

AST2000 - Del 1

Modellere en Rakettmotor

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Målet med dette romferdprosjektet er å modellere en rakett som skal skytes opp og landes trygt igjen på en planet i vårt eget solsystem. Vi har laget en forenklet modell av rakettmotoren ved å simulere gasspartikler som befinner seg i en bokse på sidelengder på 10^{-6} m i forbrenningskammeret. I boksen befinner det seg 10^5 hydrogenatomer med en temperatur på 3000K. Vi lager en kvadratisk åpning i boksen der partiklene slipper ut og beregner hvor mange partikler som forsvinner, som er $3.5 * 10^{12}$ H₂ partikler. Endringen i bevegelsesmengde gir raketten kraft til å bevege seg oppover, som er $4.9 * 10^{-16}$ N. Vi bruker dette for å simulere raketttoppskytingen, og ser at det tar mellom 6-7 minutter før raketten når terminalhastighet.

I. INTRODUKSJON

I første delen av prosjektet har vi modellert en rakettmotor ved å se på hvordan gasspartiklene i forbrenningskammeret oppfører seg, slik at vi kan studere hvordan motoren presterer. Vi bruker disse resultatene til å kunne simulere en oppskyting av raketten ut i verdensrommet. Prosjektet vårt vil skje i et simulert univers, hentet fra ast2000tools-pakken. For at raketten skal unnslippe gravitasjonsfeltet til hjemplaneten må den akselereres til unnslipshastigheten. Da trenger vi å vite hvor mye drivstoff vi trenger og hvor stor motor som er nødvendig. Vi bruker en forenklet modell av en rakettmotor bestående av tre hoveddeler. Øverst i raketten vår har vi en satellitt, under er det en drivstofftank der alt av drivstoff oppbevares og nederst i raketten finner vi et forbrenningskammer med varm hydrogengass. Der kan vi studere hvordan gasspartiklene oppfører seg ved ulike temperaturer. Avhengig av temperaturen kommer gassen til å bevege seg med forskjellige hastigheter og kolidere med veggene med ulik kraft. En åpning nederst i forbrenningskammeret vil åpnes slik at partiklene kan unnslippe og rakettmotoren blir drevet frem av bevegelsesmengden til partiklene som unnslipper. Raketten vil så akselerere ut mot verdensrommet! Kapasiteten til datamaskinene er ikke kraftige nok til å nøyaktig simulere alle partiklene i gassen. Når vi modellerer rakettmotoren gjør vi derfor en del forenklinger for at programmet vårt skal fungere. For å simulere partikelbevegelse i forbrenningskammeret bruker vi numerisk integrasjon for å modellere enhver partikkels bevegelse. Vi ser på en liten del av motoren, med et gitt antall partikler, for å finne effekten til motoren. Resultatene vi får fra modelleringen av rakettmotoren kan vi bruke til å skyte opp raketten ut i verdensrommet og til en fremmed planet.

II. METODE

Vi starter med å se på hvordan vi modellerer bevegelsene til gassmolekylene i motoren på raketten. Vi simulerer at H₂-gasspartiklene er i en kubisk boks, og lar sidelengdene på boksen være av $L = 10^{-6}$ m, vi

har $N = 10^5$ hydrogenmolekyler med en temperatur på $T = 3000$ K. Vi betrakter gassen vår som ideell, altså ser vi på partiklene som punktpartikler (de har ingen utstrekning) og antar at det ikke er mulig med partikkel-partikkel kollisjon. Når partiklene kolliderer med veggene i boksen vil kollisjonene være helt elastiske. Den kinetiske energien er altså bevart og vi antar videre at gravitasjonskraften er neglisjerbar. Temperaturen og tettheten til gassen varierer veldig på mikroskopisk nivå, men for å forenkle simuleringen og beregningene våre ser vi på det i en makroskopisk skala og sier at gassen er ideell. For å oppnå dette må temperaturen i Maxwell-Boltzmannfordelingen og det totale antall partikler i boksen holdes konstant. Vi kan videre se på hvordan vi bruker Gaussisk statistikk til å studere hastigheten til partiklene i gassen vår. Hvert molekyl i gassen vår får en tilfeldig starthastighet som følger den Gaussiske sannsynlighetsfordeling gitt på formen:

$$P(\mu; \sigma; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$P(x)$ kaller vi sannsynlighetstettheten. Middelverdien μ er gjennomsnittet til datasettet vi vil studere, i dette tilfelle satt til 0. Standardavviket σ er avviket fra middelverdien. I tillegg har alle molekylene en tilfeldig startposisjon etter lineær distribusjon, ergo er sannsynligheten for å finne en gasspartikkelt på ett sted i boksen like stor for alle partiklene.

Vi skal se litt nærmere på standardavviket σ som er gitt på formen:

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Der $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmann konstanten, T er temperaturen og m er masse til hydrogenmolekylet. For å ha oversikt over dataen er det nyttig å vite noe om spredningen av verdiene. Standardavviket er et mål for spredningen av verdiene i dataene, som gir oss verdiens gjennomsnittlige avstand fra gjennomsnittet. Det er altså et forventet avvik fra gjennomsnittet. I vårt tilfelle

er standardavviket på:

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 3000}{3.35 \cdot 10^{-27}}} \approx 3515$$

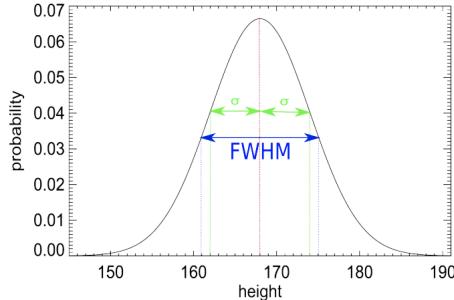


Figure 1. Figur av den gaussiske sannsynlighetsfordelingen, her av gjennomsnittshøyden til norske kvinner som et eksempel. Hentet fra Hansen, F. K., Forelesningsnotater 1A i AST2000.

Vi regner ut den gaussiske sannsynlighetsfordelingen ved å integrerer over det bestemte intervallet fra a til b . Vi får sannsynligheten for at en tilfeldig partikkell x finnes i intervallet $[a, b]$. Vi tester at funksjonen for normalverdien gir oss riktige verdier ved å sjekke sannsynligheten for at et tilfeldig tall x ligger innenfor et intervall på en, to eller tre standardavvik på begge sider. Det er 68% sannsynlig for x ligger innenfor et standardavvik fra gjennomsnittet, det er 95% sannsynlig for at x ligger innenfor to standardavvik og 99.7% sannsynlig for at x ligger innenfor tre standardavvik fra gjennomsnittet. Vi kaller dette for 68-95-99.7-regelen. Det er videre en nærmest sammenheng mellom standardavviket μ og FWHM, den fulle bredden til kurven ved halve maksimum.

$$\sigma = \frac{FWHM}{2\sqrt{2\ln 2}} \quad (1)$$

Utledning av (1) finnes i A1.

Siden vi bruker en ideell gass antas det at hastighet-skkomponentene til gasspartiklene er tilfeldig etter Maxwell-Boltzmann sannsynlighetsfordelingen. Formelen for Maxwell-Boltzmann-fordelingen kan skrives som:

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{(3/2)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{mv^2}{kT} \right)}$$

Hvor k = Boltzmanns konstant som gir sannsynligheten for at en gasspartikk med masse m i en gass med en gitt temperatur T har hastighetsvektor \vec{v} . Vi har til nå sett på hastighet-skkomponentene til gasspartiklene og at de er uavhengige og gaussisk distribuert. Vi kan også bruke Maxwell-Boltzmanns fordelingsfunksjon for absolutthastighet for å finne den absolute verdien av partikkelen hastighetene, heller enn komponentene. Maxwell-Boltzmanns fordelingsfunksjon for absolutthastighet er gitt ved:

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} 4\pi v^2$$

Det siste ledet $4\pi v^2$ gjør at det ikke er en normaldistribusjon, men likevel en sannsynlighetsfordeling.

Fra Maxwell-Boltzmann-fordelingsfunksjonen kan vi utelede flere viktige formler for modelleringen vår. Gjennomsnittshastigheten til et molekyl i en gass er gitt ved:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v P(v) dv \quad (2)$$

Utledning av (2) finnes i A2.

Den ideelle gassloven gitt ved:

$$P = nkT \quad (3)$$

Utledning av (3) finnes i A3.

Sist men ikke minst gjennomsnittsenergien til en gass gitt ved:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (4)$$

Der K er kinetisk energi, k er Boltzmann konstanten og T temperaturen. Utledning av (4) finnes i A4.

Vi vet at rakettens kraft avhenger av hastigheten til gasspartiklene som igjen avhenger av temperatur, masse, trykk og tetthet. Høye temperaturer betyr mer kinetisk energi til gasspartiklene og dermed høyere hastighet. Ved en gitt temperatur vil gasspartiklene bevege seg saktere enn lette gasspartikler. Tyngre partikler må i gjennomsnitt bevege seg saktere etter formelen for kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$, der K er den samme må v bli mindre hvis m blir større. Vi ser at det først og fremst er temperaturen og masse som spiller den viktigste rollen for gasspartiklenes hastighet og dermed rakettmotorens kraft. Fra mekanikken husker vi at bevegelsesmengden er gitt ved $\vec{p} = m\vec{v}$. Siden kollisjonen mellom partikkelen og veggene er elastisk, vil hastigheten partikkelen hadde før den traff veggene være lik hastigheten partikkelen spretter bort fra veggene fra med motsatt rettet. Altså må hastighet-skkomponenten som partikkelen kolliderer med veggene med skifte fortegn (multipliseres med -1). Gasspartiklene er i konstant bevegelse og kolliderer frekvent med veggene. Hvor ofte kollisjonene skjer, øker med molekylhastigheten og antall molekyler per volumenhets. Det er denne idéen vi bruker for å modellere rakettmotoren vår!

Vi slipper partikler ut av åpningen i boksen med en gitt fart fra bevegelsesmengden, og vi vet fra Newtons tredje lov at det vil være en like stor men motsatt rettet kraft. Dermed vil kraften fra de unnslippende partiklene dytte på raketten med en tilsvarende kraft, slik at denne endringen i bevegelsesmengde vil gi kraft til motoren for å skyte raketten oppover og ut i verdensrommet.

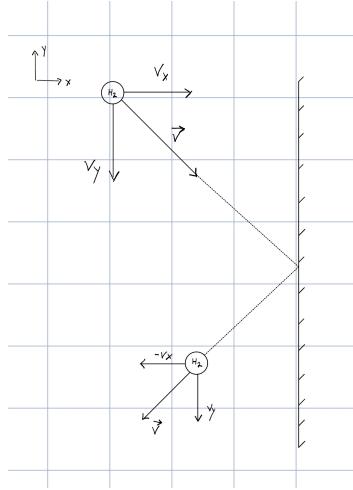


Figure 2. Illustrasjon av partikkell-kollisjonene mot veggene i boksen.

Vi lager et kvadratisk hull i boksen med et areal på $0.25L^2$. Partiklene i kammeret må holdes kostant, og vi implementerer påfyllingen til brennkammeret ved å sette inn en ny partikel når en forlater. Siden vi har initialverdiene kan vi beregne løsningene til differensiallikningen numerisk med Eulers metode. Vi kan bruke Eulers metode for å oppdatere posisjonen og farten til hver partikel. Eulers metode enkelt forklart er at vi ønsker å finne $\Delta\vec{v}$, og vi vet at akselerasjonen er $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Dermed kan vi skrive $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$. Når vi har oppdatert farten kan vi oppdatere posisjonen til partikkelen. Har at $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, slik at vi får $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$. Vi bruker Eulers metode for å sjekke posisjonen til hver partikel om den er inne eller utefor boksen, hvis den er utenfor legger vi til en ny partikel på lik måte som med de første partiklene, med tilfeldig posisjon og hastighet etter den Gaussiske distribusjonen. Posisjon og farten til de andre partiklene forblir uendret, og ingen partikler som har sluppet ut kan komme inn i boksen igjen. Det er viktig at vi etterfyller et riktig antall partikler, og at temperatur og trykk holdes kontant for å få en jevn oppdrift. Vi ser på antall partikler som har rømt ut av kammeret og hvor stort momentumet det er fra de rømte partiklene. Basert på disse målingene kan vi utlede hvor mye drivstoff rakettmotoren forbruker(kg/s) og framdriftskraften til raketten (N).

For å finne ut hvordan raketten vil bevege seg oppover trenger vi å se på Newtons lover. Newtons andre lov forteller oss at kraften F er endringen i bevegelsesmengden p over tid, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Bevegelsesmengden i raketten er bevart, altså må bevegelsesmengden til raketten før en partikel har forlatt raketten være den samme som bevegelsesmengden til raketten etter en partikel har sluppet ut av boksen. Formelen for bevegelsesmengde er gitt ved $\vec{p} = m\vec{v}$ og bevegelsesmengden før skal være lik bevegelsesmengden etter unnslipingen av partiklene. Ved å slippe ut drivgass virker det en kraft

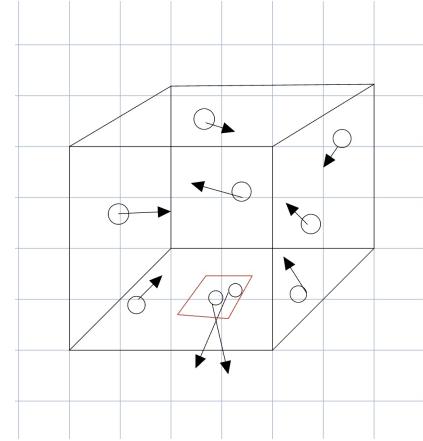


Figure 3. Illustrasjon av gasspartiklene i boksen med et kvadratisk hull i bunnen. Partiklene kolliderer med veggene i boksen og slipper etterhvert ut gjennom hullet. Når en partikel slippes ut oppstår det en ny partikel i boksen.

som er motsatt rettet på raketten og som vil få den til å akselerere. Vi skal se at denne kraften må være større enn gravitasjonskraften fra planeten for å få raketten til å løpe. Vi finner ut hvor mange partikler som forlater boksen per tidsenhet i z-retningen, og endring i bevegelsesmengden vil ved Newtons andre lov gi oss kraften som virker på raketten.

Målet vårt med å skyte opp raketten er å sende den ut i bane til en annen planet i verdensrommet, og for å oppnå dette må raketten unnslippe planet. Unnslipshastigheten er minimumshastigheten raketten trenger for å unnslippe gravitasjonsfeltet til planeten. Vi trenger at raketten får større eller lik kinetisk energi som gravitasjonskraften fra planeten. Planeter med stor masse M er vanskeligere å unnslippe enn planeter med mindre masse, for med større masse følger en sterkere gravitasjonskraft. Vi kan utlede en formel for unnslipshastigheten:

$$\begin{aligned} E_k &\geq E_p \\ \frac{1}{2}mv^2 &\geq G\frac{mM}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \end{aligned}$$

Der r er radiusen til planeten, G er gravitasjonskonstanten og M legemets masse. Vi vil at raketten skal oppnå unnslipshastigheten og at oppskytingen skal ta mellom 5-20 minutter. I beregningen vår tar vi i betraktning at vi skal skyte opp raketten fra en planet som roterer, og vi må ta hensyn til at raketten har en hastighet avhengig av radien og rotasjonshastigheten til planeten, i tillegg til hvor på planeten vi skyter den opp fra. Når vi skyter opp en raket får raketten et "dytt" eller litt ekstra fart fra jordrotasjonen, og jo nærmere ekuator utskytingsstedet befinner seg, jo kraftigere "dytt"

får raketten. Det er derfor gunstig å skyte opp raketten på et punkt ved ekvator, og det er det vi gjør i simuleringen. Når vi skyter raketten opp vil den starte vertikalt og fly rett oppover, det er optimalt fordi den da blir utsatt for minst mulig luftmotstand. Etterhvert vil raketten bevege seg sidelengs, men vi forenkler modellen vår og tar ikke med det i betraktingen vår i denne delen. Vi ser også bort fra at raketten mister masse etterhvert som drivstoffet brukes opp. Vi definerer y-aksen til å gå rett oppover radielt fra utskytingsstedet vårt, og x-aksen til å gå langs ekvator. Vi ser på hvor mye masse vi mister, hvor mye oppdrift vi får og hvor langt unna vi er fra planeten vår. Når vi når unnslipphastigheten, ser vi på hvilken posisjon vi er i og hvor lang tid vi har bruktt dit posisjonen i AU, astronomiske enheter.

III. RESULTATER

Vi har laget et program som kan finne sannsynligheten til en funksjon gitt ved:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(\mu, \sigma; x) dx$$

Der P er sannsynligheten for at vi finner x i det gitte intervallet fra $[a, b]$. Vi sjekker at vi får de riktige verdiene ved å teste programmet vårt for integralene

$$P(-1\sigma \leq x - \mu \leq 1\sigma)$$

$$P(-2\sigma \leq x - \mu \leq 2\sigma)$$

$$P(-3\sigma \leq x - \mu \leq 3\sigma)$$

Vi forventet å få 68%, 95% og 99.7% sannsynlig for at x ligger innenfor en, to og tre standardavvik fra gjennomsnittet, som er 68-95-99.7-regelen, som forklart i metode delen. Vi får akkurat disse verdiene og programmet vårt er vellykket.

For å finne den Gaussiske fordelingen av hastighetene til hver av partiklene vi har i boksen vår, kan vi bruke formelene for sannsynlighet gitt ved Maxwell-Boltzmann.

Vi kan også bruke programmet vårt for å sjekke sannsynligheten for at vi har en gitt fart i et intervall, ved å løse integralet:

$$P(a < v < b) = \int_a^b P(v_x) dx$$

Vi plotter v_x for intervallet $v_x \in [-2.5, 2.5] * 104\text{m/s}$.

Det vi finner er sannsynligheten for at vi finner en fart v_x i intervallet vårt, og dersom vi ganger integralet med N får vi et estimat på antall partikler som vil ha en fart innenfor intervallet.

Vi begynner modelleringen av raketten, ved å beskrive forbrenningskammeret vårt. Her vil vi undersøke om

partiklene vi analyserer oppfører seg som forventet. Vi tar utgangspunkt i at vi jobber med en ideell gass med konstant og homogen temperatur. Derved vil hastighetene til partiklene følge en Maxwell-Boltzmann distribusjon, gitt ved illustrasjon Figure 3, der vi har funnet absoluttverdien med hastigheter mellom $[0,3 * 10^4]$ m/s. Vi bruker dette som en modell, som vi ønsker at gassen vår skal følge, ved å analysere absolutt-hastighetene i kammeret vårt kan vi finne denne distribusjonen, gitt ved Figure 4. Her har vi tatt alle hastighetene i gassen vår, funnet absoluttverdien av disse og anvendte formelen for Maxwell-Boltzmann for å se an likheten mellom den teoretiske fordelingen og den vi har i gassen. Vi kan dermed se likheten mellom disse kurvene, og til hvilken grad gassen vår oppfører seg som forventet.

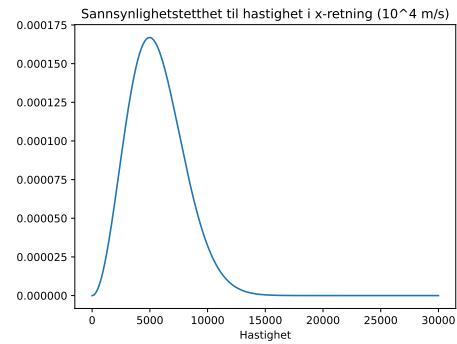


Figure 4. Maxwell-Boltzmann distribusjon

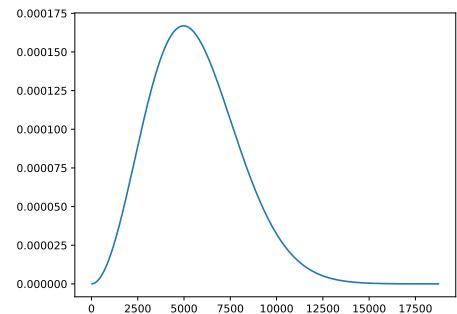


Figure 5. Absolutt-hastighet simulerte partikler

Videre for å introdusere åpningen i rakettmotoren vår, vil vi analysere mengden partikler som forlater raketten, hastigheten deres og hvordan dette påvirker raketten. Dette gir oss et estimat på hvor mye kraft vi kan produsere. Ved å analysere partiklenes kontinuerlige posisjon, kan vi estimere mengden partikler vi slipper ut i løpet av et gitt tidsrom. Vi finner ved temperatur 3000K, med 10^5 partikler, i en boks med lengde 10^{-6} og et utslipps hull med areal $\frac{L^2}{4}$ at det slippes ut $3.5 * 10^{12} \text{ H}_2$

partikler, som produserer $4.9 * 10^{-16} \text{N}$.

Vi bruker disse verdiene til å finne hvor mye drivstoff vi bruker for å tilføye en bestemt bevegelsesmengde til raketten. Og med dette kan vi modellere hvordan raketten akselerer ut av fra planeten. Med alle disse faktorene finner vi ut at det tar omtrent 400s for raketten å nå terminalhastighet.

IV. DISKUSJON

Når vi modellerer denne raketten må ta en del antagelser, og forenkle flere elementer for å kunne få numeriske resultater. Det første vi gjør er å anta en fullstendig homogen gass med lik temperatur gjennom hele boksen, dette kan være noe unøyaktig, men er essensielt for å kunne fullføre modellen. Videre når vi skal skyte opp raketten blir dette enda mer unøyaktig, idet vi slipper ut og ut partikler fra tanken vil dette skape en ulik tetthet av disse partiklene på ulike steder i hver boks. Måten vi simulerer dette forbrenningskammeret kan føre til flere eventuelle feilkilder, kanskje mest grunnleggende er måten vi skalerer denne simulasjonen. Ved å ha ekstremt mange veldig små bokser kan gi andre resultater enn å ha færre større, akkurat hvordan dette vil påvirke systemet er vanskelig å si, men det kan være en ganske klar feilkilde. Videre under simulasjonen av dette forbrenningskammeret bruker vi ulike programmeringsfunksjoner, primært ser vi på hver enkel partikkelen over et tidsintervall og analyserer posisjonen og farten. Dette skaper et problem når vi skal undersøke dersom de har forlatt kammeret gjennom utskytningshullet i boksen. Ved å se på posisjonene til disse partiklene over mange små tidshopp, vil vi få et mindre antall som i teorien ville forlatt kammeret men ikke blir plukket opp av simuleringen, dette kommer av at dersom en partikkelen hopper akkurat over det området vi tester for i programmet vil det bli registrert som at den traff veggen. Dette gir ikke stor effekt når vi studerer hver enkel boks, men når vi skalerer dette, som nevnt tidligere vil det ha noe signifikant påvirkning på ytelsen av raketten.

Under kalkuleringen av raketttoppskytningen, forenkler vi denne prosessen betraktelig ved å ignorere flere påvirkninger, mest essensielt er at vi ser bort ifra luftmotstand, dette ville arbeidet imot hastighetsretningen, som ville redusert ytelsen til raketten.

V. KONKLUSJON

Gjennom prosessen av å modellere og simulerer en raket, dens funksjoner og ulike elementer knyttet til oppskyting av en raket forbi unnslipningshastighet på en generert planet, har vi anvendt ulike metoder for å nøyaktig beskrive de fysiske komponentene som kommer til spill under en slik operasjon. Nøyaktigheten til en slik simulasjon blir begrenset til den grad av forenklinger vi gjør, for å kunne produsere numeriske resultater. Denne

presisjonen blir også redusert gjennom en begrensning i beregningskraft i de ulike programmene vi bruker.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Forelesningsnotater 1A i AST2000.

Appendix A: Utledning

To integrasjonresultater vi bruker:

$$\int_0^\infty xe^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$$

1. Utledning av sammehengen mellom standardavvik og FWHM:

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2} \quad (\text{A1})$$

FWHM eller "Full Width at Half Maximum" er et mål på bredden til kurven ved halve maksimum. Toppunktet til normalkurven er når $x = \mu$. FWHM er altså $\frac{P(\mu)}{2}$, der $P(x)$ er normalfuksjonen.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Vil finne x-verdien der x er på sitt halve maksimum og løser likingen $P(x) = \frac{P(\mu)}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] &= \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 &= \ln \frac{1}{2} \\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 &= -2\ln \frac{1}{2} \\ \frac{x-\mu}{\sigma} &= \pm\sqrt{2\ln 2} \\ x-\mu &= \pm\sqrt{2\ln 2}\sigma \\ x &= \pm\sqrt{2\ln 2}\sigma + \mu \end{aligned}$$

Ser at vi får to løsninger for x:

$$x_1 = \mu - \sqrt{2\ln 2}\sigma$$

$$x_2 = \mu + \sqrt{2\ln 2}\sigma$$

"Full Width at Half Maximum" av x er:

$$\begin{aligned} FWHM(x) &= \Delta x = x_2 - x_1 \\ &= (\mu + \sqrt{2\ln 2}\sigma) - (\mu - \sqrt{2\ln 2}\sigma) \\ &= 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \quad \square \end{aligned}$$

2. Utledning av gjennomsnittshastigheten til en gasspartikkel:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v P(v) dv \quad (\text{A2})$$

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} 4\pi v^2$$

Løser integralet

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^\infty (v \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} 4\pi v^2) dv \\ &= \frac{m}{2\pi kT}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty 4\pi v^3 \frac{m}{2\pi kT} e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} dv \\ &= \frac{m}{2\pi kT}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty 4v \frac{mv^2}{2\pi kT} e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} dv \\ &= 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty v u e^{-u} \frac{kT}{mv} du \\ &= \frac{4kT}{m} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty u e^{-u} du \\ &\quad \left(\frac{16k^2 T^2}{m^2} \frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}} \quad \square \end{aligned}$$

3. Utledning ideell gassloven

Skal derivere $P = nkT$ ved å løse $P = \frac{1}{3} \int_0^\infty pvn(p) dp$.

Vi bruker det vi vet om bevegelsesmengde $p = mv$, slik at $v = p/m$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \int_0^\infty pvn(p) dp \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty p \frac{p}{m} n(p) dp \\ &= \frac{1}{3m} \int_0^\infty p^2 nP(p) dp \\ &= \frac{n}{3m} \int_0^\infty p^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} 4\pi \frac{p^2}{m^2} \frac{1}{m} dp \\ &= \frac{n}{3m} \frac{4\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{p^4}{m^3} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp \\ &= \frac{n}{3m} \frac{4\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty p \left(\frac{p^2}{2mkT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp \end{aligned}$$

Substituerer og får videre:

$$\begin{aligned} & \frac{4n}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^\infty pu^{\frac{3}{2}}e^{-u} \frac{mkT}{p} du \\ &= \frac{4nkT}{3\pi} \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u} du \\ &= \frac{4nkT}{3\pi} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ &= nkT \quad \square \end{aligned}$$

4. Utleding gjennomsnittsenergien til en gass:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{3}{2}kT \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \int_0^\infty f(v)P(v)dv \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \\ &= \frac{2\pi m}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty v^4 \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v \left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \end{aligned}$$

Substituerer:

$$\begin{aligned} u &= \frac{mv^2}{2kT} \rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{mv}{kT} \rightarrow dv = \frac{kT}{mv} du \\ &= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty vu^{\frac{3}{2}}e^{-u} \frac{kT}{mv} du \\ &= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u} du \\ &= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ &= \frac{3}{2}kT \quad \square \end{aligned}$$

AST2000 - Del 2

Planetbaner

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

I denne delen av prosjektet simulerer vi banen til planetene i solsystemet, både ved å plotte de analytisk og å simulere de numerisk. Vi finner at de analytiske og numeriske banen er formlike og sammenfaller nokså godt. Vi tester også banene med Keplers og Newtons lover for å undersøke i hvilken grad banene tilfredsstiller lovene, og hvor nøyaktige lovene er. Vi finner at det er målbar forskjell mellom Keplers originalversjon og Newtons korrigerte versjon. Slik kan vi analysere hvordan planetene påvirker hverandre og stjernen i sentrum, og det er viktig for å forutsi bevegelsen til legemene i verdensrommet vårt.

I. INTRODUKSJON

Vi har tidligere modellert raketttoppskytingen vår og ønsker nå å regne på banene til planetene og banen til raketten vår slik at vi kan lande raketten trygt igjen. I solsystemet vårt er stjernen vår i sentrum slik den er i vårt eget solsystem, og planetene går i bane rundt stjernen vår på grunn av gravitasjonskraftene fra massesenteret til stjerna. Johan Kepler fant tre empiriske lover som beskriver planetbaner rundt en sol eller stjerne, og de er utledet fra Newtons mekanikk. Vi vil beregne banene til planetene ved hjelp av Newtons og Keplers lover som vi utleder og beviser. Vi løser problemet vårt numerisk for å få et modell av systemet vårt, og tester nøyaktigheten i resultatene opp mot de analytiske løsningene. Vi holder de analytiske løsingene som en mål for banene fordi de ikke inneholder numeriske feil, men for å kunne studere planetenes og stjernens baner og posisjon ved enhver tid er de numeriske metodene vårt viktigste verktøy. En rakett på reise gjennom solsystemet rundt planeter og stjerner påvirkes av en rekke krefter. Vi starter med å se bort fra ytre faktorer som gravitasjonskraft og interaksjoner mellom planetene for å forenkle problemstillingen vår i starten. Gravitasjonskraften er vanligvis den største kraften som bestemmer planetbanen, senere går vi nærmere inn på planetbanene og inkluderer gravitasjonskraften på stjerne fra planetene. Til dette velger vi den første planeten i solsystemet vårt fordi den er størst og nærmest stjerner vår, slik at gravitasjonskraften er maksimal. Vi tester nøyaktigheten til banen ved å se på to-legeme-problemet, der vi betrakter planetene som kuleformet slik at vi kan betrakte de som punktmasser. Vi ønsker i tillegg å undersøke om påvirkningen planetene har på stjerna også er merkbare for andre solsystemer langt avgårde. Vi er interessert i dette fordi vi lurer på om utenomjordisk liv kan oppdage planetene og om vi kan få kontakt med utenomjordisk liv!

II. METODE

For å begrense belastingen når vi kjører programmet vårt har vi gjort noen forenklinger. Vi tenker oss at an-

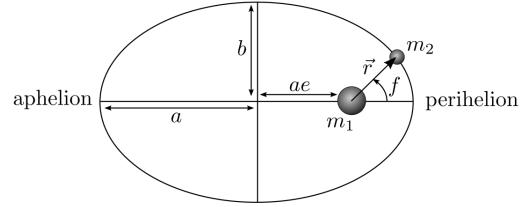


Figure 1. Illustrasjon av en ellipse, hentet fra Hansen, F. K., Forelesningsnotater 1B i AST2000.

dre planeter og galakser er så langt unna hverandre, at gravitasjonskraften deres er neglisjerbar. Derfor ignorerer vi planet-planet interaksjoner og ser kun på gravitasjonskraften på planeten fra stjernen. Vi ser bort fra relativistiske effekter og antar at stjernen fast befinner seg i origo. Vi antar at alle banene eksisterer i xy-planet, slik at vi kan se bort fra z-aksen. I tillegg går alle planetene i bane rundt stjernen og roterer rundt z-aksen mot klokken. Første målet vårt er å plotte banene til planetene. Vi bruker den analytiske formelen for elliptiske baner i beregningene:

$$r(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (1)$$

Som illustrert i Figur 1 er $r(f)$ lengden av vektoren \vec{r} som er avstanden fra brennpunktet til objektet m_2 . Vinkelen f er vinkelen mellom \vec{r} og vektoren som går fra brennpunktet i m_1 til perihelium. a er lengden av den store halvaksen, b den lille halvaksen og e er eksentriskiteten.

