
Mathematisches Seminar

Wavelets

Leitung: Andreas Müller

Julian Bärtschi, Jonas Gründler, Dominic Hüppi, Hansruedi Patzen
Cédric Renda, Michael Schmid, Roy Seitz, Manuel Tischhauser
Nicolas Tobler, Raphael Unterer, Kris Wyss

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	3
Einleitung	5
1 Sampling und Geometrie	9
1.1 Vergleich von Signalen und Vektorgeometrie	9
1.1.1 Vergleich von Signalen	9
1.1.2 Vektorschreibweise	13
1.1.3 Vektorraum und Skalarprodukt	14
1.1.4 Skalarprodukt und orthonormierte Basis	15
1.2 Funktionenräume	17
1.2.1 Vektorräume von Funktionen	17
1.2.2 Translation und Dilatation	18
1.3 Hilbertraum	21
1.3.1 Komplexe Vektorräume mit Skalarprodukt	21
1.3.2 Norm und Grenzwert in einem Hilbertraum	24
1.3.3 Basis eines Hilbertraumes	26
1.4 Frames	26
1.4.1 Ein geometrisches Beispiel	26
1.4.2 Definition eines Frames	29
1.4.3 Allgemeine Frames	31
1.5 Rekonstruktion	33
2 Fouriertheorie und die L^2-Hilberträume	39
2.1 Der Hilbertraum L^2	39
2.1.1 Funktionenräume	39
2.1.2 Definition des Skalarproduktes	40
2.1.3 Lebesgue-Integral und Vollständigkeit	41
2.1.4 L^2 und L^1	42
2.1.5 Die Operatoren T_b und D_a	43
2.2 Fourier-Reihen	44
2.2.1 Reelle Fourier-Reihen	44
2.2.2 Komplexe Fourier-Reihen	44
2.3 Fourier-Integral	44
2.4 Gefensterte Fourier-Transformation	46
2.5 Heisenbergsche Unschärfe-Relation	46

3	Das Haar-Wavelet	49
3.1	Stückweise konstante Funktionen	49
3.1.1	Charakteristische Funktion	49
3.1.2	Approximation stetiger Funktionen	50
3.1.3	Integration stückweise konstanter Funktionen	52
3.2	Sampling	53
3.3	Dualzahlen-Unterteilung	55
3.4	Wavelet	56
3.5	Haar-Approximation	61
3.5.1	Sampling	61
3.5.2	Filter	61
3.5.3	Wavelet-Koeffizienten	62
3.5.4	Der schnelle Approximations-Algorithmus	62
3.5.5	Ein Paradoxon	63
4	Stetige Wavelet-Transformation	67
4.1	Wavelets	67
4.2	Stetige Wavelet-Transformation	69
4.3	Plancherel-Formel	77
4.3.1	Das Skalarprodukt auf H	78
4.3.2	Die Abhängigkeit von b	78
4.3.3	Die Plancherel-Formel	79
4.3.4	Das Haar-Mass auf $\mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}$	80
4.4	Umkehrformel	80
5	Abtasttheorem und Rekonstruktion	87
6	Multiskalen-Analyse	89
6.1	Skalen und Vektorräume	89
6.1.1	Ein Turm von Vektorräumen	89
6.1.2	Orthogonalität	91
6.2	Skalierungsrelation und Fouriertransformation	91
6.2.1	Der Interval-Trick und der Periodisierungs-Operator	91
6.2.2	Orthogonalität der Translate von φ	93
6.2.3	Die Skalierungsrelation	94
6.2.4	Skalierungsrelationen für $f \in V_1$	95
6.2.5	Skalierungsrelation für ψ	96
6.2.6	Eindeutigkeit von φ	99
6.3	Mutter-Wavelet ψ aus dem Vater-Wavelet φ	99
6.4	Orthonormalisierung	100
7	Schnelle Wavelet-Algorithmen	103
7.1	Schnelle Algorithmen	103
7.2	Schnelle Synthese	105
7.2.1	Basiswechsel	105
7.2.2	Invertierung	106
7.2.3	Schnelle Wavelet-Synthese	107
7.3	Rekonstruktion der Funktionen φ und ψ	108

8 Wavelets mit kompaktem Träger	115
8.1 Bedingungen für die Koeffizienten	115
8.1.1 Kompakter Träger	115
8.1.2 Normierung	116
8.1.3 Orthogonalität	116
8.2 Ordnung	118
8.3 Betrag	119
8.4 Partialbruchzerlegung	120
8.4.1 Die Fälle $N = 2$ und $N = 3$	120
8.4.2 Der allgemeine Fall	121
8.4.3 Weitere Lösungen von höherem Grad	122
8.5 Das Lemma von Riesz	123
8.6 Daubechies-Wavelets	127
8.6.1 Der Fall $N = 2$	127
8.6.2 Der Fall $N = 3$	128
9 Spline-Wavelets	129
A Komplexe Zahlen	131
A.1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	131
A.1.1 Grundoperationen für die komplexen Zahlen	131
A.1.2 Polardarstellung	133
A.1.3 Matrixdarstellung der komplexen Zahlen	134
A.2 Komplexe Matrizen	135
A.2.1 Skalarprodukt für komplexe Vektorräume	135
A.2.2 Eigenwertproblem für komplexe Matrizen	138
A.3 Lie-Algebren	139
II Anwendungen und Weiterführende Themen	147
10 Autotune	151
10.1 Abschnitt	151
10.2 Schlussfolgerung	151
11 Wavelet-Deconvolution	153
11.1 Abschnitt	153
11.2 Schlussfolgerung	153
12 FPGA Implementation der schnellen Wavelet-Transformation	155
12.1 Abschnitt	155
12.2 Schlussfolgerung	155
13 Audio-Kompression mit Daubechies Wavelets	157
13.1 Abschnitt	157
13.2 Schlussfolgerung	157

14 Gabor-Wavelets und visuelle Wahrnehmung	159
14.1 Abschnitt	159
14.2 Schlussfolgerung	159
15 Komplexe Morlet Wavelets und CWT	161
15.1 Abschnitt	161
15.2 Schlussfolgerung	161
16 2D Wavelets und Oberflächen	163
16.1 Abschnitt	163
16.2 Schlussfolgerung	163
17 Signalanalyse von UHF Teilentladungssignalen im Zeitbereich	165
17.1 Gasisolierte Schaltanlagen	165
17.2 Fehlerarten und Analyse in GIS	166
17.2.1 Oberflächenentladung	166
17.2.2 Hohlraumentladung	167
17.2.3 Herkömmliche Fehleranalyse	168
17.3 Messpfad	168
17.4 Datenbearbeitung	170
17.5 Auswertung kontinuierliche Wavelettransformation	171
17.6 Schlussfolgerung	171
18 Analyse von Meteor-Echos	173
18.1 Abschnitt	173
18.2 Schlussfolgerung	173
19 Wetter-Wavelet-Transformation	175
19.1 Abschnitt	175
19.2 Schlussfolgerung	175

Vorwort

Dieses Buch entstand im Rahmen des Mathematischen Seminars im Frühjahrssemester 2019 an der Hochschule für Technik Rapperswil. Die Teilnehmer, Studierende der Abteilungen für Elektrotechnik, Informatik und Bauingenieurwesen der HSR, erarbeiteten nach einer Einführung in das Themengebiet jeweils einzelne Aspekte des Gebietes in Form einer Seminararbeit, über deren Resultate sie auch in einem Vortrag informierten.

Im Frühjahr 2019 war das Thema des Seminars die Theorie und die Anwendungen von Wavelets. Der Fokus lag auf einer knappen aber mathematisch vollständigen Darstellung der Theorie mit besonderer Berücksichtigung von Frames und Multiskalen-Analysen.

Der Begriff des *Frames* erweitert die Idee der Basis auf eine für die Praxis besonders nützliche Weise. Die manchmal schwierig zu erreichende lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren und damit die Eindeutigkeit der Zerlegung wird aufgegeben und ersetzt durch eine Bedingung, mit der sich immer noch eindeutige Rekonstruktion erreichen lässt.

Eine *Multiskalen-Analyse* fasst die Eigenschaften einer Wavelet-Basis in eine abstrakten Form zusammen. Mit Hilfe der Fourier-Theorie können daraus konkrete Eigenschaften der Wavelet-Funktionen rekonstruiert werden. Besonders wichtig für die Praxis ist aber, dass sich aus der Multiskalen-Analyse ohne grossen Aufwand ein schneller Analyse und Synthese-Algorithmus ableiten lässt. Die Daubechies-Wavelets mit kompaktem Träger ergeben sich auf ganz natürliche Weise aus dieser Theorie.

Im zweiten Teil dieses Skripts kommen dann die Teilnehmer selbst zu Wort. Ihre Arbeiten wurden jeweils als einzelne Kapitel mit meist nur typographischen Änderungen übernommen. Diese weiterführenden Kapitel sind sehr verschiedenartig. Eine Übersicht und Einführung findet sich in der Einleitung zum zweiten Teil auf Seite 149.

In einigen Arbeiten wurde auch Code zur Demonstration der besprochenen Methoden und Resultate geschrieben, soweit möglich und sinnvoll wurde dieser Code im Github-Repository dieses Kurses¹ [**buch:repo**] abgelegt.

Im genannten Repository findet sich auch der Source-Code dieses Skriptes, es wird hier unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung gestellt.

¹<https://github.com/AndreasFMueller/SeminarWavelets.git>

Teil I

Grundlagen

Einleitung

Zeitabhängige Signale können verstanden werden als Funktionen $t \mapsto f(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Die Analysis lehrt eine Reihe von Methoden, wie man mit solchen Funktionen arbeiten kann. Dies ist jedoch eine mathematische Idealisierung. In der Praxis kennt man nur das Resultat eines Abtastprozesses, wo der Funktionswert $f(t_k)$ für diskrete Werte $t_i = t_0 + k\Delta t$ ermittelt wird. Insbesondere gehen alle Informationen über den Verlauf einer Funktion $f(t)$ zwischen den Abtastpunkten t_k verloren. Trotzdem führt daran nichts vorbei, denn nur auf diese Art ist es möglich, Signale in einem digitalen System zu verarbeiten.

Die Methoden der Analysis sind für Folgen von Abtastwerten $x_k = f(t_k)$ fast nutzlos. Sogar das Konzept der Frequenz ist fragwürdig, denn ein Sinus-Signal $s(t) = \sin(2\pi t/\Delta t)$ nimmt auf allen Abtastpunkten t_k den Wert $s(t_k) = \sin(2\pi t_0/\Delta t + 2\pi k) = \sin(2\pi t_0/\Delta t)$ den gleichen Wert an. Allgemeiner: ein Signal mit der gleichen Frequenz wie die Abtastfrequenz ist nicht von einem konstanten Signal unterscheidbar. Die Signalverarbeitung verlangt daher nach einem Satz von Werkzeugen, die einerseits mit dieser Schwierigkeit fertig werden, aber andererseits auch in der Lage sind gut verstandene technische Prozesse wie das Ausfiltern bestimmter Frequenzbereiche adäquat zu beschreiben.

Das übliche und für den Ingenieur naheliegende Werkzeug ist die Fourier-Theorie, die ursprünglich als analytisches Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen entwickelt wurde. Sie machte erstmals möglich, ein Signal über die darin vertretenen Frequenzen zu charakterisieren und zu manipulieren. Mit der Entwicklung der schnellen Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT) wurde ihr praktischer Einsatz in digitalen Problemlösungen möglich. Sie bringt die neue Idee in die Diskussion, ein Signal als Überlagerung von Beispielfunktionen zu betrachten, die besonders einfach zu verstehen sind. Konkret sind dies die Funktionen $\sin kt$ und $\cos kt$ mit $k \in \mathbb{N}$ bei der Analyse periodischer Signale, oder allgemeiner die Funktion $t \mapsto e^{ikt}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bei beliebigen Signalen. Die daraus entwickelte Theorie ist zwar sehr reichhaltig und auch erfolgreich, aber doch in einem Punkt unbefriedigend. Die Fourier-Transformation liefert zu einem Signal detaillierte Information über die darin enthaltenen Frequenzen, dafür gehen aber Informationen darüber verloren, wann interessante Ereignisse eingetroffen sind. Die Information ist nicht ganz verloren, da sie immer noch in den Phasen der Koeffizienten stecken, aber sie sind für alle praktischen Zwecke nicht mehr nutzbar, da nur über eine Rücktransformation wieder erschliessbar.

Es stellt sich daher die Frage, ob es Möglichkeiten der Analyse von Signalen gibt, die nicht so radikal sind. Enthält ein Signal hohe Frequenzen, dann ändert sich das Signal rasch. Ein kurzes Ereignis passt auf diese Beschreibung, aber eine wesentliche Eigenschaft ist damit nicht beschrieben, nämlich wann es stattgefunden hat. Kann man Informationen über die in einem Signal vertretenen Frequenzen gewinnen, ohne auf Information darüber verzichten zu müssen, wann diese Ereignisse eingetreten sind?

Für eine umfassende Antwort müssen mehrere Teilfragen untersucht werden.

1. Welche Arten von Vergleichssignalen soll man verwenden, um solche kurzlebigen Ereignis-

se zu beschreiben? Die trigonometrischen Funktionen sind zweifellos naheliegend und ihre analytischen Eigenschaften einladend, doch ihre unendliche Ausdehnung entlang der Zeitachse torpedieren von vornherein die Möglichkeit der zeitlichen Lokalisierung von interessanten Ereignissen. Gibt es Funktionen, die ähnliche oszillatorische Form haben aber trotzdem über hilfreiche analytische Eigenschaften haben?

2. Wie vergleicht man ein gegebenes Signal mit einem Vergleichssignal? In der Fourier-Theorie lernt man einen ausgedehnten Satz von Integralformeln zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten. Wie müssen diese verallgemeinert werden?
3. Wie rekonstruiert man das Signal aus dem Resultat der Analyse? In der Fourier-Theorie lernt man Summenformeln für die Fourierreihen und Integralformeln für ausgedehnte Signale, doch wie ist das für die neuen Vergleichsfunktionen umzusetzen?
4. Die Praxis arbeitet mit diskreten Signalen. Wie lässt sich die Analyse diskretisieren? Unter welchen Voraussetzungen ist die Rekonstruktion des Signals aus der diskreten Analyse möglich?
5. Das Verfahren ist nur dann praktisch einsetzbar, wenn sowohl die Analyse als auch die Synthese mit effizienten numerischen Algorithmen möglich sind. Diese Algorithmen müssen ausserdem stabil sein, d. h. kleine Störungen in den Input-Daten oder Rundungsfehler während der Durchführung des Verfahrens dürfen sich nicht zu unbrauchbaren Resultaten aufschaukeln.
6. Welche Vergleichssignale sind für welchen Anwendungszweck geeignet?

Die nachkommenden Kapitel versuchen, Antworten auf diese Fragen zu geben.

In Kapitel 1 wird gezeigt, wie der Vergleich von Funktionen gleichbedeutend ist mit dem Skalarprodukt von Vektoren. Daraus entwickelt sich dann die Theorie der Hilberträume, der unendlich-dimensionalen komplexen Vektorräume mit Skalarprodukt.

Die bekannte Fourier-Theorie wird im Kapitel 2 in den neuen Rahmen des Hilbertraumes eingeordnet. Es demonstriert, wie die Hilbertraumtheorie die Vielfalt der vielen verschiedenen Varianten der Fouriertheorie vereinheitlicht.

Das Haar-Wavelet ist das älteste bekannte Wavelet. Es ist einfach und übersichtlich und kann als Beispiel für die Phänomene dienen, die bei komplizierteren Wavelets nicht so leicht zu verstehen sind. Es wird in Kapitel 3 im Detail besprochen.

Die stetige Wavelet-Transformation analysiert ein Signal auf höchst redundante Art. Die Hilbertraumtheorie wird in diesem Kapitel 4 hier erstmals allgemeiner angewendet. Wir lernen die Bedingungen kennen, die nötig sind, damit ein Signal aus seiner Wavelet-Transformation rekonstruierbar ist. Wir geben sogar eine Formel für die Rekonstruktion an.

Bei der Diskretisierung geht Information verloren. Das in Kapitel 5 diskutierte Abtast-Theorem von Shannon gibt an, unter welchen Voraussetzungen das Signal trotz des Informationsverlustes rekonstruierbar bleibt.

Die diskrete Wavelet-Transformation überträgt die stetige Wavelet-Transformation auf abgetastete Signale. Der Begriff der Multiskalen-Analyse wird in Kapitel 6 dazu verwendet, die angemessene Diskretisierung im "Frequenzraum" zu finden.

Aus der Multiskalen-Analyse lassen sich auch die schnellen Algorithmen ableiten, welche Wavelets überhaupt erst praktisch nützlich machen. Diese Algorithmen werden in Kapitel 7 hergeleitet.

Selbst mit einer Multiskalen-Analyse brauchen die Algorithmen noch nicht perfekt zu sein. Schon bei der Fourier-Transformation war das Problem, dass zur Berechnung der Fourier-Transformation alle Input-Daten notwendig sind. Dies bedeutet, dass das Transformationsresultat erst

verfügbar ist, wenn das ganze Signal abgetastet ist. Damit sind Verarbeitungen in Echtzeit von vornherein ausgeschlossen. Ein Ausweg besteht darin, dass die Transformationsoperationen sich auf einer nur sehr kleinen Anzahl Samples ausführen lassen. Genau dies wird erreicht, wenn die verwendeten Wavelets einen kompakten Träger haben. Solche Wavelets wurden von Ingrid Daubechies in den neunzehntziger Jahren konstruiert und waren massgebend für den schnellen Siegeszug der Wavelet-Transformation in den Anwendungen.

Natürlich sind die Daubechies-Wavelets nicht die einzigen praktisch nützlichen Wavelets. Die verbleibenden Kapitel zeigen eine Reihe von alternativen Wavelets, zum Beispiel in Kapitel 9 die Spline-Wavelets. Das Haar-Wavelet ist sowohl das einfachste Daubechies-Wavelet als auch das primäre Spline-Wavelet.

Kapitel 1

Sampling und Geometrie

In der Einleitung haben wir gesehen, dass wir eine Technik brauchen, Signale miteinander zu vergleichen. In diesem Kapitel bauen wir eine solche Technik auf und entwickeln auch eine geometrische Sprache dafür. Diese hilft uns, die Analyse- und Synthese-Formeln auf eine Art zu formulieren, die uns erlaubt die Gemeinsamkeiten besser zu verstehen unabhängig von der konkreten Form der verwendeten Vergleichsfunktionen. Es stellt sich heraus, dass das Konzept des Skalarproduktes aus der Vektorgeometrie genau die richtige Intuition liefert. Wir verallgemeinern diese Ideen auf Mengen von Funktionen. Wir erhalten so das Konzept des Hilbert-Raumes, der unendlichdimensionalen Verallgemeinerung des Vektorraumes mit einem Skalarprodukt.

In diesem Kapitel stellen wir im ersten Abschnitt den Zusammenhang zwischen Signalvergleich und Skalarprodukt her. Im zweiten Abschnitt formulieren wir den Begriff des Hilbertraumes und die grundlegendsten Eigenschaften. Die Aufgabe der Rekonstruktion eines Signals aus den Fourierkoeffizienten verallgemeinern wir in Abschnitt 7.3 auf beliebige Hilberträume.

In der linearen Algebra lernt man, in einem Vektorraum Problem mit einer Basis, wenn möglich mit einer orthonormierten Basis zu lösen. In der Praxis der Signalverarbeitung ist dies zu einschränkend. Dieses Phänomen findet man bereits in der elementaren Geometrie. Bienenwaben in der Ebene können natürlich mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem beschrieben werden, doch ein Koordinatensystem mit Achsen, die einen Winkel von 60° einschliessen, ist besser an das Problem angepasst. Genausogut ist jedoch auch ein Koordinatensystem mit Achsen, die einen Winkel von 120° einschliessen. Fügt man eine dritte Achse hinzu, kann man sich diesem Dilemma entziehen, dafür führt man Redundanz ein. Daher untersuchen wir in Abschnitt 4, wie man den Begriff der Basis zu einem Begriff eines Frames erweitern kann, welches zwar redundant ist, aber dank zusätzlicher Symmetrien besser geeignet ist.

1.1 Vergleich von Signalen und Vektorgeometrie

In diesem Abschnitt suchen wir eine geometrische Sprache für das Problem, zwei Signale zu vergleichen und ein Signal aus geeigneten Vergleichssignalen zusammenzusetzen.

1.1.1 Vergleich von Signalen

Beginnend mit Binärsignalen entwickeln wir ein anschauliches Mass für die “Ähnlichkeit” von zwei Signalen.

Binärsignale

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit zwei diskrete Signale mit Werten ± 1 :

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots, x_N &\in \{\pm 1\}, \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_N &\in \{\pm 1\}, \end{aligned}$$

und versuchen eine Masszahl für die Ähnlichkeit dieser beiden Zahlfolgen zu entwickeln.

Die Masszahl muss umso grösser sein, je öfter die Folgenglieder übereinstimmen, also $x_k = y_k$. Indizes k , für die die Folgenglieder entgegengesetzt sind, also $x_k \neq y_k$, müssen dagegen abgezogen werden. Eine mögliche Masszahl ist daher

$$\sum_{k=1}^N x_k y_k.$$

Sind die beiden Folgen identisch, wird die Summe N . Sind die beiden Folgen genau entgegengesetzt, also $x_k = -y_k$, dann ist sie $-N$. Die Masszahl ist damit abhängig von der Anzahl der Datenpunkte. Damit wird es nicht gut möglich, Funktionsvergleiche über verschieden lange Datensätze miteinander zu vergleichen. Das Problem wird gelöst, indem man durch N teilt und als Masszahl

$$p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

verwendet. Die Extremwerte werden jetzt $p = 1$ für übereinstimmende Signale und $p = -1$ für entgegengesetzte Signale.

Wenn die beiden Folgen nichts miteinander zu tun haben, dann erwarten wir, dass x_k und y_k jeweils etwa in der Hälfte der Fälle entgegengesetztes Vorzeichen haben werden, und gleiches in allen anderen. Dies führt auf $p = 0$. Die Zahl p könnte also als Mass dafür dienen, wie ähnlich die beiden Signale sind.

Dies ist allerdings nicht ganz realistisch. Warum sollten die Werte $+1$ und -1 gleich häufig sein? Man könnte dies korrigieren, indem man den mittleren Wert beider Folgen subtrahiert. So erhält man die Kovarianz

$$\text{cov}(x_k, y_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k. \quad (1.1)$$

Die Kovarianz verschwindet genau dann, wenn beiden Signale x_k und y_k völlig unkorreliert sind. Offenbar reicht es auch vollständig aus, wenn nur eines der Signale im Mittel den Wert 0 hat, dann verschwindet der zweite Term in (1.1).

Reellwertige Signale

Binäre Signale sind nicht allzu realistisch, wir möchten daher zwei beliebige reellwertige Signale vergleichen. Die früher verwendete Summe der Produkte der Signalwerte wird grösser, wenn die Signalwerte grösser werden, sie ist also nicht geeignet als absolutes Mass für die Ähnlichkeit zweier Funktionen. Wir müssen daher mit einem Faktor korrigieren, der die ungefähre Grösse der Absolutbeträge des Signals wiedergibt.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2$$

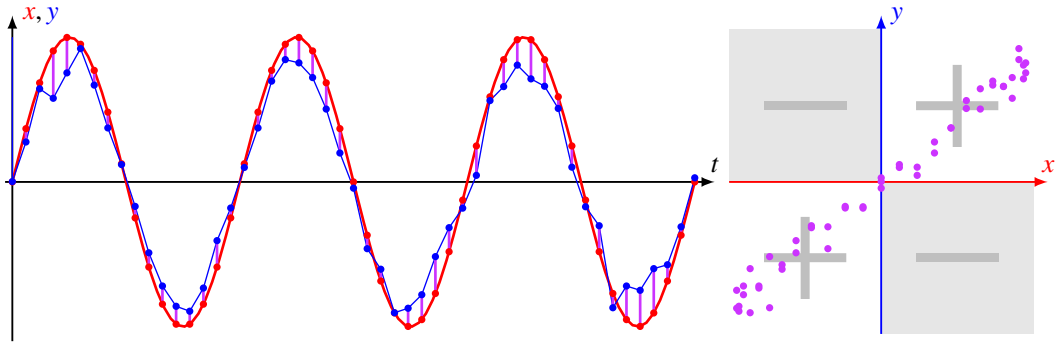


Abbildung 1.1: Vergleich eines Sinus-Signals $x(t)$ mit einem verrauschten Sinus-Signal $y(t)$. Die Punkte $(x(t), y(t))$ befinden sich hauptsächlich im ersten und dritten Quadranten.

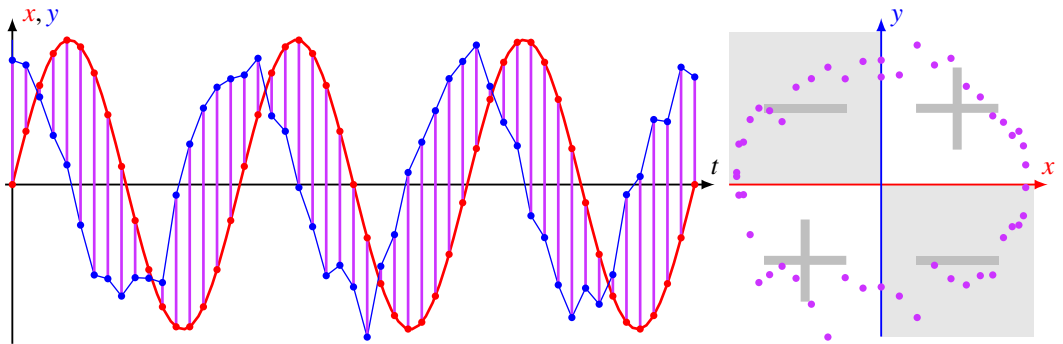


Abbildung 1.2: Vergleich eines Sinus-Signals $x(t)$ mit einem verrauschten Kosinus-Signal $y(t)$. Die Punkte $(x(t), y(t))$ befinden sich in ungefähr gleicher Zahl in allen vier Quadranten, die Kovarianz wird klein sein.

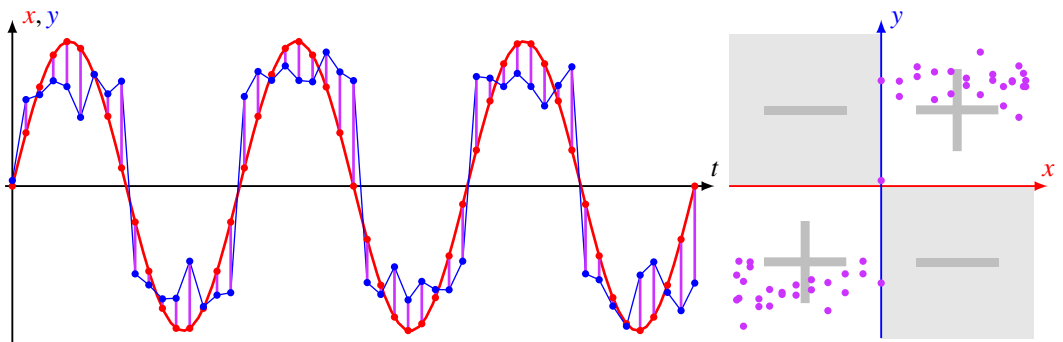


Abbildung 1.3: Vergleich eines Sinus-Signals $x(t)$ mit einem verrauschten Rechteck-Signal $y(t)$. Die Punkte $(x(t), y(t))$ befinden sich hauptsächlich im ersten und dritten Quadranten.

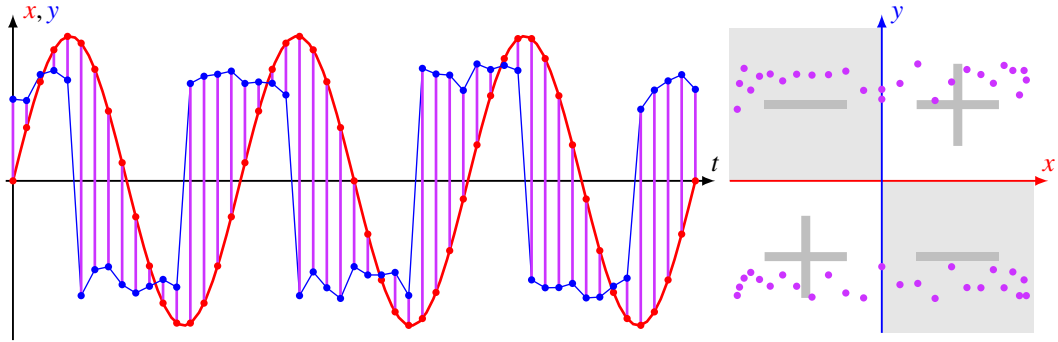


Abbildung 1.4: Vergleich eines Sinus-Signals $x(t)$ mit einem verrauschten und phasenverschobenen Rechteck-Signal $y(t)$. Die Punkte $(x(t), y(t))$ befinden sich in ungefähr gleicher Zahl in allen vier Quadranten, die Kovarianz wird klein sein.

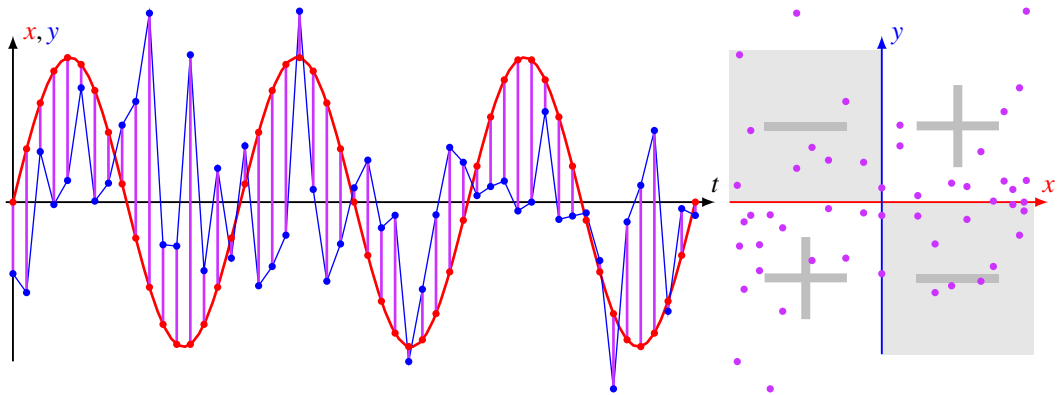


Abbildung 1.5: Vergleich eines Sinus-Signals $x(t)$ mit einem weissen Rausch-Signal $y(t)$ (normalverteilte Zufallswerte mit Erwartungswert 0). Die Punkte $(x(t), y(t))$ befinden sich in ungefähr gleicher Zahl in allen vier Quadranten, die Kovarianz wird klein sein.

verwenden. Diese haben allerdings die falsche Masseinheit, nämlich die des Quadrates des Signals, wir müssen also ihre Quadratwurzel verwenden. Für Signale mit Mittelwert 0 führt dies auf

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2}} \quad \text{oder} \quad r = \frac{\text{cov}(x_k, y_k)}{\sqrt{\text{var}(x_k)} \sqrt{\text{var}(y_k)}}$$

Die Grösse r ist auch bekannt als der Korrelationskoeffizient.

In den Abbildung 1.1 bis 1.5 wird ein Sinus-Signal mit Werten $x(t) = \sin t$ abgetastet und verglichen mit einer Reihe anderer Signale, die alle ebenfalls den Mittelwert 0 haben. Wir wollen beurteilen, wie gut die Summe

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k y_k$$

wiedergibt, ob die Funktionen etwas miteinander zu tun haben. Dazu wird im linken Teil der Abbil-

dung jeweils das Sinus-Signal $x(t)$ rot eingezeichnet und das damit zu vergleichende Signal $y(t)$ blau. Der Unterschiede zwischen den beiden Werten wird durch einen violetten Balken eingezeichnet.

Im rechten Teil der Abbildung wird dann für jeden Zeitpunkt das Wertepaar $(x(t), y(t))$ als violetter Punkt eingetragen. Punkte im ersten und dritten Quadranten führen auf einen positiven Summanden in der Summe, Punkte im zweiten und vierten Quadranten führen auf einen negativen Beitrag. Die Summe wird also besonders gross, wenn die violetten Punkte vor Allem im ersten und dritten Quadranten liegen, und besonders negativ, wenn sie vor Allem im zweiten und vierten Quadranten liegen.

Liegen die violetten Punkte in allen Quadranten gleichmässig, ist davon auszugehen, dass sich die positiven und negativen Werte des Produktes im Mittel wegheben werden, dass also die Summe der Produkte nur einen kleinen Werte haben wird.

Die Abbildungen 1.1 und 1.3 zeigen den Vergleich des Sinus-Signals mit einer verrauschten Version eines Sinus-Signals bzw. eines Rechteck-Signals $\text{sign}(\sin(t))$. In beiden Fällen liegen die violetten Punkte vorzugsweise im ersten und dritten Quadranten,

In den anderen Abbildungen wird das Sinus-Signal der Reihe nach mit einem verrauschten Kosinus-Signal (Abbildung 1.2), einem phasenverschobenen verrauschten Rechtecksignal (Abbildung 1.4) und mit einem reinen weissen Rauschen (Abbildung 1.5) verglichen. In diesen Fällen verteilen sich die violetten Punkte gleichmässig über alle vier Quadranten, man erwartet also einen kleinen Wert der Summe, was eine geringe Ähnlichkeit der blauen Signale mit dem Sinus-Signal ausdrückt.

1.1.2 Vektorschreibweise

Die Ausführungen des letzten Abschnitts haben gezeigt, dass die Summe der Produkte der Signale eine Masszahl für die Ähnlichkeit zweier Signale ist. Die Summe der Produkte können wir aber als Skalarprodukte von Signalvektoren schreiben:

$$\sum_{k=1}^N x_k y_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Den Vorfaktor $\frac{1}{N}$ lassen wir für den Moment noch ausser Betracht.

In der dreidimensionalen Vektorgeometrie können wir mit dem Skalarprodukt zweier Vektoren auch den Zwischenwinkel

$$\cos \alpha = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}$$

berechnen. Die beiden Vektoren x und y sind gleich, wenn das Skalarprodukt den maximal möglichen Wert $|x| \cdot |y|$ annimmt. Die Vektoren sind entgegengesetzt, wenn $x \cdot y = -|x| \cdot |y|$ ist. Für alle Werte dazwischen sind die Vektoren linear unabhängig. Mindestens die geometrische Interpretation des Skalarproduktes gibt also wieder, was wir unter “ähnlichen” Vektoren verstehen möchten.

Die geometrische Interpretation ist aber nicht unbedingt nötig. Wir brauchen nur, dass zwei Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn das Skalarprodukt seinen maximal oder minimal möglichen Wert annimmt. Dies gilt jedoch für jede Art von Skalarprodukt, nicht nur das oben verwendete. Es gilt sogar auch für den Fall kontinuierlicher Signale, also von Funktionen $t \mapsto x(t)$, wenn wir in der Lage sind, die mathematische Struktur des dreidimensionalen geometrischen Raumes mit Skalarprodukt in ausreichender Allgemeinheit nachzubilden.

1.1.3 Vektorraum und Skalarprodukt

Dazu müssen wir zunächst die Objekte definieren, deren Skalarprodukt wir nehmen wollen.

Definition 1.1. Ein Vektorraum über den reellen Zahlen \mathbb{R} ist eine Menge V von Objekten, genannt Vektoren, versehen mit zwei Operationen, der Addition von Vektoren, geschrieben $+$, und der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, sowie einem ausgezeichneten Element $0 \in V$, mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Addition ist assoziativ: $(u + v) + w = u + (v + w)$ für $u, v, w \in V$.
2. Die Addition ist kommutativ: $u + v = v + u$ für $u, v \in V$.
3. Die Multiplikation ist assoziativ: $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ für
4. Der Vektor $0 \in V$ ist neutral bezüglich der Addition: $u + 0 = u$ für $u \in V$.
5. Zu jedem Vektor v gibt es einen Vektor $-v \in V$ derart, dass $v + (-v) = 0$. $u \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ für $u \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ für $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die n -dimensionalen Spalten-Vektoren \mathbb{R}^n bilden ganz offensichtlich einen Vektorraum über \mathbb{R} .

Definition 1.2. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

heißt ein Skalarprodukt, wenn

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear im ersten Argument:

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v \rangle = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle + \lambda_2 \langle u_2, v \rangle \quad (1.2)$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear im zweiten Argument:

$$\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle u, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle u, v_2 \rangle \quad (1.3)$$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit: $\langle u, u \rangle > 0$ und $\langle u, u \rangle = 0$ genau dann, wenn $u = 0$.

Für Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist das gewohnt Punkt-Produkt

$$u \cdot v = u^t v = \langle u, v \rangle$$

ein Skalarprodukt. Eine kurze Überlegung erfordert nur der letzte Punkt der Definition. Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist

$$\langle u, u \rangle = u^t u = \sum_{k=1}^n u_k^2 \geq 0.$$

Wenn es 0 ist, dann müssen alle Komponenten $u_k = 0$ sein, also $u = 0$.

Definition 1.3. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , dann ist die zugehörige Norm der Vektoren definiert als

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Die Definition der Norm ist sinnvoll, weil die Eigenschaft des Skalarprodukts, positiv definit zu sein, sicherstellt, dass die Wurzel immer wohldefiniert ist. Jedes Skalarprodukt hat automatisch die Eigenschaft, dass die Extremwerte des Skalarproduktes nur angenommen werden, wenn die Faktoren linear abhängig sind. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 1.4. Für eine Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (1.4)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis. Seien $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$. Das Skalarprodukt ist positiv definit, also

$$0 \leq \|u + tv\|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $u + tv = 0$. Wir berechnen

$$= \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2$$

Die rechte Seite ist eine quadratische Funktion $c + bt + at^2$, die ihr Minimum bei $t = -b/2a = -\langle u, v \rangle / \|v\|^2$ annimmt. Für den kleinstmöglichen Wert gilt daher

$$0 \leq \|u\|^2 - 2 \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2}$$

Multiplizieren wir mit $\|v\|^2$ und bringen das Skalarprodukt auf die linke Seite, erhalten wir

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn $u + tv = 0$ ist. □

Die Werte der Norm bestimmen das Skalarprodukt bereits vollständig. Die Linearität des Skalarproduktes bedeutet nämlich

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ \Rightarrow \quad \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Bildung der Norm aus dem Skalarprodukt ist also nicht mit Informationsverlust verbunden.

1.1.4 Skalarprodukt und orthonormierte Basis

In der linearen Algebra lernt man, dass eine orthonormierte Basis besonders gut geeignet ist für die Beschreibung von Vektoren.

Definition 1.5. Eine Menge von Vektoren $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ heisst orthonormiert, wenn

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}.$$

Sie heisst eine Basis von V , wenn jeder Vektor von V sich als Linearkombination der Vektoren e_k schreiben lässt.

Die Standardbasisvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

ist natürlich eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^n . Mit dem früher verwendeten Skalarprodukt sind die e_k orthonormiert.

Die besondere Bedeutung einer orthonormierten Basis ist, dass sich damit ein Vektor $v \in V$ auf eine Folge \hat{v}_k von Zahlen reduzieren lässt, mit der sich die relevanten Operationen des Skalarproduktes immer noch durchführen lassen. Dies wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 1.6. Ist $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormierte Basis des Vektorraumes V , dann lässt sich jeder Vektor auf genau eine Art in der Form

$$v = \sum_{k=1}^n \hat{v}_k e_k \tag{1.6}$$

schreiben, und für die Koeffiziente gilt

$$\hat{v}_k = \langle v, e_k \rangle. \tag{1.7}$$

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren gilt die Plancherel-Identität

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \hat{u}_k \hat{v}_k \tag{1.8}$$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^n \hat{u}_k^2. \tag{1.9}$$

Beweis. Da die Vektoren e_k eine Basis von V bilden, ist klar, dass es nur eine Darstellung von v als Linearkombination der Vektoren e_k geben kann. Wir müssen nur noch nachprüfen, ob die Koeffizienten die angegebene Form haben. Dazu berechnen wir das Skalarprodukt der Summe in (1.6) mit einem Vektor e_k :

$$\begin{aligned} \langle v, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^n \hat{v}_l e_l, e_k \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \hat{v}_l \langle e_l, e_k \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \hat{v}_l \delta_{kl} = \hat{v}_k. \end{aligned}$$

Jetzt können wir das Skalarprodukt zweier Vektoren auswerten, indem wir von beiden die Darstellung in der Orthonormalbasis verwenden:

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \hat{u}_k e_k, \sum_{l=1}^n \hat{v}_l e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{u}_k \hat{v}_l \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{u}_k \hat{v}_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n \hat{u}_k \hat{v}_k.$$

Damit ist (1.8) bewiesen. (1.9) folgt, indem man $v = u$ setzt. \square

Dieser Satz zeigt, dass die Festlegung einer orthonormierten Basis von V viel mehr erreicht als auf den ersten Blick ersichtlich. Die Wahl der Basis legt eine lineare Abbildung

$$\mathcal{T}: V \rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto (\hat{v}_k \mid 1 \leq k \leq n)$$

fest. Die Syntheseformel (1.7) definiert die zugehörige Umkehrabbildung

$$\mathcal{T}^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V : (a_k \mid 1 \leq k \leq n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

Die Plancherel-Identität (1.8) besagt aber zusätzlich, dass die Abbildung \mathcal{T} das Skalarprodukt in V überführt in das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n . Die Abbildung \mathcal{T} ist also eine Isometrie der beiden Vektorräume V und \mathbb{R}^n . Man verliert also nichts, wenn man ein Problem über Vektoren in V in den (hoffentlich) einfacheren Vektorraum \mathbb{R}^n transportiert, dort bearbeitet und die Resultate mit Hilfe von \mathcal{T}^{-1} wieder in V zurückübersetzt.

1.2 Funktionsräume

Die abgetasteten Signale haben einen endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt gebildet und darin könnte man auch bereits ein ansprechend interessante Theorie aufbauen. Zum Beispiel könnte man bereits eine Form der diskreten Fourier-Transformation entwickeln, wie das zum Beispiel in **[buch:mathsem-klima]** geschieht. Für die Entwicklung der Wavelet-Theorie ist es notwendig, dass Signale entlang der Zeitachse beliebig fein aufgelöst werden können, was mit einem bereits abgetasteten Signal nicht möglich ist. Es muss daher eine Theorie entwickelt werden, in der man mit Funktionen genau gleich arbeiten kann wie mit den Vektoren von Abtastwerten. Insbesondere wird angestrebt, Skalarprodukte von Funktionen zu bilden und orthonormierte Basen zu konstruieren. Dieses Ziel wird allerdings erst in Kapitel 2 erreicht werden.

1.2.1 Vektorräume von Funktionen

Sei X eine Menge, dann ist

$$\mathbb{R}^X = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$$

die Menge der Funktionen auf X mit reellen Werten. Sie kann auf natürlich Art und Weise zu einem Vektorraum gemacht werden. Dazu müssen die Operationen Addition und Multiplikation mit Skalaren definiert werden

Definition 1.7. Die Vektorraum-Operationen auf \mathbb{R}^X sind definiert durch

$$\begin{aligned} f, g \in \mathbb{R}^X &\Rightarrow (f + g): X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x) \\ f \in \mathbb{R}^X, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow (\lambda f): X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Beispiel. Für $X = \{1, \dots, N\}$ ist $f \in \mathbb{R}^X$ gleichbedeutend mit der Vorgabe der Funktionswerte $(f(1), \dots, f(N))$. Diese können auch als Spaltenvektoren

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(N) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Die Rechenoperationen in \mathbb{R}^X und \mathbb{R}^N sind gleichbedeutend, wie man zum Beispiel für die Addition verifizieren kann:

$$\overrightarrow{(f+g)} = \begin{pmatrix} (f+g)(x_1) \\ \vdots \\ (f+g)(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + g(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) + g(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix} = \vec{f} + \vec{g}.$$

\mathbb{R}^X ist also nur eine neue Schreibweise für den altbekannten Vektorraum \mathbb{R}^N . ○

Die Konstruktion wird interessant, wenn X zusätzliche Struktur hat. Wenn X eine Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, dann kann man sich auf stetige Funktionen beschränken und daraus einen Vektorraum bauen.

Definition 1.8. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$, dann ist die Menge der

$$C_{\mathbb{R}}(X) = C(X, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^X \mid f \text{ ist stetig}\}$$

Diese Definition ist kompatibel mit den Vektorraumoperationen, denn in der Analysis lernt man, dass eine Linearkombination stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Man kann sogar einen Begriff des Abstands zwischen zwei Funktionen definieren mit Hilfe der Norm:

Definition 1.9. Die Norm einer Funktion $f \in C(X, \mathbb{R})$ ist

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

1.2.2 Translation und Dilatation

Der Definitionsbereich \mathbb{R} zeichnet sich durch die darin zur Verfügung stehenden Rechenoperationen aus. Man kann zu einem Argument einen konstanten Wert hinzuaddieren oder mit einer Zahl multiplizieren, bevor man eine Funktion auswertet. Daraus ergeben sich die zwei Operationen der Translation und der Dilatation.

Definition 1.10. Sei f eine Funktion auf \mathbb{R} mit Werten in Y . Dann setzt man

$$\begin{array}{ll} T_b f : \mathbb{R} \rightarrow Y : t \mapsto f(t-b) & \text{Translation} \\ D_a f : \mathbb{R} \rightarrow Y : t \mapsto f(t/a) & \text{Dilatation} \end{array}$$

Die Wirkung der beiden Operatoren ist in den Abbildungen 1.6 und 1.7 dargestellt. Der Operator D_a dehnt den Graphen der Funktion entlang der t -Achse um den Faktor a während der Operator T_b den Graphen der Funktion um den Betrag b entlang der t -Achse verschiebt.

Satz 1.11. Translation T_b und Dilatation D_a sind lineare Abbildungen. Die beiden Operatoren vertauschen nicht, vielmehr gilt $T_{ab} D_a = D_a T_b$.

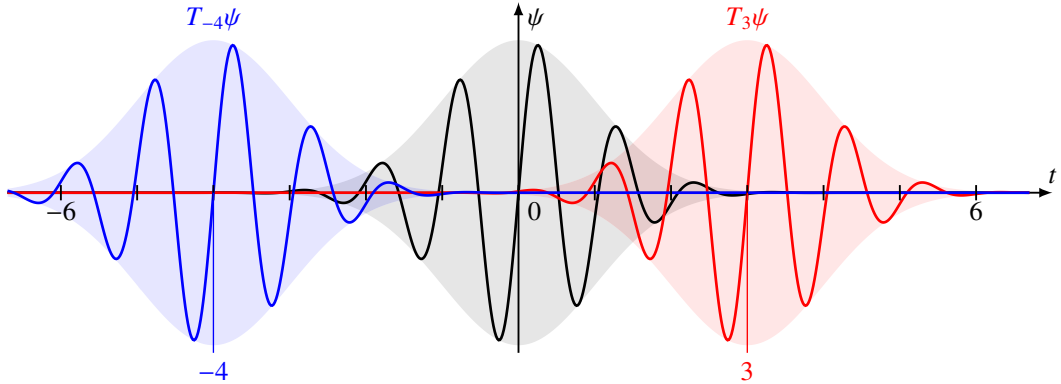


Abbildung 1.6: Wirkung des Operators T_b auf das Gabor-Wavelet $\psi(t) = e^{-t^2/2} \sin(6t)$, der Graph von $T_b\psi$ ist um b nach rechts verschoben.

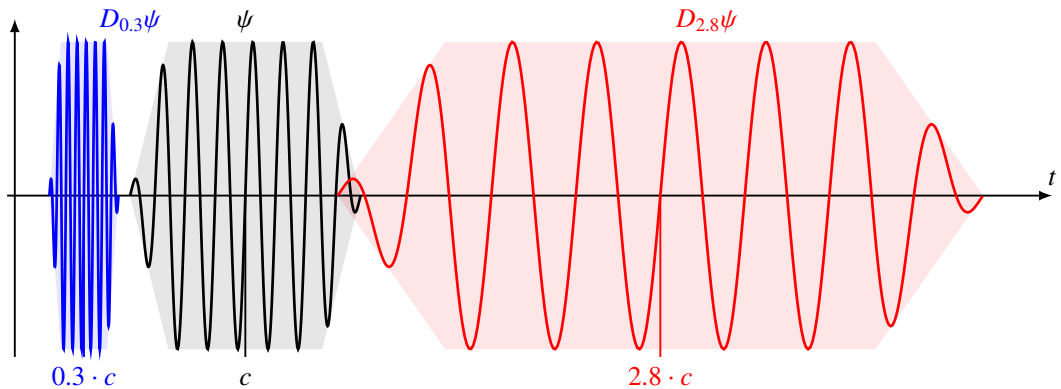


Abbildung 1.7: Wirkung des Operators D_a auf ein im Punkt c zentriertes Wavelet ψ . Das Wavelet $D_a\psi$ ist zentriert im Punkt $a \cdot c$.

