Συστήματα Αναμονής

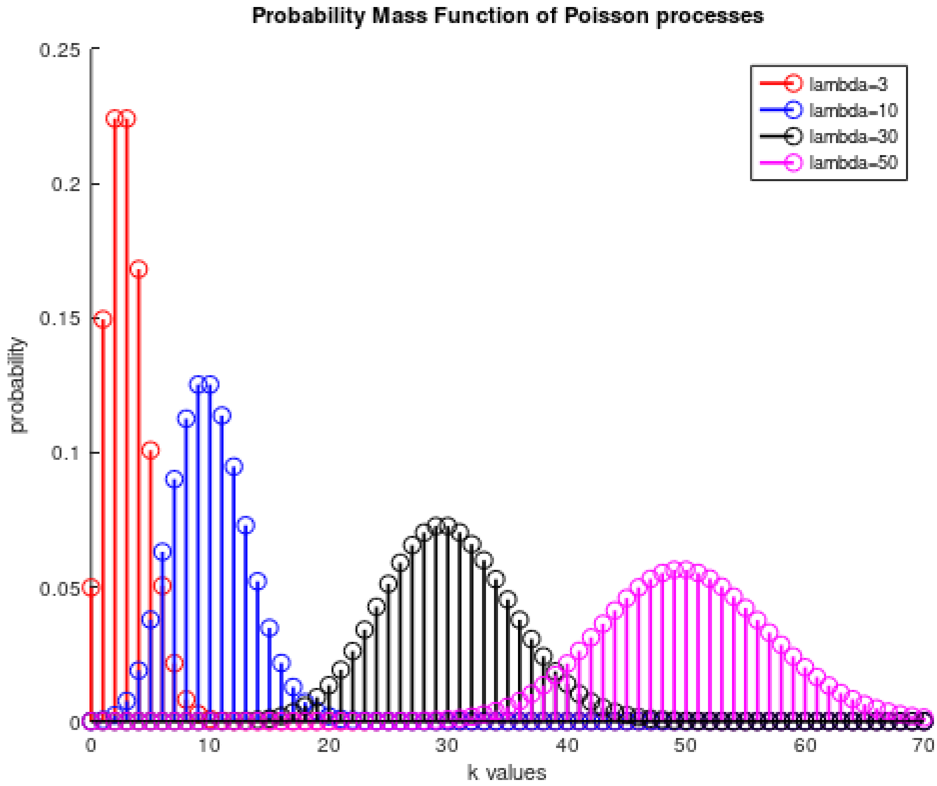
1η Εργαστηριακή Αναφορά

Ανδρέας Μαρκόπουλος

(03119170)

Κατανομή Poisson

(A) Στο παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε ότι όσο το λ αυξάνεται οι τιμές του κατακόρυφου άξονα μειώνονται ενώ το εύρος των τιμών του k που καλύπτει η "καμπάνα" αυξάνεται. Το παραπάνω είναι λογικό καθώς το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να παραμένει 1 (ένα) ανεξάρτητα της τιμής της παραμέτρου λ.



Κώδικας ερωτήματος (A)

```
k = 0:1:70;
lambda = [3,10,30,50];

for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=30","lambda=50");
```