Vi ønsker både den analytiske og numeriske simulasjonen av planetbanene. Den analytiske metoden gir oss formen på banen, og for å finne en beskrivelsen av planetens posisjon som funksjon av tid trenger vi å simulere banene numerisk. Slik får vi all nødvendig informasjonen som vi trenger videre. Når vi simulerer planetbanene numerisk bruker vi en metode kalt "Leap Frog". Metoden ligner Eulers metode, men den tar hensyn til energibevaring og vil gi oss mer nøyaktighet ved at vi bruker ett ekstra steg

på hastighetsberegningene. Vi starter med å beregne initialakselerasjonen til planeten, deretter hastigheten etter et halv tidssteg, som vi bruker for å regne ut posisjonen etter ett tidssteg. Så regner vi ut akselerasjonen i den nye posisjonen og hastighet. Dette er illustrert i figur 2.

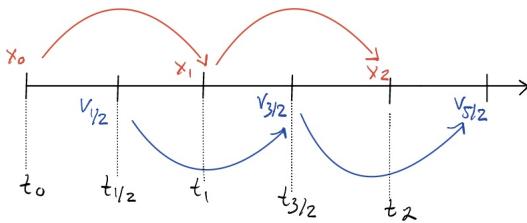


Figure 2. Illustrasjon av metoden "Leap Frog", brukt i numeriske løsingen av planetbanene.

I beregningene brukere vi AU, astronomiske enheter, for å unngå "overflow" siden vi regner med store tall. En astronomisk enhet er lik gjennomsnittsavstanden mellom sola og jorda, ca. 150 millioner km. Vi omgjør til astronomiske enheter ved å skrive gravitasjonskonstanten i AU, gitt ved:

$$G = 4\pi^2 AU^3 yr^{-2} M^{-1}$$

Vi simulerer planetbanene i mist 20 omdreininger av hjemplaneten og bruker minimum 10 000 tidstrinn, altså setter vi $dt = 0.00001$. Vi trenger nok tidssted for at simulasjonen skal bli presis nok, for jo flere tidssteg jo mer presis blir simulasjonen vår. Vi ønsker heller ikke for mange tidssteg, fordi det vil ta veldig lang tid for datamaskinen å kjøre programmet. Vi bruker derfor 10 000 tidssteg som foreslått i oppgaven, fordi vi får en presis nok simulasjon uten å overarbeide datamaskinen. Vi plotter de simulerte banene på toppen av de analytiske banene og analyserer resultatene.

For å undersøke hvor god den numeriske tilnærmingen vår er, implementerer vi Keplers lover. Keplers lover beskriver egenskapene til planetenes bevegelse rundt stjernen. Keplers første lov sier at planetene går i ellipsebaner med sola i det ene brennpunktet. Keplers flatesats, eller Keplers andre lov, sier at en linje fra sola til planetene sveiper ut like storeflater i like store tidsrom. Keplers tredje lov sier at omløpstiden i andre potens er like stor som halvaksen i ellipsebanen i tredje potens, altså $P^2 = a^3$. Vi skal fokusere på Keplers andre og tredje lov. Vi tar en nørmorett på Keplers andre lov, den er gitt på formen:

$$\frac{dA}{dt} = \text{constant}$$

Der $A = \text{arealet utspent av } r$, posisjonsvektoren i en elliptisk bane. Eksempelvis dersom vi har en planet som

bruker tiden t på å bevege seg fra A til B, vil en linje fra A til B utgjøre en vinkelsektor som vist i Figur 1. Keplers lov sier at arealet A1 vil være like stort som arealet A2 av vinkelsektoren fra C til D, hvis tiden det tar å bevege seg fra C til D er lik t . Vi kan tilnærme dette arealet ved å bruke en rettvinklet trekant og derivere:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (2)$$

Utledning av (2) finnes i A1.

Vi kan bevise Keplers andre lov ved å uttrykke $\frac{dA}{dt}$ ved h , hvor $h = |\vec{H}| = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = |\vec{r} \times \vec{v}|$. Der h er angulærmomentet per masse for romskipet. Objekter som roterer om et annet eller om seg selv har angulærmoment som er en bevart størrelsen. Beviset på Keplers andre lov finnes i A2.

Videre kan vi integrere $\frac{dA}{dt}$ for en hel periode P til å vise at omløpstiden er gitt ved:

$$P = 2\pi \frac{ab}{h} \quad (3)$$

Utledningen av (3) finnes i A3.

Vi skal gå videre og se på Keplers tredje lov $P^2 = a^3$. Vi kan utlede Newtons riktige versjon av Keplers tredje lov ved å bruke uttrykk for h og b :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (4)$$

Utledning av (4) finnes i A4.

Keplers originale lov $P^2 = a^3$ ligner på Newtons korrigerte versjon, men vi ser at den ikke tar i betraktning at planetene påvirkes av tyngdekraften til de andre planetene. Dersom planetene ikke påvirkes av tyngdekraften til andre planeter, må banene til planetene være sirkler, men vi vet fra Keplers første lov at planetene de går i ellipsebaner på grunn av påvirkningen av tyngdekraften fra planetene rundt. Newton kombinerte Keplers tredje lov med gravitasjonsloven og gir en utdypet og fullstendig forklaring Keplers tredje lov. For å sammenligne planetbanene med Keplers lov, simulerer vi banene med Newtons korrigerte versjon av Keplers tredje lov og finner omløpstidene. Vi sammenligner den med de numeriske banene vi fikk og finner avvikene.

Vi bruker Keplers lov om arealer gitt ved formel (2) for å sammenligne arealene planetbanene sveiper ut over et tidsintervall Δt med Keplers lov. Vi implementerer (2) i programmet vårt, slik at det tar inn start- og sluttposisjonen til planetbanene og gir ut arealet det sveiper ut over en gitt tid. Vi skal sammenligne to arealer, ett hvor planeten er nær aphelium, og ett som er nær perihelium. Aphelium er punktet i planetbanen

vår som er lengst unna sola, mens perihelium er punktet i planetbanen som ligger nærmest solen. For å finne arealet approksimerer vi det utspente arealet som en trekant av en liten vinkel, som illustrert i figur. Vi finner også avstanden planeten reiste når det sveipet ut arealet og gjennomsnittsfarten planeten brukte på å reise den avstanden.

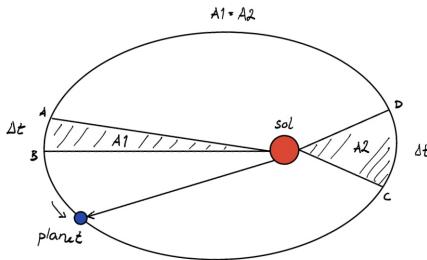


Figure 3. Illustrasjon av arealene sveipt ut av planetbanene.

For å sjekke om alle banene stemmer overens med Keplers tredje lov $p^2 = a^3$, bruker vi også ”Leap Frog” metoden på planetbanene. Vi finner tiden planeten bruker på banen ved å sjekke tiden for hver gang planeten passerer y-aksen, altså når verdiene bytter fortegn. Vi finner hvor lang tid planeten bruker på en runde ved å se på forskjellen i tid fra første til andre gang planeten passerer det samme punktet. Slik finner vi omløpstiden P , og kan beregne Keplers og Newtons versjon fra disse resultatene.

Videre lurer vi på om utenomjordiske kan oppdage planetene i solsystemet vårt. For å undersøke dette kan vi gå nærmere inn på planetbanene våres og inkluderer gravitasjonskraften mellom planetene og stjernen. Vi har til nå satt stjernen vår i origo med planetene i bane rundt, men vi ønsker også å se på stjernens posisjon bevegelse. For å gjøre det må vi simulere vår største planet og stjernen rundt deres felles massesenter. For å gjøre det må vi endre på koordinatsystemet vårt slik at massesenteret blir i origo.

Vi har en måte å finne solbanen på og kan nå teste nøyaktigheten til simuleringen vår med analytiske metoder. For å sjekke nøyaktigheten til solbanene våre kan vi starte med å studere to-legemeproblemet analytisk for å teste solbanen. I to-legemeproblemet vil vi beregne bevegelse til planet vår og stjernen, uten at de påvirkes av andre legemer. Ved å betrakte det som et to-legemesystem, kan vi finne den totale energien sett fra et massesenter. I et to-legemeproblem er den totale energien til massene summen av den potensielle og kinetiske energien $E_{tot} = E_p + E_k$. Vi ser på systemet fra et felles massesenter slik at vi kan se bort fra den kinetiske energien til selve massesenteret, og at legemene har samme hastighet i forhold hverandre, slik at vi kan bruke den reduserte massen til å uttrykke den kinetiske energien:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2$$

Alle legemer som er påvirket av tyngdekraften har en potensiell energi som er proporsjonal med massen deres. Kraften som virker mellom massene er med en avstand r mellom dem følger Newtons gravitasjonslov:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r}$$

Den reduserte massen er:

$$\hat{\mu} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

I to-legemeproblemet kan vi gjøre om massen til den reduserte massen μ slik at vi får at $(m_1+m_2) = \hat{\mu}(m_1m_2) = \hat{\mu}M$. Dermed er den potensielle energien:

$$E_p = -\frac{GM\hat{\mu}}{r}$$

Vi kommer frem til at den totale energien til tolegemesystemet er gitt ved:

$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - \frac{GM\hat{\mu}}{r} \quad (5)$$

Der $v = |\dot{r}|$ er den relative hastigheten, $r = |r|$ er den relative avstanden, $\hat{\mu}$ er den reduserte massen og M er den totale massen til systemet.

Videre kan vi finne det totale angulære momentet til to-legemesystemet sett fra massesenteret. Spinnet eller angulærmomentet for raketten vår er:

$$\vec{P} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Der \vec{r} er posisjonsvektoren, \vec{p} er bevegelsesmengden $\vec{p} = m\vec{v}$ og massen er $\hat{\mu}$. Hastighetsvektoren \vec{v} kan skrives som den deriverte av posisjonsvektoren, altså $\dot{\vec{r}}$. Dermed får vi uttrykket:

$$\vec{P} = \vec{r} \times \hat{\mu}\dot{\vec{r}} \quad (6)$$

Dersom vi studerer formel (5) og (6) som vi utledet over, ser vi at at vi har gravitasjonskonstanten G for den potensielle energien, og den reduserte massen $\hat{\mu}$ for angulærmomentet, som ofte opptrer når vi snakker om to-legemeproblemet. I utledningen vår har vi også med spinn, som henger sammen med bevaring av energi. Spinn er størrelsen vi får fra et legemets rotasjon om et massesenter. Alle legemer rom roterer har spinn, som planetene. Egenskapene til et konservert system

der energi er bevart, kan vi finne fra bevaringslovene. Systemet vårt vil ikke endre spinn, og uforandret spinn kan man observere i planetenes bevegelse. En planetbane er en ellipse, og planetens banefart er størst nærmest sola og minst lengst unna. Når planeten nærmer seg sola kommer farten til å øke, og for at energien skal være bevart må den potensielle energien bli mindre. Ergo er energi bevart i et to-legemesystem. Derved kan vi anta at likningene beskriver et solsystem der energien er bevart. Nå som vi har sett på to-legemeproblemet analytisk, kan vi bruke formelen vi fant (5) til å teste om energien er bevart i solsystemet vårt.

Vi kan måle den radielle hastigheten til en stjerne med Doppler-effekten. Elektromagnetiske bølger eller lys fra stjernen endrer bølgelengden avhengig av om stjernen beveger seg mot eller fra oss. Hvis stjernen kommer nærmere oss, ser vi lys med kortere bølgelenger, som er blåskiftet. Hvis en stjerne trekker seg tilbake er lyset rødskiftet. Fra målingene av forskyvninger av sprekklinjer i stjernespektrene kan man måle hastighetene til stjernene med god presisjon. Endringen i bølgelengde etter Doppler effekten er gitt ved:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Der λ er den observerte bølgelengden og λ_0 er bølgelengden når legemet står stille i forhold til observatøren. v_r er radialhastigheten og c er lysfarten. Med Doppler-effekten måler vi kun den radielle hastigheten, fordi tangentialhastigheten som er vinkelrett på siktelinjen ikke gir bidrag til Doppler-effekten.

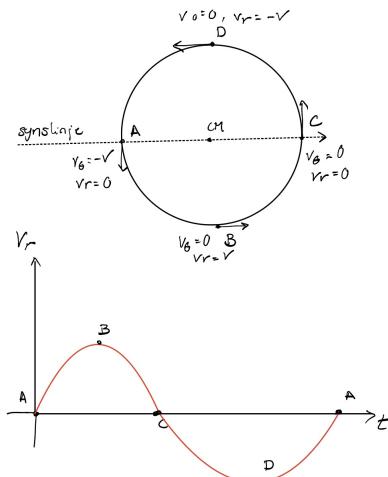


Figure 4. Illustrasjon av rotasjonsbanen der observatøren ser på stjernen fra en stor avstand, og hastighetskurven for stjernen.

Vi antar sirkulære planetbaner når, fordi avstanden til sentrum av massen er den samme overalt og hastigheten

er lik for alle punktene på banen. Den radielle hastigheten avhenger av tre parameter: hastigheten til massesenteret, synslinjen og helningen til solsystemet fra synslinjen. Den radielle hastigheten er gitt ved:

$$v_r = v \sin i$$

Der i er vinkelen for banens helning, altså vinkelen mellom siktlinjen og en linje vinkelrett på planeten. Observatøren beveger seg ikke med solsystemet, slik at den observerte hastigheten er:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_*$$

Som vil si at farten \vec{v} er summen av hastigheten til massesenteret \vec{V} med hensyn til oss og hastigheten \vec{v}_* til stjernen i forhold til massesenteret. Ved å legge til uavhengig Gaussisk støy til dataen vår, kan vi finne en hastighetskurve med endringer i kurven på grunn av støy.

III. RESULTATER

Ved simulasjonen av våre 7 planeter i bane rundt en stjerne ønsker vi å undersøke, samt predikere hvordan solsystemet vårt gjennom ulike metoder ville oppføre seg. Vi anvendte en analytisk samt en numerisk metode for å tilnærme planetbanene våres basert på ulike initielle relasjoner og egenskaper. Vi brukte den analytiske løsningen for en ellipse gitt ved (1) for å iterere over ulike vinkelverdier for finne posisjonsvektoren til hver planet gjennom andre kjente variabler. Vi fikk følgende plott (Figur 5), når vi brukte den analytiske metoden for å visualisere planetbanene:

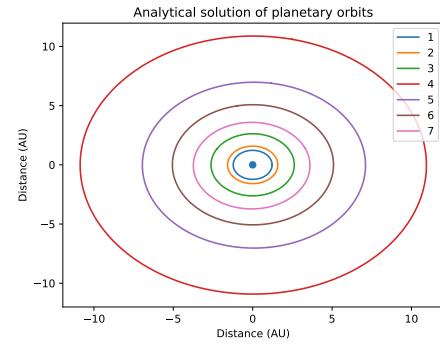


Figure 5. Illustrasjon av alle planetene våres plottet analytisk.

Videre ønsket vi å sammenligne denne analytiske tilnærmingen til vår numeriske simulasjon gjennom anvendelse av "Leap Frog" metoden, samt normale mekaniske interaksjoner mellom hver enkel planet og stjernen i sentrum. Derfor plottet vi de analytiske og numeriske planetbanene oppå hverandre, som illustrert i

Figur 6.

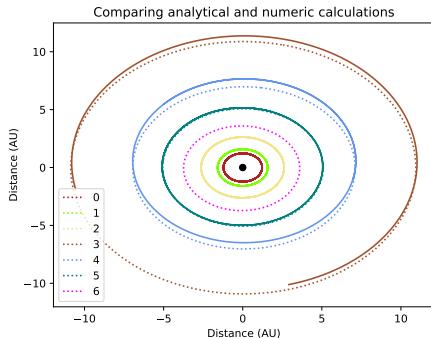


Figure 6. Sammenligning av de analytisk planetbane (stiplet), med den numerisk metoden (heltrukkede linjer).

Videre for å bruke resultatene våres for å forsikre oss om at vi ikke krenker noen naturlover eller kjente fenomener i naturen, ønsker vi å analysere planetbanene og hvordan disse oppfører seg gjennom hele banen. Dermed ønsker vi å sjekke om planeten spenner ut like områder A, over like tidssteg Δt . Vi ser på et område der planeten er nær aphelium og en der planeten er nær perihelium, for å se på i hvilken grad områdene er like. Gjennom enkel geometri estimerer vi at på to ulike, men like store tidsrom, spenner planeten vår ut rom på:

$$\begin{aligned} & 0.0007926124353428043 \text{ AU}^2 \\ & 0.0007926124373749866 \text{ AU}^2 \end{aligned}$$

Dette gir oss en differanse på $2.032182 \cdot 10^{-12} \text{ AU}^2$.

Over disse periodene hadde planeten en respektiv forflyttelse på 0.001289 AU og 0.001289 AU , der den også hadde fart på 6.449341 AU/yr og 6.449347 AU/yr , sammenlignet med initiell hastighet på 6.449339 AU/yr .

Med vår eksisterende simulasjon ønsker vi også å undersøke dersom planeten vår følger Newtons formel for planetbaner gitt ved (4) og til hvilken grad den tilfredsstiller denne. Ved å sammenligne tidssteg over tid får vi at planeten vår bruker 1,19 år, sammenlignet med Newton's formel som sier $1,1910542185504647$ år, som gir en differanse på 0.00105422 år. Vi sammenligner dette med den utdaterte Kepler's formel som gir 1.35709893 år og en differanse på 0.16709893 år, som er vesentlig på en kosmisk skala.

IV. DISKUSJON

Vi ser fra figur 5 og 6 at planetbanene våre er elliptiske og at den analytiske og numeriske løsningen sammenfaller nokså godt. Vi ser at banene er flyttet

litt utover og innover underveis i banen, slik at de ikke ligger eksakt oppå hverandre. Derimot ser vi at banene er svært formlike, men at de ikke starter helt likt, slik at resten av banene får noe avvik. Dersom vi hadde økt tidsstegene kunne vi fått litt mer nøyaktighet av banene, men datakapasiteten vår setter en grense på hvor mange tidssteg vi kan bruke. Vi har også sett på om vi kan justere banevinkelen for at banene skal sammenfalle bedre, men vi finner fortsatt litt ulikheter. Vi tenker likevel at simuleringene våres er en god nok modell av virkeligheten.

Når vi studere himmellegemer og ulike solsystemer er det mange ulike feilmarginer som oppstår når vi prøver å predikere og undersøke disse systemene. I vår simulasjon tar vi utgangspunkt i flere simplifikasjoner. For det første ignorer vi planeter og måner sine interaksjoner innad, og hovedsaklig gravitasjon. Vi ser bort ifra alle ulike relativistiske effekter, samt antar vi under ulike deler at stjernen sentralt i solsystemet er stasjonært. Ved beregning av slike systemer vil beregningen av initiale verdier ved alle reelle tilfeller være et stort feilkilde element. I vårt tilfelle er dette en nullfaktor da disse simulerte initial verdiene, kan anses som eksakte. Feilmarginen kan også ha oppstått under simulasjonen av systemet, for allerede under simulasjonen av planetbanene introduserer vi faktorer som kan påvirke nøyaktigheten av resultatene vi får. Hovedsaklig vil metoden vi bruker for å simulere banene lede oss til en viss feilmargin basert på hvor små tidssteg vi tar, og ved å øke antall tidssteg, blir også simulasjonen mer krevende å gjøre. Nøyaktighet til disse resultatene er også tvilsomme basert på flere av de simplifikasjonene diskutert tidligere. Videre når det kommer til å sammenligne resultatene våres til den teoretiske omløpstiden gitt ved Newton og Kepler's formler er et veldig reelt element av feilmarginen vår ved avrundingsfeil i tilnærmingen våres. Og når vi analyserer tall på en faktor av 10^{-12} er dette spesielt en reell utfordring å ta i betraktning.

V. KONKLUSJON

For å oppsummere har vi funnet en modell for planetbanene i solsystemet vårt, både ved den analytiske metoden og numerisk tilnærming. Simuleringene er ikke helt komplett, og en kan se at det er litt forskjell på metodene, som kan skyldes ulike faktorer som tidssteg og banevinkel. Vi sjekker banene vi fant opp mot Keplers og Newtons lover, og vi finner at det er målbart forskjell mellom Keplers originalversjon og Newtons korrigerte versjon.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Forelesningsnotater 1B og 1C i AST2000.

Appendix A: Utledning

1. Utledning av Keplers andre lov:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (\text{A1})$$

Vi husker at arealet av en rettvinklet trekant er gitt som:

$$\text{areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høyde}}{2}$$

Vi skal se på et grensetilfelle der $\Delta\theta$ er veldig liten, og vi kan tilnærme $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, som er første ledd i rekkeutviklingen til sinus. Når $\delta\theta$ er veldig liten, får vi at de to andre vinklene må være 90° og vi ser for oss at vi får en rettvinklet trekant. Strekningen langs buen er $ds = rd\theta$, og vi har sammenhengen $\frac{dr}{r} = \sin d\theta \approx d\theta$, som gir oss $dr = rd\theta$. Vi har at $\text{høyden} = ds = rd\theta$ og $\text{grunnlinjen} = r$. Hvis vi setter inn i formelen for areal får vi:

$$dA = \frac{rd\theta r}{2} \Leftrightarrow dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

2. Bevis på Keplers andre lov:

Vi vet at hastighetskomponentene er gitt ved:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Definisjonen på initialhastigheten er $\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}$. Setter vi dette inn i uttrykket med dA som vi fant over får vi:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2}rv_\theta \end{aligned}$$

Setter vi dette inn med uttrykket for angulærmomentet får vi følgende:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}r \frac{h}{r} \\ &= \frac{h}{2} = \text{konstant} \end{aligned}$$

3. Utledning av omløpstid: Integrerer $\frac{dA}{dt}$ for en hel periode P til å vise at omløpstiden er gitt ved:

$$P = 2\pi \frac{ab}{h} \quad (\text{A2})$$

Der arealet av en ellipse er gitt ved πab . Vi bruker resultatet fra beviset for Keplers andre lov og får uttrykket:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

Vi integrerer uttrykket over en periode P og får følgende:

$$\begin{aligned} \int_0^P \frac{dA}{dt} dt &= \int_0^P \frac{1}{2}h dt \\ A &= \frac{1}{2}hP \\ P &= \frac{2A}{h} \\ P &= 2\pi \frac{ab}{h} \end{aligned}$$

Siden det er en ellipse er a den store halvakse og b den lille halvakse.

4. Utledning av Newtons korrigerte versjon av Keplers tredje lov: Vi kan utlede Newtons riktige versjon av Keplers tredje lov ved å bruke uttrykk for h og b :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Eksentrisiteten er definert som:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Vi vil bruke formelen uttrykt ved b og omformer likingen til:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Vi så tidligere at vi kom frem til et uttrykk for banetiden $P = 2\pi \frac{ab}{h}$. Vi har at angulærmomentet $h = \sqrt{mp}$ og at $m = G(m_1 + m_2)$. Vi setter inn for h og b i formelen og får:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} \\ &= \frac{4\pi^2 a^2 (a^2(1 - e^2))}{G(m_1 + m_2) a (1 - e^2)} \\ &= \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

har vist at vi får Newtons korrigerte versjon av Keplers tredje lov.

AST2000 - Del 3

Forberedelse til Ferden

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Vi har funnet hvilke planeter i solsystemet vårt som er beboelige, ved å studere mottatt og utstrålt fluks fra stjernen vår, et sort legeme. Vi estimerer overflatetemperaturen til planetene i solsystemet, for å sjekke om vann kan opptre i flytende form, som er et krav for at liv kan eksistere. Ved å bruke definisjonen av fluks og luminositet med Stefan-Boltzmann lov, kan vi finne hvilke planeter som er i den beboelige sonen. Vi kommer frem til at planet nummer 2 er den beste planeten å dra til, fordi den har en overflatetemperatur på 325K og kan inneholde flytende vann, i tillegg er den atmosfæriske tettheten slik at vi kan lande romfartøyet trygt. For å drive de elektriske instrumentene ombord ved landing må vi bruke solcellene på raketten, og finner at vi trenger minst 0.115 m^2 for å absorbere nok energi til dette formålet. Vi kan sette kursen mot planet 2!

I. INTRODUKSJON

Jorda er den eneste planeten vi vet om til nå der det finnes liv, men hvor skal vi dra jorda vår blir ubeboelig? Vi ønsker å reise til en ny planet der det finnes mulighet for liv!

Mennesker leter stadig etter andre beboelige soner i vårt solsystem, slik at vi kan finne ut om det finnes et sted hvor mennesker kan leve. Vi ser etter eksoplanter i universet og prøver å kartlegge og beregne hvor sannsynlig det er at det finnes liv der ute. Målet vårt for denne delen av prosjektet er å lage en forenklet modell av den beboelige delen i det simulerte solsystemet vårt. I tillegg til vann trengs også energi (varme), og en rekke andre omgivelser for mennesker kan leve, som luft og atmosfære. Vi fokuserer på at den beboelige delen av solsystemet vårt er områder der planeten har flytende vann, for der det finnes vann eksisterer det muligens også liv slik vi kjenner det. Temperaturen må være passelig for at vann skal opptre i flytende form, det skal ikke være for varmt eller for kaldt. Ved Stephan-Boltzmann lov kan vi beregne overflatetemperaturen til planetene i solsystemet vårt, slik at vi kan velge en destinasjonsplanet vi ønsker å reise til. Vi beregner når satellitten er tilstrekkelig nærmest destinasjonsplanet for å komme inn i planetens gravitasjonsfelt og i bane, slik at vi trygt kan forberede den på landing. For å drive de elektriske instrumentene ombord ved landing trenger vi å beregne hvor store solceller som er nødvendig for å generere nok energi til dette formålet. Raketten vår har med et kamera for å dokumentere reisen og vi finner ut hvor nært vi må komme planeten før den vil være synlig på bilder.

II. METODE

Vi starter med å anta at stjernen vår er et "sorte legeme". Et sorte legeme vil si at stjernen absorberer all elektromagnetisk stråling den mottar, slik at ingen stråling reflekteres ut eller går gjennom legemet. Ut igjen sender den termisk stråling eller varme. Den termiske

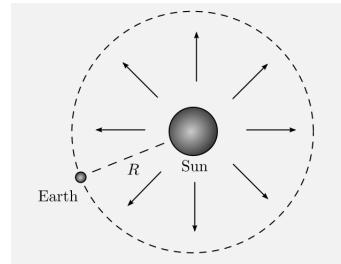


Figure 1. Utstråling fra sola sett som et kuleskall. Hentet fra [Forelesningsnotater](#).

bevegelsen til atomene lager elektromagnetisk stråling til alle bølgelengder, og for et sorte-legeme er strålingen som sendes ut ved en gitt frekvens distribuert av Plancks lov om stråling. Plancks lov er gitt ved formelen:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \quad (1)$$

Der ν er frekvensen, T er temperaturen til det sorte legemet, h er Plancks konstant og k er Boltzmanns konstant.

Et sorte legeme sender ut termiske strålingen ved ulik frekvens/bølgelengde, men hvilken frekvens som har størst intensitet avhenger av temperaturen på det sorte legemet. Luminositeten vil være konstant når energien sprer seg ut i solsystemet, og vi kan forestille oss et kuleskall som omringes stjernen vår i en avstand r fra stjernens overflate. Slik at når vi ser på hvordan strålingen brer seg utover sier vi at det brer seg i et kuleskall som varierer med radiusen fra stjerne, og vi finner fluksen fra kuleskallets overflate. Hvis vi vet hvor mye stråling som når de ulike planetene kan vi konvertere denne strålingen til strøm vi kan bruke i solcellepanelet. Vi trenger å vite hvor mye stråling som kommer fra et område, nemlig fluksen.

Vi ønsker å finne et uttrykket for fluks mottatt fra stjernen på en vilkårlig avstand r . Fluks er gitt ved

formelen:

$$F = \frac{dE}{dA dt}$$

Som er et uttrykk for total energi mottatt per areal per tid. Det sorte-legemet sprer jevn fluks, og vi kan se på den som en kule der alle punkter på overflaten har lik avstand til sentrum av kula. Ergo kan vi bruke overflatearealet til et kuleskall gitt ved $4\pi r^2$. Formelen for fluks kan nå skrives som:

$$F = \frac{dE}{4\pi r^2 dt}$$

Vi må finne ett uttrykk for energien over brøkstrekken og tar i betrakning Plancks lov (1), som beskriver utsstrålingen fra et sort legeme. Vi kan integrere Plancks lov over alle bølegeledder for å få et uttrykk for fluks, altså energi per areal:

$$F = \int_0^\infty dv \int d\Omega B(\nu) \cos\theta = \sigma T^4$$

Dette er Stefan-Boltzmann lov som forteller oss at fluksen fra et sort legeme er proporsjonal med temperaturen i fjerde potens, hvor σ er konstant. Den totale energien mottatt per tid er luminositeten til stjernen med følgende sammenheng:

$$L = \frac{dE}{dt}$$

Setter vi dette sammen med formelen for fluks får vi:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} = \sigma T^4$$

Vi har nå en formel for luminositeten:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Dermed har vi ett utrykk for mottatt fluks fra stjernen på en vilkårlig avstand r :

$$F(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \frac{R^2 \sigma T^4}{r^2} \quad (2)$$

Når vi lander raketten på destinasjonsplaneten vil landingsenheten trenge en kilde til elektrisk kraft for å drive de elektriske instrumentene ombord. Til det formålet trenger vi en kraft på 40W fra solcellepanelene, som har en effekt på 12%. For å regne på dette ser vi bort fra døgnsyklusen og tar ikke i betrakning atmosfæren på planeten, men antar at fluksstettheten på planeten er lik på landingsenheten. Vi ønsker å finne en formel for det minste arealet av solcellepaneler som er nødvendig for å holde landingsenheten igang. Vi finner et uttrykk for

det minste arealet solcellene trenger for å kunne generere 40W:

$$F(r) = \frac{L}{A} \quad (3)$$

$$A = \frac{L}{F(r)} \quad (4)$$

$$A = \frac{40W}{0.12 \frac{R^2 \sigma T^4}{r^2}} \quad (5)$$

Med uttrykket for fluks kan vi også finne den totale energien som planeten vår mottar. Vi antar at overflaten til planetens overflate er en flat sirkel og vi antar at lysstrålene planeten mottar er parallelle på overflate til planeten. Arealet fra planeten sett som en todimensjonale avbildningen av overflaten til en sirkelen på πr^2 . Vi antar at fluksen er konstant over hele overflaten, slik at vi kan finne den absorberete energien ved å ta arealet av sirkelen multiplisert med fluksen:

$$P_{tot} = F(r) \cdot \pi R^2$$

Dette er illustrert i figur 2.