Beweis. Die Linearität der Operatoren wird durch Nachrechnen verifiziert. Für eine Linearkombination $\lambda f + \mu g$ zweier Funktion f und g gilt:

$$\begin{aligned} D_a(\lambda f + \mu g)(t) &= (\lambda f + \mu g)(t/a) = \lambda f(t/a) + \mu g(t/a) = \lambda(D_a f)(t) + \mu(D_a g)(t), \\ T_b(\lambda f + \mu g)(t) &= (\lambda f + \mu g)(t - b) = \lambda f(t - b) + \mu g(t - b) = \lambda(T_b f)(t) + \mu(T_b g)(t), \end{aligned}$$

Ohne Argumente geschrieben heisst dies

$$\begin{aligned} D_a(\lambda f + \mu g) &= \lambda D_a f + \mu D_a g \\ T_b(\lambda f + \mu g) &= \lambda T_b f + \mu T_b g \end{aligned}$$

Damit ist die Linearität bewiesen.

Für die Vertauschungsregel müssen die beiden Seiten der Regel berechnet werden. Die Wirkung der beiden Operatoren in verschiedener Reihenfolge ist:

$$(T_b f)(t) = f(t - b)$$

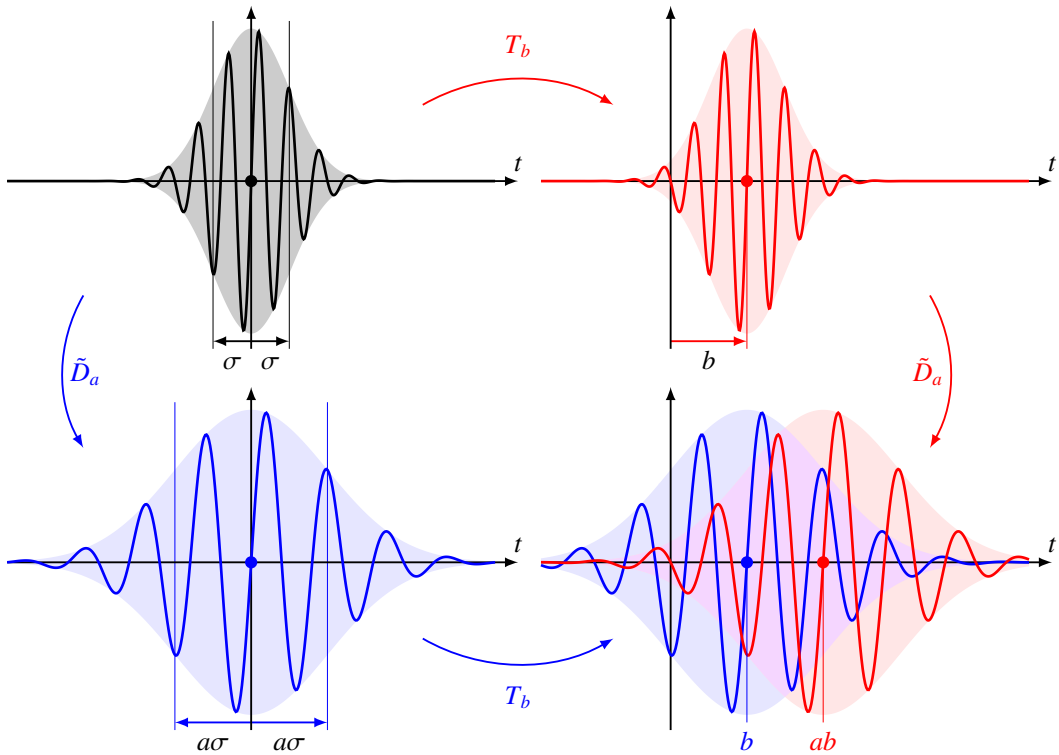


Abbildung 1.8: Die Operatoren T_b und D_a vertauschen nicht. Der rote Pfad wendet erst T_b und dann D_a an, der blaue zuerst D_a und dann erst T_b . In beiden Fällen erhält man ein um den Faktor a gestrecktes Wellenpaket. Im Fall $T_b \circ D_a$ erhält man ein im Punkt b zentriertes Wellenpaket (blaue), während es im Falle $D_a \circ T_b$ im Punkt ab zentriert ist (rot). Wendet man in der unteren Zeile statt T_b den Operator T_{ab} an, kommen die beiden Wellenpakete zur Deckung, was die Vertauschungsregel von Satz 1.11 bestätigt.

$$\begin{aligned}(D_a f)(t) &= f(t/a) \\ (D_a T_b f) &= (T_b f)(t/a) = f(t/a - b) = f((t - ab)/a) \\ (T_{ab} D_a f)(t) &= (D_a f)(t - ab) = f((t - ab)/a)\end{aligned}$$

Daraus kann man ablesen, dass $T_{ab} D_a = D_a T_b$. □

Die Abbildung 1.8 illustriert die Vertauschungsregel für die Operatoren T_b und D_a und liefert einen “graphischen” Beweis für die Vertauschungsregel von Satz 1.11.

Satz 1.12. Die einzigen stetigen Funktionen, die Eigenvektoren von T_b sind für jeden beliebigen Wert von b sind die Funktionen $t \mapsto e^{i\omega t}$.

Beweis. Sei f eine Eigenfunktion aller Operatoren T_b mit Eigenwert $\lambda(b)$. f kann keine Nullstelle haben. Wäre nämlich $f(t_0) = 0$, dann würde folgen

$$(T_b f)(t_0) = f(t_0 - b) = \lambda(b)f(t_0) = 0,$$

die Funktion würde identisch verschwinden.

Weiter kann man aus der Stetigkeit von f schliessen, dass auch

$$\lambda(b) = \frac{f(t)}{f(t-b)}$$

eine stetige Funktion von b ist, die keine Nullstellen hat. □

Dieser Satz erklärt die besondere Stellung, die den komplexen Exponentialfunktionen in der Fourier-Theorie zukommt.

1.3 Hilbertraum

Die bisher entwickelte Theorie ist aus zwei Gründen nicht ausreichend für das, was wir vorhaben.

Ein endlichdimensionaler Vektorraum ist sicher ein geeigneter Rahmen zur Beschreibung eines Signals, welches an endlich vielen Stellen abgetastet wurde. Für kontinuierliche Signale reicht er aber nicht. Zunächst ist die Menge aller Funktionen zwar ein Vektorraum, aber es ist aussichtslos, eine endliche orthonormierte Basis zu finden. Vielmehr werden wir sehen, dass bereits der Raum der stetigen Funktionen auf einem Intervall unendlich viele Funktionen enthält, die in einem noch zu definierenden Sinn aufeinander senkrecht stehen. Wir müssen daher den Begriff erweitern, so dass auch unendlichdimensionale Vektorräume behandelt werden können.

In der Praxis tauchen nicht nur Signale mit reellen Werten auf, sondern auch solche mit komplexen Werten. An entscheidenden Stellen im vorangegangenen Abschnitt, insbesondere bei der Konstruktion der Norm, haben wir verwendet, dass $0 \leq x^2$ ist für $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{C}$ ist dies nicht mehr wahr. Der bisher formulierte Begriff des Skalarproduktes funktioniert daher nicht für komplexe Signale.

1.3.1 Komplexe Vektorräume mit Skalarprodukt

Es hindert uns nichts daran, in der Definition eines Vektorraums für die Menge der Skalare auch komplexe Zahlen zuzulassen. Ganz allgemein kann ein Vektorraum sinnvoll definiert werden, wenn die Menge der Skalare ein sogenannter Körper ist, wenn also die Addition und die Multiplikation mit von 0 verschiedenen Skalaren umkehrbar sind. Dies trifft natürlich für komplexe Zahlen zu, aber auch für \mathbb{Q} .

Die Definition der Länge eines Vektors und des Skalarproduktes auf dem Vektorraum \mathbb{C}^n erfordert aber etwas mehr Sorgfalt. Die Quadratsumme der Komponenten funktioniert sicher nicht, da komplexe Zahlen negative Quadrate haben können. Die naheliegende Norm ist daher

$$\|v\| = \sum_{k=1}^n |v_k|^2. \quad (1.10)$$

Sie ist für alle von 0 verschiedenen Vektoren positiv, also positiv definit. Wir wollen diese Norm aber aus einem Skalarprodukt gewinnen. Eine Möglichkeit ist

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \bar{v}_k. \quad (1.11)$$

Die zugehörige Norm ist (1.10).

Allerdings ist diese Bildung nicht mehr linear im zweiten Faktor. Multipliziert man v mit λ erhält man

$$\langle u, \lambda v \rangle = \sum_{k=1}^n u_k \bar{\lambda} \bar{v}_k = \bar{\lambda} \sum_{k=1}^n u_k \bar{v}_k = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$$

Man sagt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist *konjugiert linear* im zweiten Argument. Im ersten Argument ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aber immer noch linear.

Die Konstruktion (1.11) ist auch nicht mehr symmetrisch, vielmehr gilt:

$$\langle v, u \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \bar{u}_k = \overline{\sum_{k=1}^n u_k \bar{v}_k} = \overline{\langle u, v \rangle}.$$

Vertauschen der Faktoren führt zum konjugiert komplexen Wert des Skalarproduktes. Man nennt diese Symmetrieeigenschaft von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *hermitesch*. Hermitesche Formen zeichnen sich dadurch aus, dass

$$\overline{\langle u, u \rangle} = \langle u, u \rangle.$$

Nur die reellen Zahlen sind zu sich selbst konjugiert komplex, man kann also schliessen, dass für eine hermitesche Form $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ ist.

Dies führt uns auf die folgende Definition eines Skalarproduktes für einen komplexen Vektorraum.

Definition 1.13. *Eine Funktion*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

heisst ein *komplexes Skalarprodukt*, wenn gilt:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear im ersten Argument.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist konjugiert linear im zweiten Argument.
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hermitesch, d. h. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit, d. h. es gilt $\langle u, u \rangle \geq 0$ mit Gleichheit nur falls $u = 0$.

Die Herleitung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung hat die Symmetrie und die Bilinearität des Skalarproduktes verwendet, sie lässt sich also auf diese hermitesche Skalarprodukt nicht direkt übertragen.

Satz 1.14. *Sei V ein komplexer Vektorraum mit komplexem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis. Wie im reellen Fall berechnen wird die Norm von $u + tv$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + tv\|^2 &= \langle u + tv, u + tv \rangle = \|u\|^2 + \bar{t} \langle u, v \rangle + t \langle v, u \rangle + |t|^2 \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \bar{t} \langle u, v \rangle + t \overline{\langle u, v \rangle} + |t|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $u + tv = 0$. Die mittleren beiden Terme enthalten das Skalarprodukt, durch die Wahl $t = -\langle u, v \rangle / \|v\|^2$ wird daraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\|^2 - 2 \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} + \left(\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|^2} \right)^2 \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\|v\|^2$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - |\langle u, v \rangle|^2 \\ \Leftrightarrow \quad |\langle u, v \rangle|^2 &\leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $u + tv = 0$. Damit ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auch für den komplexen Fall bewiesen. \square

Auch für ein komplexes Skalarprodukt gilt, dass die Werte der Norm das Skalarprodukt eindeutig bestimmen. Da die Norm jedoch immer reelle Werte annimmt, ist etwas mehr Arbeit erforderlich, um den Imaginärteil des Skalarproduktes wiederzugewinnen. Zunächst rechnen wir wie im Fall des reellen Skalarproduktes

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ \Rightarrow \quad \operatorname{Re} \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2). \end{aligned}$$

Um den Imaginärteil zu bekommen, multiplizieren wir v mit i :

$$\begin{aligned} \|u + iv\|^2 &= \|u\|^2 + \langle u, iv \rangle + \langle iv, u \rangle + \|iv\|^2 \\ &= \|u\|^2 - i \langle u, v \rangle + i \langle v, u \rangle + |i|^2 \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i (\langle u, v \rangle - \overline{\langle u, v \rangle}) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i (2i \operatorname{Im} \langle u, v \rangle) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Im} \langle u, v \rangle \\ \Rightarrow \quad \operatorname{Im} \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2} (\|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \end{aligned}$$

Zusammengesetzt finden wir die Formel

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) + \frac{i}{2} (\|u + iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \quad (1.12)$$

für das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren, ausgedrückt ausschliesslich mit der Norm. Die Identität (1.12) ist auch bekannt unter dem Namen Polar-Identität.

Das Skalarprodukt erlaubt auch in einem komplexen Hilbertraum den Begriff der orthonormierten Basis zu definieren.

Satz 1.15. Wenn die Vektoren $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ eine orthonormierte Basis von V bilden, dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination

$$v = \sum_{k=1}^n \hat{v}_k e_k$$

der Vektoren e_k schreiben. Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt und können mit Hilfe des Skalarproduktes als

$$\hat{v}_k = \langle v, e_k \rangle$$

gefunden werden. Ausserdem gilt für das Skalarprodukt die Plancherel-Identität

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_{k=1}^n \hat{u}_k \bar{\hat{v}}_k \\ \|u\|^2 &= \sum_{k=1}^n |\hat{u}_k|^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung $T: V \rightarrow \mathbb{C}^n : v \mapsto (\hat{v}_k \mid 1 \leq k \leq n)$ ist also wie im reellen Fall eine Isometrie.

1.3.2 Norm und Grenzwert in einem Hilbertraum

Bis jetzt haben wir immer in endlichdimensionalen Vektorräumen gearbeitet. Der tiefere Grund dafür war, dass die Arbeit mit unendlich vielen Basisvektoren e_k , $k \in \mathbb{N}$, erfordert, dass Ausdrücken der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{1.13}$$

einen Sinn gegeben werden muss. Die Algebra reicht dazu nicht, denn zum Ende der Berechnung einer Summe ohne Ende kann man grundsätzlich nicht gelangen. Ein Ausdruck wie (1.13) kann daher nur im Sinne eines Grenzwertes verstanden werden. In einem Vektorraum ist aber a priori nicht definiert, wie man die Approximation eines Vektors v durch eine Folge von Vektoren v_k zu verstehen hat.

Mit der Einführung des Skalarproduktes und der daraus abgeleiteten Norm ändert sich das.

Definition 1.16. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Eine Folge $v_k \in V$ konvergiert gegen den Vektor $v \in V$ für $k \rightarrow \infty$, wenn

$$\|v_k - v\| \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v.$$

Man erwartet, dass eine Folge einen Grenzwert hat, wenn die Folgenglieder immer näher zueinander rücken.

Definition 1.17. Eine Folge $v_k \in V$ heisst Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\|v_k - v_m\| < \varepsilon$ sobald $k, m > N(\varepsilon)$.

Leider ist nicht garantiert, dass in einem komplexen Vektorraum eine Cauchy-Folge auch tatsächlich einen Grenzwert hat.

Beispiel. Wir betrachten den Vektorraum

$$c_0 = \{X = (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots) \mid x_i \in \mathbb{C}\}$$

von Folgen, die nur endlich viele Terme haben, die von 0 verschieden sind. Wir können diesem Vektorraum ein Skalarprodukt verpassen, indem wir

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

setzen. Da in beiden Folgen nur endlich viele Terme von 0 verschieden sind, ist die Summe auf der rechten Seite eine endliche Summe. Ganz offensichtlich ist dies ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt. Jetzt betrachten wir die Folge

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ X_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots) \\ X_3 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \dots) \\ &\vdots \\ X_k &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir behaupten, dies sei ein Cauchy-Folge. Dazu müssen wir Differenzen $\|X_n - X_m\|$ untersuchen. Wir dürfen annehmen, dass $m < n$ ist. Dann ist

$$\|X_n - X_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (1.14)$$

Auf der rechten Seite steht ein Reststück der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

die Euler als erster berechnet hat. Er hat den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ gefunden. Die Tatsache, dass die Reihe konvergiert heisst aber auch, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ gibt derart, dass die rechte Seite von (1.14) kleiner ist als ε , wenn nur $m, n > N(\varepsilon)$. Die Folge (X_k) ist also tatsächlich ein Cauchy-Folge.

Als Grenzwert kommt nur die Folge

$$X = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$$

in Frage. Und tatsächlich ist

$$\|X - X_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad (1.15)$$

wieder ein Reststück der Reihe von Euler. Also konvergiert tatsächlich X_k gegen X .

Die Folge X ist aber gar nicht in c_0 , da alle Folgenglieder von 0 verschieden sind. Der Grenzwert einer Folge in c_0 muss also nicht mehr in c_0 sein.

Genau genommen haben wir schon in (1.15) gemogelt. Die Abstandsmessung in c_0 ist ja mit Hilfe einer endlichen Summe definiert, hier haben wir aber eine unendliche Summe. \circ

Die Rekonstruktion eines Vektors mit Hilfe einer Linearkombination von Basisvektoren kann also grundsätzlich nur dann funktionieren, wenn verlangt wird, dass es zu jeder Cauchy-Folge von Vektoren auch tatsächlich einen Grenzwert gibt.

Definition 1.18. Ein komplexer Vektorraum V mit Skalarprodukt heisst vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Vektoren in V einen Grenzwert in V hat. Ein solcher Vektorraum heisst Hilbertraum.

Der Vektorraum c_0 des obigen Beispiels lässt sich leicht zu einem Hilbertraum machen.

Beispiel. Sei l^2 der komplexe Vektorraum der quadratsummierbaren komplexen Zahlfolgen (x_k) , d. h.

$$l^2 = \left\{ (x_k) \left| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right. \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

\circ

1.3.3 Basis eines Hilbertraumes

1.4 Frames

Eine orthonormierte Basis eines Hilbertraumes ist sehr starr. Es ist nicht möglich, auch nur einen einzigen Vektor ein kleines Bisschen zu ändern, ohne die Eigenschaften, die zum Satz 1.6 geführt haben, zu zerstören. Im Hinblick auf die numerische Behandlung von Signalen ist das ein unerwünschter Zustand. Rundungsfehler werden unvermeidlich dazu führen, dass solche strengen Strukturen nur näherungsweise im Computer nachgebildet werden können.

Die Zerlegung eines Vektors v in einer Orthonormalbasis enthält keine Redundanz. Geht einer der Koeffizienten \hat{v}_k verloren, gibt es keine Chance, den Vektor zu rekonstruieren. Auch diese Situation ist unerwünscht, denn durch Rundungsfehler geht mindestens ein Teil der Information in einem Koeffizienten verloren. Wir suchen daher nach einer Verallgemeinerung des Basis-Begriffs, welche auf kontrollierte Weise Redundanz in die Koeffizienten \hat{v}_k bringt und damit eine robustere Konstruktion ermöglicht.

1.4.1 Ein geometrisches Beispiel

Wir suchen ein geeignetes Koordinatensystem, um ein Problem über Bienenwaben in der Ebene zu lösen. Dazu gehört das hexagonale Gitter in Abbildung 1.9. Selbstverständlich kann dafür das übliche rechtwinklige Koordinatensystem verwendet werden, aber die Ecken eines Sechsecks haben darin die nicht sehr symmetrischen Koordinaten

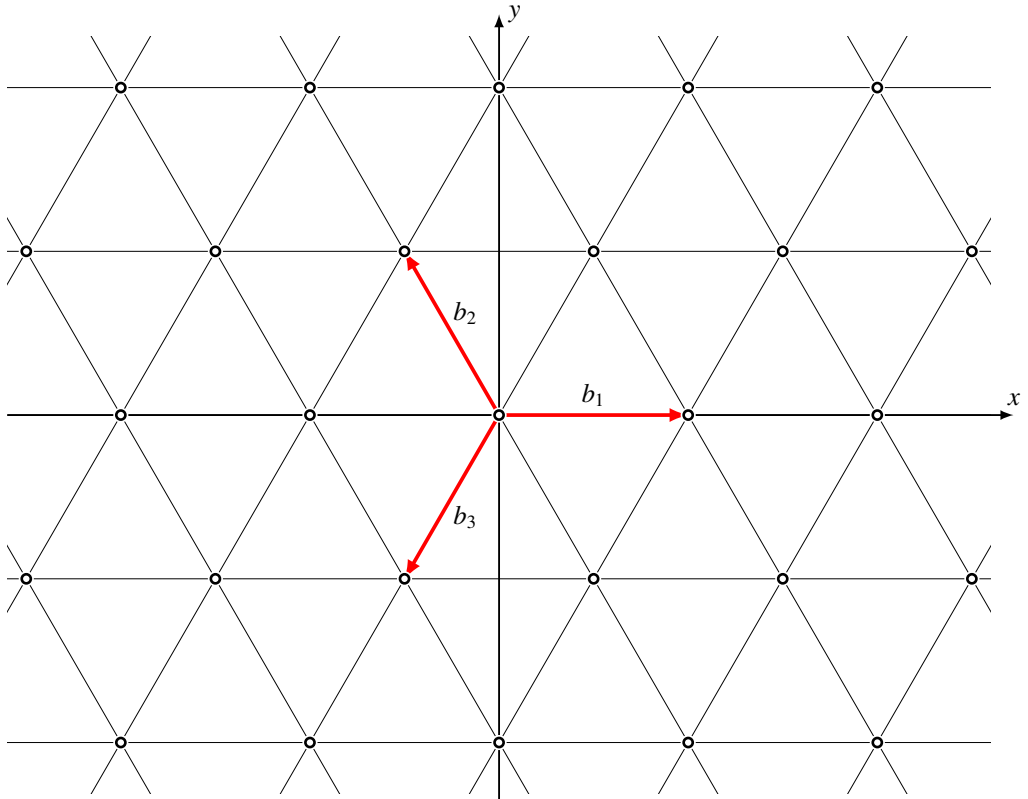
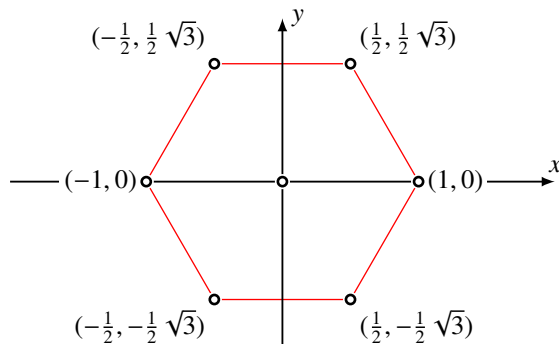


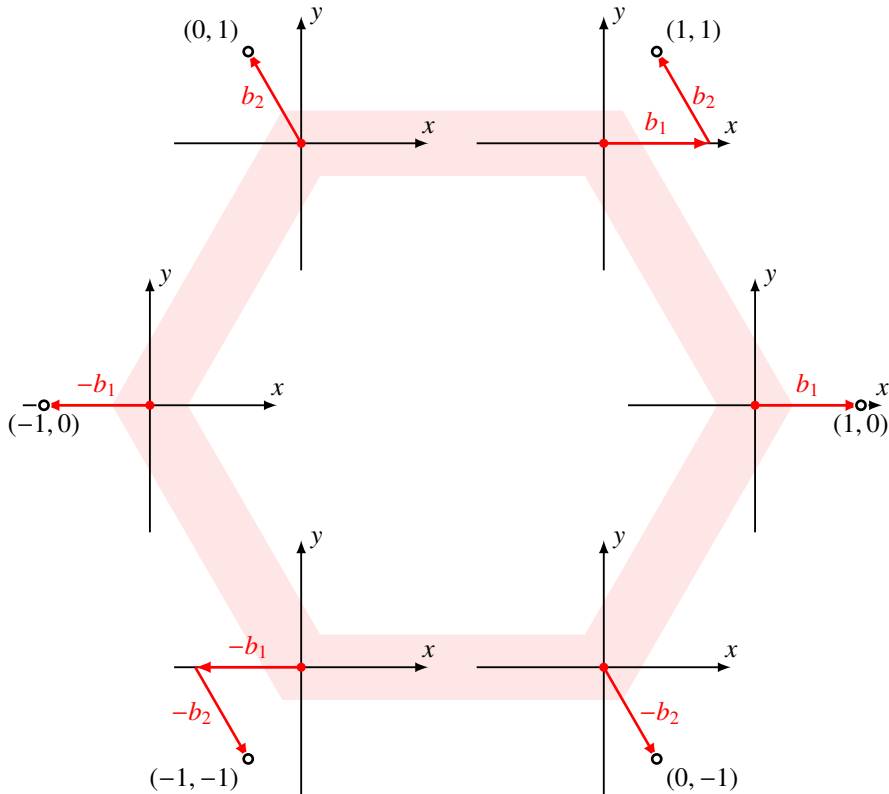
Abbildung 1.9: Sechseck-Gitter in der Ebene zum Frame $\{b_1, b_2, b_3\}$.



(Siehe auch Abbildung 1.9). Eine bessere Variante ist das Koordinatensystem auf der Basis der beiden Basisvektoren (in kartesischen Koordinaten)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

In diesem Koordinatensystem haben die Ecken des Sechsecks die Koordinaten



Was bereits viel besser aussieht. Trotzdem ist auch dies noch nicht ganz zufriedenstellend. Zum Beispiel sind die Ecken links oben und rechts unten direkt durch den Basisvektor b_2 darstellbar, die Ecken rechts oben und links unten dagegen nur durch eine Linearkombination. Wir könnten natürlich auch die linke untere Ecke als Basisvektor nehmen, dann würde einfach die linke obere Ecke speziell. In dieser Situation lässt es sich also mit einer Basis gar nicht erreichen, dass alle Eckpunkte sich auf einfache Art darstellen lassen.

Verzichten wir jedoch darauf, dass die Vektoren linear unabhängig sein müssen, können wir also “Basis” die drei Vektoren (in kartesischen Koordinaten)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

verwenden. Die drei Vektoren haben alle die Länge 1, aber sie sind nicht orthogonal, sondern haben das Skalarprodukt

$$\langle b_j, b_k \rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2} & j \neq k \\ 0 & j = k. \end{cases}$$

Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ können wir wieder die Koeffizienten $\hat{v}_k = \langle v, b_k \rangle$ berechnen und damit die Linearkombination

$$v' = \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k b_k$$

bilden, doch es ist $v \neq v'$. Wir berechnen die Synthese für die Basisvektoren:

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 = \frac{3}{2}b_1 \\ b'_2 &= -\frac{1}{2}b_1 + b_2 - \frac{1}{2}b_3 = \frac{3}{2}b_2 \\ b'_3 &= -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = \frac{3}{2}b_3 \end{aligned}$$

Die Synthese liefert also nicht den ursprünglichen Vektor, sondern

$$\sum_{k=1}^3 \hat{v}_k b_k = \frac{3}{2} v \quad (1.16)$$

zurück, das $\frac{3}{2}$ -fache davon. Dies ist bereits ein Ausdruck der Tatsache, dass die Information in den Koeffizienten \hat{v}_k redundant ist.

Diese Vektoren sind natürlich nicht mehr linear unabhängig, Vektoren der Ebene können also auf verschieden Art linear aus den b_k kombiniert werden. Da $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ ist, kann man zu den Koeffizienten \hat{v}_k eine beliebige Zahl α hinzuaddieren, und erhält

$$\sum_{k=1}^3 (\hat{v}_k + \alpha) b_k = \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k b_k + \alpha \sum_{k=1}^3 b_k = \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k b_k = \frac{3}{2} v.$$

Die modifizierten Koeffizienten ergeben also das gleichen synthetisierten Vektor $\frac{3}{2}v$.

Für die Norm des synthetisierten Vektors gilt natürlich

$$\|v'\|^2 = \frac{9}{4} \|v\|^2 = \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \hat{v}_k \hat{v}_l.$$

Die modifizierten Koeffizienten ergeben natürlich dieselbe Norm, also

$$\begin{aligned} \|v'\|^2 &= \sum_{k=1}^3 (\hat{v}_k + \alpha)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} (\hat{v}_k + \alpha)(\hat{v}_l + \alpha) \\ &= \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k^2 + 2\alpha \sum_{k=1}^3 \hat{v}_k + 3\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \hat{v}_k \hat{v}_l - \sum_{k \neq l} \hat{v}_k \alpha - 3\alpha^2 \end{aligned}$$

Was zeichnet die Koeffizienten \hat{v}_k gegenüber den modifizierten Koeffiziente \hat{v}_k aus? Im Falle einer Orthonormalbasis konnte man dank der Plancherel-Formel die Norm eines Vektors mit Hilfe der Quadratsumme der Koeffizienten berechnen. Wir berechnen daher

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^n (\hat{v}_k + \alpha)^2 = \sum_{k=1}^n \hat{v}_k^2 + 2\alpha \sum_{k=1}^n \hat{v}_k + 3\alpha^2$$

1.4.2 Definition eines Frames

Nach dem motivierenden Beispiel im vorangegangenen Abschnitt sind wir nun bereit, eine allgemeine Definition aufzubauen. Wir wollen also weiterhin die Vektoren eines Vektorraums V mit Hilfe einer Menge von Vektoren $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ linear kombinieren, verlangen aber nicht mehr, dass

die Vektoren e_k linear unabhängig sind. Dies bedeutet natürlich, dass die Darstellung eines Vektors $v \in V$ nicht mehr eindeutig sein wird.

Nicht jede Menge von Vektoren $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ ist geeignet. Es muss ja immer noch jeder Vektor dargestellt werden können, das Erzeugnis der Vektoren muss also der ganze Vektorraum sein:

$$U := \langle e_k \mid 1 \leq k \leq n \rangle = V.$$

Wäre das Erzeugnis nur ein echter Unterraum $U \subset V$, dann gäbe es einen Vektor $b \in V$, der senkrecht steht auf allen $b \perp U$. Wir fordern daher, dass es keinen Vektor gibt, der auf allen Vektoren e_k senkrecht steht.

Damit die Berechnung effizient bleibt, möchten wir weiterhin nur mit den Koeffizienten $\hat{v}_k = \langle v, e_k \rangle$ arbeiten müssen. Für eine Orthonormalbasis hat die Plancherel-Formel gezeigt, dass

$$\sum_{k=1}^n |\hat{v}_k|^2 = \|v\|^2.$$

In der aktuellen Situation können wir nicht mehr erwarten, dass dies weiterhin funktioniert. Wir müssen aber mindestens verlangen, dass die Transformation

$$\mathcal{T}: V \rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto \hat{v}_k$$

stetig ist, dass sich also kleine Änderungen von v ebenfalls kleinen Änderungen des Vektors der \hat{v}_k auswirken. Es muss also eine Konstante B geben, so dass

$$\sum_{k=1}^n |\hat{v}_k|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2 \geq A \|v\|^2.$$

Wir müssen aber auch sicherstellen, dass die Rekonstruktion des Vektors v auf stetige Art von den Koeffizienten \hat{v}_k abhängt. Eine kleine Änderung der Koeffizienten darf sich nur in beschränkten Änderungen im rekonstruierten Vektor v auswirken. Es muss also eine Konstante B geben, so dass

$$\sum_{k=1}^n |\hat{v}_k|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq B \|v\|^2$$

gilt.

Damit haben wir alle Elemente zusammen für die folgende Definition, die auch für unendlichdimensionale Hilberträume funktioniert.

Definition 1.19. Eine Teilmenge $\{e_k \mid k \in K\} \subset V$ heisst ein Frame, wenn es zwei von 0 verschiedene Konstanten A und B gibt, so dass

$$A \|v\|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq B \|v\|^2$$

gilt für jeden Vektor $v \in V$. Die Konstanten A und B heissen die Framekonstanten des Frames. Das Frame heisst straff, wenn $A = B$ ist.

Beispiel. Das Beispiel von Abschnitt 1.4.1 ist ein Frame. Die Formel (1.16) zeigt, dass die Framekonstanten des Frames $A = B = \frac{3}{2}$ ist. Das Frame ist also sogar straff. \circ

In der Definition wird nicht erwähnt, dass die Vektoren des Frames den ganzen Raum aufspannen müssen. Diese Eigenschaft folgt jedoch direkt aus der Definition eines Frames, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.20. *Ist $\mathcal{B} = \{e_k \mid k \in K\}$ ein Frame des Hilbertraumes V mit Framekonstanten A und B , dann gibt es keinen Vektor $v \in V$, der auf allen Vektoren e_k senkrecht steht.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe einen Vektor $v \in V$ mit $\langle v, e_k \rangle = 0$ für alle $k \in K$. Dann folgt aus den Frame-Ungleichungen

$$\|v\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{k \in K} |\langle v, e_k \rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Der Nullvektor ist also der einzige Vektor, der auf allen Framevektoren senkrecht steht. \square

Eine orthonormierte Basis war die bevorzugte Wahl für eine Basis, weil sich damit die Transformation \mathcal{T} besonders leicht invertieren lässt. Der Satz 1.6 hat gezeigt, dass die Transformation eine Isometrie ist, insbesondere gilt

$$\|v\|^2 = \sum_{k \in K} |\hat{v}_k|^2 = \sum_{k \in K} |\langle v, e_k \rangle|^2.$$

Dies bedeutet, dass eine orthonormierte Basis ein straffes Frame mit Framekonstanten $A = B = 1$ ist. Umgekehrt drängt sich die Frage auf, ob straffe Frames oder spezielle Werte der Frame-Konstanten eine besondere Bedeutung für die Invertierbarkeit haben.

1.4.3 Allgemeine Frames

Die Wahl der Indexmenge K in der Definition 1.19 war einigermaßen willkürlich. Schon bei der Fouriertransformation ist eine solche diskrete Menge für die Indizierung der Vergleichsfunktionen nicht mehr ausreichend. Dort werden nämlich die Funktion $e^{i\omega t}$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ verwendet. Auch die geplante Anwendung auf Wavelets ist davon betroffen. Dort wollen wir mit Funktionen $\psi_{a,b}$ vergleichen, die skalierte und verschobene Versionen eines Mutter-Wavelets ψ sind, mit Skalierungsfaktor $a \in \mathbb{R}^*$ und $b \in \mathbb{R}$.

Lässt man eine beliebige Indexmenge zu, ist die Definition der Transformation T

$$k \mapsto (Tv)(k) = \langle v, e_k \rangle$$

als komplexwertige Funktion auf K immer noch sinnvoll. Für eine überabzählbare Indexmenge K ist die Summe

$$\sum_{k \in K} |\langle v, e_k \rangle|^2,$$

die in der Definition eines Frames auftritt, schlicht sinnlos. Wir stehen hier also vor einem ähnlichen Problem wie bei der Frage, wie man aus dem Raum der Signale auf \mathbb{R} einen Hilbertraum machen kann. Diese Frage wird in Kapitel 2 im Detail beantwortet.

Nehmen wir für den Moment an, dass es gelungen ist, einen Hilbertraum H von Funktionen auf K zu konstruieren. Die Frame-Ungleichung kann dann mit Hilfe der Norm von H formuliert werden, sie lautet

$$A\|v\|^2 \leq \|Tv\|^2 \leq B\|v\|^2.$$

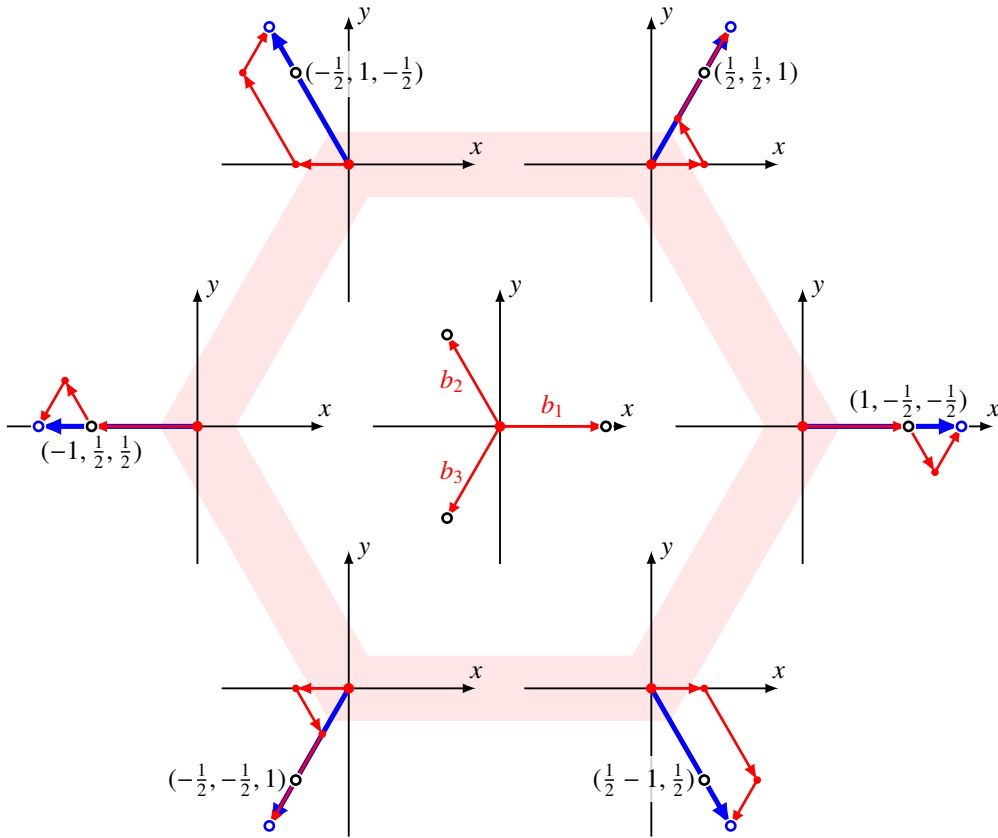


Abbildung 1.10: Rekonstruktion bei einem straffen Frame. Das Frame bestehend aus den Vektoren $\{b_1, b_2, b_3\}$ ist straff mit der Framekonstanten $A = \frac{3}{2}$. Die mit den Skalarprodukten gewichtete Linearkombination der Framevektoren liefert nicht den ursprünglichen Vektor zurück, sondern einen Vektor, der mit der Framekonstanten multipliziert wird. Gezeigt wird dies für die sechs Ecken des Hexagons. Die Skalarprodukte mit den Framevektoren, die Framekoordinaten, sind als Zahlentripel bei jedem Punkt angegeben. Die roten Vektorpfade stellen die Linearkombination dar, die blauen Vektoren die Summe.

Die Norm in der Mitte ist als Norm in H zu lesen. Diese Ungleichungen sagen immer noch aus, dass kein Vektor $v \in V$ bei der Transformation T “unsichtbar” wird. Wäre nämlich $Tv = 0$ in H , dann wäre auch $\|Tv\| = 0$ und damit $\|v\| = 0$. Die Frame-Ungleichung stellt also sicher, dass die Abbildung T injektiv und damit potentiell invertierbar ist.

Es ist aber keinesfalls garantiert, dass das Bild der Transformation T den ganzen Hilbertraum T abdeckt, ganz im Gegenteil. Schon im Beispiel in Abschnitt 1.4.1 wurde gezeigt, dass die mit Hilfe eines Frames gefundenen Koeffizienten redundant sind. Alle Vektoren der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

beschreiben den gleichen Punkt in der Ebene, aber nur einer davon wird von der Transformation T erreicht. Dies entspricht natürlich genau dem, was man erwartet: der Bildraum der Ebene \mathbb{R}^2 unter der Abbildung T ist ein zweidimensionaler Teilraum des \mathbb{R}^3 .

Die Abbildung T wird daher im Allgemeinen nicht invertierbar sein, aber wir dürfen hoffen, dass es eine Formel gibt, mit der man aus Tv den Vektor v rekonstruieren kann. Im Falle des Beispiels war dies die Formel

$$v = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \langle v, e_k \rangle e_k.$$

Für ein beliebiges Frame ist so eine Formel natürlich wieder wegen der Summe nicht sinnvoll. Doch in Kapitel 2 werden wir sehen, dass sie sich oft durch eine Integralformel ersetzen lässt. Die Konstruktion eines solchen vektorwertigen Integrals ist allerdings etwas subtil, wird kehren zu dieser Problematik im Kapitel 4 zurück.

1.5 Rekonstruktion

Übungsaufgaben

1. Betrachten Sie die Menge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ bestehend aus den vier Vektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Wirkung des Gram-Operators G für die Menge \mathcal{B} auf den Standardbasisvektoren.
- Finden Sie die Matrix des Gram-Operators in der Standardbasis.
- Ist \mathcal{B} ein Frame und wenn ja, wie gross sind die Frame-Konstanten? Ist das Frame straff?

Lösung. a) Der Gram-Operator ist definiert durch

$$Gx = \sum_{j=1}^4 \langle x, b_j \rangle b_j.$$

Für Ge_k sind also die Skalarprodukte $\langle e_k, b_j \rangle$ zu bestimmen. Das Skalarprodukt $\langle e_k, b_j \rangle$ ist die k -te Komponente des Vektors b_j . Man kann daher die Wirkung Gram-Operators direkt ablesen:

$$Ge_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}b_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}b_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}e_1$$

$$Ge_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}b_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}b_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}e_2$$

$$Ge_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}b_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}b_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}e_3$$

- b) Aus den Resultaten von a) kann man ablesen, dass $G = \frac{4}{3}*$. Alternativ kann man die Gram-Matrix auch berechnen aus der Matrix

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Skalarprodukte $\langle x, b_j \rangle$ für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ werden berechnet mit xB^t . Die Linearkombination Gx entsteht durch Linearkombination der vier Spalten von B mit Hilfe der vier Skalarprodukte $\langle x, b_j \rangle$. Dazu müssen die Skalarprodukte als Spaltenvektor geschrieben werden, also als $(x^t B)^t = B^t x$. Somit ist

$$Gx = BB^t x \quad \Rightarrow \quad G = BB^t = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Da der Gram-Operator das $\frac{4}{3}$ -fache der Einheitsmatrix ist, ist \mathcal{B} sogar ein straffes Frame mit der Framekonstanten $A = B = \frac{4}{3}$. ○

2. Betrachten Sie die Menge \mathcal{B} bestehend aus den vier Vektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bilden die Vektoren ein Frame?

Lösung. Wir berechnen wie in Aufgabe 1.1 den Gram-Operator aus der Matrix

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Gram-Operator ist

$$G = BB^t = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Menge \mathcal{B} ist also ein straffes Frame mit der Frame-Konstanten $\frac{4}{3}$. Das Frame \mathcal{B} ist bis auf die Vorzeichen einzelner Vektoren identisch mit dem Frame von Aufgabe 1.1. \bigcirc

3. Die zwölf Vektoren, die man aus

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\varphi \end{pmatrix},$$

durch zyklische Vertauschung der Komponenten erhalten kann, sind die Ecken eines regulären Ikosaeders. Dabei ist $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ das Verhältnis des goldenen Schnittes. Diese sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} b_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, & b_6 &= \begin{pmatrix} -1 \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, & b_7 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, & b_8 &= \begin{pmatrix} -1 \\ -\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ b_9 &= \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_{10} &= \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & b_{11} &= \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & b_{12} &= \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- a) Bilden die Vektoren $\mathcal{B} = \{b_1, b_4, b_7, b_{10}\}$ ein Frame? Wenn ja, berechnen Sie die Framekonstanten
- b) Die Vektoren $\mathcal{I} = \{b_1, \dots, b_{12}\}$ bilden ein straffes Frame. Berechnen Sie die Frame-Konstante.

Lösung. a) Wir berechnen den Gram-Operator aus der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \varphi \\ 1 & -1 & -\varphi & 0 \\ \varphi & -\varphi & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Gram-Operator hat die Matrix

$$G = BB^t = \begin{pmatrix} 3.618034 & -1.618034 & -1.618034 \\ -1.618034 & 4.618034 & 3.236068 \\ -1.618034 & 3.236068 & 6.236068 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat Rang 3, also ist \mathcal{B} ein Frame, aber weil G nicht diagonal ist, ist das Frame nicht straff. Die Frame-Konstanten sind die Werte des grössten und kleinsten Eigenwertes, die man numerisch als

$$A = 2, \quad B = 9.623122$$

findet. Man kann den Gram-Operator aber auch exakt finden. Die Matrixmultiplikation mit Maxima ergibt den Gram-Operator in der Form

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+5}{2} & -\varphi & -\varphi \\ -\varphi & \frac{\sqrt{5}+7}{2} & \sqrt{5}+1 \\ -\varphi & \sqrt{5}+1 & \sqrt{5}+4 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion `eigenvalues` von Maxima kann auch die Eigenwerte in geschlossener Form finden:

$$\lambda_1 = 2 < \lambda_2 = 4 + \sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{5} + 7} < \lambda_3 = 4 + \sqrt{5} + \sqrt{2\sqrt{5} + 7}$$

b) Die Berechnung von BB^t für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \varphi & \varphi & -\varphi & \varphi \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \varphi & \varphi & -\varphi & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & \varphi & -\varphi & \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe eines Computeralgebra-Systems wie zum Beispiel Maxima liefert

$$G = (2\sqrt{5} + 10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man ablesen, dass \mathcal{I} ein straffes Frame mit Framekonstante $2\sqrt{5} + 10$ ist.

○

4. Bilden sie die Vektoren von \mathbb{R}^3 deren Komponenten alle Permutationen der Zahlen 1, 2 und 3 sind. Bilden diese Vektoren ein Frame? Ist das Frame straff?

Lösung. Die Vektoren sind, geschrieben als Spalten einer Matrix,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Gram-Operator ist

$$G = BB^t = \begin{pmatrix} 28 & 22 & 22 \\ 22 & 28 & 22 \\ 22 & 22 & 28 \end{pmatrix}$$

hat Rang 3, also liegt ein Frame vor. G ist aber nicht ein Vielfaches der Einheitsmatrix, also ist das Frame nicht straff. Um die Frame-Konstanten zu bestimmen berechnen wir die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$\chi_G(\lambda) = -\lambda^3 + 84\lambda^2 - 900\lambda + 2592.$$

Das Polynom lässt sich faktorisieren in

$$\chi_G(\lambda) = -(\lambda - 72)(\lambda - 6)^2.$$

Daraus liest man die Frame-Konstanten $A = 6$ und $B = 72$ ab.

○

5. Bildet die Menge aller binären Vektoren in \mathbb{R}^4 (Vektoren mit Einträgen 0 oder 1) ein Frame?

Lösung. Die Vektoren geschrieben als 4×16 -Matrix sind

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gram-Operator ist

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$\chi_G(\lambda) = (\lambda - 20)(\lambda - 4)^3$$

Somit ist B zwar ein Frame, aber es ist nicht straff und die Frame-Konstanten sind $A = 4$ und $B = 20$. \bigcirc

Kapitel 2

Fouriertheorie und die L^2 -Hilberträume

Die Approximation von Funktionen auf einem endlichen oder unendlichen Intervall soll gemäss der Ideen in Kapitel 1 mit Hilfe der Ideen der Vektorgeometrie und des Skalarproduktes durchgeführt werden. Dazu muss die Menge der Funktionen zunächst in einen Hilbertraum verwandelt werden, dies geschieht in Abschnitt 2.1. Die anschliessend zusammengefasste Fourier-Theorie zeigt, dass sich die geometrisch motivierte Analyse und Synthese von Funktionen tatsächlich durchführen lässt.

2.1 Der Hilbertraum L^2

2.1.1 Funktionenräume

Wir bezeichnen mit \mathbb{C}^X die Menge der Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Sie wird auf natürliche Art zu einem Vektorraum, indem man die Addition von Funktionen und die Multiplikation mit Skalaren punktweise definiert. Seien f, g Funktionen auf X , dann definieren wir die Summe $f + g$ und λf als

$$\begin{aligned} f + g: X &\rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto f(x) + g(x) \\ \lambda f: X &\rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \lambda f(x). \end{aligned}$$

Die Signale, die im Folgenden analysiert werden sollen, sind jedoch nicht beliebige Funktionen. Sie haben zusätzliche Eigenschaften, zum Beispiel sind sie oft stetig, oder beschränkt. Die bekannten Rechenregeln für stetige Funktionen stellen sicher, dass diese Eigenschaften in Summen von Funktionen und skalaren Vielfachen erhalten bleiben.