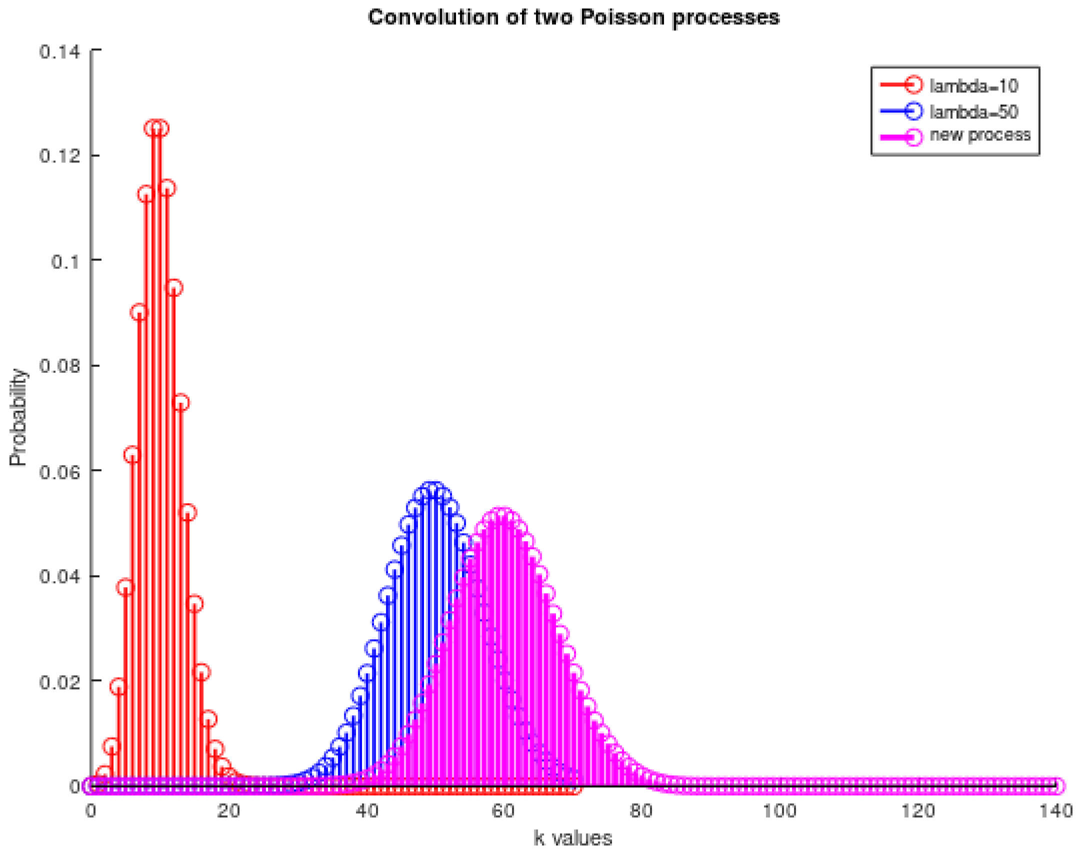
(B) Υπολογίζοντας την μέση τιμή (mean_value) και την διακύμανση (variance) για λ=30 παρατηρούμε ότι είναι ίσες με την τιμή της παραμέτρου λ.

```
Command Window
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

Κώδικας ερωτήματος (Β)

```
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor

variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

(Γ) Υπολογίζουμε τις κατανομές για λ=10 και λ=50 καθώς και την συνέλιξη τους και τα αναπαριστούμε σε κοινό διάγραμα. Παρατηρούμε οτι προκύπτει νέα κατανομή Poisson με τιμή παραμέτρου λ ίση με το άθροισμα των αρχικών, δηλαδή λ=50+10=60. Προυπόθεση για να συμβεί αυτό είναι οι δύο αρχικές κατανομές να είναι ανεξάρτητες κατανομές Poisson.



Κώδικας ερωτήματος (Γ)