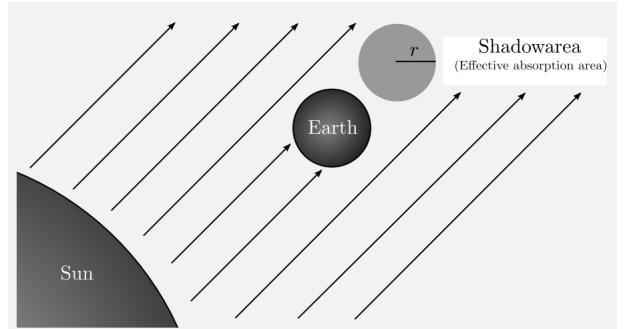


Figure 2. Størrelse av skyggeområde fra planeten som absorberer stråling. Hentet fra [Forelesningsnotater](#).

Vi kan ved hjelp av uttrykket vårt for total energi og Stefan-Boltzmann lov utleder et uttrykk for overflatetemperaturen til planeten. Siden vi antar at planeten er et sort legeme med stabile temperaturer vil planeten utsende samme energi som den absorberer:

$$P_{inn} = P_{ut}$$

Ved å omforme Stefan-Boltzmann lov får vi et uttrykk for temperaturen T :

$$T(r) = \left(\frac{F}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Der vi har bruktt at utstrålt energi er den samme som absorbert energi, og definisjonen for fluks som er

luminositeten over areal. Dette uttrykket kan vi bruke for å finne temperaturen til en planet som er et sort legeme, i en avstand r fra stjernen, med luminositet L .

Vi har nå en temperaturmodell for å estimere temperaturen på hver planet i solsystemet vårt. Modellen vår for å finne ut om planetene er i den beboelig sone av solsystemet, er basert på om flytende vann kan finnes på overflaten. For at vann kan være i flytende form må overflatetemperaturen være mellom 260K-390K. Vi har lagt til en margin på $\pm 15\text{K}$ i tilfelle målingene ikke er helt nøyaktige. Dermed har vi noen kriterier vi kan bruke for å finne den beboelige sonen. Vi estimerer temperaturen til hver planet ved å bruke metodene og formlene vi har utledet for å se hvilke planeter som inneholder flytende vann, og muligens eksistere liv!

Etter vi har valgt en passende steinplanet som vi ønsker å reise til, trenger vi å modellere hvor store solcellene på raketten vår må være for at alle instrumentene skal fungere som de skal på reisen til planetoverflaten. Energien vi trenger får vi fra sola, og vi har allerede funnet en utledning (5) for energi per tid sola sender ut, fra en gitt avstand r på en overflate dA. Vi har avstanden fra planeten vi vil dra til fra sola, og vi kan finne energien til solpanelet ved å bruke uttrykket fra tidligere utledning (5).

Videre ønsker vi å generalisere beregningene fra tidligere utfordringer (F i del 1), der vi beregnet rakettens posisjon og hastighet sett fra solsystemet som referansepunkt. Vi ønsker nå å generalisere det slik at vi kan velge et annet oppskytingssted og en vilkårlig tid, til forandring fra del 1 der $t = 0$. Vi gjør dette ved å inkludere planetbanene slik at vi kan finne hvor hjemplaneten vår befinner seg ved en ønsket tid $t = t_0$. Vi fortsetter å ignorere luftmotstanden under oppskyting av raketten, og antar at oppskytingen alltid er rettet radielt utover.

Hvis vi studerer raketten når den kommer nærmere en annen planet i solsystemet, vil gravitasjonskraften fra planeten på raketten være k ganger større enn gravitasjonskraften fra stjernen på romfartøyet. Vi kan bewise at raketten er i en avstand l fra planeten, gitt ved formelen:

$$l = |r| \sqrt{\frac{M_p}{k M_s}}$$

Beviset finnes i A1.

Her er $|r|$ avstanden fra romfartøyet til stjernen, M_p er destinasjonsplanetens masse og M_s er massen til stjernen vår. Når vi senere skal skyte opp raketten bruker vi at $k = 10$. Det betyr at vi anser raketten til å være tilstrekkelig nærmere destinasjonen når gravitasjonskraften fra planeten dominerer gravitasjonskraften med

en faktor 10.

I løpet av oppskytingen ønsker vi å ta bilder av planeten og solsystemet for å dokumentere reisen vår. Det er også interessant å vite hvor nært raketten vår trenger å komme planeten for at destinasjonsplaneten skal være synlig på bildene kamera tar. Kamera utstyrt på raketten har en opplosning som er begrenset av antall piksler. Vi sier at et objekt er synlig når det synes som mer enn én piksel på bildet. Vi antar at kameratet har pikseldimensjoner $P \times P$ og synsfeltet er $F \times F$, der P er målt i piksler og F er målt i grader. Avstanden fra raketten til planeten må være minst:

$$L \lesssim \frac{RP}{F}$$

Utledningen av dette finnes i A2.

Vi har nå metoder for å beregne alt vi trenger for å estimere overflatetemperaturen til planetene, velge destinasjonsplaneten vår som er i den beboelige sonen, dokumentere reisen med bilder, generalisere oppskytingsproduksjonen vår numerisk og andre forberedende beregninger som er nødvendige for romreisen vi begir oss ut på.

III. RESULTATER

Vi har all data vi trenger for stjernen vår til å beregne de beboelige sonene av solsystemet vårt, slik at vi kan estimere overflatetemperaturen på de ulike planetene. Vi regner ut temperaturen for alle planetene i solsystemet, og setter de i en tabell under for å få en fin oversikt. Første kolonnen viser hvilken planet vi ser på, ved planetenes indeks. I andre kolonne leser vi av tilhørende temperatur, og i siste kolonne ser vi den atmosfæriske tettheten til tilhørende planet. Tabellen ser slik ut:

Planet nr.	Tempratur (Kelvin)	Atmosfærisk tetthet (Kg/m ³)
Planet 0	476K	1.186
Planet 1	420K	1.142
Planet 2	325K	1.058
Planet 3	163K	24.154
Planet 4	199K	20.050
Planet 5	232K	24.088
Planet 6	265K	1.392

Til landing trenger vi en kraft på 40W med elektrisk kraft, der solcellene har en effektivitet på 12%. Dersom vi setter avstanden fra planeten vår til stjernen inn i uttrykket for areal (5) som vi fant i metode-delen, finner vi at raketten trenger minst 0.115m^2 for å absorbere nok energi fra stjernen, for å drive de elektriske instrumentene ombord.

IV. DISKUSJON

Siden vi har funnet temperaturen til de ulike planetene i solsystemet kan vi bestemme hvilke planeter som er beboelige. Som tidligere forklart i metoden er det størst sannsynlighet for eksisterende liv der vann opptrer i flytende form, altså der overflatetemperaturen ligger mellom 260K - 390K.

Fra resultatene på temperaturen til de ulike planetene ser vi at vi har to planeter som ligger i den beboelige sonen, planet nummer 2 og 6. Vi har to potensielt egnede planeter, men vi ønsker den med temperatur nærmest middelverdien til temperaturintervallet vårt. Derfor velger vi planeten 2 som vår destinasjonsplanet.

Vi må ta i betrakning at destinasjonsplaneten må være egnet for landing. Vi ønsker ikke å lande på en gassplanet, pga. tykk atmosfære, sand stormer med høy hastighet og høye gravitasjonskrefter. Vi sjekker at destinasjonsplaneten vår ikke er en gassplanet. Tettheten på planeten er på 1.0578 kg/m^3 og passende for en rakettlanding.

Vi fant også størrelsen solcellepanelene må ha for å generere nok elektrisk kraft til instrumentene ved landing. Vi fant frem til at det må være 0.5259 m^2 . Dette tallet er ikke eksakt siden vi har gjort mange forenklinger i beregningen av fluks, men det gir oss et godt estimat.

Dersom vi ser på formelen for temperatur, observerer vi at dersom avstanden fra stjernen r , blir mindre, så blir temperaturen til planeten større. Så jo lengre vekk fra stjernen man reiser, jo mindre energi får man på de borteste planetene. Da trenger man også et større minste areal til solcellepanelene for å generere nok strøm, slik at det også er gunstig å velge planet 2, som er nærmere stjernen, som destinasjonsplanet.

V. KONKLUSJON

Vi har funnet at planeten med indeks 2 har det som trengs for at liv kan eksistere, og at vi kan lande raketten trygt der. Det er en terrestrisk planet og temperaturen åpner for muligheten til flytende vann, noe som er av stor interesse for videre undersøkelser. I tillegg er planet 2 nærmere stjernen vår, dette gjør reisen vår lettere og mer drivstoff-effektiv, samt øker dette effektiviteten til solcelle panelene våre som er installert på satellitten.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Forelesningsnotater 1D i AST2000.

Appendix A: Utledning

1. Utledning av den dominerande gravitasjonskraften:

Skal nå utlede et uttrykk for når raketten er nærmest nok en planet til å komme seg inn i gravitasjonsfeltet til en annen planet, uttrykt som lengden l . Dette får vi bruk for senere for å finne ut når vi er nærmest nok planeten vår for å kunne lande.

Gravitasjonskraften fra planeten er k ganger større enn fra stjerna, så vi kan skrive situasjonen vår slik:

$$F_p = kF_s$$

Der F_p er gravitasjonskraften fra planeten på raketten og F_s er gravitasjonskraften fra stjernen på raketten.

Vi har at:

$$\begin{aligned} F_p &= G \frac{M_p m_r}{l^2} \\ F_s &= kG \frac{M_s m_r}{r^2} \end{aligned}$$

Der G er gravitasjonskonstanten, M_s er solens masse, M_p er planetens masse, m_r er massen til raketten, l er avstanden mellom raketten og planeten og r er avstanden mellom sola og raketten. Vi får sammenhengen:

$$G \frac{M_p m_r}{l^2} = kG \frac{M_s m_r}{r^2}$$

Forenkler uttrykket:

$$\begin{aligned} \frac{M_p}{l^2} &= k \frac{M_s}{r^2} \\ \frac{l^2}{r^2} &= \frac{M_p}{k M_s} \\ \frac{l}{r} &= \sqrt{\frac{M_p}{k M_s}} \\ l &= |\vec{r}| \sqrt{\frac{M_p}{k M_s}} \end{aligned}$$

Vi får til sist uttrykket for avstanden l som trengs mellom raketten og planeten for å bli tatt opp av planetens gravitasjonsfelt.

2. Utledning av minimum avstand for bilde av en synlig planet:

For at planeten skal være synlig på fotografiet må avstanden fra raketten til planeten minst være:

$$L \lesssim \frac{RP}{F}$$

Et objekt er oppløst eller synlig på bildet når det fremkommer på mer enn en piksel på bildet. Kameraet har en pikseldimensjon på $P \times P$ piksler, der P er piksler. Synsfeltet på kameraet er lik $F \times F$ der F er synsvinkelen til kameraet i grader. Vi finner at vinkelen θ kan skrives som synsvinkelen F del på antall piksler, $\frac{F}{P}$. Ved trigonometri får vi sammenhengen:

$$\tan \frac{F}{P} = \frac{R}{L}$$

Der P er antall piksler, F er synsvinkelen, R er radiusen til planeten, og L er avstanden fra observasjonspunktet kamera på raketten til planeten. Vi har med en veldig liten vinkel å gjøre slik at vi kan skrive:

$$\tan \frac{F}{P} \geq \frac{F}{P}$$

Snur vi om på uttrykket vår vi:

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} &\geq \frac{F}{P} \\ \frac{L}{R} &\leq \frac{P}{F} \\ L &= \frac{RP}{F} \end{aligned}$$

Som skulle vises. Detter er altså maksimum lengde L vi kan ha mellom kameraet og planeten for å kunne se planeten på bildet.

AST2000 - Del 4

Programvare for orientering av raketten

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Vi har utviklet et navigasjonsprogram for å kunne navigere raketten vår i verdensrommet til destinasjonsplaneten, planet nummer 2. Programvaren bestemmer vinkelen raketten er orientert i fra, etter analyser av ulike bilder av himmelkulen, den estimerer hastigheten og retning til raketten ved hjelp av to andre stjerner i solsystemet ved Doppler-effekten, og bruker tilaterasjon slik at vi finner posisjon til raketten ved enhver tid. Med dette har vi funnet en måte å navigere raketten gjennom verdensrommet, slik at vi kan komme frem til destinasjonen vår!

I. INTRODUKSJON

I denne delen av prosjektet skal vi løse utfordringer som oppstår etter vi har skutt raketten opp fra hjem-planeten. Når raketten er på vei til destinasjonsplaneten trenger den å navigere seg frem, for å vite om den er på rett kurs eller om den må justere seg inn. Programvaren vår for orienteringen av raketten trenger å kunne finne satellittens rotasjonsorientering, ved å bruke kameraet ombord, bestemme rakettens nåværende posisjon fra triangulering, og finne rakettens nåværende hastighet og retning. En satellitt går allerede i bane rundt hjem-planeten vår sendt opp fra et annet forskningssenter, som sender oss referansebilder av nattehimmelen. Bildene vi mottar består av mange piksler, og hver piksel er en kombinasjon av fargene rød, grønn og blå. Vi sier at de har en RGB-verdi. Bildene er av himmelkulen vår i sfæriske koordinater, og hver piksel samsvarer med et koordinat på himmelen. Kameraet vi har ombord på romfartøy vårt har en begrensning på kamereats synsvinkel, og vi ønsker å gjøre om bildene vi får til to-dimensjonale bilder. For å gjøre dette bruker vi noe vi kaller stereografisk prosjeksjonstransformasjon, som vil bli forklart mer senere i metodedelen. Vi kan bruke bildene vi tar med romfartøyet vårt, og sammenligne de med det bildene fra satellitten, for å beregne rotasjonsendringen. For å finne romfartøyets orientering kan vi studere vinkelen romfartøyet hadde da den tok bildene, og sjekke hvilket referansebilde som har RGB-verdier som sammenfaller med dette. Slik vil vi finne ut hvor romfartøyet vårt er i rommet. Videre trenger vi å vite romfartøyets hastighet og retning etter den er skutt opp. Til dette ser vi på den radielle hastigheten til to andre stjerner i solsystemet vårt, og måler Doppler-effekten fra stjernene. Doppler-forskyvninger vil oppstå når et objekt beveger seg mot eller fra oss, og ved å analysere denne informasjonen kan vi finne hastigheten til romfartøyet. Programvaren vår skal også kunne finne den ukjente posisjonen til raketten ved å bruke to kjente punkter, dette er en metode vi kaller trilaterasjon. Det er en metode som bestemmer posisjonen til romfartøyet vårt ved å bruke målte avstander til andre kjente objekter. Alt dette vil gi oss en måte vi kan navigere romfartøyet vårt på reisen gjennom i verdensrommet. Uten ville ikke romreisen vært mulig!

II. METODE

For at vi skal kunne navigere romfartøyet vårt gjennom verdensrommet, skal vi lage en programvare for å navigere raketten. Det første vi starter med, er å visualisere nattehimmelen rundt destinasjonsplaneten ved hjelp av bildene kameraet vårt tar, og referansebildene satellitten sender til oss. Vi antar at nattehimmelen forblir konstant i dette prosjektet, ettersom at stjernene på himmelen er fjernt sammenlignet med avstanden i vårt solsystem, slik at avstandene fra stjernene er så store at bevegelser vil være neglisjerbare. Siden nattehimmelen er konstant kan vi generere et bibliotek med referansebilder som dekker hele himmelsfæren. For å utelede rotasjonsendringen til raketten vår, har vi fått god hjelp fra satellitten som allerede går i bane rundt hjem-planeten vår. Vi har tilgang til dataen fra denne satellitten, som inneholder et RGB-bilde av himmelen. Denne dataen trenger vi for å lage programvaren til å orientere raketten, vi skal nemlig sammenligne bildene raketten vår tar med referansebildene.

For å navigere i verdensrommet starter vi med å generere referansebilder fra kameraet ombord på romfartøyet. Vi modellerer at raketten vår er i sentrum av en kule eller en sfære. Rundt er alle planetene og stjernene som dekker innsiden av kuleskallet, og vi kan kalle dette for himmelkulen vår. Vi trenger referansebilder av himmelkulen vår, men kameraet ombord er ikke i stand til å ta bilde av hele den sfæriske overflaten, fordi det er begrenset av kameraets synsvinkel eller FOV, field og view. FOV betegner vi med α og er definert som den maksimale vinkelen bildet kan ha i høyde og bredde:

$$\alpha_\theta = \theta_{maks} - \theta_{min}$$
$$\alpha_\phi = \phi_{maks} - \phi_{min}$$

Vinkelene er illustrert i figur 1.

Vi ønsker å bruke sfæriske koordinater for å finne rutenettet vårt, fordi referansebildene er av en sfærisk overflate. For å kunne ta de flate bildene fra et sfærisk referansepunkt, kan vi bruke metoden for den stereografiske prosjeksjonstransformasjonen. Denne metoden kartlegger den lille delen av den sfæriske overflaten til en

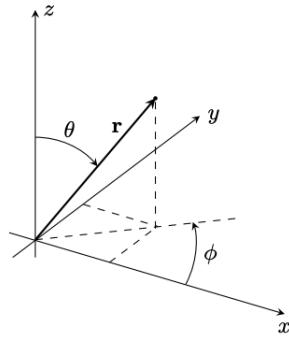


Figure 1. Illustrasjon av det sfæriske koordinatsystemet. Hentet fra FIG. 1 i RELEVANT MATHEMATICS i AST 2000 - Part 4: Onboard Orientational Software.

flat overflate, som en projeksjon med rette linjer, altså får vi et to-dimensjonelt bilde av en kurvet overflate. Visuelt kan vi se det i Figur 2.

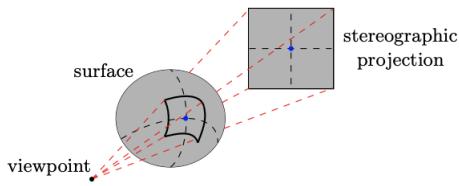


Figure 2. En tredimensjonal illustrasjon av stereografiske projeksjoner. Hentet fra FIG. 4 i RELEVANT MATHEMATICS i AST 2000 - Part 4: Onboard Orientational Software.

Fra den stereografiske projeksjonen får vi begrensninger på ϕ og θ , men også tilsvarende begrensninger på X og Y, gitt ved sammenhengen:

$$X_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1\cos(\alpha_\phi/2)} \quad (1)$$

$$Y_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1\cos(\alpha_\theta/2)} \quad (2)$$

Utdeling av (1) og (2) finnes i A1.

For å generere to-dimensjonale bilder av himmelen, ser vi på dataen vi får fra satellitten som svever rundt hjemplaneten. Vi ønsker å bruke bildene fra denne satellitten som en mal, og finner størrelsen på bildet ved antall piksler i høyden og bredden, altså i x,y-retning. Vi beregne maksimums- og minimumsverdien for x og y i rutenettet ved å sette inn i formel (1) og (2) for den stereografiske prosjeksjonstransformasjonen. Deretter kan vi generere rutenettet vårt med XY-verdier ved å finne antall piksler langs de to aksene.

Vi har sett på stereografisk projeksjon og ønsker å se på sammenhengen mellom de relevante koordinatsystemene vi bruker for å generere bildene våres. I de sfæriske koordinatene går θ fra nord til sør, mens ϕ går langs xy-planet, altså fra 0° til 360° . Sammenhengen mellom koordinatsystemene er gitt ved:

$$X = \kappa \sin \theta \sin(\phi - \phi_0)$$

$$Y = \kappa (\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos(\phi - \phi_0))$$

Denne sammenhengen mellom koordinatsystemene kan vi se visuelt i Figur 3.

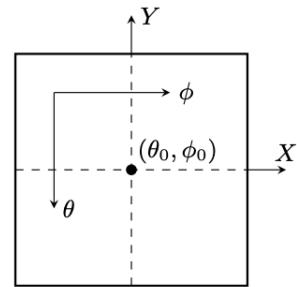


Figure 3. Illustrasjon av det plane koordinatsystemet til en stereografisk projeksjon sentrert om den sfæriske koordinaten (θ_0, ϕ_0) . Hentet fra FIG. 4 i RELEVANT MATHEMATICS i AST 2000 - Part 4: Onboard Orientational Software.

Vi kan bruke teorien om den stereografiske projeksjonstransformasjonen, sammen med synsfeltet til kameraet, for å omgjøre et flatt bilde med x,y-koordinater til et sfæriskt bilde med θ og ϕ . For å gjøre det bruker vi koordinattransformasjonen som er den matematiske funksjonen som relaterer (θ, ϕ) til (X, Y) . Dette er gitt ved sammenhengen:

$$\theta = \theta_0 - \arcsin[\cos \beta \cos \theta_0 + \frac{Y}{\rho} \sin \beta \sin \theta_0]$$

$$\phi = \phi_0 + \arctan[\frac{X \sin \beta}{\rho \sin \theta_0 \cos \beta - Y \cos \theta_0 \sin \beta}]$$

Hvor θ_0 og ϕ_0 er vinklene kameraet hadde da det tok bildet.

Med dette kan vi generere et samsvarende (θ, ϕ) koordinatsystem med riktig lengde og høyde, som for referansebildene. I hver piksel på bildet av nattehimmelen finnes det som nevnt tidligere en fargekode med RGB-verdier. I en png-fil er fargene representert med tre heltall fra 0 til 255 for hver piksel, som er RGB-verdiene. Fargene på pikslene er kombinasjonen av de fargene rød, grønn og blå, vektet av hver av heltallene. Vi kan bruke hver piksel til å finne fargene på bildet. Ved å gå over alle piksle i bildet med x,y-koordinater og si at det skal

ha samme farge som den tilsvarende θ, ϕ -koordinaten på himmelen, får vi et bilde. Tar vi bilder for all $\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$, får vi alle de 360 bildene, og vi kan senere sette disse sammen til en video av himmelen.

Nå som vi har referansebildene kan vi skrive en generell funksjon som kan bestemme vinkelen ϕ , slik at vi kan finne hvilken vinkel romfartøyet vårt er orientert i. Måten vi gjøre dette på er å gå over alle bildene vi genererer og sammenligner de med referansebildene vi har mottatt fra satellitten. Siden vi vet hvilken retning referansebildet vårt er tatt i, kan vi finne ut hvilken retning kameraet vårt på raketten har tatt bildet i. Hvis vi finner at vårt genererte bilde passer med referansebildet, henter vi ut posisjonen til bildet. For å finne ut om bildene passer sammen går vi gjennom RGB-verdiene i hvert piksel i hvert bilde, og sammenligner RGB-verdiene fra våre bilder til satellittens bilder. Vi måler altså forskjellen i RGB-verdiene til de to bildene, og beregner den minste forskjellen mellom RGB-verdiene i bildene. Der forskjellen er minst, som blir tilnærmet null, vet vi at bildene ble tatt på samme vinkel. Programmet vårt gir dermed ut en vinkelen ϕ , og slik vet vi også hvordan romfartøyet vårt var orientert da det tok bildet.

Nå har romfartøyet vårt en programvare, som forteller hvilken vinkel romfartøyet er i, slik at det kan orientere seg rundt. Videre ønsker vi å videreutvikle programvaren slik at vi kan finne hvilken hastighet og retning raketten har. Vi skal bruke radialhastigheten til to andre stjerner i det samme solsystemet for å undersøke raketts egen hastighet. Siden raketten vår bruker programvaren vi utviklet for å bestemme rotasjonsendringen, kan den også rotere seg inn til å peke målingsutstyret sitt mot hvilken som helst stjerne i solsystemet. Derved kan raketten med et måleinstrument ombord måle Doppler-effekten $\Delta\lambda$ i H_α spektrallinjer. Vi starter med å finne en formel som konverterer dataen vi får om bølgelengdene fra referansestjernene til radiell hastighet. Vi kan få informasjon om (ϕ_1, ϕ_2) koordinatene til stjernene hvis vi gjør om koordinatsystemene fra sammenhengen med enhetsvektorene \hat{u}_1 og \hat{u}_2 :

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= (\cos\phi_1, \sin\phi_1) \\ \hat{u}_2 &= (\cos\phi_2, \sin\phi_2)\end{aligned}$$

Videre kan vi bruke dette til å finne radielle hastigheten til stjernen ved dopplereffekten. Vekselvirking mellom en elektromagnetisk bølge og en gass i bevegelse vil føre til en dopplerforskyving. Hvis gassen har en absorpsjons eller emisjons linje med en frekvens i ro, vil linjen når gasse beveger seg få et dopplertillegg eller en dopplerduksjon. I astrofysikk observerer vi lys som elektromagnetisk stråling. Bølgelengden og frekvensen vi beregner kan gi oss informasjon om objektet beveger seg mot eller fra oss og ved hvilken hastighet. Doppler-effekten av lys kommer av at stjerner har absorpsjonslinjer ved

frekvenser som tilsvarer energien det kreves for å heve et elektron fra et nivå til et annet. Dersom absorpsjonslinjene ikke er ved den frekvensen de hadde vært i ved en stasjonær lyskilde. Formelen er gitt ved:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

Her er v_r den radielle hastigheten, c er lyshastigheten og λ er bølgelengden til stjernen vi ser på. Vi bruker formelen til å bestemme radiellhastighetene av stjernen vår med hensyn til referansestjernene, og omgjør formelen slik at vi får at den radielle farten er gitt som:

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Vi antar at raketts spektrograf måler $\Delta\lambda = 0$ for begge radielle hastigheter. Deretter bruker vi radiellhastighetene til stjernen vår fra formelen vi fant over til å bestemme den radielle hastigheten til raketten relativt til vår stjerne i solsystemet vårt. Videre ønsker vi å finne hastighetskomponentene (ϕ_1, ϕ_2) til raketten vår med hensyn til stjerna, og transformerer (ϕ_1, ϕ_2) hastigheten til (x, y) hastighet. For å gjøre denne transformasjonen til kartesiske koordinater bruker vi følgende sammenheng:

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \begin{pmatrix} \sin\phi_2 & -\sin\phi_1 \\ -\cos\phi_2 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Nå har vi en måte for å finne farten og orienteringen til raketten vår, men for å kunne orientere den ordentlig i rommet må vi også ha posisjonen til raketten vår. For å finne posisjonen vil vi bruke en metode for posisjonsbestemmelse, kalt trilaterasjon. Trilaterasjon er en prosess som bestemmer posisjonen til et objekt ved hjelp av målte avstander til kjente posisjoner av andre objekter. Metoden brukes svært mye i GPSer, eller på engelsk Global Positioning System, og er illustrert i Figur 4.

Romfartøyet vårt har instrumenter som gjør at den kan måle avstanden mellom romfartøyet og sentrum i sola eller andre planeter, i tillegg til deres radius. Som illustrert i figur 4 har vi tre objekter, med posisjon P1, P2 og P3. Når vi vet avstanden fra hver av objektene kan vi markere avstanden som sirkler rundt objektene med objektenes sentrum i midten, og kaller det radius r1, r2 og r3. Ved å bruke måleinstrumentene ombord måler vi avstanden fra raketten selv til midten av en annen planet eller stjerne. Dersom vi har tre punkter vil sirklene krysse hverandre i et punkt, og det er dette punktet som vil være posisjonen til raketten vår i dette tidspunktet. Ettersom tiden går vil planetene bevege seg slik at vi konstant må gjøre nye beregninger for å ha riktig posisjon over tid. Derved vil posisjonen avhenge

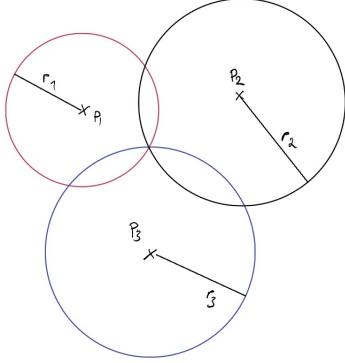


Figure 4. Illustrasjon av trilaterasjon

av tiden der vi målte avstandene. Vi kan uttrykke en formel for sirklene. For en sirkel med origo i (x_0, y_0) og radius r , gjelder følgende sammenheng:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2$$

Dersom vi ser i figuren for trilaterasjon, krysser sirklene hverandre i ett punkt. Vi kan gjøre om på formelen over for å finne en entydig løsning for x og y :

$$x = \frac{CE - FB}{EA - BD}$$

$$y = \frac{CD - AF}{BD - AE}$$

Utledning av dette finnes i A2.

Vi kan finne posisjonen og avstanden til planetene og stjernen, og dermed A, B, C, D, E, F, for å finne posisjonen til raketten i koordinatsystemet. Vi bruker denne metoden for å finne posisjonene til raketten vår med avstanden dens fra stjernen vår og planetene våres, målt på en gitt tid.

III. RESULTATER

For å kunne utføre modelleringene og beregningene våre har vi fått god hjelp fra en satellitt som allerede reiser i bane rundt hjemplaneten vår. Den har forsynt oss med data som inneholder alle verdier vi trenger til å utføre forskningsprosjektet. Vi har laget en programvare som bestemmer rotasjonsorienteringen til raketten vår, ved å studere vinkelen på referansebildene vi fikk fra denne satellitten. Vi sammenligner referansebildene med bildene vi får fra kameraet på raketten vår, og finner den minste forskjellen gjennom RGB analyse av bildene. Dermed gir programmet vårt ut en vinkel ϕ . Vi ser fra bildene at de vi tar med kameraet ombord, samsvarer

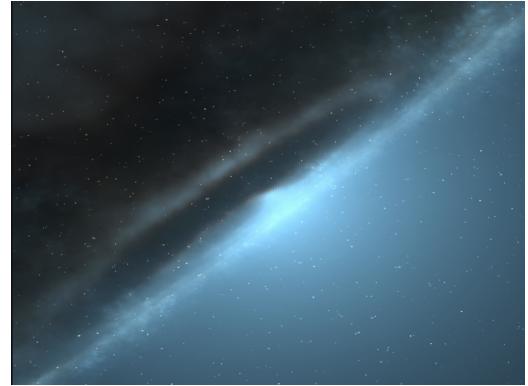


Figure 5. Bilde tatt av kameraet ombord på raketten.

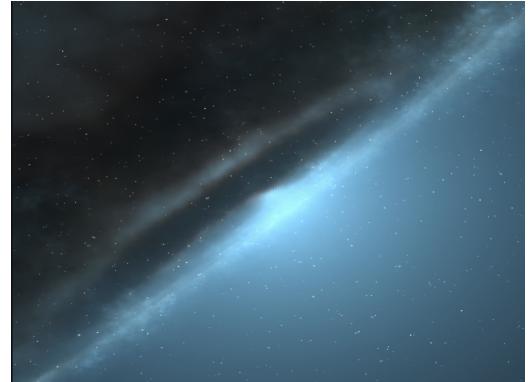


Figure 6. Bilde tatt av satellitten som går i bane rundt planeten.

med referansebildene fra satellitten.