Wenn die Funktion f durch andere Funktionen approximiert werden soll, dann wird dazu ein Abstands begriff benötigt.

Definition 2.1. Eine reellwertige Funktion $\|\cdot\|$ heisst eine Norm auf dem Vektorraum V , wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

Die Norm, die in Abschnitt 1.3 aus dem Skalarprodukt gewonnen wurde, hat tatsächlich diese Eigenschaften. Dabei ist nur die Dreiecksungleichung nicht unmittelbar klar. Doch aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\
 &\leq \|u\|^2 + 2 |\operatorname{Re} \langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\
 &\leq \|u\|^2 + 2 |\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\
 &\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\
 \|u + v\| &= \|u\| + \|v\|
 \end{aligned}$$

Definition 2.2. Der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$C_{\mathbb{C}}(X) = C(X) = \{f \in \mathbb{C}^X \mid f \text{ ist stetig}\}$$

mit der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren und der Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$\|f\|$ heisst auch die Supremum-Norm.

Man beachte, dass diese Norm nicht von einem Skalarprodukt herkommt. Man kann aber zeigen, dass Cauchy-Folgen in dieser Norm gegen eine stetige Funktion konvergieren. Diese Norm stellt also sicher, dass die Grenzfunktion einer Approximationsfolge aus stetigen Funktion wieder stetig ist. Umgekehrt können wir bei einer anderen Norm wie der im nächsten Abschnitt definierten L^2 -Norm nicht mehr garantieren, dass Grenzfunktionen stetig sind. Dies verursacht zwar ein paar mathematische Unannehmlichkeiten, kommt aber den Anwendungen entgegen, da in der Praxis durchaus nicht stetige Signale vorkommen.

2.1.2 Definition des Skalarproduktes

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschliesslich Funktionen, die auf einem endlichen oder unendlichen Intervall I definiert sind.

Definition 2.3. Das Skalarprodukt zweier Funktionen $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \bar{g}(t) dt$$

Die bekannten Rechenregeln für Integrale stellen sicher, dass dies tatsächlich ein sesquilineares Produkt ist, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \int_I (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) \bar{g}(t) dt \\
 &= \lambda_1 \int_I f_1(t) \bar{g}(t) dt + \lambda_2 \int_I f_2(t) \bar{g}(t) dt = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle \\
 \langle f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 \rangle &= \int_I f(t) \overline{(\mu_1 g_1(t) + \mu_2 g_2(t))} dt = \bar{\mu}_1 \int_I f(t) \bar{g}_1(t) dt + \bar{\mu}_2 \int_I f(t) \bar{g}_2(t) dt \\
 &= \bar{\mu}_1 \langle f, g_1 \rangle + \bar{\mu}_2 \langle f, g_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\int_I f(t) \bar{g}(t) dt} = \int_I \bar{f}(t) g(t) dt = \int_I g(t) \bar{f}(t) dt = \langle g, f \rangle.$$

Weniger klar ist jedoch, dieses Produkt auch tatsächlich definit ist. Die aus dem Skalarprodukt abgeleitete Norm ist

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Für eine stetige Funktion folgt tatsächlich für dass die Norm nur verschwinden kann, wenn die Funktion überall verschwindet. Eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen nicht verschwindet, ist immer noch integrierbar und ihr Integral ist 0. Eine solche Funktion hätte also Norm 0 ohne selbst die Nullfunktion zu sein. Dies deutet an, dass wir bei der Auswahl der Funktionenmenge, mit der wir arbeiten wollen, sehr viel sorgfältiger sein müssen.

Die Definition ist natürlich nur sinnvoll für Funktionen, für die diese Integrale tatsächlich existieren.

Definition 2.4. Sei $p \in \{1, 2\}$

$$\mathcal{L}^p(I) = \left\{ f \in \mathbb{C}^I \mid f \text{ ist integrierbar und } \int_I |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

mit zugehöriger Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p = 2$ ist die Norm $\|f\|_2$ bereits bekannt, es ist die Norm, die vom Skalarprodukt herkommt.

2.1.3 Lebesgue-Integral und Vollständigkeit

Das Riemann-Integral, das man im Analysis-Unterricht kennen lernt, ist leider nicht geeignet für das vorliegende Approximationsproblem. Eine Funktion soll durch quadratintegrierbare Funktionen approximiert werden im Sinne der Norm $\|\cdot\|_2$. Doch kann man leicht Folgen konstruieren, die im Sinne dieser Norm Cauchy-Folgen sind, aber die Grenzfunktion ist nicht mehr integrierbar.

Beispiel. Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ ist abzählbar, es gibt also eine Folge q_k , die alle rationalen Zahlen durchläuft. Daraus kann man jetzt eine Funktionen-Folge f_n wie folgt konstruieren:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & t = t_k \text{ für ein } k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede der Funktionen f_n ist integrierbar, denn sie weichen nur an endlich vielen, genauer an n Stellen von 0 ab. Ihr Integral ist daher 0. Der Abstand zwischen zwei Funktionen der Folge ist $\|f_n - f_m\|_2 = 0$, da auch die Differenz nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden ist. Trotzdem kann man nicht sagen, dass die Folge eine Grenzfunktion hat. Punktweise konvergiert die Folge f_n gegen die Funktion

$$f_{\mathbb{Q}}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist aber nicht einmal integrierbar im Sinne des Riemann-Integrals.

○

Das Beispiel illustriert die Unzulänglichkeit des Riemann-Integrals. Die Lösung besteht darin, den Integralbegriff zu erweitern. Dies ist Henri Lebesgue in seiner Dissertation 1902 gelungen. Das Lebesgue-Integral ist für alle Riemann-integrierbaren Funktionen definiert und ergibt denselben Wert. Es ist also für konkrete Berechnungen nicht relevant. Es erweitert die Menge der integrierbaren Funktionen und stellt insbesondere sicher, dass die Grenzfunktionen von Folgen unter genügend allgemeinen Voraussetzungen integrierbar sind und dass Integral und Grenzwert vertauschbar sind. Damit ist die Klasse gross genug für das Approximationsproblem.

Das Lebesgue-Integral betrachtet die Funktion $f_{\mathbb{Q}}$ als integrierbar mit Integralwert 0. Für eine beliebige integrierbare Funktion g ist daher auch $g + f_{\mathbb{Q}}$ integrierbar und hat den gleichen Integralwert wie g . In \mathcal{L}^p sind daher sehr viele Funktionen nicht unterscheidbar, da sie sich nur um eine Funktion mit Integral 0 unterscheiden.

Definition 2.5. Die Menge $L^p(I)$ besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen in $\mathcal{L}^p(I)$, die sich durch eine Nullfunktion unterscheiden. Zwei Funktionen $f_1, f_2 \in L^p(I)$ werden als gleich betrachtet, wenn

$$\int_I |f_2 - f_1| dx = 0$$

ist.

Die Menge $L^p(I)$ erbt von $\mathcal{L}^p(I)$ die Struktur eines Vektorraums mit der Norm $\|\cdot\|_p$. Der Raum $L^2(I)$ wird dank der oben formulierten Grenzwertsätze zu einem Hilbertraum. Damit ist Raum $L^2(I)$ als die Bühne für die nachfolgend zu diskutierende Approximationstheorie bereitgestellt.

Die Definition von $L^p(I)$ als Menge von Äquivalenzklassen von Funktionen ist etwas schwerfällig und ungewohnt, für die Praxis aber kaum von Bedeutung. Jegliche Rechnungen mit Funktionen finden immer mit einem Riemann-integrierbaren Repräsentanten statt.

2.1.4 L^2 und L^1

Eine integrierbare Funktion ist nicht automatisch quadratintegrierbar. Wenn eine Funktion gerade noch langsam genug anwächst, dass ihr Integral existiert, kann das Quadrat der Funktion bereits zu schnell anwachsen, so dass das Quadrat nicht mehr integrierbar ist.

Beispiel. Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ ist die Funktion

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t^{-\alpha} & t > 0 \end{cases}$$

gegeben, der genaue Wert von α wird später festgelegt. Die Integrale von f und f^2 sind

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)| dt &= \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha \geq 1 \end{cases} \\ \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 t^{-2\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-2\alpha} & \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty & \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ tritt also die Situation ein, dass das Integral von f existiert, das von f^2 aber nicht¹. \circ

¹In der Rechnung in diesem und im nächsten Beispiel wurde der Fall $\alpha = 1$ nicht sorgfältig nachgerechnet. In diesem Fall ist die Stammfunktion nämlich $\log|t|$, der jedoch auch für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ divergiert. Die Behauptungen sind daher auch in diesem Fall richtig.

Die umgekehrte Situation kann für Funktionen auf \mathbb{R} eintreten, die zu langsam abfallen, um integrierbar zu sein. Da das Quadrieren kleine Werte noch kleiner macht, kann das Quadrat der Funktion schnell genug abfallen, so dass es integrierbar ist. Eine solche Funktion ist in $L^2(\mathbb{R})$, aber nicht in $L^2(\mathbb{R})$.

Beispiel. Auf dem Intervall $J = [1, \infty)$ ist die Funktion $f(t) = t^{-\alpha}$ gegeben. Die Integrale von f und f^2 sind

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |f(t)| dt &= \int_1^\infty t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \leq 1 \end{cases} \\ \int_1^\infty |f(t)|^2 dt &= \int_1^\infty t^{-2\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha-1} & \alpha > \frac{1}{2} \\ \infty & \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Man liest daraus ab, dass für $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ die Funktion f zwar in $L^2([0, \infty))$, nicht aber in $L^1([1, \infty))$ ist. \square

Der Fall des letzten Beispiels kann vermieden werden, wenn man den Definitionsbereich der Funktion auf ein kompaktes Intervall beschränkt. Dann folgt, der folgende Satz.

Satz 2.6. *Ist I ein kompaktes Intervall, dann ist $L^2(I) \subset L^1(I)$, oder: jede quadratintegrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall ist integrierbar.*

Beweis. Wir zerlegen die Funktion f in eine Summe $f = f_- + f_+$. Dabei setzen wir:

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & |f(t)| > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(t) = \begin{cases} 0 & |f(t)| > 1 \\ f(t) & f(t) \leq 1 \end{cases}$$

Die Teilfunktion f_+ sammelt also all jene Werte, die beim Quadrieren grösser werden, die Teilfunktion f_- dagegen diejenigen Werte, die beim Quadrieren kleiner werden. Wir schätzen jetzt das Integral von $|f|$ ab, indem wir es in die Summanden f_+ und f_- zerlegen:

$$\int_I |f(t)| dt = \int_I |f_+(t)| dt + \int_I |f_-(t)| dt \leq \int_I |f_+(t)|^2 dt + \int_I 1 dt \leq \int_I |f(t)|^2 dt + |I| \leq \|f\|^2 + |I|.$$

Da nach Voraussetzung f^2 integrierbar ist und das Intervall I kompakt ist und damit beschränkte Länge $|I|$ Länge hat, ist das Integral von $|f|$ ebenfalls beschränkt. \square

2.1.5 Die Operatoren T_b und D_a

Satz 2.7. *Für eine Funktion $f, g \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \langle T_b f, T_b g \rangle &= \langle f, g \rangle & \|T_b f\|^2 &= \|f\|^2 \\ \langle D_a f, D_a g \rangle &= |a| \cdot \langle f, g \rangle & \|D_a f\|^2 &= |a| \cdot \|f\|^2. \end{aligned}$$

Beweis. Die Translation ändert die Norm nicht weil das Lebesgue-Integral translationsinvariant ist, wie man sich durch die Rechnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} (T_b f)(t) \overline{(T_b g)(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t-b)}_{=t'} \bar{g}(t-b) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \bar{g}(t') dt' = \langle f, g \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(T_b f)(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\underbrace{t-b}_{=t'})|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t')|^2 dt' = \|f\|^2$$

überzeugen kann. Für D_a findet man ähnlich

$$\begin{aligned} \langle D_a f, D_a g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_a f)(t) \overline{(D_a g)(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{t/a}_{=t'}) \overline{g(t/a)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \bar{g}(t') |a| dt' \\ &= |a| \cdot \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

□

2.2 Fourier-Reihen

2.2.1 Reelle Fourier-Reihen

2.2.2 Komplexe Fourier-Reihen

2.3 Fourier-Integral

Für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist die Fourier-Transformation

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) e^{-i\omega t} dt$$

wohldefiniert. Wir schreiben die Fourier-Transformation auch

$$\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}.$$

Sie verallgemeinert die Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten c_k für Funktionen auf \mathbb{R} . Für die Rechnungen in den folgenden Kapiteln stellen wir hier die wichtigsten Formeln für die Fourier-Transformation zusammen.

Satz 2.8. Für $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ gilt die Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Die Fourier-Transformation ist also eine invertierbare lineare Abbildung, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$.

Satz 2.9. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ ist eine lineare Abbildung, die sich mit Translation, Dilatation und Ableitung wie folgt verträgt:

$$\widehat{T_b f}(\omega) = e^{-i\omega b} \hat{f}(\omega).$$

$$\widehat{D_a f}(\omega) = a \hat{f}(a\omega)$$

$$\widehat{e^{ibt} f}(\omega) = (T_b \hat{f})(\omega).$$

Beweis. Durch direkte Rechnung finden wir:

$$\widehat{T_b f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (T_b f)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underbrace{t-b}_{=t'}) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega(t'+b)} dt'$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-i\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' = e^{-i\omega b} \hat{f}(\omega). \\
\widehat{D_a f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_a f)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\underbrace{t/a}_{=t'}\right) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega a t'} a dt' = a \hat{f}(a\omega) \\
\widehat{e^{ibt} f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibt} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-b)t} dt = \hat{f}(\omega-b) = (T_b \hat{f})(\omega).
\end{aligned}$$

Damit sind alle drei Identitäten bewiesen. □

Schreibt man M_b für den Operator, der eine Funktion mit dem Faktor e^{ibt} multipliziert, also

$$(M_b f)(t) = e^{ibt} f(t),$$

dann kann man die Relationen noch etwas kompakter schreiben:

$$\begin{aligned}
\widehat{T_b f} &= M_{-b} \hat{f} \\
\widehat{M_b f} &= T_b \hat{f},
\end{aligned}$$

oder mit der Schreibweise $\mathcal{F}f$ für die Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} T_b f &= M_{-b} \mathcal{F} & \Rightarrow & \mathcal{F} T_b = M_{-b} \mathcal{F} \\
\mathcal{F} M_b f &= T_b \mathcal{F} T_b f & \Rightarrow & \mathcal{F} M_b = T_b \mathcal{F} T_b \\
\mathcal{F} D_a f &= a D_{1/a} \mathcal{F} f & \Rightarrow & \mathcal{F} D_a = a D_{1/a} \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Satz 2.10. Für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt die Plancherel-Formel

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \\
\|f\| &= \|\hat{f}\|
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ ist also eine Isometrie.

Satz 2.11. Für differenzierbare Funktionen f gilt

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Falls für $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|tg\|^2 < \infty$, dann ist \hat{g} fast überall differenzierbar und es gilt

$$-i\widehat{t f}(\omega) = \hat{f'}(\omega).$$

Beweis. Die Formeln hängen davon ab, ob partiell integriert oder die Ableitung unter des Integral genommen werden darf:

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f'(t)}_{\uparrow} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\downarrow} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega), \\
\hat{f'}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -it f(t) e^{-i\omega t} dt = -i\widehat{t f}(\omega) \quad \square
\end{aligned}$$

Schreibt man ∂_t für die Ableitung nach t und ∂_ω für die Ableitung nach ω und μ_t bzw. μ_ω für die Multiplikation t bzw. ω , dann kann man die Regeln wieder kompakter schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \partial_t f &= i\mu_\omega \mathcal{F} f & \Rightarrow & \mathcal{F} \partial_t = i\mu_\omega \mathcal{F} \\
-i\mathcal{F} \mu_t f &= \partial_\omega \mathcal{F} f & \Rightarrow & -i\mathcal{F} \mu_t = \partial_\omega \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

2.4 Gefensterte Fourier-Transformation

2.5 Heisenbergsche Unschärfe-Relation

Die Fourier-Transformation eines in der Zeit gut lokalisierten Signals $f(t)$ zeigt, wie gut das selbe Signal im Frequenzraum lokalisiert ist. Um diese Idee zu quantifizieren brauchen wir zunächst ein Mass für die Lokalisierung von $f(t)$ bzw. $\hat{f}(\omega)$. Wäre f eine Wahrscheinlichkeitsdichte, dann wäre die Varianz ein naheliegendes Mass dafür. Die Funktion muss aber nicht ≤ 0 sein, man könnte das Problem aber korrigieren, indem man stattdessen $|f(t)|^2$ verwendet. Das Mass für die Lokalisierung in Zeit und Frequenz ist daher

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt = \|tf\|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\omega \hat{f}\|^2.\end{aligned}$$

Je grösser diese Normen werden, desto schlechter ist das Signal in der entsprechenden Variable lokalisiert.

Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, dass ein Signal nicht in Zeit und Frequenz gleichzeitig beliebig gut lokalisiert sein kann. Sie drückt dies dadurch aus, dass das Produkt der beiden Normen eine untere Schranke hat.

Satz 2.12 (Heisenberg). *Ist $f \in L^2(\mathbb{R})$ derart, dass $\|tf\| < \infty$ und $\|\omega \hat{f}\| < \infty$, dann gilt*

$$\|tf\| \cdot \|\omega \hat{f}\| \geq \frac{1}{2} \|f\|^2. \quad (2.1)$$

Die untere Schranke wird erreicht für Gauss-Funktionen, also Funktionen der Form $De^{-t^2/2\sigma^2}$.

Beweis. Die Voraussetzungen garantieren, dass die Fourier-Transformation existiert. Ausserdem bedeutet $\|\omega \hat{f}\| < \infty$, dass $\omega \hat{f}(\omega)$ eine L^2 -Funktion ist. Nach den Rechenregeln für die Fourier-Transformation besagen, dass f fast überall differenzierbar sein muss, wenn es gilt

$$i\omega \hat{f}(\omega) = \widehat{f'}(\omega).$$

Damit kann man die Lokalisierung von \hat{f} durch f ausdrücken:

$$\begin{aligned}\|\omega \hat{f}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |i\omega \hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

Jetzt kann man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Funktionen f' und tf anwenden:

$$\begin{aligned}\|tf\| \cdot \|f'\| &\geq |\operatorname{Re}\langle tf, f' \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (tf(t)\bar{f'}(t) + t\bar{f}(t)f'(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |f(t)|^2 \right) dt \right| = \underbrace{\left| \left[\frac{1}{2} t |f(t)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty} \right|}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}_{= \|f\|^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \|f\|^2.$$

Damit ist die Ungleichung (2.1) bewiesen.

Gleichheit wird erreicht, wenn die beiden Faktoren in der Ungleichung (2.1) linear abhängig sein. Es gibt also einen Proportionalitätsfaktor $c \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$\begin{aligned} tf(t) &= cf'(t) \\ \Rightarrow \quad \frac{t}{c} &= \frac{d}{dt} \log f(t) \\ \Rightarrow \quad \frac{t^2}{2c} &= \log f(t) + C \\ \Rightarrow \quad f(t) &= De^{t^2/2c}. \end{aligned}$$

Da die Funktion f in $L^2(\mathbb{R})$ sein muss, kommen nur negative Konstanten c in Frage, wir bezeichnen sie mit $c = -\sigma^2$. Gleichheit in der Ungleichung (2.1) tritt also genau dann auf, wenn f die Form

$$f(t) = De^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

hat.

□

Kapitel 3

Das Haar-Wavelet

Alfred Haar hat schon 1910 die Analyse stetiger Funktionen mit Hilfe von Funktionen demonstriert, die wir heute als Wavelets bezeichnen würden. Dieses Kapitel ist einer ausführlichen Darstellung des Haar-Wavelets und all seiner Eigenschaften im Lichte der in den ersten beiden Kapiteln entwickelten allgemeinen Theorie gewidmet. Damit soll einerseits die Tragfähigkeit der abstrakten Theorie demonstriert werden, andererseits soll auch der Blick für die wesentlichen Eigenschaften geschärft werden, nach denen wir bei anspruchsvolleren Wavelet-Entwicklungen ausschau halten sollten.

3.1 Stückweise konstante Funktionen

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *stückweise konstant*, wenn es eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ durch Punkte $x_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq k \leq n$ gibt, also

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

so dass die Funktion f in jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1})$ konstant ist. Es gibt also eine Menge von Zahlen f_k derart, dass

$$f(x) = f_k \quad \text{falls} \quad x_k \leq x < x_{k+1}. \quad (3.1)$$

Stückweise konstante Funktionen sind natürlich nicht überall stetig sein, vielmehr ist jeder der Punkte x_k ein potentielle Unstetigkeitsstelle. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) &= f_{k-1} \quad \forall k \text{ mit } 1 \leq k \leq n \\ \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) &= f_k \quad \forall k \text{ mit } 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

Wenn also $f_k \neq f_{k-1}$, dann ist x_k eine Unstetigkeitsstelle. $f(x)$ ist immer noch rechtsseitig stetig, aber der linksseitige Grenzwert ist verschieden, die Funktion hat einen Sprung an der Stelle x_k .

3.1.1 Charakteristische Funktion

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion eines Intervalls lässt sich eine stückweise konstante Funktion etwas eleganter schreiben. Wir definieren die *charakteristische Funktion* oder *Indikatorfunktion* des Intervalls I als

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I. \end{cases}$$

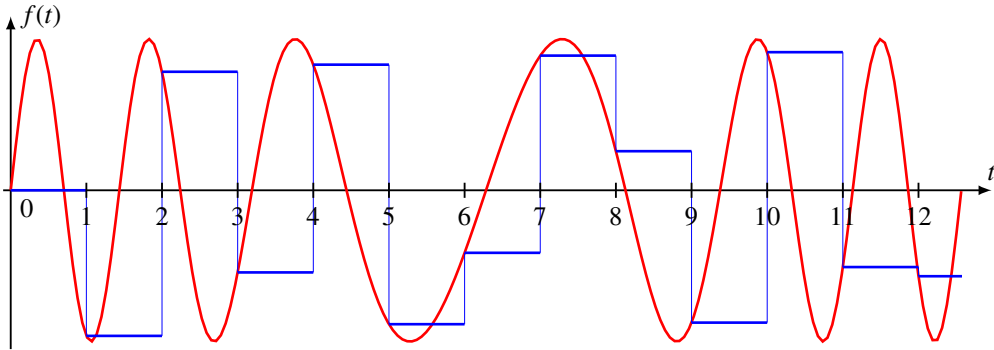


Abbildung 3.1: Stückweise konstante Approximation einer Funktion $f(t)$ mit Hilfe einer Unterteilung der t -Achse in Intervalle der Länge 1. Die Approximation ist zu grob, wesentliche Eigenschaften der Funktion können nicht wiedergegeben werden.

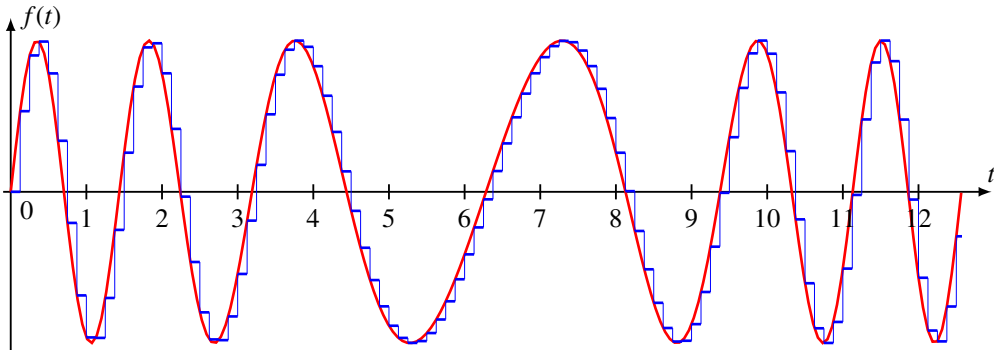


Abbildung 3.2: Stückweise konstante Approximation einer Funktion $f(t)$ mit Hilfe einer Unterteilung der t -Achse in Intervalle der Länge $\frac{1}{8}$. Die wesentlichen Eigenschaften der Funktion $f(t)$ sind nachvollziehbar, aber es sind immer noch beträchtliche Unterschiede erkennbar.

Damit kann man die stückweise konstante Funktion $f(x)$ aus (3.1) als Linearkombination

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \chi_{[x_k, x_{k+1})}(x)$$

von Indikatorfunktionen schreiben.

3.1.2 Approximation stetiger Funktionen

Stückweise konstante Funktionen sind zwar nicht stetig, aber sie können stetige Funktionen beliebig genau approximieren. Dazu ist aber auch nötig, die Punkte x_k genügen nahe beieinander zu haben. Als Mass dafür definieren wir das *Korn* einer Unterteilung:

Definition 3.1. Die grösste Länge eines Teilintervalls einer Unterteilung U

$$\delta(U) = \delta(\{x_0, \dots, x_n\}) = \max_{0 \leq k < n} (x_{k+1} - x_k)$$

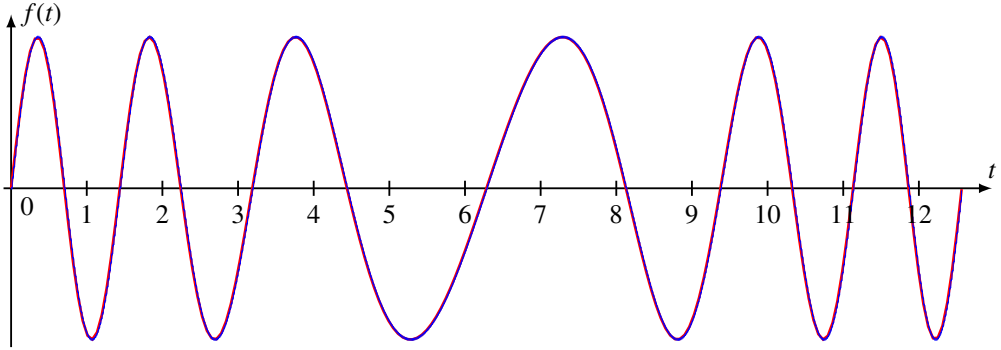


Abbildung 3.3: Stückweise konstante Approximation einer Funktion $f(t)$ mit Hilfe einer Unterteilung der t -Achse in Intervalle der Länge $\frac{1}{64}$. Die Approximation ist so gut, dass man kaum mehr einen Unterschied zwischen Approximation und approximierter Funktion erkennen kann.

heisst das Korn der Unterteilung.

Es wird also behauptet, dass eine stetige Funktion durch eine stückweise konstante Funktion beliebig genau approximiert werden kann, wenn das Korn der Unterteilung klein genug gemacht wird. Genauer, sei $\varepsilon > 0$ geben. Da die Funktion $f(x)$ stetig ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \text{mit} \quad |x - y| < \delta.$$

Wählt man nun eine Unterteilung des Intervalls mit Korn $\delta(\{x_0, \dots, x_n\}) < \delta$ und setzt

$$g_k = f(x_k), \quad 0 \leq k < n.$$

Die Zahlen g_k definieren eine stückweise konstante Funktion, die die Funktion f mit maximalem Fehler ε approximiert:

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - g(x_k)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon + 0$$

für $x \in [x_k, x_{k+1})$.

Sei f eine stetige Funktion, und $\{x_0, \dots, x_n\}$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann kann man sofort mehrere stückweise Approximationen konstruieren:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \sup_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \quad \text{falls } x \in [x_k, x_{k+1}) \\ \underline{f}(x) &= \inf_{x \in [x_k, x_{k+1})} f(x) \quad \text{falls } x \in [x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

Die Funktion \bar{f} ist also immer mindestens so gross wie f und \underline{f} ist immer höchstens so gross wie f . Es gilt also

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$$

für $x \in [a, b]$. Ausserdem gilt für die weiter oben konstruierte Approximation $g(x)$ der Funktion $f(x)$ die Ungleichung

$$\underline{f}(x) \leq g(x) \leq \bar{f}(x)$$

für $x \in [a, b]$.

Die stetigen Funktionen auf einem Intervall bilden einen Vektorraum: eine Summe von stetigen Funktionen ist wieder eine stetige Funktionen. Intuitiv ist auch klar, dass ein Summe stückweise konstanter Funktionen wieder stückweise konstant ist. Es ist aber auch klar, dass die Summe zweier Funktionen, die verschiedene Unterteilungen verwenden, im allgemeinen mit keiner der Unterteilungen stückweise konstant ist. Seien $U_f = \{x_0^{(f)}, \dots, x_n^{(f)}\}$ und $U_g = \{x_0^{(g)}, \dots, x_m^{(g)}\}$ die Unterteilung, bezüglich der die Funktionen f und g stückweise konstant sind. Dann ist die Vereinigungsmenge

$$U = \{x_0, \dots, x_N\} = U_f \cup U_g$$

eine Unterteilung von $[a, b]$. Da alle Teilpunkte von U_f in U sind, ist f auch eine stückweise konstante Funktion bezüglich der Unterteilung U . Ebenso ist g eine stückweise konstante Funktion bezüglich U . Da U eine gemeinsame Unterteilung für f und g ist, kann man die Summe $h = f + g$ als stückweise konstante Funktion mit

$$h_k = (f + g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k) \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq N$$

betrachten. Die Vereinigung der Unterteilungen stellt also sicher, dass sich zu zwei beliebigen stückweise konstanten Funktionen immer eine gemeinsame Unterteilung finden lässt, die klar macht, dass $f + g$ wieder eine stückweise konstante Funktion ist. Die Vektorraumstruktur verlangt also etwas mehr sorgfalt.

3.1.3 Integration stückweise konstanter Funktionen

Das Integral einer stückweise konstanten Funktion ist besonders einfach zu berechnen, nämlich

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Dies ist im wesentlichen die Definition des Riemann Integrals. Genauer wird das Riemann-Integral einer stetigen Funktion jeweils konstruiert mit Hilfe von genügend feinen Unterteilungen und den Approximationen \bar{f} und \underline{f} . Dazu bildet man die Integrale

$$\int_a^b \underline{f}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{f}_k (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \bar{f}_k (x_{k+1} - x_k) = \int_a^b \bar{f}(x) dx$$

Verfeinerung des Korns der verwendeten Unterteilung bringt für eine stetige Funktion die beiden Schranken näher zusammen. Das Integral der stetigen Funktion $f(x)$ ist dann der Grenzwert dieser beiden Schranken:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \underline{f}(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \bar{f}(x) dx,$$

wobei für den Grenzwert Unterteilungen verwendet werden sollen, deren Korn δ gegen 0 geht. Das Riemann-Integral verträgt sich daher gut mit den arithmetischen Operationen: es ist eine lineare Abbildung. Es verträgt sich aber auch mit dem Begriff der Approximation von stetigen Funktionen: nahe beieinanderliegende Funktionen haben nahe beieinanderliegende Integrale.

Die stückweise konstanten Funktionen bilden aber auch einen Vektorraum mit Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist wieder definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Ist U eine gemeinsame Unterteilung für die stückweise konstanten Funktionen f und g , dann ist das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k).$$

Das Skalarprodukt hat also genau die gleiche Form wie das Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum. Daraus kann zum Beispiel geschlossen werden, dass für dieses Skalarprodukt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt und dass es positiv definit ist.

Der Vektorraum der stückweise konstanten Funktionen kann nicht vollständig sein. Jede stetige Funktion ist ein Grenzwert von stückweise konstanten Funktionen. Selbstverständlich kann man analoge Art auch einen komplexen Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt konstruieren. Weil er nicht vollständig ist, kann er kein Hilbertraum sein. Um ihn besser zu verstehen wäre es schön, wenn man eine Hilbert-Basis angeben könnte, also eine Folge von orthonormierten Funktionen, mit denen man jede Funktion approximieren kann. Die vielen möglichen Teilpunkte des Intervalls sind dafür aber eher hinderlich.

3.2 Sampling

Im vorangegangenen Abschnitt wurden stückweise konstante Funktionen studiert und es wurde gezeigt, dass diese einen Vektorraum mit Skalarprodukt bilden, also alle Voraussetzungen für eine Theorie ähnlich der Fourier-Theorie bauen kann. Es wurde aber auch gezeigt, dass die freie Unterteilbarkeit des Intervalls die Konstruktion einer orthonormierten Basis erschwert hat. Das Problem kann gelöst werden, indem man die Unterteilung ein für alle Male festlegt, zum Beispiel indem man das Intervall in n gleichgrosse Teil unterteilt:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}. \quad (3.2)$$

Das Korn dieser Unterteilung ist $(b-a)/n$, durch Vergrößerung von n kann man die Approximation verbessern.

Diese spezielle Unterteilung ist von grosser praktischer Bedeutung, da die digitale Abtastung eines Signals $f(x)$ genau so eine Unterteilung der Zeitachse verwendet und die Funktion $f(x)$ durch die stückweise konstante Funktion

$$\tilde{f}(x) = f(x_k) \quad \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}).$$

Die Abtastung einer Funktion $f(x)$ an den Stellen x_k ersetzt die Funktion durch eine Folge von Zahlen $f_k = f(x_k)$. Durch die Verwendung einer festen Unterteilung werden die arithmetischen Operationen viel einfacher. Um die Summe zu bilden ist es nicht mehr nötig, eine gemeinsame Unterteilung zu finden, weil alle Funktionen bereits die gemeinsame Unterteilung (3.2) verwenden. Die Vektorraum-Operationen sind ebenfalls einfach zu bilden, da sie direkt auf den Sample-Vektoren wirken:

$$(f + g)_k = f_k + g_k.$$

Auch das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k$$

kann allein mit Vektoroperationen durchgeführt werden.

Es ist auch einfach, eine Basis zu finden. Dazu kann man die Indikatorfunktionen der $\chi_{[lh, (l+1)h)}(x)$ verwenden. Zwecks Normierung verwenden wir statt der Indikatorfunktion die Funktionen

$$e^{(l)}(x) = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \chi_{[lh, (l+1)h)}(x)$$

Sie sind auch definiert durch die Abtastwerte

$$e_k^{(l)} = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \delta_{kl}.$$

Die Skalarprodukte dieser Funktionen sind

$$\langle e^{(l)}, e^{(r)} \rangle = \frac{n}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} e_k^{(l)} e_k^{(r)} = \frac{n}{b-a} \left(\sqrt{\frac{b-a}{n}} \right)^2 \delta_{lr} = \delta_{lr},$$

die Funktionen $e^{(l)}$ sind daher orthonormiert.

Diese Konstruktion kann auf die ganze reelle Achse erweitert werden. Der Sample-Abstand h definiert eine Unterteilung

$$\dots < x_k = kh < x_{k+1} < \dots$$

der reellen Achse mit Korn h . Zu einer stetigen Funktion $f(x)$ gehört dann ein Sample-Vektor $f_k = f(x_k) = f(kh)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, für den auch die arithmetischen Operationen definiert sind. Auch das Skalarprodukt wird durch die unendliche Summe

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_k$$

definiert werden. Es ist natürlich nur definiert, wenn die Summe konvergiert. Dazu müssen die Folgen f_k und g_k quadratsummierbar sein. Diese Bedingung ist für die praktischen Anwendungen keine Einschränkung, denn praktische Signale sind nur für endliche Zeit von 0 verschieden, die Summe hat also von vornherein nur endliche viele Terme. Die Funktionen

$$e_k^{(r)} = \delta_{rk}$$

können als orthonormierte Basis verwendet werden.

Der erweiterte Definitionsbereich der $\{kh | k \in \mathbb{Z}\}$ ermöglicht, Signale zu vergleichen, die nur zeitlich verschoben sind. Sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ um ein Vielfaches von h verschoben, dann gibt es eine ganze Zahl so dass $f(x) = g(x + lh)$ gilt und daher auch $f_k = g_{k+l}$. Zeitliche Translationen der Funktion $f(x)$ können also abgebildet werden auf ganzzahlige Translationen der Folgen f_k . Diese Translationen sind bezüglich des Skalarprodukts Isometrien.

Allerdings haben wir uns jetzt ein weiteres Problem eingehandelt. Weil das Korn der Unterteilung fest ist, können wir nicht mehr jede beliebige Funktion beliebig genau approximieren. In der Tat hat das Sampling-Theorem gezeigt, dass nur bandbreitenbegrenzte Funktionen exakt rekonstruiert werden können. Man könnte natürlich von vornherein ein so feines Korn wählen, dass alle möglicherweise interessierenden Details durch den Sampling-Prozess erfasst werden. Bei einem langsam veränderlichen Signal werden aufeinanderfolgende Samples sehr nahe beieinander liegen. Es wird daher eine grosse Datenmenge produziert, die aber in hohem Masse redundant ist, da der grösste Teil der Information bereits bei viel kleinerem Sample-Abstand erkennbar wird.

Gesucht ist also eine Hierarchie von Unterteilungen, so dass wir einerseits die nützliche Translations-Invarianz retten können, aber andererseits auch beliebig gute Approximation eines Signals finden können.

3.3 Dualzahlen-Unterteilung

Wir beginnen mit der Unterteilung

$$U_0 = \{k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

der reellen Achse durch ganze Zahlen. Man könnte auch sagen, als Masseinheit auf der x -Achse wird die Länge des Abtastintervalls verwendet. Abtastung erfolgt also nur an ganzzahligen x -Werten und Translationen um ganze Zahlen sind uneingeschränkt möglich.

Um mehr Detail zu erhalten, kann das Abtastintervall halbiert werden. Die Unterteilung bekommt dann die Form

$$U_1 = \{k2^{-1} \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2^{-1}\mathbb{Z}.$$

Offenbar können damit doppelt so hohe Frequenzen abgetastet werden. Beim Übergang von U_0 zu U_1 können die bereits bekannten Samples an den Stellen U_0 weiterverwendet werden. In U_1 sind Translationen um ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{2}$ möglich.

Der Verfeinerungsprozess kann weitergeführt werden, so dass beliebig feine Unterteilung

$$U_j = \{k2^{-j} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

entstehen. In jedem Schritt wird die Menge an Informationen der gesampelten Funktion verdoppelt, ohne dass früher gefundene Samples nutzlos werden. In U_j sind Verschiebungen um ganzzahlige Vielfache von 2^{-j} möglich. Es wird daher in U_j nicht nur möglich, Signale für genügend grosses j beliebig genau zu approximieren, sondern auch beliebig fein aufgelöste Translationen abzubilden. Wir bezeichnen den Vektorraum der stückweise konstanten Funktionen bezüglich der Unterteilung U_j mit V_j . Es gilt also $V_j \subset V_{j+1}$.

Die Mengen U_j haben zusätzliche Struktur. Die Addition und die Multiplikation mit ganzen Zahlen führt nicht aus der Menge heraus. Sind $x = k_x 2^{-j} \in U_j$ und $y = k_y 2^{-j} \in U_j$ und $r \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$\begin{aligned} x + y &= k_x 2^{-j} + k_y 2^{-j} = (k_x + k_y) 2^{-j} \in U_j \\ rx &= r(k_x 2^{-j}) = (rk_x) 2^{-j} \in U_j. \end{aligned}$$

Man sagt, U_j ist ein *Modul* über den ganzen Zahlen oder ein \mathbb{Z} -*Modul*. Die Additionseigenschaft ist insofern von Bedeutung, als eine analoge Eigenschaft für die Konstruktion der Fouriertheorie von entscheidender Bedeutung war.

Man kann auch versuchen, eine Basis zu konstruieren. Im Vektorraum V_j können die Funktionen mit Samplewerten

$$e_k^{(j)} = \frac{1}{2^{-j/2}} \delta_{kl}$$

als Basisvektoren verwendet werden. Wegen

$$\langle e^{(j)}, e^{(r)} \rangle = 2^{-j} \left(\frac{1}{2^{-j/2}} \right)^2 \delta_{lr} = \delta_{lr},$$

Jeder einzelne der Vektorräume V_j hat also eine einfach anzgebende Basis.

Die Vereinigung aller U_j

$$\mathbb{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_j = \{k e^{-j} \mid k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$$

ist die Menge aller Brüche mit Zweierpotenz-Nennern. Sie heisst die Menge der *Dualzahlen*. \mathbb{D} noch eine weitere Struktur. Sind $x = k_x 2^{-j_x} \in U_{j_x}$ und $y = k_y 2^{-j_y} \in U_{j_y}$, dann ist das Produkt

$$xy = k_x 2^{-j_x} k_y 2^{-j_y} = (k_x k_y) 2^{-(j_x+j_y)} \in U_{j_x+j_y}$$

und damit $xy \in \mathbb{D}$. In den Dualzahlen ist daher auch die Multiplikation möglich, so wie dies in der Mengen \mathbb{Z} der ganzen Zahlen möglich ist. Man sagt, \mathbb{D} ist ein Ring. Während in jeder Menge U_j nur die Multiplikation mit ganzen Zahlen möglich war, ist in \mathbb{D} auch die Division durch Zweierpotenzen möglich. Damit ist in \mathbb{D} die Möglichkeit entstanden, die Abtastung in Zweierpotenzschritten beliebig zu verfeinern.

Die stückweise konstanten Funktionen mit Teilpunkten in der Menge \mathbb{D} bilden einen Vektorraum, den man aus der Vereinigung der Vektorräume V_j aufbauen kann. Wir bezeichnen mit

$$V_\infty = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

den Unterraum des Vektorraumes der stückweise konstanten Funktionen mit dem Skalarprodukt. Mit diesen speziellen stückweise konstanten Funktionen lassen sich ebenfalls beliebige stetige Funktionen approximieren, denn dazu war ja nur erforderlich, dass sich das Korn der Unterteilung, also 2^{-j} im Falle von V_j beliebig klein machen lässt.

Die Konstruktion ist aber trotzdem nicht befriedigend. Zum einen sind die Funktionen $e^{(k)}$ der verschiedenen Vektorräume nicht orthogonal. Andererseits lösen sie das bereits angesprochen Problem der Redundanz der Information nicht. Das Skalarprodukt eines Signals mit $e^{(l)}$ ist im Wesentlichen der Abtastwert in der Nähe von $l2^{-j}$. Für langsam veränderliche Signale sind nahe beieinander liegende Abtastwerte nahe beieinander. Mit den Vektorräumen V_j ist es also möglich, ein Signal beliebig genau abzutasten, aber die naheliegende Basis führt nicht zu einer effizienten Charakterisierung des Signals.

3.4 Wavelet

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Menge \mathbb{D} konstruiert, die einerseits “grobe” Unterteilungen U_j für kleines j enthält, die ohne grossen Abtastaufwand eine grobe Darstellung des Signals ermöglichen, andererseits für grosses j aber auch beliebig “feine” Unterteilungen enthält, mit denen das Signal beliebig genau wiedergegeben werden kann. Die bereits erfassten “groben” Abtastwerte passen zudem genau in die “feinen” Abtastreihen.

Wir haben auch versucht, eine orthonormierte Basis für die Vektorräume V_j der Signale zu konstruieren. Natürlich bilden die einzelnen in V_j gefundenen Basisfunktionen eine Hilbert-Basis des Vektorraumes V_∞ , aber die Funktionen sind nicht orthogonal. Zum Beispiel haben die Funktionen

$$\begin{aligned} f &= 2^{j/2} \chi_{[0, 2^{-j})} \\ g &= 2^{(j+1)/2} \chi_{[0, 2^{-j-1})}, \end{aligned}$$

das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} \chi_{[0, 2^{-j})}(x) 2^{(j+1)/2} \chi_{[0, 2^{-j-1})}(x) dx = \int_0^{2^{-j-1}} 2^{j/2} \cdot 2^{(j+1)/2} dx = 2^{-j-1} 2^{j+1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

verschwindet nicht. Das Sampling mit der Funktion g nimmt einen Teil der Information, die das Sampling mit f schon ermittelt hat, nochmals auf.

Um eine orthonormierte Basis von V_∞ zu erhalten, müssen also bei der Erweiterung von V_j zu V_{j+1} neue Basisfunktionen konstruiert werden, die nur die neue Information aufnehmen, die die feinere Unterteilung in V_{j+1} zu erfassen in der Lage ist. Das Sampling eines Signals $f(x)$ mit der Funktion $e^{(l)}$ in V_j ermittelt das Integral

$$\langle f, e^{(l)} \rangle = 2^{j/2} \int_{l2^{-j}}^{(l+1)2^{-j}} f(x) dx,$$

also im wesentlichen den Mittelwert über das Intervall $[l2^{-j}, (l+1)2^{-j}]$. Veränderungen des Signals innerhalb des Intervalls sind in V_j nicht auflösbar. Beim Sampling in V_{j+1} stehen zwei Basisfunktionen zur Verfügung, die den gleichen Bereich abdecken. Jede dieser Basisfunktionen ermittelt das Integral über eine Hälfte des Intervalls. Veränderungen innerhalb der Intervalhälften sind in V_{j+1} wieder nicht erkennbar. Die neue Information in V_{j+1} ist also, wie sich der Mittelwert in der ersten Intervalhälfte vom Mittelwert in der zweiten Intervalhälfte unterscheidet, also die Differenz

$$\int_{l2^{-j}}^{(l+\frac{1}{2})2^{-j}} f(x) dx - \int_{(l+\frac{1}{2})2^{-j}}^{(l+1)2^{-j}} f(x) dx.$$

Dies lässt sich als ein Skalarprodukt

$$\langle f, \chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})} \rangle$$

schreiben. Die Funktion rechts im Skalarprodukt ist also diejenige, die genau die neue Information in V_{j+1} ermittelt.

Die eben angestellte heuristische Überlegung legt nahe, dass die Funktionen

$$\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}$$

zu den Basisfunktionen, die man in V_j bereits hat, hinzugefügt werden müssen. Allerdings sind diese Funktionen noch nicht orthonormiert, denn die Norm ist

$$\|\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}|^2 dx = 2^{-j}.$$

Wir verwenden daher die Funktionen

$$\psi_{l,j}(x) = 2^{j/2} (\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})}(x) - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}(x))$$

als Basis. Um dies zu rechtfertigen, muss gezeigt werden, dass diese Funktionen auf allen Funktionen in V_j orthogonal und auch untereinander orthogonal sind.

Betrachten wir erst die Frage, ob die Funktionen untereinander orthonormiert sind. $\psi_{l,j}(x)$ ist nur im Intervall $[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})$ von 0 verschieden. Zwei Funktionen $\psi_{l,j}(x)$ und $\psi_{k,j}(x)$ mit $l \neq k$ sind also nirgends gleichzeitig von 0 verschieden, das Skalarprodukt ist daher 0. Dass das Skalarprodukt von $\psi_{l,j}(x)$ mit sich selbst 1 ist wurde durch die oben gewählte Normierung sichergestellt.

