Συστήματα Αναμονής

2η Εργαστηριακή Αναφορά

Ανδρέας Μαρκόπουλος

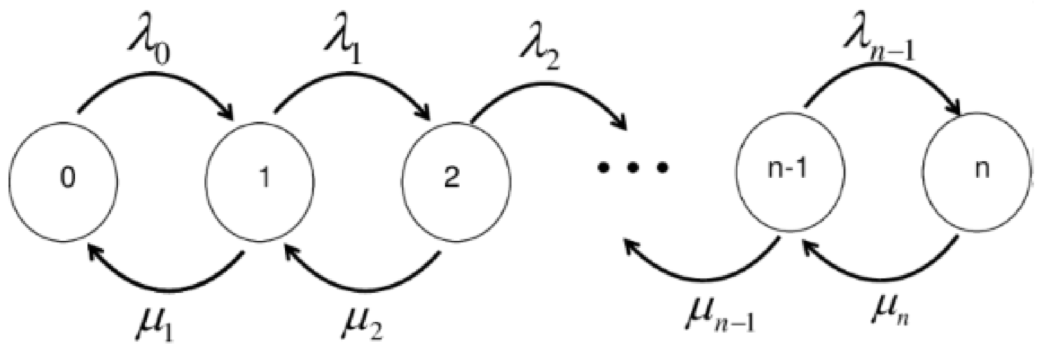
(03119170)

Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

(Α) Για να είναι η ουρά M/M/1 εργοδική, πρέπει η ένταση κυκλοφορίας του συστήματος να είναι μικρότερη του ένα:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \ Erlang$$

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1:



Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν κατανομή Poisson και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή ανεξάρτητα της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος:

$$\lambda = \lambda_n \, , n = 0,1,2, \dots$$

$$\mu = \mu_n \, , n = 1,2,3, \dots$$

Άρα οι εξισώσεις ισορροπίας:

- $\lambda P_{i-1} = \mu P_i \, , i = 1,2,3, \dots$
- $(\lambda + \mu) P_i = \lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1} \, , i = 0,1,2, \dots$

Η σχέση κανονικοποίησης:

1. $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\lambda P_{i-1} = \mu P_i \Rightarrow P_i = \frac{\lambda}{\mu} P_{i-1} \Rightarrow P_i = \rho\, P_{i-1}$$

Άρα: $P_i = \rho P_{i-1} = \rho(\,\rho P_{i-2}\,) = \rho^2 P_{i-2} = \cdots \Rightarrow \boldsymbol{P_i = \rho^i P_0}$ (1)

Επίσης από τη σχέση κανονικοποίησης:

$$1 = P_0 \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \overset{\rho>1}{\Longrightarrow} 1 = P_0 \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \boldsymbol{P_0 = 1 - \rho} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{P_i = (1-\rho)\rho^i\,, i = 0,1,2,\ldots}$$

(Β) Έχουμε οτι ισχύει:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

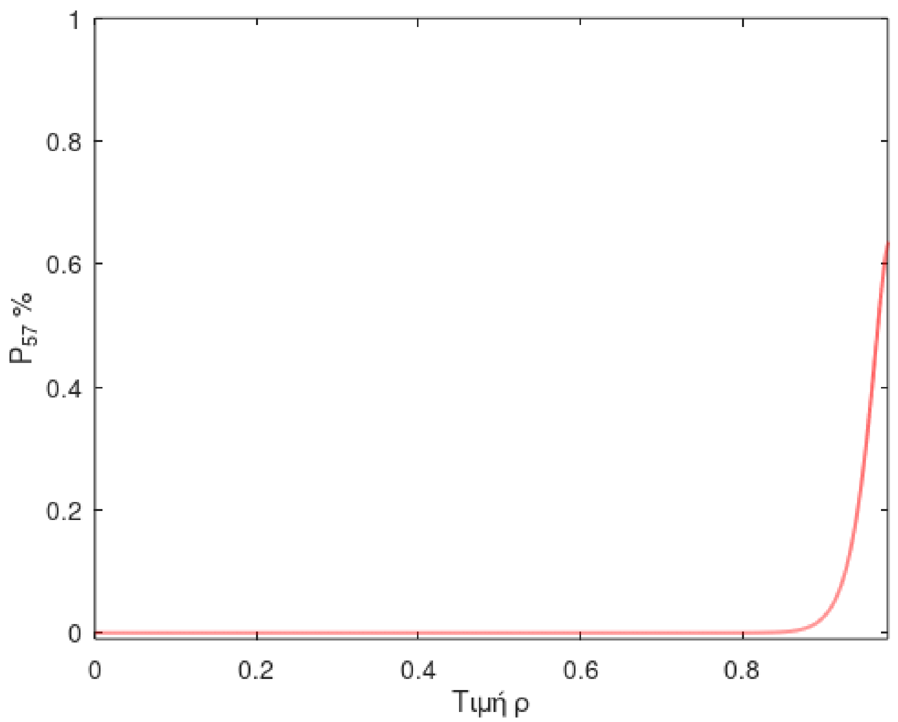
Σύμφωνα με τον τύπο του Little ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1}{\mu} * \frac{1}{1-\rho}$$