Bildene er tatt på akkurat samme vinkel $\alpha = 0^\circ$, og vi ser at bildet tatt fra kameraet til raketten genererer helt likt bilde som referansebildet. Vi kan se at programmet vårt virker!

Nå som vi kan generere alle referansebildene, kan vi også få alle vinklene bildene er tatt i. Programvaren vår fungerer som illustrert i figur 7, der vi tar inn et bilde og får ut en vinkel:

input	output
png picture	ϕ_{new}

Figure 7. Hvordan programvaren genererer referansebildene.

Som beskrevet i metode seksjonen har vi forsøkt å finne rakettens fart ved å måle dopplereffekten fra to fjerne stjerner i solsystemet vårt. Strukturen til programvaren for målingen av Doppler-effekten så ut som illustrert i figur 8:

input	output
$\Delta\lambda$ from the star at ϕ_1	v_x
$\Delta\lambda$ from the star at ϕ_2	v_y

Figure 8. Programmet tar inn Dopplerskiftet fra stjernene, og gir ut farten til romfartøyet i x,y-planet.

Vi antar i beregningene at rakettens spektrograf måler $\Delta\lambda = 0$ for de radielle hastighetene. Dersom vi putter verdiene inn i formelen vi fant for farten med $v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$, får vi at den radielle farten er 1.12 [AU/yr].

IV. DISKUSJON

Vi fikk fine genererte bilder som samsvarer godt med referansebildene, som vi kan se i figur 5 og 6 i resultater. Ved Dopplereffekten fant vi også en metode for å finne rakettens fart relativt til de to stjernene. Da vi kom til å finne posisjonen til raketten ved trilaterasjon, brukte vi planetbanene fra tidligere simuleringer.

Programvaren for orienteringen av raketten var veldig godt ved at vi fant ut hvilken retning kameraet tok bildene, slik at vi fant orienteringen til raketten. Vi må huske på at kameraet vårt ombord kun kan se på hele vinkler, altså i et intervall på 0° til 359° . Det betyr at kun får sammenlignet RGB-verdiene for bilder som har en hel vinkel, og vinkler som ligger mellom dette vil ikke bli plukket opp av programvaren vår. Dette vil trolig være den største feilkilden i orienteringen av romfartøyet vårt, for vi skulle gjerne kunne orientert den på alle mulige vinkler.

Vi gjorde mange forenklinger underveis, som for eksempel at nattehimmelen forble konstant. Dette stemmer ikke med virkeligheten, ettersom at stjernene beveger på seg rundt i solsystemet, men for oss mennesker er det vanskelig å legge merke til. Derfor kan vi se på resultatene som fornuftige, men ha i bakhode at det er gjort noen virkelighetsfjerne forenklinger.

V. KONKLUSJON

Vi har laget en programvare som gjør det mulig for oss å orientere romfartøyet i rommet. Ved å bruke ulike metoder og matematiske sammenhenger har vi kommet frem til en måte ved å sammenligne RGB-verdier i bildene tatt av raketten og satellitten, for å finne vinkelen raketten er rotert i. Vi fant en måte å finne hastighet og retning ved hjelp av Dopplerskifte fra målinger av andre planeter og stjerner i solsystemet, og ved bruk av trilaterasjon vet vi posisjonen til romfartøyet i enhver tid. Vi

gjorde noen nødvednige forenklinger og antakelser underveis som gjør at det passer inn i vårt solsystem, men som ikke gjenspeiler virkeligheten helt. Uansett har vi laget en modell for å navigere raketten vår videre på reisen, og fått et godt innblikk i hvordan dette kunne blitt løst i virkeligheten.

REFERANSER

- Hansen, F. K., RELEVANT MATHEMATICS i AST 2000 - Part 4: Onboard Orientational Software.

Appendix A: Utledning

1. Utledning av den stereografiske prosjeksjonstransformasjonen

Skal utlede den stereografiske prosjeksjonstransformasjonen for å vise likning A1 og A2.

$$X_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)} \quad (\text{A1})$$

$$Y_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)} \quad (\text{A2})$$

Når $x_{max/min}$ ser vi på når $y = 0$, og når $y_{max/min}$ ser vi på tilfellet $x = 0$.

For å løse dette benytter vi følgende formler:

$$X = \kappa \sin \theta \sin(\phi - \phi_0)$$

$$Y = \kappa (\sin \theta_0 \cos \theta - \cos \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0))$$

$$\kappa = \frac{2}{1 + \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)}$$

Setter vi dette inn for X får vi at

$$X = \frac{2 \sin \theta \sin(\phi - \phi_0)}{1 + \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)}$$

Når $x_{max/min}$ skal vi se på når $y = 0$, slik at vi får at $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Vet at $\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, slik at uttrykket blir:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin(\phi - \phi_0)}{1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \cos(\phi - \phi_0)} \\ &= \frac{2 \sin(\phi - \phi_0)}{1 + \cos(\phi - \phi_0)} \end{aligned}$$

Har oppgitt i oppgaveteksten at intervallet er $-\frac{\alpha_\theta}{2} \leq \theta - \theta_0 \leq \frac{\alpha_\theta}{2}$. Slik at vi kan skrive om uttrykket vårt til å være:

$$X_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)}$$

Som skulle vises.

For å finne $Y_{max/min}$ ser vi på tilfellet der $x = 0$, og følger samme metode som vi brukte for å finne $X_{max/min}$. Vi setter inn og får følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} Y &= \kappa (\sin \theta_0 \cos \theta - \cos \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)) \\ &= \frac{2(\sin \theta_0 \cos \theta - \cos \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0))}{1 + \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)} \end{aligned}$$

Vi bruker at $\phi_0 = \phi = 0$ og at $\theta_0 = 0$.

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot (0 \cdot \cos \theta - 1 \cdot \sin \theta \cdot 1)}{1 + 1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \cdot 1} \\ &= \frac{2(-\sin \theta)}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{-2\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \pm \frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)} \end{aligned}$$

Som skulle vises.

2. Utledning av x og y i trilaterasjon

Vi har følgende sammenheng for en sirkel med origo i (x_0, y_0) og radius r:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2$$

Vi kan se på tre uttrykk for dette:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2$$

Vi kan starte med å ekspandere likningene:

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 = r_1^2$$

$$x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = r_2^2$$

$$x^2 - 2x_3x + x_3^2 + y^2 - 2y_3y + y_3^2 = r_3^2$$

Videre kan vi subtrahere likning fra hverandre slik at vi står igjen med:

$$(-2x_1 + 2x_2)x + (-2y_1 + 2y_2)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2$$

$$(-2x_2 + 2x_3)x + (-2y_2 + 2y_3)y = r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2$$

Vi kan forenkle disse likningene ved å skrive dem om til:

$$Ax + By = C$$

Og

$$Dx + Ey = F$$

Dersom vi løser for x og y, får vi følgende resultat:

$$x = \frac{CE - FB}{EA - BD}$$

$$y = \frac{CD - AF}{BD - AE}$$

AST2000 - Del 5

Satellitttoppskyting

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Tiden har endelig kommet for å skyte romfartøyet vårt ut i verdensrommet på vei til destinasjonen! Vi har i denne delen studert hvordan Hohmann-baner kan hjelpe romfartøyet vårt på reisen fra planet 0 til destinasjonsplanet nummer 2. Vi legge også en plan for hvordan vi skal komme oss til destinasjonen, og hvordan vi skal få romfartøyet tilbake på riktig kurs dersom den kommer ut av bane ved å bruke motoren. Vi finner at dersom vi skyter romfartøyet opp etter 0.298 år, treffer romfartøyet den riktige banen til destinasjonsplaneten, og simuleringen er veldig godt.

I. INTRODUKSJON

I denne delen ønsker vi å fullføre forberedelsene og endelig sende raketten ut i verdensrommet. For å kunne gjennomføre dette trenger vi en god modell for å beregne den antatte banen til fartøyet, slik at vi med sikkerhet kan sende raketten ut i verdensrommet. Vi bruker Hohmann-transformasjon for å få romfartøyet på riktig bane til destinasjonen. Vi bruker denne metoden fordi det er en drivstoffbesparende måte å flytte romfartøyet fra en bane til en annen bane. Manøveren vi gjør ved Homann overføringsbane er å plassere romfartøyet vårt i en elliptisk overføringsbane som er tangentiel til både startbanen og destinasjonsbanen, og så bruke motoren for å først etablere overføringsbanen, og deretter justere banen inn på destinasjonsbanen slik at vi treffer målet. Deretter starter vi selve oppskytingen av romfartøyet vårt! Vi ønsker i tillegg å finne en måte for å justere den planlagte banen romfartøyet vårt reiser i for å nå destinasjonsplaneten vår. Dersom den kommer ut av kurs, gir vi romfartøyet en dytt fra rakettmotoren i den retningen vi ønsker hastighetsvektoren til. For at dyttene skal gi oss ønsket resultat, trenger vi å finne tidspunkt og størrelsen på dyttene. Når vi nærmer oss destinasjonsplaneten, ønsker vi å få romfartøyet i en stabil bane rundt planeten. Da kan romfartøyet sirkulere rundt planeten uten at den faller ned i planetens atmosfære eller forsvinner ut i verdenrommet. Slik kan vi senere i forskningsprosjektet studere atmosfæren til planeten før vi går inn for landing.

II. METODE

I denne delen inkluderer vi alle tidligere antakelsene og forenklinger, som for eksempel fra del 2 slik at vi kan bruke de tidligere simulerte banene.

For å simulere romfartøyets bane må vi kunne simulere planetbanene og hvordan de beveger seg over tid. Heldigvis har vi en simulering av planetbanene i solsystemet fra tidligere. Vi bygger videre på simuleringen av planetbanene ved å inkludere simuleringen av romfartøyet vårt. Strukturen til programvaren vil være at de tar inn initialtid (yr), initialposisjon (AU), initial-

fart (AU/yr), antall tidssteg og lengden på tidsstegene. Tilbake gir programmet vårt sluttid (yr), sluttposisjon (AU) og slutt fart (AU/yr) for romfartøyet vårt.

I tillegg trenger vi å ta hensyn til gravitasjonskraftene som virker fra stjernen og hver planet i solsystemet. Romfartøyets bane påvirkes nemlig av kraften fra alle de andre legemene i solsystemet, men for å forenkle simuleringene våres antar vi at gravitasjonskraften fra mindre legemer som eksempelvis måner og asteroider er så liten sammenlignet med større legemer som planeter og stjerner, at vi ignorerer de små legemene under simuleringen. Banen til romfartøyet vårt er gitt av Newtons andre lov, og nettokraften på romfartøyet er lik gravitasjonseffektene fra stjernen og de andre planetene, gitt ved formelen:

$$\vec{F} = -G \frac{m M_s}{|\vec{r}|^3} \vec{r} - \sum_{i=1}^N \frac{G m M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Der m er massen og \vec{r} er posisjonen til romfartøyet, M_s er massen til stjernen og M_i og \vec{r}_i er massen og posisjonen til planeten i .

Vi legger merke til at vi definerer gravitasjonskraften som negativ, og studerer dette før vi går videre. Vi vet at gravitasjonskraften er en tiltrekende kraft, og hver vektor \vec{r} peker utover fra stjernen og planetene til romfartøyet. Vi bruker superposisjonprinsippet for å finne hva som trekker på romfartøyet, og det er summen av alle planetenes gravitasjon, pluss gravitasjonskraften fra stjernen i sentrum. Dette forklarer hvorfor vi bruker negative fortegnet foran gravitasjonskraftene. Vi vet at Newtons andre lov er gitt ved $F = ma$, slik at vi kan finne et uttrykk for akselerasjonen til romfartøyet:

$$a = -G \frac{M_s}{|\vec{r}|^3} \vec{r} - \sum_{i=1}^N \frac{GM_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Vi har alt vi trenger for å finne bevegelsen til romfartøyet og banen dens, og da gjenstår det kun å simulere dette numerisk. Vi gjør dette ved metoden kalt "Leap Frog", som er utdypet og forklart i del 2 av

prosjektet. Vi velger å bruke denne metoden fordi den tar hensyn til energibevaring. Nå har vi altså romskipets hastighet og posisjon som funksjon av tid, bygget på likningen vi fant for akselerasjon. Slik kan vi ha oversikt over romfartøyets bevegelse til en hver tid mens den drifter, og mulighet for å sjekke om den er på rett kurs. Det eneste vi mangler nå er å initiere den numeriske løsningen vår med initialverdier. Vi prøver oss frem til hvilke initialverdier som passer best til romfartøyets reise.

Vi trenger å legge en plan for hvordan vi skal få romfartøyet trygt til destinasjonsplaneten vår. Planen vår innebærer å bruke en Hohmann overføringsbane for å få romfartøyet vårt fra planet 0 til 2. Fordelene med Hohmann-baner er at de ofte er den mest brennstoff-besparende reiserutene for et romfartøy som skal reise mellom to planeter, fordi vi utnytter gravitasjonskraften fra stjernen og planetene. Ved reiser mellom to planeter må tidspunktet for oppskytingen velges slik at romfartøyet og destinasjonen er på det felles møtepunktet samtidig. Altså må de to planetene stå i riktig posisjon når oppskytingen skjer. For å kunne bruke Hohmann-baner må vi gjøre en antakelse om at vi ferdes mellom to omtrent sirkelformede omløpsbaner rundt det samme himmellegemet. Hohmann-transformasjon er illustrert i figur 1.

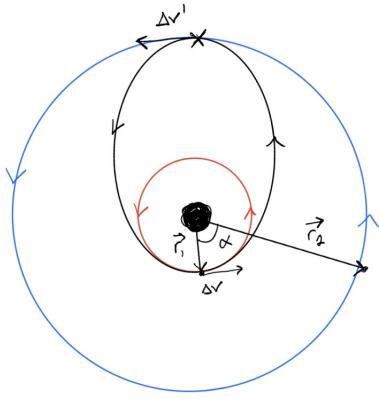


Figure 1. Illustrasjon av Hohmann-transformasjon.

Med Hohmann-transformasjon følger det noen kriterier vi må oppfylle. For det første må vi vite hvor mye dytt rakettmotoren må gi for at vi skal komme oss på riktig bane til planeten. Hvis romfartøyet får nok dytt kan vi utvide dens elliptiske bane så mye at romfartøyet går fra å være i bane rundt hjemplaneten, til å gå i banen til destinasjonsplaneten. For det andre må vi finne tidspunktet der de to planetene er på linje.

En Hohmann-transformasjon er å ta et objekt som går i bane rundt en planet, og flytte den fra en bane til en

anden bane. Dette gjøres ved å gi raketten riktig dytt fra motoren ved to punkter. Dersom romfartøyet vårt har en stor fart, vil den drifte ut i verdensrommet. Nettopp dette utnytter vi for å få den over i en annen bane. Hvis vi forstyrrer balansen mellom gravitasjonskraften fra startplaneten vår på romfartøyet og hastigheten til romfartøyet, ved å gi romfartøyet vårt en større fart, vil den drifte ut av banen rundt startplaneten. Da vil den gå ut i en elliptisk bane, som vi kan kalle transformasjons-banen, og den vil etterhvert treffe den nye banen lenger ut som vi ønsker at den skal gå over i. Illustrasjon av hvordan reisen fra planetene kan se ut finnes i figur 2, på neste side.

For å finne hva farten må være for at vi skal oppnå dette, ser vi på den mekaniske energien. Vi vet at den mekaniske energien er summen av den kinetiske og den potensielle energien, altså $M_E = K_E + U$. Når et legeme får mer potensiell energi, mister den kinetisk energi, og dette er også tilfellet for romfartøyet vårt. Når romfartøyet vårt beveger seg vekk fra startplaneten, vil den få mer potensiell energi og miste kinetisk energi. Den mekaniske energien til romfartøyet endrer seg ikke fordi den påvirkes av gravitasjonskreftene fra planeten. Så vi kan finne den mekaniske energien til romfartøyet ved alle punktene på transformasjons-banen. Vi starter med å se på den kinetiske energien, som er gitt ved:

$$K_E = \frac{1}{2}mv^2$$

Vi kommer nærmere inn på dette med farten for en stabil bane mot slutten av metode-delen, men vi kan bruke fartsformelen her for å finne den mekaniske energien. Vi har formelen for hastighet til en stabil bane:

$$v_{stabel} = \sqrt{\frac{GM_p}{r}}$$

Setter vi den inn i uttrykket for kinetisk energi får vi:

$$K_E = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_p}{r}\right)$$

Den potensielle energien fra gravitasjon er gitt ved:

$$\frac{-GM_p m}{r}$$

Slik at den mekaniske energien totalt blir:

$$M_E = \frac{GM_p m}{2r} + \frac{-GM_p m}{r}$$

$$M_E = \frac{-GM_p m}{2r}$$

Dette uttrykket forteller oss hva den totale mekaniske energien til romfartøyet vårt i en sirkulær bane rundt startplaneten er. Når romfartøyet gjør transformasjonen

mellan banene går banene over til å være elliptiske. Vi må derfor endre på radiusen vi nettopp fant i uttrykket over, til å være lengden til den store halvaksen i en ellipse. Vi får for en elliptisk bane at mekaniske energien er:

$$M_E = \frac{-GM_p m}{2a}$$

Avstanden fra den vi gir romfartøyet første dytt til der vi gir romfartøyet andre dytt, kjerner vi igjen som lengden av de to radiene til startbanen og sluttbanen, og vi får at $2a = r_1 + r_2$, som illustrerte i figur 1.

Videre kommer vi frem til farten som trenger for å døtte romfartøyet vårt fra banen rundt startplaneten, til banen mot destinasjonsplanet. Rett etter første dytt fra motoren har romfartøyet noe kinetisk energi, slik at vi får:

$$\begin{aligned} \frac{-GM_p m}{r_1 + r_2} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_p m}{r_1} \\ \frac{1}{2}v^2 &= \frac{GM_p}{r} - \frac{GM_p}{r_1 + r_2} \\ v_1 &= \sqrt{2GM_p \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} \end{aligned}$$

Hvis vi gir romfartøyet denne farten vil romfartøyet drifte ut i banen vi ønsker at den skal komme inn i. For å vite hva farten skal være når romfartøyet har kommet til der vi skal gi det andre dyttet, justerer vi formelen fra å bruke r_1 til å bruke r_2 . Da får vi følgende fart:

$$v_2 = \sqrt{2GM_p \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

Vi vil se på tiden det tar for romfartøyet å transformere fra hjemplanetbanen til destinasjonsplanetbanen. Vi kan bruke Keplers tredje lov for en elliptisk bane, og får følgende formelen:

$$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm} \right) a^3$$

Tiden vi får er tiden romfartøyet hadde brukt på et helt omløp på den elliptiske banen, men en Hohmann-transformasjon er kun en halv bane, slik at vi må ta $T = \frac{P}{2}$. Vi får da:

$$T = \frac{\sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{Gm} \right) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^3}}{2}$$

Dette er utledet i A1.

Formelen over beskriver tiden en Hohmann-transformasjon tar. Ved å vite denne tiden kan vi

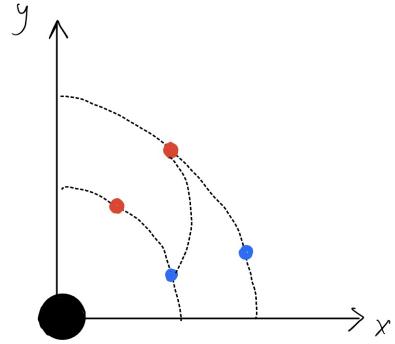


Figure 2. Illustrasjon av hvordan reisen fra planetbanene med Hohmann-overføringen kan se ut.

finne når vi skal skyte opp romfartøyet fra hjemplaneten.

For å velge riktig tidspunkt for oppskytingen slik at de to planetene er på linje må vi se på vinkelen α , som er vinkelen mellom planetene ved utskyting, som illustrert i figur 1. Det er avgjørende at vi starter på det tidspunktet der de to planetene er på riktig linje, og trenger å finne en vinkel for dette. Utledning for dette finnes i A1, og vinkelen vi kan starte manøvreringen er gitt ved:

$$\alpha = \pi \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right)^3} \right)$$

Fra dette kan vi finne tidspunktet for når vinkelen mellom planetene oppfyller likningen over, og i teorien vil vi da kunne manøvrere romfartøyet i riktig retning mot destinasjonsplanet.

For å ha en plan for hvor reisen skal gå gjennom rommet, må vi også ha en plan B dersom romfartøyet kommer ut av kurs. Selvom vi er i vakuums i verdensrommet kan retningsendring oppstå på grunn av gravitasjonskraft fra andre planeter og stjerner vi reiser forbi. Jo nærmere vi kommer et annet legeme, jo sterkere vil de trekke på romfartøyet og sterkere vil gravitasjonskraften virke, slik at vi får en betydelig endring av kurven vår. Hvis vi trenger å justere på kurven vil gi romfartøyet et dytt fra motoren i den retningen vi ønsker hastighetsvektoren til. Vi kan gjøre justeringer på banen vår med dytt fra motoren, og slik kan vi holde en konstant hastighet rundt planeten. Vi gjør noen antakelser for simuleringene: Når romfartøyet er i verdensrommet kan det fritt justere vinkelretningen uten å bruke drivstoff. Varigheten på dyttet fra motoren er minimal eller ubetydelig sammenlignet med hvor lang tid hele reisen tar, slik at vi betrakter dyttene som øyeblikkelige. Etter at romfartøyet har fått en dytt, vil romfartøyet få en ny hastighet, men forbli i samme posisjon. Vi trenger å finne størrelsen på dyttene vi gir raketten får at den skal være i riktig bane. For å finne hvor mye vi trenger å øke farten, altså dytte

romfartøyet, kan vi se på fartsendringen Δv . Vi vet at endringen i fart er sluttfarten minus initialfarten, slik at vi får:

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= v_1 - v_{stabel} \\ \Delta v_2 &= v_{stabel} - v_2\end{aligned}$$

Den totale fartsendringen blir altså $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$. For å endre banen må romfartøyet få tilført en fart, og vi bruker rakettmotoren ved perihelium av planetbanen for dette. Vi gir dyttene til romfartøyet tangentelt til planetens bane, slik bruker vi også minst mulig drivstoff. Δv_1 er hvor mye hastigheten til romfartøyet må endrer for å få romfartøyet bort fra startplanetens bane til overføringsbanen som tar den til destinasjonsplaneten. For å starte den elliptiske overføringsbanene må vi øke hastigheten. Akkurat som at Δv_1 er endringen i hastighet som er nødvendig for å sende romfartøyet fra startbanen til den elliptiske Hohmann-banen, er Δv_2 endringen i hastighet som er nødvendig for å sendte romfartøyet fra Hohmann-banen til destinasjonsplanetens bane. Utifra dette kan vi finne hvor mye drivstoff som må brukes for at vi skal få disse fartsendringene.

Mellan kommandoene vil romfartøyet kun reise fritt gjennom rommet. Det eneste som virker på den er netto gravitasjonskraft fra stjernen og planetene. Vi bruker det vi fant når vi modellerte romfartøyet bane til å simulere bevegelsen til romfartøyet mellom dyttene.

Til slutt trenger vi å få romfartøyet komme tilstrekkelig nærmere destinasjonen. Denne avstanden l er gitt ved:

$$l = |\vec{r}| \sqrt{\frac{M_p}{10M_s}}$$

Der $|\vec{r}|$ er avstanden fra romfartøyet til stjernen, M_p er destinasjons planetens masse og M_s er massen til stjernen.

Vi kan endelig skyte opp romfartøyet vårt og starte reisen mot destinasjonsplaneten vår. Romfartøyet faktiske bane vil sannsynligvis avvike noe fra simuleringen vi får, for som vi har erfart før vil romfartøyet bane avhengig av den numeriske nøyaktigheten i simulasjonene. Unøyaktigheten kan bli stor nok til at romfartøyet vårt kommer ute av kurs mot destinasjonen, derfor trenger vi å gjøre noen korrigeringer av banen underveis. Målet er å følge planen vår, men å utførende korrigeringer som illustrert i figur 3.

Vi bruker orienteringsprogramvaren vi lagde i tidligere del 4, og sammenligner romfartøyetts simulerte posisjon med romfartøyetts faktiske posisjon. Videre korrigerer vi banen med en lite dytt, og justerer den planlagte banen

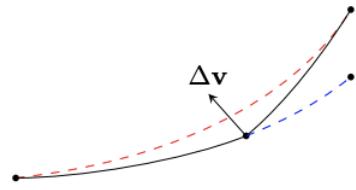


Figure 3. Illustrasjon av banekorrigeringene, hentet fra AST2000 - Part 5 Oppgavetekst. Den illustrerer den faktiske banen (sort), med den planlagte banen (rødt). Vi finner en korrigert bane (Δv), som gjør at romfartøyet vårt ikke drifter lenger vekk (blått).

etter den riktige posisjonen.

Vi ønsker nå å få romfartøyet i en stabil bane. Når vi er nærmere nok planeten må romfartøyet ha en hastighet rundt destinasjonsplaneten slik at den går i bane, akkurat slik som for eksempel månen går rundt jorda vår. Vi kan først se på hva som skjer når et legeme reiser med en hastighet i bane fra Newtons lover. Hvis romfartøyet har fort liten fart vil det falle ned mot planeten, og har den for stor fart vil den forsvinne ut i verdenrommet. Dersom den har riktig fart vil romfartøyet gå i en stabil bane rundt planeten. For et objekt i bane er den eneste kraften som virker gravitasjonskraften. Vi kan utlede dette matematisk:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{GMm}{r^2} \\ v^2 &= \frac{GM}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{r}}\end{aligned}$$

Hastigheten romfartøyet må ha i forhold til planeten for at den skal gå i en stabil bane er altså gitt ved formelen:

$$v_{stabel} = \sqrt{\frac{GM_p}{r}} \quad (1)$$

Hvor G er gravitasjonskonstanten, M_p massen til planeten og r er avstanden fra planetens sentrum til romfartøyet. Når vi er nærmere nok destinasjonsplanet, ser vi på farten planeten har og justerer farten til romfartøyet etter denne. Ved ankomst ønsker vi å analysere hvordan vi går i bane rundt planeten. Her ønsker vi en så sirkulær bane som mulig, slik at det blir lettere å studere hele planeten, samt gjøre landingsprosessen lettere å gjennomføre senere.

III. RESULTATER

Gjennom den analytiske utregningen av Hohmannmanøveren, finner vi at utskytningstidspunktet er ved 0.7 radianer, dette betyr at når vi skyter ut raketten skal vinkelen mellom planeten relativt til sola være 0.7 radianer. Dette anvender vi videre for å finne tidspunktet der denne betingelsen er oppfylt, dette skjer for første gang 0.298 år etter det vi har valgt som et startpunkt for systemet vårt.

Banen romfartøyet får på reisen er illustrert i figur 4, og vi ser tidspunktene for dytte fra rakettmotoren og i hvilken retning de peker, markert med piler:

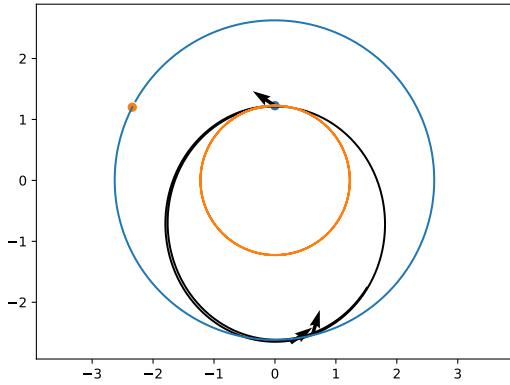


Figure 4. Simulasjon av banen romfartøyet vårt reiser mellom planetene.

Den sorte banen er romfartøyets bane, den blå er destinasjonsplaneten vår, altså planet nummer 2, og den oransje er banen til destinasjonsplaneten vår 0. Vi ser at Hohmann-transformasjonen virker, og at romfartøyet kommer inn i riktig banen til destinasjonsplaneten. Når vi har kommet nære nok planeten senker vi farten til romfartøyet, slik at vi snart kan lande romfartøyet. Med en suksessfull ankomst kan vi se på hvordan vi går i bane rundt planeten. Innen dette tidspunktet kan vi visuelt se planeten, se Figure 6. Videre kan vi si litt om hvordan vi beveger oss relativt til planeten. Vi beveger oss med en hastighet på 2122 m/s, på en avstand 56 km. Vi kan også visualisere hvordan banen vår ser ut ved å kontinuerlig registrere tiden og posisjonen til raketten vår.

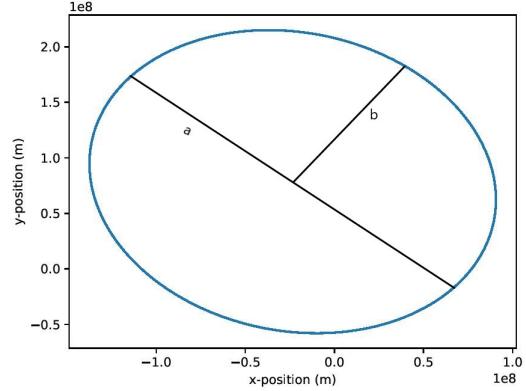


Figure 5. Banen til raketten vår rundt planet 2



Figure 6. Bilde av planeten fra romskipet

IV. DISKUSJON

I løpet av reisen til destinasjonsplaneten må vi gjøre noen korrigeringer underveis, på grunn av uforutsette faktorer. Simulasjonen vår viser at romfartøyet vellykket kom på riktig bane, men reisen i den virkelige verden kan avvike fra denne modellen, fordi vi gjorde en del antakelser som man ikke kan se bort ifra i virkeligheten. Eksempelvis neglisjere vi gravitasjonskraften fra de mindre legemene romfartøyet reiste forbi, som måner og asteroider. Vi antar også i Hohmann-tranformasjonene at vi har helt sirkulære planetbaner. I virkeligheten vil planetene påvirke hverandre mye slik at dette ikke nødvendigvis er tilfellet. Vi brukte heller ikke interpolasjon for å få posisjonene til planetene på hvilket som helst tidspunkt, slik at vi kunne haft enda mer numerisk nøyaktighet hvis vi hadde implementert denne metoden for planetbanene. Likevel fikk vi romfartøyet vårt i riktig bane til hjem-planeten, og vi fikk den til en avstand 1, som i teorien skal være nære nok planeten for en trygg landing.

