	-4.184 425	-4.158 429	-4.132 894	-4.107 803	-4.083 141
0.060	-4.058 894	-4.035 047	-4.011 588	-3.988 504	-3.965 784	-3.943 416	-3.921 390	-3.899 695	-3.878 321	-3.857 260
0.070	-3.836 501	-3.816 037	-3.795 859	-3.775 960	-3.756 331	-3.736 966	-3.717 857	-3.698 998	-3.680 382	-3.662 004
0.080	-3.643 856	-3.625 934	-3.608 232	-3.590 745	-3.573 467	-3.556 393	-3.539 520	-3.522 841	-3.506 353	-3.490 051
0.090	-3.473 931	-3.457 990	-3.442 222	-3.426 625	-3.411 195	-3.395 929	-3.380 822	-3.365 871	-3.351 074	-3.336 428
0.100	-3.321 928	-3.307 573	-3.293 359	-3.279 284	-3.265 345	-3.251 539	-3.237 864	-3.224 317	-3.210 897	-3.197 600
0.110	-3.184 425	-3.171 368	-3.158 429	-3.145 605	-3.132 894	-3.120 294	-3.107 803	-3.095 420	-3.083 141	-3.070 967
0.120	-3.058 894	-3.046 921	-3.035 047	-3.023 270	-3.011 588	-3.000 000	-2.988 504	-2.977 100	-2.965 784	-2.954 557
0.130	-2.943 416	-2.932 361	-2.921 390	-2.910 502	-2.899 695	-2.888 969	-2.878 321	-2.867 752	-2.857 260	-2.846 843
0.140	-2.836 501	-2.826 233	-2.816 037	-2.805 913	-2.795 859	-2.785 875	-2.775 960	-2.766 112	-2.756 331	-2.746 616
0.150	-2.736 966	-2.727 380	-2.717 857	-2.708 396	-2.698 998	-2.689 660	-2.680 382	-2.671 164	-2.662 004	-2.652 901
0.160	-2.643 856	-2.634 867	-2.625 934	-2.617 056	-2.608 232	-2.599 462	-2.590 745	-2.582 080	-2.573 467	-2.564 905
0.170	-2.556 393	-2.547 932	-2.539 520	-2.531 156	-2.522 841	-2.514 573	-2.506 353	-2.498 179	-2.490 051	-2.481 969
0.180	-2.473 931	-2.465 938	-2.457 990	-2.450 084	-2.442 222	-2.434 403	-2.426 625	-2.418 890	-2.411 195	-2.403 542
0.190	-2.395 929	-2.388 355	-2.380 822	-2.373 327	-2.365 871	-2.358 454	-2.351 074	-2.343 732	-2.336 428	-2.329 160
0.200	-2.321 928	-2.314 733	-2.307 573	-2.300 448	-2.293 359	-2.286 304	-2.279 284	-2.272 297	-2.265 345	-2.258 425
0.210	-2.251 539	-2.244 685	-2.237 864	-2.231 075	-2.224 317	-2.217 591	-2.210 897	-2.204 233	-2.197 600	-2.190 997
0.220	-2.184 425	-2.177 882	-2.171 368	-2.164 884	-2.158 429	-2.152 003	-2.145 605	-2.139 236	-2.132 894	-2.126 580
0.230	-2.120 294	-2.114 035	-2.107 803	-2.101 598	-2.095 420	-2.089 267	-2.083 141	-2.077 041	-2.070 967	-2.064 917
0.240	-2.058 894	-2.052 895	-2.046 921	-2.040 972	-2.035 047	-2.029 146	-2.023 270	-2.017 417	-2.011 588	-2.005 782
0.250	-2.000 000	-1.994 241	-1.988 504	-1.982 791	-1.977 100	-1.971 431	-1.965 784	-1.960 160	-1.954 557	-1.948 976
0.260	-1.943 416	-1.937 878	-1.932 361	-1.926 865	-1.921 390	-1.915 936	-1.910 502	-1.905 088	-1.899 695	-1.894 322
0.270	-1.888 969	-1.883 635	-1.878 321	-1.873 027	-1.867 752	-1.862 496	-1.857 260	-1.852 042	-1.846 843	-1.841 663
0.280	-1.836 501	-1.831 358	-1.826 233	-1.821 126	-1.816 037	-1.810 966	-1.805 913	-1.800 877	-1.795 859	-1.790 859
0.290	-1.785 875	-1.780 909	-1.775 960	-1.771 027	-1.766 112	-1.761 213	-1.756 331	-1.751 465	-1.746 616	-1.741 783
0.300	-1.736 966	-1.732 165	-1.727 380	-1.722 610	-1.717 857	-1.713 119	-1.708 396	-1.703 689	-1.698 998	-1.694 321
0.310	-1.689 660	-1.685 014	-1.680 382	-1.675 765	-1.671 164	-1.666 576	-1.662 004	-1.657 445	-1.652 901	-1.648 372
0.320	-1.643 856	-1.639 355	-1.634 867	-1.630 394	-1.625 934	-1.621 488	-1.617 056	-1.612 637	-1.608 232	-1.603 841
0.330	-1.599 462	-1.595 097	-1.590 745	-1.586 406	-1.582 080	-1.577 767	-1.573 467	-1.569 180	-1.564 905	-1.560 643
0.340	-1.556 393	-1.552 156	-1.547 932	-1.543 720	-1.539 520	-1.535 332	-1.531 156	-1.526 992	-1.522 841	-1.518 701
0.350	-1.514 573	-1.510 457	-1.506 353	-1.502 260	-1.498 179	-1.494 109	-1.490 051	-1.486 004	-1.481 969	-1.477 944
0.360	-1.473 931	-1.469 929	-1.465 938	-1.461 959	-1.457 990	-1.454 032	-1.450 084	-1.446 148	-1.442 222	-1.438 307
0.370	-1.434 403	-1.430 509	-1.426 625	-1.422 752	-1.418 890	-1.415 037	-1.411 195	-1.407 364	-1.403 542	-1.399 730
0.380	-1.395 929	-1.392 137	-1.388 355	-1.384 584	-1.380 822	-1.377 070	-1.373 327	-1.369 595	-1.365 871	-1.362 158
0.390	-1.358 454	-1.354 759	-1.351 074	-1.347 399	-1.343 732	-1.340 075	-1.336 428	-1.332 789	-1.329 160	-1.325 539
0.400	-1.321 928	-1.318 326	-1.314 733	-1.311 148	-1.307 573	-1.304 006	-1.300 448	-1.296 899	-1.293 359	-1.289 827
0.410	-1.286 304	-1.282 790	-1.279 284	-1.275 786	-1.272 297	-1.268 817	-1.265 345	-1.261 881	-1.258 425	-1.254 978
0.420	-1.251 539	-1.248 108	-1.244 685	-1.241 270	-1.237 864	-1.234 465	-1.231 075	-1.227 692	-1.224 317	-1.220 950
0.430	-1.217 591	-1.214 240	-1.210 897	-1.207 561	-1.204 233	-1.200 913	-1.197 600	-1.194 295	-1.190 997	-1.187 707
0.440	-1.184 425	-1.181 149	-1.177 882	-1.174 621	-1.171 368	-1.168 123	-1.164 884	-1.161 653	-1.158 429	-1.155 213
0.450	-1.152 003	-1.148 801	-1.145 605	-1.142 417	-1.139 236	-1.136 062	-1.132 894	-1.129 734	-1.126 580	-1.123 434
0.460	-1.120 294	-1.117 161	-1.114 035	-1.110 916	-1.107 803	-1.104 697	-1.101 598	-1.098 506	-1.095 420	-1.092 340
0.470	-1.089 267	-1.086 201	-1.083 141	-1.080 088	-1.077 041	-1.074 001	-1.070 967	-1.067 939	-1.064 917	-1.061 902
0.480	-1.058 894	-1.055 891	-1.052 895	-1.049 905	-1.046 921	-1.043 943	-1.040 972	-1.038 006	-1.035 047	-1.032 094
0.490	-1.029 146	-1.026 205	-1.023 270	-1.020 340	-1.017 417	-1.014 500	-1.011 588	-1.008 682	-1.005 782	-1.002 888