(Γ) Για k=57:

$$P_{57} = (1-\rho)\rho^{57}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η ένταση κυκλοφορίας ρ πλησιάζει την μονάδα, τότε η πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί με 57 πελάτες είναι ολο και πιο πιθανή:



Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

(Α)Όπως είδαμε και πριν, για να είναι εργοδικό το σύστημα πρέπει να ισχύει:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \overset{\lambda=5}{\Longrightarrow} \mu > 5$$

Άρα $\mu \in (5,10]$

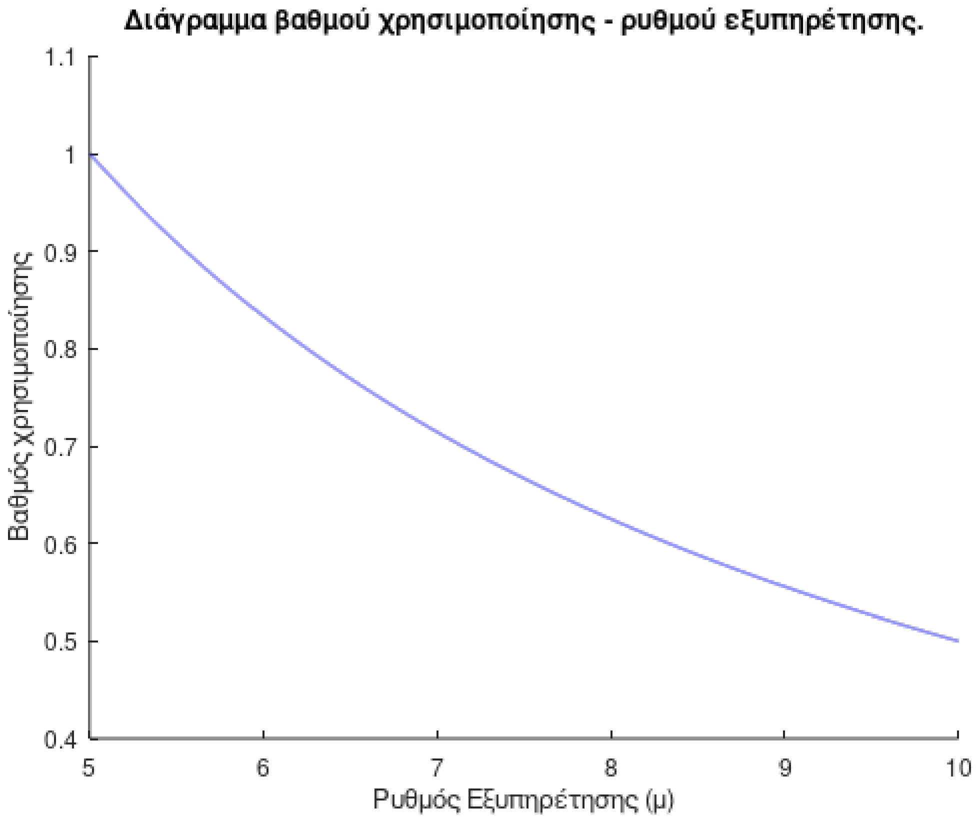
Δηλαδή πάνω από 5 και μέχρι 10 πελάτες ανα λεπτό για να είναι εργοδικό

(Β) Ο κοινό κομμάτι κώδικα που χρησιμοποιούμε στα παρακάτω ερωτήματα είναι το εξής:

```
pkg load queueing;

lambda = 5;
m = 5.0001 : 0.0001 : 10;
[U, R, Q, X, p0] = qsmm1 (lambda, m);
```

