Stetige Wavelet Transformation

Prof. Dr. Andreas Müller

4. März 2019

Plan

1. Skalarprodukt
2. Transformationen: Translation und Dilatation
3. Stetige Wavelet-Transformation
4. Zulässigkeitsbedingung

Skalarprodukt

Abgetastete Signale:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \bar{y}_k$$

f, g zeitabhängige Signale $t \mapsto f(t)$ und $t \mapsto g(t)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t) \, dt \tag{1}$$

Definition

Die quadratintegrierbaren Funktionen $L^2 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < \infty \}$ bilden einen Vektorraum mit dem Skalarprodukt (**??**).

Chauchy-Schwarz-Ungleichung

Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

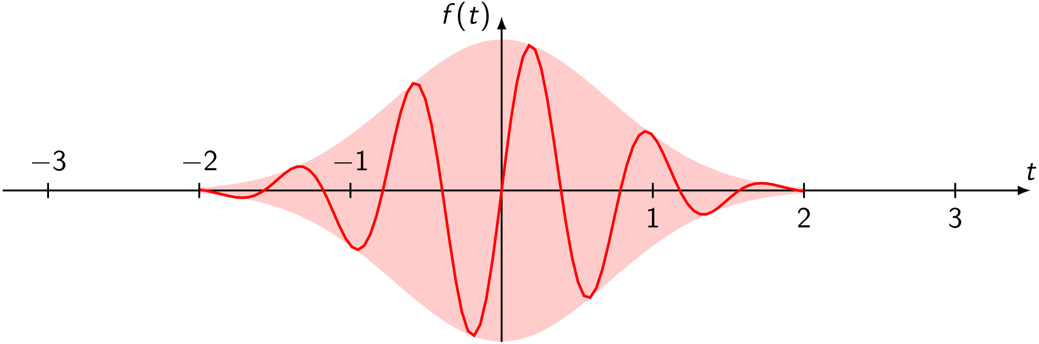
$$\langle f, g \rangle \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

mit Gleichheit genau dann wenn f und g linear abhängig sind.

Gabor-Wavelet

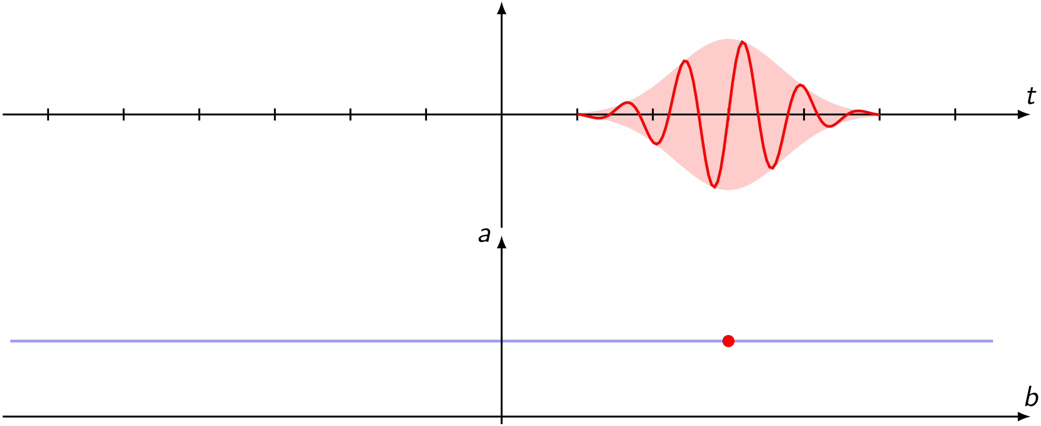
Sinus-Signal lokalisiert mit Exponentialfunktion