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorhergehender Seite										
$x$	+0.000	+0.001	+0.002	+0.003	+0.004	+0.005	+0.006	+0.007	+0.008	+0.009
0.500	-1.000 000	-0.997 117	-0.994 241	-0.991 370	-0.988 504	-0.985 645	-0.982 791	-0.979 942	-0.977 100	-0.974 262
0.510	-0.971 431	-0.968 605	-0.965 784	-0.962 969	-0.960 160	-0.957 356	-0.954 557	-0.951 764	-0.948 976	-0.946 194
0.520	-0.943 416	-0.940 645	-0.937 878	-0.935 117	-0.932 361	-0.929 611	-0.926 865	-0.924 125	-0.921 390	-0.918 660
0.530	-0.915 936	-0.913 216	-0.910 502	-0.907 793	-0.905 088	-0.902 389	-0.899 695	-0.897 006	-0.894 322	-0.891 643
0.540	-0.888 969	-0.886 300	-0.883 635	-0.880 976	-0.878 321	-0.875 672	-0.873 027	-0.870 387	-0.867 752	-0.865 122
0.550	-0.862 496	-0.859 876	-0.857 260	-0.854 649	-0.852 042	-0.849 440	-0.846 843	-0.844 251	-0.841 663	-0.839 080
0.560	-0.836 501	-0.833 927	-0.831 358	-0.828 793	-0.826 233	-0.823 677	-0.821 126	-0.818 579	-0.816 037	-0.813 499
0.570	-0.810 966	-0.808 437	-0.805 913	-0.803 393	-0.800 877	-0.798 366	-0.795 859	-0.793 357	-0.790 859	-0.788 365
0.580	-0.785 875	-0.783 390	-0.780 909	-0.778 432	-0.775 960	-0.773 491	-0.771 027	-0.768 568	-0.766 112	-0.763 660
0.590	-0.761 213	-0.758 770	-0.756 331	-0.753 896	-0.751 465	-0.749 038	-0.746 616	-0.744 197	-0.741 783	-0.739 372
0.600	-0.736 966	-0.734 563	-0.732 165	-0.729 770	-0.727 380	-0.724 993	-0.722 610	-0.720 232	-0.717 857	-0.715 486
0.610	-0.713 119	-0.710 756	-0.708 396	-0.706 041	-0.703 689	-0.701 342	-0.698 998	-0.696 658	-0.694 321	-0.691 989
0.620	-0.689 660	-0.687 335	-0.685 014	-0.682 696	-0.680 382	-0.678 072	-0.675 765	-0.673 463	-0.671 164	-0.668 868
0.630	-0.666 576	-0.664 288	-0.662 004	-0.659 723	-0.657 445	-0.655 172	-0.652 901	-0.650 635	-0.648 372	-0.646 112
0.640	-0.643 856	-0.641 604	-0.639 355	-0.637 109	-0.634 867	-0.632 629	-0.630 394	-0.628 162	-0.625 934	-0.623 710
0.650	-0.621 488	-0.619 271	-0.617 056	-0.614 845	-0.612 637	-0.610 433	-0.608 232	-0.606 035	-0.603 841	-0.601 650
0.660	-0.599 462	-0.597 278	-0.595 097	-0.592 919	-0.590 745	-0.588 574	-0.586 406	-0.584 241	-0.582 080	-0.579 922
0.670	-0.577 767	-0.575 615	-0.573 467	-0.571 322	-0.569 180	-0.567 041	-0.564 905	-0.562 772	-0.560 643	-0.558 517
0.680	-0.556 393	-0.554 273	-0.552 156	-0.550 043	-0.547 932	-0.545 824	-0.543 720	-0.541 618	-0.539 520	-0.537 424
0.690	-0.535 332	-0.533 242	-0.531 156	-0.529 073	-0.526 992	-0.524 915	-0.522 841	-0.520 769	-0.518 701	-0.516 636
0.700	-0.514 573	-0.512 514	-0.510 457	-0.508 403	-0.506 353	-0.504 305	-0.502 260	-0.500 218	-0.498 179	-0.496 142
0.710	-0.494 109	-0.492 079	-0.490 051	-0.488 026	-0.486 004	-0.483 985	-0.481 969	-0.479 955	-0.477 944	-0.475 936
0.720	-0.473 931	-0.471 929	-0.469 929	-0.467 932	-0.465 938	-0.463 947	-0.461 959	-0.459 973	-0.457 990	-0.456 009
0.730	-0.454 032	-0.452 057	-0.450 084	-0.448 115	-0.446 148	-0.444 184	-0.442 222	-0.440 263	-0.438 307	-0.436 354
0.740	-0.434 403	-0.432 455	-0.430 509	-0.428 566	-0.426 625	-0.424 688	-0.422 752	-0.420 820	-0.418 890	-0.416 962
0.750	-0.415 037	-0.413 115	-0.411 195	-0.409 278	-0.407 364	-0.405 451	-0.403 542	-0.401 635	-0.399 730	-0.397 828
0.760	-0.395 929	-0.394 032	-0.392 137	-0.390 245	-0.388 355	-0.386 468	-0.384 584	-0.382 702	-0.380 822	-0.378 944
0.770	-0.377 070	-0.375 197	-0.373 327	-0.371 460	-0.369 595	-0.367 732	-0.365 871	-0.364 013	-0.362 158	-0.360 305
0.780	-0.358 454	-0.356 606	-0.354 759	-0.352 916	-0.351 074	-0.349 235	-0.347 399	-0.345 564	-0.343 732	-0.341 903
0.790	-0.340 075	-0.338 250	-0.336 428	-0.334 607	-0.332 789	-0.330 973	-0.329 160	-0.327 348	-0.325 539	-0.323 733
0.800	-0.321 928	-0.320 126	-0.318 326	-0.316 528	-0.314 733	-0.312 939	-0.311 148	-0.309 359	-0.307 573	-0.305 788
0.810	-0.304 006	-0.302 226	-0.300 448	-0.298 673	-0.296 899	-0.295 128	-0.293 359	-0.291 592	-0.289 827	-0.288 065
0.820	-0.286 304	-0.284 546	-0.282 790	-0.281 036	-0.279 284	-0.277 534	-0.275 786	-0.274 041	-0.272 297	-0.270 556
0.830	-0.268 817	-0.267 080	-0.265 345	-0.263 612	-0.261 881	-0.260 152	-0.258 425	-0.256 700	-0.254 978	-0.253 257
0.840	-0.251 539	-0.249 822	-0.248 108	-0.246 395	-0.244 685	-0.242 977	-0.241 270	-0.239 566	-0.237 864	-0.236 164
0.850	-0.234 465	-0.232 769	-0.231 075	-0.229 382	-0.227 692	-0.226 004	-0.224 317	-0.222 633	-0.220 950	-0.219 270
0.860	-0.217 591	-0.215 915	-0.214 240	-0.212 568	-0.210 897	-0.209 228	-0.207 561	-0.205 896	-0.204 233	-0.202 572
0.870	-0.200 913	-0.199 255	-0.197 600	-0.195 946	-0.194 295	-0.192 645	-0.190 997	-0.189 351	-0.187 707	-0.186 065
0.880	-0.184 425	-0.182 786	-0.181 149	-0.179 515	-0.177 882	-0.176 251	-0.174 621	-0.172 994	-0.171 368	-0.169 745
0.890	-0.168 123	-0.166 503	-0.164 884	-0.163 268	-0.161 653	-0.160 040	-0.158 429	-0.156 820	-0.155 213	-0.153 607
0.900	-0.152 003	-0.150 401	-0.148 801	-0.147 202	-0.145 605	-0.144 010	-0.142 417	-0.140 826	-0.139 236	-0.137 648
0.910	-0.136 062	-0.134 477	-0.132 894	-0.131 313	-0.129 734	-0.128 156	-0.126 580	-0.125 006	-0.123 434	-0.121 863
0.920	-0.120 294	-0.118 727	-0.117 161	-0.115 597	-0.114 035	-0.112 475	-0.110 916	-0.109 359	-0.107 803	-0.106 249
0.930	-0.104 697	-0.103 147	-0.101 598	-0.100 051	-0.098 506	-0.096 962	-0.095 420	-0.093 879	-0.092 340	-0.090 803
0.940	-0.089 267	-0.087 733	-0.086 201	-0.084 670	-0.083 141	-0.081 614	-0.080 088	-0.078 564	-0.077 041	-0.075 520
0.950	-0.074 001	-0.072 483	-0.070 967	-0.069 452	-0.067 939	-0.066 427	-0.064 917	-0.063 409	-0.061 902	-0.060 397
0.960	-0.058 894	-0.057 392	-0.055 891	-0.054 392	-0.052 895	-0.051 399	-0.049 905	-0.048 412	-0.046 921	-0.045 431
0.970	-0.043 943	-0.042 457	-0.040 972	-0.039 488	-0.038 006	-0.036 526	-0.035 047	-0.033 570	-0.032 094	-0.030 619
0.980	-0.029 146	-0.027 675	-0.026 205	-0.024 737	-0.023 270	-0.021 804	-0.020 340	-0.018 878	-0.017 417	-0.015 958
0.990	-0.014 500	-0.013 043	-0.011 588	-0.010 134	-0.008 682	-0.007 232	-0.005 782	-0.004 335	-0.002 888	-0.001 443