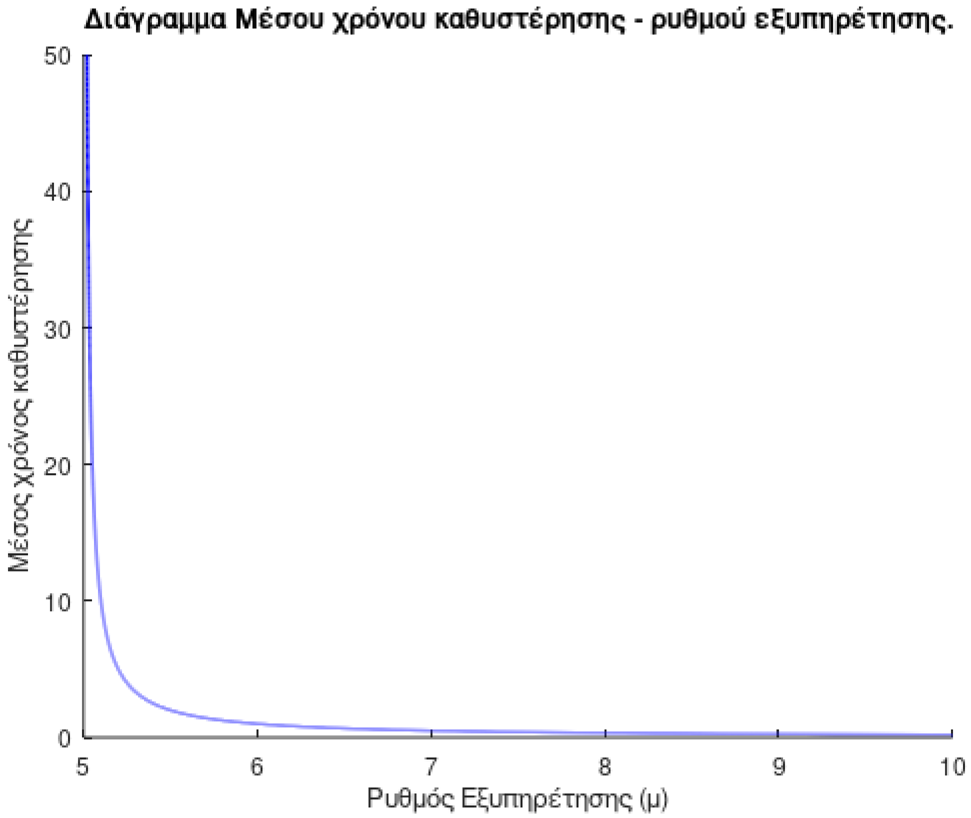
[Β1]



Κώδικας για εμφάνιση διαγράμματος του ερωτήματος (B1)

```
figure(1);
hold on;
plot(m,U,"b","linewidth",1.2);
title("Διάγραμμα βαθμού χρησιμοποίησης - ρυθμού εξυπηρέτησης.");
xlabel("Ρυθμός Εξυπηρέτησης (μ)");
ylabel("Βαθμός χρησιμοποίησης");
set(gca,"fontsize", 12)
```