Eine Funktion in V_j ist auf ganzzahligen Intervallen der Länge 2^{-j} konstant. Es muss also nur gezeigt werden, dass das Skalarprodukt von $\psi_{l,j}(x)$ mit den charakteristischen Funktionen der Intervalle $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ verschwindet. Man rechnet

$$\langle \chi_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})}, \psi_{l,j} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})}(x) \psi_{l,j}(x) dx = \int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} \psi_{l,j}(x) dx.$$

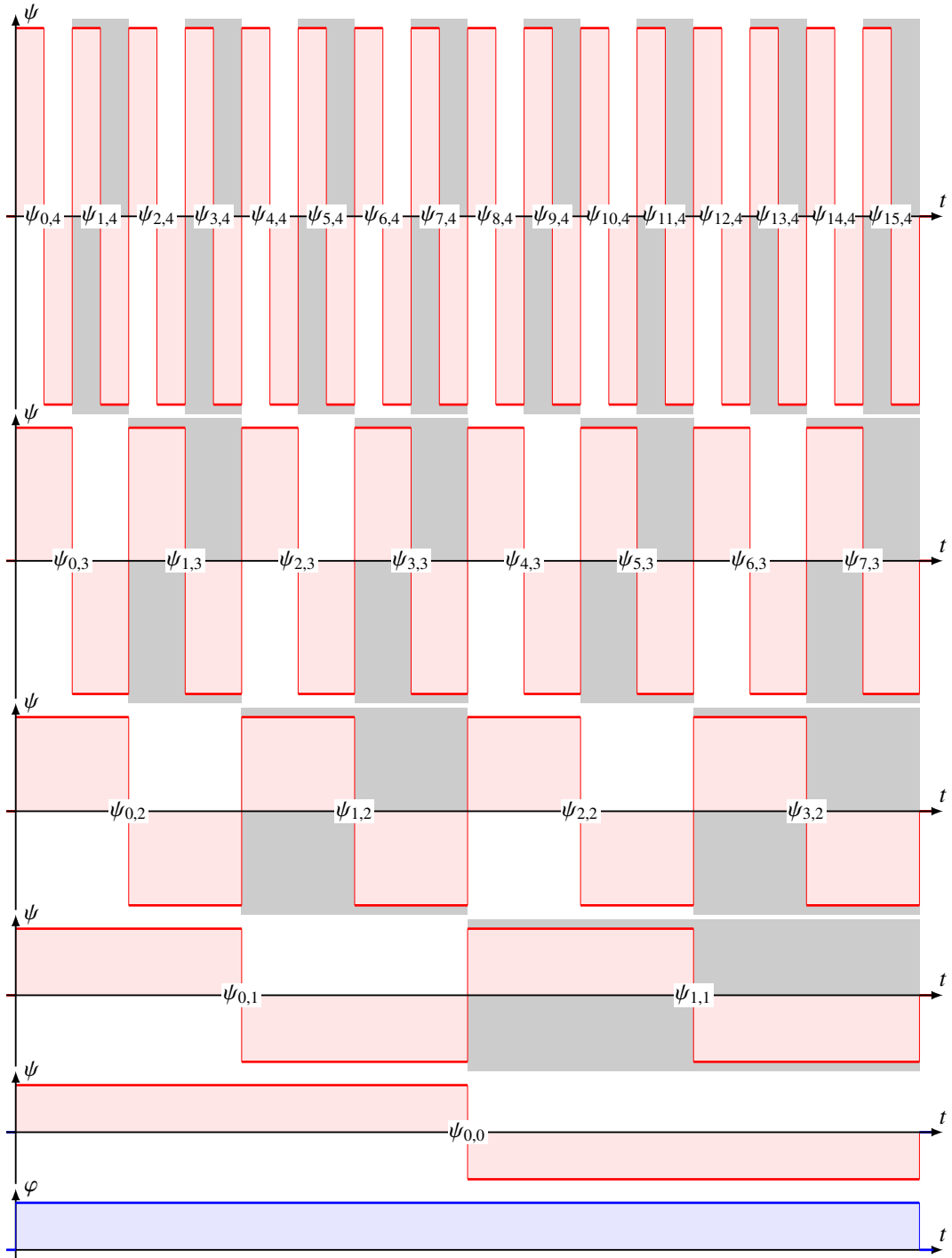


Abbildung 3.4: Hierarchie der Wavelets $\psi_{k,j}$ für das Haar-Wavelet. In der untersten Zeile ist das Vater-Wavelet φ dargestellt, darüber die Wavelets $\psi_{k,j}$, wobei die Wavelets mit ungeradem j jeweils grau hinterlegt sind.

Da $\psi_{l,j}$ verschwindet in Intervallen $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ mit $k \neq l$, braucht nur der Fall $k = l$ zu untersucht werden. In diesem Fall gilt

$$\langle \chi_{[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})}, \psi_{l,j} \rangle = \int_{l2^{-j}}^{(l+1)2^{-j}} \psi_{l,j}(x) dx = 2^{j/2} \int_{l2^{-j}}^{(l+\frac{1}{2})2^{-j}} dx - 2^{j/2} \int_{(l+\frac{1}{2})2^{-j}}^{(l+1)2^{-j}} dx = 2^{j/2} - 2^{j/2} = 0,$$

die Funktionen sind also orthogonal.

Die Funktionen $\psi_{l,j}(x)$ ermöglichen, wirklich alle Funktionen in V_{j+1} darzustellen. Um dies einzusehen, muss man nur zeigen, dass sich die Indikatorfunktionen der Halbintervalle $[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})$ und $[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})$ linear aus der bereits in V_j vorhandenen Indikatorfunktion von $[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})$ und $\psi_{l,j}$ kombinieren lässt. Mit Hilfe der Identität

$$\chi_{[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})} = \chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} + \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}$$

bildet man

$$\begin{aligned} \chi_{[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})} + 2^{-j/2} \psi_{l,j} &= (\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} + \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}) + (\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}) \\ &= 2\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} \\ \chi_{[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})} - 2^{-j/2} \psi_{l,j} &= (\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} + \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}) - (\chi_{[l2^{-j}, (l+\frac{1}{2})2^{-j})} - \chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}) \\ &= 2\chi_{[(l+\frac{1}{2})2^{-j}, (l+1)2^{-j})}. \end{aligned}$$

Bis auf den Faktor 2 lassen sich die gesuchten Indikatorfunktionen kombinieren.

Die Funktionen $\psi_{l,j}$ erfassen also genau die Details, die beim Abtasten mit der feineren Unterteilung mit Korn 2^{-j-1} erkennbar werden. Aber warum bei U_0 beginnen? Der Mittelwert zweier benachbarter Abtastwerte sagt bereits einiges über die Werte aus, der Unterschied dieser Werte ist aber das, was was erst in der Abtastung mit ganzzahligen Abtastpunkten erkennbar wird. Wir könnten also auch mit U_{-1} beginnen, der Unterteilung

$$U_{-1} = \{\dots -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\},$$

und der Menge V_{-1} der stückweise konstanten Funktionen mit Sprungstellen bei geraden Zahlen. Doch warum da aufhören: Es gibt eine Zerlegung des Raums der stückweise konstanten Funktionen mit Sprungstellen in \mathbb{D} in Form einer Kette

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_2 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset V_\infty \quad (3.3)$$

mit folgenden zum Teil noch nachzuweisenden Eigenschaften:

1. Jede stückweise konstante Funktion lässt sich beliebig genau durch Funktionen aus V_j approximieren, also

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = V_\infty$$

2. Es gibt eine orthonormierte Familie von Funktionen $\psi_{l,j} \in V_{j+1}$ die auf V_j orthogonal sind, und die genau das erfassen, was in V_{j+1} gegenüber V_j dargestellt werden kann. Etwas formaler: die $\psi_{l,j}$ spannen einen Unterraum $W_j = \langle \psi_{l,j} \mid l \in \mathbb{Z} \rangle \subset V_{j+1}$ auf derart, dass

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

3. Die Funktionen $\psi_{l,j}$ sind Translate einer einzigen Funktion. Die Funktion $\psi_{l,j}$ ist die Verschiebung der Funktion $\psi_{0,j}$ um $l2^{-j}$.
4. Die Funktionen $\psi_{0,j}$ sind Streckung der Funktion $\psi_{0,0}$ um den Faktor 2^{-j} , die wir auch mit $\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$ bezeichnen wollen:

$$\psi_{0,j}(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi_{0,0}(2^j x).$$

ψ heisst das *Mutter-Wavelet*.

5. Nur für die Nullfunktion verschwinden alle Abtastungen mit Funktionen $\psi_{l,j}$, oder etwas formeller:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Die Konstruktion der Funktionen ψ zeigt aber noch eine weitere Besonderheit, die später von Nutzen sein wird. Die ψ -Funktionen wurden als Differenzen von charakteristischen Funktionen von Intervallen aufeinanderfolgenden Endpunkten in U_{j+1} aufgebaut. Alle diese charakteristischen Funktionen sind verschobene und geeignet gestreckte Versionen der charakteristischen Funktion des Grundintervals $[0, 1)$. Setzen wir

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x),$$

dann ist

$$\chi_{[l2^{-j}, (l+1)2^{-j})}(x) = \varphi(2^j x - l).$$

Und auch die Funktion $\psi_{0,0}$, aus der sich alle $\psi_{l,j}$ durch Streckung und Verschiebung gewinnen lassen, lässt sich aus φ aufbauen:

$$\psi_{0,0}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1). \quad (3.4)$$

Die Funktion φ heisst auch das *Vater-Wavelet*. Das Vater-Wavelet φ erfüllt eine ähnliche Relation wie (3.4). Bei der Konstruktion haben wir diese Relation sogar in entscheidender Weise gebraucht, indem wir das Intervall in zwei Halbintervale aufgeteilt haben. Diese Aufteilung bedeutet

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1),$$

bis auf das Vorzeichen des zweiten Summanden dasselbe wie (3.4).

Das Vater-Wavelet und seine ganzzahlig verschobenen Kopien bilden eine Basis des Vektorraumes V_0 . Schreiben wir $\varphi_k(x) = \varphi(x - k)$, dann ist

$$V_0 = \langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Die feiner aufgelösten Funktionen V_j haben die gestauchten Funktionen $D_{2^j} \varphi_k$ mit $(D_{2^j} \varphi_k)(x) = \varphi_k(2^j x)$ als Basis. Diese sind zwar orthogonal, aber erst $2^{j/2} \varphi_k(2^j x)$ sind orthonormiert. Die Funktionen φ und ψ liefern daher die Zerlegung des Raumes

$$V_1 = V_0 \oplus W_1 = \langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \oplus \langle \psi_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle$$

in zwei orthogonale Teilräume.

Aus diesem Beispiel können wir einen Plan für die Konstruktion allgemeinerer Wavelet-Basen ableiten. Wir hätten gerne eine Aufteilung des interessierenden Funktionenraumes in Form einer Kette

(3.3) derart, dass die “Zwischenräume” W_j eine Orthonormalbasis haben, die aus verschobenen und gestreckten Kopien $\psi()$ einer einzigen Funktion ψ , dem Mutter-Wavelet, besteht. Das Mutter-Wavelet ist eine Linearkombination von verschobenen und skalierten Kopien des Vaterwavelets $\varphi(x)$, welches seinerseits eine Linearkombination von verschobenen und skalierten Kopien seiner selbst ist. Die Koeffizienten der Linearkombinationen für ψ und φ sind bis auf die Vorzeichen identisch.

3.5 Haar-Approximation

Die Konstruktion der Haar-Wavelets hat eine orthonormierte Basis von Funktionen auf \mathbb{R} geliefert. Nach der Ausdehnung der Konstruktion von V_j auf negative Werte von j wurde behauptet, dass jede Funktion durch verschobene und gestreckte Kopien des Mutter-Wavelets ψ approximiert werden kann. Allerdings entsteht hier auch ein Paradoxon, welches im letzten Abschnitt aufgelöst wird.

3.5.1 Sampling

In der Praxis steht das Signal nicht als eine Funktion vor, sondern als eine Folge von Abtastwerten, die in Zeitabständen 2^{-n} gemessen wurden. Die Abtastung hat also das Signal $f(x)$ durch die stückweise konstante Funktion

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l2^{-n}) \chi_{[l2^{-n}, (l+1)2^{-n})}$$

ersetzt. Natürlich geht dadurch etwas Information verloren und es haben auch schon Autoren darauf hingewiesen, dass die unkritische Verwendung solcher Samples als Input für nachfolgende Wavelet-Filter nicht zulässig sei. Doch ist diese Kritik nicht aus den folgenden Gründen nicht wirklich nachvollziehbar:

1. Meistens steht keine weitere Information über das Signal zur Verfügung, es ist nicht einfach möglich, die Abtastrate eines Systems zu erhöhen.
2. Das Sampling-Theorem stellt sicher, dass aus diesen Samples die Funktion wiederhergestellt werden kann, wenn die Bandbreite der Funktion begrenzt ist. Dies bedeutet, dass die Änderungen zwischen den Abtastpunkten so klein sind, dass sie für die Rekonstruktion keine Rolle spielen.

3.5.2 Filter

Eine stückweise konstante Funktion $f \in V_n$ lässt sich als Linearkombination von Wavelets $\psi_{l,j}$ mit $0 \leq j \leq n$ und den Indikatorfunktionen auf den Einheitsintervallen $\varphi_k(x)$. Dies ist eine Folge der Zerlegung von V_n in

$$V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n = V_n. \quad (3.5)$$

Die Funktion f kann daher zerlegt in je einen Summanden f_j in W_j

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

mit $\langle f_k, f_l \rangle = 0$ für $k \neq l$. Es gibt eine Projektion

$$P_j: V_n \rightarrow W_j: f \mapsto P_j f = f_j$$

für $j > 0$, welche genau die in W_j liegende Komponente von f ermittelt. $P_j f$ umfasst den Teil der Funktion, der die hochfrequenten Änderungen der Funktion f umfasst, man kann P_j als Hochpassfilter ansehen.

Der verbleibende Teil $f - P_n f$ umfasst alle Details der Funktion, die gröbere Auflösung als 2^{-n} haben. Die Abbildung $f \mapsto f - P_n f = (I - P_n)f$ ebenfalls eine Projektion:

$$(I - P_n)(I - P_n) = I - P_n - P_n + P_n^2 = I - P_n.$$

Die Projektion $I - P_j$ kann daher als Tiefpassfilter betrachtet werden. Zusammen zerlegen die beiden Filter P_f und $I - P_f$ die Funktion in einen hochfrequenten und einen tieffrequenten Teil, aus dem sich die Funktion exakt rekonstruieren lässt.

3.5.3 Wavelet-Koeffizienten

Für die Funktion f bedeutet die Aufteilung (3.5), dass sie geschrieben werden kann als

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi_k(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k1} \psi_{k1}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k2} \psi_{k2}(x) + \cdots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{kn} \psi_{kn}(x)$$

Die Filter P_n und $I - P_n$ können daher auch durch die Koeffizienten ausgedrückt werden:

$$P_n f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{kn} \psi_{kn}(x)$$

$$(I - P_n)f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi_k(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k1} \psi_{k1}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k2} \psi_{k2}(x) + \cdots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k,n-1} \psi_{k,n-1}(x)$$

Die Aufgabe besteht jetzt also darin, die Koeffizienten b_k und a_{kj} dieser Zerlegung zu finden. Die Koeffizienten können mit dem Skalarprodukt

$$a_{kj} = \langle \psi_{kj}, f \rangle$$

gefunden werden. Auf den ersten Blick sieht das nach einer aufwendigen Operation aus, für die die Bestimmung eines Integrals für jeden Koeffizienten erforderlich ist, oder mindestens die Berechnung einer grossen Summe. Die spezielle Struktur erlaubt hingegen eine drastische Vereinfachung.

3.5.4 Der schnelle Approximations-Algorithmus

Wir betrachten die Berechnung der Koeffizienten a_{kj} etwas genauer für $j = n$. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1).$$

Das Skalarprodukt mit dieser Funktion ist

$$\langle \psi, f \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

Die beiden Integrale sind aber nichts anderes als die Mittelwerte der Funktion f über das jeweils halbe Intervall.

Für die $j = n$ bedeutet dies, dass die Koeffizienten a_{kn} im Wesentlichen die Differenzen sind zwischen benachbarten Sample-Werten. Der Hochpass-Filter P_n extrahiert also bis auf die Normierung

die Differenzen benachbarter Samplewerte. Ein neuer Koeffizient fällt nach jedem zweiten Abtastwert an.

Die Komponenten $(I - P_n)f$ des Signals ist jetzt nur noch eine stückweise konstante Funktion, die jeweils auf Intervallen der doppelten Länge konstant ist. Der zugehörige Wert ist das Skalarprodukt mit $\varphi_k(2^{j-1}x)$, nach der Skalierungsgleichung für φ ist dies im wesentlichen der Mittelwert benachbarter Abtastwerte.

Damit ist jetzt die Filterung vollständig beschrieben. Der Hochpassfilter P_n ermittelt aus benachbarten Abtastwerten die Differenz. Der Tiefpassfilter $I - P_n$ ermittelt den Mittelwert. Um den Rest der Funktion weiter zu analysieren, ist die Projektion P_{n-1} auf den Output von $I - P_n$ anzuwenden. Die Koeffizienten $a_{k,n-1}$ sind daher Differenzen aufeinanderfolgender Tiefpass-Werte. Um die weiteren Koeffizienten zu ermitteln müssen also Schrittweise immer wieder die Filter P_j und $I - P_j$ oder Differenz und Mittelwert angewendet werden.

Mit diesem Algorithmus ist es möglich, die Koeffizienten laufend zu ermitteln. Der erste Koeffizient a_{0n} steht bereits nach dem zweiten Abtastwert zur Verfügung. Nach dem vierten Abtastwert fallen a_{1n} und $a_{0,n-1}$ an. Der Koeffizient b_0 ist nach 2^n Schritten ermittelt, weitere Werte b_k stehen jeweils nach weiteren 2^n Schritten zur Verfügung. Nach 2^n Schritt ist die Transformation also bereits abgeschlossen, die Verarbeitung des Output kann aber bereits früher beginnen, da einzelne Koeffizienten ja schon früher bereitstehen.

Die Diskussion hat gezeigt, dass die Struktur der Ketten von Unterräumen und vor allem die Skalierungseigenschaften der Funktionen φ und ψ dazu führen, dass sich die Wavelet-Transformation besonders effizient als Output zweier einfacher Filter berechnen lässt. Diese Eigenschaft der Wavelet-Transformation steht in krassem Gegensatz zum Beispiel zur Fourier-Transformation. Eine FFT mit $N = 1024 = 2^{10}$ Punkten kann erst begonnen werden, wenn der letzte Punkt zur Verfügung steht, und braucht anschliessend etwa $O(N \log N)$ Rechenoperationen, bis die ersten Fourier-Koeffizienten zur Verfügung stehen. Die Wavelet Transformation mit gleicher Auflösung liefert den ersten Koeffizienten nach 2 Abtastwerten und nach dem letzten Abtastwert können die letzten 10 Koeffizienten mit 10 Operationen ermittelt werden. Die Anzahl der Operationen ist zwar von ungefähr ähnlicher Grösse, aber die Wavelet-Transformation beginnt bereits viel früher, Resultate zu liefern.

3.5.5 Ein Paradoxon

Indem man die Analyse für negative j weiter treibt, erhält man eine Approximation einer Funktion $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen ψ_{lj} mit $-n \leq j \leq n$. Die Funktionen φ_k werden nicht gebraucht. Nach Konstruktion konvergiert die Approximation

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{-n \leq j \leq n} \langle \psi_{kj}, f \rangle \psi_{kj}(x)$$

im L^2 -Sinne gegen die Funktion f . Allerdings verschwindet das Integral jeder der Funktionen ψ_{kj} , so dass auch das Integral von f_n

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{-n \leq j \leq n} \langle \psi_{kj}, f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{kj}(x) dx = 0$$

verschwindet. Andererseits gibt es keinen Grund, warum das Integral von f verschwindet, ein Widerspruch?

Die Auflösung dieses Paradoxons besteht darin, dass die Funktionen f_n zwar im L^2 -Sinn konvergieren, aber nicht im Sinne von L^1 . Dies kann allgemein gezeigt werden, doch ein Beispiel soll

dafür genügen. Die Funktion, die approximiert werden soll, sei die Indikatorfunktion

$$f(x) = \chi_{[0,1)}(x).$$

Die Funktion ist das Vater-Wavelet. Nach Konstruktion der Haar-Wavelets sind die höherfrequenten Wavelets darauf orthogonal, daher verschwinden die Skalarprodukte $\langle \psi_{k,j}, f \rangle = 0$ für $j \geq 0$. Nur die Funktion $\psi_{0,j}$ mit $j < 0$ tragen daher etwas dazu bei. Es ist

$$\langle \psi_{0,j}, f \rangle = \int_0^1 \psi_{0,j}(x) dx = 2^{j/2}.$$

Daraus kann man jetzt die Approximation für f aufschreiben:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \langle \psi_{0,j}, f \rangle \psi_{0,j}(x) \psi_{0,j}(x)$$

Es ist klar, dass die Summe 0 ist für $x < 0$. Wir haben zu überprüfen, dass für $x \in [0, 1)$ die Summe gegen 1 korrigiert. Für $x > 1$ dagegen müsste die Summe gegen 0 konvergieren.

Wir betrachten erst den Fall $0 \leq x < 1$. In diesem Fall ist $\psi_{0,j}(x) > 0$ für alle Werte von $j \leq 0$. Die Summe ist

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j/2} \psi_{0,j}(x) = \sum_{j=-\infty}^{-1} 0 2^{j/2} 2^{j/2} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j = 1.$$

Im Intervall $[0, 1)$ hat die Summe den erwarteten Wert.

Sei jetzt $x > 1$. In diesem Fall kann nicht mehr geschlossen werden, dass alle Terme den gleichen Wert haben. Vielmehr gibt es ein $l < 0$ derart, dass $x < 2^{-l}$. Dies bedeutet, dass

$$\psi_{0,j}(x) = \begin{cases} 0 & j > l \\ 2^{j/2} & j = l \\ -2^{j/2} & j < l. \end{cases}$$

Damit kann die Summe ausgewertet werden:

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j/2} \psi_{0,j}(x) = \sum_{j=-\infty}^{l-1} 2^{j/2} 2^{j/2} - \sum_{j=l}^l 2^{j/2} 2^{j/2} = \sum_{j=-\infty}^{l-1} 2^j - 2^l = 2^l - 2^l = 0$$

Wir schliessen daraus, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$, die Approximationen konvergieren also punktweise gegen $f(x)$, nicht nur im Sinne von L^2 .

Um das Paradoxon aufzulösen, müssen wir jetzt die Konvergenz der Funktionenfolge f_n im L^1 Sinne untersuchen. Dazu müssen wir das Integral

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx + \sum_{l=-\infty}^{-1} \int_{2^{-l-1}}^{2^{-l}} |f_n(x) - f(x)| dx \quad (3.6)$$

berechnen. Im ersten Integral ist $f(x) = 1$, ausserdem ist $f_n(x)$ in diesem Intervall konstant, so dass dieser Teil zu

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \sum_{j=-n}^{-1} 2^{j/2} 2^{j/2} - 1 = \sum_{j=1}^n 2^{-j} - 1 = \frac{1}{2} \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} - 1 = 2^{-n}$$

wird.

Die zweite Summe kann vereinfacht werden, weil die Funktion $f(x)$ in all diesen Teilintervallen verschwindet. Ausserdem ist die Funktion f_n in jedem dieser Intervalle konstant, und der Term $j = l$ in der Summe ist negativ. Die Summe ist dann

$$\int_{2^{-l-1}}^{2^{-l}} |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{2^{-l-1}}^{2^{-l}} |f_n(x)| dx = 2^{-l-1} \left| -2^l + \sum_{j=-n}^{l-1} 2^j \right| = 2^{-1} \left| -1 + \sum_{j=-n-l}^{-1} 2^j \right| = 2^{-n-l-1}.$$

Die Summe auf der rechten Seite von (3.6) ist endlich, da die Funktion $f_n(x)$ verschwindet für $x > 2^{-n}$, die Summe ist also nur bis $l = -n$ zu erstrecken.

Die Summe all dieser Terme ist jetzt die L^1 -Norm

$$\|f_n - f\| = 2^{-n} + \sum_{l=-n}^{-1} 2^{-n-l-1} = 2^{-n} + 2^{-n-1} + \dots + 2^{-1} = 1 - 2^{-n}.$$

Die L^1 -Norm ist also beliebig nahe bei 1, die Summe kann daher nicht im Sinne der L^1 -Norm konvergieren.

Kapitel 4

Stetige Wavelet-Transformation

Im Kapitel 3 wurde am Beispiel des Haar-Wavelets gezeigt, wie jede beliebige stetige Funktion als Linearkombination skalierten und verschobenen Versionen einer einzigen Ausgangsfunktion $\psi(t)$ geschrieben werden kann. Das Haar-Wavelet hat einen Ausweg aus der Schwierigkeit der Fourier-Transformation gewiesen, Ereignisse sowohl auf der Zeitachse wie auch bezüglich ihrer Frequenz zu lokalisieren. Es bleibt aber eine Reihe von Schwierigkeiten, die vom Haar-Wavelet nicht adressiert werden:

1. Die Funktion ψ ist nicht stetig, und alle daraus aufgebauten Approximationsfunktionen sind nicht stetig und erst recht nicht differenzierbar.
2. Es werden nur Frequenzen verwendet, die 2^n -fache einer Grundfrequenz sind. Die Analyse kann also nur Oktaven unterscheiden, während Töne auf einer Tonleiter Frequenzverhältnisse von $\sqrt[12]{2}$ haben.

Ziel dieses Kapitels ist, vernünftige Kriterien für Waveletfunktionen $\psi(t)$ zu finden, so dass die Analyse und Synthese ähnlich einfach wie für Haar-Wavelets möglich bleibt. Ausserdem soll die stetige Wavelet-Transformation diskutiert werden, welche das Problem der “Zwischenfrequenzen” löst.

4.1 Wavelets

Das Ziel ist also, Funktionen mit Hilfe von verschobenen und skalierten Versionen eines sogenannten *Mutterwavelets* $\psi(t)$ zu analysieren. Die Analyse spielt sich im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ ab, so dass vorausgesetzt werden muss, dass $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Man stellt sich auch vor, dass ψ so etwas wie ein Basisvektor ist, daher wird verlangt dass $\|\psi\| = 1$.

Diese Voraussetzungen reichen jedoch nicht. Es stellt sich heraus, dass einfache Rekonstruktionsformeln nur zu bekommen sind, wenn die Funktion $\psi(t)$ zusätzlich der folgenden Zulässigkeitsbedingung genügen.

Definition 4.1. Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\| = 1$ heisst Mutter-Wavelet oder einfach nur Wavelet, wenn ihre Fourier-Transformierte $\hat{\psi}(a)$ zusätzlich die Bedingung

$$C_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|} da < \infty \quad (4.1)$$

erfüllt.

Beispiel. Das Haar-Mutter-Wavelet

$$\psi_{\text{Haar}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt die Zulässigkeitsbedingung. Dazu muss die Fourier-Transformation von ψ_{Haar} berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\text{Haar}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{Haar}}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (-e^{-i\omega/2} + 1 + e^{-i\omega} - e^{-i\omega/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega/2} - 1)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(e^{-i\omega/4})^2}{i\omega} (e^{i\omega/4} - e^{-i\omega/4})^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega/2}}{-i\omega/4} \left(\frac{e^{i\omega/4} - e^{-i\omega/4}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i e^{-i\omega/2} \frac{\sin(\omega/4)^2}{\omega/4}. \end{aligned}$$

Die Zulässigkeitsbedingung ist jetzt leicht zu verifizieren, denn der Integrand ist

$$\frac{|\hat{\psi}_{\text{Haar}}(\omega)|^2}{|\omega|} = \frac{1}{8\pi} \frac{\sin(\omega/4)^4}{(\omega/4)^2}.$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist stetig und hat an der Stelle $\omega = 0$ den Grenzwert 0. Damit existiert das Integral. \circ

Die Zulässigkeitsbedingung besagt, dass $\hat{\psi}(0) = 0$ sein muss, sofern dieser Funktionswert der Fouriertransformation überhaupt definiert ist. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Das Haar-Wavelet erfüllt diese letzte Eigenschaft. Lässt sich daraus eventuell ein einfacher zu überprüfendes Kriterium ableiten? Tatsächlich gilt der folgende Satz

Satz 4.2. Ist $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ so, dass $t\psi \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist die Zulässigkeitsbedingung gleichbedeutend mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\psi}(0) = 0.$$

Dieses Kriterium ist vor allem darum so nützlich, weil die Bedingung $t\psi \in L^1(\mathbb{R})$ für praktisch in Frage kommende Wavelets sehr oft trivialerweise erfüllt ist. Ein Wavelet mit kompaktem Träger verschwindet ausserhalb eines Intervalls $[-M, M]$, daher wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| |\psi(t)| dt \leq M \int_{-M}^M |\psi(t)| dt < \infty.$$

Darin haben wir die Aussagen von Satz 2.6 verwendet, dass L^2 -Funktionen auf einem beschränkten Intervall integrierbar sind. Ein weiterer interessanter Fall sind Wavelets, die für $t \rightarrow \infty$ sehr rasch abfallen, wie im folgenden Beispiel.

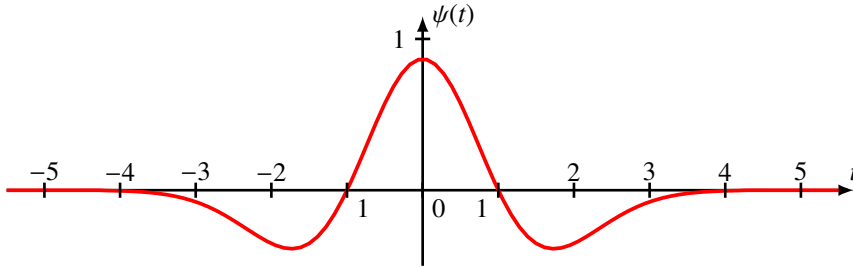


Abbildung 4.1: Mexikaner-Hut Wavelet gemäss (4.2)

Beispiel. Das Mexikanerhut-Wavelet ist definiert durch die Funktion

$$\psi_M(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}} (1 - t^2) e^{-t^2/2}. \quad (4.2)$$

Der Faktor $e^{-t^2/2}$ fällt derart schnell ab, dass auch $|t|^k e^{-t^2/2}$ immer noch exponentiell schnell gegen Null abfällt. Sein Graph ist dargestellt in Abbildung 4.1. Die Funktion ψ_M ist zudem eine ungerade Funktion und erfüllt damit automatisch die Bedingung von Satz 4.2. \circ

Das Kriterium von Satz 4.2 führt uns aber auch auf das folgende Paradoxon. Da das Integral von ψ verschwindet, dann auch von allen verschobenen und skalierten Versionen von ψ , dann müsste doch auch die Grenzfunktion diese Eigenschaft haben. Wir werden später zeigen, dass die Approximationen der Ausgangsfunktion, die mit der Wavelet-Transformation gewonnen wurden, zwar im Sinne von L^2 gegen die Ausgangsfunktion konvergieren, nicht aber im Sinne von L^1 .

4.2 Stetige Wavelet-Transformation

Ein Wavelet soll nun dazu verwendet werden, ein Signal $f(t)$ abzutasten. Da das Wavelet lokalisiert ist, müssen wir es der t -Achse entlang verschieben, um jeden Abschnitt des Signals sinnvoll abtasten zu können. Da das Wavelet auch im Frequenzbereich lokalisiert ist, müssen wir es ausserdem skalieren, um sowohl kurzwellige wie auch langwellige Details des Signals zu erfassen.

Sei also ψ ein Wavelet, also eine Funktion, die die Zulässigkeitsbedingung (4.1) erfüllt¹. Wir setzen daher

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Den Spezialfall $b = 0$ kürzen wir $\psi_a = \psi_{a,0}$ ab.

Lemma 4.3. *Die verschobenen und gestreckten Kopien $\psi_{a,b}$ von ψ haben alle die gleiche Norm: $\|\psi_{a,b}\| = 1$.*

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Verschiebung um b die Norm nicht ändert. Ebenso kann man sich überlegen, dass ein negatives Vorzeichen von a ausser der Skalierung um den Betrag $|a|$ die

¹Die nachfolgenden Definitionen sind zum Teil auch sinnvoll, wenn die Zulässigkeitsbedingung nicht erfüllt ist, doch ist die so entstehende Transformation nicht unbedingt stetig oder umkehrbar.

Funktion am Nullpunkt spiegelt, was die Norm ebenfalls unverändert lässt. Es ist also nur genauer zu untersuchen, ob sich die Norm mit $a > 0$ ändern kann. Dazu berechnen wir

$$\|\psi_{a,b}\|^2 = \|\psi_a\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{|a|} dt$$

Darin substituieren wir $s = t/a$ und erhalten

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)|^2 ds = \|\psi\|^2 = 1.$$

Darin haben wir verwendet, dass $a > 0$. Damit ist gezeigt, dass sich die Norm nicht ändert. \square

Beispiel. Bei den Haar-Wavelets haben wir als Streckungsfaktoren die Zweierpotenzen 2^j mit $j \in \mathbb{Z}$ verwendet. Damit alle Wavelets die gleiche Norm bekamen, haben wir mit dem Faktor $2^{-j/2}$ kompensiert.

Selbstverständlich können wir aber auch das Haar Mutter-Wavelet

$$\psi_{\text{Haar}} = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}$$

als Ausgangspunkt wählen. Dann ist $\psi_{\text{Haar},a,b}$ eine stückweise konstante Funktion, die für $a > 0$ beim Punkt b auf den Wert $1/\sqrt{|a|}$ springt, beim Punkt $b + a/2$ auf $-1/\sqrt{|a|}$ und ab $b + a$ wieder verschwindet. Der Träger der Funktion $\psi_{\text{Haar},a,b}$ ist also das Intervall $[b, b + a]$. \circ

Beispiel. Sei $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung. Man kann nachrechnen, dass ψ die Zulässigkeitsbedingung erfüllt. Die σ skalierten und um μ verschobenen Funktionen sind

$$\psi_{\sigma,\mu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2},$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . \circ

Die Funktionen $\psi_{a,b}$ können jetzt als Analyse-Funktionen für das Signal dienen.

Definition 4.4. Die stetige Wavelet-Transformation des Signals $f(t)$ mit dem Wavelet ψ ist die Funktion

$$\mathcal{W}f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (4.3)$$

Falls in einem Kontext mehrere Wavelet-Funktionen vorkommen, kann die Notation eindeutig gemacht werden, indem die Wavelet-Transformation $\mathcal{W}_\psi f$ geschrieben wird. Der Definitionsbereich der stetigen Wavelet-Transformation ist die Menge

$$H = \mathbb{R}_-^2 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R})$$

die Ebene ohne die Achse $a = 0$.

Die Wavelet-Transformation liefert also eine Funktion von zwei Variablen. Die beiden Parameter erlauben, unabhängig voneinander eine bestimmte Stelle des Signals genauer anzuschauen durch Wahl von b sowie die Details genauer aufzulösen durch Vergrößerung von a .

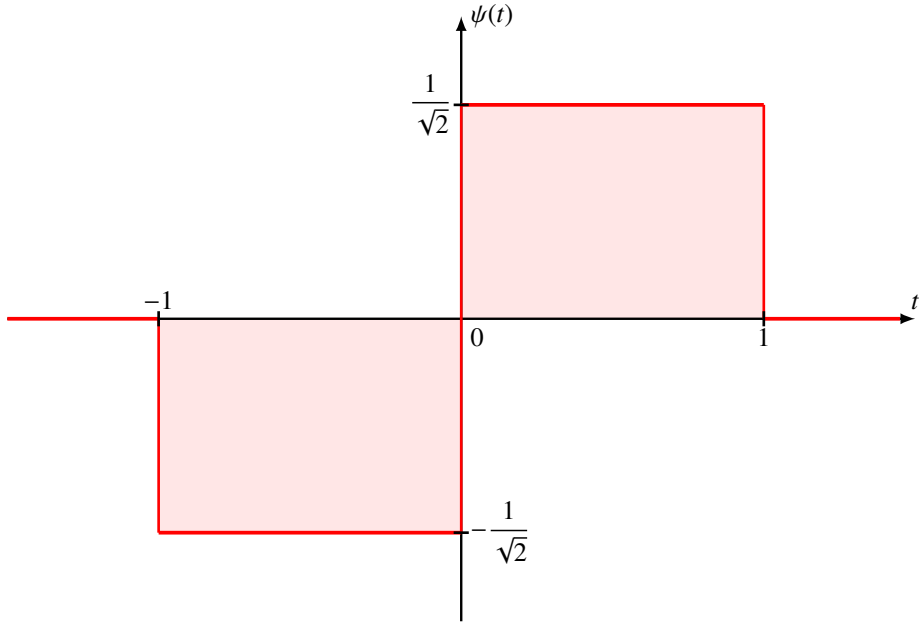


Abbildung 4.2: Graph der Funktion $\psi(t)$ für das Beispiel der Wavelet-Transformation in Abbildung 4.3.

Beispiel. Der Graph der Funktion ist auch in Abbildung 4.2 dargestellt. Wir betrachten die Funktion

$$\psi(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \leq t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist eine gestreckte und verschobene Version des Haar-Wavelets, und erfüllt daher automatisch die Zulässigkeitsbedingung für ein Wavelet. Ausserdem gilt $\|\psi\| = 1$. Gegenüber dem Haar-Mutter-Wavelet hat diese Funktion den Vorteil, dass sie antisymmetrisch ist, so dass auch die stetige Wavelettransformation einer antisymmetrischen Funktion wieder symmetrisch sein wird.

Wir berechnen jetzt die stetige Wavelet-Transform des Signals $f(t) = \sin t$. Nach Definition ist

$$\mathcal{W}f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

Da sich das Integral über ganz \mathbb{R} erstreckt, können wir das Integral um b verschieben, und erhalten

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+b) \overline{\psi\left(\frac{t}{a}\right)} dt.$$

Substituieren wir $as = t$, können wir auch den Skalierungsfaktor von ψ auf das Signal verschieben:

$$= \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(as+b) \overline{\psi(s)} ds.$$

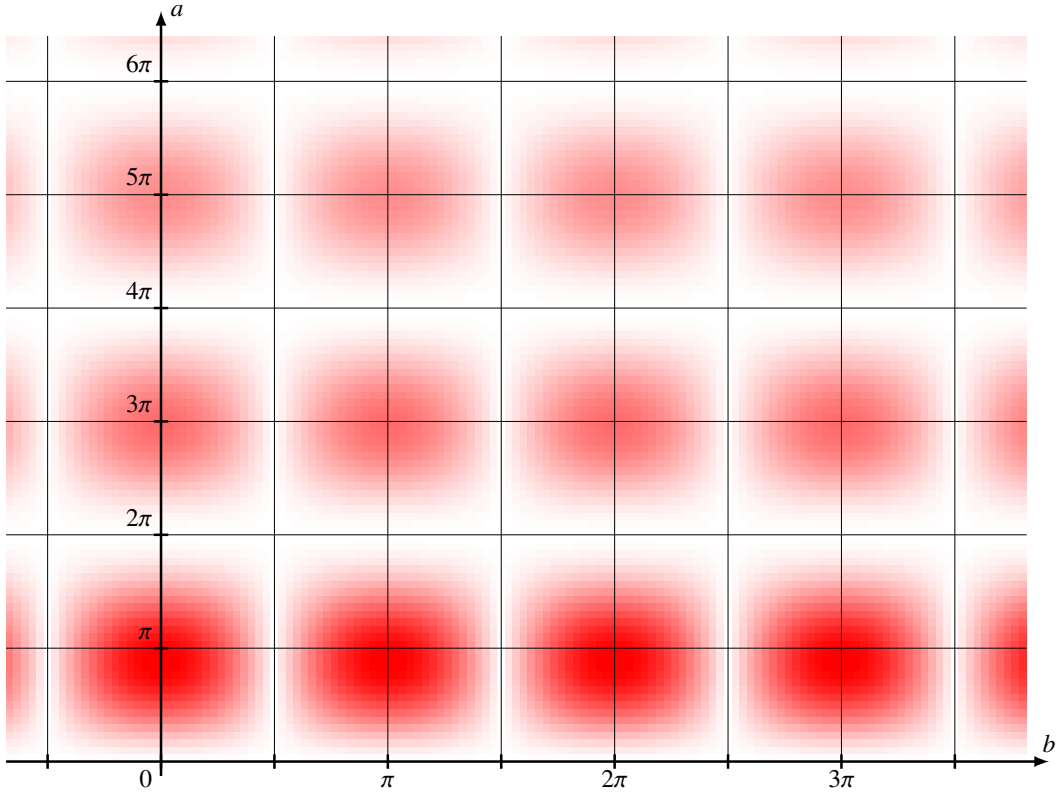


Abbildung 4.3: Wavelet-Transformation der Funktion $f(t) = \sin t$ berechnet mit dem Wavelet $\psi(t)$ von Abbildung 4.2

Für $a < 0$ bekommt man ein negatives Vorzeichen, aber es tauschen auch die Integrationsgrenzen ihre Plätze. Jetzt können wir das Signal f einsetzen und mit der Definition der Funktion ψ das Integral vereinfachen

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2}} \left(- \int_{-1}^0 \sin(as + b) dt + \int_0^1 \sin(as + b) dt \right) \\
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2}} \left(- \left[-\frac{\cos(as + b)}{a} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{\cos(as + b)}{a} \right]_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2|a|}} (\cos(b) - \cos(-a + b) - \cos(a + b) + \cos(b)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2|a|}} (2 \cos b - \cos(b + a) - \cos(b - a))
 \end{aligned}$$

Wir betrachten einige einfach zu berechnende Werte von $\mathcal{W}f$. Die Kosinus-Funktion ist antisymmetrisch bezüglich ungeraden Vielfachen von $\pi/2$. Wir setzen daher $b = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ und berechnen den Wert von

$$\mathcal{W}f(a, b) = \mathcal{W}f\left(a, (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left((2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left((2k + 1)\frac{\pi}{2} - a\right) - \cos\left((2k + 1)\frac{\pi}{2} + a\right)$$

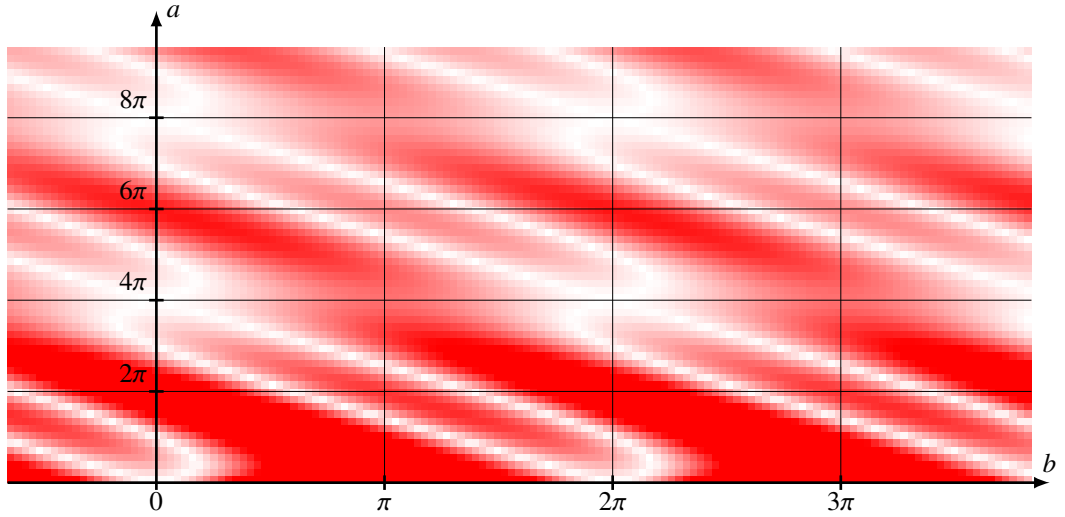


Abbildung 4.4: Wavelet-Transformation der Sinus-Funktion $\sin t$ mit dem Haar-Wavelet ψ_{Haar}

$$= 0 \pm (\sin a - \sin a) = 0.$$

Wenn b ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, also $b = k\pi$, dann ist

$$\mathcal{W}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2|a|}} (2 \cos k\pi - \cos(k\pi + a) - \cos(k\pi - a))$$

Die Kosinus-Funktion ist symmetrisch bezüglich b , so dass die beiden letzten Terme gleich sind.

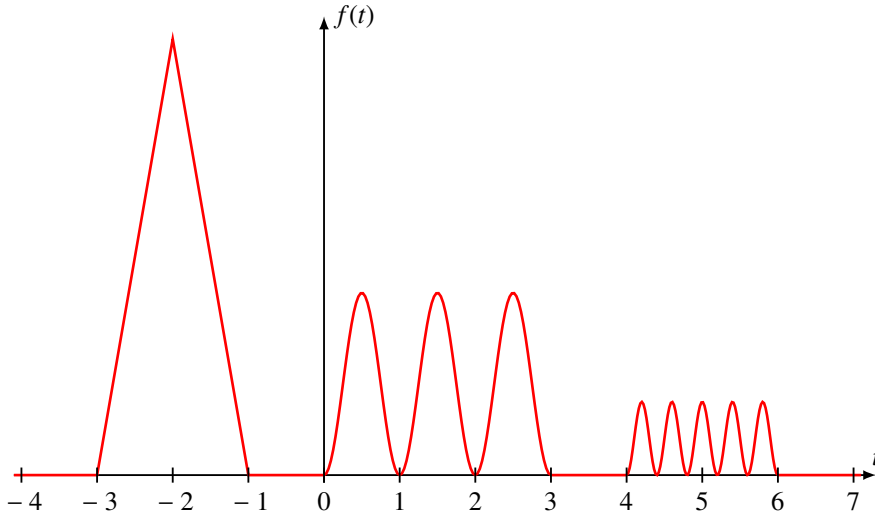
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2|a|}} (2 \cos k\pi - 2 \cos(k\pi + a)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|a|}} (2 \cos k\pi - 2 \cos k\pi \cos a + 2 \sin k\pi \sin a) \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, weil $\sin k\pi = 0$. Im ersten Term können wir $\cos k\pi = (-1)^k$ ersetzen und erhalten

$$= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{2|a|}} (1 - \cos a)$$

Die Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f$ ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Intensivere Farbe bedeutet grösseren absoluten Betrag von $\mathcal{W}f$. Immer wenn die Funktion ψ so skaliert ist, dass sie auf jeder Seite des Nullpunkts eine ganze Zahl vollständiger Sinus-Perioden abdeckt, verschwindet der Wert der Wavelet-Transformation. Wenn dagegen a so gewählt ist, dass auf jeder Seite in halbe Periode “übrig” bleibt, dann nimmt die Wavelet-Transformation den grösstmöglichen Wert an. Da das Signal $\sin t$ periodisch ist, ist auch die Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f$ periodisch in b . Dies erklärt das Muster in Abbildung 4.3. ○

Beispiel. Sei wieder $\psi = \psi_{\text{Haar}}$ das Haar-Wavelet. Wir berechnen die stetige Wavelet-Transformation

Abbildung 4.5: Funktion $f(t)$ aus [buch:blatter]

der Sinus-Funktion $f(t) = \sin t$. Der Einfachheit halber führen wir die Berechnung der Wavelet-Transformation zunächst für $a > 0$ durch. Nach Definition ist gilt

$$\mathcal{W}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Da sich das Integral über die ganze reelle Achse erstreckt, können wir t durch $t + b$ ersetzen, ohne dass sich das Integral ändert. Wir erhalten daher

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t + b) \cdot \psi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(as + b) \cdot \psi(s) a ds.$$

Dabei haben wir $t = as$ substituiert. Jetzt lässt sich das Integral explizit ausrechnen

$$\begin{aligned} &= \sqrt{a} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(as + b) ds - \sqrt{a} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(as + b) ds \\ &= \sqrt{a} \left[-\frac{\cos(as + b)}{a} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} \left[-\frac{\cos(as + b)}{a} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(-1 + 2 \cos\left(\frac{1}{2}a + b\right) - \cos(a + b) \right) \end{aligned}$$

Die Wavelet-Transformation ist in Abbildung 4.4 als Intensitäts-Plot dargestellt. Je grösser $|\mathcal{W}_{\psi_{\text{Haar}}}(a, b)|$, desto intensiver die Farbe. Die Asymmetrie des Haar-Wavelets äussert sich in der gegenüber Abbildung 4.2 offensichtlichen Verzerrung. \circ

Beispiel. Dieses Beispiel stammt aus [buch:blatter]. Wir berechnen die die Wavelet-Transformation der folgenden Funktion f für das Mexikanerhut-Wavelet (4.2), wir setzen also $\psi = \psi_M$.

$$f(t) = \begin{cases} 2.883 \cdot (2 - 2|t + 2|) & -3 \leq t \leq -1 \\ 1.205 \cdot (1 - \cos(2\pi t)) & 0 \leq t \leq 3 \\ 0.968 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(5\pi t)) & 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.4)$$

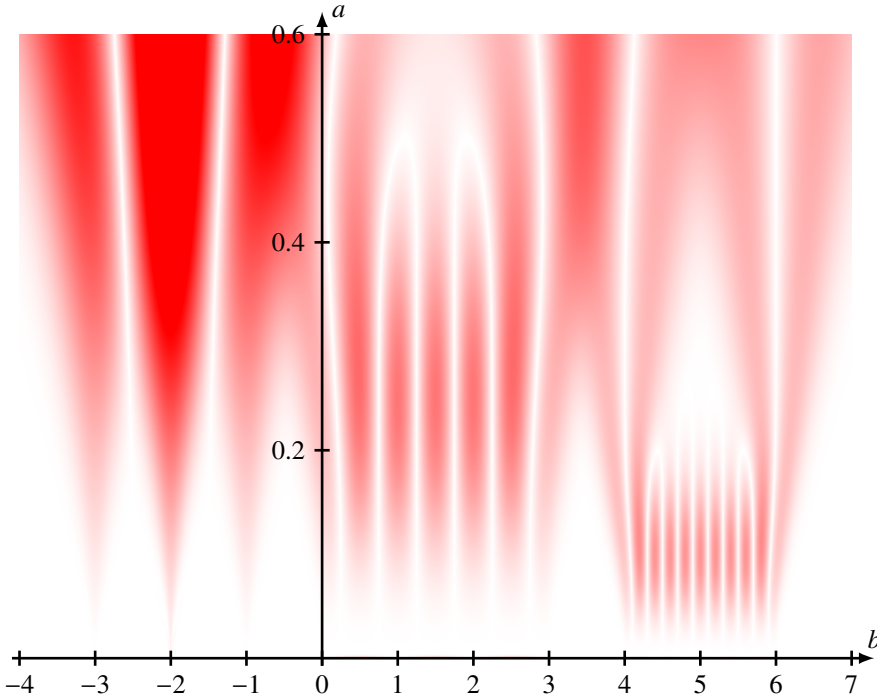


Abbildung 4.6: Stetige Wavelet-Transformation der Funktion (4.4) (Graph in Abbildung 4.5).