## Anhang D

# Nützliche trigonometrische Formeln

### D.1 Eulersche Darstellung

$$\begin{aligned}
 e^{j\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - j\frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^4}{24} + j\frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^6}{720} - j\frac{\varphi^7}{5040} + \frac{\varphi^8}{40320} + j\frac{\varphi^9}{362880} - \dots \\
 \cos(\varphi) &= \Re(e^{j\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720} + \frac{\varphi^8}{40320} - \dots \\
 \sin(\varphi) &= \Im(e^{j\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^7}{5040} + \frac{\varphi^9}{362880} - \dots \\
 e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \\
 \cos(\varphi) &= \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \\
 \sin(\varphi) &= \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})
 \end{aligned}$$

Mit den letzten drei Formeln sind alle nachfolgenden trigonometrischen Umformungen leicht zu beweisen.

### D.2 Summe zweier Winkel

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
 \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
 \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & \sin(2\alpha) &= 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
 \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\
 \cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) &= -\sin(\alpha) & \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) &= \cos(\alpha) \\
 \cos(\alpha+\pi) &= -\cos(\alpha) & \sin(\alpha+\pi) &= -\sin(\alpha) \\
 \cos(\alpha+\frac{3\pi}{2}) &= \sin(\alpha) & \sin(\alpha+\frac{3\pi}{2}) &= -\cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

### D.3 Produkte von trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
 \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\alpha)) \\
 \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\
 \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha)) \\
 \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \\
 \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1
 \end{aligned}$$

### D.4 Differentiation

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \cos(\omega t) &= -\omega \cdot \sin(\omega t) \\
 \frac{d}{dt} \sin(\omega t) &= +\omega \cdot \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$



# Anhang E

# Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

## E.1 Berechnung der Fourier-Reihe

### E.1.1 Trigonometrische Form der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) + v_n \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) \\u_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t) dt \\v_n &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 \cdot t) dt\end{aligned}$$

### E.1.2 Harmonische Form der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}x(t) &= r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot \cos(2\pi n f_0 \cdot t + \varphi_n) \\r_0 &= \frac{u_0}{2} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \\r_{n>0} &= \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \\\varphi_n &= \arg(u_n - j \cdot v_n)\end{aligned}$$

### E.1.3 Komplexe Form der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j n 2\pi f_0 \cdot t} \\c_n &= \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j n 2\pi f_0 \cdot t} dt\end{aligned}$$

## E.2 Eigenschaften der komplexen Fourier-Reihe

Koeffizienten mit Real- und Imaginärteil:

$$c_n = a_n + jb_n$$

Umrechnung aus trigonometrischer Form:

$$c_0 = \frac{u_0}{2}$$

$$c_{n>0} = \frac{u_n}{2} - j \frac{v_n}{2}$$

$$c_{n<0} = \frac{u_{|n|}}{2} + j \frac{v_{|n|}}{2}$$

Für reellwertige Signale  $x(t) = \Re(x(t))$ :

$$c_{-n} = c_n^*$$

$$c_{-n} = a_n - jb_n$$

Für reellwertige gerade Signale  $x(-t) = \Re(x(t))$ :

$$c_{-n} = c_n = a_n$$

Für reellwertige ungerade Signale  $x(-t) = -\Re(x(t))$ :

$$c_{-n} = -c_n = -jb_n$$

Leistungsberechnung mit **Satz von Parseval**:

$$\overline{P}_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

### E.3 Berechnung der Fourier-Transformation und ihrer Rücktransformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

### E.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Aufspaltung in Amplitude und Phase:

$$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Für reellwertige Signale  $x(t) = \Re(x(t))$ :

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

Reellwertig gerade Signale  $x(-t) = \Re(x(t))$ :

$$X(-\omega) = X(\omega) = \Re(X(\omega))$$

Reellwertig ungerade Signale  $x(-t) = -\Re(x(t))$ :

$$X(-\omega) = -X(\omega) = -\Im(X(\omega))$$

Energieberechnung mit **Satz von Plancherel**:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Linearität (Überlagerungssatz):

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

Verschiebung im Zeitbereich:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Verschiebung im Frequenzbereich:

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0)$$

Modulationssatz:

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} (X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0))$$

$$x(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} (X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0))$$

Skalierung:

$$x(k \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|k|} \cdot X\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

Zeitumkehrung:

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega)$$

Vertauschen von  $x(\cdot)$  und  $X(\cdot)$ :

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot x(-\omega)$$

Differentiation im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \cdot X(\omega)$$

Integration im Zeitbereich:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \cdot \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right)$$

Multiplikation im Zeitbereich:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Faltung im Zeitbereich:

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

## E.5 Fourier-Transformation von Einzelpulsen

Nachfolgend sind die Fourier-Transformierten von ein paar wichtigen Einzelpulsen aufgeführt. Um die Formeln im Zeit- und Frequenzbereich einfach zu halten, beinhalten der Rechteck- und der Dreieckpuls über die Pulsdauer  $\tau$  einen DC-Anteil, während der Sägezahn DC-frei ist.

### Rechteckpuls

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad X(\omega) = \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

### Dreieckpuls

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 \cdot |t|}{\tau} & \text{für } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad X(\omega) = \frac{\tau}{2} \cdot \left( \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right)^2$$

### Sägezahn

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot t}{\tau} & \text{für } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad X(\omega) = j\tau \frac{\cos(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} - j\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}$$

### Sinc Puls

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}t)}{\frac{\omega_0}{2}t} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} & \text{für } |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{für } |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \end{cases}$$

### Raised Cosine Puls ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}t)}{\frac{\omega_0}{2}t} \cdot \frac{\cos(\alpha \frac{\omega_0}{2}t)}{1 - (2\alpha \frac{\omega_0 t}{2\pi})^2} \quad \circ \xrightarrow{\mathcal{F}} \bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha) \frac{\omega_0}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} - 1 \right) \right) & \text{für } (1 - \alpha) \frac{\omega_0}{2} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\omega_0}{2} \\ 0 & \text{für } |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\omega_0}{2} \end{cases}$$

## E.6 Periodisch fortgesetzte Einzelpulse

Das Signal  $x_T(t)$  ist der mit der Periode  $T$  periodisch fortgesetzte Einzelpuls  $x(t)$ . Dann ergibt sich folgende Fourierreihe:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(\frac{2\pi n}{T})}{T} \cdot e^{\frac{j2\pi n}{T} \cdot t} \quad \text{mit den Koeffizienten} \quad c_n = \frac{X(\frac{2\pi n}{T})}{T}$$