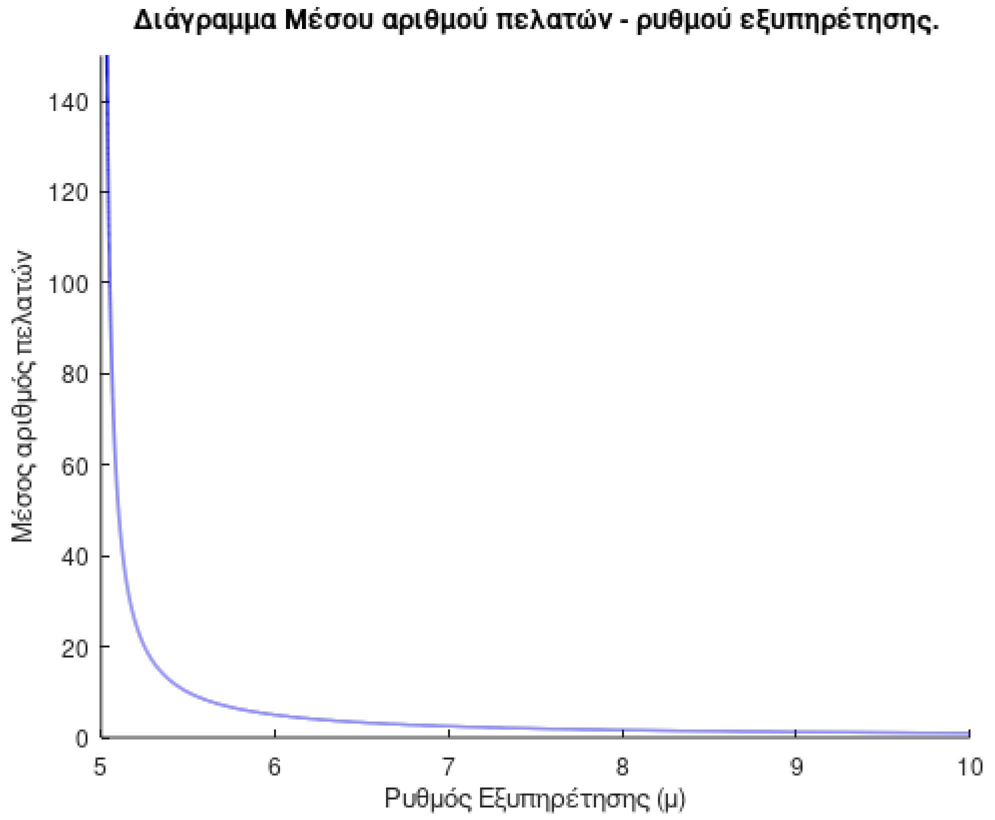
[B2]



Κώδικας για εμφάνιση διαγράμματος του ερωτήματος (B2)

```
figure(2);
hold on;
plot(m,R,"b","linewidth",1.2);
title("Διάγραμμα Μέσου χρόνου καθυστέρησης - ρυθμού εξυπηρέτησης.");
xlabel("Ρυθμός Εξυπηρέτησης (μ)");
ylabel("Μέσος χρόνος καθυστέρησης");
set(gca,"fontsize", 12)
axis([5 10 0 50])
```

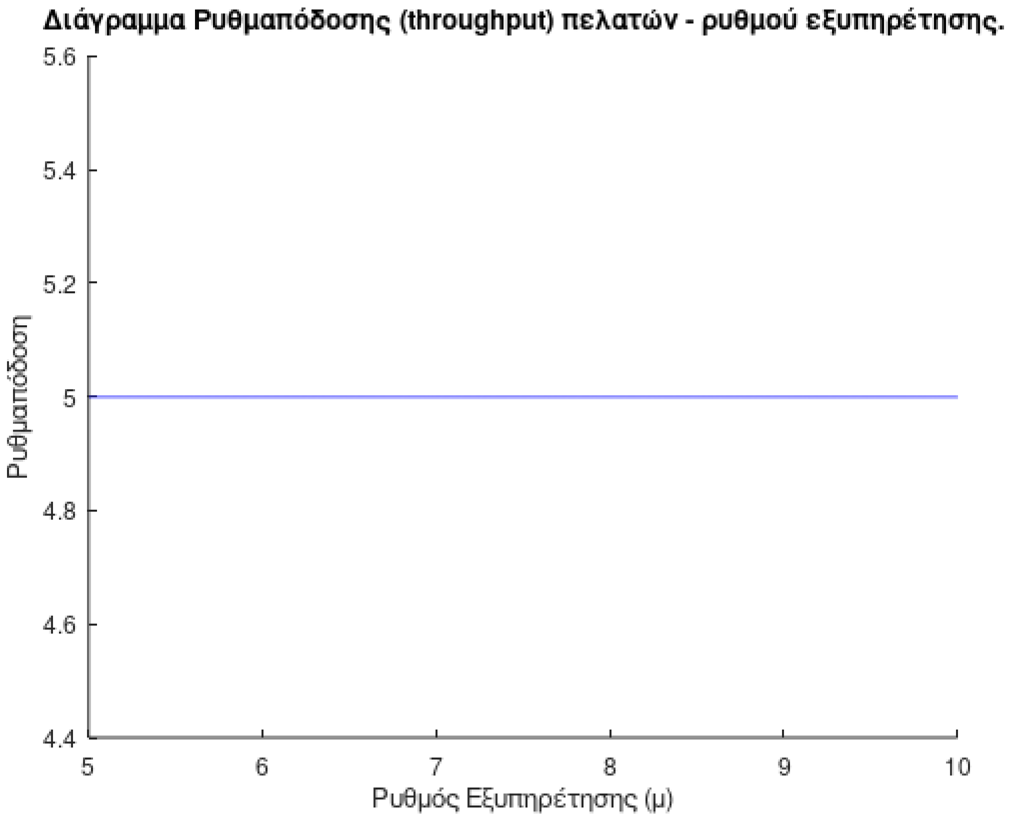
[B3]