Eine graphische Darstellung der Funktion ist in Abbildung 4.4 gegeben. Die numerisch berechnete Transformation ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Die Funktion besteht aus drei Teilfunktionen, die von Intervallen getrennt sind, in denen die Funktion verschwindet. In den Intervallen $[0, 3]$ und $[4, 6]$ hat die Funktion oszillatorischen Charakter. Die Wavelet-Transformation ist in der Lage, dieses Verhalten zu detektieren. Es lässt sich sogar eine ungefähre Aussage über die Frequenzverhältnisse machen. Die Oszillation im Intervall $[4, 6]$ hat 2.5-mal höhere Frequenz als im Intervall $[0, 3]$, was sich darin äussert, dass die Schwerpunkte der roten Flächen bei etwa 2.5-mal geringerem a liegen. ○

In den Abbildungen 4.3 und 4.6 werden die Skalenfaktoren a auf der vertikalen Achse abgetragen. Grössere Werte von a bedeutet dabei grössere “Wellenlänge” des Wavelets, so dass die “hochfrequenten” Koeffizienten am unteren Rand des Intensitätsgraphen sind. In Anwendungen der Signalverarbeitung wird daher oft $1/a$ oder $-\log a$ auf der vertikalen Achse aufgetragen, so dass hohe Frequenzen wie in einem Sonogramm weiter oben dargestellt werden.

Beispiel. In diesem Beispiel verwenden wir komplexe Morlet-Wavelets

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} + 5it} \quad (4.5)$$

um das Sweep-Signal mit linear ansteigender Frequenz

$$f(t) = \sin(t(4 + 0.2t)) \quad (4.6)$$

zwischen $t = 0$ und $t = 26$. Die Resultate sind in Abbildungen 4.7 und 4.8 dargestellt. Der Abso-

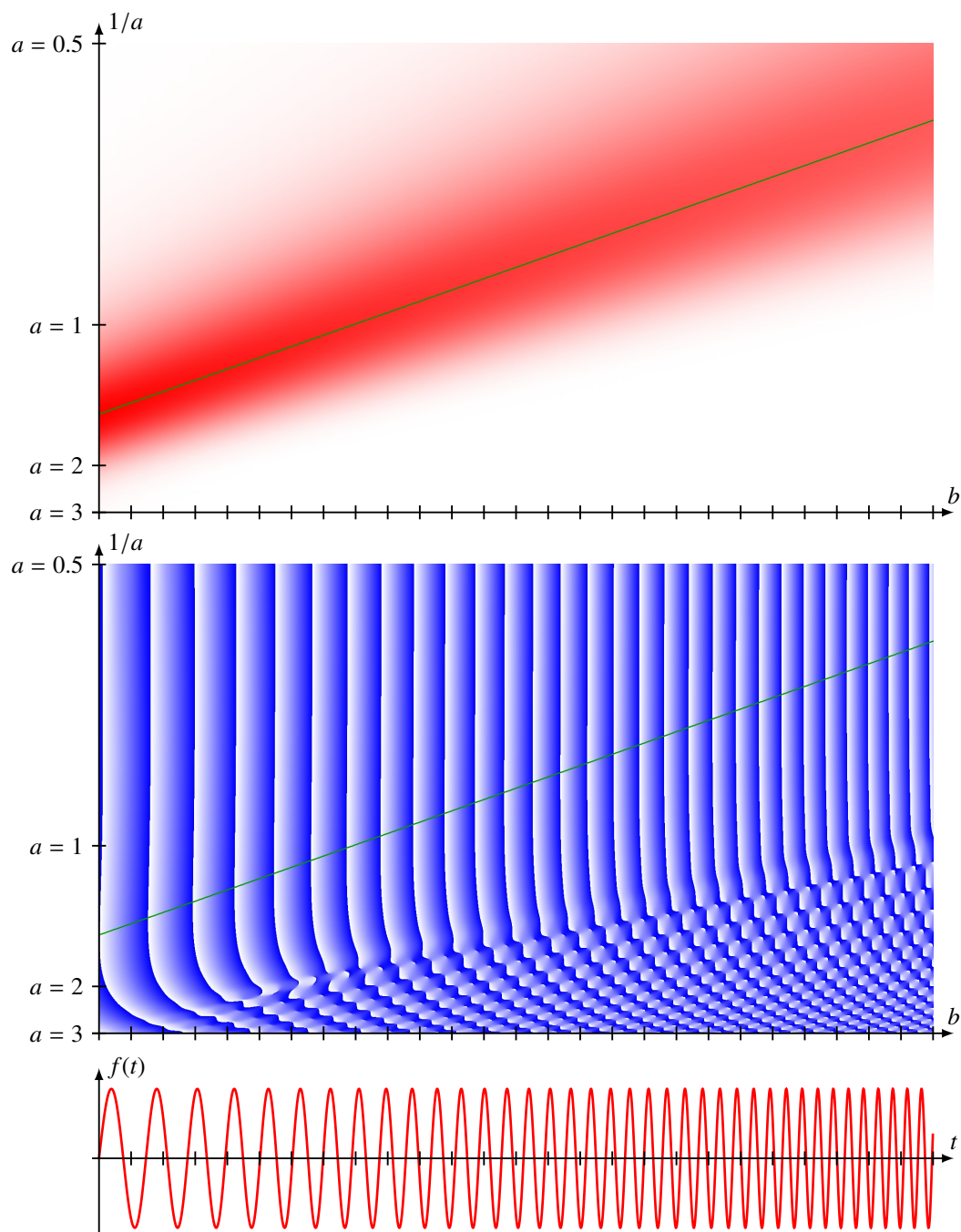


Abbildung 4.7: Absolutwert und Phase der stetigen Wavelet-Transformation der Sweep-Funktion (4.6) für komplexe Morlet-Wavelets $\psi(t) = e^{-t^2/2+5it}$.



Abbildung 4.8: Farbcodierte Darstellung der stetigen Wavelet-Transformation der Sweep-Funktion (4.6) für komplexe Morlet-Wavelets $\psi(t) = e^{-t^2/2} \sin(5t)$.

lutwert der stetigen Wavelettransformation zeigt die aktuelle Frequenz des Sweep-Signals an. Das Maximum der Amplitude für jeden b -Wert ist in Abbildung 4.7 dunkelgrün hervorgehoben. Danke der komplexen Oszillation e^{5it} ändert zwar die Phase relativ rasch entlang des Maximums, der Absolutwert ändert dagegen nur langsam. In Abbildung 4.8 ist die Phase durch die Farbe codiert, auch hier wird offensichtlich, dass die Phase sehr schnell ändert, während die Amplitude nur langsam abfällt.

Ein reelles Wavelet ergibt dagegen immer dann einen maximalen Wert der Wavelet-Transformation, wenn die Extrema des Wavelets mit den Extrema des Signals zusammenfallen. Die komplexen Oszillation $e^{5it} = \cos 5t + i \sin 5t$ kann durch einen Phasenfaktor immer so modifiziert werden, dass die Extrema des Realteils mit den Extrema des Signals zusammenfallen. Dieser Phasenfaktor hat genau die entgegengesetzte Phase der Wavelettransformation. ○

4.3 Plancherel-Formel

Die Plancherel-Formel der Fourier-Theorie besagt, dass die Fourier-Transformation eine Isometrie ist. Das Skalarprodukt zweier Funktionen und das Skalarprodukt der Fourier-Transformierten ist dasselbe. Daraus folgt unmittelbar, dass die Transformation stetig und umkehrbar ist. Es ist daher erstrebenswert, wenn eine ähnliche Formel auch für die stetige Wavelet-Transformation gilt.

4.3.1 Das Skalarprodukt auf H

Der Definitionsbereich $H = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ der Wavelet-Transformierten kann auf verschiedene Arten mit einer Integration ausgestattet werden. Wir versuchen das "richtige" Mass zu erraten, im Abschnitt ?? werden wir eine abstrakte Begründung geben.

Die Variable b verhält sich genau wie die Variable t bei Integration einer Funktion von t . Funktionen werden durch den Parameter b verschoben, dabei darf sich das Integral nicht ändern. Das ist genau die Eigenschaft, mit deren Hilfe das Lebesgue-Mass definiert wurde.

Die Variable a funktioniert dagegen als Skalierungsparameter. Größere Werte von a ziehen den Träger des Integranden um den Faktor a in die Länge.

Definition 4.5. Das Mass auf H ist definiert durch das Integral

$$\int_H F(a, b) db \frac{da}{a^2}$$

und das Skalarprodukt von Funktionen auf H ist

$$\langle F, G \rangle_H = \int_H F(a, b) \overline{G(a, b)} db \frac{da}{a^2}.$$

Dieses Mass ist im folgenden Sinn das richtige Mass. Wenden wir auf die Argumente einer Funktion auf H die Transformation

$$(a, b) \mapsto (\alpha a, \beta + \alpha b)$$

an, ändert sich das Integral wie folgt:

$$\int_H F(\alpha a, \beta + \alpha b) d(\beta + \alpha b) \alpha \frac{da}{|\alpha a|^2} = \int_H F(\alpha a, \beta + \alpha b) \alpha db \frac{da}{|a|^2},$$

die Transformation der Funktion ändert also das Integral nicht. Die Wahl des Integrals ist so, dass die Skalierung und Translation das Integral nicht ändert.

4.3.2 Die Abhängigkeit von b

Die partielle Funktion $b \mapsto \mathcal{W}f(a, b)$ ist etwas einfacher zu verstehen, wir versuchen sie daher zunächst für konstantes a anders auszudrücken. Da die Wavelet-Transformierte ein Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$ ist, können wir die Plancherel-Formel für die Fouriertransformation verwenden und erhalten.

$$\mathcal{W}f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle.$$

Die Fouriertransformierte von $\psi_{a,b}$ ist aber bereits bekannt, sie ist

$$\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = e^{-i\omega b} \hat{\psi}_a(\omega) = \sqrt{|a|} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega).$$

Damit kann jetzt die Wavelet-Transformierte als Skalarprodukt im Frequenzraum geschrieben werden:

$$\mathcal{W}f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sqrt{|a|} e^{i\omega b} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)}) e^{i\omega b} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sqrt{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)}}_{F_a(\omega)} e^{i\omega b} d\omega$$

Daraus kann man ablesen, dass $F_a(\omega)$ die Fourier-Umkehrtransformierte der Funktion $b \mapsto \mathcal{W}f(a, b)$ ist. Bezeichnen wir die Fourier-Umkehrtransformierte mit dem umgekehrten Dach über dem Funktionsbuchstaben, dann folgt

$$\check{F}_a(b) = \mathcal{W}f(a, b) \quad (4.7)$$

4.3.3 Die Plancherel-Formel

Ziel dieses Abschnitts ist, in Satz 4.6 die Plancherel-Formel für die Wavelet-Transformation zu beweisen. Wir wollen diesen Beweis auf die Plancherel-Formel für die Fourier-Transformation stützen, die bereits die Formel (4.7) für die b -Abhängigkeit geliefert hat. Wir werden natürlich wieder die Funktion $F_a(\omega)$ benötigen. Da die Plancherel-Formel das Skalarprodukt zweier Funktionen berechnet, werden wir eine zweite Funktion g bezeichnen, die zugehörige, analog zu $F_a(\omega)$ gebildete Funktion wird mit $G_a(\omega)$ bezeichnet, es ist

$$G_a(\omega) = \sqrt{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)}.$$

Damit sind wir jetzt in der Lage, die Plancherel-Formel zu beweisen:

Satz 4.6. *Sei ψ ein Wavelet mit der Konstanten C_ψ , wie sie in der Zulässigkeitsbedingung auftritt. Dann gilt*

$$\langle \mathcal{W}f, \mathcal{W}g \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle \quad (4.8)$$

für beliebige Funktionen $f, g \in L^2$.

Beweis. Wir verwenden

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}f, \mathcal{W}g \rangle_H &= \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \overline{\mathcal{W}g(a, b)} db \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_a(b) \overline{\hat{G}_a(b)} db \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle \check{F}_a, \check{G}_a \rangle \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \langle F_a, G_a \rangle \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |a| \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} 2\pi \underbrace{\int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|}}_{= C_\psi} d\omega. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Das Produkt $\hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)}$ deutet darauf hin, dass dies fast schon ein Skalarprodukt ist. Es wird tatsächlich das Skalarprodukt, wenn das innere Integral konstant ist. Wir betrachten dieses separat und setzen $a\omega = s$, was

$$\int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} = \int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds/\omega}{|s/\omega|} = \int_{\mathbb{R}^*} |\hat{\psi}(s)|^2 \frac{ds}{|s|} = \frac{C_\psi}{2\pi}$$

ergibt. Eingesetzt (4.9) finden wir

$$\langle \mathcal{W}f, \mathcal{W}g \rangle_H = C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = C_\psi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle.$$

Damit ist die Plancherel-Formel bewiesen. \square

Mit dem Satz 4.6 wird jetzt klar, warum die Zulässigkeitsbedingung so wichtig ist. Die Zulässigkeitsbedingung ist genau das was wir brauchen um zu schliessen, dass die stetige Wavelet-Transformation stetig ist. Aus dem Satz folgt, dass

$$\|\mathcal{W}f\|_H = \sqrt{C_\psi} \|f\|.$$

Es ist also nicht möglich, dass eine Funktion $f \neq 0$ eine verschwindende Wavelet-Transformation hat. Anders ausgedrückt: verschiedene Funktionen lassen sich immer auch anhand ihrer Wavelet-Transformation unterscheiden.

4.3.4 Das Haar-Mass auf $\mathbb{R}^* \propto \mathbb{R}$

4.4 Umkehrformel

Die Plancherel-Formel von Satz 4.6 zeigt, dass die Wavelettransformation (4.3) bis auf den Faktor C_ψ eine Isometrie ist. Zu jeder Wavelet-Transformierten sollten daher die ursprüngliche Funktionen wiedergewonnen werden können. Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion einer Umkehrformel, die f aus $\mathcal{W}f$ wiedergewinnt.

Satz 4.7. *Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen an die Funktion f gilt*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{|a|^2} \quad (4.10)$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass die Funktion

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{|a|^2}$$

existiert, in L^2 liegt und mit f übereinstimmt.

Wir nehmen zunächst an, dass \tilde{f} tatsächlich existiert und eine L^2 -Funktion ist. Um zu zeigen, dass \tilde{f} mit f übereinstimmt, berechnen wir das Skalarprodukt von \tilde{f} mit beliebigen Funktionen $g \in L^2$. Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (4.11) und Verwendung der Plancherel-Formel in (??) finden wir.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{|a|^2} \bar{g}(t) dt \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(t) \psi_{a,b}(t) dt db \frac{da}{|a|^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(a, b) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt}_{\mathcal{W}g(a, b)} db \frac{da}{|a|^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \langle \mathcal{W}f, \mathcal{W}g \rangle_H = \langle f, g \rangle. \quad (4.12)$$

Die Funktion \tilde{f} hat mit allen Funktion g das gleiche Skalarprodukt wie f . Daraus folgt $\tilde{f} = f$.

Die bisherigen Überlegungen haben nur gezeigt, dass die Formel eine sogenannte schwache Lösung des Umkehrproblems liefern kann. Der Nachweis, dass die Funktion \tilde{f} existiert, ist etwas technisch und kann in [buch:daubechies] nachgelesen werden. \square

Übungsaufgaben

1. Betrachten Sie das Wavelet

$$\psi: t \mapsto \psi(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesem Wavelet soll das Signal

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

analysiert werden.

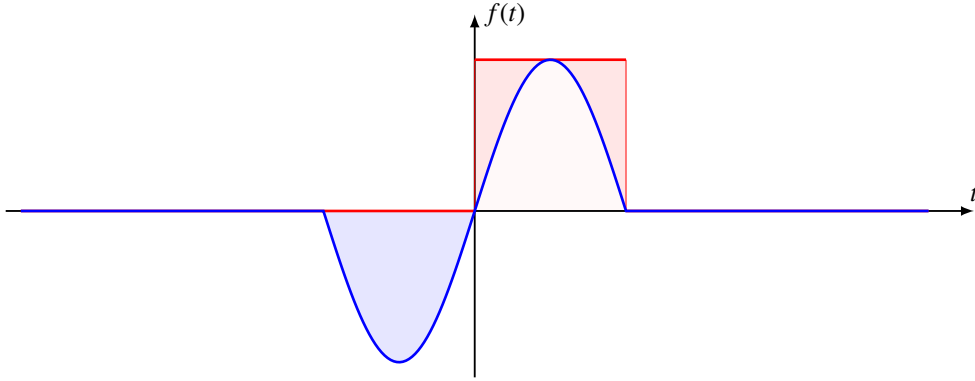
- Rechnen Sie nach, dass $\|\psi\| = 1$.
- Überprüfen Sie, dass $\int \psi \, dt = 0$.
- Rechnen Sie nach, dass $\mathcal{W}f(-a, b) = -\mathcal{W}f(a, b)$. Dieses Resultat erlaubt, in den folgenden Teilaufgaben nur den Fall $a > 0$ zu betrachten.
- Berechne Sie die stetige Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f(\frac{1}{2}, b)$.
- Berechnen Sie die stetige Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f(a, b)$ für $0 < a \leq \frac{1}{2}$.
- Berechne Sie die stetige Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f(a, b)$ für $a > \frac{1}{2}$.
- Verifizieren Sie die Zulässigkeitsbedingung für das Wavelet ψ .

Lösung. Eine graphische Darstellung der Funktionen f und ψ ist in Abbildung 4.9 zu finden.

- Beweis durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos 2\pi t}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1. \end{aligned}$$

Alternativ kann man aus Symmetriebetrachtungen erkennen, dass der Graph von $\psi(t)^2$ das Rechteck mit Ecken $(-1, 0)$ und $(1, 1)$ halbiert. Da das Rechteck den Flächeninhalt 2 hat, folgt die Normierungsbedingung.

Abbildung 4.9: Signal $f(t)$ (rot) und Wavelet ψ (blau) für Aufgabe 4.1.

b) Das Wavelet ψ ist eine ungerade Funktion, daher verschwindet ihr Integral.

c) Für das Wavelet gilt $\psi(-t) = -\psi(t)$.

$$\mathcal{W}f(-a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi((t-b)/(-a)) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi((t-b)/a) dt = -\mathcal{W}f(a, b).$$

d) In diesem Fall ist das Wavelet

$$\psi_{a,b}(t) = \psi_{\frac{1}{2},b}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin 2\pi t & b - \frac{1}{2} \leq t \leq b + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es hat daher als Träger genau das Intervall $[b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}]$. Dies bedeutet, dass wir vier Fälle unterscheiden müssen:

- (a) Fall $b < -\frac{1}{2}$: Der Träger von $\psi_{a,b}$ liegt ausserhalb des Intervalls $[0, 1]$, das Skalarprodukt $\langle f, \psi_{a,b} \rangle = \mathcal{W}f(a, b) = 0$ verschwindet.
- (b) Fall $-\frac{1}{2} \leq b < 0$: In diesem Fall liegt das linke Ende des Trägers von $\psi_{a,b}$ ausserhalb des Intervalls $[0, 1]$, das Integral zur Berechnung von $\mathcal{W}f(a, b)$ ist also nur von 0 bis $b + \frac{1}{2}$ zu erstrecken:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(\tfrac{1}{2}, b) &= \int_0^{b+\frac{1}{2}} \sqrt{2} \sin 2\pi(t-b) dt = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cos 2\pi(t-b) \right]_0^{b+\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} (\cos \pi - \cos(2\pi b)) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} (1 + \cos(2\pi b)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos^2 \pi b. \end{aligned}$$

- (c) Fall $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$: In diesem Fall ist das Integral nur von $b - \frac{1}{2}$ zu 1 zu erstrecken:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(\tfrac{1}{2}, b) &= \int_{b-\frac{1}{2}}^1 \cos 2\pi(t-b) dt = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cos 2\pi(t-b) \right]_{b-\frac{1}{2}}^{b-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} (\cos 2\pi(1-b) - \cos \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} (1 + \cos 2\pi(1-b)) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos^2 \pi(1-b). \end{aligned}$$

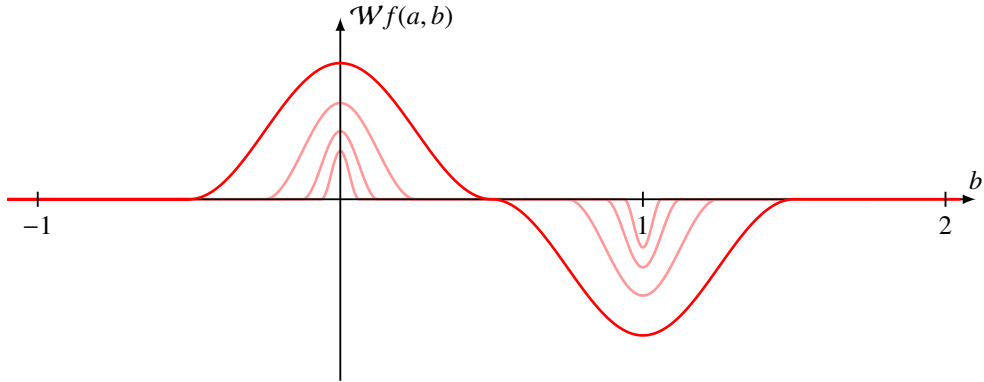


Abbildung 4.10: Werte der stetigen Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f(\frac{1}{2}, b)$ (rot) für das Signal f und das Signal ψ aus Abbildung 4.9. Die Werte der Wavelet-Transformation $\mathcal{W}f(a, b)$ für $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ sind hellrot gezeichnet. Die Wavelet-Transformation detektiert die Sprungstellen bei $t = 0$ und $t = 1$, die Genauigkeit steigt je kleiner a ist.

- (d) Fall $b > \frac{1}{2}$: Wie im ersten Fall verschwindet die Wavelet-Transformation auch in diesem Fall.

Der Graph von $b \mapsto \mathcal{W}f(\frac{1}{2}, b)$ ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

- e) Für $a \leq \frac{1}{2}$ wird das Wavelet von der D_a -Operation so stark gestaucht, dass höchstens ein Endpunkt des Intervalls $[0, 1]$ im Träger der Funktion $\psi_{a,b}$ liegen kann. Der Träger des Wavelets liegt jetzt im Intervall $[b - a, b + a]$. Es gibt nun aber fünf Fälle zu berücksichtigen

- (a) Fall $b \leq -a$: Die Träger von $\psi_{a,b}$ und f schneiden sich nicht, $\mathcal{W}f(a, b) = 0$.
(b) Fall $-a \leq b \leq a$: Wie im Fall $a = \frac{1}{2}$ berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \int_0^{b+a} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sin \pi(t - b)/a \, dt = \left[-\frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} \cos \pi(t - b)/a \right]_0^{b+a} \\ &= -\frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} (\cos \pi - \cos \pi \frac{b}{a}) = \frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} (1 + \cos(\pi \frac{b}{a})) \\ &= \frac{a}{2\pi \sqrt{|a|}} \cos^2 \frac{\pi b}{2a}. \end{aligned}$$

- (c) Fall $a \leq b \leq 1 - a$: Der Träger von $\psi_{a,b}$ liegt ganz innerhalb des Intervalls $[0, 1]$, es wird also $\psi_{a,b}$ über den ganzen Träger integriert. Dieses Integral verschwindet, also $\mathcal{W}f(a, b) = 0$.

- (d) Fall $1 - a \leq b \leq 1 + a$: Wie im Fall $a = \frac{1}{2}$ berechnet man

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \int_{b-a}^1 \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sin \pi \frac{t-b}{a} \, dt = \left[-\frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} \cos \pi \frac{t-b}{a} \right]_{b-a}^1 \\ &= -\frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} (\cos \pi \frac{1-b}{a} - \cos \pi) = -\frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} \left(1 + \cos \pi \frac{1-b}{a} \right) \end{aligned}$$

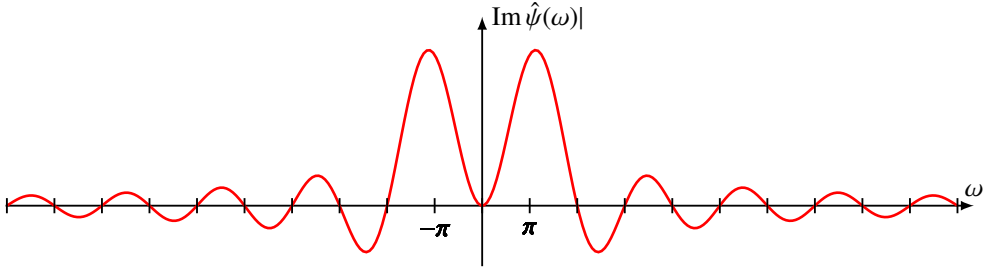


Abbildung 4.11: Fourier-Spektrum des Wavelets von Aufgabe 4.1.

$$= -\frac{a}{2\pi\sqrt{|a|}} \cos^2 \frac{\pi(1-b)}{2a}.$$

- (e) Fall $1 + a \leq b$: Die Träger von $\psi_{a,b}$ und f schneiden sich nicht, $\mathcal{W}f(a, b) = 0$.
- f) Der Träger der Funktion $\psi_{a,b}(t)$ ist das Intervall $[b - a, b + a]$. Die folgenden Fälle sind zu unterscheiden

- (a) Fall $b + a < 0$: die Träger von $\psi_{a,b}$ und von f sind disjunkt, daher ist $\mathcal{W}f(a, b) = 0$ in diesem Fall.
- (b) Fall $0 \leq b + a \leq 1$: das Integral ist über das Intervall von 0 bis $a + b$ zu erstrecken:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_0^{b+a} \sin \pi \frac{t-b}{a} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[-\frac{a}{\pi} \cos \frac{t-b}{a} \right]_0^{b+a} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{a}{\pi} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi b}{a} \right) = \frac{a}{\pi \sqrt{|a|}} \left(1 + \cos \frac{\pi b}{a} \right). \end{aligned}$$

- (c) Fall $b - a \leq 0$ und $1 \leq b + a$: In diesem Fall ist der Träger von f ganz im Träger von $\psi_{a,b}$ enthalten, das Integral ist also über das Intervall $[0, 1]$ zu erstrecken:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_0^1 \sin \pi \frac{t-b}{a} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[-\frac{a}{\pi} \cos \frac{t-b}{a} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{a}{\pi} \left(\cos \pi \frac{1-b}{a} - \cos \pi \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

- (d) Fall $0 \leq b - a \leq 1$: Das Integral ist zu erstrecken über das Intervall $[b - a, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{b-a}^1 \sin \pi \frac{t-b}{a} dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left[-\frac{a}{\pi} \cos \pi \frac{t-b}{a} \right]_{b-a}^1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{a}{\pi} \left(\cos \pi - \cos \pi \frac{1-b}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{a}{\pi} \left(1 + \cos \pi \frac{1-b}{a} \right). \end{aligned}$$

- (e) Fall $1 < b - a$: die Träger von $\psi_{a,b}$ and f schneiden sich nicht, also ist $\mathcal{W}f(a, b) = 0$.

- g) Zwar folgt die Zulässigkeitsbedingung für ψ aus dem Satz 4.2 und der in Teilaufgabe b) bewiesenen Tatsache, dass $\int \psi(t) dt = 0$, doch können wir sie in diesem Fall auch direkt nachweisen. Dazu berechnen wir zunächst die Fourier-Transformierte des Wavelets:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \sin(\pi t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{1}{2i} (e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.13)$$

Darin haben wir die komplexe Darstellung der Sinus-Funktion verwendet. Die Integrale über die komplexen Exponentialfunktionen können explizit ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{2i} e^{i(\pi-\omega)t} dt &= \left[\frac{1}{i(\pi-\omega)} \frac{1}{2i} e^{i(\pi-\omega)t} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{i(\pi-\omega)} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i(\pi-\omega)} - e^{-i(\pi-\omega)}) \\ &= \frac{\sin(\pi-\omega)}{i(\pi-\omega)} = -i \frac{\sin(\omega)}{\pi-\omega} \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{2i} e^{-i(\pi+\omega)t} dt &= \left[-\frac{1}{i(\pi+\omega)} \frac{1}{2i} e^{-i(\pi+\omega)t} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{i(\pi+\omega)} \cdot \frac{1}{2i} (e^{-i(\pi+\omega)} - e^{i(\pi+\omega)}) \\ &= \frac{\sin(\pi+\omega)}{i(\pi+\omega)} = i \frac{\sin(\omega)}{\pi+\omega}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.13) finden wir jetzt für die Fourier-Transformation

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\pi-\omega)}{i(\pi-\omega)} - \frac{\sin(\pi+\omega)}{i(\pi+\omega)} \right) = \frac{i \sin \omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi+\omega-\pi+\omega}{\pi^2-\omega^2} = \frac{i \sin \omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\omega}{\pi^2-\omega^2}. \quad (4.14)$$

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

kann man am ersten Ausdruck von (4.14) ablesen, dass $\hat{\psi}$ beschränkt ist trotz der Nullstellen der Nenner bei $\pm\pi$. Für $\omega \rightarrow \infty$ fällt $\hat{\psi}$ wie $1/|\omega|$, somit fällt $|\hat{\psi}(\omega)|^2/|\omega|$ wie $1/|\omega|^3$, was sicher integrierbar ist. Es ist also nur noch zu klären, ob auch das Integral bei $\omega = 0$ konvergiert. Aus der letzten Form in (4.14) folgt, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} = \frac{2}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|\omega|}{\pi^2 - \omega^2} \sin^2 \omega = 0.$$

Die Funktion $|\hat{\psi}(\omega)|^2/|\omega|$ ist daher in einer Umgebung von 0 beschränkt und stetig. Wir können daher schliessen, dass

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty,$$

das Wavelet ψ erfüllt die Zulässigkeitsbedingung. ○

Kapitel 5

Abtasttheorem und Rekonstruktion

Kapitel 6

Multiskalen-Analyse

Die Funktionen $\psi_{a,b}(t)$ der stetigen Wavelet-Transformation sind in hohem Masse redundant. Ausserdem muss man sich beim praktischen Einsatz auf diskretisierte Versionen beschränken, man muss also eine Auswahl unter den möglichen Werten (a, b) treffen. Wie muss diese Auswahl erfolgen, damit eine Theorie resultiert, die immer noch alle Symmetrien hat, die man zum Beispiel beim Haar-Wavelet gefunden hat? In diesem Kapitel wird das Konzept der Multi-Skalen-Analyse vorgestellt. Sie fasst viele der bisher entwickelten Ideen in einem abstrakten Rahmen zusammen und ermöglicht damit, allgemeine Vorgehensweisen für die Konstruktion einer Waveletbasis zu formulieren. Im Kapitel 7 werden daraus die schnellen numerischen Algorithmen für die Wavelet-Transformation abgeleitet.

6.1 Skalen und Vektorräume

6.1.1 Ein Turm von Vektorräumen

Wir möchten zum Ausdruck bringen, dass Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$ mit zunehmender Genauigkeit approximiert werden können durch Funktionen, die immer mehr Einzelheiten auflösen. Sei also $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ eine Menge von Funktionen, wobei wir uns vorstellen, dass darin Funktionsdetails bis zur Länge eins aufgelöst sind. Im Beispiel des Haar-Wavelets wäre der Raum der Funktionen, die zwischen ganzzahligen t -Werten konstant sind, ein geeigneter Raum, der diese Intuition wiedergibt.

Wir erwarten, dass V_0 dazu geeignet ist, Funktionen aus L^2 auf eine translationsinvariante Art zu approximieren. Das geht aber nur, wenn mit $f \in V_0$ auch alle verschobenen Funktionen $T_b f \in V_0$ sind für $b \in \mathbb{Z}$.

Durch Skalierung von Funktionen wird es möglich werden, weitere Details aufzulösen. Der Vektorraum V_j soll die Menge der Funktionen umfassen, die Details bis zur Grösse 2^{-j} darstellen kann. Im Haar-Wavelet-Beispiel sind das die Funktionen, die zwischen Punkten konstant sind, die ganzzahlige Vielfache von 2^{-j} sind. Je mehr Details aufgelöst werden können, desto grösser sind die Vektorräume. Es entsteht ein Turm

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots V_j \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (6.1)$$

von Unterräumen von $L^2(\mathbb{R})$.

Der Turm (6.1) drückt noch nicht aus, dass die Funktionen, die höhere Details wiedergeben, skalierte Versionen der “gröberen” Funktionen sind. Daher wird gefordert, dass

$$f \in V_j \Rightarrow D_2 f \in V_{j+1} \quad \text{oder} \quad D_2 V_j \subset V_{j+1}$$

Dies drückt aber noch nicht aus, dass in V_{j+1} noch mehr Details aufgelöst werden können, als mit Hilfe von skalierten Versionen der Funktionen in V_j möglich ist. Dazu muss verlangt werden, dass $D_2 V_j = V_{j+1}$ gilt.

Es wäre zu viel verlangt, dass jede Funktion in $L^2(\mathbb{R})$ in einem der Vektorräume V_j liegt, denn in $L^2(\mathbb{R})$ gibt es ja einige “ganz verrückte” Funktionen. Die Abtastung soll also detailliert genug sein, dass jede Funktion in $L^2(\mathbb{R})$ beliebig genau durch Funktionen aus der Vereinigung aller V_j approximiert werden kann. Dies wird durch

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

ausgedrückt, wobei der Querstrich den Abschluss, die Menge aller Grenzwerte von Folgen der Vereinigung der V_j bezeichnet.

Wird die Auflösung schrittweise reduziert, dann bleibt nur die Nullfunktion übrig. Es gibt also keine Funktionen mit Features, die beliebig weit ausgedehnt sind im Sinne der Vektorräume V_j . Man kann dies durch

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

ausdrücken.

Damit haben wir alle Elemente zusammen für die formale Definition.

Definition 6.1. *Eine Multiskalen-Analyse ist ein Turm*

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots V_j \subset \dots$$

von Unterräumen von $L^2(\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften

1. Es gibt eine Funktion $\varphi \in V_0$ derart, dass die Funktionen $T_k \varphi$ eine orthonormierte Basis von V_0 bilden.
2. $D_{\frac{1}{2}} V_j = V_{j+1}$
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
4. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
5. Es gibt eine Funktion $\psi \in V_0$ derart, dass die Translate $T_b \psi$ mit $b \in \mathbb{Z}$ den Raum W_0 erzeugen:

$$W_0 = \overline{\langle T_b \psi \mid b \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

Man beachte, es wird nicht verlangt, dass die $T_b \psi$ orthogonal sein müssen.

Die Funktion φ ist enthalten in V_0 . Wegen $V_0 \subset V_1$ ist $\varphi \in V_1$. Da die Funktionen $\varphi_{1,k}$ eine orthonormierte Basis von V_1 bilden, muss es Koeffizienten h_k geben derart, dass

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \quad (6.2)$$

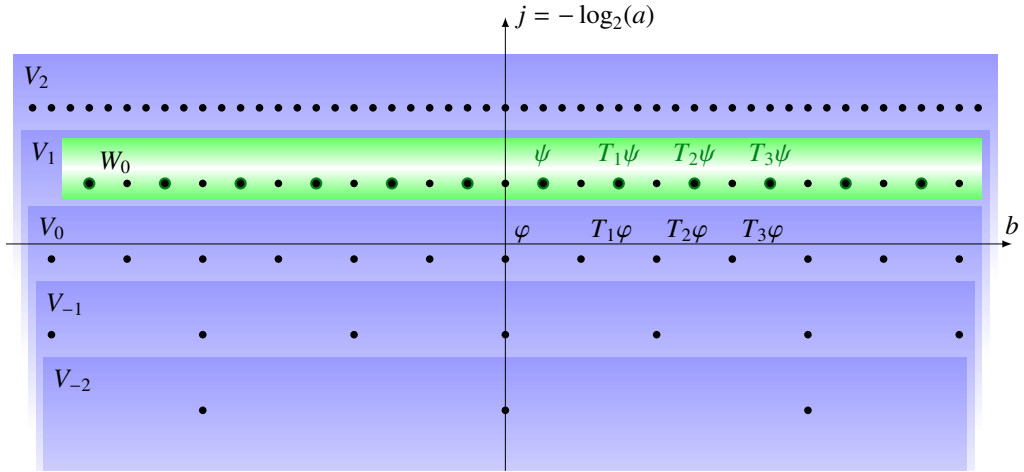


Abbildung 6.1: Hierarchie der Vektorräume V_j sowie der Komplemente W_j mit $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

gilt.

Aus der Tatsache, dass die Funktionen $\varphi_{1,k}$ eine orthonormierte Basis von V_1 bilden kann man schliessen, dass es Koeffizienten g_k geben muss derart, dass

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g_k \varphi(2t - k). \quad (6.3)$$

A priori haben die Koeffizienten g_k nicht mit den Koeffizienten h_k zu tun. Wir werden später zeigen, dass eine Multiskalenanalyse und damit insbesondere auch die g -Koeffizienten vollständig durch die h -Koeffizienten bestimmt sind.

Beispiel. Das Haar-Wavelet erzeugt eine Multiskalen-Analyse von $L^2(\mathbb{R})$. ○

Beispiel. ○

6.1.2 Orthogonalität

6.2 Skalierungsrelation und Fouriertransformation

Gibt es überhaupt eine Funktion φ derart, dass die Translate $T_b \varphi$ alle orthogonal sind? Ausser natürlich der charakteristischen Funktion des Einheitsintervalls, welche das Vater-Wavelet des Haar-Wavelets ist. In diesem Abschnitt untersuchen wir diese Eigenschaft mit Hilfe der Fourier-Theorie.

6.2.1 Der Interval-Trick und der Periodisierungs-Operator

Wir werden im Folgenden wiederholt einen Trick verwenden, mit dem Fourier-Integrale über \mathbb{R} in gewöhnliche Integrale über ein endliches Intervall umgeformt werden können. Sei f eine Funktion auf \mathbb{R} und $b, k \in \mathbb{Z}$. Da b, k ganze Zahlen sind, ist

$$e^{ib(t+2\pi k)} = e^{ibt} \underbrace{e^{2\pi i b k}}_{= 1} = e^{ibt},$$

da bk ebenfalls eine ganze Zahl ist. Dann kann man den Integrationsbereich \mathbb{R} in Intervalle der Länge 2π jeweils zwischen $2\pi k$ und $2\pi(k+1)$ aufteilen. Für das Fourier-Integral folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ibt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(t)e^{-ibt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2\pi k)e^{-ibt} dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+2\pi k) \right) e^{-ibt} dt \quad (6.4)$$

Der Klammerausdruck ist eine 2π -periodische Funktion auf \mathbb{R} . Wir werden diese Operation wiederholen benötigen und spendieren ihr daher eine formelle Definition

Definition 6.2. Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist die periodisch gemachte Funktion

$$\mathcal{P}f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+2\pi k)$$

eine Funktion $L^2([0, 2\pi])$.

Beweis. Die Definition behauptet, dass die Operation \mathcal{P} für quadratintegrierbare Funktionen auf \mathbb{R} eine quadratintegrierbare Funktion 2π -periodische Funktion ergibt. Wir rechnen dazu nach

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\mathcal{P}f(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+2\pi k) \right|^2 dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \|f\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Da $b \in \mathbb{Z}$, berechnet das Integral (6.4) bis auf einen Faktor 2π die Fourier-Koeffizienten von $\mathcal{P}f$. Wir haben daher den folgenden Satz gefunden:

Satz 6.3. Ist $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann sind die Fourier-Koeffizienten von $\mathcal{P}f$

$$\widehat{\mathcal{P}f}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}f(t)e^{-ibt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ibt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(b).$$

Die Fourier-Koeffizienten der periodisch gemachten Funktion $\mathcal{P}f$ hängen also mit den Werte der Fourier-Transformation an ganzzahligen Punkten zusammen.

Lemma 6.4. Der Periodisierungs-Operator \mathcal{P} ist linear:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f+g)(t) &= \mathcal{P}f(t) + \mathcal{P}g(t) \\ \mathcal{P}(\lambda f)(t) &= \lambda \mathcal{P}f(t) \end{aligned}$$

Beweis. Diese Identitäten können durch Nachrechnen verifiziert werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f+g)(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f+g)(t+2\pi k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(t+2\pi k) + g(t+2\pi k)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+2\pi k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t+2\pi k) \\ &= \mathcal{P}f(t) + \mathcal{P}g(t) \\ \mathcal{P}(\lambda f)(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\lambda f)(t+2\pi k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda f(t+2\pi k) = \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+2\pi k) = \lambda \mathcal{P}f(t) \end{aligned} \quad \square$$

6.2.2 Orthogonalität der Translate von φ

Die Funktion φ hat die Bedingung zu erfüllen, dass

$$\langle \varphi, T_b \varphi \rangle = \delta_{b0} \quad \forall b \in \mathbb{Z}.$$

Wir verwenden die Plancherel-Formel für die Fourier-Transformation, um dieses Skalarprodukt zu vereinfachen:

$$\langle \varphi, T_b \varphi \rangle = \langle \hat{\varphi}, \widehat{T_b \varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\hat{\varphi}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega b} d\omega.$$

Dies ist genau ein Integral der Art (6.4). Wir können es daher durch Fourier-Koeffizienten der periodische gemachten Funktion $\mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2$ ausdrücken und erhalten

$$= \int_0^{2\pi} \mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2(\omega) e^{-ib\omega} d\omega = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right) e^{-ib\omega} d\omega.$$

Die Orthogonalitätsbedingung lautet jetzt, dass

$$\langle \varphi, T_b \varphi \rangle = 2\pi \widehat{\mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2}(-b) = \delta_{0b}.$$

Die Funktion $\mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2$ ist also 2π -periodisch und derart, dass alle Fourier-Koeffizienten ausser der Koeffizienten für $b = 0$ verschwinden. Diese Funktion muss daher eine Konstante sein.

Satz 6.5. *Damit die ganzzahligen Translate einer Funktion $\varphi \in L^2$ alle orthogonal sind, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (6.5)$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Dieselbe Idee lässt sich auch auf Funktionen anwenden, die orthogonal sind mit allen Translaten.

Satz 6.6. *Seien $\varphi, \psi \in L^2$, dann ist φ orthogonal zu allen ganzzahligen Translaten $T_b \psi$ von ψ genau dann, wenn*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)} = 0 \quad (6.6)$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi, T_b \psi \rangle = \langle \hat{\varphi}, \widehat{T_b \psi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} e^{ib\omega} d\omega \\ &= 2\pi \widehat{(\hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}})}(b) \end{aligned}$$

Die 2π -periodische Funktion $\mathcal{P}(\hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}})$ hat also lauter verschwindende Fourier-Koeffizienten, also verschwindet sie. Nach Definition ist

$$\mathcal{P}(\hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) \bar{\hat{\psi}}(\omega + 2\pi k) = 0.$$

Dies beweist die Aussage. □

6.2.3 Die Skalierungsrelation

Das Vater-Wavelet einer Multiskalen-Analyse muss einer Skalierungsrelation genügen, die wir in der Form

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \quad (6.7)$$

schreiben. Wir wenden darauf die Fourier-Transformation an und erhalten

$$\hat{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega/2} \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega/2} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Definition 6.7. Schreiben wir

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-iks},$$

sie heisst die erzeugende Funktion einer Multiskalen-Analyse.

Mit der erzeugenden Funktion $H(s)$ wird die Skalierungsbedingung (6.7) im Zeitbereich für das Vater-Wavelet zu der Bedingung

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.8)$$

im Frequenzbereich. Wir haben in (6.8) also eine zusätzliche Bedingung zur Orthogonalitätsbedingung (6.5).

Man beachte, dass die Funktion $H(s)$ ausschliesslich durch die Koeffizienten der Skalierungsrelation bestimmt ist. Die Funktionalgleichung (6.8) deutet bereits an, dass diese Koeffizienten die Funktion φ eindeutig bestimmen könnten.

Ein weiterer Schritt in diese Richtung ist, dass sich die Orthogonalitätsbedingung (6.5) Durch H ausdrücken lässt.

Satz 6.8. Die erzeugende Funktion $H(s)$ einer Multiskalen-Analyse erfüllt die Bedingung

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (6.9)$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir spalten die Summe in der Orthogonalitätsbedingung in zwei Teilsummen mit geraden und ungeraden k auf:

$$\frac{1}{2\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 4\pi k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 4\pi k + 2\pi)|^2$$

und wenden auf jeden Summanden die Skalierungsrelation (6.8) an:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \right|^2 \\ &= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \right|^2 \end{aligned}$$

Darin können wir die Summanden $2\pi k$ in den Argumenten von H weglassen, weil H 2π -periodisch ist. k verschwindet damit aus den Faktoren H , die daher aus der Summe ausgeklammert werden können:

$$= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung folgt, dass die Terme $\mathcal{P}|\hat{\varphi}|^2$ fast überall konstant sind:

$$= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\pi}.$$

Dies gilt für fast alle ω , also müssen die beiden H -Terme zusammen 1 geben. Damit ist die Aussage (6.9) bewiesen. \square

6.2.4 Skalierungsrelationen für $f \in V_1$

Die Multiskalen-Analyse besagt, dass $V_0 \oplus W_0 = V_1$, und das φ eine orthogonale Basis von V_0 ist. Eine Funktion $f \in V_1$ muss dann eine Linear-Kombination von skalierten Funktionen $\varphi_{1,b}(t) = \varphi(2t - b)$ sein. Es gibt also $f_k \in \mathbb{C}$ mit

$$f(t) = \sum_{b \in \mathbb{Z}} f_k \varphi_{1,b}(t).$$

Die Fourier-Transformierte davon ist

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{b \in \mathbb{Z}} f_k \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ib\omega/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Der Faktor $\hat{\varphi}$ hängt nicht von b ab und kann ausgeklammert werden. Für die verbleibende Funktion führen wir folgende Bezeichnung ein.

Definition 6.9. Für eine $f \in V_1$ sei m_f definiert durch

$$m_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ib\omega}.$$

Lemma 6.10. Für eine Funktion $f \in V_1$ gilt

$$\hat{f}(\omega) = m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.10)$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Die Funktion H ist natürlich nichts anders als der Spezialfall des skalierten Vater-Wavelet $f = D_2\varphi \in V_1$, also $H = m_{D_2\varphi}$.

In der Multiskalen-Analyse bilden die Translate des Mutter-Wavelet ψ eine orthonormierte Basis von V_1 . Die Funktion m_ψ erfüllt daher nicht nur (6.10), es muss ausserdem eine Relation geben, die ausdrückt, dass alle Translate auf V_0 orthogonal sind. Dieser Zusammenhang wird gegeben durch das folgende Lemma.

Lemma 6.11. Eine Funktion $f \in V_1$ ist genau dann in W_0 , wenn

$$m_f(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} + m_f(\omega) \overline{H(\omega)} = 0$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Funktion $f \in W_0$ genau dann, wenn f orthogonal ist auf allen Translaten von φ . Nach Satz 6.6 ist dies gleichbedeutend mit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi k) \overline{\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)} = 0$$

Die Summe auf der rechten Seite kann wieder in je eine Summe für die Geraden und die ungeraden k aufgeteilt werden.