Mit den von oben bekannten Einzelpulsen ergeben sich folgende Beispiele von Fourierreihen:

**Rechteckfolge:**

$$c_n = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n \frac{\tau}{T}}$$

Beispiel  $T = 2\tau$ :  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

**Dreieckfolge:**

$$c_n = \frac{\tau}{2T} \cdot \left( \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{2T})}{\pi n \frac{\tau}{2T}} \right)^2$$

Beispiel  $T = \tau$ :  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{2}{\pi^2 n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

**Sägezahnfolge:**

$$c_n = j \frac{1}{\pi n} \cdot \cos(\pi n \frac{\tau}{T}) - j \frac{1}{\pi n} \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{(\pi n \frac{\tau}{T})}$$

Beispiel  $T = \tau$ :  $c_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ j \cdot \frac{(-1)^n}{\pi n} & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$

## E.7 Fouriertransformation einer Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j n \omega_0 \cdot t} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \cdot \delta(\omega - n \omega_0)$$

Beispiele:

$1$ $e^{j\omega_0 t}$ $\cos(\omega_0 t)$ $\sin(\omega_0 t)$	$\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ $\xrightarrow{\mathcal{F}}$	$2\pi \cdot \delta(\omega)$ $2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$ $\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$ $-j \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + j \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$
--	--	--

## Anhang F

# Besselfunktion erster Art

### F.1 Berechnung mit Reihenentwicklung

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2k+n}}{k! \cdot (k+n)!}$$

### F.2 Eigenschaften

$$J_n(-\beta) = (-1)^n \cdot J_n(\beta)$$

$$J_{-n}(\beta) = J_n(-\beta)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

$$J_n(\beta) = \frac{\beta}{2^n} (J_{n-1}(\beta) + J_{n+1}(\beta))$$

### F.3 Tabelle der Bessel-Funktion erster Art und n-ter Ordnung

Sämtliche numerischen Werte wurden mit MATLAB berechnet.