V. KONKLUSJON

Vi klarte å komme frem til en effektiv måte til baneoverføringer for romfartøyet vårt, for å nå frem til destinasjonsplaneten. Modellen viser også at det var en vellykket simulering av Hohmann-transformasjonen og at romfartøyet kom inn på riktig bane. Alt i alt, vil vi konkludere med at vi fant en robust måte for oppskyting av romfartøyet og en Hohmann-transformasjon fører den til riktig bane rundt destinasjonsplaneten.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Oppgavetekst AST2000 - Part 5, Satellite Launch.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hohmann_transfer_orbit, Wikipedia - Hohmann Transfer Orbit, Lesedato: 09.11.2022.
- <https://www.youtube.com/watch?v=KdHI5Fn9Fu8>, Youtube: INTEGRALPHYSICS - Hohmann Transfers Explained Using Basic Physics Part 1/2. Lesedato: 09.11.2022.

Appendix A: Utledning

1. Utleding av tiden det tar for Hohmann-transformasjonen:

Vi vil se på tiden det tar for romfartøyet å transformere fra hjemplanetbanen til destinasjonsplanetbanen. Vi kan bruke Keplers tredje lov for en elliptisk bane, og får følgende formelen:

$$P^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)a^3$$

Vi har at

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Slik at vi får:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3$$

Tiden vi får er tiden romfartøyet hadde brukt på et helt omløp på den elliptiske banen, men enn Hohmann-transformasjon er kun en halv bane, slik at vi må ta

$$T = \frac{P}{2}$$

Vi får da:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{\left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}{2} \\ T &= \sqrt{\frac{\left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}{2}} \end{aligned}$$

Som er tiden en Hohmann-transformasjon tar.

2. Utledning av vinkelen α mellom planetene:

Når det gjelder å reise fra et himmellegeme til et annet, er det avgjørende å starte manøvreringen på det tidspunktet da de to planetene er riktig på linje.

Vinkelhastigheten til destinasjonsplanet, i en avstand R fra stjernen er gitt ved:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r_2^3}}$$

Halve banen til destinasjonsplanetet utspenner 180° . Romfartøyets startposisjon skal være på en vinkel α , og den vil reise $180^\circ - \alpha$ før den treffer destinasjonsplanet. Vinkelen α kan uttrykkes med vinkelhastigheten til destinasjonsplanetet ved:

$$\alpha = \omega T$$

Vi har tiden det tar for romfartøyet å reise Hohmann-transformasjonen, og hele banen er gitt ved $P = 2\pi$. Slik at vi får sammenhengen:

$$\frac{T}{P} = \frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ}$$

Eller gitt i radianer som:

$$\frac{T}{P} = \frac{\pi - \alpha}{2\pi}$$

Sammen med uttrykket for vinkelhastigheten relatert til omløpstiden P, får vi sammenhengen:

$$\frac{\pi - \alpha}{2\pi} = \frac{\omega T}{2\pi}$$

Dersom vi løser dette for α , får vi:

$$\alpha = \pi - \frac{2\pi\omega T}{2\pi}$$

Stryker vi π og 2, står vi igjen med:

$$\alpha = \pi - \omega T$$

Setter vi vinkelhastigheten og tiden inn i uttrykket over får vi:

$$\alpha = \pi - \sqrt{\frac{GM}{r_2^3}} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}{2}}$$

Løser vi opp uttrykket og sammenfatter det får vi:

$$\alpha = \pi \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)^3}\right)$$

Som vi bruker som vinkelen α .

AST2000 - Del 6

Forberedelser til Landing

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Før vi lander romfartøyet på den fremmede destinasjonsplaneten, ønsker vi å studere planetens atmosfære og overflate. I denne delen får vi romfartøyet til å gå i en lav, stabil bane rundt planet nummer 2. Slik kan vi måle spektrallinjene utstrålt fra planeten, og analysert atmosfæren ved å modellere en temperatur- og tetthetsprofil. Utifra dette finner vi at gassene som finnes i planetens atmosfære er 50% N_2O og 50% CO_2 . Etter vi har funnet den nødvendige informasjonen vi trenger å vite før landing, bruker vi kameraet ombord til å lete etter egnede landingsteder for romfartøyet vårt på destinasjonsplaneten.

I. INTRODUKSJON

Vi har fått romfartøyet vårt i bane rundt destinasjonsplaneten, men vi ønsker nå å stabilisere banen, samt å gjøre banen sirkulær og nærmere planeten. Vi er nemlig interessert i å studere overflaten til planeten før vi lander romfartøyet, slik at vi er godt forberedt og unngår ødeleggelsjer av utstyret eller raketten. Vi ønsker en sirkulær bane for å få så nøyaktige målinger som mulig av spektrallinjene fra den utstrålende fluksen fra planeten. Disse målingene kan vi bruke for å finne hvilke gasser atmosfæren inneholder, slik at vi kan få en oversikt over tetthet og temperatur. Det er viktig å vite hva atmosfæren til destinasjonsplaneten består av, slik at romfartøyet vårt kan gjennomføre en vellykket landing uten å for eksempel brenne opp. For å finne dette trenger vi å studere absorpsjonslinjene til gassene vi finner i planet atmosfæren. Målingene vi får fra et apparat ombord på romfartøyet inneholder en del støy, slik at vi trenger å skille ut de ekte absorpsjonslinje vi leter etter fra støyen. For å minimere denne støyen i datasettet skal vi bruke en metode vi kaller for χ minimering, som blir utdypet i metode delen. Når vi har funnet de ekte absorpsjonslinjene kan vi modellere spektrallinjene ved å buke en Gaussisk linjeprofil. Vi kan analysere spektrene på de elektromagnetiske bølgene som gassene emitterer ut, og prøve å finne ut hvilket stoff som samsvarer med denne bølgelengden. Slik finner vi ut hva atmosfæren vår består av, og vi kan studere hvordan dette påvirker romfartøyet vårt som er på vei ned for landing. Vi modellerer videre en temperatur- og tetthetsprofil til planeten vår, og gjør noen antakelser for å få til dette. Vi bruker informasjonen vi finner om planeten for å modellere hvordan landingen skal gjennomføres. Landingsstedet finner vi ved å speide utover planeten med kameraet og å studere på bildene kameraet ombord tar. Til slutt finner vi et passende landingssted for romfartøyet vårt, og alt er tilrettelagt for å starte landingen av romfartøyet vårt.

II. METODE

Nå går romfartøyet vårt i bane rundt destinasjonsplaneten, men vi trenger å få romfartøyet i en enda

lavere og mer stabil bane for å studere atmosfæren til planeten. Fra mekanikken vet vi at radius til en sirkulær bane bestemmes av den kinetiske energien til legemet som går i bane. Dersom vi reduserer hastigheten vil den gjennomsnittlige avstanden mellom romfartøyet og midten av planeten bli mindre. Vi må være forsiktige her, for vi vil helle ikke senke banen så mye av vi kommer inn i atmosfæren til planeten helt enda, vi må først studere den. For å være sikre på at vi ikke kommer inn i atmosfæren bruker vi orienteringsprogramvaren og sjekker avstanden mellom romfartøyet og planeten, dersom gjennomsnittsavstanden forblir konstant over tid, kan vi trygt vite at vi ikke har kommet for nære atmosfæren. For å redusere farten til romfartøyet, bruker vi motoren til å gi romfartøyet et dytt i motsatt retning av fartsretningen, slik at den bremser. For å finne hvor mye vi måtte bremse, prøvde vi ulike dytt fra motoren (altså ulike hastighetsverdier) i simulasjonen, for å komme så nærmest mulig.

For å sjekke om romfartøyet er i en sirkulær bane rundt destinasjonsplaneten, kan vi se på farten og energien. Når romfartøyet er i en sirkulær bane, vil radiusen være lik overalt i banen, så den potensielle energien må være konstant. Siden energi er bevart i systemet vårt, må den kinetiske energien også være bevart. Dermed må farten også være tilnærmet konstant overalt i banen. Vi kan måle romfartøysts fart på forskjellige steder i banen, og hvis farten har lite til ingen endring, altså at den er tilnærmet konstant, kan vi konkludere med at romfartøyet er i en stabil bane. For å sertifisere at det stemmer brukte vi kameraet ombord for å se at vi faktisk reiste i en sirkulær bane.

Etter at romfartøyet har kommet i en lav og stabil bane, starter studiene av atmosfæren. Vi er interessert i å studere atmosfæren fordi vi ønsker å se hvilken effekten den har på romfartøyet under ladning. Effekter som for eksempel luftmotstand, som avhenger av atmosfærens tetthetsprofil. Første steg for å gjøre dette er å finne hvilke gasser som finnes i planetens atmosfære. Metoden vi bruker er ved spektralanalyser av spektralet utstrålt fra planeten, som romfartøyet vårt allerede har begynt å måle med et måleapparat. Romfartøyet vårt

er utstyrt med et apparat som kan måle fluksen fra lyset med bølgelengder mellom 600 nm og 3000 nm. Vi bruker 10 km/s som en øvre grense for romfartøyets fart i forhold til planeten i løpet av tiden vi bruker på å observere og finne spektralen til atmosfæren. Absorpsjonsspekter fra gasser viser absorpsjonslinjer, som er mørke linjer på det elektromagnetiske spektrumet. Det viser at et stoff har absorbert energi ved en viss bølgelegde, og forskjellige bølgelengder blir absorbert på ulike måter. Disse absorpsjonsspektrene vil fortelle oss hvilke stoffer som er tilstede i atmosfæren.

Målet vårt er å analysere fluks-dataen vi får fra apparatet ved å bruke χ^2 minimering for å finne hvilke gasser vi kan finne i planetens atmosfære. Vi antar at alle gassene som kan være tilstede finnes i tabell 1 og 2, og det er noen av disse gassene vi forventer at atmosfæren består av. I figur 2 ser vi absorpsjonslinjene vi ser etter i spektrallinjene vi mäter i den utstrålte fluksen fra planeten.

Element	Isotope	A	Z	N
Hydroge	$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$	1	1	0
Carbon	$\begin{array}{c} 12 \\ 6 \end{array}$	12	6	6
Nitrogen	$\begin{array}{c} 14 \\ 7 \end{array}$	14	7	7
Oxygen	$\begin{array}{c} 16 \\ 8 \end{array}$	16	8	8

Figure 1. Tabell over den subatomære sammensetningen, altås antall protoner o nøytroner i atomkjernen) for gassene som kan finnes i atmosfæren.

Gas	Spectral Lines [nm]		
O ₂	632	690	760
H ₂ O	720	820	940
CO ₂	1400	1600	—
CH ₄	1660	2200	—
CO	2340	—	—
N ₂ O	2870	—	—

Figure 2. Tabell 2 inneholder spektrallinjene av vanlige gasser å finne i planetatmosfærer. De tomme boksene kommer av at alle gass ikke nødvendigvis har alle tre spektrallinjene.

Målingene vi mottar inneholder mye støy, fra for eksempel elektroner på avveie, vind, påvirkning fra romfartøyet, atmosfæren, temperaturen som gir molekylene termisk bevegelse eller andre ukjente årsaker. Dette gjør at vi ikke får absorpsjonslinjene på deres naturlige bølgelengde i spekteret. Derfor ønsker vi å finne et uttrykk for det maksimum Dopplerskifte som er mulig for rom-

fartøyet å observere når vi analyserer planetens atmosfære:

$$\Delta\lambda_{max} = \left(v_{max} + \sqrt{2 \frac{kT_{max}}{m}} \right) \frac{\lambda_0}{c}$$

Utledning av dette finnes i A1.

Vi treger å skille ut de falske absorpsjonslinjene og å få bort store støyverdier i dataen vi mottar. For å minimer støyen i dataen bruker vi metode som vi kaller χ^2 minimering. Denne metoden er en måte å tilpasse kurver, som er egnet å bruke når vi analyserer signaler og data med støy. Hva er egentlig støy? Vi kan se på støy som en tilfeldig fluktuasjon, som vil si endringer i standardavviket til målingene, og som gir utslag på målingene. Ideen bak χ^2 minimering er at vi finner de underliggende signalene bak de støyforstyrrede målingene og fjerner disse forstyrrelsene. Slik kan vi finne de ekte absorpsjonslinjene. Vi antar at gassen i atmosfæren er en ideell gass, slik at hastigheten til partiklene er Gaussisk fordelt. Altså ønsker vi å modellere spektrallinje ved å bruke en Gaussisk linjeprofil, som minimerer avviket fra de faktisk målte signalene til den tilnærmede dataen. Metoden med χ^2 minimering gir oss et sett av data for hver spektrallinje uavhengig av om målingene viser en faktisk spektrallinje. Så vi trenger å filtrere de ekte spektrallinjene fra statistisk støy. Vi uttrykker χ^2 minimering ved følgende sammenheng:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{f_i - f(t_i)}{\sigma_i} \right]^2$$

Der f_i betegner de målte punktene, $f(t_i)$ betegner de forventede datapunktene basert på den matematiske modellen $f(t)$ og σ_i er standardavviket på bølgelengden i fra støyen i målingene.

Vi bruker kunnskap om Gaussisk distribusjon til å utlede et uttrykk for standardavviket til linje profilen som en funksjon av gasstemperaturen T, massen til partikken m og bølgelengden til spektrallinjen λ_0 :

$$F(\lambda) = 1 + (F_{min} - 1)e^{-\frac{1}{2}(\lambda - \frac{\lambda_0}{\sigma})^2}$$

Hvor standardavviket for hvert molekyl er gitt ved:

$$\sigma = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Der dataen har blitt normalisert slik at fluksen $F = 1$ er der ingen spektrallinjer er representert, altså at dette er den forventede fluksen uten absorpsjonslinger. Utledningen av standardavvik finnes i A2.

Vi ser på verdiene vi putter inn i χ^2 metoden. Initial bølgelengdene har vi fra tabellene over, og vi setter de inn for hvert molekyl. F_{min} er bunnpunktet til absorpsjonlinjen, og vi har oppgitt at den er forventet å være større en 0.7, altså $F_{min} = 0.7$. Dersom absorpsjonslinjene understiger denne verdien regner vi det ikke som en spektrallinje. Rødforskyvning er forskyvningen av bølgelengden når bølgelengden øker, og motsatt effekt kaller vi blåforskyvning. For at bølgelengdene skal være innenfor det rødforskyvet eller blåforskyvet spektrumet, finner vi et intervall som vi leter etter bølgelengdene i:

$$\lambda_0 - \Delta\lambda_{max} \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda_{max}$$

Temperaturen er forventet å ligge mellom:

$$T \in [150K, 450K]$$

Med dette kan vi finne støyet og utsendt fluks fra planeten, samt bruke χ^2 metoden numerisk.

Med spektrallinjene kan vi kalkulere gjennomsnitts molekyl vekten av atmosfæren, μ . Vi lar hver spektrallinje vi finner telle uansett om gassen er tilstede eller ikke, og at alle gassene kommer i samme mengde. Formelen vi kan bruke for å regne ut molekylærmassen til atmosfæren er gitt ved:

$$\mu = \sum_{i=1}^N f_i \frac{m_i}{m_H}$$

I formelen for molekylvekt er f_i prosentvis andel av gassen i atmosfæren, den skal være mellom 0 og 1, m_i er massen til et gassmolekyl i og m_H er massen til et hydrogenatom, som er proton og nøytronmassen.

Vi ønsker å lage en modell av atmosfæren, ved å finne en tetthets- og temperaturprofilen. Vi starter med å se gjennom antakelsene og forenklinger vi gjør for atmosfærmodellen:

Vi antar at atmosfæren er uniform, altså hvis atmosfæren består av for eksempel 30% metan, ville det vært 30% metan i hvert punkt i atmosfæren. Vi antar også at atmosfæren er sfærisk symmetrisk, altså at tettheten avtar likt for alle radiuser i alle retninger. Så tettheten $\rho = \rho(r)$, der r er avstanden fra sentrum av planeten til et punkt i radiell retning. Vi antar også at atmosfæren er i hydrostatisk likevekt, altså har atmosfæren stabilisert seg. Siden vi antar en hydrostatisk likevekt, får vi følgende sammenheng:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Der $g(r) = \frac{Gm}{r^2}$ er gravitasjonskraften fra planeten, P er trykket i atmosfæren og $\rho(r)$ er tettheten vi ønsker å

finne.

Antar videre at gassen er en ideell gass, slik at den ideelle gass-loven er oppfylt, slik at vi kan bruke sammenhengen:

$$P = nkT = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

Der k er Boltzmann-konstanten og μ er gjennomsnitts molekylær masse.

Vi antar at atmosfæren er adiabatisk opptil høyder på $T = T_0/2$ med $\gamma = 1.4$, ellers er den isoterm. Det er enn forenkling å si at en prosess er adiabatisk er en måte å forenkle prosesser med, ettersom de fleste prosesser i en eller annen grad blir påvirket av omgivelsene. Hvis vi for eksempel ser på en prosess der det avgis eller mottas stråling, slik som i atmosfæren. Det er mye lettere å regne på prosesser hvis vi antar adiabatiske forhold, og strålingen kan han så lite å si for det store bilde at vi kan se bort fra det, så vi antar adiabatiske forhold for enkelhetens skyld. Fra antakelsene om adiabatisk atmosfære får vi følgende sammenheng:

$$P^{1-\gamma}T^{-\gamma} = konstant$$

Fra antakelsene om at atmosfæren ellers er isoterm, har vi følgende:

$$T = konstant$$

Vi antar også at gravitasjonsakselerasjonen fra overflaten til toppen av atmosfæren endres veldig lite i forhold til at tykkelsen på atmosfæren er veldig liten i forhold til radiusen til planeten.

Nå som vi har alle antakelsene og forenklingene, kan vi starte å modellere atmosfæren, altså bestemme planetens tetthets- og temperaturprofilen. Ved å bruke formlene som beskrevet over, kan vi finne uttrykkene:

$$\begin{aligned} \frac{dT(r)}{dr} &= -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\mu m_H g(r)}{k} \\ \frac{d\rho(r)}{dr} &= -\frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{g(r)\mu m_H}{k} \end{aligned}$$

Utleddet finnes i A3 og A4.

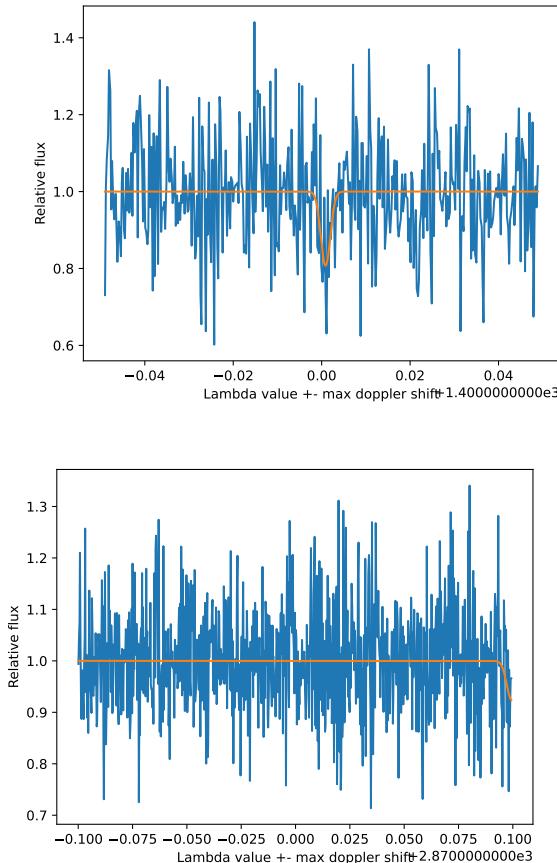
Disse uttrykkene løser vi numerisk slik at vi får et sett med løsninger over et intervall fra planetoverflaten til der hvor atmosfæren slutter som vi er interessert i å se på. Med dette kan vi modellere hvordan atmosfæren vår ser ut.

Nå som vi har funnet en rekke detaljerte beregninger av planetens atmosfære, er det videre på tide å tenke på å lande romfartøyet.

III. RESULTATER

Vi skal nå se på hvilke resultater vi fikk fra målingene gjort fra måleapparatet ombord på romfartøyet vårt i bane rundt destinasjonsplaneten. Vi approksimerer absorpsjonslinene med χ^2 -minimeringen og modellerer absorpsjonslinjene. Vi får følgende resultater:

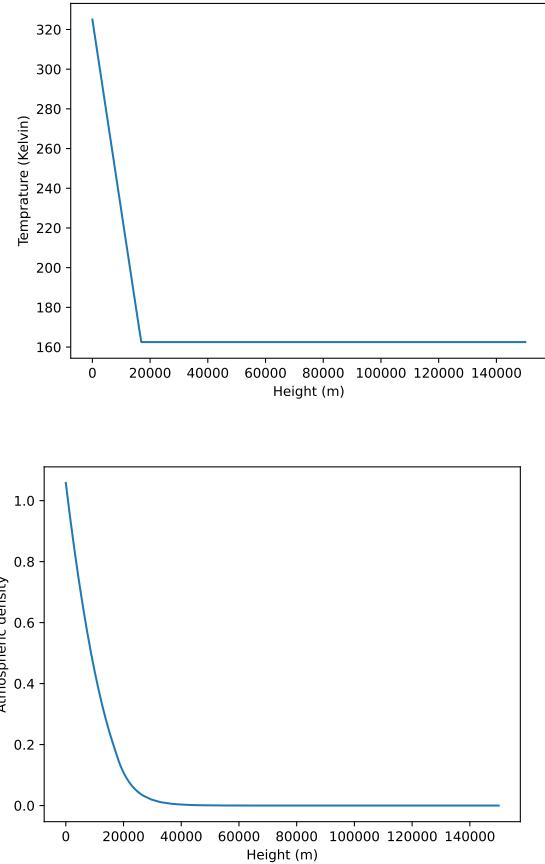
Type	Flux	Wavelength	Kelvin	Doppler shift
O2	0.7915	632	150	0.0218
O2	0.9492	690	450	0.0238
O2	0.8271	760	185	0.0262
H2O	0.9390	720	150	0.0251
H2O	0.8729	820	150	0.0286
H2O	0.8576	940	150	0.0328
CO2	0.8068	1400	282	0.0481
CO2	0.8525	1600	150	0.0549
CH4	0.9390	1660	150	0.0580
CH4	0.7000	2200	150	0.0769
CO	0.8271	2340	424	0.0809
N2O	0.9237	2870	302	0.0985



Tanken bak analysen å finne parameterne til modellen som passer best til dataen i dette intervallet vi ser på. Vi gjør det for alle gassene på alle bølgelengdene vi har fått oppgitt, og leser av resultatene fra χ^2 -minimeringen

og modellen. Slik kan vi finne sannsynligheten for at vi har gassen vi undersøker og hvor mye av den som finnes. Vi fant også at atmosfæren vår vil bestå av 50% N_2O og 50% CO_2 . Altså er halvparten av gassene i atmosfæren nitrogenoksid og halvparten karbondioksid.

Vi modellerede videre atmosfæreprofilen til planetet og fikk følgende resultater:



Vi ser fra grafene de avtar radielt ut fra overflaten til planeten, som er fornuftige resultater etter antakelsene våre. Atmosfæren blir tynnere jo lenger ut mot verdensrommet vi kommer, fordi tettheten avtar med fallende trykk oppover i atmosfæren, det samme for temperaturen slik at det blir kaldere. Vi ser videre at temperaturen får en knekk, som vil være der vi skifter fra den adiabatiske atmosfæren til den isoterme atmosfæren.

Etter at romfartøyet hadde kommet i en lav og stabil bane, fikk vi noen fine bilder av destinasjonsplaneten vår:

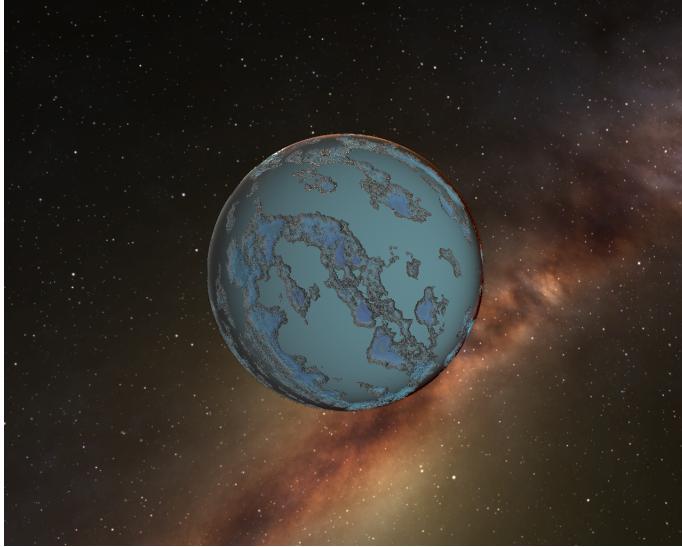


Figure 3. Planet 2 fotografert

Utifra disse bildene kan vi velge en lokasjon for landing av romfartøyet. Lokasjonen vi fant er forhåpentligvis ikke i nærheten av en vulkan, og er på solsiden av planeten slik at vi ser hvor vi lander på landingsvideoen i neste del av romoppdraget!

IV. DISKUSJON

Vi har gjort en del antakelser som gjør at modellene våre ikke kan stemme helt overens med virkeligheten. Blant annet har vi antatt at temperaturen er konstant langt ute i atmosfæren, men dette stemmer ikke helt med det ekte verdensrommet. I tillegg har vi antatt at vi har en konstant gravitasjonsakselerasjon som påvirker nøyaktigheten i resultatene. Jo lengre ut i atmosfæren vi er, jo større feil blir det å anta at det er konstant gravitasjon. Ellers klarte vi å implementere det analytiske i den numeriske løsningen, slik at vi fikk en atmosfærmodell med fornuftige resultater for temperatur og tetthet. En av de største mulige feilene vi kan møte på ligger i vår tolkning av atmosfæren og komposisjonen av molekylene vi forventer å finne der. Her har vi dratt konklusjoner fra målinger med store mengder støy, dette støyet kommer fra at målingene vi har gjort har en usikkerhet i nøyaktigheten av det som blir målt. Vi har dermed alt vi trenger for å utføre enn vellykket landing av romfartøyet og bruker disse modellene videre for å simulere enn vellykket landingen av formfartøyet vårt.

V. KONKLUSJON

Vi fikk en vellykket temperatur- og tetthetsprofil for atmosfæren til destinasjonsplaneten vår ved å bruke både χ^2 -minimering for å skille ut de riktige absorpsjonslinjene

fra støyen, modellerte spektrallinjene med en Gaussisk linjeprofil og analyserte bølgelengdene vanlige gasser som opptrer i atmosfærer emitterer ut, slik at vi kan konkludere med hvilke gasser vår atmosfære består av. Vi har sett i resultatene hvordan temperaturen og atmosfæren avtar utover i atmosfæren, som vi har kommet frem til at er fornuftige resultater, ettersom at tettheten avtar med fallende trykk oppover i atmosfæren. Videre får vi bruk for atmosfærmodellen vår til å finne ut hvordan alle faktorene i atmosfæren til planeten påvirker romfartøyet vårt når vi skal lande den. Landingsposisjonen finner vi ved å studere bildene romfartøyet vårt tar, og går for et sted som ikke inneholder farer for mannskapet eller romfartøyet vårt.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Oppgavetekst AST2000 - Part 6, Preparing For The Landing.

Appendix A: Utledning

1. Utledning av maksimum Dopplerskifte

Skal utlede et uttrykk for det maksimale Dopplerskifte som romfartøyet er i stand til å observere når vi analyserer planetens atmosfære. Vi vet at formelen for Dopplerskifte er:

$$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda_0$$

Her er v den relative farten mellom romfartøyet og partiklene i gassen som vi henter data om fluksen fra. I tillegg har vi c som lysfarten og λ_0 som er bølgelengdene. Vi må også inkludere farten til gasspartiklene for å måle Dopplereffekten. Vi vet at hastigheten i en partikkelen i en gass er:

$$v = \sqrt{2 \frac{kT}{m}}$$

Her er T temperaturen til gassen, k er Boltzmannkonstanten og m er massen til gasspartikkelen. Så vi finner at maksimale Dopplerskifte kan skrives som:

$$\Delta\lambda_{max} = \left(v_{max} + \sqrt{2 \frac{kT_{max}}{m}} \right) \frac{\lambda_0}{c}$$

Her er bruker vi $10km/s$ som øvre grense for romfartøyets hastighet i forhold til planeten iløpet av tiden den observerer og måler spektrallinjene til atmosfæren. Jo høyere hastighet romfartøyet vårt har, jo større blir Dopplerskifte.

2. Utledning av standardavvik i den Gaussiske linjeprofilen

Vi skal modellere spektrallinjene ved hjelp av en Gaussisk linjeprofil, og vi skal utlede et uttrykk for standardavviket til linjeprofilen σ som en funksjon av gasstemperaturen T , massen til a partikkelen i gassen m og den sentrale bølgelengden av spektrallinen λ_0 .

Vi har fra tidligere sammenhengen:

$$\sigma = \frac{FWHM}{\sqrt{8\ln 2}}$$

For en Gaussisk linjeprofil har vi sammenhengen med standardavviket gitt som:

$$FWHM = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

Vi ser på bølgelengder i intervallet:

$$\lambda_0 - \Delta\lambda_{max} \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda_{max}$$

Slik at vi finner at standardavviket for en Gaussisk linjeprofil er gitt ved:

$$\frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

3. Utledning av temperatur

Starter med å ha nødvendige formler klart foran oss:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

$$P^{1-\gamma} T^{-\gamma} = C$$

$$P = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

Uttrykket vi vil se på er formelen for en adiabatisk gass:

$$P^{1-\gamma} T^{-\gamma} = C$$

Vi ønsker å derivere dette uttrykket med hensyn på r . Ved produktregelen får vi da:

$$(1-\gamma)P^{-\gamma}T^\gamma \frac{dP}{dr} + P^{1-\gamma}\gamma T^{\gamma-1} \frac{dT}{dr} = 0$$

Skriver om uttrykket slik at vi får:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P(r)}{T(r)} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dr}$$

Den ideelle gass-loven er gitt ved uttrykket:

$$P = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

$$\rho = \frac{P(r)\mu m_H}{kT(r)}$$

Vi har uttrykket for hydrostatisk likevekt:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Og setter vi utrykket for tetthet sammen med hydrostatisk likevekt får vi:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P(r)\mu m_H g(r)}{kT(r)}$$

Setter vi differensialllikningene sammen får vi:

$$\frac{P(r)}{T(r)} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dr} = -\frac{P(r)\mu m_H g(r)}{kT(r)}$$

Forenkler og organiserer uttrykket slik at vi står igjen med:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\mu m_H g(r)}{k}$$

4. Utledning av tetthet

For å finne tettheten ser vi på formelen for den ideelle gassloven og den hydrostatiske likevekt sammen:

$$P = \frac{\rho(r) k T(r)}{\mu m_H}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) g(r)$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho(r) k T(r)}{\mu m_H}\right)}{dr} = -\rho(r) g(r)$$

$$\frac{d(\rho(r) T(r))}{dr} = -\frac{\rho(r) g(r) \mu m_H}{k}$$

Skriver ut og flytter og bytter slik at vi til slutt får:

$$\frac{d\rho(r)}{dr} T(r) + \rho(r) \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\rho(r) g(r) \mu m_H}{k}$$

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{g(r) \mu m_H}{k}$$

AST2000 - Del 7

Landing

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Vi har kommet til delen av prosjektet der vi skal lande romfartøyet! Vi har bygget videre på den tidligere modellen vi lagde av destinasjonsplanetens vår, ved å inkludere luftmotstanden romfartøyet vårt opplever på vei gjennom atmosfæren. Slik kan vi simulere hvordan romfartøyet går ned gjennom atmosfæren, uten at den brenner opp eller kræsjlander. Vi finner at fallskjermen på landingssonden vår trenger et areal på minst 118.69m^2 for å lande trygt. Da har vi en terminalhastighet på mindre enn 3 m/s slik at vi får en myk landing.