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi + 4\pi k) \overline{\hat{\varphi}(\omega + 2\pi + 4\pi k)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 4\pi k) \overline{\hat{\varphi}(\omega + 4\pi k)}$$

Die Terme auf der rechten Seite können mit Hilfe von Lemma 6.8 für H und Lemma 6.10 für m_f durch Ausdrücke mit H und m_f ersetzt werden. Da sowohl m_f als auch H 2π -periodisch sind, können sie aus der Summe ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \bar{\hat{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{\hat{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \\ &= m_f\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi k\right) \right|^2}_{= \frac{1}{2\pi}} + m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2}_{= \frac{1}{2\pi}} \\ &= \left(m_f\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) + m_f\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Woraus die Behauptung folgt. □

6.2.5 Skalierungsrelation für ψ

Die Axiome der Multiskalen-Analyse besagen, dass es eine Funktion ψ gibt derart, dass die Translate von ψ eine orthonormierte Basis von W_0 sind. In den Sätzen dieses Abschnitts wurde genau dieser Sachverhalt bereits für das Vater-Wavelet φ untersucht. Sowie ganz allgemein für eine Funktion $f \in V_1$ untersucht. Für das Mutter-Wavelet ψ müssen diese Eigenschaften alle auch gelten. Wir fassen diese im folgenden Satz zusammen.

Satz 6.12. *Die Funktion m_ψ , die zum Mutter-Wavelet einer Multiskalen-Analyse gehört, erfüllt*

$$m_\psi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) + m_\psi\left(\frac{\omega}{2}\right) \bar{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$$

Wenn die Translate von ψ orthonormiert sind, dann gilt zusätzlich

$$\left| m_\psi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| m_\psi\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 = 1.$$

Ausserdem gilt natürlich immer noch die Relation (6.9) für die Funktion $H(\omega)$. Diese Bedingungen schränken stark ein, was ψ überhaupt sein kann. Wir zeigen zunächst, wie sich aus φ eine Funktion ψ konstruieren lässt, die als Mutter-Wavelet in Frage kommt.

Lemma 6.13. *Ist φ das Vater-Wavelet einer Multiskalen-Analyse, dann sind die Translate der Funktion mit der Fourier-Transformierten*

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.11)$$

orthonormiert.

Bis auf weiteres meinen wir im Folgenden immer dieses ψ , wenn wir vom Mutter-Wavelet einer Multiskalen-Analyse sprechen. Wir werden weiter unten untersuchen, wie andere mögliche Funktionen ψ aussehen könnten.

Beweis. Die Translate sind orthonormiert, wenn die Bedingung (6.5) für ψ erfüllt ist. Setzen wir (6.11) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 4\pi k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 4\pi k + 2\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k + \pi\right) \right|^2 \\ &= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2}_{\frac{1}{2\pi}} + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k + \pi\right) \right|^2}_{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \left(\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

fast überall in \mathbb{R} . Folglich erfüllt ψ Orthonormalitätsbedingung (6.5). \square

Für eine Multiskalen-Analyse muss aber noch mehr gezeigt werden. Es muss gezeigt werden, dass die Translate von ψ eine Basis von W_0 bilden. Ausserdem ist zu untersuchen, wieviel Freiheit bei der Wahl von $\hat{\psi}$ in (6.11) besteht.

Die Relation zwischen H und m_f mit $f \in W_0$, wozu auch $f = \psi$ zu zählen ist, kann etwas kompakter ausgedrückt werden, in dem an sie als komplexe Vektoren

$$\vec{m}_\psi(\omega) = \begin{pmatrix} m_f(\omega) \\ m_f(\omega + \pi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{H}(\omega) = \begin{pmatrix} H(\omega) \\ H(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Relationen für H und m_f sind dann nichts anderes Orthogonalitätsrelationen für die beiden Vektoren \vec{H} und \vec{m}_f :

$$|\vec{H}(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (6.12)$$

$$|\vec{m}_\psi|^2 = |m_\psi(\omega)|^2 + |m_\psi(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \text{und} \quad (6.13)$$

$$\vec{m}_\psi \cdot \vec{H} = m_f(\omega) \bar{H}(\omega) + m_f(\omega + \pi) \bar{H}(\omega + \pi) = 0 \quad (6.14)$$

für fast alle $\omega \in \mathbb{R}$. Die Orthonormierungsbedingung (6.13) gilt natürlich nur für solche Funktionen in W_0 , deren Translate orthonormiert sind, eben zum Beispiel für ψ . Für ψ kommen also nur Funktionen in Frage, deren m_ψ fast überall zu einem auf \vec{H} orthogonalen Einheitsvektor \vec{m}_ψ Anlass geben.

Wir suchen daher zu einem vorgegebenen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ alle Vektoren $\vec{u} \in \mathbb{C}^2$, die auf \vec{v} senkrecht stehen. Solche Vektoren erfüllen $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, also die homogene lineare Gleichung

$$\bar{v}_1 u_1 + \bar{v}_2 u_2 = 0$$

(die Unbekannte ist **rot** hervorgehoben). Falls $v_1 \neq 0$ ist, kann man nach u_1 auflösen und erhält $u_1 = -(\bar{v}_2/\bar{v}_1) \cdot u_2$. Andernfalls folgt $u_2 = 0$ in beiden Fällen kann man die Lösungsmenge als

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ -\bar{v}_1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

schreiben.

Lemma 6.14. Für $f \in W_0$ gibt es π -periodische Funktion $p(\omega)$ derart, dass

$$\hat{f}(\omega) = p(\omega)\hat{\psi}(\omega).$$

Beweis. Zunächst folgt aus obigen Überlegungen zu den Vektoren \vec{m}_f und \vec{H} , dass es einen Faktor $\lambda(\omega)$ mit $m_f(\omega) = \lambda(\omega)\vec{H}(\omega)$ geben muss, der die Bedingung $\lambda(\omega) = -\lambda(\omega + \pi)$ erfüllen muss. Eine möglich Lösung für diese Funktionalgleichung ist $\lambda(\omega) = e^{i\omega}$. Setzen wir $p(\omega) = \lambda(\omega)e^{-i\omega}$, dann folgt

$$p(\omega + \pi) = \lambda(\omega + \pi)e^{-i(\omega + \pi)} = -\lambda(\omega)e^{-i\omega}(-1) = p(\omega),$$

die Funktion $p(\omega)$ ist daher π -periodisch. Aus der Festlegung 6.11 für $\hat{\psi}$ folgt

$$\hat{f}(\omega) = p(\omega)\hat{\psi}(\omega),$$

wie behauptet. □

Lemma 6.15. Jede Funktion $f \in W_0$ ist eine Linearkombination von Translaten von ψ . Es gibt also Koeffizienten $p_k \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k T_k \psi.$$

Beweis. Nach Lemma (6.14) gibt es eine π -periodische Funktion $p(\omega)$ derart, dass $\hat{f}(\omega) = p(\omega)\hat{\psi}(\omega)$. Diese lässt sich in eine Fourier-Reihe

$$p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\omega}$$

entwickeln. Setzt man dies ein, erhält man

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\omega} \hat{\psi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \widehat{T_k \psi}(\omega)$$

oder nach Fourier-Rücktransformation

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k T_k \psi(t),$$

wie behauptet. □

Lemma 6.16. Die Translate von ψ bilden eine Basis von W_0 .

Wenn wir in obiger Überlegung zu den auf \vec{v} in \mathbb{C}^2 orthogonalen Vektoren nur an Einheitsvektoren \vec{u} interessiert sind, dann muss der Faktor λ eine Einheit sein. Der Faktor $p(\omega)$ muss daher eine π -periodische Funktion sein, die überall den Betrag 1 hat.

6.2.6 Eindeutigkeit von φ

Die Skalierungsrelation (6.7) für die Funktion φ hat auf die Relation (6.8) für deren Fouriertransformation $\hat{\varphi}$ geführt. Iteriert man (6.8), erhält man

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\omega) &= H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{4}\right)H\left(\frac{\omega}{8}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{8}\right) \\ &= H\left(\frac{\omega}{2}\right)\dots H\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\prod_{k=1}^n H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\end{aligned}$$

In vielen Fällen ist $\hat{\varphi}$ eine stetige Funktion, so dass $\hat{\varphi}(\omega 2^{-n})$ gegen $\hat{\varphi}(0) = 1$. Daher konvergiert das Produkt und es gilt

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H(\omega 2^{-k}).$$

Insbesondere ist die Funktion $\hat{\varphi}$ eindeutig bestimmt durch die Funktion $H(\omega)$, die wiederum eindeutig bestimmt ist für die Koeffizienten h_k der Skalierungsrelation.

6.3 Mutter-Wavelet ψ aus dem Vater-Wavelet φ

Lemma 6.13 stellt einen Zusammenhang zwischen den Fouriertransformation von ψ und φ und der Skalierungsrelation von φ her. Daraus können wir auch eine Relation gewinnen, die ψ als Linearkombination der φ festlegt. Dazu erinnern wir daran, dass per Definition

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \quad \Rightarrow \quad \bar{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k e^{ik\omega}$$

ist. Setzen wir dies in die Relation (6.11) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2} \bar{H}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{i\omega/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k e^{ik\omega/2 + ik\pi} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k e^{i(k+1)\omega/2} (-1)^k \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{l+1} \bar{h}_{-l-1} e^{-il\omega/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

In dieser Form kann die Fourier-Transformation umgekehrt werden, da die letzten zwei Faktoren Skalierungen und Translation von φ beschreiben. Es ergibt sich

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{l+1} \bar{h}_{-l-1} \varphi(2t - k).$$

Lemma 6.17. *Das Mutterwavelet definiert durch die Fourier-Transformierte (6.11) ist die Linearkombination*

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{l+1} \bar{h}_{-l-1} \varphi(2t - k). \quad (6.15)$$

von Translaten des Vater-Wavelets φ .

Durch Vergleich mit (6.3) kann die g -Koeffizienten als

$$g_k = (-1)^{k+1} \bar{h}_{-k-1}$$

ausdrücken.

Früher wurde bereits darauf hingewiesen, dass diese Wahl des Mutter-Wavelets nicht eindeutig ist. Zum Beispiel ist jede ganzzahlig verschobene Version dieses Mutter-Wavelets ebenfalls ein adäquates Mutter-Wavelet. Dies folgt auch schon aus der Definition der Multiskalen-Analyse. Diese Freiheit ermöglicht zum Beispiel bei Wavelets mit kompaktem Träger, den Träger von φ mit dem Träger von ψ zur Deckung zu bringen. Wir werden auf diese Möglichkeit in Kapitel 8 zurück kommen.

6.4 Orthonormalisierung

Die Funktion

$$\varphi_{B^2}(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt die Skalierungsgleichung

$$\varphi_{B^2}(t) = \frac{1}{2}\varphi_{B^2}(2t) + \varphi_{B^2}(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi_{B^2}(2t-2).$$

Wir werden in Kapitel 9 zeigen, dass sich daraus ein geeignetes Mutterwavelet konstruieren lässt. Eine grundlegende Schwierigkeit, die dabei gelöst werden muss, ist, dass die Translate $\varphi_{B^2}(t-b)$ für $b \in \mathbb{N}$ nicht orthonormiert sind. Vielmehr ist das Skalarprodukt

$$\langle \varphi_{B^2}, T_{-1}\varphi_{B^2} \rangle = \int_0^1 t \cdot (1-t) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0$$

In diesem Abschnitt soll daher die folgende Aufgabe gelöst werden

Aufgabe 6.18. Gegeben $f \in L^2(\mathbb{R})$ konstruiere eine Funktion $F \in L^2(\mathbb{R})$, die eine Linearkombination von Translaten von f ist, also

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(t-k)$$

und so, dass die Translate von F orthonormiert sind.

In der Linearen Algebra lernt man üblicherweise das Verfahren von Gram-Schmidt zur Orthonormalisierung einer Basis eines Vektorraumes. Es beginnt beim ersten Vektor der nur in seiner Länge verändert wird. Die folgenden Vektoren werden dann sukzessive modifiziert, so dass sie auf den bisher behandelten Vektoren senkrecht stehen. Dieses Vorgehen ist im vorliegenden Fall nicht angebracht, da die entstehenden Vektoren nicht alle Translate des ersten Vektor sind.

Lösung. In Satz wurde eine Bedingung formuliert, mit der man entscheiden kann, ob die Translate einer Funktion orthogonal sind. Für die Fourier-Transformation muss gelten

$$\mathcal{P}|\hat{F}|^2(\omega) = \frac{1}{2\pi}.$$

Die Funktion

$$\Phi(\omega) = 2\pi \mathcal{P}|\hat{f}|^2(\omega)$$

ist 2π -periodisch, also auch die Funktion $1/\sqrt{\Phi(\omega)}$. Sie kann daher in eine Fourier-Reihe entwickelt werden

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(\omega)}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\omega}$$

Wir setzen

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\omega)}} \hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\omega} \hat{f}(\omega)$$

Offenbar bedeutet dies, dass F eine Linearkombination von Translaten von f ist. Wir können aber auch die Orthogonalitätsbedingung verifizieren:

$$\mathcal{P}|\hat{F}|^2 = \frac{1}{\Phi(\omega)} \mathcal{P}|\hat{f}|^2(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

Die Translate der Funktion F sind daher orthonormiert. □

Diese Lösung zeigt, dass unter der Voraussetzung, dass die Funktion $\Phi(\omega) = \mathcal{P}|\hat{f}(\omega)|^2$ so ist, dass auch $1/\sqrt{\Phi(\omega)}$ eine quadratintegrierbare periodische Funktion ist, dann lassen sich die Translate von f so linear zu F kombinieren, dass die die Translate von F orthonormiert sind. Dieser Prozess ersetzt also das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren im Falle der Wavelets.

Übungsaufgaben

1. Verwenden Sie die Skalierungsrelation des Vater-Wavelets um die Summe der Koeffizienten h_k zu berechnen.

Lösung. Die Skalierungsrelation ist

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$$

Wir analysieren das konstante Signal 1 mit dem Vaterwavelet

$$\begin{aligned} \langle 1, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(t) dt = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(2t - k) dt = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\tau - k) \frac{1}{2} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, \varphi \rangle \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \\ \sqrt{2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k. \end{aligned}$$

○

Kapitel 7

Schnelle Wavelet-Algorithmen

Wavelets versprechen eine Signalanalyse, die sich auf jeder Skala auf die gleiche Art und Weise abspielt. Die Multiskalen-Analyse gibt dies auf axiomatische Art und Weise wieder. In jedem der Funktionenräume V_{j+1} sind die hochfrequenten und die niederfrequenten Teile der Signale in gleicher Weise auf die orthogonalen Unterräume W_j und V_j verteilt.

7.1 Schnelle Algorithmen

Die Basisfunktion $\psi_{j,k}$ geben die Details eines Signals nahe bei $t = k2^{-j}$ mit einer Auflösung von der Grössernordnung 2^{-j} wieder. Da die $\psi_{j,k}$ nur eine Basis von W_j sind, werden ausserdem die Basisfunktion $\varphi_{j,k}$ in mindestens einem der Vektorräume V_j gebraucht. Ein praktisch nützlicher Analyse-Algorithmus muss die Koeffizienten

$$a_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad \text{und} \quad b_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

für jedes beliebige Signal f auf effiziente Art berechnen können. Dabei wird verwendet, dass die Funktionen $\varphi_{j,k}$ eine orthonormierte Basis von V_j sind und die $\psi_{j,k}$ eine orthonormierte Basis von W_j .

Ein Schlüsselement einer Multiskalen-Analyse ist die Skalierungsrelation

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2t - k) \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi. \end{aligned}$$

Da die Skalierung $D_{\frac{1}{2}}$ jeden der Vektorräume V_j isometrisch auf V_{j+1} abbildet, wird daraus eine Skalierungsrelation für alle Basisfunktionen $\varphi_{j,k}$, die

$$\varphi_{j+1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l D_{\frac{1}{2}} T_{k+l} \varphi \tag{7.1}$$

geschrieben werden kann. Ausserdem folgt aus der Tatsache, dass $W_j \subset V_{j+1}$ ist, dass die Basisfunktionen $\psi_{j,k}$ der Orthonormalbasis von W_j Linearkombinationen der Funktionen $\varphi_{j+1,l}$ sein müssen,

folgt die Relation

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \varphi(2t - k),$$

für das Mutter-Wavelet. Wieder mit Hilfe der Skalierungs-Isometrien $D_{\frac{1}{2}}$ folgt eine entsprechende Relation

$$\psi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l D_{\frac{1}{2}} T_{k+l} \varphi \quad (7.2)$$

für die skalierten und verschobenen Wavelets.

Wendet man die Relationen (7.1) und (7.2) auf das Signal f an, findet man Beziehungen für die Koeffizienten $b_{j,k}$ und $a_{j,k}$.

$$a_{j+1,k} = \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l \langle f, \varphi_{j,k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l a_{j,k+l} \quad (7.3)$$

$$b_{j+1,k} = \langle f, \psi_{j+1,k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_l \langle f, \varphi_{j,k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_l a_{j,k+l} \quad (7.4)$$

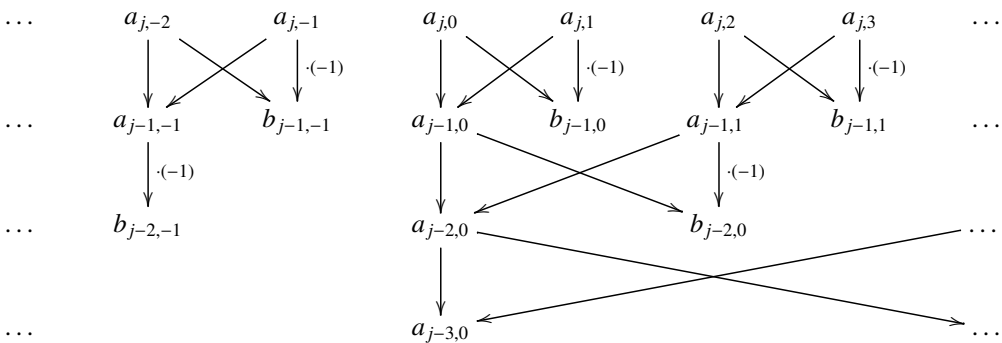
Die Formeln drücken die Wavelet-Koeffizienten für die Auflösung j durch die Wavelet-Koeffizienten für die Auflösung $j+1$ aus. Sobald die Koeffizienten $a_{N,k}$ bekannt sind, können alle Koeffizienten $a_{j,k}$ mit $j < N$, berechnet werden.

Bleibt die Frage zu klären, woher denn die Koeffizienten $a_{N,k}$ in einer praktischen Anwendung der Wavelet-Transformation kommen. Für grosses j ist die Funktion $\varphi_{j,k}$ in der Nähe von $2^{-j}k$ konzentriert. Ändert das Signal f in einer Umgebung von $2^{-j}k$ nur wenig, kann man

$$a_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j,k}(t) dt \simeq f(2^{-j}k) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t) dt$$

approximieren. Bis auf einen möglichen skalaren Faktor gegeben durch das Integral, sind die Koeffizienten $a_{j,k}$ für genügend grosses j also durch Sample-Werte $f(2^{-j}k)$ ausreichend genau approximiert.

Beispiel. Die Skalierungsrelation des Haar-Wavelets hat die Koeffizienten $h_0 = h_1 = 1$, $g_0 = 1$ und $g_1 = -1$. Die Berechnung der Koeffizienten gemäss (7.3) und (7.4) führt auf das folgende Berechnungsschema:



Wo immer zwei Pfeile zusammenkommen müssen die Terme, von denen die Pfeile ausgehen, summiert werden. Rote Pfeile multiplizieren die Ausgangsterme zusätzlich mit -1 . ○

7.2 Schnelle Synthese

Im vorangegangenen Abschnitt wurde dargestellt, wie die Waveletkoeffizienten $a_{j,k}$ mit einem schnellen Algorithmus aus den Waveletkoeffizienten $a_{j+1,k}$ gewonnen werden können. Dabei spielte die Skalierungsrelation für das Vater-Wavelet φ und die Darstellung des Mutter-Wavelet ψ als Linearkombination von $\varphi_{1,k}$ die entscheidende Rolle. Die Orthogonalität der Basisvektoren war bisher nicht von Bedeutung.

Die Umkehrung einer linearen Transformation erfordert die Invertierung einer Matrix, ein im Allgemeinen aufwendiger Prozess. Doch für orthonormierte Basen ist die Umkehrung einfach. In diesem Falle ist die Koordinationentransformationsmatrix orthogonal und die inverse Matrix ist die Transponierte. Da die aus einer Multiskalen-Analyse hervorgegangenen Wavelet-Basen orthonormiert sind, erwarten wir daher eine ebenfalls leicht zu berechnende schnelle Umkehrtransformation. Sie soll im Folgenden dargestellt werden.

7.2.1 Basiswechsel

Seien in einem Vektorraum V zwei Basen $\mathcal{B} = \{b_i \in V\}$ und $\mathcal{C} = \{c_i \in V\}$ gegeben.

Da \mathcal{C} eine Basis ist, lassen sich die Vektoren b_i als Linearkombinationen

$$b_i = \sum_j t_{ji} c_j \quad (7.5)$$

der c_j schreiben. Ein beliebiger Vektor $v \in V$ habe in der Basis \mathcal{B} die Koordinaten ξ_i , er lässt sich also als Linearkombination

$$v = \sum_i \xi_i b_i$$

schreiben. Unter Verwendung der Koeffizienten t_{ji} für den Basiswechsel gemäss (7.5) lassen sich die Koordinaten von v in der Basis \mathcal{C} finden:

$$\sum_i \xi_i b_i = \sum_{i,j} \underbrace{t_{ji} \xi_i}_{= \eta_j} c_j. \quad \Rightarrow \quad \eta_j = \sum_i t_{ji} \xi_i.$$

Die Notation ist so gewählt, dass die Matrix T mit Einträgen t_{ji} den Vektor ξ der Koordinaten ξ_i mittels eines Produktes $T\xi$ in den Vektor η der Koordinaten η_j der Koordinaten bezüglich der Basis \mathcal{C} transformiert.

Im Wavelet-Kontext liefert die Skalierungs-Relation den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Basen. Die Multiskalen-Analyse verspricht, dass sich jeder der Vektorräume V_{j+1} auf zwei Arten mit einer Basis ausstatten lässt. Einerseits bilden die Vektoren $D_{j+1} T_k \varphi$ eine orthonormierte Basis von V_{j+1} . Andererseits lässt sich V_{j+1} schreiben als orthogonale Summe $V_j \oplus W_j$, in der jeder Summand eine orthonormierte Basis hat. In V_j ist dies die Basis der Vektoren $D_j T_k \varphi$, in W_j sind es die $D_j T_k \psi$.

Die Skalierungsrelation für das Vater-Wavelet und die Darstellung des Mutter-Wavelets liefern die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k} &= \sum_l h_l \varphi_{j+1,l+2k} \\ \psi_{j,k} &= \sum_l g_l \varphi_{j+1,l+2k} \end{aligned}$$

Im Abschnitt 7.1 haben wir daraus die Formeln für die schnelle Wavelet-Transformation abgeleitet:

$$a_{j,k} = \sum_l \bar{h}_l a_{j+1,l+2k}$$

$$b_{j,k} = \sum_l \bar{g}_l a_{j+1,l+2k}$$

abgeleitet. Die Koeffizienten $a_{\cdot,\cdot}$ und $b_{\cdot,\cdot}$ entsprechen den Koordinaten ξ_{\cdot} und η_{\cdot} weiter oben.

An der Verschiebungsposition k sind in der Basis von V_{j+1} primär die Koeffizienten um $a_{j+1,2k}$ herum massgebend. In V_j und W_j sind es dagegen die Koeffizienten $a_{j,k}$ und $b_{j,k}$. Es liegt daher nahe, die Basisvektoren in V_j und W_j zu mischen und die Reihenfolge

$$\dots \varphi_{j,k-1}, \psi_{j,k-1}, \varphi_{j,k}, \psi_{j,k}, \varphi_{j,k+1}, \psi_{j,k+1}, \varphi_{j,k+2}, \psi_{j,k+2}, \dots$$

zu verwenden. Für die Umrechnung der Koeffizienten $a_{j+1,k}$ in $a_{j,k}$ und $b_{j,k}$ ist dann die folgende Matrix anzuwenden:

	\dots	$a_{j+1,-2}$	$a_{j+1,-1}$	$a_{j+1,0}$	$a_{j+1,1}$	$a_{j+1,2}$	$a_{j+1,3}$	$a_{j+1,4}$	$a_{j+1,5}$	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
$a_{j,-2}$	\dots	\bar{h}_2	\bar{h}_3	\bar{h}_4	\bar{h}_5	\bar{h}_6	\bar{h}_7	\bar{h}_8	\bar{h}_9	\dots
$b_{j,-2}$	\dots	\bar{g}_2	\bar{g}_3	\bar{g}_4	\bar{g}_5	\bar{g}_6	\bar{g}_7	\bar{g}_8	\bar{g}_9	\dots
$a_{j,-1}$	\dots	\bar{h}_0	\bar{h}_1	\bar{h}_2	\bar{h}_3	\bar{h}_4	\bar{h}_5	\bar{h}_6	\bar{h}_7	\dots
$b_{j,-1}$	\dots	\bar{g}_0	\bar{g}_1	\bar{g}_2	\bar{g}_3	\bar{g}_4	\bar{g}_5	\bar{g}_6	\bar{g}_7	\dots
$a_{j,0}$	\dots	\bar{h}_{-2}	\bar{h}_{-1}	\bar{h}_0	\bar{h}_1	\bar{h}_2	\bar{h}_3	\bar{h}_4	\bar{h}_5	\dots
$b_{j,0}$	\dots	\bar{g}_{-2}	\bar{g}_{-1}	\bar{g}_0	\bar{g}_1	\bar{g}_2	\bar{g}_3	\bar{g}_4	\bar{g}_5	\dots
$a_{j,1}$	\dots	\bar{h}_{-4}	\bar{h}_{-3}	\bar{h}_{-2}	\bar{h}_{-1}	\bar{h}_0	\bar{h}_1	\bar{h}_2	\bar{h}_3	\dots
$b_{j,1}$	\dots	\bar{g}_{-4}	\bar{g}_{-3}	\bar{g}_{-2}	\bar{g}_{-1}	\bar{g}_0	\bar{g}_1	\bar{g}_2	\bar{g}_3	\dots
$a_{j,2}$	\dots	\bar{h}_{-6}	\bar{h}_{-5}	\bar{h}_{-4}	\bar{h}_{-3}	\bar{h}_{-2}	\bar{h}_{-1}	\bar{h}_0	\bar{h}_1	\dots
$b_{j,2}$	\dots	\bar{g}_{-6}	\bar{g}_{-5}	\bar{g}_{-4}	\bar{g}_{-3}	\bar{g}_{-2}	\bar{g}_{-1}	\bar{g}_0	\bar{g}_1	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

(7.6)

7.2.2 Invertierung

Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass die Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} orthonormiert sind. Es gilt also

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \quad \text{und} \quad \langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j.$$

Auch diese Bedingung ist für die Basen, die aus einer Multiskalen-Analyse hervorgehen, erfüllt. Die Koeffizienten t_{ji} waren definiert durch die Formel (7.5). Die Orthogonalitätsbedingungen für die Vektoren b_i werden damit

$$\langle b_i, b_k \rangle = \left\langle \sum_j t_{ji} c_j, \sum_l t_{lk} c_l \right\rangle = \sum_{j,l} t_{ji} \bar{t}_{lk} \underbrace{\langle c_j, c_l \rangle}_{= \delta_{jl}} = \sum_j t_{ji} \bar{t}_{jk}$$

In Matrix-Schreibweise ist dies

$$E = \overline{T}^T T$$

oder mit der Abkürzung T^* für die Matrix mit dem k - j -Eintrag \bar{t}_{jk} (konjugiert und transponierte Matrix)

$$T^* T = E.$$

Daraus kann man ablesen, dass T^* die inverse Matrix zu T ist. Wie erwartet ist die Bestimmung der inversen Matrix für die Transformation zwischen orthonormierten Basen einfach.

7.2.3 Schnelle Wavelet-Synthese

Für die schnelle Wavelet-Transformation kann mit Hilfe der Matrix (7.6) geschrieben werden. Die Umkehrtransformation muss daher die transponierte und konjugierte Matrix verwenden:

	\dots	$a_{j,-2}$	$b_{j,-2}$	$a_{j,-1}$	$b_{j,-1}$	$a_{j,0}$	$b_{j,0}$	$a_{j,1}$	$b_{j,1}$	$a_{j,2}$	$b_{j,2}$	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
$a_{j+1,-2}$	\dots	h_2	g_2	h_0	g_0	h_{-2}	g_{-2}	h_{-4}	g_{-4}	h_{-6}	g_{-6}	\dots
$a_{j+1,-1}$	\dots	h_3	g_3	h_1	g_1	h_{-1}	g_{-1}	h_{-3}	g_{-3}	h_{-5}	g_{-5}	\dots
$a_{j+1,0}$	\dots	h_4	g_4	h_2	g_2	h_0	g_0	h_{-2}	g_{-2}	h_{-4}	g_{-4}	\dots
$a_{j+1,1}$	\dots	h_5	g_5	h_3	g_3	h_1	g_1	h_{-1}	g_{-1}	h_{-3}	g_{-3}	\dots
$a_{j+1,2}$	\dots	h_6	g_6	h_4	g_4	h_2	g_2	h_0	g_0	h_{-2}	g_{-2}	\dots
$a_{j+1,3}$	\dots	h_7	g_7	h_5	g_5	h_3	g_3	h_1	g_1	h_{-1}	g_{-1}	\dots
$a_{j+1,4}$	\dots	h_8	g_8	h_6	g_6	h_4	g_4	h_2	g_2	h_0	g_0	\dots
$a_{j+1,5}$	\dots	h_9	g_9	h_7	g_7	h_5	g_5	h_3	g_3	h_1	g_1	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

(7.7)

Daraus kann man ablesen, wie die Koeffizienten $a_{j+1,k}$ aus $a_{j,k}$ und $b_{j,k}$ berechnet werden können.

Satz 7.1. Die Umkehrtransformation der schnellen Wavelet-Transformation berechnet die hochfrequenten Wavelet-Koeffizienten $a_{j+1,k}$ aus den Koeffizienten $a_{j,k}$ und $b_{j,k}$ gemäss

$$\begin{aligned}
 a_{j+1,k} &= \dots + h_{k+4}a_{j,-2} + g_{k+4}b_{j,-2} + h_{k+2}a_{j,-1} + g_{k+2}b_{j,-1} + h_k a_{j,0} + g_k b_{j,0} + h_{k-2}a_{j,1} + g_{k-2}b_{j,1} + \dots \\
 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} a_{j,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} b_{j,l}.
 \end{aligned}$$
(7.8)

Beispiel. Die Koeffizienten h und g für das Haar-Wavelet sind wohl bekannt. Sie sind $h_0 = h_1 = 1$,

$g_0 = 0$ und $g_1 = -1$. Die Transformations-Matrix wird damit zu

	\dots	$a_{j,-2}$	$b_{j,-2}$	$a_{j,-1}$	$b_{j,-1}$	$a_{j,0}$	$b_{j,0}$	$a_{j,1}$	$b_{j,1}$	$a_{j,2}$	$b_{j,2}$	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
$a_{j+1,-2}$	\dots	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	\dots
$a_{j+1,-1}$	\dots	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	\dots
$a_{j+1,0}$	\dots	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	\dots
$a_{j+1,1}$	\dots	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	\dots
$a_{j+1,2}$	\dots	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	\dots
$a_{j+1,3}$	\dots	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	\dots
$a_{j+1,4}$	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	\dots
$a_{j+1,5}$	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	\dots
\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

(7.9)

Damit werden die Umkehrformeln für das Haar-Wavelet zu

$$\begin{aligned} a_{j+1,2k} &= a_{j,k} + b_{j,k} \\ a_{j+1,2k+1} &= a_{j,k} - b_{j,k} \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Umkehrformeln also ähnlich einfach wie die Formeln für die schnelle Vorwärts-Transformation. ○

7.3 Rekonstruktion der Funktionen φ und ψ

Für die praktische Anwendung einer Wavelet-Transformation ist die konkrete Darstellung der Funktionen φ und ψ nicht notwendig. Die schnellen Algorithmen sind völlig ausreichend um die Koeffizienten $a_{j,k}$ und $b_{j,k}$ zu berechnen. Ebenso kann die Umkehrtransformation mit beliebiger Genauigkeit jedes Signal wieder rekonstruieren, ohne dass dazu explizit Linearkombinationen der Funktionen φ und ψ gebildet werden müssten.

Trotzdem ist es interessant eine konkrete Vorstellung der Kurvenform von φ und ψ zu haben, zum Beispiel um die in der Wavelet-Transformation sichtbaren Features besser verstehen zu können. Dazu kann der schnelle Synthese-Algorithmus verwendet werden. Ist nämlich $f(t) = \psi(t)$ das Mutter-Wavelet, dann gilt

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= \langle \psi, \varphi_{j,k} \rangle = 0 && \text{für alle } j, k \\ b_{j,k} &= 1 && \text{für } j = 0 \text{ und } k = 0 \\ &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Rücktransformation können die Koeffizienten $a_{j,k}$ für beliebige Werte von j und k bestimmen. Für genügend grosses j sind die Koeffizienten $a_{j,k}$ im Wesentlichen die Funktionswerte $\psi(k2^{-j}) = a_{j,k}$. Auf analoge Weise können die Funktionswerte $\varphi(k2^{-j})$ rekonstruiert werden

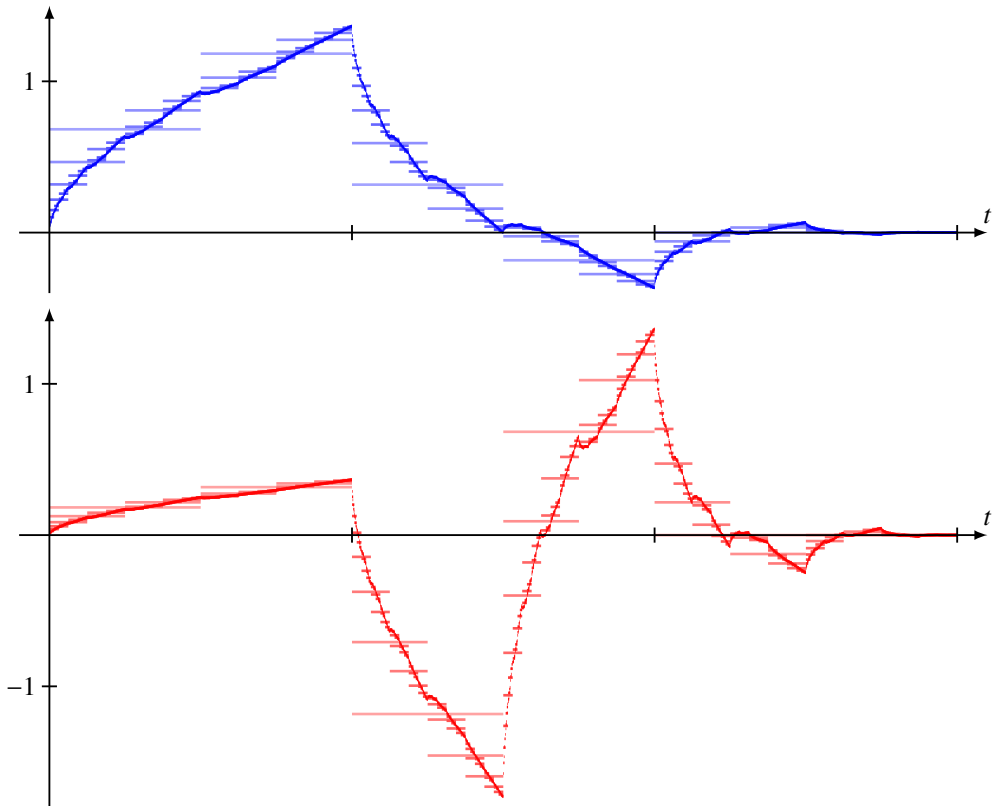


Abbildung 7.1: Approximation der Funktionen φ (oben, blau) und ψ (unten, rot) für verschiedene Werte von j zwischen 1 und 9, dargestellt als Stufenfunktionen mit zunehmender Dunkelheit der Farbe.

ausgehend von $a_{0,k} = \delta_{0k}$ für alle k und $b_{j,k} = 0$ für alle j und k . In Abbildung 7.1 sind die verschiedenen Approximationen für Werte von j zwischen 1 und 9 dargestellt als Stufenfunktionen mit zunehmend dunklerer Farbe.

Nach der Plancherel-Identität muss die Quadratsumme der Koeffizienten $a_{j,k}$ eine gute Approximation für die Norm der analysierten Funktion sein. Je grösser j ist, desto mehr Koeffizienten sind an der Quadratsumme beteiligt und desto kleiner sind die einzelnen Koeffizienten. Um die Funktionswerte zu rekonstruieren müssen die Koeffizienten daher mit $2^{j/2}$ multipliziert werden. Dies kann auch erreicht werden, indem man den schnellen Algorithmus mit den Koeffizienten $\sqrt{2}h_k$ und $\sqrt{2}g_k$ statt mit h_k und g_k durchführt.

In den Abbildungen 7.2 und 7.3 ist das Resultat der Rücktransformation für die Daubechies-Wavelets db1 bis db5 dargestellt. Die Koeffizienten für die Skalierungsfunktionen dieser Wavelets werden im Kapitel 8 berechnet.

Übungsaufgaben

1. Auf der Website <http://wavelets.pybytes.com> findet man für das Coiflet 1 Wavelet die fol-

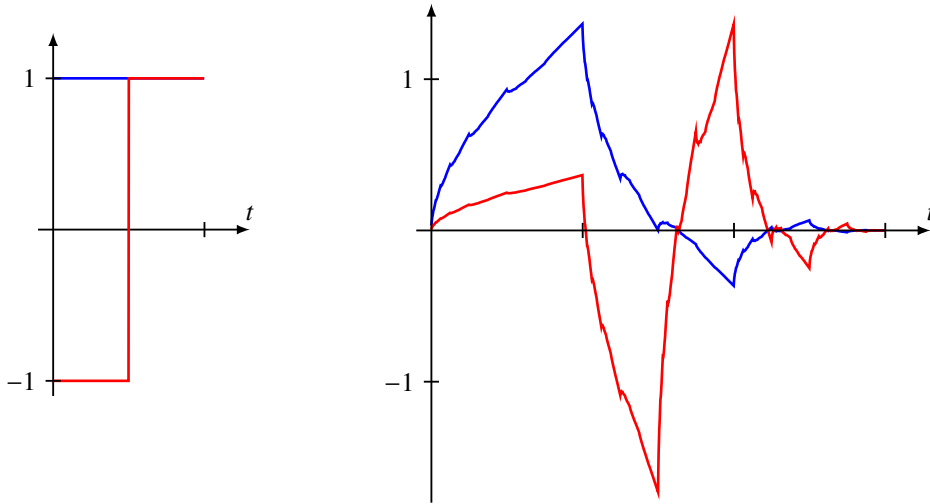


Abbildung 7.2: Vater-Wavelet φ (blau) und Mutter-Wavelet ψ (rot) für die Daubechies-Wavelets db1 und db2. Das Daubechies-Wavelet db1 ist identisch mit dem Haar-Wavelet.

genden Koeffizienten für die Skalierungsrelation:

$$h_0 = -0.0156557281$$

$$h_1 = -0.0727326195$$

$$h_2 = 0.3848648469$$

$$h_3 = 0.8525720202$$

$$h_4 = 0.3378976625$$

$$h_5 = -0.0727326195$$

- Verwenden sie Aufgabe 6.1 um zu verifizieren, ob für diese Koeffizienten die gleiche Normierungskonvention verwendet wird wie in diesem Buch.
- Verwenden Sie den schnellen Transformationsalgorithmus um eine erste Approximation der Funktionen φ und ψ zu bestimmen.

Lösung. a) Die Summe der Koeffizienten ist

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k &= -0.0156557281 - 0.0727326195 + 0.3848648469 \\ &\quad + 0.8525720202 + 0.3378976625 - 0.0727326195 \\ &= 1.4142135625 \approx \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten verwenden also die gleiche Konvention.

- Für die Rücktransformation werden ausser den h -Koeffizienten auch die g -Koeffizienten benötigt. Diese sind

$$g_0 = +0.0727326195$$

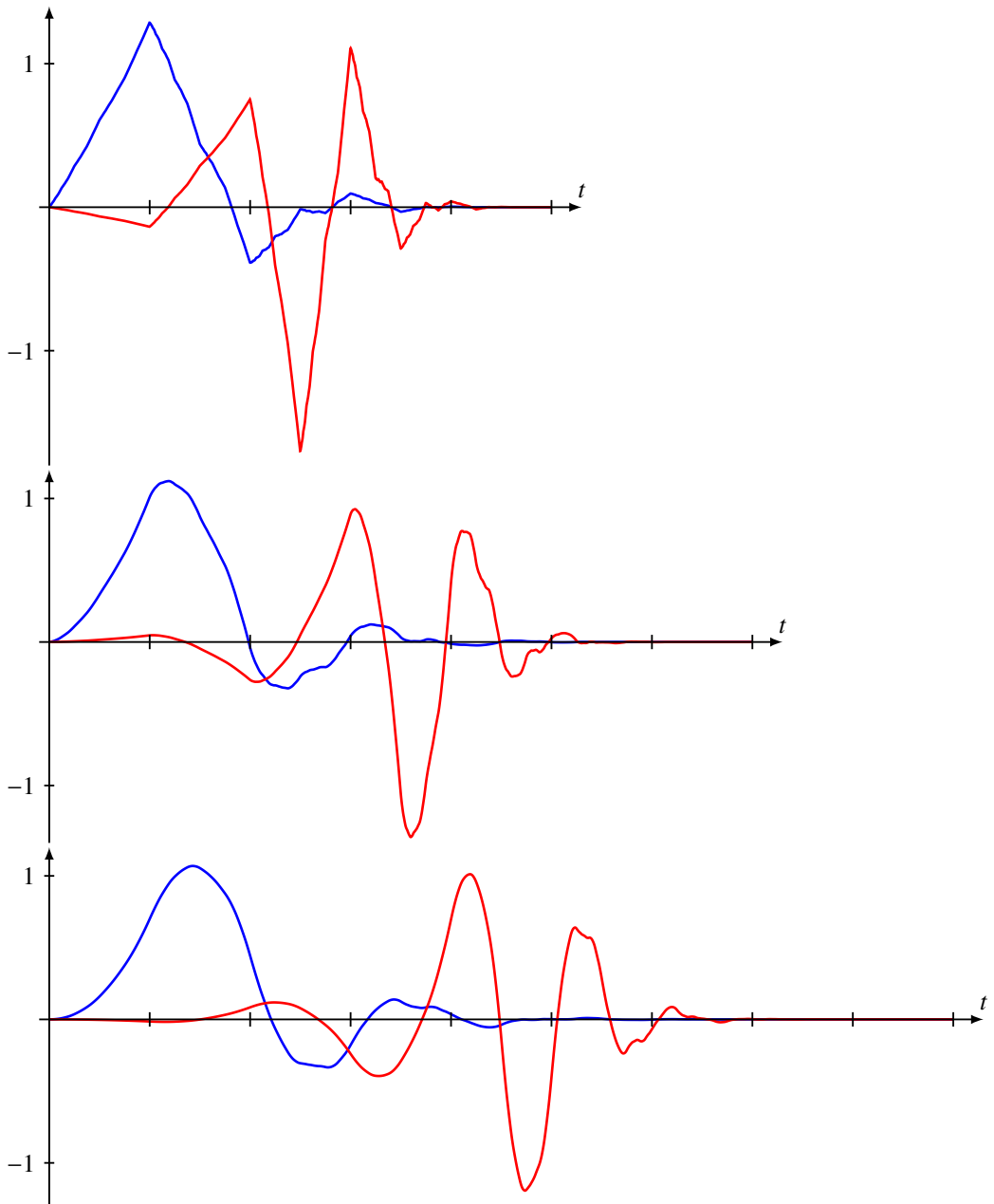


Abbildung 7.3: Vater-Wavelet φ (blau) und Mutter-Wavelet ψ (rot) für die Daubechies-Wavelets db3 bis db5 von oben nach unten.

$$g_1 = -0.3378976625$$

$$g_2 = +0.8525720202$$

$$g_3 = -0.3848648469$$

$$g_4 = -0.0727326195$$

$$g_5 = +0.0156557281$$

Die Umkehrtransformation verwendet die Matrix

$$T^* = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h_0 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & h_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & h_4 & g_4 & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & \dots \\ \dots & h_5 & g_5 & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h_4 & g_4 & h_2 & g_2 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & h_5 & g_5 & h_3 & g_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Daraus kann man eine erste Approximation für φ dadurch bestimmen, dass man mit einem Standardbasisvektor mit einer 1 in einer Spalte multipliziert, die h -Koeffizienten enthält. Die Stufenfunktion mit den Werten h_k ist daher eine erste Approximation für φ . Analog ist das Produkt der Matrix T^* mit einem Standardbasisvektor mit einer 1 in einer Spalte, die g -Koeffizienten enthält, eine erste Approximation von ψ \bigcirc

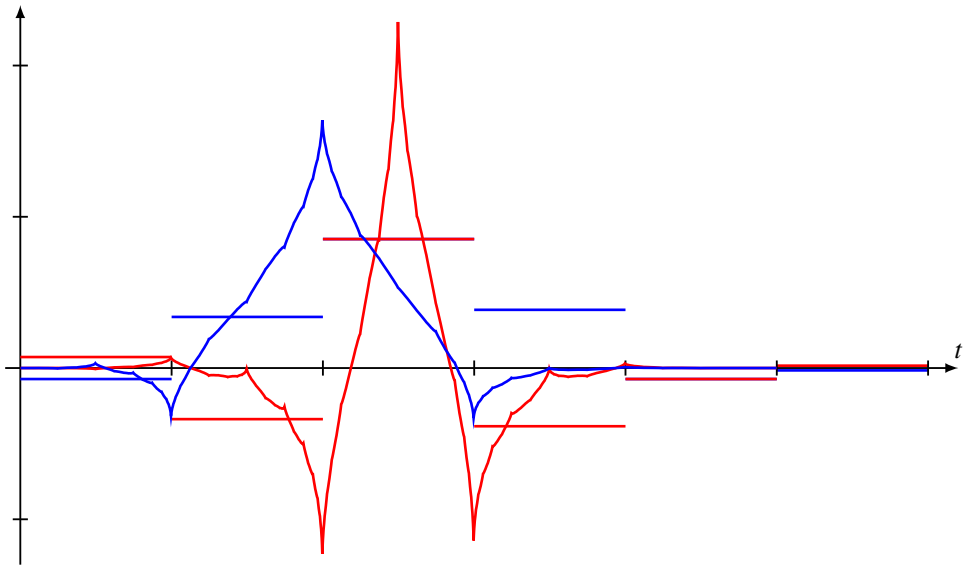


Abbildung 7.4: Erste Approximation für das Coiflet 1 Vater-Wavelet (blau) und das zugehörige Mutterwavelet (rot)

Kapitel 8

Wavelets mit kompaktem Träger

Für die Praxis sind nur Wavelets interessant, für die die Wavelet-Transformation und die Rücktransformation mit beschränktem Aufwand, effizient und stabil berechnet werden können. Die Untersuchungen in Kapitel 7 haben gezeigt, dass die diskrete Wavelet-Transformation mit einem einfachen kaskadierten Faltungsfilter berechnet werden kann. Ein solcher Filter kann aber nur dann effizient berechnet werden, wenn nur endlich viele der Filterkoeffizienten von 0 verschieden sind.

Das Haar-Wavelet hat diese Eigenschaft, genau zwei der Filterkoeffizienten sind von 0 verschieden. Lange Zeit war nicht klar, aber es überhaupt andere Wavelets mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Filterkoeffizienten gibt. Yves Meyer versuchte sogar zu zeigen, dass es gar keine solche Funktionen φ und ψ gibt, wie sie in der Multiskalen-Analyse verlangt werden, also erst recht keine mit endlich vielen nicht verschwindenden Koeffizienten. Als es ihm dann 1985 gelang, solche Wavelets zu finden, stellte sich die Frage nach Wavelets mit kompaktem Träger erneut. Schliesslich war Ingrid Daubechies in der Konstruktion solcher Wavelets erfolgreich.