$\beta$	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15
0.0	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.998	0.050	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.990	0.100	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.978	0.148	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.960	0.196	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.938	0.242	0.031	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.6	0.912	0.287	0.044	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.7	0.881	0.329	0.059	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.8	0.846	0.369	0.076	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.808	0.406	0.095	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.0	0.765	0.440	0.115	0.020	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.1	0.720	0.471	0.137	0.026	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.671	0.498	0.159	0.033	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.3	0.620	0.522	0.183	0.041	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.4	0.567	0.542	0.207	0.050	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	0.512	0.558	0.232	0.061	0.012	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.6	0.455	0.570	0.257	0.073	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.7	0.398	0.578	0.282	0.085	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.8	0.340	0.582	0.306	0.099	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.9	0.282	0.581	0.330	0.113	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.0	0.224	0.577	0.353	0.129	0.034	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.1	0.167	0.568	0.375	0.145	0.040	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.2	0.110	0.556	0.395	0.162	0.048	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.3	0.056	0.540	0.414	0.180	0.056	0.013	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.4	0.003	0.520	0.431	0.198	0.064	0.016	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.5	-0.048	0.497	0.446	0.217	0.074	0.020	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.6	-0.097	0.471	0.459	0.235	0.084	0.023	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.7	-0.142	0.442	0.470	0.254	0.095	0.027	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.8	-0.185	0.410	0.478	0.273	0.107	0.032	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.9	-0.224	0.375	0.483	0.291	0.119	0.037	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	-0.260	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.1	-0.292	0.301	0.486	0.326	0.146	0.049	0.014	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.2	-0.320	0.261	0.484	0.343	0.160	0.056	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.3	-0.344	0.221	0.478	0.359	0.174	0.064	0.019	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.4	-0.364	0.179	0.470	0.373	0.189	0.072	0.022	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.5	-0.380	0.137	0.459	0.387	0.204	0.080	0.025	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.6	-0.392	0.095	0.445	0.399	0.220	0.090	0.029	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.7	-0.399	0.054	0.428	0.409	0.235	0.099	0.034	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.8	-0.403	0.013	0.409	0.418	0.251	0.110	0.038	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.9	-0.402	-0.027	0.388	0.425	0.266	0.121	0.043	0.013	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.0	-0.397	-0.066	0.364	0.430	0.281	0.132	0.049	0.015	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.1	-0.389	-0.103	0.338	0.433	0.296	0.144	0.055	0.018	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.2	-0.377	-0.139	0.311	0.434	0.310	0.156	0.062	0.020	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.3	-0.361	-0.172	0.281	0.433	0.324	0.169	0.069	0.023	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.4	-0.342	-0.203	0.250	0.430	0.336	0.182	0.076	0.026	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.5	-0.321	-0.231	0.218	0.425	0.348	0.195	0.084	0.030	0.009	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.6	-0.296	-0.257	0.185	0.417	0.359	0.208	0.093	0.034	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.7	-0.269	-0.279	0.151	0.407	0.369	0.221	0.102	0.038	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.8	-0.240	-0.298	0.116	0.395	0.378	0.235	0.111	0.043	0.014	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.9	-0.210	-0.315	0.081	0.381	0.385	0.248	0.121	0.048	0.016	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.0	-0.178	-0.328	0.047	0.365	0.391	0.261	0.131	0.053	0.018	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.1	-0.144	-0.337	0.012	0.347	0.396	0.274	0.142	0.059	0.021	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.2	-0.110	-0.343	-0.022	0.327	0.398	0.287	0.153	0.065	0.024	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.3	-0.076	-0.346	-0.055	0.305	0.400	0.299	0.164	0.072	0.027	0.009	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.4	-0.041	-0.345	-0.087	0.281	0.399	0.310	0.175	0.079	0.030	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.5	-0.007	-0.341	-0.117	0.256	0.397	0.321	0.187	0.087	0.034	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.6	0.027	-0.334	-0.146	0.230	0.393	0.331	0.199	0.094	0.038	0.013	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.7	0.060	-0.324	-0.174	0.202	0.387	0.340	0.210	0.103	0.042	0.015	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.8	0.092	-0.311	-0.199	0.174	0.379	0.349	0.222	0.111	0.046	0.017	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
5.9	0.122	-0.295	-0.222	0.145	0.369	0.356	0.234	0.120	0.051	0.019	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von vorhergehender Seite																
$\beta$	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15
6.0	0.151	-0.277	-0.243	0.115	0.358	0.362	0.246	0.130	0.057	0.021	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
6.1	0.177	-0.256	-0.261	0.085	0.344	0.367	0.257	0.139	0.062	0.024	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
6.2	0.202	-0.233	-0.277	0.054	0.329	0.371	0.269	0.149	0.068	0.027	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
6.3	0.224	-0.208	-0.290	0.024	0.313	0.373	0.279	0.159	0.074	0.030	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
6.4	0.243	-0.182	-0.300	-0.006	0.295	0.374	0.290	0.170	0.081	0.033	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
6.5	0.260	-0.154	-0.307	-0.035	0.275	0.374	0.300	0.180	0.088	0.037	0.013	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
6.6	0.274	-0.125	-0.312	-0.064	0.254	0.372	0.309	0.191	0.095	0.040	0.015	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000
6.7	0.285	-0.095	-0.314	-0.092	0.231	0.368	0.318	0.201	0.103	0.045	0.017	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000
6.8	0.293	-0.065	-0.312	-0.118	0.208	0.363	0.326	0.212	0.111	0.049	0.019	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000
6.9	0.298	-0.035	-0.308	-0.144	0.183	0.356	0.333	0.223	0.119	0.054	0.021	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000
7.0	0.300	-0.005	-0.301	-0.168	0.158	0.348	0.339	0.234	0.128	0.059	0.024	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
7.1	0.299	0.025	-0.292	-0.190	0.132	0.338	0.344	0.244	0.137	0.064	0.026	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000
7.2	0.295	0.054	-0.280	-0.210	0.105	0.327	0.349	0.254	0.146	0.070	0.029	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000
7.3	0.288	0.083	-0.266	-0.228	0.078	0.314	0.352	0.264	0.155	0.076	0.032	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000
7.4	0.279	0.110	-0.249	-0.244	0.051	0.299	0.353	0.274	0.165	0.082	0.035	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000
7.5	0.266	0.135	-0.230	-0.258	0.024	0.283	0.354	0.283	0.174	0.089	0.039	0.015	0.005	0.002	0.000	0.000
7.6	0.252	0.159	-0.210	-0.270	-0.003	0.266	0.354	0.292	0.184	0.096	0.043	0.017	0.006	0.002	0.001	0.000
7.7	0.235	0.181	-0.187	-0.279	-0.030	0.248	0.352	0.300	0.194	0.103	0.047	0.019	0.007	0.002	0.001	0.000
7.8	0.215	0.201	-0.164	-0.285	-0.056	0.228	0.348	0.308	0.204	0.111	0.051	0.021	0.008	0.003	0.001	0.000
7.9	0.194	0.219	-0.139	-0.289	-0.081	0.207	0.344	0.314	0.214	0.118	0.056	0.023	0.009	0.003	0.001	0.000
8.0	0.172	0.235	-0.113	-0.291	-0.105	0.186	0.338	0.321	0.223	0.126	0.061	0.026	0.010	0.003	0.001	0.000
8.1	0.148	0.248	-0.086	-0.290	-0.129	0.163	0.330	0.326	0.233	0.135	0.066	0.028	0.011	0.004	0.001	0.000
8.2	0.122	0.258	-0.059	-0.287	-0.151	0.140	0.321	0.330	0.243	0.143	0.071	0.031	0.012	0.004	0.001	0.000
8.3	0.096	0.266	-0.032	-0.281	-0.171	0.116	0.311	0.334	0.252	0.152	0.077	0.034	0.013	0.005	0.002	0.000
8.4	0.069	0.271	-0.005	-0.273	-0.190	0.092	0.300	0.336	0.261	0.160	0.083	0.037	0.015	0.005	0.002	0.001
8.5	0.042	0.273	0.022	-0.263	-0.208	0.067	0.287	0.338	0.269	0.169	0.089	0.041	0.017	0.006	0.002	0.001
8.6	0.015	0.273	0.049	-0.250	-0.223	0.042	0.273	0.338	0.278	0.178	0.096	0.045	0.019	0.007	0.002	0.001
8.7	-0.013	0.270	0.075	-0.235	-0.237	0.018	0.257	0.337	0.285	0.188	0.103	0.049	0.020	0.008	0.003	0.001
8.8	-0.039	0.264	0.099	-0.219	-0.249	-0.007	0.241	0.335	0.292	0.197	0.110	0.053	0.023	0.009	0.003	0.001
8.9	-0.065	0.256	0.123	-0.201	-0.258	-0.031	0.223	0.332	0.299	0.206	0.117	0.057	0.025	0.010	0.003	0.001
9.0	-0.090	0.245	0.145	-0.181	-0.265	-0.055	0.204	0.327	0.305	0.215	0.125	0.062	0.027	0.011	0.004	0.001
9.1	-0.114	0.232	0.165	-0.160	-0.271	-0.078	0.185	0.322	0.310	0.224	0.132	0.067	0.030	0.012	0.004	0.001
9.2	-0.137	0.217	0.184	-0.137	-0.274	-0.101	0.164	0.315	0.315	0.233	0.140	0.072	0.033	0.013	0.005	0.002
9.3	-0.158	0.200	0.201	-0.114	-0.274	-0.122	0.143	0.307	0.319	0.241	0.148	0.078	0.036	0.015	0.006	0.002
9.4	-0.177	0.182	0.215	-0.090	-0.273	-0.142	0.122	0.297	0.321	0.250	0.157	0.084	0.039	0.016	0.006	0.002
9.5	-0.194	0.161	0.228	-0.065	-0.269	-0.161	0.099	0.287	0.323	0.258	0.165	0.090	0.043	0.018	0.007	0.002
9.6	-0.209	0.140	0.238	-0.040	-0.263	-0.179	0.077	0.275	0.324	0.265	0.173	0.096	0.046	0.020	0.008	0.003
9.7	-0.222	0.117	0.246	-0.015	-0.255	-0.195	0.054	0.262	0.324	0.273	0.182	0.102	0.050	0.022	0.009	0.003
9.8	-0.232	0.093	0.251	0.010	-0.245	-0.210	0.031	0.248	0.323	0.280	0.190	0.109	0.054	0.024	0.010	0.004
9.9	-0.240	0.068	0.254	0.034	-0.233	-0.223	0.008	0.233	0.321	0.286	0.199	0.116	0.059	0.026	0.011	0.004
10.0	-0.246	0.043	0.255	0.058	-0.220	-0.234	-0.014	0.217	0.318	0.292	0.207	0.123	0.063	0.029	0.012	0.005
10.1	-0.249	0.018	0.253	0.082	-0.204	-0.243	-0.037	0.200	0.314	0.297	0.216	0.130	0.068	0.032	0.013	0.005
10.2	-0.250	-0.007	0.248	0.104	-0.187	-0.251	-0.059	0.182	0.308	0.302	0.224	0.138	0.073	0.034	0.015	0.006
10.3	-0.248	-0.031	0.242	0.125	-0.169	-0.256	-0.080	0.163	0.302	0.305	0.232	0.145	0.079	0.037	0.016	0.006
10.4	-0.243	-0.055	0.233	0.145	-0.149	-0.260	-0.101	0.144	0.294	0.309	0.240	0.153	0.084	0.041	0.018	0.007
10.5	-0.237	-0.079	0.222	0.163	-0.128	-0.261	-0.120	0.124	0.285	0.311	0.248	0.161	0.090	0.044	0.019	0.008
10.6	-0.228	-0.101	0.209	0.180	-0.107	-0.260	-0.139	0.103	0.275	0.312	0.255	0.169	0.096	0.048	0.021	0.009
10.7	-0.216	-0.122	0.194	0.195	-0.084	-0.258	-0.157	0.082	0.264	0.313	0.262	0.177	0.102	0.052	0.023	0.010
10.8	-0.203	-0.142	0.177	0.208	-0.061	-0.253	-0.173	0.061	0.252	0.312	0.269	0.185	0.108	0.056	0.026	0.011
10.9	-0.188	-0.160	0.159	0.219	-0.038	-0.247	-0.188	0.040	0.239	0.311	0.275	0.193	0.115	0.060	0.028	0.012
11.0	-0.171	-0.177	0.139	0.227	-0.015	-0.238	-0.202	0.018	0.225	0.309	0.280	0.201	0.122	0.064	0.030	0.013
11.1	-0.153	-0.191	0.118	0.234	0.008	-0.228	-0.214	-0.003	0.210	0.306	0.286	0.209	0.129	0.069	0.033	0.014
11.2	-0.133	-0.204	0.097	0.238	0.031	-0.216	-0.224	-0.024	0.194	0.301	0.290	0.217	0.136	0.074	0.036	0.016
11.3	-0.112	-0.214	0.074	0.241	0.054	-0.203	-0.233	-0.045	0.177	0.296	0.294	0.224	0.143	0.079	0.039	0.017
11.4	-0.090	-0.222	0.051	0.240	0.075	-0.188	-0.240	-0.065	0.160	0.290	0.297	0.232	0.150	0.084	0.042	0.019
11.5	-0.068	-0.228	0.028	0.238	0.096	-0.171	-0.245	-0.085	0.142	0.282	0.300	0.239	0.158	0.090	0.045	0.021
11.6	-0.045	-0.232	0.005	0.234	0.116	-0.153	-0.248	-0.104	0.123	0.274	0.302	0.246	0.165	0.095	0.049	0.023
11.7	-0.021	-0.233	-0.019	0.227	0.135	-0.135	-0.250	-0.122	0.104	0.264	0.303	0.253	0.173	0.101	0.053	0.025
11.8	0.002	-0.232	-0.041	0.218	0.152	-0.115	-0.250	-0.139	0.085	0.254	0.303	0.259	0.180	0.107	0.057	0.027
11.9	0.025	-0.229	-0.064	0.208	0.168	-0.095	-0.248	-0.155	0.065	0.243	0.302	0.265	0.188	0.114	0.061	0.029