Κώδικας για εμφάνιση διαγράμματος του ερωτήματος (B3)

```
figure(3);
hold on;
plot(m,Q,"b","linewidth",1.2);
title("Διάγραμμα Μέσου αριθμού πελατών - ρυθμού εξυπηρέτησης.");
xlabel("Ρυθμός Εξυπηρέτησης (μ)");
ylabel("Μέσος αριθμός πελατών");
set(gca,"fontsize", 12)
axis([5 10 0 150])
```

[B4]



Κώδικας για εμφάνιση διαγράμματος του ερωτήματος (B4)

```
figure(4);
hold on;
plot(m,X,"b","linewidth",1.2);
title("Διάγραμμα Ρυθμαπόδοσης (throughput) πελατών - ρυθμού εξυπηρέτησης.");
xlabel("Ρυθμός Εξυπηρέτησης (μ)");
ylabel("Ρυθμαπόδοση");
set(gca,"fontsize", 12)
```

(Γ)Από το διάγραμμα [B2] παρατηρούμε ότι η αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης συνεπάγεται την μείωση του μέσου χρόνου καθυστέρησης. Ιδανικά θα θέλαμε να έχουμε τον μέγιστο ρυθμό εξυπηρέτησης, κάτι το οποίο δεν είναι εφικτό στην πραγματικότητα καθώς αύτο θα ήταν πολύ κοστοβόρο. Έτσι θα επιλέξουμε μια τιμη για τον ρύθμο εξυπηρέτησης λίγο μετά την τιμή 7, μετά την οποία η μεταβολή του χρόνου εξυπηρέτησης θα μπορούσε να θεωρηθεί "αμελητέα". Μια ικανοποιητική τιμή είναι το 7.5 .

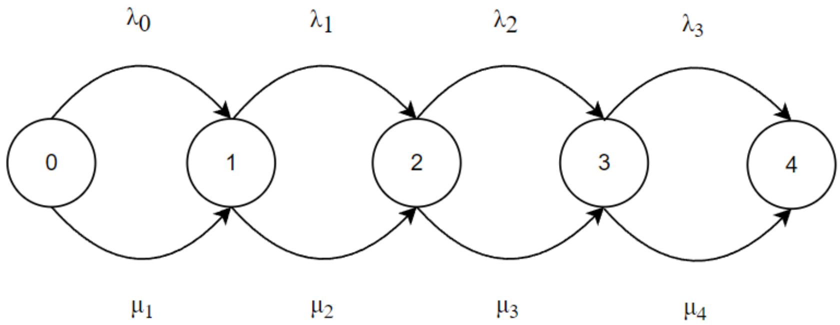
(Δ)Εφόσον το σύστημα M/M/1 είναι άπειρου μεγέθους, δεν έχουμε απόρριψη πελατών και συνεπώς:

$$\gamma = \big(1 - P(blocking)\big) \xRightarrow{P(blocking)=0} \gamma = \lambda = 5$$

Άρα η ρυθμαπόδοση είναι σταθερή, εξού και το διάγραμμα [B4].

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): Εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

(A) Το διάγραμμα γεννήσεων-θανάτων της M/M/1/4:



Ισχύουν:

- $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}$
- $\mu_i = \mu\ , \quad i = 0{,}1{,}2{,}3$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}\\ \mu_i = \mu\ , \quad i = 0{,}1{,}2{,}3\end{array}\right\} \quad \lambda_i P_i = \mu P_{i+1}$$

Επίσης:

- $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$ (Συνθήκη Κανονικοποίησης)

Έτσι υπολογίζουμε τις εργοδικές πιθανότητες ως εξής:

- $P_0 \left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \left(\frac{\lambda_1}{\mu} * \frac{\lambda_0}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda_2}{\mu} * \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu^2}\right) + \left(\frac{\lambda_3}{\mu} * \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu^3}\right) + \left(\frac{\lambda_4}{\mu} * \frac{\lambda_3\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu^4}\right)\right] = 1$