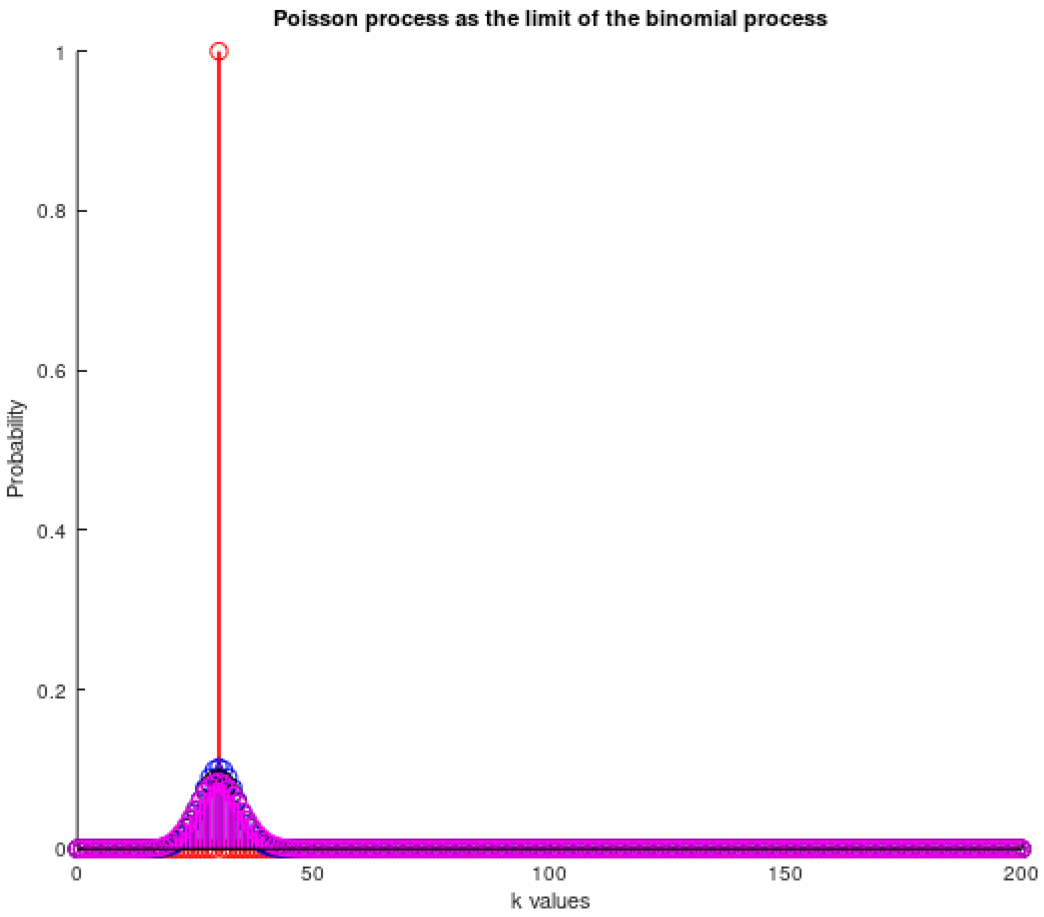
```
first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");
```

(Δ) Θεωρούμε διωνυμική κατανομή με παραμέτρους N και p.

$$P(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p^x)^{N-x} \xRightarrow{\lambda = N*p} P(x) = \binom{N}{x} \frac{\lambda}{N}^x \left(1 - \frac{\lambda}{N}^x\right)^{N-x}$$

Προκύπτει ότι αν για μεγάλο αριθμό δοκιμών N η πιθανότητα επιτυχίας p είναι πολύ μικρή, ώστε N*p να συγκλίνει σε θετική σταθερά λ, τοτε:

$$\lim_{N\to\infty} P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

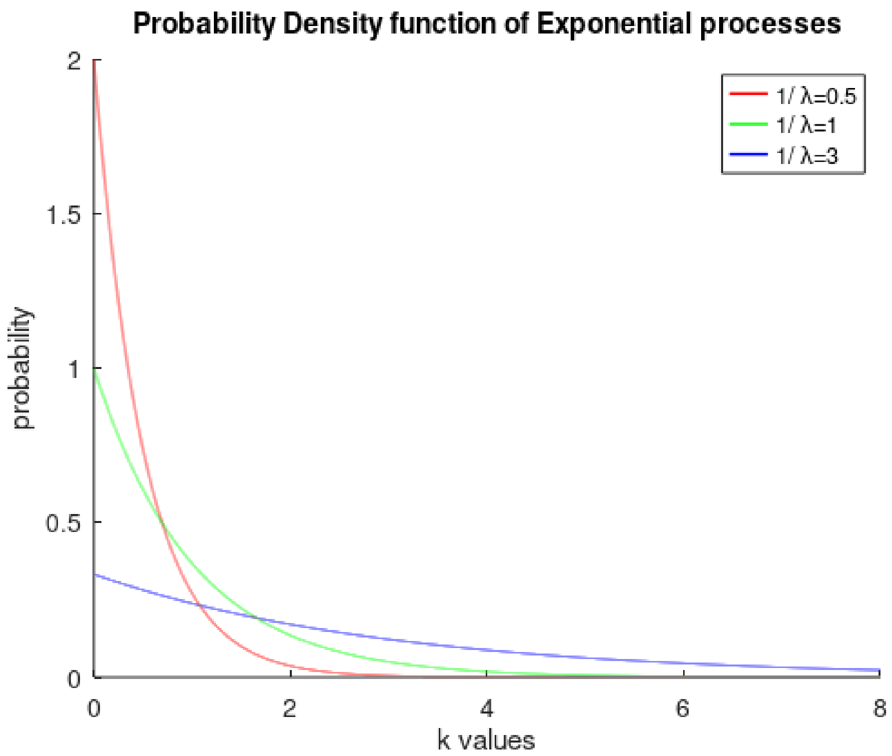


Κώδικας ερωτήματος (Δ)

```
k = 0:1:200;
% # Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1:1:5;
n = lambda.*i;
p = lambda./n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:4
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
```

Εκθετική Κατανομή

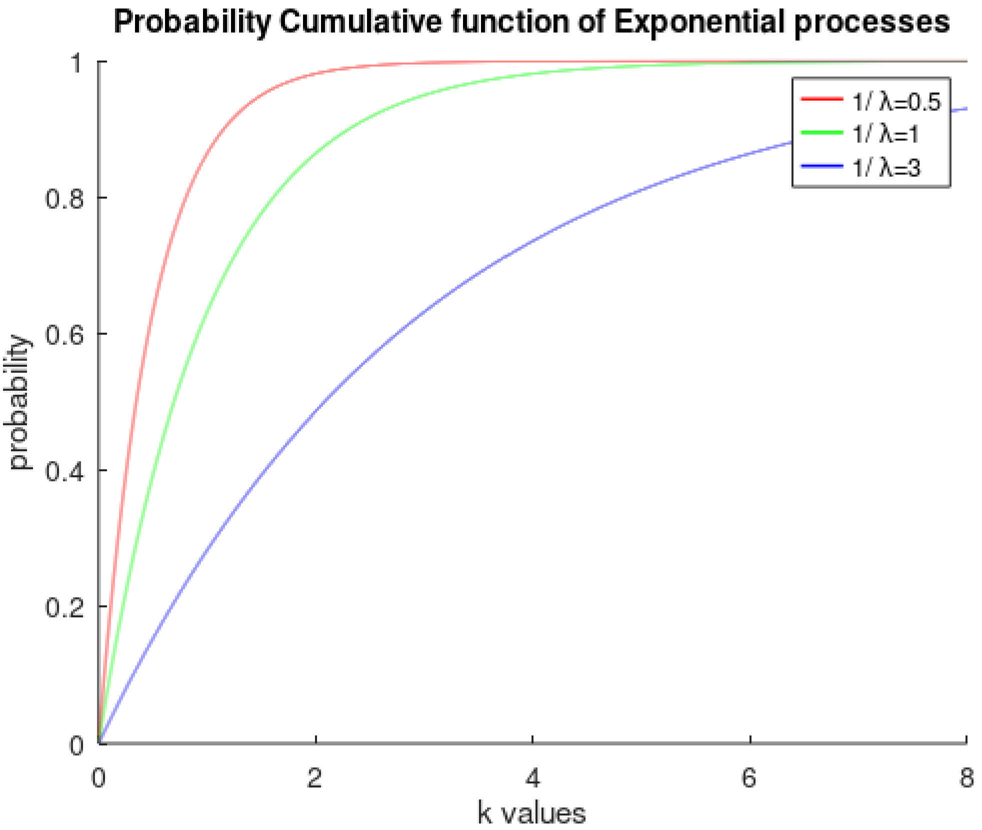
(Α) Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function) των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1 /λ = {0.5, 1, 3}



Κώδικας ερωτήματος (Α)

```
k=0:0.0001:8;
lamda=[0.5,1,3];

for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:) = exppdf(k,lamda(i));
endfor

colors="rgb";
figure(1);
hold on;

for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.1);
endfor

hold off;

set(gca, 'FontSize', 14)
title("Probability Density function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("1/ λ=0.5","1/ λ=1","1/ λ=3");
```

(Β) Σχεδιάζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των παραπάνω εκθετικών κατανομών