# Anhang G

## Fehlerfunktion

### G.1 Definition der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-\xi^2} d\xi$$

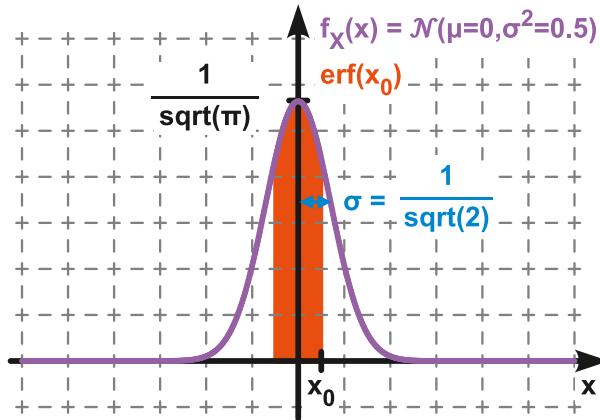


Abbildung G.1: Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$

Die Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$  entspricht dem bestimmten Integral einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$  (d.h. mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ) mit Integrationsgrenzen  $-x$  bis  $x$ .

### G.2 Eigenschaften

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

Die komplementäre Fehlerfunktion  $\operatorname{erfc}(x)$  beinhaltet für  $x \geq 0$  die verbleibende Fläche unter der Gausskurve:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Verteilungsfunktion einer beliebigen Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \right) \right)$$

Flächeninhalt zwischen  $\mu \pm (x - \mu)$  unter Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit beliebigen Mittelwert und Varianz:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{2\mu-x}^x e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \operatorname{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \right)$$

### G.3 Tabelle der Fehlerfunktion

Sämtliche numerischen Werte wurden mit der MATLAB-Funktion `erf` berechnet.

$x$	$\text{erf}(x)$	$x$	$\text{erf}(x)$	$x$	$\text{erf}(x)$
0.00	0.000 000 000 000 000	2.05	0.996 258 096 044 457	4.05	0.999 999 989 811 755
0.05	0.056 371 977 797 017	2.10	0.997 020 533 343 667	4.10	0.999 999 993 299 972
0.10	0.112 462 916 018 285	2.15	0.997 638 607 037 325	4.15	0.999 999 995 615 323
0.15	0.167 995 971 427 364	2.20	0.998 137 153 702 018	4.20	0.999 999 997 144 506
0.20	0.222 702 589 210 478	2.25	0.998 537 283 413 319	4.25	0.999 999 998 149 426
0.25	0.276 326 390 168 237	2.30	0.998 856 823 402 643	4.30	0.999 999 998 806 528
0.30	0.328 626 759 459 127	2.35	0.999 110 732 967 868	4.35	0.999 999 999 234 056
0.35	0.379 382 053 562 310	2.40	0.999 311 486 103 355	4.40	0.999 999 999 510 829
0.40	0.428 392 355 046 668	2.45	0.999 469 419 887 749	4.45	0.999 999 999 689 114
0.45	0.475 481 719 786 924	2.50	0.999 593 047 982 555	4.50	0.999 999 999 803 384
0.50	0.520 499 877 813 047	2.55	0.999 689 339 657 361	4.55	0.999 999 999 876 260
0.55	0.563 323 366 325 109	2.60	0.999 763 965 583 471	4.60	0.999 999 999 922 504
0.60	0.603 856 090 847 926	2.65	0.999 821 512 247 976	4.65	0.999 999 999 951 703
0.65	0.642 029 327 355 672	2.70	0.999 865 667 260 059	4.70	0.999 999 999 970 047
0.70	0.677 801 193 837 419	2.75	0.999 899 378 077 880	4.75	0.999 999 999 981 515
0.75	0.711 155 633 653 515	2.80	0.999 924 986 805 335	4.80	0.999 999 999 988 648
0.80	0.742 100 964 707 661	2.85	0.999 944 343 720 039	4.85	0.999 999 999 993 062
0.85	0.770 668 057 608 353	2.90	0.999 958 902 121 901	4.90	0.999 999 999 995 781
0.90	0.796 908 212 422 832	2.95	0.999 969 796 957 936	4.95	0.999 999 999 997 447
0.95	0.820 890 807 273 278	3.00	0.999 977 909 503 001	5.00	0.999 999 999 998 463
1.00	0.842 700 792 949 715	3.05	0.999 983 920 174 240	5.05	0.999 999 999 999 079
1.05	0.862 436 106 090 097	3.10	0.999 988 351 342 633	5.10	0.999 999 999 999 451
1.10	0.880 205 069 574 082	3.15	0.999 991 601 788 685	5.15	0.999 999 999 999 674
1.15	0.896 123 842 936 915	3.20	0.999 993 974 238 848	5.20	0.999 999 999 999 807
1.20	0.910 313 978 229 635	3.25	0.999 995 697 220 536	5.25	0.999 999 999 999 887
1.25	0.922 900 128 256 458	3.30	0.999 996 942 290 204	5.30	0.999 999 999 999 934
1.30	0.934 007 944 940 652	3.35	0.999 997 837 523 180	5.35	0.999 999 999 999 961
1.35	0.943 762 196 122 724	3.40	0.999 998 478 006 637	5.40	0.999 999 999 999 978
1.40	0.952 285 119 762 649	3.45	0.999 998 933 948 206	5.45	0.999 999 999 999 987
1.45	0.959 695 025 637 459	3.50	0.999 999 256 901 628	5.50	0.999 999 999 999 993
1.50	0.966 105 146 475 311	3.55	0.999 999 484 516 175	5.55	0.999 999 999 999 996
1.55	0.971 622 733 262 013	3.60	0.999 999 644 137 007	5.60	0.999 999 999 999 998
1.60	0.976 348 383 344 644	3.65	0.999 999 755 517 349	5.65	0.999 999 999 999 999
1.65	0.980 375 585 023 360	3.70	0.999 999 832 848 942	5.70	0.999 999 999 999 999
1.70	0.983 790 458 590 775	3.75	0.999 999 886 272 743	5.75	1.000 000 000 000 000
1.75	0.986 671 671 219 182	3.80	0.999 999 922 996 073	5.80	1.000 000 000 000 000
1.80	0.989 090 501 635 731	3.85	0.999 999 948 113 707	5.85	1.000 000 000 000 000
1.85	0.991 111 030 056 086	3.90	0.999 999 965 207 751	5.90	1.000 000 000 000 000
1.90	0.992 790 429 235 258	3.95	0.999 999 976 783 268	5.95	1.000 000 000 000 000
1.95	0.994 179 333 592 189	4.00	0.999 999 984 582 742	6.00	1.000 000 000 000 000
2.00	0.995 322 265 018 953				

Lesebeispiel: bei der Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  beträgt die Standardabweichung der verwendeten Gaussverteilung  $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ . Bei einer beliebigen Gaussverteilung kommen somit innerhalb von  $\pm 5\sigma$  um den Erwartungswert  $\mu$  herum  $\text{erf}(3.55) = 99.99994\%$  aller Werte zu liegen.