I. INTRODUKSJON

I denne delen av prosjektet skal vi lande romfartøyet vårt på destinasjonsplanetens vår. Vi ønsker en trygg landing, og trenger å lage noen flere modeller, dette inkluderer blant annet atmosfæren til planeten. Målene for denne delen er å lage noen veilederende kalkuleringer basert på luftmotstanden i atmosfæren, og bruke en kombinasjon av simulering og intuisjon for å lande romfartøyet trygt. Vi kan prøve og feile så mye vi vil i simuleringen uten å risikere det faktiske romskipet dersom noe går feil, derfor ønsker vi å lage gode modeller før vi iverksetter den virkelige landingen. For å få til en trygg landing, trenger vi blant annet å finne dimensjonene på fallskjermen, slik at landingssonden ikke får for mye motkraft og brenner opp på veien ned. Fallskjermen gjør også at vi kan bremse romsonden uten å bruke motorkraft. Romfartøyet vårt går nå i bane rundt planeten, uten å bli påvirket av tyngekrefta til planeten, fordi den har høy nok tangensiell-hastighet til å gå i bane som en satellitt. Når vi slipper romsonden fra romfartøyet, har den like stor hastighet som romfartøyet. For at romsonden skal lande trygt må vi justere hastigheten for at den skal lande trygt.

II. METODE

I del 6 av prosjektet utviklet vi en modell for atmosfæren til destinasjonsplanetens vår. Nå skal vi utvide denne modellen av atmosfæren til å inneholde atmosfærens bevegelse. I simulasjonene våre gjør vi noen antakelser for luftmotstanden. Først antar vi at hele atmosfæren følger planetenes rotasjonsbevegelse, altså er vinkelhastigheten den samme som planetens og kostant for alle delene av atmosfæren. For å forenkle simulasjonen antar vi også at $C_d = 1$.

Før vi starter simuleringen av landingen, skal vi se på noen effekter av luftmotstanden, ved å bruke den bremsende kraften gitt ved:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v_{drag}^2$$

Her er F_d luftmotstanden som romfartøyet opplever

når det beveger seg med hastighet v i forhold til atmosfæren med tettheten ρ . Konstanten C_d er en dimensjonsvariabel som vi kaller luftmostandskonstanten, som viser hvor motstandsdyktig overflaten til romfartøyet er for atmosfæren. A er arealet til romfartøyet og v_{drag} er hastighetskomponentene med hensyn til hastigheten til romskipet og atmosfæren. Kreftene til luftmotstanden virker i motsatt retning av bevegelsen.

Vi kan bruke luftmotstanden til å senke farten til romfartøyet når den nærmer seg overflaten til planeten. Ved å bruke antakelsene kan vi uttrykke den atmosfæriske farten \vec{w} som en funksjon av høyden r , der $r = r_0 + h$ er planetens radius og høyden over planetoverflaten. Vi må huske å skille ω som er vinkelhastigheten og \vec{w} som betegner atmosfærens hastighet.

Siden atmosfæren er knyttet til rotasjonen av planeten, kan vi skrive vinkelhastigheten som:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Der T er perioden i sekunder, som vi har fått oppgitt.

Atmosfæren til planeten vår har også en hastighet. For å tilnærme hastigheten til atmosfæren, vil vi bruke formelen for vinkelhastighet gitt ved:

$$\vec{w} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Her er \vec{r} posisjonsvektoren, og vi kan bruke polare koordinater, ved at \hat{e}_r er enhetsvektoren i radiell retning, \hat{e}_θ er retningen normalt på den radielle retningen og \hat{e}_z er for z retning. Vi kan skrive posisjonsvektoren som $\vec{r} = r\hat{e}_r$. Vi bruker ingen z- eller θ -komponent, fordi de står normalt på posisjonsvektoren, og hastighetsvektoren til atmosfæren står vinkelrett på den radielle retningen. Dersom vi gjør kryssproduktet for vinkelhastigheten, finner vi et uttrykk for \vec{w} , som en funksjon av posisjonen i atmosfæren:

$$\vec{w} = \omega r \hat{e}_\theta$$

Setter vi inn for vinkelhastigheten får vi:

$$\vec{w} = \frac{2\pi r}{T} \hat{e}_\theta$$

Der vi har radiusen fra midten av planeten til posisjonen i atmosfæren, rotasjonsperioden og den tangentielle enhetsvektoren. Det er fornøytig, ettersom vi har antatt at atmosfæren roterer jevnt med planeten.

For å finne et uttrykk for v_{drag} , kan vi se at luftmotstanden virker i motsatt retning av hastigheten. Når romsonden kommer inn i atmosfæren, har den en hastighet \vec{v} . Vi kan dekomponere romsondens fart med en radiell komponent v_r og en tangentiell komponent v_θ . Slik at vi kan skrive dette som:

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$$

Der \vec{e}_r og \vec{e}_θ er den radielle og tangentielle enhetsvektoren.

Da har atmosfæren på planeten også en hastighet som vi kaller \vec{w} . Den relative hastigheten som vi vil finne får vi ved å ta romsondens hastighet og trekke fra atmosfærens hastighet. Vi må også huske at luftmotstanden skal virke mot bevegelsesretningen. Hastigheten til romsonden har vi satt til å være positiv, slik at vi kan skrive at hastigheten til atmosfæren v_{drag} .

$$v_{drag} = \vec{v} - \vec{w}$$

Vi kan skrive dette ut til å være:

$$\begin{aligned} v_{drag} &= v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta - \omega r \hat{e}_\theta \\ &= v_r \hat{e}_r + (v_\theta - \frac{2\pi r}{T}) \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

Vi bruker disse uttrykket for å designe en funksjon som kalkulerer luftmotstanden romfartøyet opplever, som en funksjon av arealet og dens posisjon og fart i forhold til planeten.

Vi skal gjøre en analytisk tilnærming for å finne romfartøyets terminalhastighet, altså hastigheten romsonden får etter den har brutt gjennom atmosfæren. Vi er interest i denne hastigheten for å se på landingsprosedyren av romsonden. Vi kan kontrollere hastigheten ved å justere størrelsen på fallskjermen på romsonden, som vi kan bruke når den faller gjennom atmosfæren. Luftmotstanden vil umiddelbart begynne å virke på romfartøyet når det kommer til atmosfæren. Vi antar at romfartøyet ikke kræsjer før det når terminalhastigheten.

Ettersom romsonden faller nærmere og nærmere overflaten til planeten, vil den relative hastigheten bli mindre og mindre og til slutt null, fordi luftmotstanden kontinuerlig bremser romsonden i tangensiell retning, og det er

ingen andre krefter som virker for å gi den akselerasjon. Romsonden vil først ha størst luftmotstand i tangensiell retning, fordi den har størst tangensiell fart når den bryter atmosfæren. Etterhvert vil tangensialhastigheten gå mot null, og til slutt har den kun terminalhastigheten. Da vil romsonden følge atmosfærens bevegelse og få planeten sin vinkelhastighet. Så romfartøyet når null tangentiell hastighet i forhold til atmosfæren.

Når romsonden faller gjennom atmosfæren mot overflaten, vil det kun være gravitasjonen og luftmotstanden som virke på den. Når tyngdekraften som trekker romsonden mot overflater er like stor som luftmotstanden, som vi kan se på som friksjonen i atmosfæren mot romsonden, vil den få en hastighet vi kaller terminalfarten eller terminalhastigheten. Når den har oppnådd denne hastigheten, vil den ikke lenger akselerere og romsonden vil falle med en konstant fart. Vi kan argumentere for at radiellhastigheten vil stabilisere seg til en konstant hastighet fra Newtons første lov. Loven sier at dersom det ikke virker noen krefter på et legeme, vil legemet enten forblie i ro, eller fortsette å bevege seg med konstant fart i en rettlinjet bevegelse, der sistnevnte er vårt tilfelle.

For å finne den konstante terminalhastigheten kan se til Newtons andre lov, som sier at når et legeme blir påvirket av krefter, vil legemet få en akselerasjon i retningen kreftene virker. Når luftmotstanden som virker mot romsonden kansellere ut gravitasjonskreftene som virker på romsonden, vil akselerasjonen som forklart blir null, slik at vi kan skrive:

$$\sum F = F_L - F_G = ma = 0$$

Da er farten til romsonden konstant.

Vi antar at $\vec{e}_\theta = 0$. Vi kan omskrive dette for å finne den konstante terminalfarten:

$$\begin{aligned} F_L &= F_G \\ \frac{1}{2} \rho C_d A v_t^2 &= \frac{GMm}{r^2} \\ v_t &= \sqrt{\frac{2GMm}{\rho C_d A r^2}} \end{aligned}$$

Som gir oss terminalhastigheten på hvilken som helst posisjon i atmosfæren.

Vi har nå et uttrykket for den konstante terminalhastigheten, altså den største hastigheten romsonden kan få når den faller gjennom atmosfæren mot overflaten. Tettheten ρ vil varere etter hvor i atmosfæren romsonden er. Vi kan reorganisere dette uttrykket og løse for arealet A, som er det totale tversnittet av arealet til fallskjermen:

$$A = \frac{2GMm}{r^2 v_t^2 C_d \rho} \quad (1)$$

Vi bruker denne formelen for å finne et rimelig estimat for arealet A når romsonden er nære nok overflaten, med farten i radiell retning satt til $v_r = 3$ m/s. Dette er maksimums hastigheten som er nødvendig for en myk landing.

Før vi fortsetter med landingsprodedyre, må vi se litt mer på landingen i seg selv. Vi kan fritt justere dyttene fra motoren ved landing for å balansere terminalhastigheten ved landing. Kraften fra dyttene er gitt ved F_L , og vi kan bruke $F_d + F_L = F_G$ for å utlede:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho_0 A (v_t^2 - v_{safe}^2) \quad (2)$$

Der $v_{safe} = 3\text{m/s}$, og vi ser at kraften til rakettmotoren skrives som luftmotstanden den får med terminalhastigheten minus luftmotstanden den opplever når det er mindre en v_{safe} . Utledning av dette finnes i A1.

Videre skal vi begynne simulasjonen av landingen. Vi designer et program som simulerer banen til romfartøyet når det går gjennom atmosfæren. Jo lengre romsonden faller gjennom atmosfæren, jo mindre blir den tangentiente komponenten til farten. Altså vil romsonden til slutt falle rett den. Vi gjør noen antakelser som vi baserer simuleringene våres på. Vi inkluderer luftmotstanden, gravitasjonskraftene og rotasjonen av atmosfæren i beregningen våres. Det er kun romsonden som lander på overflaten av planeten, ikke hele romfartøyet. Denne romsonden sendes ned fra romfartøyet på et tidspunkt vi velger, og vi må passe på at romsonden har en annen masse enn romfartøyet, som vi har fått oppgitt fra forskningssenteret. Romsonden vår er utstyrt med fallskjermen som vi har funnet arealet til ved formelen gitt av (1). Romsonden er også utstyr med en motortr som vi kan bruke for å gi romsonden dyttene når den går inn for landing. I tillegg må vi være forsiktige med luftmotstanden, for dersom lufttrykket pga. luftmotstanden overstiger 10^7 Pa, da vil nemlig romsonden brenne opp.

Vi har nå alt vi trenger for selve landingsprosedyren. Vi utvikle ferdig alle de nødvendige kommandoene for å lande romfartøyet på landingsstedet. Vi bruker simulasjonen vår som en modell for hvordan romsonden oppførere seg i atmosfæren. Romsonden vår er som nevnt tidligere i stand til å opprettholde en hastighet på opptil $v_r = 3$ m/s. Alle landinger som har en hastighet større enn dette regner vi som en kræsjlanding. Hvis vi oppdager at fallskjermen svikter eller at landeren begynner å brenne når den går gjennom atmosfæren, trenger vi å senke farten. Vi prøver å gå gjennom hastigheten på en slakere vinkel for å bryte atmosfæren mer skånsomt.

III. RESULTATER

Før vi forsøker å lande fartøyet vårt behøver vi konkrete mål av verktøyene vi bruker for å sikre en trygg landing. Dette inkluderer overflatearealet av fallskjermen vi ønsker å benytte, som gjennom metoden beskrevet tidligere gir oss et overflateareal på 118.69m^2 . Med en fallskjerm på denne størrelsen, vil terminalhastigheten til romsonden nær overflaten bli mindre enn sikkerhetsfarten på 3 m/s, slik at vi får en myk landing. Videre uttrykker vi hvor mye kraft vi trenger fra landingsdyttene fra motoren, gjennom en funksjon avhengig av høyde og hastighet, utledet i (A1) med gravitasjonen som vi også må ta hensyn til. Vi starter prosessen av å lande en avstand 118 000 km unna overflaten til planeten vår, etter vi bremser fartøyet bruker vi rakettene våres til å opprettholde en fornuftig hastighet. På reisen vår inn mot overflaten anvender vi mange mindre hastighetsjusteringer, for å opprettholde en fornuftig hastighet. Denne hastigheten er avhengig den atmosfæriske tettheten, slik at raketten ikke brenner opp, som et resultat av luftmotstand. Etter 38.7 timer når vi en passende høyde der vi kan slippe ut fallskjermen. Dette utfører vi 5148 km over overflaten. Herifra bruker vi litt over 90 minutter til å nå planet overflatelen. 500 m over bakken bruker vi rakettmotorene som er bygget inn i landingsonden vår til å senke hastigheten til under 3 m/s. For å oppnå denne hastighetsredusjonen bruker vi 180 meganewton med krefter. Så etter 1.68041 år har vi endelig landet romfartøyet vårt. Dette er også illustrert i figure 1, som beskriver hendelsesforløpet for hele reisen ifra planleggingsfasen av reisen.

Merk: størrelsene er ikke representative av de faktiske tidsintervallene

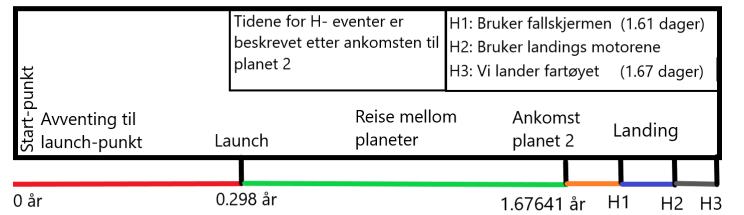


Figure 1. Tidslinje for reisen

IV. DISKUSJON

Gjennom prosessen av å styre og lande et romfartøy på en annen planet introduserer vi mange elementer vi må ta til betraktnng når analyserer nøyaktigheten og feilmarginen til kalkulasjoner og simuleringer vi gjør for å forbrede oss til landingsprosessen. Mest essensielt er et sett med forenklinger vi gjør for å kunne produsere resultater. Dette innebærer forenklingen av hvordan vi ser på

luftmotstanden, her har vi simplifisert luftmotstandscoeffisienten til å være 1 gjennom hele atmosfæren. Dette bærer noe unøyaktighet, men gir oss likevel en modell som tar til betrakting flere variabler. Videre når vi ønsker å utvikle en modell for atmosfæren og hvordan den spiller en rolle i modellen vår for luftmotstand, gjør vi et par forenklinger. Her sier vi at atmosfæren beveger seg med lik vinkelhastighet på hele planeten og at atmosfæretettheten kun er avhengig av høyde.

V. KONKLUSJON

Vi har utviklet en modell for landingen av romsonden vår på destinasjonsplaneten, ved å inkludere luftmotstanden den opplever på vei gjennom atmosfæren, i tillegg til gravitasjonskraftene og rotasjonen fra bevegelsen til atmosfæren. Vi har sett at romsonden når en konstant terminalhastigheten, etter som at tyngdekraften og luftmotstanden etterhvert utligner hverandre når den faller nærmere planetoverflaten. Vi har funnet arealet fallskjermen til romsonden trenger, og kraften dyttene fra motoren gjør, slik at romsonden får en fart innenfor trygge rammer når den nærmer seg overflaten. Slik får somsonden en trygg landing på destinasjonsplaneten. Romoppdraget er fullført og vellykket!

REFERANSER

- Hansen, F. K., Opgavetekst AST2000 - Part 7, Landing.

Appendix A: Utledning

1. Utledning av kraften fra motordytten:

Skal bruke $F_d + F_L = FG$ for å utlede følgende formel for kraften fra motordytten:

$$F_L = \frac{1}{2}\rho_0 A(v_t^2 - v_{safe}^2)$$

Vi kan sette opp Newtons andre lov for å finne frem til utledningen:

$$\begin{aligned} F_d + F_L &= FG \\ F_L &= FG - F_d \\ &= \frac{GMm}{r^2} - \frac{1}{2}\rho_0 C_d A v_{drag}^2 \end{aligned}$$

Vi har at den konstante terminalfarten er gitt ved:

$$v_t = \sqrt{\frac{2GMm}{\rho_0 C_d A r^2}}$$

Altså er:

$$v_t^2 = \frac{2GMm}{\rho_0 C_d A r^2}$$

Slik at vi kan skrive uttrykket vårt for F_L til å være:

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho_0 C_d A(v_t^2 - v_{safe}^2) \\ &\quad \frac{1}{2}\rho_0 A(v_t^2 - v_{safe}^2) \end{aligned}$$

Som skulle vises.

AST2000 - Del 8

Spesiell Relativitet

15409 og 15406
(Dated: December 16, 2022)

OPPGAVE 1

Introduksjon

I denne delen ønsker vi å undersøke grunnlaget for den spesielle relativitets teorien, og den grunnleggende tankeprosessen som hjelper oss fra velkjent klassisk mekanikk, til Einsteins teori. For å hjelpe oss på veien ønsker vi å ta for oss et enkelt system der vi stiller spørsmål om de grunnleggende egenskapene til systemet endrer seg, spesifikt om tiden ulike observatører vil oppleve vil differere.

Situasjonen

Vi setter opp en situasjon slik at vi har 3 elementer, 2 romfartøy og en observatør, alle reiser med lik fart i en rett linje. Der observatøren er plassert i mellom de to romfartøyene, videre ønsker vi å analysere hvordan systemet oppfører seg idet vi emitterer et lys fra de fartøyene inn mot observatøren, vi ønsker å se for oss en situasjon der observatøren opplever at lyset fra begge kildene treffer samtidig. Videre ønsker vi å vurdere dette fra to ulike referanse punkt, fra observatøren som reiser med systemet, slik at det vil oppleves å være statisk, dette vil vi sammenligne med en observatør som står stille utenfor, altså at hele systemet endrer seg med en konstant hastighet.

Metode

Når vi starter å undersøke situasjonen vi har satt opp anvender vi grunnleggende konsepter som vi er godt kjent med fra klassisk mekanikk. Mest essensielt er formelen $s = vt$, der en avstand s er avhengig av en konstant hastighet v og tid t . Videre er vi interessert i å undersøke dersom systemet vårt endrer seg basert på referansepunkt, og hvordan det eventuelt endrer seg. I denne oppgaven ønsker vi å undersøke to referansepunkter, ifra den midlere observatøren, med denne referansen anser vi systemet som stillesstående og planeten vil ha en hastighet lik den negative verdien av hastigheten til fartøyene. Vi ønsker også se på dette systemet fra perspektivet fra planeten, her vil hele systemet bevege seg med en konstant hastighet. Vi gjør dette for å gå gjennom tankeprosessen som førte oss til teorien om spesiell relativitetsteori.

Konklusjon

Ved å undersøke systemet vårt fra to referansepunkt kan vi se dersom observatøren opplever systemet som statisk vil han oppleve hendelsene som samtidig, altså at begge lysene fra fartøyene skytes ut samtidig, og treffer det motsatte samtidig. Derimot for at en observatør som står stille utenfor skal oppleve at begge strålene treffer observatøren samtidig, kan ikke strålene avfyres samtidig dette kommer av at systemet reiser i konstant hastighet i en retning, og de to strålene reiser i motsatte retninger, og ettersom lyset alltid reiser med konstant hastighet, kan vi si at disse hendelsene skjer på forskjellige tidspunkter i vårt referansepunkt og at det må være en måte å betrakte tid som er relativt til observatøren som betrakter den.

OPPGAVE 4

Introduksjon

Nå som vi har gjort rede for grunnlaget av hvordan vi kan kontekstualisere spesiell relativitetsteori med klassisk mekanikk, og tankeprosessen som førte oss til noen av problemstillingene vi opplever med klassisk mekanikk. Ønsker vi å utforske hvordan vi kan videre undersøke denne teorien, dette innebærer en metode hvor vi kan visualisere forholdet mellom tid og rom, og hvordan hastigheter påvirker disse relasjonene.

Situasjonen

For å utforske hvordan vi kan illustrere effekten av relativistiske effekter ønsker vi å sette opp et eksempel der disse effektene trer i kraft. Vi ønsker å sette opp et system der vi har en stasjonær observatør som observerer tre ulike fartøy, to av dem, 1 og 2 reiser i konstant hastighet, den siste, 3, akselerer over en periode slik at den vil ta igjen fartøy 2, og så akselerere i motsatt retning. Videre ønsker vi å utforske hvordan dette systemet endrer seg basert på hvilket referansepunkt vi observerer fra. Samt undersøke hvordan disse observatørene opplever tid og rom. For å gjøre dette oversiktlig introduserer vi to henderleser, E1 og E2, disse er markert med en stjerne på romtidsdiagrammene, som vi konstruerer senere.

Metode

Nå som vi er klare til å utforske systemet vårt, starter vi med å forestille oss hvordan de ulike fartøyene vil utvikle seg i rommet avhengig av tiden og hvilket referansepunkt vi velger. Denne utviklingen kaller vi verdenslinjen til fartøyene, dette spiller en viktig rolle når vi senere skal illustrere hva de ulike observatørene opplever. Vi ønsker videre å konstruere et romtids diagram for den stasjonære observatøren, samt fartøy 3 som reiser med en variert hastighet (se fig. 1,2). Vi ønsker nå å ta grunnlag i diagrammet fra den stasjonære observatøren, denne skal vi anvende for å få et overblikk av hele systemet. Vi ønsker så å rette blikket mot de to hendelsene introdusert tidligere her ønsker vi å måle tiden det tar fartøy 2 å oppleve tiden mellom de to hendelsene. Videre skal vi se på samme forløp ifra perspektivet fra den stasjonære observatøren. Denne dataen vi samler skal vi bruke for å sammenligne de to referansene, samt illustrere dette konseptet i de eksisterende diagrammene våres.

Konklusjon

Ved å studere denne situasjonen kan vi si litt om relativistiske situasjoner, vi vet at hastighet og tid henger sammen, en gjenstand som reiser med en gitt hastighet vil oppleve tid annerledes fra en stasjonær observatør. Denne tiden er avhengig av differensen på de to hastighetene, større hastigheter vil resultere i større endring i opplevd tid, denne effekten kaller vi tidsdilatasjon. Videre når studerer den akselererende observatøren så vil han oppleve mindre tid basert på konseptet av maximal aging.

OPPGAVE 7

Introduksjon

Nå som vi har gått gjennom grunnlaget for spesiell relativitetsteori, ønsker vi å anvende dette i en "reell" situasjon, for å kunne gjøre dette må vi introdusere et par nye konsepter. Mest grunnleggende er bevaring av moment og energi i ulike relativistiske referanser, ofte bare kalt momenergy. Vi ønsker også transformere mellom ulike referanser, dette utfører vi med å bruke 4-vektor notasjon.

Situasjonen

I dette eksperimentet ønsker vi å sette opp en situasjon der vi har to skip, A og B, som reiser mot hverandre med lik fart, $v_a = -v_b$. Det ene fartøyet er bygget opp eksklusivt av antimaterie, slik at når de kolliderer vil all energien konvertere til fotoner og ingen materie blir igjen.

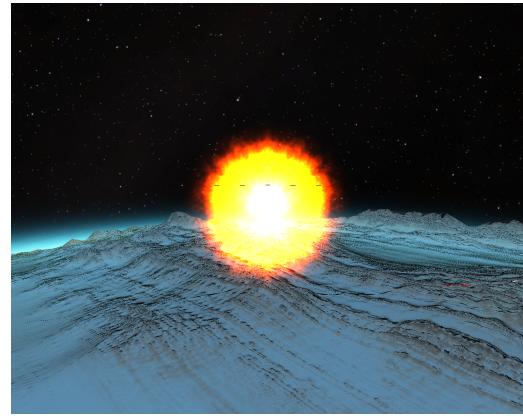


Figure 1. Eksplosjon direkte etter kollisjon

Vi vil i ettertid ha anledning til å se denne eksplosjonen, samt måle antall fotoner som blir produsert.

Metode

Nå som vi har sett for oss systemet vårt er vi klare for utforske hvordan denne prekære situasjonen kommer til å utsprille seg, umiddelbart ønsker vi få kontroll på de ulike delene av systemet vårt. For å gjøre dette benytter vi oss av 4-vektor notasjon, med dette kan vi ha kontroll over total-energien i systemet ved å betrakte både moment og energi, (se Appendix C). Med dette under kontroll ønsker vi å undersøke hva som skjer videre når vi lar disse fartøyene kolliderere. Fartøyene kommer til å fortsette å reise med konstant hastighet, uten påvirkning fra eksterne kilder fram til de møter hverandre. Der kolliderer de i en voldsom kollisjon, hvor all materie konverterer til fotoner. Og med bruk av den beste teknologien tilgjengelig kan vi detektere samtlige lysstråler som emitterer fra kollisjonen. Denne dataen, i tandem med observasjoner vi gjør av eksperimentet bruker vi videre for å trekke konklusjoner om forsøket våres.

Konklusjon

Gjennom utførelsen av dette banebrytende eksperimentet kan vi sammenligne de analytiske modellene våres med synlige observasjoner. Primært kan vi sammenligne den målte λ verdien, dette er en verdi som vi kalkulerte basert på momentenergien før kollisjonen, samt antall målte fotoner. Vi fikk at dette målte inn på 619 nm, dette ville blitt observert som en sterkt oransje, noe som stemmer overens med observasjoner gjort på stedet.

Appendix A: Oppgave 1

1.2.4

1.2.1

Utrykk for venstre fartøy (A1), midlere observatør (A2), og venstre lysstråle (A3) er gitt ved:

$$x_a = vt \quad (\text{A1})$$

$$x_m = vt + L/2 \quad (\text{A2})$$

$$x_{ac} = t \quad (\text{A3})$$

Der v er hastigheten til fartøyet, L er lengden fra et skip til det andre og t er en vilkårlig tid

1.2.2

Videre ønsker vi å uttrykke tiden ved event A ved tiden der lyset møtes ved midten, t_M . Dette får vi ved å sette A2 = A3, og $t = t_m - t_a$:

$$\begin{aligned} t &= vt + L/2 \\ t_m - t_a &= v(t_m - t_a) + L/2 \\ (t_m - t_a) - v(t_m - t_a) &= L/2 \\ t_m - t_a(1 - v) &= L/2 \\ t_a &= t_m - \frac{L/2}{1 - v} \end{aligned}$$

1.2.3

Posisjonen til lysstrålen emittert fra det høyre fartøyet (A4) er uttrykt ved:

$$x_{bc} = t_m + vt_m + L/2 - t \quad (\text{A4})$$

Tiden der det venstre skipet treffer lysstrålen sendt ut fra det høyre skipet uttrykt med tiden t_c der de sto posisjonene er like er uttrykt ved:

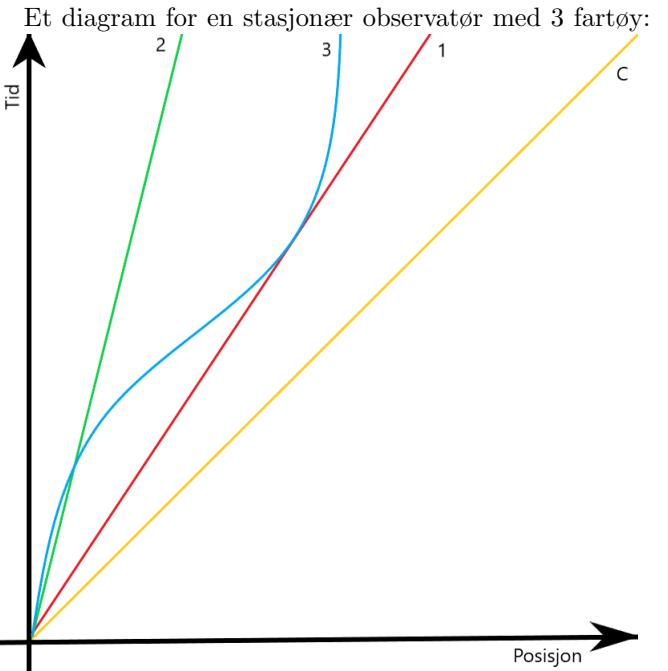
$$\begin{aligned} x_{bc} &= vt \\ t_m + vt_m + L/2 - t &= vt \\ t_m(1 + v) + L/2 - t_c &= vt_c \\ t_m(1 + v) + L/2 &= t_c(1 + v) \\ t_c &= t_m + \frac{L/2}{1 + v} \end{aligned}$$

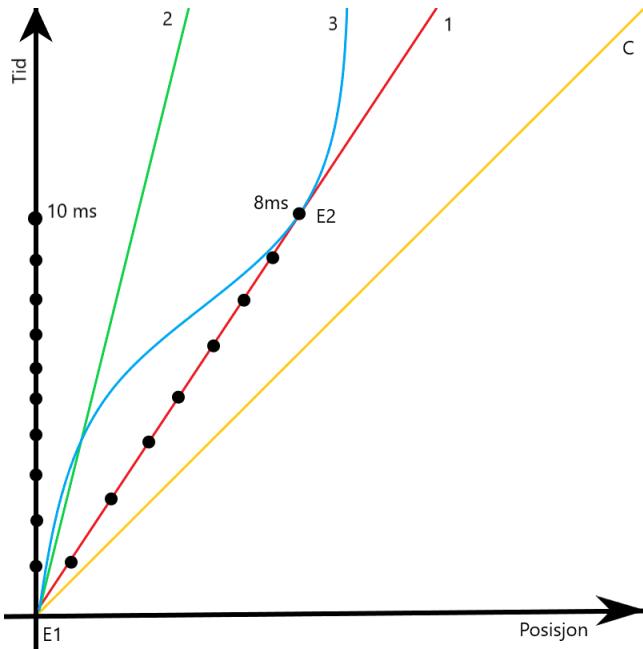
Tiden hendelsesforløpet tar for en stasjonær observatør, (t) er gitt ved tiden mellom t_a og t_c , for observatøren m, som reiser med systemet, vil denne tiden, t^* ta $2*L/2, = L$. Ved å se på forholdet mellom de to referansepunktene får vi forholdet mellom tiden det oppleves gitt ved:

$$\begin{aligned} t^* &= L \\ t &= t_c - t_a \\ t &= t_m + \frac{L/2}{1 + v} - t_m + \frac{L/2}{1 - v} \\ t &= \frac{L/2}{1 + v} + \frac{L/2}{1 - v} \\ t &= \frac{2L}{2(1 - v^2)} = \frac{L}{1 - v^2} \\ \frac{t^*}{t} &= \frac{L}{\frac{L}{1 - v^2}} = \frac{1}{1 - v^2} \end{aligned}$$

Appendix B: Oppgave 4

4.2





4.5

Appendix C: Oppgave 7

7.1

Hastigheten til fartøy a og b er like store, men i motsatt retning som forklart i situasjons beskrivelsen, dermed vil fartøy a oppleve at fartøy b reiser med en hastighet lik $2v_a$

7.2

Vi uttrykker momentenergien til fartøyene våres ved:

$$\begin{aligned} P_\mu(A) &= (E, p) = (\gamma_A m, \gamma_A m v_A, 0, 0) \\ P_\mu(B) &= (E, p) = (\gamma_B m, -\gamma_B m v_B, 0, 0) \end{aligned}$$

7.3

$$\begin{aligned} P'_\mu(A) &= (E', p') = (\gamma_A m, \gamma_A m v'_A, 0, 0) \\ \gamma_A(E', p') &= \gamma_A^2(E - v_A p_x, p_x - v_A E) \\ \gamma_A^2(m - v_A m v_A, m v_A - v_A m) \\ \gamma_A^2(m, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_\mu(B) &= (E', p') = (\gamma_B m, -\gamma_B m v'_B, 0, 0) \\ &= \gamma_B^2(m + v_A m v_A, -m v_A - v_A m) \\ &= \gamma_B^2(m + v_A m v_A, -m v_A - v_A m) \\ &\gamma_A^2(m(1 + v_A^2), -2m v_A) \end{aligned}$$

7.8

Fra situasjonen beskrevet tidligere har vi:
massen = 10^6

antall fotoner = $5.66418 \cdot 10^{41}$ hastighet = $0.148647c$

Vi bruker konservering av momenergy til å regne ut bølgelengden til de emitterte fotonene, dette gir oss at det emitterte har en bølgelende på 619 nm

7.9

Dersom vi analyserer det emitterte lyset og sammenligner det med spektrumet for synlig lys får vi at lyset vi observerer skal tilsvare en mørk oransje, dette stemmer overens med resultatet vi får gjennom simulasjonen.