Κώδικας ερωτήματος (Β)

```
k=0:0.0001:8;
lamda=[0.5,1,3];

for i=1:columns(lamda)
  exp(i,:) = expcdf(k,lamda(i));
endfor

colors="rgb";
figure(2);
hold on;

for i=1:columns(lamda)
  plot(k,exp(i,:),colors(i),"linewidth",1.1);
endfor

hold off;

set(gca, 'FontSize', 14)
title("Probability Cumulative function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("1/ λ=0.5","1/ λ=1","1/ λ=3");
```

(Γ) Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες P(X>30000) και Pr(X>50000|X>20000) είναι ίσες.

```
Command Window
Probability 1 is:
0.8869
Probability 2 is:
0.8869
```

Το αποτέλεσμα γίνεται προφανές εάν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 50000 \mid X > 20000) = \frac{P(X > 30000 + 20000 \mid X > 20000)}{P(X > 20000)} = \frac{P(X > 50000)}{P(X > 20000)} =$$

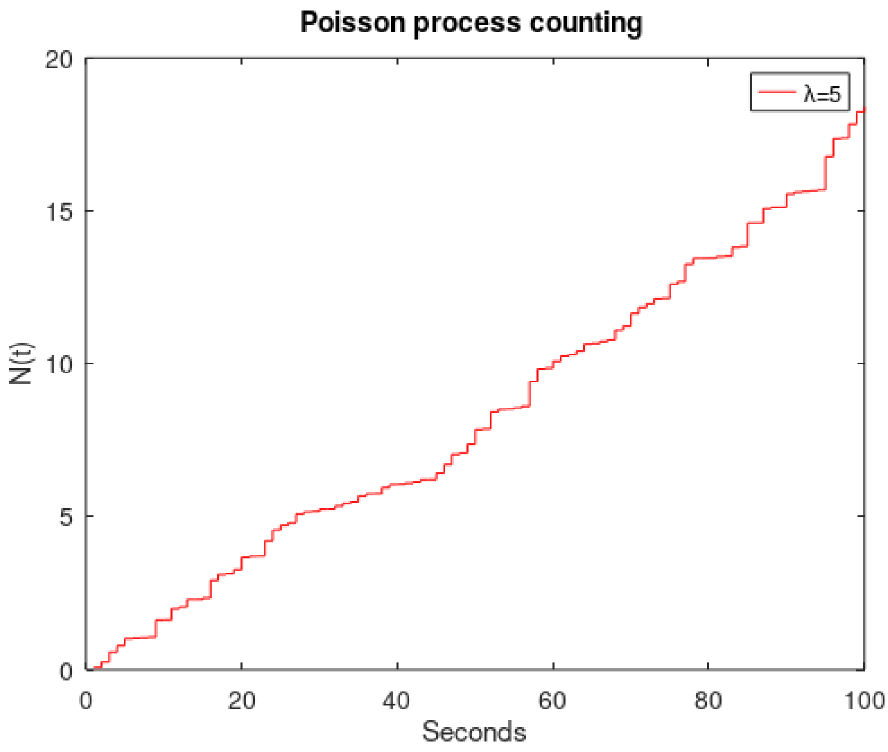
$$= P(X > 30000)$$

Κώδικας ερωτήματος (Γ)

```
k=0:0.00001:8;
exp=expcdf(k,2.5);
pr1=1-exp(30000);
disp ("Probability 1 is:"),disp(pr1);
pr2=(1-exp(50000))./(1-exp(20000));
disp ("Probability 2 is:"), disp(pr2);
```

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

(A) Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.