# Anhang H

## Q-Funktion

### H.1 Definition der Q-Funktion

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

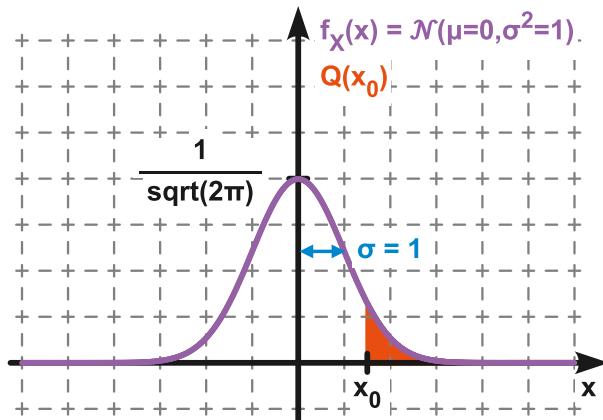


Abbildung H.1: Q-Funktion  $Q(x)$

Die Q-Funktion  $Q(x)$  entspricht dem Flächeninhalt unter einer Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  (d.h. mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = 1$ ) ausgehend vom Punkt  $x$  bis  $+\infty$ :

### H.2 Eigenschaften

$$Q(x) = 1 - Q(-x)$$

Q-Funktion  $Q(x)$  berechnet mit der Fehlerfunktion  $\text{erf}(x)$  bzw. komplementären Fehlerfunktion  $\text{erfc}(x)$ :

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Verteilungsfunktion einer beliebigen Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Flächeninhalt zwischen  $x$  und  $+\infty$  unter Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  mit beliebigen Mittelwert und Varianz:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\xi = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

### H.3 Tabelle der Q-Funktion

Sämtliche numerischen Werte wurden mit der MATLAB-Funktion qfunc berechnet.

$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$	$x$	$Q(x)$
0.00	0.500 000 000 000 000	2.05	0.020 182 215 405 704	4.05	0.000 025 608 816 474
0.05	0.480 061 194 161 628	2.10	0.017 864 420 562 817	4.10	0.000 020 657 506 913
0.10	0.460 172 162 722 971	2.15	0.015 777 607 391 091	4.15	0.000 016 623 763 730
0.15	0.440 382 307 629 758	2.20	0.013 903 447 513 499	4.20	0.000 013 345 749 016
0.20	0.420 740 290 560 897	2.25	0.012 224 472 655 045	4.25	0.000 010 688 525 775
0.25	0.401 293 674 317 076	2.30	0.010 724 110 021 676	4.30	0.000 008 539 905 471
0.30	0.382 088 577 811 047	2.35	0.009 386 705 534 839	4.35	0.000 006 806 876 599
0.35	0.363 169 348 824 381	2.40	0.008 197 535 924 596	4.40	0.000 005 412 543 908
0.40	0.344 578 258 389 676	2.45	0.007 142 810 735 271	4.45	0.000 004 293 514 470
0.45	0.326 355 220 287 920	2.50	0.006 209 665 325 776	4.50	0.000 003 397 673 125
0.50	0.308 537 538 725 987	2.55	0.005 386 145 954 067	4.55	0.000 002 682 295 780
0.55	0.291 159 686 788 346	2.60	0.004 661 188 023 719	4.60	0.000 002 112 454 702
0.60	0.274 253 117 750 074	2.65	0.004 024 588 542 758	4.65	0.000 001 659 675 144
0.65	0.257 846 110 805 865	2.70	0.003 466 973 803 041	4.70	0.000 001 300 807 454
0.70	0.241 963 652 223 073	2.75	0.002 979 763 235 055	4.75	0.000 001 017 083 243
0.75	0.226 627 352 376 868	2.80	0.002 555 130 330 428	4.80	0.000 000 793 328 152
0.80	0.211 855 398 583 397	2.85	0.002 185 961 454 913	4.85	0.000 000 617 307 372
0.85	0.197 662 543 122 692	2.90	0.001 865 813 300 384	4.90	0.000 000 479 183 277
0.90	0.184 060 125 346 760	2.95	0.001 588 869 647 365	4.95	0.000 000 371 067 408
0.95	0.171 056 126 308 482	3.00	0.001 349 898 031 630	5.00	0.000 000 286 651 572
1.00	0.158 655 253 931 457	3.05	0.001 144 206 831 023	5.05	0.000 000 220 905 032
1.05	0.146 859 056 375 896	3.10	0.000 967 603 213 218	5.10	0.000 000 169 826 741
1.10	0.135 666 060 946 383	3.15	0.000 816 352 312 829	5.15	0.000 000 130 243 230
1.15	0.125 071 935 637 150	3.20	0.000 687 137 937 916	5.20	0.000 000 099 644 263
1.20	0.115 069 670 221 708	3.25	0.000 577 025 042 391	5.25	0.000 000 076 049 605
1.25	0.105 649 773 666 855	3.30	0.000 483 424 142 384	5.30	0.000 000 057 901 340
1.30	0.096 800 484 585 610	3.35	0.000 404 057 801 864	5.35	0.000 000 043 977 116
1.35	0.088 507 991 437 402	3.40	0.000 336 929 265 677	5.40	0.000 000 033 320 449
1.40	0.080 756 659 233 771	3.45	0.000 280 293 276 816	5.45	0.000 000 025 184 910
1.45	0.073 529 259 609 648	3.50	0.000 232 629 079 036	5.50	0.000 000 018 989 562
1.50	0.066 807 201 268 858	3.55	0.000 192 615 575 636	5.55	0.000 000 014 283 480
1.55	0.060 570 758 002 059	3.60	0.000 159 108 590 158	5.60	0.000 000 010 717 590
1.60	0.054 799 291 699 558	3.65	0.000 131 120 154 420	5.65	0.000 000 008 022 392
1.65	0.049 471 468 033 648	3.70	0.000 107 799 733 477	5.70	0.000 000 005 990 371
1.70	0.044 565 462 758 543	3.75	0.000 088 417 285 201	5.75	0.000 000 004 462 172
1.75	0.040 059 156 863 817	3.80	0.000 072 348 043 925	5.80	0.000 000 003 315 746
1.80	0.035 930 319 112 926	3.85	0.000 059 058 912 419	5.85	0.000 000 002 457 865
1.85	0.032 156 774 795 614	3.90	0.000 048 096 344 018	5.90	0.000 000 001 817 508
1.90	0.028 716 559 816 002	3.95	0.000 039 075 596 598	5.95	0.000 000 001 340 712
1.95	0.025 588 059 521 639	4.00	0.000 031 671 241 833	6.00	0.000 000 000 986 588
2.00	0.022 750 131 948 179				

Lesebeispiel: bei der Q-Funktion beträgt die Standardabweichung der verwendeten Gaussverteilung  $\sigma = 1$ . Bei einer beliebigen Gaussverteilung kommen somit Werte  $x \geq \mu + 5\sigma$  noch mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = Q(5.0) = 2.867 \cdot 10^{-7}$  vor.