$$\psi(t) = \sin(8t) \cdot e^{-t^2}$$



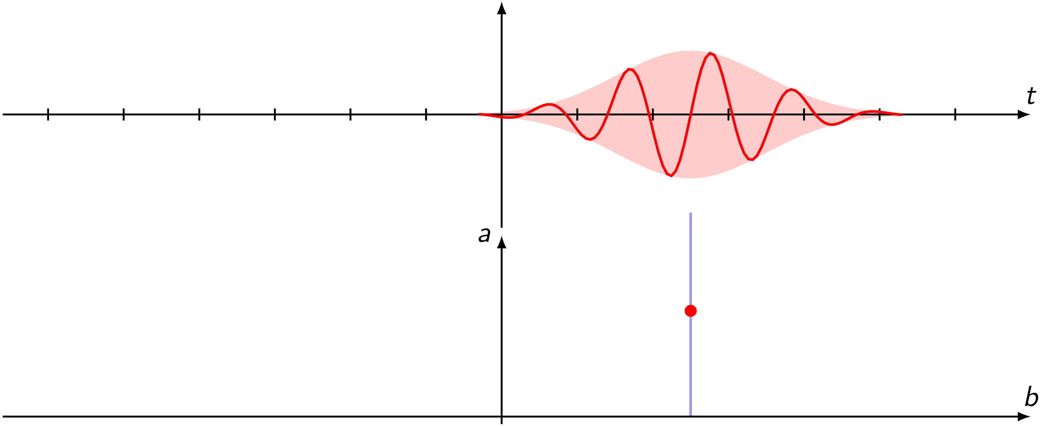
Translation

$$T_b\psi(t) = T_3\psi(t) = \psi(t-3)$$



Dilatation

$$T_b D_a \psi(t) = T_{2.5} D_a \psi(t) = \psi((t - 2.5)/a) = \psi((5 - 2.5)/1.4)$$



Fourier-Transformation

Definition (Fourier-Transformation)

Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \langle f, e_\omega \rangle, \qquad \text{mit} \quad e_\omega(t) = e^{i\omega t}
\end{aligned}
$$

Plancherel-Formel

Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)\, dt = \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\bar{\hat{g}}(\omega)\, d\omega
$$

Fourier-Transformation und T_b

$$\widehat{T_b f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T_b f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{t-b}_{=t'})\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-i\omega(t'+b)}\, dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-i\omega t'}\, dt' \cdot e^{-i\omega b}$$

$$= e^{-i\omega b} \hat{f}(\omega)$$

Satz

Die Fouriertransformierte der verschobenen Funktion ist

$$\widehat{T_b f} = e^{-i\omega b} \hat{f} =: M_{e^{-i\omega b}} \hat{f}$$

$$\widehat{M_{e^{i\omega b}} f} = T_b \hat{f}$$

Fourier-Transformation und D_a

$$\widehat{D_a f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D_a f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(\underbrace{t/a}_{=t'})\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(t') e^{i\omega a t'} |a|\, dt' = \sqrt{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i(a\omega)t'}\, dt'$$

$$= (D_{1/a}\hat{f})(\omega)$$

Satz

Die Fouriertransformierte der gestreckten Funktion ist

$$\widehat{D_a f}(\omega) = (D_{1/a}\hat{f})(\omega)$$

Stetige Wavelet Transformation (CWT)

Analyse mit verschobenen und gestreckten Kopien von ψ:

$$\psi_{a,b}(t) = T_b D_a \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

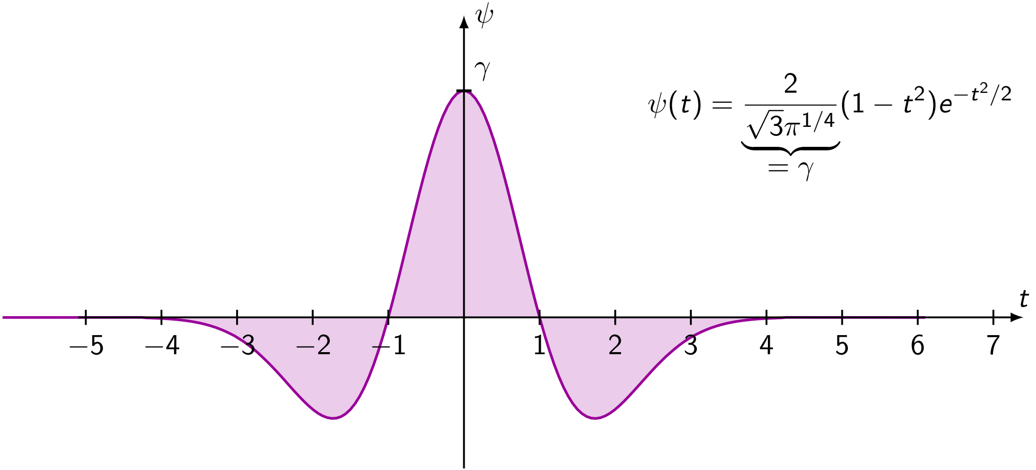
- Translation um b
- Dilatation mit $a \neq 0$, $a < 0 \Rightarrow$ mit Spiegelung

Definition (Stetige Wavelet Transformation)

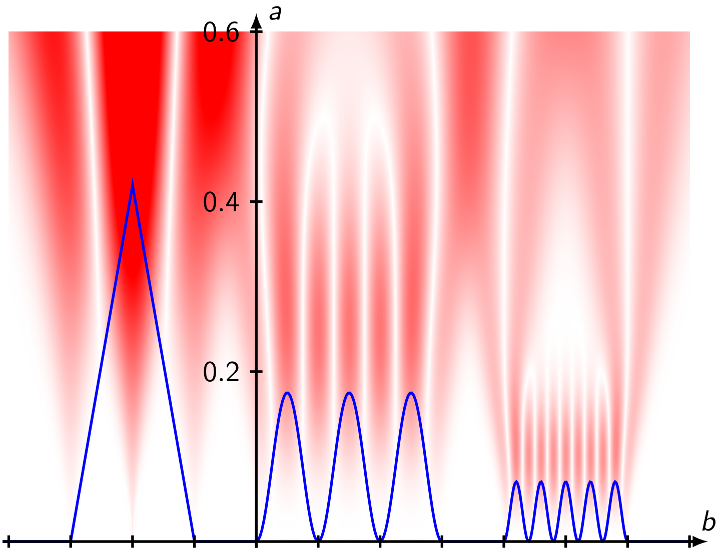
Für ein Wavelet ψ ist die Stetige Wavelet-Transformation eines Signals $f(t)$ die Funktion von zwei Variablen $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} f(a,b) = \mathcal{W}_\psi f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \langle f, T_b D_a \psi \rangle \\ = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Analyse mit Mexikanerhut



$$\psi(t) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}}_{=\gamma}(1 - t^2)e^{-t^2/2}$$


a
0.6
0.4
0.2
b

Analyse eines Sweep mit Morlet-Wavelet

Wavelet:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \cdot e^{5it}$$

Signal:

$$f(t) = \sin(t \cdot (4 + 0.2t))$$

Beobachtungen

Eigenschaften von $\mathcal{W}$

- $\mathcal{W}$ ist linear:

$$\mathcal{W}(f+g) = \mathcal{W}f + \mathcal{W}g$$
$$\mathcal{W}(\lambda f) = \lambda \mathcal{W} f$$

- $\mathcal{W}$ ist injektiv $\Rightarrow$ Umkehrformel?
- $\mathcal{W}$ ist nicht surjektiv

Wavelet

Definition

Ein *Mutter-Wavelet* oder *Wavelet* ist eine Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \|\psi\| = 1,$$

welche zudem die Zulässigkeitsbedingung erfüllt.

Zulässigkeitsbedingung

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heisst zulässig, wenn

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(\omega)^2|}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

Die Zulässigkeitsbedingung wird benötigt für die Umkehrformel.