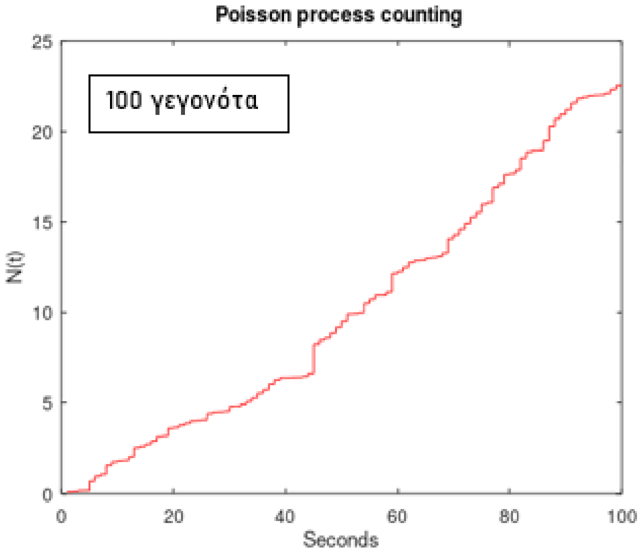


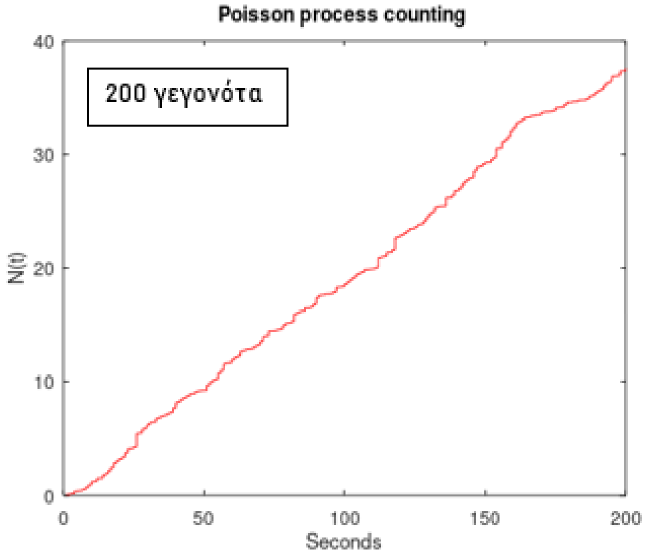
Κώδικας ερωτήματος (Α)

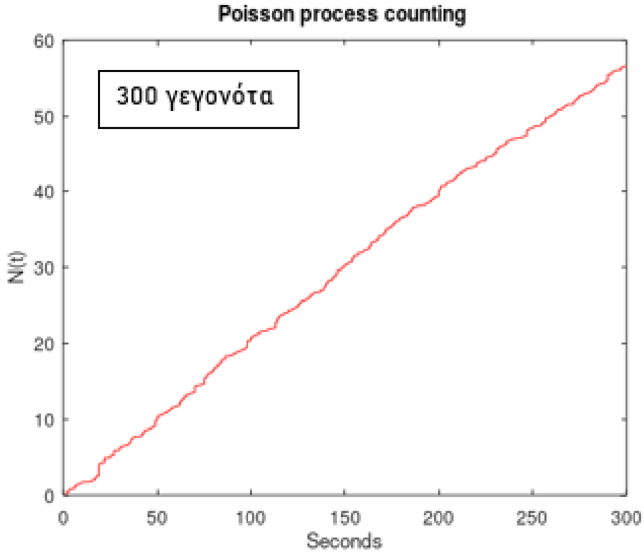
```
lamda=5;
a=exprnd(1/lamda,1,100);
for i=1:99
  a(i+1)=a(i+1)+a(i);
  endfor
figure(1);
stairs(a,color='r');
set(gca, 'FontSize', 14)
title("Poisson process counting ");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
legend("λ=5");
```

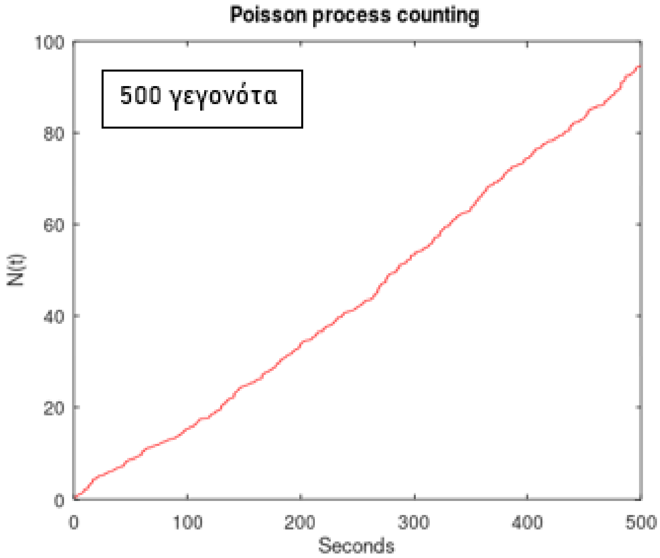
(Β) Σε ένα χρονικό παράθυρο ΔΤ = t1 – t2 ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο όρο εμφανίσεων γεγονότων λ*ΔΤ. Υπολογίζουμε τον μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου για 100, 200, 300, 500, 1000 και 10000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα.