7.11

$$E' = \frac{\hbar}{\lambda'}$$

$$\lambda' = \frac{\hbar}{E'}$$

Setter inn i uttrykket fra tidligere:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\hbar}{E\gamma(1 \pm v)} \\ &= \lambda \sqrt{\frac{(1-v)^2}{1 \pm v}} \end{aligned}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$$

$$= \lambda - \lambda \sqrt{\frac{(1-v)^2}{1 \pm v}}$$

$$= \Delta\lambda = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1$$

7.12

Bruker doppler-skiftet for observatøren på skipet, setter inn verdien vi fikk fra tidligere resultater. Og uttrykket fra forrige oppgave. Dette gir oss:

Vi bruker en første ordens Taylor-utvikling for uttrykket fra 7.11

Dette gir oss:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\frac{1 + 0.148647}{1 - 0.148647}} - 1 = 0.1615$$

$$\lambda_{emittert} = 619nm$$

$$\lambda_{observatør} = \lambda_{emittert} - \Delta\lambda \cdot \lambda_{emittert}$$

$$\lambda_{observatør} = 518nm$$

$$T(v) = f(0) + f'(0)(0 - x)$$

$$= \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} - 1 + \frac{1}{1} \cdot x = x = v = \frac{v}{c}$$

7.13

Doppler-skift for lave hastigheter er gitt ved:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$



Figure 2. Motivational rat

AST2000 - Del 9

Generell Relativitet

15409 og 15406
(Dated: December 16, 2022)

OPPGAVE 1

Introduksjon

Vi har i dette tanke-eksperimentet lyst til å ta våre første steg for å få en grunnleggende forståelse for generell relativitetsteori. Vi ønsker å starte ved å betrakte et simpelt system der vi stiller spørsmål om hvordan gravitasjon kan påvirke lys og hvordan dette kan bidra til rødskift som vi kan observere i naturen. Vi ønsker videre å teste dette fenomenet med kjente himmellegemer, hvor vi ønsker å undersøke om det stemmer overens med hvordan vi opplever verden.

Situasjonen

I dette eksperimentet ønsker vi å betrakte en unik situasjon der vi har to observatører, og et massivt himmellegeme. Vi plasserer en skall-observatør på en avstand nærmere himmellegemet, r , og en fjern observatør langt unna der den ikke er påvirket av gravitasjon. Vi vil videre betrakte kjente systemer.

Metode

For å uttrykke hvordan relativistiske effekter kan framstå gjennom gravitasjon, behøver vi å innføre et par analytiske transformasjoner. Vi ønsker å bruke situasjonen nevnt tidligere, med våre to observatører. Her innfører vi et sett med egenskaper til observatørene, skall-observatøren som opplever en frekvens, samt vår fjern-observatør som opplever samme lyssignal, men opplever en ulik frekvens. Dette bruker vi som vårt fundament for hvordan vi kan uttrykke denne endringen. Videre bruker vi Schwarzschilds uttrykk for et linjeelement for å kunne nå et algebraisk uttrykk for hvordan frekvensen endres. Vi bygger videre på dette for å uttrykke hvordan bølgelengden til en vilkårlig stråling endrer seg, basert på det direkte forholdet mellom frekvens og bølgelengde.(Algebraiske utledninger finner du i Appendiks A 1.1-1.3)

Konklusjon

Vi har dermed en metode for å uttrykke hvordan lys påvirkes av gravitasjon og til hvilken grad dette kan

tilsynelatende endre fargen på synlig lys som vi observerer. Denne metoden er kun avhengig av massen til himmellegemet du analyserer rundt, samt avstanden fra den. I appendiks A 1.4-1.6 kan du se eksempler fra kjente fenomener, der vi undersøker omfanget til denne effekten og til hvilken grad det påvirker oss.

OPPGAVE 2

Introduksjon

Nå har vi introdusert et konsept for hvordan kraftige gravitasjonsfelt kan endre realitetsoppfatningen våres, spesifikt konsekvensen dette har for elektromagnetisk stråling. Tidligere undersøkte vi hvordan dette fenomenet kan ha minimal påvirkning for normalt liv på jorda. Samtidig besøkte vi mer ekstreme deler av universet der finner en mer betydelig effekt, her tok vi en teoretisk vinkling på hvordan stråling endrer seg på vei inn og ut av en kvasar. Vi ønsker ta med oss dette konseptet videre for å finne flere applikasjonsområder, men før vi gjør dette krever det at vi gjør litt mer forarbeid. Vi ønsker i denne delen å ta for oss hvordan vi kan beskrive bevegelsen til en vilkårlig observatør, ved å anvende generell relativitet og Schwarzschild geometri. Vi ønsker også å bevise at spinn er bevart ved bruk av denne metodikken, slik at vi lettere kan beskrive bevegelsler rundt himmellegemer.

Situasjonen

I denne oppgaven ønsker vi å ta for oss et en simpelt system, der vi har definert tre ulike punkter i rommet rundt et vilkårlig legeme. Vi definerer videre flere udefinerte konstanter som blir essensielle for den algebraiske utledningen vi gjør senere, dette inkluderer tre tidskomponenter t_1, t_2 og t_3 , to avstander r_A og r_B og to ϕ -verdier, ϕ_1 og ϕ_3 . Disse verdiene skal vi anvende for å kunne løse for en udefinert verdi ϕ_2 . Dette systemet er videre illustrert i Figur 1.

Metode

Vi uttrykker endringen i egentid fra punkt 1 til 2 og 2 til 3 som Schwarzschilds linje-element mellom samme punkter. Vi kan dermed uttrykke endringen i posisjonen som en tilsvarende endring i egentid for en gitt ob-

servatør. Her anvender vi kulekoordinater for å beskrive endringen i posisjon, som en funksjon av r , ϕ og τ . Gjennom bruken av konseptet om maksimal aldring kan vi dermed si en partikkel vi følge en rett linje i tidrommet. Vi bruker dette i kombinasjon med lorentz-geometri for å komme til en direkte korrelasjon med spinn som kjent fra klassisk mekanikk, dog dette gjelder kun for de situasjoner der lorentz-geometrien gjelder.

Konklusjon

Vi kan dermed konkludere at spinn i Schwarzschilds geometrien er bevart, og vi har dermed måter vi kan uttrykke spinn for et vilkårlig system ved bruk av generell relativitet.

OPPGAVE 6

Introduksjon

Nå som vi har lagt et grunnlag for viderer bruk av generell relativitet, kan vi endelig begi oss på et praktisk tilfelle. Her ønsker vi å anvende teorien vi tidligere har redegjort for, i den hensikt å vurdere hvordan et fartøy vil gå i bane rundt et sort hull. Vi har også lyst til å analysere hvordan man kan gjøre dette på en trygg måte, og like viktig ønsker vi å vurdere når dette kan ha fatale konsekvenser. I det tilfelle der overlevelsen til astronauten ikke er å redde, ønsker vi å ta en nærmere kikk på hvordan livet nærmeste hendelseshorisonten er og hvordan dette kan påvirke astronauten.

Situasjonen

Vi har plassert et fartøy en avstand tyve ganger massen til det sorte hullet gitt i meter. Dette fartøyet har en hastighet på $0.993c$, altså 99.3 % av lysets hastighet, på en vinkel 167° relativt til den radielle retningen ut fra det sorte hullet.

Metode

For å kunne undersøke skjebnen til fartøyet, behøver vi å legge til grunn en analytisk forklaring for premissene til de ulike banene et fartøy kan få. Vi ønsker å bruke bevaring av spinn til objektet og sammenligne dette til kraftbidraget som kommer fra gravitasjonen fra det sorte hullet. Vi kan dermed utlede et uttrykk for de ulike intervallene som kan føre til ulik bane-atferd rundt det sorte hullet, disse er algebraisk løst i appendiksen. Her finner vi ut at dersom fartøyet har for høy energi per masse, vil situasjonen resultere i at vi stuper inn mot sentrum av

det sorte hullet. Denne grensen definerer vi som potensialet i det høyeste i punktet når vi ser på hvordan potensialet endrer seg ved bruk av relativitet. Dette punktet definerer vi som det kritiske punktet, og verdien i dette punktet kan vi bruke til å avgjøre hvordan vi vil bevege oss relativt til det sorte hullet.

Konklusjon

Etter å ha regnet ut energi nivået til romfartøyet vårt, samt potensialet i det kritiskepunktet. Kan vi med sikkerhet si at fartøyet vårt med sin nåværende bane er på vei direkte inn i det sorte hullet. Den eneste måten man kan unngå denne skjebnen er ved å tilføye en hastighetsforandring. Dette er også illustrert i Figure 1.

OPPGAVE 7

Introduksjon

Vi har nå konkludert at fartøyet vårt fra oppgave 6 er på vei rett inn i det sorte hullet. Vi ønsker dermed å følge med fartøyet videre på sin fortapte reise inn mot sentrum av dette sorte hullet. Når vi når hendelseshorisonten ønsker vi å betrakte systemet, samt gjøre noen utregninger for å kunne prøve å skape et bilde for hvordan realiteten kan betraktes her. Vi gjør dette med den intensjon at vi kan få et lite innblikk i oppførselen til sorte hullet.

Situasjonen

Vi etablerer et forhold mellom en skall-observatøren og observatøren. Dette gir oss et relativt forhold ved bruk av lorentz-geometri, vi etablerer denne før vi går inn i hendelseshorisonten, da lorentz-geometrien fortsatt er gyldig. Vi vet også at dette forholdet er konstant og kan hjelpe oss da vi beveger oss inn i det sorte hullet.

Metode

Når vi er inne i det sorte hullet ønsker vi å anvende dette forholdet mellom de to observatørene, vi ønsker deretter å uttrykke hvordan skall-observatøren kommer til å observere situasjonen. Med dette forholdet definert ønsker vi å gjøre et forsøk på å forstå hvordan romtiden endrer seg inne i hendelseshorisonten.

Konklusjon

Ved en algebraisk utledning av bevegelse innen hendelseshorisonten, kan vi i union med intuisjon prøve å

forklare hvordan ting kan oppføre seg når det går inn i hendelseshorisonten. Vi kan forsvere postulatet om at ingenting forlater hendelseshorisonten, ved å anvende uttrykket i Appendiks D 7.5. Dette uttrykket sier at for alle avstander mindre enn r vil endringen i avstand være negativ, altså alt vil gå radielt innover i det sorte hullet, selv lys. Hastighetene vi mäter for lysstrålene, blir 0 og $-2c$ respektivt for de to lysstrålene. Dette går i strid med ideene vi har fra spesiellrelativitet og klassisk mekanikk, der vi sier at lyset for et inertialsystem aldri vil gå fortare enn c .

Appendix A: Oppgave 1

1.4

1.1

Schwarzschild og Lorentz gir respektivt:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 \Delta \phi^2$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2 - r^2 \Delta \phi^2$$

Uten bidrag i r og ϕ retning, der den indre observatøren betrakter med hensyn på Schwarzschild og den fjerne med hensyn på Lorentz gir oss videre:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 = \Delta t_{shell}^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{shell}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

1.2

Løser $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_{shell}}$ ved:

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_{shell}$$

$$\lambda = \frac{1}{\nu}, \nu = \frac{1}{\Delta t}, \lambda = \Delta t$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_{shell}} = \frac{\lambda}{\lambda_{shell}} - \frac{\lambda_{shell}}{\lambda_{shell}}$$

$$= \frac{\Delta t_{shell}}{\Delta t_{shell} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} - 1$$

1.3

Ser vi må konstruere en andregrads taylorutvikling der vi substituerer $\frac{2M}{r}$ for x ved derivering. Dette gir oss taylorutvikling av funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$. Taylorutviklingen $tf(x)$ gir oss videre:

$$tf(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

$$tf(x) = 0 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Dette gir oss: $tf\left(\frac{2M}{r}\right) = \frac{M}{r}$

a

Finner massen til solen gitt som meter ved $\frac{solmasse \cdot G}{c^2}$. Dette gir oss $\frac{1.989 \cdot 10^{30} \cdot 6.6743 \cdot 10^{-11}}{(2.9979 \cdot 10^8)^2}$. Får dermed at Sola er 1477 m

b

Bruker taylor utviklingen av utrykket og får at doppler skiftet vårt blir:

$$\frac{solmasse}{solradius} \cdot \lambda_{shell} + \lambda_{shell}$$

$$= 500.001 nm$$

Dette er minimal endring, som ikke vil ha visuell effekt for det menneskelige øyet.

c

Forholdet mellom massen til jorda, uttrykt i meter og radiusen uttrykt i meter er lik:

$$\frac{jordmasse(kg) \cdot G}{c^2}$$

$$= \frac{5.972 \cdot 10^{24} \cdot G}{c^2} = 4 mm$$

$$\frac{4}{6,371,000} = 6.96 \cdot 10^{-10}$$

d

Dersom vi antar et lys med bølgelengde på 500 nm, vil dette lyset bli blåskiftet med $3.48 \cdot 10^{-7}$ nm. Noe som har minimal betydning for noen formål.

1.5

Vi ønsker å besøke noen mer ekstreme omstendigheter, vi vil dermed ta en nærmere titt på kvasarer, dette er legemer som antas å spinne rundt sorte hull og disse relativistiske effektene øker. Vi observerer stråling med bølgelengde på 2150 nm, disse antas å emitteres med bølgelengde på 600 nm. Vi bruker uttrykket utledet tidligere og løser for r , dette gir oss:

$$\frac{2150 - 600}{600} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 1$$

$$r = \frac{3698M}{1705} = 2.17M$$

1.6

Løser ved å sette inn for $r = 2.01M$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{shell}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{2.01M}}}$$

$$\Delta\lambda = 13.1774 \cdot \lambda_{shell}$$

Bølger som går inn mot observasjons punktet vårt vil dermed bli ekstremt blå skiftet, og vil bli registrert som radiobølger, og det blotte øye vil ikke kunne registrere det.

Appendix B: Oppgave 2

2.1

Med uttrykket for Schwarzschild linjeelement gitt ved:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 \Delta\phi^2$$

$$s = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 \Delta\phi^2}$$

Så kan vi uttrykke tidsintervallene $\Delta\tau_{12} + \Delta\tau_{23}$ med den konstante radiusen r_A for tidsrommet mellom t_1 og t_2 og radiusen r_B for tidsrommet mellom t_2 og t_3 . Setter dette inn for uttrykket for linjeelementet og får:

$$s = s_{12} + s_{23} = \Delta\tau_{12} + \Delta\tau_{23} =$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \Delta t_{12}^2 - \frac{\Delta r_{12}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)} - r_A^2 \Delta\phi_{12}^2}$$

$$+ \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \Delta t_{23}^2 - \frac{\Delta r_{23}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)} - r_B^2 \Delta\phi_{23}^2}$$

2.2

Med uttrykket fra 2.1 kan vi anvende konseptet av maksimal aldring, der vi vet at noe som reiser med konstant hastighet vil oppleve lengst tid, vi kan dermed derivere uttrykket vårt med hensyn på vår frie variabel ϕ_2 . Vi definerer videre $\Delta\phi_{12}^2 = (\phi_2 - \phi_1)^2$ og $\Delta\phi_{23}^2 = (\phi_3 - \phi_2)^2$ og setter dette inn for uttrykkene utledet ovenfor, dette gir oss:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\phi_2} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \Delta t_{12}^2 - \frac{\Delta r_{12}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)} - r_A^2 (\phi_2 - \phi_1)^2} \\ & + \frac{\partial}{\partial\phi_2} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \Delta t_{23}^2 - \frac{\Delta r_{23}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)} - r_B^2 (\phi_3 - \phi_2)^2} = \\ & + \frac{r_A^2 \phi_{12}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \Delta t_{12}^2 - \frac{\Delta r_{12}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)} - r_A^2 (\phi_2 - \phi_1)^2}} \\ & + \frac{r_B^2 \phi_{23}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \Delta t_{23}^2 - \frac{\Delta r_{23}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)} - r_B^2 (\phi_3 - \phi_2)^2}} \\ & = \frac{r_A \Delta\phi_{12}}{\Delta\tau_{12}} - \frac{r_B \Delta\phi_{23}}{\Delta\tau_{23}} = 0 \\ & \frac{r_A \Delta\phi_{12}}{\Delta\tau_{12}} = \frac{r_B \Delta\phi_{23}}{\Delta\tau_{23}} \end{aligned}$$

2.3

Bruker faktum at:

$$\begin{aligned} \frac{dt_{shell}}{d\tau} &= \gamma_{shell} \\ d\tau &= \frac{dt_{shell}}{\gamma_{shell}} \end{aligned}$$

videre kan vi definere uttrykket fra tidligere som:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\phi}{d\tau} &= r^2 \frac{d\phi}{\frac{dt_{shell}}{\gamma_{shell}}} \\ &= r^2 \frac{d\phi}{dt_{shell}} \gamma_{shell} \end{aligned}$$

Vet at vi kan uttrykke vinkelhastighet ved:

$$\frac{d\phi}{dt_{shell}}$$

dermed kan vi uttrykke uttrykket som:

$$\gamma_{shell} r v_{\phi, shell}$$

2.4

Klassisk spinn er definert som:

$$\frac{L}{m} = \frac{v \times r}{m}$$

Har fra tidligere resultat:

$$\gamma_{shell} r v_{\phi,shell}$$

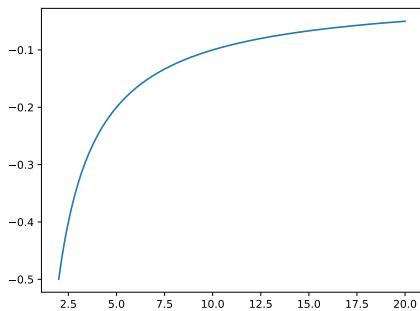
For lave hastigheter vil γ_{shell} gå mot 1 dermed vil uttrykke tilnærme:

$$r v_{\phi,shell} = r \times v = \frac{L}{m}$$

Appendix C: Oppgave 6

6.1

Typisk plot for gravitasjon nære et sort hull.



6.2

Vi har uttrykket for energien i et tyngdefelt er gitt ved:

$$\begin{aligned} \frac{E}{m} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} \frac{dt_{shell}}{d\tau} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \frac{dt_{shell}}{d\tau} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \gamma_{shell} \end{aligned}$$

6.3

Vi ønsker nå å uttrykke det kritiske punktet, som er det punktet der vi ikke har kraftig nok spinn for å kunne gå i bane rundt det sorte hullet. Dette er tilsvarende det

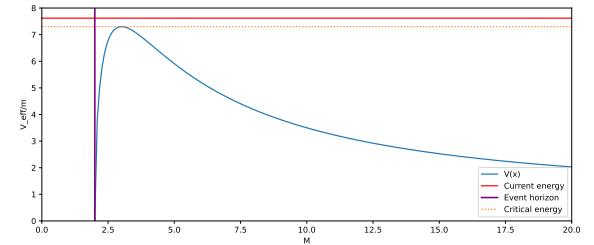


Figure 1. Potensial

punktet der det relativistiske potensialet er høyest. Som vi kan uttrykke som der den deriverte av potensialet er lik null, potensialet og den deriverte kan uttrykkes som:

$$\begin{aligned} V(r) &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right)} \\ V'(r) &= 0 \\ r_{extremum} &= \frac{(L/m)^2 - \frac{L\sqrt{L^2 - 12m^2M^2}}{m^2}}{2M} \\ &= \frac{(L/m)^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{(L/m)^2}}\right) \end{aligned}$$

6.4

Vi kan videre finne et uttrykk for vårt relativistiske spinn i situasjonen nevnt ovenfor, her anvender vi uttrykket vi fant i oppgave 2, dette gir oss:

$$\frac{L}{M} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \gamma_{shell} r v_{\phi,shell}$$

Bruker her at $v_{phi,shell}$ er den tangentielle hastigheten

$$\frac{L}{M} = r \gamma_{shell} v_{shell} \sin\theta$$

6.5

Plotter det effektive potensialet ved å bruke uttrykkene vi har utledet fram til nå, samt som verdiene introdusert fra situasjons-rapporten, dette gir oss.

Appendix D: Oppgave 7

7.1

Vet fra lorentz i kun radiell retning at:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$t' = \gamma t - \gamma rv$$

Videre for en liten partisjon dt' relativt til skall-observatøren gir:

$$t' = \gamma t - \gamma rv$$

$$dt' = -v_{shell}\gamma_{shell}dr_{shell} + \gamma_{shell}dt_{shell}$$

7.2

Har videre forholdet mellom en skall-observatør er beskrevet gjennom:

$$\Delta t_{shell} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta t$$

$$\Delta r_{shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Setter inn for Δt_{shell} og Δr_{shell} i formelene tidligere, dette gir oss uttrykket:

$$dt' = -\frac{v_{shell}\gamma_{shell}dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} + \gamma_{shell}\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt$$

7.3

Uttrykker videre dt ved v_{shell} :

$$v_{shell} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

$$dt' = -\frac{-\sqrt{\frac{2M}{r}}\gamma_{shell}dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} + \gamma_{shell}\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}dt$$

$$dt = \frac{dt'}{\gamma_{shell}\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} - \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

$$\gamma_{shell}\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \frac{E}{m} = 1$$

Dermed kan vi uttrykke dt ved:

$$dt = dt' - \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

7.4

Har at, et Schwarzschild linje element er gitt ved:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2\Delta\phi^2$$

Setter inn for Δt :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(dt' - \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \right)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2d\phi^2$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dt')^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dt'dr - dr^2 - r^2d\phi^2$$

7.5

Bruker uttrykket vi utledet tidligere, der $d\phi = 0$ og hele uttrykket = 0. regner ut nullpunktene for et andre gradspolynom for variabelen dt' . Dermed kan vi si:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dt')^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dt'dr - dr^2 = 0$$

$$\frac{dr}{dt'} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \pm 1$$

AST2000 - Del 10

Studerer stjernen vår

15409 og 15406
(Dated: December 5, 2022)

Hvordan oppstod stjernen vår? Hva foregår i stjernens indre, og hvofer dør den? Dette er spørsmål vi skal prøve å svare på for stjernen vår, ved å studere stjernens opprinnelsen og nåværende tilstand, kjernreaksjoner i stjernes kjerne og dens uunngåelige død.

I. OPPRINNELSEN OG DEN NÅVÆRENDE TILSTANDEN TIL STJERNEN

A. Hovedseriestjerne

1. Er stjernen vår en hovedseriestjerne?

Vi starter med å se på stjernens nåværende tilstand, og første spørsmål vi skal ta for oss, er om stjernen vår er en hovedseriestjerne. Vi har lært at et Hertzsprung-Russell-diagram, eller et HR-diagram, gir oss et plot med overflatetemperatur til stjernen langs x-aksen, og luminositeten relativt til stjernen langs y-aksen. Dette diagrammet kategoriserer stjernene i solsystemet, og viser forholdet mellom stjernenes luminositet, altså himmellegemets totale utstråling av elektromagnetisk stråling, og deres temperatur. Stjernenes plassering i HR-diagrammet er på grunnlag av dette, og vi kan fra diagrammet forstå hvordan stjernene utvikler seg. Et HR-diagram er illustrert her:

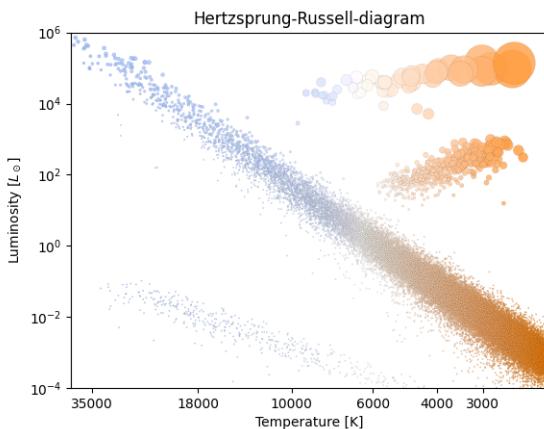


Figure 1. Hertzsprung-Russell-diagram. Temperaturen er langs x-aksen og luminositeten relativt til solas er langs y-aksen.

Det diagonale båndet som strekker seg fra øverst til venstre ned til høyre hjørne i diagrammet, kaller vi hovedserien. Stjernene som ligger i hovedserien, kaller vi hovedseriestjerner, og det er her de fleste stjerner tilbringer mestparten av livet sitt. Felles for hovedseriestjernene er at de alle produserer energi ved

at hydrogen fusjonerer til helium, og sola vår er en typisk hovedseriestjerne. Hvor lenge en stjerne ligger i hovedserien, avhenger av storrelsen. Hvis stjernen har stor masse vil levetiden bli kortere, fordi fusjonen går raskere, og motsatt, dersom stjernen har liten masse blir levetiden lengre. I høyre hjørne av HR-diagrammet finner vi kjempene og super-kjempene, som er kalde stjerner med stor radius. Blant disse er de røde kjempene, som er i sin siste fase av livet. Stjernene vi finner nederst til venstre i diagrammet er hvite dverger. De er stjerner med relativ høy temperatur, men med ekstremt lav luminositet. De hvite dvergene er døde, kompakte stjerner som har sluttet å produsere energi, og blir sakte kaldere og kaldere.

For å finne ut om stjernen vår er en hovedseriestjerne, trenger vi å bestemme luminositeten til stjernen ved å bruke dens radius og overflatetemperatur. Vi husker fra tidligere deler i prosjektet, at luminositeten er mottatt energi per tid, som altså er fluksen summert over et areal. Vi vet at fluksen fra en stjerne med overflatetemperatur T kan uttrykkes med Stefan-Boltzmanns lov, som sier at $F = \sigma T^4$, der σ er Stefan-Boltzmanns-konstanten, som er $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$. Vi antar at stjernene er sorte legemer som ikke reflekterer lys. For å finne luminositeten til stjerna, må vi integrere fluksen over hele arealet til overflaten til stjerna ved $4\pi R^2$, slik at vi får et uttrykk for luminositeten:

$$L = F \cdot A = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$$

Stjernen vår har radius $R = 9.04 \cdot 10^8$ m og temperaturen er $T = 6784$ K. Setter vi inn i formelen vi fant for luminositet, får vi at $L = 1.23 \cdot 10^{27}$ W. Vi må finne luminositeten i forhold til sola. Luminositeten til sola er $L = 3.82 \cdot 10^{26}$ W. Dermed blir luminositeten til stjerna i forhold til sola:

$$L = \frac{L}{L_s} = 3.29 L_s$$

Vi har funnet luminositeten til stjernen vår og kan nå klassifisere stjernen ved å plotte den i et HR-diagram. Som vi kan se i Figur 2, ligger stjernen vår i hovedserien, og vi kan derfor konkludere med at den er en hovedseriestjerne. Dette er hvor de fleste stjerner befinner seg når de er i midten av sin levetid, og vi kan videre finne stjernens anslatte levetid.

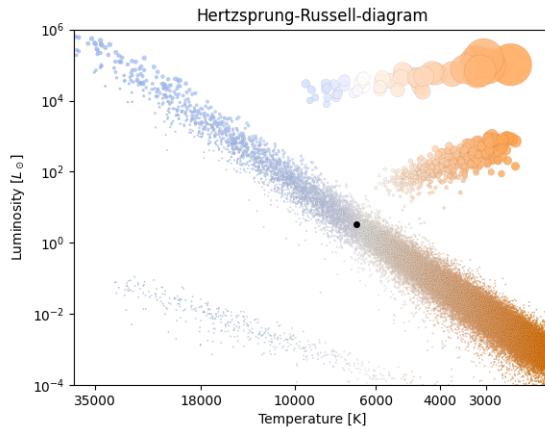


Figure 2. HR-diagram hvor vi kan se stjernen vår markert som en sort prikk i hovedserien.