8.1 Bedingungen für die Koeffizienten

Bis jetzt ist ausser dem Haar-Wavelet kein Beispiel einer Multiskalen-Analyse konstruiert worden, in dem die Funktionen φ und ψ kompakten Träger haben.

8.1.1 Kompakter Träger

Wir gehen davon aus, dass der Träger der Funktion φ im Intervall $[a, b]$ enthalten ist. Dann ist der Träger der Translate $T_k \varphi$ in $[a + k, b + k]$ enthalten und der Träger der skalierten Funktion $D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi$ ist enthalten in $[\frac{1}{2}(a + k), \frac{1}{2}(b + k)]$.

Die Koeffizienten der Skalierungsrelation können mit Hilfe des Skalarproduktes erhalten werden, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\langle D_{\frac{1}{2}} T_r \varphi, \varphi \rangle &= \left\langle D_{\frac{1}{2}} T_r \varphi, \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle D_{\frac{1}{2}} T_r \varphi, h_k D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \langle D_{\frac{1}{2}} T_r \varphi, D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \delta_{kr} = \bar{h}_r.\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt $\langle \varphi, D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \rangle$ ist ein Integral über das Produkt der Funktion φ mit Träger im Intervall $[a, b]$ und der Funktion $D_{\frac{1}{2}} T_r \varphi$ mit Träger in $[\frac{1}{2}(a+r), \frac{1}{2}(b+r)]$. Dieses Integral verschwindet, wenn die Intervalle nicht überlappen. Dieser Fall tritt ein wenn

$$\begin{aligned} b < \frac{1}{2}(a+r) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(b+r) < a \\ 2b - a < r \quad \quad \quad r < 2a - b \end{aligned}$$

Die einzigen Koeffizienten h_r , die nicht verschwinden können, erfüllen

$$2b - a < r < 2a - b,$$

es können also nur endlich viele Koeffizienten h_r von 0 verschieden sein.

8.1.2 Normierung

Wir gehen wieder von einer Multiskalen-Analyse mit einem Vater-Wavelet φ mit kompaktem Träger aus. Die Analyse des konstanten Signals $f(t) = 1$ erfolgt mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle f, \varphi \rangle$. Anwendung der Skalierungsrelation auf φ liefert

$$\begin{aligned} \langle 1, \varphi \rangle &= \left\langle 1, \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \langle 1, D_{\frac{1}{2}} T_k \varphi \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \varphi(2t - k) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Da $\langle 1, \varphi \rangle \neq 0$ ist, können wir durch $\langle 1, \varphi \rangle$ dividieren und es folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}. \quad (8.1)$$

Diese Identität kann nützlich sein, wenn man Koeffizienten aus einer nicht genauer bekannten Quelle benützen will und nicht sicher ist, ob sie die gleiche Normierungskonvention für die Skalierungsrelation verwendet.

Beispiel. Für das Haarwavelet sind nur zwei Koeffizienten h_k von 0 verschieden und beide sind gleich gross. Aus der Relation (8.1) folgt

$$\sqrt{2} = h_0 + h_1 = 2h_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \bigcirc$$

8.1.3 Orthogonalität

Aus der Orthonormalität der Funktionen $T_k \varphi$ einer Multiskalenanalyse folgen die Relationen

$$\delta_{0k} = \langle \varphi, T_k \varphi \rangle = \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l T_l \varphi, \sum_{r \in \mathbb{Z}} h_r T_{r+2k} \varphi \right\rangle$$

$$= \sum_{l,r \in \mathbb{Z}} h_l \bar{h}_r \langle T_l \varphi, T_{r+2k} \varphi \rangle \quad (8.2)$$

$$= \sum_{l,r \in \mathbb{Z}} h_l \bar{h}_r \delta_{l,r+2k} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} h_{r+2k} \bar{h}_r \quad (8.3)$$

Nehmen wir an, dass genau die Koeffizienten h_k mit k zwischen 0 und N von 0 verschieden sind. Dann wird die Summe (8.3) trivialerweise verschwinden, wenn $2k > N$. Dies liefert maximal $N/2$ Bedingungen für die $N + 1$ Koeffizienten h_k , sie werden daher im Allgemeinen noch nicht bestimmt sein. Weitere Bedingungen müssen formuliert werden, um die Koeffizienten festzulegen.

Beispiel. Die Skalierungsrelation des Haar-Wavelets enthält nur zwei Koeffizienten h_0 und h_1 , also $N = 2$. Von den Relationen (8.3) ist nur jene mit $k = 0$ nichttrivial, es gilt

$$1 = \delta_{0k} = h_0 \bar{h}_0 + h_1 \bar{h}_1 = |h_0|^2 + |h_1|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad \bigcirc$$

Beispiel. Gesucht ist die Skalierungsrelation für eine Multiskalenanalyse derart, dass φ Träger im Intervall $[0, 1]$ hat. Daraus kann man zunächst schliessen, dass die Skalierungsrelation genau zwei von 0 verschiedene Koeffizienten h_0 und h_1 hat. Aus (8.1) und (8.3) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 &= \sqrt{2}, \\ |h_0|^2 + |h_1|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Wir suchen eine Lösung in der Form $h_0 = a + bi$ und $h_1 = \sqrt{2} - a - bi$. Die Orthonormalisierungsrelation liefert dann

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 + (\sqrt{2} - a)^2 + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}a + 2 \\ 0 &= a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} + b^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für a . Für $b = 0$ wird sie zu

$$0 = a^2 - \sqrt{2}a + \frac{1}{2} = \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

also ist in diesem Fall $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

also die Koeffizienten der Skalierungsrelation des Haar-Wavelets.

Die quadratische Gleichung (8.4) hat nur dann reelle Lösungen für a , wenn die Diskriminante $D = \sqrt{2}^2 - 4 \cdot (b^2 + \frac{1}{2}) \geq 0$ ist:

$$D = 2 - 2 - 4b^2 = -4b^2 \leq 0.$$

Es folgt, dass $b = 0$ die einzige Lösung ist. \bigcirc

Das Beispiel zeigt, dass das Haar-Wavelet durch die bisher gefundenen Relationen bereits eindeutig festgelegt ist. Es gibt also nur eine einzige Multiskalen-Analyse mit einem Wavelet, dessen Träger im Intervall $[0, 1]$ enthalten ist, nämlich das Haar-Wavelet.

8.2 Ordnung

Bis jetzt haben wir nur die Bedingungen (8.1) und (8.3) an die Koeffizienten h_k der Skalierungsrelation. Wir haben ebenfalls bereits gesehen, dass für grösseren Träger die Bedingungen (8.3) nicht ausreichen, die Koeffizienten festzulegen. Es werden daher zusätzliche Bedingungen nötig sein, um die Multiskalenanalyse eindeutig zu bestimmen.

Definition 8.1. Das Wavelet $\psi(t)$ heisst von Ordnung N wenn $t^N \psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \text{für } k < N.$$

Für ein Wavelet der Ordnung N folgt mit Hilfe der Ableitung unter dem Integralzeichen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-it) \psi(t) e^{-i\omega t} dt \\ \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-it)^k \psi(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für ein Wavelet der Ordnung N sind die Ableitungen von $\hat{\psi}(\omega)$ im Nullpunkt

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{\psi}(0) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0$$

für $k < N$. Die Taylorreihe von $\hat{\psi}$ hat daher die Form

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\hat{\psi}^{(N)}(0)}{N!} \omega^N + \text{Terme höherer Ordnung}$$

Insbesondere hat $\hat{\psi}$ eine Nullstelle N -ter Ordnung bei $\omega = 0$.

Aus dem Zusammenhang zwischen Vater- und Mutter-Wavelet im Frequenzbereich

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

folgt daher, dass auch die Funktion H eine Nullstelle N -ter Ordnung haben muss. Da $\hat{\phi}(0) \neq 0$ und $e^{i\omega} \neq 0$ ist, muss daher H eine Nullstelle N -ter Ordnung bei π haben.

Das trigonometrische Polynom

$$\left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N$$

hat eine N -fache Nullstelle bei π , also muss es möglich sein,

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N B(\omega) \quad (8.5)$$

zu schreiben, wobei $B(\omega)$ ein trigonometrisches Polynom ist, welches keine Nullstelle bei $\omega = \pi$ hat.

Beispiel. Für das Haarwavelet ist

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}$$

und damit folgt $B(\omega) = 1$. Wie früher gezeigt wurde, bestimmen die Relationen (8.1) und (8.3) das Haar-Wavelet bereits eindeutig, so dass die Vorgabe der Ordnung nicht nötig ist. \circ

Das trigonometrische Polynom $B(\omega)$ soll in den nachfolgenden Abschnitten bestimmt werden.

8.3 Betrag

Um die Funktion $H(\omega)$ zu bestimmen untersuchen wir erst den Betrag $|H(\omega)|^2$. Hier verwenden wir jetzt, dass die Koeffizienten der Skalierungsrelation reell sein sollen. Dies hat zur Folge, dass

$$\overline{H(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k e^{-ik\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k e^{ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik(-\omega)} = H(-\omega)$$

Damit ist

$$M(\omega) = |H(\omega)|^2 = H(\omega) \overline{H(\omega)} = H(\omega) H(-\omega).$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, wenn man ω durch $-\omega$ ersetzt, die Funktion $M(\omega)$ ist daher eine gerade Funktion. Da sie ausserdem ein trigonometrisches Polynom ist, muss sie geschrieben werden können als ein Polynom in $\cos \omega$.

Die Faktorisierung (8.5) von $H(\omega)$ zeigt, dass $M(\omega)$ den Faktor

$$\left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^N = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2} \right)^N = \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^N$$

enthält. Oder für $M(\omega)$

$$M(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^N B(\omega) B(-\omega) \quad (8.6)$$

Um $B(\omega)$ zu finden ist daher zunächst $A(\omega) = B(\omega) B(-\omega)$ zu bestimmen, in einem zweiten Schritt kann man dann eine Faktorisierung von $A(\omega)$ mit Hilfe von $B(\omega)$ suchen.

Der Faktor $A(\omega)$ ist wieder ein trigonometrisches Polynom, welches als Funktion von ω gerade ist. Es muss also wieder als Polynom in $\cos \omega$ in der Form $A(\omega) = \tilde{P}(\cos \omega)$ geschrieben werden können. Aus der Halbwinkelformel für den Kosinus folgt

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 + \cos \omega}{2},$$

so dass das Polynom $A(\omega)$ auch durch $\cos^2 \frac{\omega}{2}$ ausgedrückt werden kann. Wir verwenden im folgenden die Variable

$$y = \sin^2 \frac{\omega}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - y = \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

Damit wird auch

$$\cos \omega = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1 = 2(1 - y) - 1 = 1 - 2y.$$

Die Funktion $A(\omega)$ als Polynom in $\cos \omega$ wird dann zu $\tilde{P}(1 - 2y) = P(y)$. Um $A(\omega)$ zu bestimmen ist also ein Polynom $P(y)$ zu finden. Für die Funktion $M(\omega)$ folgt jetzt

$$M(\omega) = \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^N A(\omega) = (1 - y)^N P(y).$$

Die Funktion $M(\omega)$ genügt auch der Relation

$$M(\omega) + M(\omega + \pi) = 1,$$

die wir bis jetzt noch nicht genutzt haben. In der Variablen y ausgedrückt ist

$$\cos^2 \frac{\omega + \pi}{2} = \sin^2 \frac{\omega}{2} = y$$

Setzen wir (8.6) ein, wird daraus die Relation

$$1 = M(\omega) + M(\omega + \pi) = (1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y). \quad (8.7)$$

Um $A(\omega)$ zu finden ist also ein Polynom $P(y)$ zu finden, welches die Relation (8.7) erfüllt.

8.4 Partialbruchzerlegung

Es muss ein Polynom $P(y)$ gefunden werden mit der Eigenschaft, dass

$$y^N P(1-y) + (1-y)^N P(y) = 1. \quad (8.8)$$

Division durch $y^N(1-y)^N$ macht daraus

$$Q(y) = \frac{1}{y^N(1-y)^N} = \frac{P(1-y)}{(1-y)^N} + \frac{P(y)}{y^N}$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite sind rationale Funktionen, die im Nenner ausschliesslich Potenzen von $1-y$ im ersten und y im zweiten Term haben. Dies sind genau die Nenner, die man in der Partialbruchzerlegung der linken Seite findet.

Wir berechnen daher die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y^N(1-y)^N} = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{y^k} + \sum_{k=1}^N \frac{C'_k}{(1-y)^k} \quad (8.9)$$

von $Q(y)$. Der Ausdruck $Q(y)$ ist symmetrisch bezüglich der Abbildung $y \leftrightarrow 1-y$. Da die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung eindeutig bestimmt sind, müssen die Koeffizienten der beiden Summen in (8.9) übereinstimmen: $C'_k = C_k$ für $k = 1, \dots, N$.

Multipliziert man (8.9) wieder mit $y^N(1-y)^N$, erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= (1-y)^N \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k y^{N-k}}_{= P(y)} + y^N \sum_{k=1}^{\infty} C_k (1-y)^{N-k} \\ &= (1-y)^N P_N(y) + y^N P_N(1-y). \end{aligned}$$

Das Polynom $P_N(y)$, gebildet mit den Koeffizienten der Partialbruchzerlegung von $Q(y)$ löst also das eingangs gestellte Problem.

8.4.1 Die Fälle $N = 2$ und $N = 3$

Wir berechnen die Partialbruchzerlegung für kleine Werte von N . Für $N = 2$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2(1-y)^2} &= \frac{C_1}{y} + \frac{C_2}{y^2} + \frac{C_1}{(1-y)} + \frac{C_2}{(1-y)^2} \\ &= \frac{C_1 y + C_2}{y^2} + \frac{C_1(1-y) + C_2}{(1-y)^2} \\ &= \frac{1}{y^2(1-y)^2} ((C_1 y + C_2)(1-2y+y^2) + (C_1 + C_2 - C_1 y)y^2) \end{aligned}$$

oder nach Multiplikation mit $y^N(1-y)^N$

$$\begin{aligned} 1 &= C_2 + (C_1 - 2C_2)y + (C_2 - 2C_1)y^2 + C_1 y^3 + (C_1 + C_2)y^2 - C_1 y^3 \\ &= C_2 + (C_1 - 2C_2)y + (2C_2 - C_1)y^2. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man die Bedingungen

$$C_2 = 1, \quad C_1 - 2C_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2C_2 - C_1 = 0.$$

Die dritte Bedingung ist identisch mit der zweiten. Aus der ersten und der zweiten Bedingung folgt $C_1 = 2$. Es folgt

$$P_2(y) = C_1 y + C_2 = 2y + 1.$$

Die analoge Rechnung für $N = 3$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} C_3 &= 1 \\ C_2 - 3C_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3C_3 = 3 \\ 3C_3 - 3C_2 + C_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3C_2 - 3C_3 = 6 \\ 4C_2 - 2C_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 = 6 \\ C_1 - 2C_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 = 6 \end{aligned}$$

Man liest daraus das Polynom

$$P_3(y) = 1 + 3y + 6y^2$$

ab. Auf die gleiche Weise findet man auch

$$P_4(y) = 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3$$

Daraus kann man die Vermutung ablesen, dass

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (8.10)$$

sein könnte.

8.4.2 Der allgemeine Fall

Das Polynom $P_N(y)$ ist die einzige Lösung vom Grad $N-1$ der Gleichung $(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1$. Die Bedingung ist gleichbedeutend mit

$$P(y) = (1-y)^{-N} (1 - y^N P(y)). \quad (8.11)$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist, $P_N(y)$ explizit zu bestimmen.

Um mehr über $P_N(y)$ herauszufinden, können wir beide Seiten von (8.11) in Taylor-Reihen um den Punkt $y = 0$ entwickeln. Da wir nur ein Polynom vom Grad $N-1$ suchen, können wir die Taylor-Reihen nach y^{N-1} abbrechen. Der Ausdruck $y^N P(y)$ auf der rechten Seite von (8.11) enthält nur Terme vom Grad mindestens N in y , für die Terme vom Grad $< N$ spielt er daher keine Rolle. Eine Lösung vom Grad $N-1$ erhält man daher, indem man die Reihe für $(1-y)^{-N}$ nach dem Terme vom Grade $N-1$ abbricht.

Auf der rechten Seite von (8.11) kann man die Newtonsche Potenzreihe

$$(1-y)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-y)^k$$

verwenden. Im vorliegenden Fall ist $\alpha = -N$ und damit sind die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{-N}{k} &= \frac{(-N) \cdot (-N-1) \cdot \dots \cdot (-N-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = (-1)^k \frac{N \cdot (N+1) \cdot \dots \cdot (N+k-1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= (-1)^k \binom{N+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Daraus können wir das Polynom $P_N(y)$ ablesen. Wegen $(-y)^k(-1)^k = y^k$ folgt das folgende Lemma, welches auch die Vermutung (8.10) bestätigt.

Lemma 8.2. *Das Polynom*

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k, \quad (8.12)$$

ist das einzige Polynom vom Grad N , welches die Gleichung

$$(1-y)^N P_N(y) + y^N P_N(1-y) = 1$$

erfüllt.

8.4.3 Weitere Lösungen von höherem Grad

Das Polynom $P_N(y)$ ist nicht die einzige Lösung der Gleichung (8.8). Weitere Lösungen $P(y)$ haben aber notwendigerweise Grad mindestens N . Die Differenz $D(y) = P(y) - P_N(y)$ erfüllt die Bedingung

$$(1-y)^N D(y) + y^N D(1-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-y)^N D(y) = -y^N D(1-y).$$

Die rechte Seite hat eine N -fache Nullstelle bei $y = 0$, also muss $D(y)$ ebenfalls eine N -fache Nullstelle haben. Der term niedrigsten Grades in $D(y)$ hat daher mindestens den Grad N . Wir schreiben daher $D(y) = y^N R(y)$.

Damit die Bedingung (8.8) erfüllt ist, muss für $R(y)$ die Bedingung

$$(1-y)^N D(y) = (1-y)^N y^N R(y) = -y^N (1-y)^N R(1-y) \quad \Rightarrow \quad R(y) = -R(1-y)$$

erfüllt sein. Es genügt daher, dass $R(y)$ ein Polynom ist, welches bezüglich $y = \frac{1}{2}$ antisymmetrisch ist.

Lemma 8.3. *Eine beliebige Lösung $P(y)$ der Gleichung*

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1$$

hat die Form

$$P(y) = P_N(y) + y^N R(y),$$

wobei $R(y)$ ein bezüglich $y = \frac{1}{2}$ antisymmetrisches Polynom ist, also $R(1-y) = -R(y)$.

8.5 Das Lemma von Riesz

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung war es im Abschnitt 8.4 möglich, die Funktion $M(\omega)$ als Polynom in $\cos \omega$ zu finden, welches die Identität

$$M(\omega) + M(\omega + \pi) = 1$$

erfüllt. Gesucht wird aber eine Funktion $H(\omega)$ mit $M(\omega) = H(\omega)H(-\omega)$. Diese Faktorisierung wird ermöglicht dank des in diesem Abschnitt formulierten und beschriebenen Lemmas von Riesz. Das Lemma von Riesz ist die folgende etwas überraschende Aussage:

Lemma 8.4 (Riesz). *Ist*

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k \omega, \quad a_n \neq 0$$

mit $A(0) = 1$ und $A(\omega) \geq 0$ für alle ω . Dann gibt es eine Funktion

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^n b_k e^{-ik\omega}$$

mit $B(0) = 1$ und $A(\omega) = B(\omega)B(-\omega)$.

Im Laufe des nachfolgenden Beweises werden wir wiederholt die folgende Identität verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{s + s^{-1}}{2} &= \frac{1}{2s}(sz + sz^{-1} - s^2 - 1) = -\frac{1}{2s}(1 - sz - sz^{-1} + s^2) \\ &= -\frac{1}{2s}(z - s)(z^{-1} - s) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Beweis. Die Funktion $A(\omega)$ kann geschrieben werden als $A(\omega) = p(\cos \omega)$, wobei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Das Polynom $p(x)$ hat n möglicherweise komplexe Nullstellen c_1, \dots, c_n , wobei komplexe Nullstellen in konjugiert komplexen Paaren auftreten. Das Polynom $p(x)$ kann daher faktorisiert werden in das Produkt

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) = a_n \prod_{j=1}^n (x - c_j)$$

$$A(\omega) = p(\cos \omega) = a_n \prod_{j=1}^n (\cos \omega - c_j)$$

Mit der Abkürzung $z = e^{-i\omega}$ können die Faktoren im Produkt als

$$\cos \omega - c_j = \frac{z + z^{-1}}{2} - c_j$$

geschrieben werden.

Wir versuchen, das gesuchte Polynom $B(\omega)$ aus Lösungen des Problems für die einzelnen Faktoren von $p(x)$ aufzubauen. Ein einzelner Faktor $A_j(\omega) = \cos \omega - c_j$ erfüllt die Bedingungen an A im Lemma im Allgemeinen nicht. Ist zum Beispiel c_j reell zwischen -1 und 1 , dann hat $\cos \omega - c_j$ eine Nullstelle hat daher auch negative Werte. Wenn c_j komplex ist, dann ist $\cos \omega - c_j$ keine reellwertige Funktion. Wir unterscheiden daher die folgenden drei Fälle:

1. Fall $|c_j| \geq 1$ und $c_j \in \mathbb{R}$: In diesem Fall kann c_j geschrieben werden als

$$c_j = \frac{s + s^{-1}}{2} \quad \text{mit } s = \text{sign}(c_j) \cdot \text{arcosh } |c_j|.$$

Dann wird

$$A_j(\omega) = \cos \omega - c_j = \frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{s + s^{-1}}{2} = -\frac{1}{2s}(z - s)(z^{-1} - s)$$

mit Hilfe von (8.13). Falls $c_j < 0$ ist auch $s < 0$ und wir können dem Produkt $B(\omega)$ den Faktor $B_j(\omega) = (z - s)/\sqrt{2s}$ hinzufügen, für den gilt $B_j(\omega)B_j(-\omega) = A_j(\omega)$. Falls $c_j > 0$ ist auch $s > 0$ und wir können dem Produkt $B(\omega)$ den Faktor $B_j(\omega) = (z - s)/\sqrt{-2s}$ hinzufügen, für den gilt $B_j(\omega)B_j(-\omega) = -A_j(\omega)$. Das Vorzeichen im zweiten Fall stört nicht, weil wegen $A(\omega) \geq 0$ noch ein weiterer Faktor $A_{j'}(\omega)$ vorhanden sein muss, der ebenfalls $A_{j'}(\omega) \leq 0$ ist für alle ω und der daher ebenfalls mit dem "falschen" Vorzeichen in das Produkt eingeht, wodurch das Vorzeichen wieder korrigiert wird.

2. Fall $|c_j| < 1$ und $c_j \in \mathbb{R}$: In diesem Fall hat $A_j(\omega)$ und damit $A(\omega)$ eine Nullstelle für jedes ω mit $\cos \omega = c_j$. Wegen $A(\omega) \geq 0$ müssen alle solchen Nullstellen in gerader Anzahl auftreten. Sei α so, dass $\cos \alpha = c_j$ und damit insbesondere auch

$$c_j = \cos \alpha = \frac{s + s^{-1}}{2} \quad \text{mit } s = e^{i\alpha}.$$

Wegen der Symmetrie der Funktion $\cos \omega$ gilt auch

$$c_{j'} = \cos(-\alpha) = \frac{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}}{2}.$$

Damit kann $A_j(\omega)^2$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} A_j(\omega)^2 &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right) \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2e^{i\alpha}}(z - e^{i\alpha})(z^{-1} - e^{i\alpha}) \frac{1}{2e^{-i\alpha}}(z - e^{-i\alpha})(z^{-1} - e^{-i\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha}) \cdot \frac{1}{2}(z^{-1} - e^{i\alpha})(z^{-1} - e^{-i\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(z^2 - 2z \cos \alpha + 1) \cdot \frac{1}{2}(z^{-2} - 2z^{-1} \cos \alpha + 1) \end{aligned}$$

Wir fügen daher der Funktion $B(\omega)$ den Faktor $B_j(\omega) = \frac{1}{2}(z^2 - 2z \cos \alpha + 1)$ hinzu, für den $B_j(\omega)B_j(-\omega) = A_j(\omega)^2$ gilt.

3. Fall $c_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: In diesem Fall gibt es einen zweiten, komplex konjugierten Faktor mit $c_{j'} = \bar{c}_j$. Wir möchten c_j wieder als

$$c_j = \frac{s + s^{-1}}{2} \tag{8.14}$$

darstellen. Dazu multiplizieren wir (8.14) mit s und erhalten die quadratische Gleichung

$$s^2 - 2c_j s + 1 = 0$$

mit der Lösung

$$s = c_j \pm \sqrt{c_j^2 - 1},$$

die immer mindestens eine Lösung hat. Wir dürfen daher annehmen, dass

$$c_j = \frac{s + s^{-1}}{2} \quad \text{und} \quad c_{j'} = \bar{c}_j = \frac{\bar{s} + \bar{s}^{-1}}{2}.$$

Damit können wir jetzt das Produkt $A_j(\omega)A_{j'}(\omega)$ wie folgt faktorisieren:

$$\begin{aligned} A_j(\omega)A_{j'}(\omega) &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{s + s^{-1}}{2} \right) \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - \frac{\bar{s} + \bar{s}^{-1}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2s}(z - s)(z^{-1} - s) \cdot \frac{1}{2\bar{s}}(z - \bar{s})(z^{-1} - \bar{s}) \\ &= \frac{1}{4|s|^2}(z - s)(z^{-1} - s)(z - \bar{s})(z^{-1} - \bar{s}) \\ &= \frac{1}{2|s|}(z - s)(z - \bar{s}) \cdot \frac{1}{2|s|}(z^{-1} - s)(z^{-1} - \bar{s}) \\ &= \frac{1}{2|s|}(z^2 - 2z \operatorname{Re} s - |s|^2) \cdot \frac{1}{2|s|}(z^{-2} - 2z^{-1} \operatorname{Re} s - |s|^2). \end{aligned}$$

Wir fügen in diesem Fall den Faktor $B_j(\omega) = (z^2 - 2z \operatorname{Re} s - |s|^2)/2|s|$ hinzu.

In allen drei Fällen haben wir für die behandelten Faktoren $A_j(\omega)$ und der eventuell zugehörigen Faktoren $A_{j'}(\omega)$ eine Funktion $B_j(\omega)$ gefunden, so dass das Produkt all dieser Faktoren

$$B(\omega) = \prod_j B_j(\omega)$$

genau die im Lemma versprochenen Eigenschaften hat. □

Aus dem Beweis des Lemmas lässt sich auch ein Algorithmus ablesen, mit dem das Polynom $B(\omega)$ konstruiert werden kann.

1. Bestimme die Nullstellen von $A(\omega) = P((1 - \cos \omega)/2)$ als Polynom in ω und schreibe $A(\omega)$ als Produkt

$$A(\omega) = \prod_j (\cos \omega - c_j)$$

2. Für jede Nullstelle c_j mit $|c_j| > 1$ füge einen Faktor

$$B_j(z) = \frac{1}{\sqrt{-2s}}(z - s), \quad s = \operatorname{sign} c_j \cdot \operatorname{arcosh} |c_j|$$

zu $B(z)$ hinzu.

3. Jede Nullstelle $c_j \in \mathbb{R}$ mit $|c_j| < 1$ kommt eine Gerade Anzahl mal vor, füge für jedes Paar einen Faktor

$$B_j(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 2z \cos \alpha + 1), \quad \text{mit } c_j = \cos \alpha$$

hinzu.

4. Für jede Nullstelle $c_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt es eine konjugiert komplexe Nullstelle $c_{j'} = \bar{c}_j$. Füge für beide einen Faktor

$$B_j(z) = \frac{1}{2|s|}(z^2 - 2z \operatorname{Re} s - |s|^2), \quad \text{wobei } s \text{ eine Lösung von } s^2 - 2c_j s + 1 = 0 \text{ ist,}$$

hinzu.

Beispiel. Als Beispiel für den im Beweis des Lemmas von Riesz formulierten Algorithmus wenden wir ihn auf das Polynom

$$A(\omega) = 2 - \cos \omega = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})$$

an. Das Polynom $-(\cos \omega - 2)$ hat nur einen einzigen Faktor mit $c_0 = 2$. Der Faktor $B_j(z)$ muss von der Form $B_j(z) = b_0 + b_1 z$ sein. Setze man dies für B_j ein, erhält man

$$A(\omega) = 2 - \cos \omega = (b_0 + b_1 e^{i\omega})(b_0 + b_1 e^{-i\omega}) = b_0^2 + b_1^2 + b_0 b_1 \cos \alpha$$

Durch Koeffizientengleich liest man ab

$$\begin{aligned} 2 &= b_0^2 + b_1^2 \\ -\frac{1}{2} &= b_0 b_1. \end{aligned}$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, erhält man die biquadratische Gleichung

$$2 = b_0^2 + \frac{1}{4b_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad b_0^4 - 2b_0^2 + \frac{1}{4} = 0$$

mit den Lösungen

$$b_0^2 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad b_0 = \pm \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Tatsächlich ist

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm 2\sqrt{3} + 3}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Die zugehörigen Wert von b_1 sind

$$b_1 = \mp \frac{1}{2} \frac{2}{1 \pm \sqrt{3}} = \mp \frac{1}{1 \pm \sqrt{3}} = \mp \frac{1 \mp \sqrt{3}}{1 - 3} = \pm \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}.$$

Wählt man in allen Fällen das obere Zeichen, wird

$$B(\omega) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{i\omega}.$$

○

8.6 Daubechies-Wavelets

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, wie die erzeugende Funktion $H(s)$ einer Multiskalen-Analyse mit Wavelets beliebiger Ordnung bestimmt werden kann. Es wurde auch klar, dass das Haar-Wavelet eine Lösung dieser Aufgabe ist. Nachdem die Existenz solcher Multiskalen-Analysen nun etabliert ist, sollen in diesem Abschnitt die Koeffizienten h_k dieser Wavelets explizit konstruiert werden.

In Lemma 8.2 wurden die Lösungen für das Polynom $P(y)$ bereits charakterisiert. Um die erzeugende Funktion zu bestimmen, sind noch folgende Schritte durchzuführen.

1. Die Funktion $A(\omega) = P(y)$ mit $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$ muss bestimmt und als Polynom in $\cos \omega = 1 - 2y$ ausgedrückt werden.
2. Die Funktion $A(\omega)$ muss mit Hilfe des Lemmas 8.4 von Riesz in das Produkt $A(\omega) = B(\omega)B(-\omega)$ zerlegt werden.
3. Die erzeugende Funktion ist dann

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N B(\omega),$$

aus ihr müssen die Koeffizienten h_k abgelesen werden.

Wir führen den Prozess im folgenden für $N = 2$ und $N = 3$ durch.

8.6.1 Der Fall $N = 2$

Für $N = 2$ ist $P_N(y) = P_2(y) = 1 + 2y$. Wegen $y = (1 - \cos \omega)/2$ folgt

$$A(\omega) = 1 + 2 \frac{1 - \cos \omega}{2} = 2 - \cos \omega = 2 - \cos \omega$$

Wegen $\cos \omega \leq 1$ ist $A(\omega) \geq 0$, die Voraussetzungen des Riesz-Lemmas 8.4 sind damit erfüllt.

Im Beispiel auf Seite 126 wird bereits die Funktion $B(z)$ gefunden, die nach dem Lemma 8.4 von Riesz existieren muss. Es war

$$B(\omega) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega}.$$

Daraus kann man jetzt die erzeugende Funktion ableiten

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 B(\omega) = \frac{1}{4} (1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}) \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{8} ((1 + \sqrt{3}) + (2(1 + \sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3})e^{-i\omega} + (1 + \sqrt{3} + 2(1 - \sqrt{3}))e^{-2i\omega} + (1 - \sqrt{3})e^{-3i\omega}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2} e^{-i\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} e^{-2i\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-3i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-i\omega} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-2i\omega} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} e^{-3i\omega} \right) \end{aligned}$$

Daraus kann man die Koeffizienten der Skalierungsrelation ablesen:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.482962913144534$$

$$h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.836516303737808$$

$$h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.224143868042013$$

$$h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -0.129409522551260$$

8.6.2 Der Fall $N = 3$

Für $N = 3$ ist $P_N(y) = P_3(y) = 1 + 3y + 6y^2$. Wir ersetzen wieder $y = (1 - \cos \omega)/2$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 + 3(1 - \cos \omega)/2 + 6(1 - \cos \omega)^2/4 \\ &= 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos \omega + \frac{3}{2}(1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega) \\ &= 4 - \frac{9}{2} \cos \omega + \frac{3}{2} \cos^2 \omega \\ &= \frac{3}{2}(\cos^2 \omega - 3 \cos \omega + \frac{8}{3}) \end{aligned}$$

Jetzt muss eine Funktion $B(\omega)$ als Polynom in $e^{i\omega}$ gefunden werden derart, dass $A(\omega) = B(\omega)B(-\omega)$.
Der Ansatz

$$B(\omega) = b_0 + b_1 e^{i\omega} + b_2 e^{2i\omega}$$

führt auf

$$\begin{aligned} A(\omega) &= B(\omega)B(-\omega) = (b_0 + b_1 e^{i\omega} + b_2 e^{2i\omega})(b_0 + b_1 e^{-i\omega} + b_2 e^{-2i\omega}) \\ &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + (b_0 b_1 + b_2 b_1)(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + b_0 b_2(e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) \\ &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(b_0 b_1 + b_2 b_1) \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} + 2b_0 b_2 \frac{e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}}{2} \\ &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(b_0 b_1 + b_2 b_1) \cos \omega + 2b_0 b_2 \cos 2\omega \\ &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(b_0 b_1 + b_2 b_1) \cos \omega + 2b_0 b_2 (2 \cos^2 \omega - 1) \\ &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_0 b_2 + 2(b_0 b_1 + b_2 b_1) \cos \omega + 4b_0 b_2 \cos^2 \omega \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich lesen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_0 b_2 &= \frac{8}{3} \\ (b_0 + b_2)b_1 &= -\frac{9}{4} \\ b_0 b_2 &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Kapitel 9

Spline-Wavelets

Das Haar-Wavelet ist charakterisiert durch die erzeugende Funktion H_0 , die in einer Funktionalgleichung der Fourier-Transformierten von φ vorkommt. Es stellt sich heraus, dass sich eine solche Funktionalgleichung für Faltungen von φ mit sich selbst sofort ableiten lassen. Allerdings bilden die verschobenen Kopien keine orthonormierte Basis, dazu müssen sie erst orthonormiert werden. Da sich dafür aber ein Verfahren angeben lässt, kann man eine Familie von Wavelets konstruieren, die sich dadurch auszeichnen, dass sie stückweise polynomiell sind, genauso wie das Haar-Wavelet stückweise konstant war. Dies sind die B-Spline-Wavelets, die in diesem Kapitel dargestellt werden sollen.

Die B-Spline-Wavelets haben nicht kompakten Träger, aber Koeffizienten mit grossem Index sind sehr klein. Ausserdem sind sie wie die Wavelet-Koeffizienten typischerweise irrational, müssen also in einer Implementation notwendigerweise gerundet werden. Die Stabilität der Wavelet-Transformation stellt sicher, dass die Rundung nicht zu unbrauchbaren Resultaten führt. Indem sehr kleine Koeffizienten zu 0 gerundet werden, können auch die B-Spline-Wavelets als Wavelets mit kompaktem Träger behandelt werden. Dasselbe gilt natürlich auch für jede andere Form von Wavelet, bei dem die Werte der Koeffizienten rasch gegen 0 gehen.

Anhang A

Komplexe Zahlen

Leonhard Euler sah die Zahlen $\sqrt{-1}$ noch als imaginär an, also als ohne Gegenstück in der realen Welt. Elektroingenieure verwenden komplexe Zahlen mit grossem Erfolg in ihren Anwendungen, sie spielen aber vor allem die Rolle eines praktischen Werkzeugs. Die Regeln, mit denen am Schluss solcher Rechnungen sichergestellt wird, dass die Resultate reell sind, zeigen ausserdem, dass man alles auch ohne komplexe Zahlen durchrechnen könnte, wenn auch wesentlich weniger elegant.

In der Quantenmechanik geht es aber nicht mehr ohne komplexe Zahlen, die physikalischen Grössen selbst sind komplex. Es gibt zwar auch hier wieder Regeln, die sicherstellen, dass Messresultate reell sind (Operatoren müssen selbstadjungiert sein), aber sie erlauben nicht, die ganze Quantenmechanik auf eine Art zu beschreiben, die ohne komplexe Zahlen auskommt.

A.1 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen

In den reellen Zahlen \mathbb{R} können alle Grundoperationen ausgeführt werden, es ist jedoch nicht möglich, die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen. Eine analoge Situation trifft man schon viel früher. In den natürlichen Zahlen \mathbb{N} kann man zwar addieren und multiplizieren, aber nicht subtrahieren. Fügt man die negativen Zahlen hinzu erhält man eine Menge \mathbb{Z} , in der die Subtraktion uneingeschränkt möglich ist. Division ist aber immer noch nur für spezielle Divisoren möglich. Fügt man jedoch die Brüche zu \mathbb{Z} hinzu, erhält man die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} , in der Division uneingeschränkt möglich ist. Doch auch \mathbb{Q} ist nicht vollständig, die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Natürlich kann man $\sqrt{2}$ durch eine Folge von Brüchen $r_n \in \mathbb{Q}$ approximieren, doch der Grenzwert dieser Folge $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \sqrt{2}$ ist nicht in \mathbb{Q} . Fügt man jedoch alle Grenzwerte von konvergenten Folgen zu \mathbb{Q} hinzu, erhält man die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, in der auch beliebige Wurzeln von positiven Zahlen gezogen werden können, oder andere Grenzwerte wie π , e , die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ und weitere.

A.1.1 Grundoperationen für die komplexen Zahlen

Nach analogem Muster können wir auch \mathbb{R} erweitern, so dass auch die Wurzeln aus negativen Zahlen bestimmt werden können. Es reicht sogar, nur die Wurzel von -1 hinzuzufügen, denn jede andere Wurzel einer negativen Zahl ist $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$. Euler hat die Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ für die imaginäre Einheit eingeführt. Es gilt natürlich $i^2 = -1$.

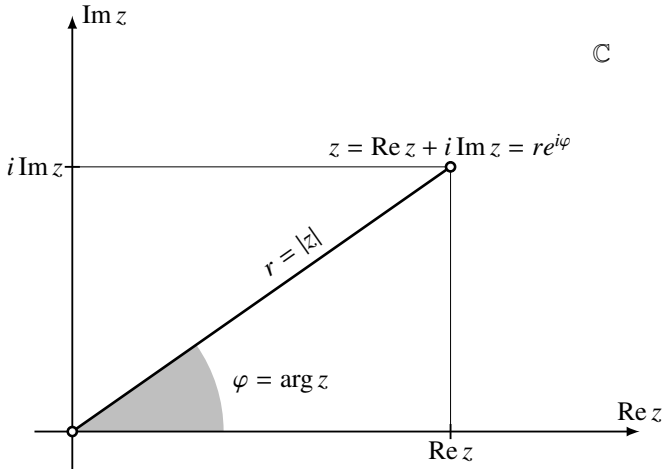


Abbildung A.1: Komplexe Zahlenebene

Definition A.1. Die Menge $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ heisst die Menge der komplexen Zahlen. Die komplexe Zahl $z = a + bi$ hat Realteil $\operatorname{Re} z = a$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} z = b$. Die Rechenoperationen sind so zu verstehen, dass die Rechenregeln der Algebra erhalten bleiben¹.

Die Rechenoperationen folgen aus der Definition:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - i^2 bd + (ad + bc)i = ac - bd + (ad + bc)i$$

Die Division stellt noch ein Problem dar. Hier hilft das Konzept der konjugiert komplexen Zahl.

Definition A.2. Die Zahl $\bar{z} = a - bi$ heisst die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl.

Zunächst kann man mit der konjugiert komplexen Zahl den Betrag einer komplexen Zahl definieren:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

Andererseits kann man damit auch komplexe Brüche berechnen, indem man mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Die komplexen Zahlen können in einer Ebene visualisiert werden: Realteil und Imaginärteil werden entlang orthogonaler Achsen abgetragen. Die Punkte (x, y) der x - y -Ebene entsprechen also der komplexen Zahl $x + yi$ der komplexen Zahlenebene (Abbildung A.1).

Mit Hilfe der komplexen Konjugation kann man den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = a + bi$ direkt ausdrücken:

$$\operatorname{Re} z = a = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{Im} z = b = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (\text{A.2})$$

¹Man nennt dies das Permanenz-Prinzip.

A.1.2 Polardarstellung

Die Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte einer Ebene suggeriert auch eine alternative Schreibweise. Ein Punkt z der komplexen Ebene kann auch charakterisiert werden mit Hilfe von Polarkoordinaten, also durch seine Entfernung $r = |z|$ vom Nullpunkt, und durch Polarwinkel zwischen der reellen Achse und der Richtung zur komplexen Zahl. Der Polarwinkel heisst auch *Argument* $\arg z$, und es gilt

$$\tan \arg z = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

Die Multiplikation von komplexen Zahlen bekommt in der Polardarstellung eine besondere Interpretation:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \cos \varphi_1 + i r_1 \sin \varphi_1)(r_2 \cos \varphi_2 + i r_2 \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)i) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \Rightarrow \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen entspricht also der Multiplikation der Beträge, und der Addition der Argumente.

Wir versuchen jetzt, die Werte der Exponentialfunktion zu e^z zu bestimmen. Die Exponentialgesetze sollten auch weiterhin gelten. Sei also $z = a + bi$, dann ist

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}.$$

Die Exponentialfunktion reeller Zahlen ist bereits wohlbekannt, es muss also nur noch untersucht werden, welche Bedeutung e^{bi} hat.

Betrachten wir die Funktion $f(t) = e^{it}$. Die Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f'(t) &= i e^{it} = i f(t) \\ f''(t) &= -f(t). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Die Funktion f muss also eine Lösung der Differentialgleichung (A.3) sein, welche die Anfangsbedingungen $f(0) = 1$ und $f'(0) = i f(0) = i$ erfüllen muss. Doch die Differentialgleichung (A.3) hat die Lösungen

$$f(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Setzt man die Anfangsbedingungen ein, findet man

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 & \Rightarrow & & a &= 1 \\ f'(0) &= 1 & \Rightarrow & & b &= i, \end{aligned}$$

so dass wir jetzt e^{it} ausrechnen können:

Satz A.3 (Euler).

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{A.4}$$

Die komplexe Konjugation kehrt das Vorzeichen des Imaginärteils um, also von $\sin t$. Da $\sin t$ eine ungerade Funktion ist, ist dies gleichbedeutend damit, das Vorzeichen von t zu kehren: $\overline{e^{it}} = e^{-it}$.

Mit der Eulerschen Formel sind wir jetzt auch in der Lage, den Zusammenhang zwischen einer komplexen Zahl und ihrem Betrag und Argument sehr prägnant auszudrücken:

$$z = |r| \cdot e^{i \arg z}.$$

Die Real- und Imaginärteile von e^{it} sind $\cos t$ und $\sin t$, wir können sie auch mit den Formeln (A.1) und (A.2) ausdrücken:

$$\begin{aligned}\cos t &= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + \overline{e^{it}}}{2} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \sin t &= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.\end{aligned}$$

A.1.3 Matrixdarstellung der komplexen Zahlen

Die Algebra der komplexen Zahlen kann man auch als eine Algebra von Matrizen schreiben. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R}) : a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Die imaginäre Einheit i wird von φ auf die Matrix

$$\varphi(i) = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

abgebildet. Man kann nachrechnen, dass $J^2 = -E$, und dass die Rechenregeln für die komplexen Zahlen durch die Abbildung φ in die Rechenregeln für Matrizen transformiert werden. Wir illustrieren dies für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ (ac - bd) + i(ad - bc) &\mapsto = \begin{pmatrix} ac - bd & ad - bc \\ -ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In dieser Darstellung kann man auch e^{Jt} ausrechnen, indem man Jt in die Taylorreihe von e^x einsetzt

$$\begin{aligned}e^{Jt} &= E + tJ + \frac{t^2}{2!}J^2 + \frac{t^3}{3!}J^3 + \frac{t^4}{4!}J^4 + \frac{t^5}{5!}J^5 + \frac{t^6}{6!}J^6 + \frac{t^7}{7!}J^7 + \dots \\ &= E + tJ - \frac{t^2}{2!}E - \frac{t^3}{3!}J + \frac{t^4}{4!}E - \frac{t^5}{5!}J - \frac{t^6}{6!}E + \frac{t^7}{7!}J + \dots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right)E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right)J = E \cos t + J \sin t.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Die Eulerformel (A.4) lässt sich also auch in der Matrixdarstellung der komplexen Zahlen wiedergewinnen.

A.2 Komplexe Matrizen

Die Lineare Algebra im Bachelor wird typischerweise nur in den reellen Zahlen entwickelt, der einzige untersuchte Vektorraum ist der Raum \mathbb{R}^n der reellen n -dimensionalen Vektoren. Für die Quantenmechanik benötigen wir aber auch Vektoren mit komplexen Komponenten. Der n -dimensionale komplexe Vektorraum \mathbb{C}^n ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid c_i \in \mathbb{C} \right\},$$

mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Nichts an der elementaren linearen Algebra hat besondere Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet, die nicht auch die komplexen Zahlen haben. Der Gauss-Algorithmus, die Konstruktion der Determinanten, ja sogar der grundlegende Algorithmus zur Lösung des Eigenwertproblems funktioniert genau gleich auch für komplexe Matrizen. Nur im Bereich des Skalarproduktes sind minimale Modifikationen notwendig.

A.2.1 Skalarprodukt für komplexe Vektorräume

In der linearen Algebra im ersten Semester wird das Skalarprodukt geometrisch mit Hilfe der Projektion eingeführt. Eine solche Konstruktion ist für komplexe Vektoren nicht möglich, weil es keine anschauliche komplexe Geometrie gibt.

Komplexes Skalarprodukt

Um ein komplexes Skalarprodukt zu bekommen, gehen wir daher von den algebraischen Eigenschaften des Skalarproduktes aus:

1. Das Skalarprodukt (u, v) von komplexen Vektoren u und v ist linear in v .
2. $(u, u) > 0$ falls $u \neq 0$.
3. Falls $(u, v) \in \mathbb{R}$, dann ist $(u, v) = (v, u)$.

Diese Eigenschaften müssen auch für ein komplexes Skalarprodukt gelten. Wir zeigen, dass diese Eigenschaften auch ein komplexes Skalarprodukt weitgehend festlegt.

Zunächst stellen wir fest, dass wir nicht erwarten können, dass ein Skalarprodukt linear sein kann. Betrachten wir dazu einen eindimensionalen Vektorraum \mathbb{C}^1 . Vektoren sind hier nur komplexe Zahlen, und ein Produkt, welches linear in beiden Faktoren ist, ist von der Form $(u, v) = uv$. Dann ist aber $(u, u) = u^2$, aber u^2 kann auch negativ sein, zum Beispiel für $u = i$. Das einzige Produkt, welches immer positiv ist, ist $(u, v) = \bar{u}v$. Dieses Produkt ist aber nicht linear im Faktor u :

$$(\lambda u, v) = \overline{(\lambda u)}v = \bar{\lambda}(\bar{u}v) = \bar{\lambda}(u, v).$$

Wir müssen also von einem komplexen Skalarprodukt verlangen, dass es im ersten Faktor *konjugiert linear* ist:

$$(\lambda u, v) = \bar{\lambda}(u, v)$$

Eine Funktion von zwei Vektoren, welche linear im zweiten Vektor ist und konjugiert linear im ersten heisst *sesquilinear*.

Sei jetzt also $(\cdot | \cdot)$ eine Sesquilinearform. Wir setzen $\lambda = 1/(u, v)$, dann gilt $(u, \lambda v)$ reell ist. Dann gilt

$$1 = \lambda(u, v) = (u, \lambda v) = (\lambda v, u) = \bar{\lambda}(v, u) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\bar{\lambda})} = (v, u) \quad \Rightarrow \quad \overline{(u, v)} = (v, u).$$

Vertauschung der Faktoren ist also gleichbedeutend mit komplexer Konjugation des Wertes des Skalarproduktes. Man nennt eine Funktion von zwei komplexen Vektoren *hermitesch*, wenn $(u, v) = \overline{(v, u)}$ gilt.