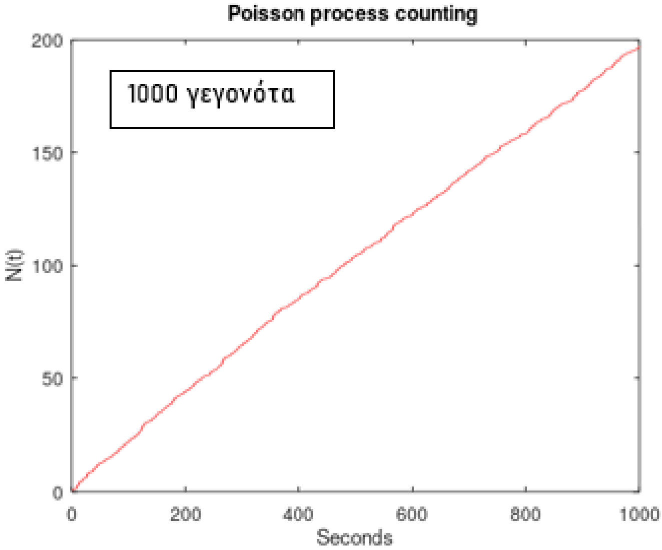
Από τα παρακάτω διαγράμματα γίνεται προφανές ότι, με την αύξηση γεγονότων το λ προσεγγίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια.

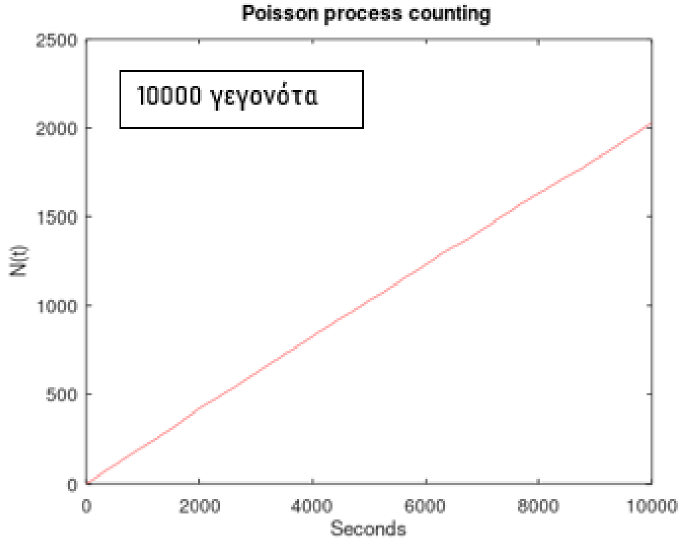












```
Command Window
for 100 events:
lamda approx.=
4.4339
for 200 events:
lamda approx.=
5.3216
for 300 events:
lamda approx.=
5.3054
for 500 events:
lamda approx.=
5.2822
for 1000 events:
lamda approx.=
5.0759
for 10000 events:
lamda approx.=
4.9330
```

Κωδικας ερωτήματος (Β)

```
lamda=5;
evnts=100;
a=exprnd(1/lamda,1,evnts);
for i=1:(evnts-1)
  a(i+1)=a(i+1)+a(i);
  endfor
figure(2);
stairs(a,color='r');
set(gca, 'FontSize', 14)
title("Poisson process counting ");
xlabel("Seconds");
ylabel("N(t)");
disp ("for 100 events:")
disp ("lamda approx.=");
disp (evnts/a(evnts));
```