# Literaturverzeichnis

- [1] J. R. Carson, “Notes on the Theory of Modulation,” *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, vol. 10, no. 1, Feb 1922, pp. 57–64. 60
- [2] Ch. Schweiss, P. Wildhaber, P. Laeuffer und E. Schade, “Die Geschichte des Radios in der Schweiz von 1911-2008.” [www.drs.ch](http://www.drs.ch), Schweizer Radio DRS, 2009. 67
- [3] R. Chapuis and A. Joel, *100 Years of Telephone Switching: part 2*. IOS Press, 2003. 71
- [4] IEEE, “IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks: Overview and Architecture.,” *IEEE Std 802-2001 (Revision of IEEE Std 802-1990)*, 2002. 3
- [5] IEEE, “IEEE Standard for Ethernet,” *IEEE Std 802.3-2018 (Revision of IEEE Std 802.3-2015)*, 2018, pp. 1–5600. 101
- [6] H. Mathis, *Mobile Communications*. ICOM, Institute for Communication Systems, HSR Rapperswil, 2010. 1
- [7] A. Tanenbaum, *Computer networks*. Prentice Hall PTR, 2003. 3
- [8] H. Teuteberg and C. Neutsch, *Vom Flügeltelegraphen zum Internet*. Franz Steiner Verlag Stuttgart, 1998. 3
- [9] M. Werner, *Nachrichtentechnik*. Friedrich Vieweg u. Sohn Verlag, 4th ed., 2003. 1
- [10] M. Werner, *Nachrichten-Uebertragungstechnik*. Friedrich Vieweg u. Sohn Verlag, 2006. 68
- [11] Wikipedia, “Alexander Graham Bell.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander\\_Graham\\_Bell](http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Graham_Bell) (2011-06-04). 2
- [12] Wikipedia, “Basile Bouchon.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Basile\\_Bouchon](http://en.wikipedia.org/wiki/Basile_Bouchon) (2011-06-09). 2
- [13] Wikipedia, “Boltzmann-Konstante.”  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Boltzmann-Konstante> (2019-09-14). 239
- [14] Wikipedia, “Caesar cipher.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Caesar\\_cipher](http://en.wikipedia.org/wiki/Caesar_cipher) (2011-06-04). 2
- [15] Wikipedia, “Charles Francis Jenkins.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Charles\\_Francis\\_Jenkins](http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Francis_Jenkins) (2011-06-09). 2
- [16] Wikipedia, “Christian Hülsmeyer.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Christian\\_Hülsmeyer](http://de.wikipedia.org/wiki/Christian_Hülsmeyer) (2011-06-09). 2
- [17] Wikipedia, “Claude Chappe.”  
[http://fr.wikipedia.org/wiki/Claude\\_Chappe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Claude_Chappe) (2011-06-04). 2
- [18] Wikipedia, “Claude Shannon.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Claude\\_Shannon](http://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon) (2011-06-09). 2
- [19] Wikipedia, “Compact Disc.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Compact\\_Disc](http://en.wikipedia.org/wiki/Compact_Disc) (2011-06-09). 2

- [20] Wikipedia, “Dov Frohmann.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Dov\\_Frohman](http://en.wikipedia.org/wiki/Dov_Frohman) (2011-06-09). 2
- [21] Wikipedia, “Elektrische Feldkonstante.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische\\_Feldkonstante](http://de.wikipedia.org/wiki/Elektrische_Feldkonstante) (2019-09-06). 239
- [22] Wikipedia, “Ethernet.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Ethernet> (2011-06-09). 2
- [23] Wikipedia, “Eulersche Zahl.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche\\_Zahl](http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl) (2019-06-28). 239
- [24] Wikipedia, “Fritz Pfleumer.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Fritz\\_Pfleumer](http://en.wikipedia.org/wiki/Fritz_Pfleumer) (2011-06-09). 2
- [25] Wikipedia, “Fujio Masuoka.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Fujio\\_Masuoka](http://en.wikipedia.org/wiki/Fujio_Masuoka) (2011-06-09). 2
- [26] Wikipedia, “Georg Simon Ohm.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Simon\\_Ohm](http://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Simon_Ohm) (2011-06-04). 2
- [27] Wikipedia, “Global Positioning System.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Global\\_Positioning\\_System](http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System) (2011-06-09). 2
- [28] Wikipedia, “Grotte Chauvet.” [http://fr.wikipedia.org/wiki/Grotte\\_Chauvet](http://fr.wikipedia.org/wiki/Grotte_Chauvet) (2011-06-09). 2
- [29] Wikipedia, “Guglielmo Marconi.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Guglielmo\\_Marconi](http://en.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Marconi) (2011-06-05). 2
- [30] Wikipedia, “Hamming code.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Hamming\\_code](http://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_code) (2011-06-09). 2
- [31] Wikipedia, “Harry Nyquist.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Harry\\_Nyquist](http://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Nyquist) (2011-06-09). 2
- [32] Wikipedia, “Heinrich Hertz.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Hertz](http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz) (2011-06-04). 2
- [33] Wikipedia, “IBM 350.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/IBM\\_magnetic\\_disk\\_drives](http://en.wikipedia.org/wiki/IBM_magnetic_disk_drives) (2011-06-09). 2
- [34] Wikipedia, “IEEE 802.11.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE\\_802.11](http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_802.11) (2011-06-09). 2
- [35] Wikipedia, “Integrated circuit.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Integrated\\_circuit](http://en.wikipedia.org/wiki/Integrated_circuit) (2011-06-09). 2
- [36] Wikipedia, “Intel 4004.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Intel\\_4004](http://en.wikipedia.org/wiki/Intel_4004) (2011-06-09). 2
- [37] Wikipedia, “iPhone.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/IPhone> (2016-09-06). 2
- [38] Wikipedia, “Johannes Gutenberg.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Johannes\\_Gutenberg](http://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Gutenberg) (2011-06-04). 2
- [39] Wikipedia, “Karl Ferdinand Braun.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Ferdinand\\_Braun](http://de.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_Braun) (2011-06-09). 2
- [40] Wikipedia, “Kreiszahl.”  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl> (2019-06-28). 239

- [41] Wikipedia, “Lichtgeschwindigkeit.”  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit> (2019-09-06). 239
- [42] Wikipedia, “Magnetische Feldkonstante.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische\\_Feldkonstante](http://de.wikipedia.org/wiki/Magnetische_Feldkonstante) (2019-09-06). 239
- [43] Wikipedia, “Manfred Börner.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Manfred\\_Börner](http://de.wikipedia.org/wiki/Manfred_Börner) (2011-06-09). 2
- [44] Wikipedia, “Nicéphore Niépce.” [http://fr.wikipedia.org/wiki/Nicéphore\\_Niépce](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nicéphore_Niépce) (2011-06-09). 2
- [45] Wikipedia, “Nipkow-Scheibe.”  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Nipkow-Scheibe> (2011-06-04). 2
- [46] Wikipedia, “Oliver Joseph Lodge.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Oliver\\_Joseph\\_Lodge](http://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Joseph_Lodge) (2011-06-04). 2
- [47] Wikipedia, “On Physical Lines of Force.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/On\\_Physical\\_Lines\\_of\\_Force](http://en.wikipedia.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force) (2011-06-04). 2
- [48] Wikipedia, “Phonograph.” <http://en.wikipedia.org/wiki/Phonograph> (2011-06-09). 2
- [49] Wikipedia, “Polybius.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Polybius> (2011-06-04). 2
- [50] Wikipedia, “Radiolinja.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Radiolinja> (2011-06-09). 2
- [51] Wikipedia, “Reginald Fessenden.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Reginald\\_Fessenden](http://en.wikipedia.org/wiki/Reginald_Fessenden) (2011-06-09). 2
- [52] Wikipedia, “Sumer.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Sumer> (2011-06-04). 2
- [53] Wikipedia, “Telegrafie.”  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Telegrafie> (2011-06-04). 2
- [54] Wikipedia, “Telstar.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Telstar> (2011-06-09). 2
- [55] Wikipedia, “Theodore Maiman.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Theodore\\_Maiman](http://en.wikipedia.org/wiki/Theodore_Maiman) (2011-06-09). 2
- [56] Wikipedia, “Transatlantic telecommunications cable.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Transatlantic\\_telecommunications\\_cable](http://en.wikipedia.org/wiki/Transatlantic_telecommunications_cable) (2011-06-04). 2
- [57] Wikipedia, “Transistor.”  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Transistor> (2011-06-09). 2
- [58] Wikipedia, “Valdemar Poulsen.”  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Valdemar\\_Poulsen](http://de.wikipedia.org/wiki/Valdemar_Poulsen) (2011-06-09). 2
- [59] Wikipedia, “Voyager 1.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Voyager\\_1](http://en.wikipedia.org/wiki/Voyager_1) (2011-06-09). 2
- [60] Wikipedia, “Wikipedia, the free Encyclopedia.”  
<http://en.wikipedia.org>. 1
- [61] Wikipedia, “World Wide Web.”  
[http://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Wide\\_Web](http://en.wikipedia.org/wiki/World_Wide_Web) (2011-06-09). 2
- [62] Wikipedia, “Zyklische Redundanzprüfung.”  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Zyklische\\_Redundanzprüfung](https://de.wikipedia.org/wiki/Zyklische_Redundanzprüfung) (2018-06-01). 237