Eine hermitesche Sesquilinearform heisst *positiv definit*, wenn für jeden Vektor $u \neq 0$ gilt $(u, u) > 0$. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass (u, u) sinnvoll als die “Länge” eines Vektors interpretiert werden kann.

Definition A.4. Ein komplexes Skalarprodukt ist eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform.

Das einfachste Beispiel eines komplexen Skalarproduktes ist

$$(u, v) = \sum_i \bar{u}_i v_i.$$

Die Standardbasisvektoren sind auch in diesem Skalarprodukt orthonormiert.

Adjungierte Matrix

In den reellen Vektorräumen konnte man zu einer linearen A immer eine lineare Abbildung A^t finden mit der Eigenschaft $(u, Av) = (A^t u, v)$. Mit Hilfe der Standardbasisvektoren konnte man auch ausrechnen, was dies für die Matrizen von A bedeutet:

$$(e_i, A^t e_j) = (A^t e_j, e_i) = (e_j, A e_i) = a_{ji}$$

d. h. die Matrix von A^t ist die transponierte Matrix von A . Eine symmetrische Matrix war eine, die sich beim Transponieren nicht ändert, also $A^t = A$.

Dasselbe kann man jetzt auch für ein komplexes Skalarprodukt versuchen. Zu einer komplexen Matrix A ist also eine neue Matrix A^* gesucht, mit der Eigenschaft, $(A^* u, v) = (u, Av)$ für jedes Paar von Vektoren u und v . Für die Standardbasisvektoren gilt dann

$$(e_i, A^* e_j) = \overline{(A^* e_j, e_i)} = \overline{(e_j, A e_i)} = \bar{a}_{ji},$$

die Matrix von A^* ist also nicht nur transponiert, sondern auch komplex konjugiert. Hat A die Matricelemente a_{ij} dann nennt man die Matrix A^* mit den Matricelementen \bar{a}_{ji} die adjungierte Matrix. Eine Matrix, die sich beim Adjungieren nicht ändert, heisst *selbstadjungiert*.

Die Rechenregeln für die adjungierte Matrix sind ganz ähnlich wie für die Transposition:

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Man beachte, dass $A \mapsto A^*$ nicht linear ist.

Unitäre Matrizen

Matrizen, die in reellen Vektorräumen das Skalarprodukt nicht ändern, heissen orthogonal. Sie sind charakterisiert durch die Eigenschaft $(Ox, Oy) = (x, y)$, woraus sich mit Hilfe der Transposition ergibt:

$$(Ox, Oy) = (O^t Ox, y) = (x, y) \quad \Rightarrow \quad O^t O = E,$$

woraus man weiter ablesen kann, dass bei orthogonalen Matrizen die transponierte Matrix mit der invertierten Matrix zusammenfällt.

Für komplexen Vektoren kann man wieder nach den Matrizen fragen, die das komplexe Skalarprodukt nicht verändern. Eine Matrix U hat diese Eigenschaft, wenn

$$(Ux, Uy) = (U^*Ux, y) = (x, y) \quad \forall x, y \quad \Rightarrow \quad U^*U = E$$

gilt, eine solche Matrix heisst *unitär*.

Für reelle Matrizen A ist $A^t = A^*$, also sind orthogonale Matrizen auch unitär.

Beispiel. Die unitären 1×1 -Matrizen sind komplexe Zahlen z , welche die zusätzliche Bedingung $\bar{z}z = 1$ erfüllen müssen. Die Menge der unitären 1×1 -Matrizen ist also

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

In der Quantenmechanik können Zustandsvektoren in der Regel nur bis auf einen komplexen Faktor vom Betrag 1, also bis auf ein Element von $U(1)$ festgelegt werden. Man spricht oft von “bedeutungslosen” Phasenfaktoren. \bigcirc

Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$

Wir betrachten Matrizen der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mit der zusätzlichen Bedingung $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Sie erfüllen

$$\begin{aligned} U^*U &= \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a + b\bar{b} & \bar{a}b - b\bar{a} \\ \bar{b}a - a\bar{b} & \bar{b}b + a\bar{a} \end{pmatrix} = E \\ \det(U) &= \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = a\bar{a} + \bar{b}b = |a|^2 + |b|^2 = 1. \end{aligned}$$

Solche Matrizen sind also nicht nur unitär, sondern haben auch Determinante 1. Multipliziert man zwei Matrizen der Form (A.6), wird das Produkt auch wieder Determinante 1 haben, aber es ist nicht klar, dass es sich in der Form (A.6) schreiben lässt. Daher rechnen wir das Produkt aus, wir erhalten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ab + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \bar{a}\bar{d} & -\bar{b}d + \bar{a}\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ab + b\bar{c} \\ -(\bar{a}b + \bar{b}\bar{c}) & \bar{a}c - \bar{b}\bar{d} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt zweier Matrizen der Form (A.6) ist also wieder eine Matrix der Form (A.6). Die Menge dieser Matrizen ist demzufolge abgeschlossen unter Matrixmultiplikation und Bildung der Inversen. Man nennt diese Matrizen die Gruppe der speziellen unitären Matrizen:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \wedge |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Die Gruppe $SU(2)$ spielt bei der Analyse des Elektronenspins eine wichtige Rolle.

Die Gruppe $SU(2)$ ist eine Teilmenge der Menge der komplexen 2×2 -Matrizen:

$$SU(2) \subset V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}^2 \right\} \subset M_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

Wir untersuchen die Menge V etwas genauer. Zunächst können wir V als zweidimensionalen komplexen Vektorraum betrachten wie \mathbb{C}^2 . Als reeller Vektorraum betrachtet ist V ein vierdimensionaler reeller Vektorraum. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow V : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

ist eine Bijektion zwischen \mathbb{R}^4 , \mathbb{C}^2 und V . Auch geometrisch ist $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ das Produkt von zwei Ebenen, hat also eine vierdimensionale Geometrie. Darin ist $SU(2)$ die Teilmenge der vierdimensionalen Vektoren, und zwar derjenigen für die gilt

$$1 = |a|^2 + |b|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

das sind die Vektoren von \mathbb{R}^4 mit Länge 1. Geometrisch ist $SU(2)$ also eine dreidimensionale Kugel eingebettet in in einen vierdimensionalen Raum.

Spur und Determinante

Spur und Determinate können samt all ihren Rechenregeln sofort auf komplexe Matrizen übertragen werden. Für den Adjunktionsoperator finden wir die Rechenregeln

$$\det A^* = \overline{\det A} = \overline{\det A}, \quad \text{und} \quad \text{tr } A^* = \overline{\text{tr } A}.$$

Für selbstadjungierte Matrizen kann man schliessen, dass sowohl die Determinante wie auch die Spur von A reell sein müssen.

In den komplexen Zahlen hat jedes Polynom n -ten Grades n Nullstellen. Daher können wir das charakteristische Polynom immer ausschreiben als

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= (-1)^n (\lambda^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n) \\ &= (-1)^n (\lambda^n - \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A) \end{aligned}$$

Daraus können wir auch eine Formel für $\det(E + tA)$ ableiten:

$$\begin{aligned} \det(E + tA) &= (-t)^n \det\left(A - \frac{1}{t}E\right) = t^n \left(\frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} \text{tr } A + \dots + \det A \right) \\ &= 1 + t \text{tr } A + \dots + t^n \det A \end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2.2 Eigenwertproblem für komplexe Matrizen

Definition

Ein Vektor $v \neq 0$ heisst *Eigenvektor zum Eigenwert* λ einer Matrix A , wenn $Av = \lambda v$ gilt. Diese Definition ist auch für komplexe Matrizen gültig, ebenso funktioniert der Standardalgorithmus für die Lösung des Eigenwertproblems nach wie vor:

1. Finde die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$.

2. Für jede Nullstelle λ_i , finde Eigenvektoren durch Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda_i E)v = 0$.

Der wesentliche Unterschied ist jedoch, dass in den komplexen Zahlen ein Polynom vom Grade n immer n Nullstellen hat. Die bei reellen Matrizen vorkommende Situation, dass weniger als n reelle Nullstellen existieren, und daher nicht genügend Eigenvektoren für eine Eigenvektorbasis gefunden werden können, tritt also bei komplexen Matrizen seltener auf.

Selbstadjungierte Matrizen

Der quantenmechanische Formalismus beschreibt physikalische Größen als selbstadjungierte Matrizen. Die möglichen Werte einer solchen Grösse sind die Eigenwerte der Matrix, und es muss sichergestellt werden, dass keine komplexen Eigenwerte auftreten können.

Satz A.5. *Die Eigenwerte einer selbstadjungierten Matrix sind reell.*

Beweis. Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ einer selbstadjungierten Matrix A . Dann gilt

$$\begin{aligned} (v, Av) &= \lambda(v, v) \\ &= (Av, v) = (\lambda v, v) = \bar{\lambda}(v, v) \\ &\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}, \end{aligned}$$

also ist $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Bei reellen Matrizen hat sich gezeigt, dass symmetrische Matrizen immer diagonalisierbar sind. Dies gilt auch für selbstadjungierte Matrizen in komplexen Vektorräumen:

Satz A.6. *Eine selbstadjungierte Matrix ist diagonalisierbar und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. Wir beweisen nur die Orthogonalität von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Seien also v_1, v_2 Eigenvektoren zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 . Die beiden Eigenwerte sind nach Satz A.5 reell. Dann gilt

$$\begin{aligned} (v_1, Av_2) &= \lambda_2(v_1, v_2) \\ &= (Av_1, v_2) = \bar{\lambda}_1(v_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2) \\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ nur wahr sein, wenn $(v_1, v_2) = 0$, die Vektoren v_1 und v_2 müssen also orthogonal sein. □

A.3 Lie-Algebren

Die invertierbaren Matrizen $GL(n)$ können weiter unterteilt werden in invertierbare Matrizen mit zusätzlichen Eigenschaften wie Orthogonalität oder spezielle Werte der Determinanten. Allerdings bildet die Menge der invertierbaren Matrizen keinen Vektorraum: man kann sie nicht addieren oder mit beliebigen Zahlen multiplizieren, weil die Invertierbarkeit oder eine der zusätzlichen Eigenschaften dabei verloren gehen kann. Diese Matrizen sind daher nicht geeignet als Observable in der Quantenmechanik.

Ist eine Matrix A invertierbar, dann wird auch eine Matrix, deren Matrixelemente nur wenig von A abweichen, invertierbar sein. Insbesondere werden die Matrizen der Form $E + tA$ invertierbar sein, wenn nur t klein genug ist. Dies ist ein Übergang zu einer infinitesimalen Transformation A .

Wie müssen die Rechenoperationen beim Übergang zu infinitesimalen Transformationen übersetzt werden? Wegen

$$(E + tA)(E + tB) = E + (A + B)t + t^2AB \simeq E + (A + B)t$$

wird beim Übergang zur infinitesimalen Transformation aus dem Produkt der Matrizen die Summe von Matrizen, und aus der Inversen wird die Negation.

Betrachten wir die Bedingung Orthogonalität

$$E = (E + \varepsilon A)^t (E + \varepsilon A) = E + \varepsilon(A^t + A) + \dots \quad \Rightarrow \quad A^t = -A.$$

Die infinitesimale Versionen von orthogonalen Matrizen sind also antisymmetrische Matrizen. Analog sind die infinitesimalen Versionen von unitären Matrizen antihermitesch.

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. Diese Tatsache kann ausgenutzt werden, um den Matrizenmengen eine zusätzliche algebraische Struktur zu geben. Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen A und B erhält die oben genannten Eigenschaften. Ist A antisymmetrisch, dann ist auch $[A, B]$ auch antisymmetrisch:

$$[A, B]^t = (AB - BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -(AB - BA) = -[A, B].$$

Die Kommutatorklammer hat aber auch noch eine zusätzliche Eigenschaft, für drei Matrizen A, B und C gilt nämlich die sogenannte Jacobi-Identität:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (\text{A.8})$$

Um dies einzusehen rechnen wir die Kommutatoren aus:

$$\begin{aligned} & [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \\ &= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ein Vektorraum mit einer antisymmetrischen, bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot]$, welche die Jacobi-Identität (A.8) erfüllt, heisst eine *Lie-Algebra*. So wie der Hamilton-Operator als Erzeuger der Zeitentwicklung das leichter zu manipulierende Objekt ist, ist die Liealgebra zu einer Transformationsgruppe wie $SU(2)$ besser geeignet zur Beschreibung von Transformationen, und wird daher von Physikern vorgezogen.

Beispiel. Zur Gruppe $SO(3)$ der Drehmatrizen gehört die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ der antisymmetrischen 3×3 -Matrizen. Solche Matrizen haben die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektorraum $\mathfrak{so}(3)$ ist also dreidimensional.

Die Wirkung von $E + t\Omega$ auf einem Vektor x ist

$$(E + t\Omega) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t\omega_3 & -t\omega_2 \\ -t\omega_3 & 1 & t\omega_1 \\ t\omega_2 & -t\omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - t(-\omega_3 x_2 + \omega_2 x_3) \\ x_2 - t(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) \\ x_3 - t(-\omega_2 x_1 + \omega_1 x_2) \end{pmatrix} = x - t \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times x = x + tx \times \omega.$$

Die Matrix Ω ist als die infinitesimale Version einer Drehung um die Achse ω .

Wir können die Analogie zwischen Matrizen in $\mathfrak{so}(3)$ und Vektoren in \mathbb{R}^3 noch etwas weiter treiben. Zu jedem Vektor in \mathbb{R}^3 konstruieren wir eine Matrix in $\mathfrak{so}(3)$ mit Hilfe der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3) : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_1 \\ -v_3 & 0 & v_2 \\ v_1 & -v_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kommutator von zwei so aus Vektoren \vec{u} und \vec{v} konstruierten Matrizen U und V ist:

$$\begin{aligned} [U, V] &= UV - VU \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_1 \\ -u_3 & 0 & u_2 \\ u_1 & -u_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_1 \\ -v_3 & 0 & v_2 \\ v_1 & -v_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_1 \\ -v_3 & 0 & v_2 \\ v_1 & -v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_1 \\ -u_3 & 0 & u_2 \\ u_1 & -u_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_3 v_3 + u_1 v_1 - u_3 v_3 - u_1 v_1 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_3 v_2 - u_2 v_3 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & -u_3 v_3 - u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_2 v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & u_1 v_3 - u_3 v_1 & -u_1 v_1 - u_2 v_2 u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & -(u_2 v_3 - u_3 v_2) \\ -(u_1 v_2 - u_2 v_1) & 0 & u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & -(u_3 v_1 - u_1 v_3) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix $[U, V]$ gehört zum Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$. Damit können wir aus der Jacobi-Identität jetzt folgern, dass

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

für drei beliebige Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} ist. Dies bedeutet, dass der dreidimensionale Vektorraum \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt zu einer Lie-Algebra wird. In der Tat verwenden einige Bücher statt der vertrauten Notation $\vec{u} \times \vec{v}$ für das Vektorprodukt die aus der Theorie der Lie-Algebren entlehnte Notation $[\vec{u}, \vec{v}]$, zum Beispiel das Lehrbuch der Theoretischen Physik [skript:landaulifschutz1] von Landau und Lifschitz.

Die Lie-Algebren sind vollständig klassifiziert worden, es gibt keine nicht trivialen zweidimensionalen Lie-Algebren. Unser dreidimensionaler Raum ist also auch in dieser Hinsicht speziell: es ist der kleinste Vektorraum, in dem eine nichttriviale Lie-Algebra-Struktur möglich ist. \circ

Beispiel. Die Gruppe $SU(2)$ hat als infinitesimale Erzeugende die antihermiteschen Matrizen, also Matrizen mit der Eigenschaft

$$A^* = -A, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & id \end{pmatrix}.$$

Darin wurde aber die Bedingung noch nicht abgebildet, dass Matrizen in $SU(2)$ die Determinante 1 haben müssen, wir haben bis jetzt nur Unitarität verwendet. Wir müssen also noch verlangen,

dass in erster Näherung $\det(E + tA) = 0$ ist. Aus Formel (A.7) schliessen wir, dass die Spur $\text{tr } A$ verschwindet, oder dass $a = -d$:

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = -A \wedge \text{tr } A = 0\} \quad (\text{A.9})$$

Matrizen in $\mathfrak{su}(2)$ haben also die Form

$$\begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & -ia \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (\text{A.10})$$

Die Menge $\mathfrak{su}(2)$ ist also eine dreidimensionale Lie-Algebra. Als Basis von $\mathfrak{su}(2)$ können die Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

verwendet werden. Die Matrix I kennen wir schon von der Matrixdarstellung der komplexen Zahlen in Abschnitt A.1.3. Die Matrizen I , J und K haben die folgenden algebraischen Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} I^2 = -E & IJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = K & JI = -K \\ J^2 = -E & JK = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I & KJ = -I \\ K^2 = -E & KI = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = J & IK = -J \end{array}$$

Dies ist die Algebra der Quaternionen. ○

Eigentlich hätten wir die Bedingung, dass die Spur verschwinden muss, schon bei den orthogonalen Matrizen fordern müssen. Doch antisymmetrische Matrizen haben 0 auf der Diagonalen, also haben antisymmetrische Matrizen immer Spur 0, die Bedingung ist also automatisch erfüllt. Antihermitesche Matrizen haben jedoch nicht nur 0 auf der Diagonalen, sondern rein imaginäre Zahlen.

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie

- a) $(18 + 48i)(20 + 14i)$
- b) $(1 + 2i)/(3 + i)$
- c) $(0.6 + 0.8i)^{47}$

Lösung. a) $(18 + 48i)(20 + 14i) = 18 \cdot 20 + (48 \cdot 20 + 18 \cdot 14)i - 48 \cdot 14 = -312 + 1212i$

b) Wir erweitern mit $\overline{3 + i} = 3 - i$

$$\frac{1 + 2i}{3 + i} \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{3 + 2 + 6i - i}{9 + 1} = 0.5 + 0.5i.$$

- c) Wir schreiben $0.6+0.8i$ in Polardarstellung. Dabei stellen wir fest, dass der Betrag $|0.6+0.8i| = 1$ ist. Das Argument ist

$$0.6 + 0.8i = e^{i\varphi}, \quad \text{mit } \varphi = \arctan \frac{4}{3} = 53.13010^\circ.$$

Die 47te Potenz ist dann

$$(0.6 + 0.8i)^{47} = e^{i47\varphi} = \cos 47\varphi + i \sin 47\varphi = 0.92129 - i0.38889.$$

○

2. Finden Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir müssen das charakteristische Polynom und seine Nullstellen berechnen

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \quad \lambda_{\pm} = \pm 1$$

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \quad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Da A eine hermitesche Matrix ist, sind die Eigenwerte reell, und wir können die Eigenvektoren sofort bestimmen:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Für die Eigenvektoren von B ist es nützlich, sich der Regeln von Vieta zu erinnern, insbesondere der Tatsache, dass $\lambda_2\lambda_3 = 1$, oder $1/\lambda_2 = \lambda_3$. Ausserdem gilt $\lambda_3 = 1$, oder $\lambda_3^2 = 1/\lambda_3 = \lambda_2$. Wegen $\lambda^3 = 1$ folgt auch $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Damit können wir ausrechnen

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & 1 & -\lambda_3^2 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_2^2 \\ 0 & 1 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \\
 & & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ausgeschrieben sind die Eigenvektoren von B

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

○

3. Drücken Sie $\cos^3 \varphi$ durch Kosinuswerte von φ und seinen Vielfachen aus.

Lösung. Wir berechnen die dritte Potenz von $z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ auf zwei verschiedene Arten:

$$\begin{aligned}
 z^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \\
 z^3 &= e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi
 \end{aligned}$$

Die Real- und Imaginärteile müssen übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi &= \cos 3\varphi & 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi &= \sin 3\varphi \\
 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) &= \cos 3\varphi & 3(1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \sin^3 \varphi &= \sin 3\varphi \\
 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 3 \cos^3 \varphi &= \cos 3\varphi & 3 \sin \varphi - \sin^3 \varphi - \sin^3 \varphi &= \sin 3\varphi \\
 4 \cos^3 \varphi &= \cos 3\varphi + 3 \cos \varphi & 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi &= \sin 3\varphi \\
 \cos^3 \varphi &= \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi & \sin^3 \varphi &= \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi
 \end{aligned}$$

○

4. Für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$e_k(x) = e^{ikx}.$$

Berechnen Sie (e_k, e_l) für das Skalarprodukt von Vektoren definiert durch

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) g(x) dx.$$

Lösung.

$$(e_k, e_l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{e}_k(x) e_l(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)x} dx$$

Für $k = l$ wird der Integrand konstant:

$$(e_k, e_l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Für $k \neq l$ kann man eine Stammfunktion angeben

$$(e_k, e_l) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(l-k)} e^{i(l-k)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(l-k)} (e^{i(l-k)\pi} - e^{-i(l-k)\pi}) = 0.$$

Die Funktionen e_k sind also orthonormiert im Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi])$. ○

5. Seien A und B $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie:

- a) Wenn A und B symmetrisch sind, dann ist der Kommutator antisymmetrisch.
- b) Wenn A und B hermitesch sind, dann ist $i[A, B]$ hermitesch.
- c) Wenn A und B hermitesch sind, dann ist $\{A, B\}$ auch hermitesch.

Lösung. a) $[A, B]^t = (AB - BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -[A, B]$.

b) $(i[A, B])^* = -i(AB - BA)^* = -i(B^* A^* - A^* B^*) = -i(BA - AB) = i[A, B]$

c) $(\{A, B\})^* = (AB + BA)^* = B^* A^* + A^* B^* = BA + AB = AB + BA = \{A, B\}$ ○

6. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 + 32 = 0.$$

Lösung. Wir suchen alle komplexen Zahlen in der Form $z = r e^{i\varphi}$, es muss gelten

$$z^5 = r^5 e^{5i\varphi} = -32$$

$$r = 2 \quad \text{und} \quad e^{5i\varphi} = -1$$

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = -1$$

$$\sin 5\varphi = 0$$

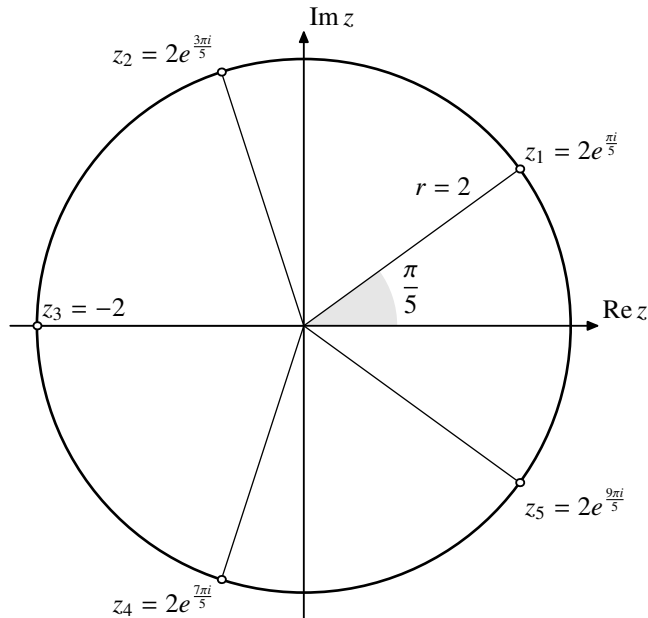
$$\cos 5\varphi = -1$$

Die letzte Gleichung besagt, dass 5φ ein ungerades Vielfaches von π sein muss. Die zweitletzte Gleichung ist schwächer, sie verlangt nur, dass 5φ ein Vielfaches von π sein muss, sie ist also auf jeden Fall erfüllt, wenn die letzte erfüllt ist.

$$5\varphi = (2k+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{5}$$

φ muss also ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ sein:

$$\varphi \in \left\{ e^{i\varphi} \mid \varphi = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{5\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5} \right\}$$

Abbildung A.2: Lösungen der Gleichung $z^5 + 32 = 0$

In der komplexen Ebene bilden die möglichen φ ein regelmäßiges Fünfeck (Abbildung A.2). Da das Fünfeck mit Zirkel und Linear konstruierbar ist, kann man einen Wurzel­ausdruck für Werte der trigonometrischen Funktionen finden, es gilt

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

(siehe auch [skript:pentagon]). Daraus kann man jetzt auch die Winkelfunktionen für die mehrfachen Winkel berechnen:

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{5} &= -\cos \frac{2\pi}{5} = -2 \cos^2 \frac{\pi}{5} + 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{5} &= \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Die übrigen Punkte des Fünfecks kann man durch Symmetriebetrachtungen gewinnen. Die gesuchten Lösungen sind also

$$z \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad -2, \right. \\ \left. \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right\}.$$

○

Teil II

Anwendungen und Weiterführende Themen

Übersicht

Im zweiten Teil kommen die Teilnehmer des Seminars selbst zu Wort. Die im ersten Teil dargelegten mathematischen Methoden und grundlegenden Modelle werden dabei verfeinert, verallgemeinert und auch numerisch überprüft.

Kapitel 10

Autotune

Cédric Renda

10.1 Abschnitt

10.2 Schlussfolgerung

Kapitel 11

Wavelet-Deconvolution

Manuel Tischhauser

11.1 Abschnitt

11.2 Schlussfolgerung

Kapitel 12

FPGA Implementation der schnellen Wavelet-Transformation

Jonas Gründler und Nicolas Tobler

12.1 Abschnitt

12.2 Schlussfolgerung

Kapitel 13

Audio-Kompression mit Daubechies Wavelets

Julian Bärtschi

13.1 Abschnitt

13.2 Schlussfolgerung

Kapitel 14

Gabor-Wavelets und visuelle Wahrnehmung

Raphael Unterer

14.1 Abschnitt

14.2 Schlussfolgerung

Kapitel 15

Komplexe Morlet Wavelets und CWT

Roy Seitz

15.1 Abschnitt

15.2 Schlussfolgerung

Kapitel 16

2D Wavelets und Oberflächen

Raphel Nestler

16.1 Abschnitt

16.2 Schlussfolgerung

Kapitel 17

Signalanalyse von UHF Teilentladungssignalen im Zeitbereich

Kris Wyss

17.1 Gasisolierte Schaltanlagen

Gasisolierte Schaltanlagen (GIS) dienen der elektrischen Energieverteilung, dem Schutz der Komponenten und ermöglichen eine sichere Wartung des Energieübertragungsnetzes. Als Isoliergas wird Schwefelhexafluorid (SF_6) eingesetzt. SF_6 hat bei Atmosphärendruck eine etwa drei mal so grosse dielektrische Festigkeit (Spannungs-Isolationsvermögen) wie Luft. Es besitzt auch um den Faktor 3 bis 4 mal bessere Lichtbogenlöseingenschaft als Luft. Diese Eigenschaften führen zu einer erheblichen Platzeinsparung gegenüber einer luftisolierten Schaltanlage (AIS) [**buch:ABB**]. Deshalb und wegen einigen anderen Gründen, aufgezeigt in [**buch:GIS/AIS**], hat sich der Einsatz von GIS überall dort durchgesetzt wo Boden teuer ist. Zum Beispiel in urbanen Gebieten. Aber auch bei luftisolierten Schaltanlagen ab 72.5 kV sind die Leistungsschalter mit SF_6 befüllt. Bei Leistungsschaltern dient das SF_6 als Löschgas des Lichtbogens, welcher bis zu mehreren tausend Ampere trägt, wenn ein Teil des Übertragungsnetzes von der Last freigeschaltet wird [**buch:ABB**].

Bei der Quantifizierung der Qualität einer GIS spielt der Begriff Teilentladung (TE) eine wichtige Rolle. Wenn das E-Feld örtlich über die dielektrische Festigkeit steigt entstehen elektrische Entladungen, welche nur ein Teil der Isolationsstrecke überbrücken und nicht zu einem kompletten Durchschlag führen, daher die Namensgebung Teilentladung [**buch:Kuchler**]. Teilentladung im Isolierstoff lässt das Isoliermedium schneller altern. Dies kann zum dielektrischen Durchschlag führen welcher einen Totalausfall der Anlage zur Folge hat. Aufgrund dessen ist TE ein wichtiges Qualitätsmerkmal bei Hochspannungskomponenten.

Tritt Teilentladung auf werden verschiedene physikalische Prozesse initiiert. Die Entladung hat einen Strompuls zur Folge. Wegen dem Lichtbogen wird eine ultrahochfrequente (UHF) elektromagnetische Welle emittiert. Die schnellste gemessene Anstiegszeit des Strompulses in SF_6 liegt bei

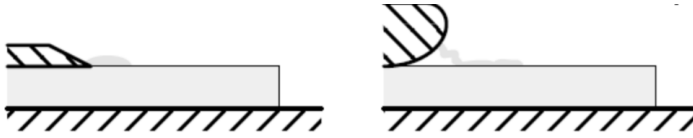


Abbildung 17.1: Zwei Anordnungen von Oberflächenentladungen [buch:Kuchler]

24ps. Dies entspricht einem Frequenzband hoch bis zu 14 GHz [skript:Judd24ps]. Aufgrund der schnellen Erhitzung des Gases rund um den Lichtbogen wird danach eine Schallwelle abgestrahlt. Ebenfalls durch die grosse Erhitzung wird das Isoliergas SF_6 zersetzt. Somit kann TE chemisch, akustisch oder elektromagnetisch gemessen und lokalisiert werden [skript:StatusReviewPDMeasurement]. In dieser Arbeit wird auf die Analyse der UHF TE-Signale eingegangen. Es wird versucht, mittels dem Signalanalyseverfahren kontinuierliche Wavelettransformation (CWT), fehlerspezifische Charakteristiken im Zeitsignal der elektromagnetischen Welle auszumachen.

17.2 Fehlerarten und Analyse in GIS

TE wird in zwei Grundkategorien unterteilt [buch:Kuchler], die Innere- und Äussere-TE. Die Erstere ist dadurch charakterisiert dass sich die TE-Quelle im Innern eines festen oder flüssigen Isolierstoffes befindet. Spezifiziert auf GIS gehören zu Kategorie der Inneren-TE Lunker, Risse/Spalten in Isolierstoffe und Delamination zwischen Isolierschichten.

Entladungen an äusseren Leiterstrukturen wird als Äussere-TE oder Korona bezeichnet. In GIS kommen folgende Fehler aus dieser Kategorie vor, Oberflächenentladung und Koronaentladung. Oberflächenentladungen treten bei nicht Einhalten der Herstellungstoleranzen zwischen leitendem und isolierendem Material auf. Eine weitere Quelle sind potenzialfrei leitende Partikel auf festen Isolierstoffen. Spitzen und scharfe Kanten an spannungsführenden- und an leitfähigen-Teilen auf Erdpotenzial führen zu Koronaentladung [buch:Kuchler, skript:ÄussereTE, skript:InnereTE]. In dieser Arbeit werden UHF TE-Signale von Oberflächenentladung und Hohlraumentladungen analysiert. Im weiteren Abschnitt werfen wir einen genaueren physikalischen Blick, auf die zwei Entladungsarten und die herkömmliche Fehleranalyse.

17.2.1 Oberflächenentladung

Diese Entladungsart entsteht, wenn an Oberflächen von Festisolierstoffen hohe elektrische Feldstärken auftreten. Dies kann konstruktionsbedingt oder Aufgrund von unsauberer Montage entstehen. Wenn sich ein Braue oberhalb eines Festisolierstoffes befindet oder ein loser metallischer Partikel auf einem Isolierstoff ist, dann entladen sich die Stromimpulse über das Isoliermaterial. In Abbildung 17.1 ist schön ersichtlich dass die Art der TE einer Koronaentladung entspricht. Jedoch verteilen sich die Elektronen nicht im Gasraum sondern sie gleiten über die Isolierfläche (helle Fläche). Das Ersatzschaltbild (ESB) 17.2 besteht aus einer Kapazität C parallel zu einer Funkenstrecke F und einem Widerstand R in Serie. Der Pfeil steht für die Spitze an welcher ein inhomogenes elektrisches Feld ansteht. Wenn das inhomogene elektrische Feld über der Kapazität C einen kritischen Wert überschreitet entlädt sich die gespeicherte Energie über die Funkenstrecke F gegen Erde. Dies kann bei Wechselspannung 50Hz mehrmals pro Halbwelle geschehen [skript:ÄussereTE].

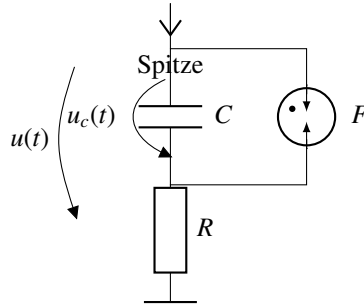


Abbildung 17.2: ESB: Koronaentladung

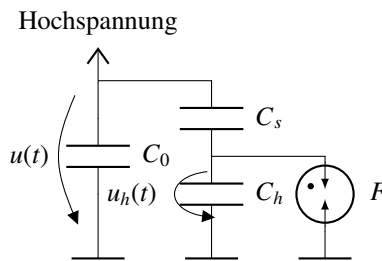


Abbildung 17.3: ESB: Hohlraumentladung

17.2.2 Hohlraumentladung

Die häufigste Form von Hohlraumentladungen in GIS ist aufgrund von Hohlräumen/Lunkern im Isolierstoff. Hohlräume entstehen beim Herstellungsprozess der Isolatoren. Während dem Abkühlprozess kann es zu Diffusionsvorgängen in der Isoliermasse kommen, dadurch können sich gasgefüllte Hohlräume im Isolierstoff ausbilden. Oft geht man im Model von runden, luftgefüllten Hohlräumen mit niedriger elektrischer Festigkeit aus. Jedoch sind in der Praxis die genauen geometrischen und dielektrischen Eigenschaften nicht bekannt da die Fehlstelle nicht zugänglich ist. In Abbildung 17.4 sind diverse Hohlräume 1–3 illustriert. Unter der Nummer 1 sind klassische runde oder ellipsenförmige Lunker ohne Elektrodenkontakt abgebildet. Die beiden anderen Hohlräume haben Elektrodenkontakt und die Nummer 3 stellt eine Ablösung von der Leitfähigen Elektroden-schicht dar [buch:Kuchler, skript:InnereTE].

Elektrisch wird die Fehlerart mit dem Ersatzschaltbild gemäss 17.3 modelliert. Die Kapazität C_0 stellt dabei die Gesamtkapazität über die Isolierstrecke dar und C_h ist die Hohlraumkapazität welche die Fehlerstelle abbildet. Die Spannung $u_h(t)$ folgt der äusseren Spannung $u(t)$ bis die Zündspannung erreicht ist. Bei dieser Spannung hat die Feldstärke über der Hohlraumkapazität einen kritischen Wert überschritten und die Energie, bei vorhanden sein eines Startelektrons, entlädt sich über die Funkenstrecke F . Die Spannung über $u - h(t)$ sinkt bis zur Löschespannung, danach kann sich der selbe Vorgang mehrere Male pro Halbwelle wiederholen. Über die Serienkapazität C_s wird die Hohlraumkapazität C_h via einen kapazitiven Verschiebestrom nachgeladen [buch:Kuchler].

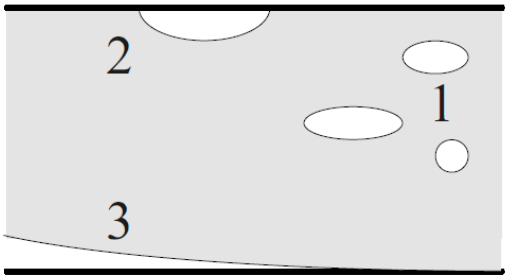


Abbildung 17.4: Bsp. von geometrisch verschiedenen Hohlräume mit und ohne Elektrodenkontakt
[buch:Kuchler]

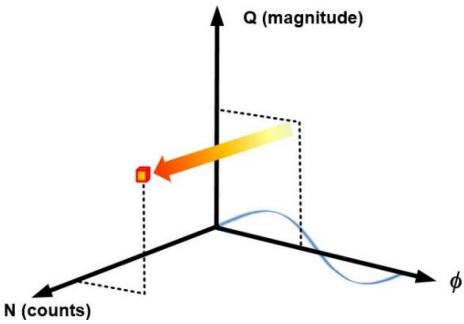


Abbildung 17.5: PRPD Algorithums
[report:ABBOOnSite]

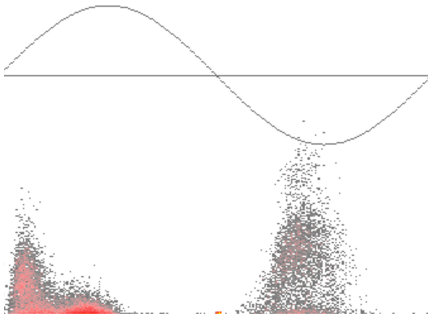


Abbildung 17.6: Typisches PRPD-Muster

17.2.3 Herkömmliche Fehleranalyse

Um die fehlerspezifischen physikalisch und elektrotechnischen Phänomene bildlich darstellen zu können muss ein Bezug hergestellt werden zwischen dem Entladungszeitpunkt und dem Phasenwinkel der Hochspannung, welche am Prüfling anliegt. Mit diesen Daten wird ein phasenaufgelöstes Teilentladungsmuster (PRPD: Phase-resolved partial discharge) erstellt. In dem Bild wird die Korrelation zwischen der Phasenlage ϕ , Amplitudenhöhe Q und der Anzahl Entladungen N gemacht [buch:UHFSignale]. In Abbildung 17.5 sind diese Zusammenhänge aufgezeigt und in Abbildung 17.6 ist ein Beispiel, dargestellt wie das Muster einer typischen Oberflächenentladung aussieht. Im oberen Bereich ist die Phasenlage der angelegten Spannung aufgezeigt und im unteren Bildteil sind die Entladungen gemäss dem in Abbildung 17.5 gezeigten Algorithmus ersichtlich. Die Muster werden über den Zeitraum von einer bis mehreren Minuten aufgezeichnet.

17.3 Messpfad

In diesem Bericht wird untersucht, ob mit der kontinuierlichen Wavelet Transformation fehlerspezifische Merkmale im Zeitsignal auszumachen sind. Dafür ist es wichtig das wir den Messpfad von der Fehlerursache bis zum Oszilloskop kennen. Die untersuchten Signale wurden bei einer Vor-Ort

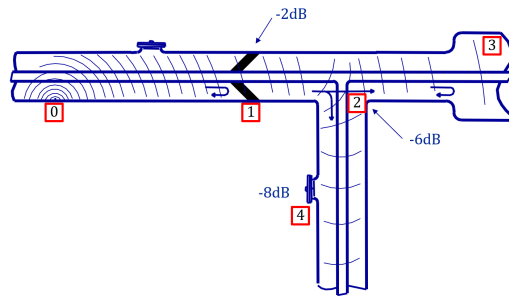


Abbildung 17.7: Unstetigkeitsstellen GIS [report:PDBasicABB]

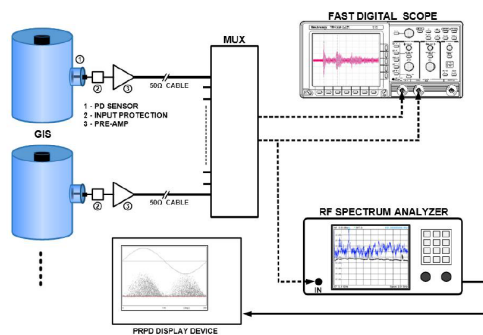


Abbildung 17.8: Messkette [report:ABBOnSite]

Abklärung, an einer Anlage die im Betrieb war, aufgezeichnet. Im ersten Abschnitt wird auf den Signalpfad innerhalb der GIS eingegangen und in einem zweiten auf die Messkette ausserhalb.

Bei der Fehlstelle [0] wird Aufgrund der schnellen Entladung eine elektromagnetische Welle vom Strompuls abgestrahlt. Die Welle besitzt Frequenzanteile bis in den zweistelligen GHz Bereich. In erster Annäherung wird die GIS oft als Koaxialkabel modelliert. Diese Vereinfachung ist jedoch nicht ausreichend da Reflexionsphänomene auftreten. Aufgrund von diversen Unstetigkeitsstellen in einer GIS, wie z.B Stützisolatoren [1], Verzweigungen [2], Änderung der Leiterdurchmesser [3], schaltende Elemente und die Enden der Anordnung, ändert der Wellenwiderstand und es kommt zu Reflexionen der Welle. Durch diese entstehen stehende Wellen in der GIS und die Signalleistung wird gedämpft. In Abbildung 17.7 sind einige approximative Dämpfungswerte angezeigt [report:PDBasicABB]. Eine GIS im Feld hat an diversen Stellen breitbandige Sensoren [4] die wie Antennen wirken. An diesen kann das Signal aus der GIS gekoppelt werden. [buch:UHFSignale, skript:Judd24ps, buch:Kuchler]

Nach dem Sensor ist ein Hochpassfilter mit der Eckfrequenz 83MHz vorgeschaltet. Dieser dient zum Schutz der dahinterliegenden Messgeräte. Falls es zu einem dielektrischen Durchschlag kommt werden die hochenergetischen Signalanteile gegen Erde abgeleitet. Danach wird das Signal mit 50dB verstärkt. Die 50Ω Signalkabel werden an einen Multiplexer gehenkt. Mit dem kann das Signal auf einem Frequenzanalysator oder Oszilloskop angezeigt werden. Für die untersuchten Daten sind die Zeitsignale mit einem 10GS/s Oszilloskop mit 2GHz Bandbreite aufgezeichnet worden. Die Abtastzeit wurde für alle Signale gleich gewählt und liegt bei 100ps.

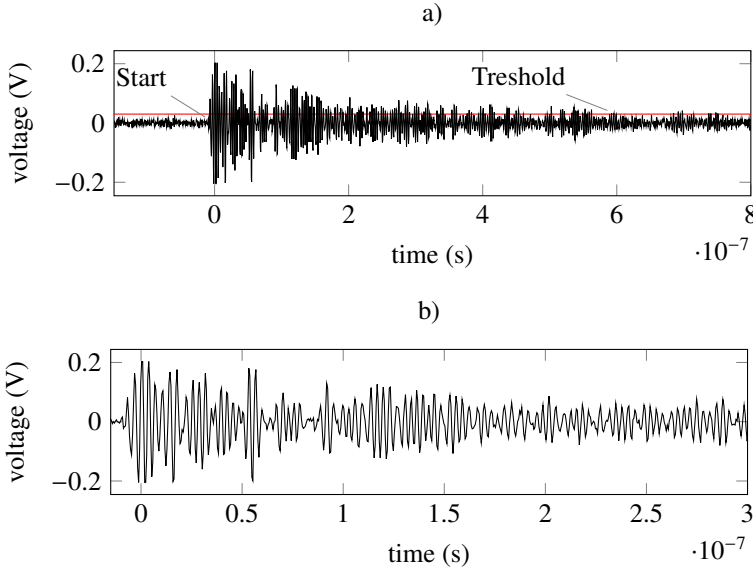


Abbildung 17.9: a) Vor Harmonisierung b) Nach Harmonisierung

17.4 Datenbearbeitung

Die untersuchten Zeitsignale sind während Laufzeitmessungen (TOF: Time of flight) aufgenommen worden. Bei einer TOF Messung sind nur die Anfänge der Signale von Interesse. Dies bedeutet, dass selten die ganze Einhüllende aufgezeichnet wird und oft werden die Analog Digital Wandler (ADC) übersteuert. Somit sind die Signale nicht brauchbar für eine CWT. Es wurden aus ca. 700 Aufzeichnungen vier passende Signale gefunden welche genug lange aufgezeichnet wurden und bei denen die Signalamplituden nicht abgeschnitten sind. Mit Hilfe des Kundenberichtes, welcher die PRPD Muster enthält, und den Handnotizen wo die Zeitstempel und Ortsangaben vermerkt sind, konnten die Zeitsignale den Fehlerquellen zugeordnet werden. Es sind je zwei Exemplare von Hohlraumentladung und Oberflächenentladung.

Damit die Messungen sinnvoll miteinander vergleichbar sind, wurden einige Datenaufbereitungen im Matlabcode implementiert. Dies dient zur Harmonisierung der zu untersuchenden Signale (siehe Abbildung 17.9). Auf diese wird im Folgenden kurz eingegangen.

Durch Transformieren von vielen Signalen hat sich gezeigt, dass der interessante Bereich, wo die CWT relevante Muster hervorbringt, in den ersten 300ns ist. Bei einer Abtastzeit von 100ps entspricht dies 3000 Datenpunkte. Um den Startpunkt des Signals zu extrahieren wurde ein Threshold-level (Schwellenwert) mit folgendem Algorithmus implementiert. Aus den ersten 300 Datenwerte wird der Vektorindex v_{\max} mit dem grössten absoluten Wert ermittelt. Der Thresholdlevel

$$\text{Thresholdlevel} = 3 * v_{\max}^2 \quad (17.1)$$

wird durch Quadrieren von Wert in v_{\max} und Multiplikation mit 3 festgelegt. Der Startpunkt wird ermittelt in dem das erste Vektorelement im Datenvektor $abs(v_d)^2$ gesucht wird welches diesen überschreitet. Dazu wird auch der gesamte Datenvektor quadriert. Mit dem Quadrieren wird ein grösserer Signal-Rausch Abstand (SNR) erzielt.

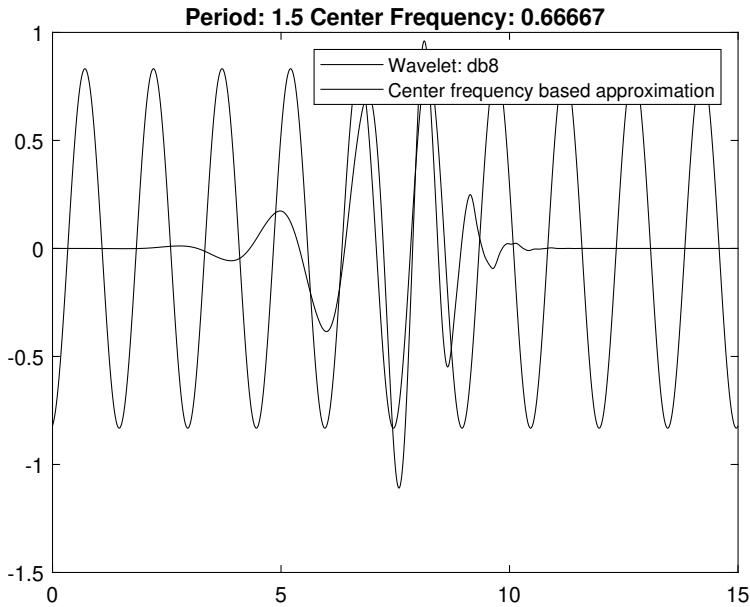


Abbildung 17.10: Mittelfrequenzermittlung db8

Um die CWT Muster aussagekräftiger darzustellen wird auf der y-Achse nicht die Dilatationsskalierungen angezeigt. Stattdessen wird ein Rückschluss auf die Frequenz abgeleitet. Diese darf jedoch nur als Approximation betrachtet werden, da in einer CWT die Frequenzauflösung nicht der Auflösung einer Fourier-Transformation entspricht. Die Frequenzapproximation

$$F_a = \frac{F_c}{a} \quad (17.2)$$

ist definiert durch die Division der Mittelfrequenz F_c und dem Wavlet-Dilatationsfaktor a .

Diese wird durch den höchsten Wert des Skalarproduktes

$$F_c(t/a) = \max_a \langle \Psi(t), \sin(t/a) \rangle \quad (17.3)$$

zwischen dem Wavelet Ψ und dem Sinus berechnet. Wobei der Sinus mit dem Dilatationsfaktor a gestreckt wird. In Abbildung 17.10 ist die Mittenfrequenz von einem Daubechies-Wavelet Nr. 8 (db8) dargestellt. Die Variable a steht für den Dilatationsskalierungsfaktor. Damit wird erzielt das die y-Achse mit der approximierten Frequenz F_a skaliert ist.

17.5 Auswertung kontinuierliche Wavelettransformation

17.6 Schlussfolgerung

Kapitel 18

Analyse von Meteor-Echos

Dominic Hüppi

18.1 Abschnitt

18.2 Schlussfolgerung

Kapitel 19

Wetter-Wavelet-Transformation

Michael Schmid

19.1 Abschnitt

19.2 Schlussfolgerung