2. Hvor lenge vil stjernen vår leve?

Det er en sammenhengen mellom stjernens masse og dens gjenværende levetid. I alle stjerner er det en kamp mellom gravitasjonskraftene som prøver å kollapse stjernen, og trykket som følge av fusjonsprosessene av hydrogen i stjernekjernen. Stjernens levetid vil nemlig avhenge av hvor mye hydrogen som er tilgjengelig i kjernen for å omdanne det til helium. I denne omdanningsprosessen øker gjennomsnittsmolekylvekten μ , slik at massen også øker. Vi husker fra den ideelle gassloven at når μ øker, vil trykket synke, som resulterer i at den hydrostatiske likevekten ikke gjelder. Så lenge stjernen har nok hydrogen i kjernen vil den være i hydrostatisch likevekt, slik at trykket i kjernen balanserer gravitasjonskraftene. Dersom dette ikke lenger er tilfellet, vil gravitasjonskraftene presse stjernen mer kompakt, ved at stjernens kjerne begynner å trekke seg sammen. Når kjernen sammentrekkes vil temperaturen stige og kjernefysiske reaksjoner som er mer effektive ved høyere kjernetemperaturer begynner. Så stjernens levetid avhenger av hvor mye hydrogen som er tilgjengelig i kjernen, og vi kan finne et estimat på hvor lang tid det tar før hydrogenet i kjernen er oppbrukt.

Ved å løse settet av likninger for hydrostatisch likevekt, likningene for energiproduksjon og energitransport, kan vi finne en modell av stjernen når det gjelder tetthet og temperatur, som funksjon av radius fra sentrum i stjernen. Fra denne modellen kan vi beregne den antatte levetid til stjernen. Da må vi se på hvordan energien fra stjernekjernen transporteres til overflaten. Fotonene som produseres i kjernreaksjonene strømmer ikke direkte fra kjernen til overflaten. Dette kan gjøres på ulike måter, men vi antar her at den eneste mekanismen for energitransport er ved stråling. Et foton som starter i kjernen blir spredt på partikler og endre retning kontinuerlig til den når overflaten til stjernen. Vi antar at for hver gang

en partikkel spres, reiser den en gjennomsnittlig avstand l , og tiden det tar for et foton å nå overflaten er gitt som:

$$\Delta t = \frac{R^2}{lc}$$

Der R er radiusen til stjernen, og c er lyshastigheten. Hvis vi antar at temperaturen og energitetheten er konstant, finner vi fra den ideelle gassloven at energitetheten er proporsjonal med temperaturen i fjerde potens, altså $\rho_E \propto T^4$. Videre vet vi at luminositeten er gitt som $L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. Vi har funnet Δt som tiden det tar for et foton å nå overflaten. Hvis vi antar at kun en del p av massen til stjernen blir omgjort til energi. Den totale energien som er emittert ut fra stjernen iløpet av dens levetid er gitt ved:

$$E = pMc^2$$

Vi kan bruke relasjonen til å estimere tiden stjernen vår er forventet å leve. Hvis vi antar konstant luminositet hele livstiden til stjerne, deler vi dette på total energi som stjernen kan utstråle i løpet av levetiden sin, slik at får at den totale livstiden til stjernen i hovedserien er gitt ved:

$$t = \frac{pMc^2}{L}$$

I formlene er p andelen av massen til stjernene som blir omgjort til energi, og for en stjerne som forlater hovedserien er dette når omtrent 10% av hydrogenet har blitt omdannet til helium. Proton-proton-kjeden, også kalt pp-kjeden som vi kommer tilbake til senere, er en av fusjonsprosessene som frigjør energi i hovedstjernene, ved at protonene gjennom flere trinn omdannes og slår seg sammen til heliumkjerner. Effektiviteten til pp-kjeden er lav, og er på kun 0.7%. Slik blir den totale energien som stjernen produserer mens dens lever $0.1 \cdot Mc^2 \cdot 0.007$. Setter vi inn for verdiene våre får vi at tiden stjernen vår lever er:

$$t = \frac{0.1 \cdot 2.58 \cdot 10^{30} kg (3 \cdot 10^8 m/s)^2 \cdot 0.007}{1.23 \cdot 10^{27} W} \\ \approx 1.32 \cdot 10^{17} s \\ \approx 4.19 \cdot 10^8 yr$$

Vi finner altså at stjernen vår vil leve i 419 millioner år! Vi kan sammenligne den med solas levetid som er 10 milliarder år. Vi finner at vår stjerne vil forlate hovedserien millioner av år før sola.

3. Er stjernen vår en ”veloppdragen” hovedseriestjerne?

For å undersøke hvordan stjernen vår oppfører seg, eller om den er såkalt ”veloppdragen”, skal vi undersøke om proporsjonalitetene virker som planlagt ved sammenhengen mellom masse-temperaturen og masse-luminositeten. For å estimere massen til en stjerne, antar vi at stjernen har konstant tetthet og temperatur. Luminositeten til stjernen er energi utstrålt per tidsenhet, og luminositeten til stjernen proporsjonal med RT^4l , som betyr at den utstrålte energien avhenger av temperaturen, radiusen og lengden partiklene reiser. Setter vi dette uttrykket sammen med uttrykket for hydrostatisk likevekt og uttrykket for trykket til en ideell gass, får vi at luminositeten er proporsjonal med massen til stjernen i tredje potens. Mer eksakt kan vi skrive luminositeten som:

$$L \propto M^\beta$$

Der β ligger mellom 3 og 4, som avhenger av stjernen vi observerer. Dersom stjernen har lav eller middels masse, er ofte $\beta \approx 4$.

Temperaturen for hovedseriestjerner som har en konstant kjernetemperatur, er gitt ved $T \propto \frac{M}{R}$. Vi kan skrive luminositeten til en stjerne uttrykt med den effektive temperaturen, og fra dette finner vi at $L \propto M^4$. Her en luminositeten proporsjonal med massen i fjerne potens. Slik får vi en måte å finne massen til en stjerne fra temperaturen til stjernen, gitt ved:

$$M \propto T_{eff}^2$$

Det vil si at massen til en stjerne er proporsjonal med den effektive temperaturen i andre potens. Med denne metoden kan vi finne temperaturen til stjerner med ulik masse. For vår stjerne finner vi proporsjonalitetene:

$$\begin{aligned} \frac{TR}{M} &= \frac{6784.46 \cdot (9.04 \cdot 10^8)}{2.58 \cdot 10^{30}} \approx 2.38 \cdot 10^{-18} \\ \frac{L}{M^4} &= \frac{1.23 \cdot 10^{27}}{(2.58 \cdot 10^{30})^4} \approx 2.76 \cdot 10^{-95} \end{aligned}$$

Vi vil sammenligne vår stjerne med en kjent stjerne i hovedserien, så vi velger å sammenligne den med den mest kjente, nemlig sola. Regner vi ut det samme for solas verdier, finner vi:

$$\begin{aligned} \frac{TR}{M} &\approx 2.02 \cdot 10^{-18} \\ \frac{L}{M^4} &\approx 2.43 \cdot 10^{-95} \end{aligned}$$

Som vi ser har vi et avvik på kun 17% og 13%, slik at vi kan konkludere med at stjernen vår er en ”veloppdragen” hovedseriestjerne.

B. Gigantisk molekylsky

En stjerne starter livet som en enorm kald gassky som begynner å trekke seg sammen. Med riktige forhold vil gasskyen kollapse på grunn av sin egen gravitasjon, som fører til en rekke kjernreaksjoner, og ender med at stjernen blir født. Vi antar at stjernen vår starter som en sfærisk symmetrisk gigantisk molekylsky (på engelsk forkortet til GMC), med temperatur på 10K, bestående av 75% hydrogen og 25% helium atomer. Vi antar at den begynte å kollapse uten hjelp fra sjokkbølger fra supernovaer, og at massen til gassskyen er lik den nåværende massen til stjernen. For at en stjerne skal starte med en gravitasjonskollaps, må det være tilstede noen kriterier for gassskyens radius. En gassky med større radius enn det vi kaller ”Jeans-lengden”, vil gjennomgå en gravitasjonskollaps. Jeans-lengden er gitt som:

$$R_j = \sqrt{\frac{15kT}{4\pi G\mu m_H \rho}}$$

Her er k Boltzmanns konstant, G er gravitasjonskonstanten, μm_H er midlere molekylvekt målt i hydrogenmasse og ρ er tettheten. Vi antar at massen til gassskyen er den samme som massen til stjerna, slik at tettheten er gitt ved $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$. For å finne den minst mulige radien løser vi $R > R_j$, og finner at den minste mulige radiusen gasskyen kunne haft er:

$$R = \frac{GM\mu m_H}{5kT}$$

Setter vi inn verdiene for stjernen vår i formelen for R , finner vi at radiusen er:

$$\begin{aligned} R &= \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2.58 \cdot 10^{30} \cdot 1.74 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{5 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 10} \\ &\approx 7.25 \cdot 10^{14} m \end{aligned}$$

Hvis vi sier at radiusen til gassskyen er rett over dens minimum radius, kan vi finne luminositet til gassskyen og plassere den i HR-diagrammet. Vi finner luminositeten til gassskyen på samme måte som tidligere:

$$\begin{aligned} L_{GMC} &= 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot (7.25 \cdot 10^{14})^2 \\ &\approx 3.74 \cdot 10^{25} W \end{aligned}$$

Luminositeten i forhold til sola, blir dermed:

$$L = \frac{L}{L_\odot} = 9.82 L_\odot$$

Hvis vi plotter gassskyen i HR-diagrammet får vi følgende plott:

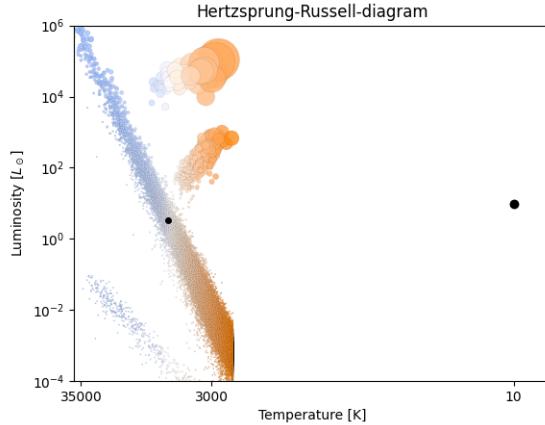


Figure 3. Plott av GMC som befinner seg helt til høyre i HR-diagrammet.

Som forventet ser vi at gasskyen er langt til høyre i diagrammet, fordi den har lav temperatur på kun 10K. Vi observerer også at luminositeten til gasskyen er litt større enn stjernens.

Vi kan gjennomgå resultatene og antakelsene vi har gjort underveis, for å undersøke resultatenes troværdighet. Vi har funnet at stjernen vår er en hovedseriestjerne og hvor lenge den vil befinner seg i hovedserien, som passer godt med de andre stjernene i hovedserien. Vi har funnet minimum radius gasskyen må ha hatt for at stjernen kunne bli født, slik at vi kan forstå historien dens. Vi har gjort en del antakelser, som for eksempel at vi har antatt at stjernen har konstant temperatur og tetthet. I tillegg har vi antatt at energitransportasjonen kun skjer ved stråling. Dette er forenklinger som gjør at beregningene blir unøyaktige, fordi en gassky som skal bli en stjerne er svært komplisert og kompleks, slik at våre beregninger først om fremst kan sees på som en modell, for å få en forståelse for hvordan denne prosessen foregår i virkeligheten. Vi har også sett bort fra andre essensielle krefter, som rotasjon, magnetisme og turbulens, som i virkeligheten vil ha en stor innvirkning på luminositeten og radiusen vi fant. Vi har altså en del feilkilder, men vi har uansett fått et godt innsyn og en god forståelse av opprinnelsen og den nåværende tilstand til stjernen vår i solsystemet.

II. KJERNEREAKSJONER I STJERNES KJERNE

Vi ønsker å ta ett dypere dykk i hva som skjer i stjernens kjerne. Når vi skal se på kjernreaksjonene i stjernens kjerne, gjør vi noen antakelser for å forenkle modelleringen. Vi antar at tettheten i stjernen er uniformt fordelt, vi tilnærmer trykket i stjernen med den ideelle gassloven, vi antar hydrostatisk likevekt og antar at stjernen kun består av protoner.

A. Kjernetemperatur

For å finne temperaturen i kjernen må vi først utlede et uttrykk for den sfæriske massenprofilen til stjernen. Masseprofilen er den totale massen inne i en kule med radius r . Vi kan bruke antakelsen om at vi har en uniform tetthet, ved å bruke at $\rho_0 = \frac{M}{V}$, der vi har at volumet er en funksjon av r , gitt ved $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Setter vi uttrykket for tettheten og volumet sammen og løser for M , finner vi følgende uttrykk:

$$M(r) = \frac{4}{3}\rho_0\pi r^3 \quad (1)$$

Siden vi antar en ideell gass, vet vi at trykket kan skrives som:

$$P = \frac{\rho_0 k T(r)}{\mu m_H}$$

Vi vet også at gassen er i hydrostatisk likevekt, slik at vi har sammenhengen:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho_0 G \frac{M(r)}{r^2}$$

Dersom vi kombinerer disse uttrykkene med formlen vi fant for massen, finner vi følgende:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{\rho_0 k T(r)}{\mu m_H} &= -\rho_0 G \frac{\frac{4}{3}\rho_0\pi r^3}{r^2} \\ \frac{d}{dr} T(r) &= -\frac{4\pi}{3} G \rho_0^2 r \frac{\mu m_H}{\rho_0 k} \\ \frac{d}{dr} T(r) &= -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} r \end{aligned}$$

Som var det vi skulle utlede. Denne sammenhengen viser endringen i stjernens temperatur T , som funksjon av r , som er avstanden fra kjernen.

Skal videre integrere uttrykket vi fant over fra $r = 0$ til $r = R$:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{d}{dr} T(r) dr &= \int_0^R -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} r dr \\ T(R) - T(0) &= -\frac{2\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} R^2 \\ T_c &= T(R) + \frac{2\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} R^2 \end{aligned}$$

Vi setter $T(0) = T_c$ som er kjernetemperaturen i stjerna.

Med denne formelen kan vi regne ut temperaturen i kjernen til stjernen vår:

$$T_c = 11710025.36 K$$

Der vi har brukt at $\mu = 1$ siden vi antar at alle gasspartiklene er protoner, og vi har brukt $\rho_0 = \frac{M}{V}$. Temperaturen i kjernen er 11 millioner K, som samsvarer godt med det vi forventer at temperaturen til hovedseriestjernene ligger på.

B. Energiproduksjon og lysstyrke

Vi vil estimere lysstyrken til stjernen, baser på en modell som beskriver kjernekraften i stjernens kjerne. Vi antar at alle kjernefysiske reaksjoner skjer innenfor en sfære med radius $0,2R$. I tillegg antar vi at tettheten til stjernen er uniform og at kjernetemperaturen vi beregnet tidligere er den samme overalt i kjernen. Energien som blir produsert i fusjonsprosessen i stjernens kjerne, kan skrives som reaksjonsraten:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{0,reac} X_a X_b \rho^\alpha T^\beta$$

Her er ρ tettheten til gassen, $\varepsilon_{0,reac}$ er mengden energi som frigjøres per enhet, α og β avhenger av temperaturen T , og X_a og X_b er prosentandelen av grunnstoffene som reagerer i prosessen, og disse mengdene varierer fra hvilke type reaksjon vi beregner energiproduksjonen fra.

Pp-kjeden er den mest effektive for temperaturer rundt 15 millioner Kelvin. Vi fant at kjernetemperaturen til stjernen vår var omtrent 11 millioner, slik at vi kan skrive reaksjonsraten for en full pp-kjede som:

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

Der T_6 er temperaturen i millioner, $\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \cdot 10^{-12} W m^3/kg^2$ og effektiviteten er som nevnt tidligere på 0.7%.

Den andre reaksjonen som er gjeldende fra temperaturer rundt 20 millioner Kelvin, er det vi kaller CNO-syklusen. Her er den totale reaksjonsraten gitt som:

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

Her er $\varepsilon_{CNO} = 8.24 \cdot 10^{-31} W m^3/kg^2$.

Avhengig av kjernetemperaturen vi fant for stjernen vår, får vi følgende antakelser: Vi antar at energiproduksjonen i kjernen skjer via pp-kjeden og CNO-syklusen, og at kjernen består av 74.5% Hydrogen, 25.3% Helium og 0.2% Nitrogen. Fra disse antakelsene får vi at $X_H = 0.745$ og $X_{CNO} = 0.002$. Dersom vi setter disse verdiene og at $T_6 = 15K$, får vi følgende resultater:

$$\varepsilon_{pp} \approx 9.53 \cdot 10^{-6} W/kg$$

$$\varepsilon_{CNO} \approx 2.44 \cdot 10^{-9} W/kg$$

Vi ser fra resultatene at pp-kjeden produserer mye mer energi, faktisk nesten 100 ganger mer, enn CNO-syklusen i stjernekjernen vår. Så vi kan si at pp-kjeden er den mest effektive måten i vår stjernes energiproduksjon, som forventet ettersom at temperaturen vår var 11 millioner Kelvin.

Vi kan bruke disse verdiene til å finne luminositeten, ettersom at vi vet at luminositeten er total energi emittert ut per tid, og vi har ε_{AB} er totalt energi emittert ut per masse per tid i en kjernreaksjon. Dermed kan vi finne luminositeten ved:

$$\frac{dL_{AB}}{dm} = \varepsilon_{AB}$$

Massen m kan skrives som $dm = dV\rho(r)$, og siden tettheten er konstant kan vi skrive $dm = 4\pi r^2 \rho_0 dr$. Vi antar at alle de kjernefysiske reaksjonene skjer innenfor en radius med $0.2R$, slik at vi kan løse:

$$\int_0^{0.2R} \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0 (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CNO}) dr$$

$$L = \frac{4\pi}{3} \rho_0 (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CNO}) (0.2R)^3$$

Setter vi inn verdiene vi allerede har finner vi at luminositeten er $1.8 \cdot 10^{23} W$. Dette er et stort avvik i forhold til luminositeten vi fant tidligere, og vi ser at luminositeten er mye lavere. Hvis vi ser på temperaturen vi får fra dette, kan vi bruke følgende formel:

$$T = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

Finner at denne temperaturen er 750 K, som er veldig mye lavere enn tidligere beregnet.

Det er mange feilkilder som gjør at luminositeten og temperaturen avviker mye fra det vi fant tidligere. Dette kan komme av at vi blant annet antok at kjernen har kontant temperatur og tetthet, som ikke vil være tilfelle i virkeligheten, fordi fusjon kan skje overalt i kjernen og endre temperaturen og tetthet. Når vi beregnet kjernetemperaturen vår, antok vi også at vi hadde en ideell gass, og at kjernen kun består av protoner. Antakelsen vi gjorde om at de kjernefysiske reaksjonene kun skjer i en radius på $0.2R$, vil også være urealistisk. Dette gjør at verdiene vi får har så stort avvik.

III. STJERNENS DØD

A. Forlate hovedserien

Det neste vi studerer er hvordan livet til stjernen blir når den forlater hovedserien, ved å gå gjennom de ulike stadiene, og i tillegg plotte posisjonen til stjernen i de ulike stadiene i HR-diagrammet. Som vi har nevnt tidligere, vil en stjerne leve i hovedserien så lenge den har nok hydrogen til å drive fusjonsprosessene i kjernen. Når hydrogenet blir brukt opp og det kun er helium igjen i kjernen, mister stjernen den hydrostatiske likevekten, slik at den midlere molekylvekten vil øke og trykket blir ikke lenger stort nok til å motvirke gravitasjonskretene. Når stjernen da kollapser og komprimeres, vil temperaturen i og rundt kjernen øke. Hydrogenet som befinner

seg i lag utenfor kjernen vil begynne å fusjonere til helium. Kreftene fra disse reaksjonene er så kraftige at de skyver på overflaten til stjernen slik at den utvider seg, som betyr at overflatetemperaturen synker. Da går stjernen over til å bli en sub-kjempe, som er en kaldere men lyssterk stjerne med høy luminositet.

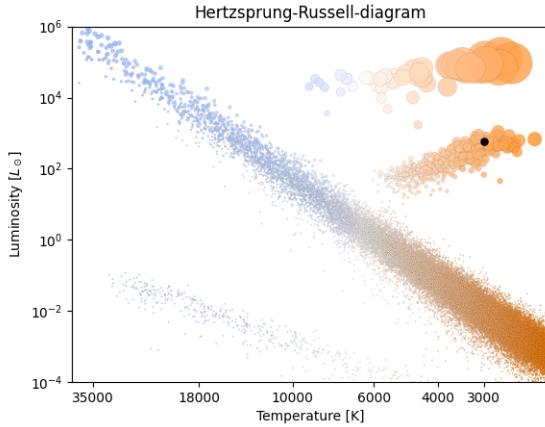


Figure 4. Stjernen vår som har blitt en sub-kjempe.

Radien til stjernen blir større når stjernen vokser. I tillegg vil det produseres mer energi ettersom fusjonsprosessene skjer nærmere overflaten til stjernen, derfor lyser den også sterkere. Etterhvert når stjernen en nedre temperaturgrense på 2500 Kelvin. Da begynner energitransporten å gå fra stråling til å hovedsakelig være konveksjon, som er mye mer effektivt enn stråling. Vi klassifiserer nå stjernen som en rød kjempe. Da vil radien være 10 til 100 ganger større enn den opprinnelig var på hovedserien.

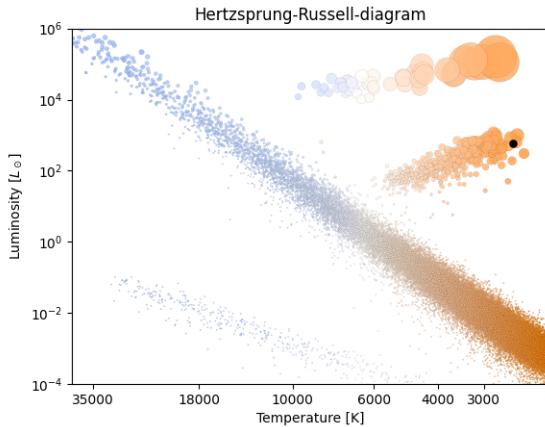


Figure 5. Stjernen har blitt en rød kjempe, og er i virkelighetenn 10-100 ganger større enn i hovedserien.

Stjerner som har masse mindre enn to solmasser, får ikke høy nok kjernetemperatur til at helium kan omdannes til karbon og oksygen, og vi sier at kjernen blir

elektron degenerert. Det vil si at vi har en øvre grense på hvor mange elektroner som kan befinner seg i et visst volum. Da får vi et degenerasjonstrykk, og trykket vil ikke endre seg selvom temperaturen øker i kjernen. Når temperaturen i stjernen har økt tilstrekkelig mye, vil store mengder helium igjen fusjoner til karbon overalt i hele kjernen samtidig gjennom en trippel-alfa-prosess. Vi kaller denne veldig korte fusjon av store mengder helium til karbon for et "heliumflash". Mesteparten av heliumet i kjernen blir oppbrukt på kort tid og denne energien bryter opp den degenererte gassen. Stjerna begynner å eksplandere igjen. Luminositeten minker og stjerna er nå på den horisontale grenen. Der komprimeres den for å oppnå hydrostatisk likevekt igjen. Etter at stjernen har beveget seg horisontalt i HR-diagrammet, vil gravitasjonskraftene vinne over trykket i kjernen, og den begynner å eksplandere igjen. Når energiproduksjonen i kjernen stanser, vil gravitasjonskraftene komprimere kjernen igjen, som fører til at helium rundt kjernen og hydrogen lenger ut i skallene begynner å omdannes, og energien produseres igjen ved konveksjon. Luminositeten stiger og radien til stjerna utvider seg, opptil 1000 ganger opprinnelig størrelse. Vi kan nå kategorisere den som en superkjempe.

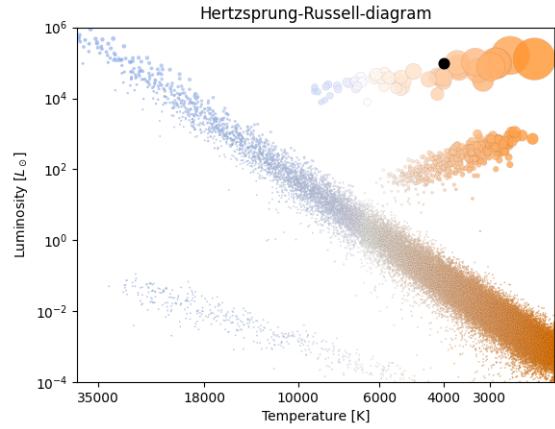


Figure 6. Stjernen vår som er super kjempe, med høy luminositet

Stjernen vår har nå gått gjennom mange faser og har mistet mye av heliumet den engang startet med. Til slutt vil vi stå igjen med kun en degenerert kjerne av karbon og oksygen, og temperaturen er ikke høy nok til å omdanne disse videre til tyngre grunnstoffer. Stjernen er nå i sin siste fase av livet og den vil bli kaldere og kaldere ettersom det ikke lenger er energiproduksjon. Lysstyrken er lav, og vi har fått en planetarisk tåke av varm gass og plasma rundt stjernen, som vi nå kaller en hvit dvergstjerne. Den hvite dvergen vår bli mindre og mindre lysende, ettersom den termiske energien forsvinner. Dette tar talls milliarder år, men all energien vil til slutt bli utstrålt.

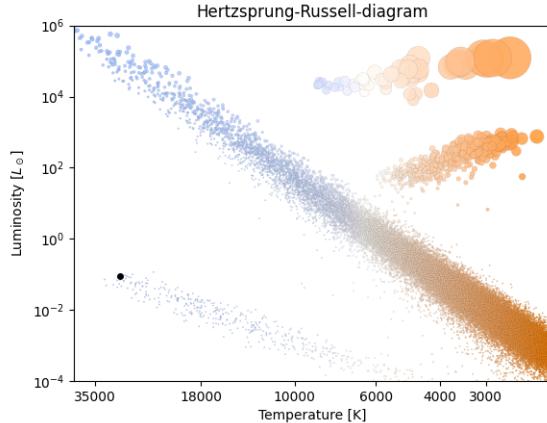


Figure 7. Stjernen vår som en hvit dvergstjerne

B. Slutten

Vi skal studere hvordan de siste fasene av vår stjernes liv vil være. Stjernens masse er mindre enn 8 solmasser, slik at den vil ende opp som en hvit dverg, og vi kan finne massen den vil ha da etter følgende formel:

$$M_{WD} = \frac{M}{8M_\odot} M_{Chandrasekhar}$$

Her er Chandrasekharmassen gitt som $1.4M_\odot$, som er den øvre grensen for massen en hvit dverg kan ha, der som massen hadde overgått denne grensen ville stjernen fortsatt å kollapse og ikke holdt seg stabil. Setter vi inn verdiene våre, får vi følgende resultat:

$$M_{WD} = 4.52 \cdot 10^{29} kg \approx 0.23M_\odot$$

Videre ønsker vi å beregne den estimerte radiusen til den hvite dvergen. Vi kan bruke likningen for hydrostatisk likevekt, ettersom at vi forutsetter at vi har uniform tetthet i den hvite dvergen, slik at vi får:

$$\frac{P}{R} = \frac{3GM^2}{4\pi R^5} \quad (2)$$

Der trykket for en degenerert gass er gitt ved:

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{10m_e} n^{5/3} \quad (3)$$

Her har vi også at elektronettetheten er gitt ved:

$$n_e = \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_H}$$

Ved å sette likning (2) og (3) sammen, bruke at $\rho = M/V$ og løse for R , finner vi at radiusen er gitt ved:

$$R_{WD} = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{20m_e G} \left(\frac{Z}{Am_h}\right)^{5/3} M^{-1/3}$$

Her er m_e massen til et elektron, m_H er massen til hydrogenatomet, M er massen til det som er igjen av stjerna etter den har blitt en hvit dverg. Z er antall protoner og A er nukleoner, altså protoner og nøytroner per atomkjerne. En kjerne inneholder vanligvis samme antall nøytroner som protoner slik at totalen antall nukleoner er dobbelt så mange protoner og $Z/A = 0.5$. Vi vil bruke dette tallet i våre beregningene. Regner vi ut dette, finner vi at radiusen er:

$$R = 2.35 \cdot 10^6 m = 2350 km$$

Vi antar at tettheten er uniform, slik at vi kan beregne hvor mye en liter av den hvite dvergens masse ville veid, fra sammenhengen $\rho = \frac{M}{V} = 8.29 \cdot 10^9 km/m^3$:

$$M_{liter} = \rho \cdot 0.001 m^3 = 8290000 kg$$

Videre kan vi finne hvor store gravitasjonsakselerasjonen på overflaten av din hvite dverg er gitt ved:

$$g = \frac{GM_{WD}}{R_{WD}^2} = 5.44 \cdot 10^6 m/s^2$$

Som vi ser er dette mye mer enn hva vi ville opplevd av gravitasjon på jorda vår! Et menneske ville ikke tålt denne gravitasjonsakselerasjonen.

Før vi runder av studiene av stjernen vår, skal vi se på hva det degenererte materialet er. Degenerert materiale bruker vi i astrofysikk når vi snakker om tette stjerneobjekter der trykket fra gravitasjonskraftene er så ekstreme at kvantemekaniske effekter er betydelige, og trykket ikke er høyt nok til å unngå gravitasjonskollaps, slik som tilfellet er i hvite dverger og nøytronstjerner. Alle elementærpartikler kan klassifiseres som fermioner eller bosoner, der partikler med heltall-spinn kalles bosoner og de med halv-heltall-spinn kalles fermioner. De følger noe vi kaller Pauliprinsippet, som er en kvantemekanisk regel som sier at to identiske partikler av typen fermioner ikke kan være i samme kvantemekaniske tilstand samtidig. Hos hvite dverger er tettheten tilstrekkelig høy til at elektroner kan tvinges inn i ulike energinivåer. Elektroner ønsker å ha den laveste mulige energitilstanden, og søker disse først. Når disse ulike nivåene fylles med elektroner vil den degenererte gassen motstå gravitasjonskraften svært godt, fordi elektronene ikke kan bevege seg til allerede okkuperte nivåer. Når alle elektronene er så sammenklemt som mulig og alle de mulige nivåene er fulle, vil gassen være elektrongenerert. Dette skaper ett trykk siden elektronene har større energi enn deres egentlige energinivåer.

Når trykket i kjernen blir så enormt, kan fusjonsreaksjonene oppstå igjen. Dette frigjør enorme mengder energi som til slutt gjør at den hvite dvergen vår går over til å bli en supernova. Mange hvite dverger forsvinner og stråler ut all energien, til den blir en såkalt sort dverg. Dette er den forventete slutten for stjernen vår, men det kan skje at den hvite dvergen kan komme nærmere nok en annen stjerne ettersom himmellegemene beveger seg, slik at den kan få tak i materiale den trenger fra gravitasjonskraftene til å leve videre.

REFERANSER

- Hansen, F. K., Oppgavetekst AST2000 - Part 10, Studying Your Star.
- Hansen, F. K., Lecture Notes 1G, 3A, 3B, 3C, 3D og 3E i AST2000.
- <https://no.wikipedia.org/wiki/Hertzsprung-Russell-diagram> Wikipedia, Hertzsprung-Russell-diagram, Lesedato: 21.09.2022.
- <https://snl.no/pauliprinsippet>, SNL.no, Pauliprinsippet, Linder, Jacob. Lesedato: 10.04.2018. Lesedato: 24.11.2022.