  $\xRightarrow{\mu=10} P_0 \simeq 0.6065$
- $P_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right) P_0 = 0.30325$
- $P_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) P_1 = 0.0758125$
- $P_3 = \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right) P_2 = 0.0126354$
- $P_4 = \left(\frac{\lambda_3}{\mu}\right) P_3 = 0.0015798$

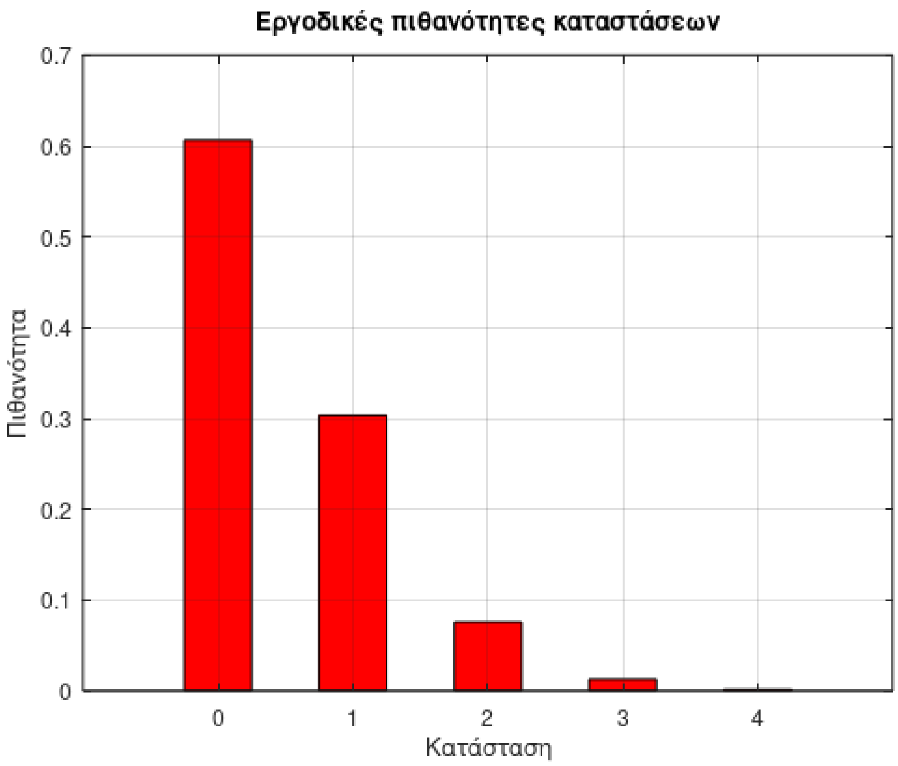
Η πιθανότητα της τελευταίας κατάστασης (4η) είναι ίση με την πιθανότητα απώλειας του πελάτη, άρα $P(blocking) = 0.0015798$.

(B)

[i] Ο πίνακας μεταβάσεων είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -11.667 & 1.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -11.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

[ii] Με τη χρήση του παρακάτω διαγράματος επιβεβαιώνουμε τις τιμές των πιθανοτήτων που υπολογίσαμε παραπάνω:



0.60664	0.30332	0.075829	0.012638	0.0015798

[iii] Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας υπολογίζεται ως εξής:

$$E[n(t)] \rightarrow E(k) = \sum_{k=1}^{4} kP_k$$

Και έχει τιμή:

```
client mean = 0.49921
```

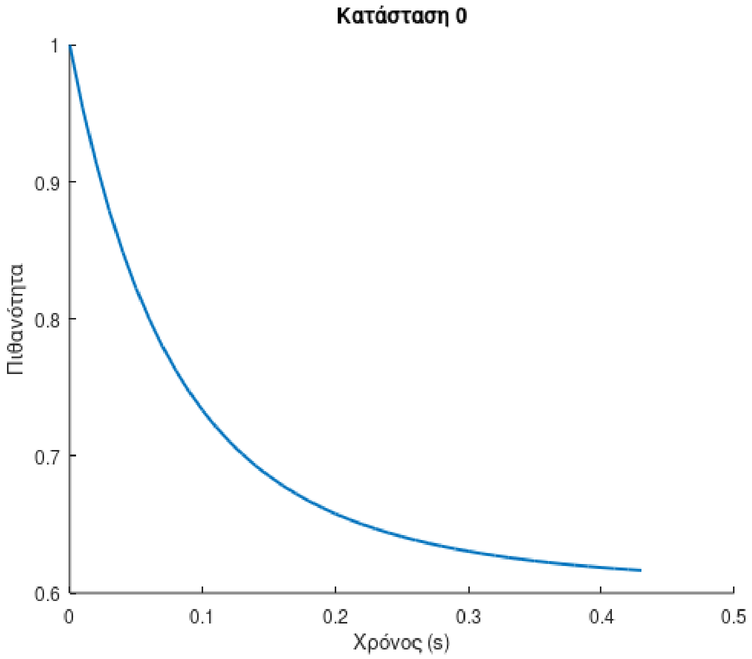
Κώδικας που χρησιμοποίηθηκε για τον παραπάνω υπολογισμό

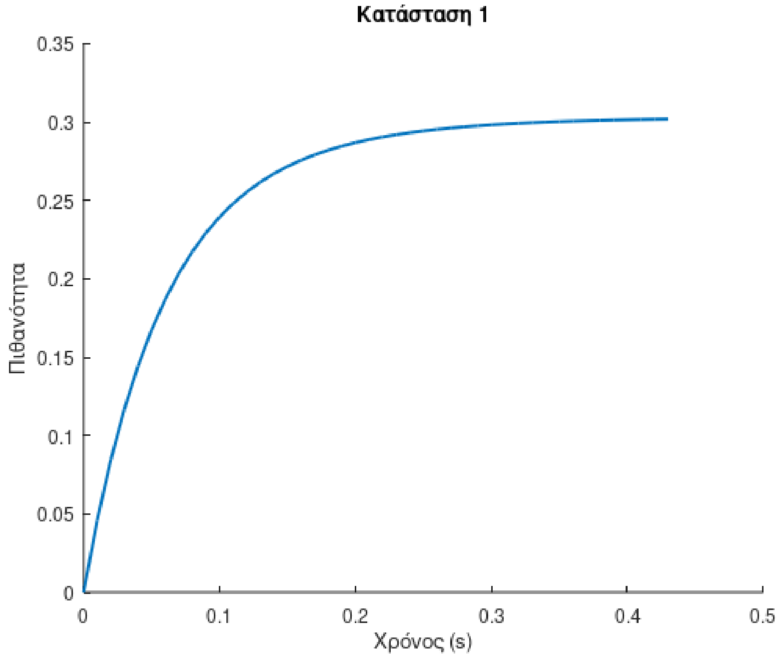
```
%client mean
k=[0,1, 2, 3, 4]
client_mean=sum(P .*k);
display(client_mean)
```

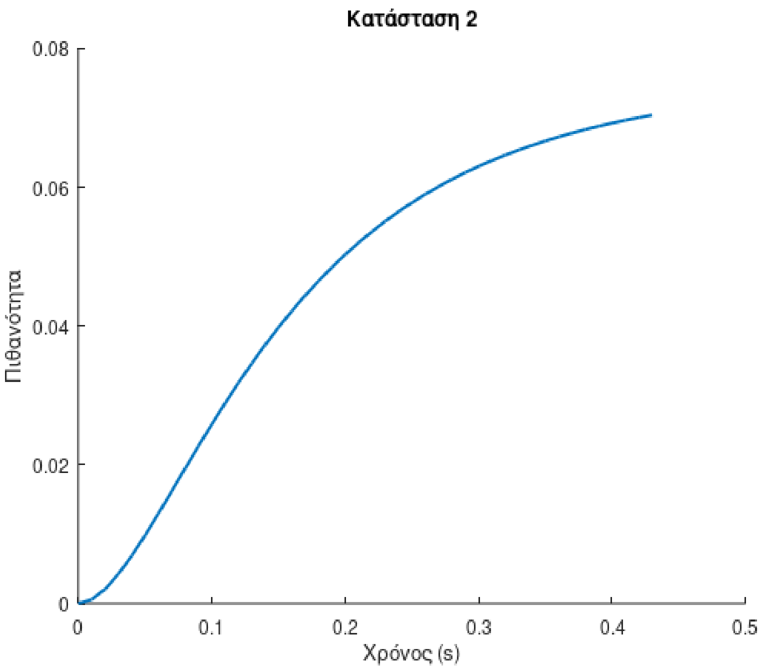
[iv] Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η πιθανότητα της τελευταίας κατάστασης (4η) είναι ίση με την πιθανότητα απώλειας του πελάτη και έχει τιμή:

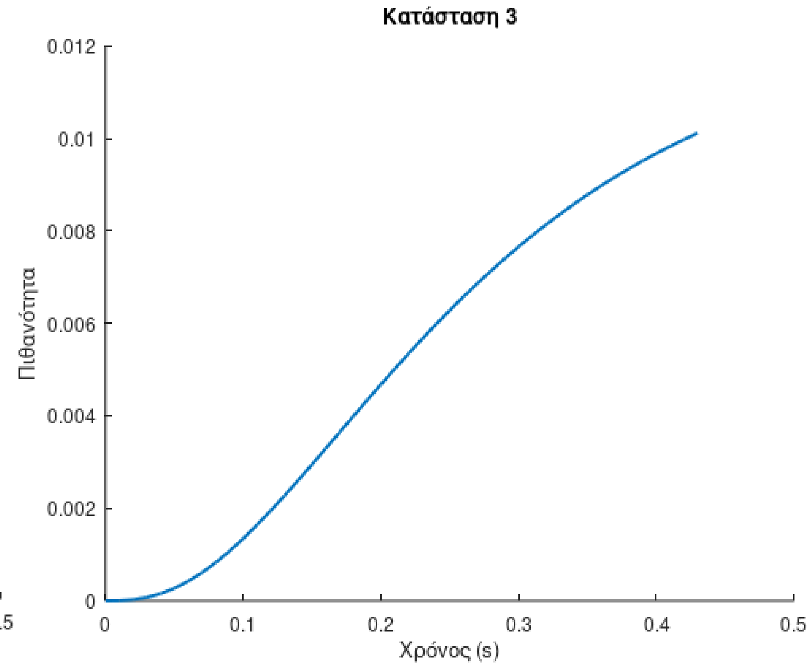
```
P_blocking = 0.0015798
```

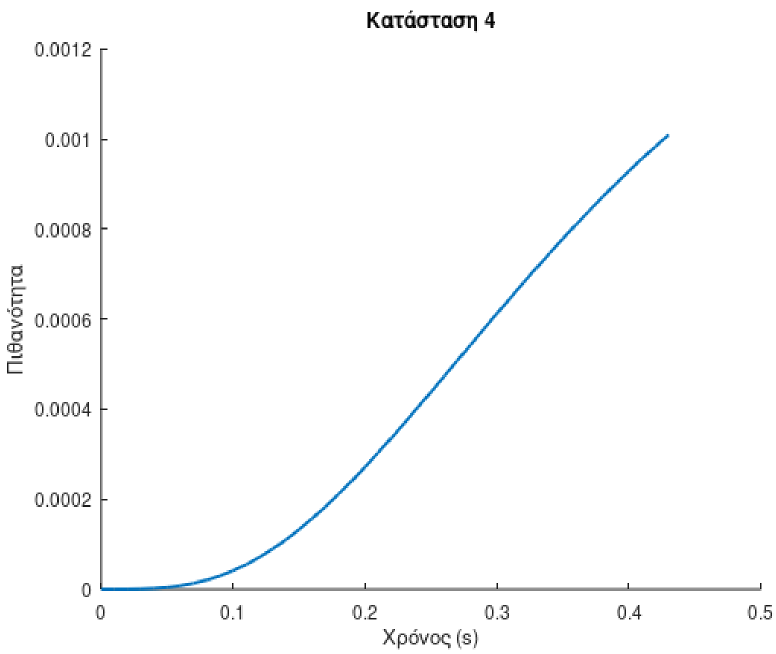
[v] Παρακάτω βρίσκονται τα διαγράμματα των πιθανοτήτων των 4 καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες


Κατάσταση 0
Πιθανότητα
Χρόνος (s)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Κατάσταση 1
Πιθανότητα
Χρόνος (s)
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Κατάσταση 2
Πιθανότητα
Χρόνος (s)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Κατάσταση 3
Πιθανότητα
Χρόνος (s)
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Κατάσταση 4
Πιθανότητα
Χρόνος (s)
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Κώδικας ερωτήματος (Β)

```
% system M/M/1/4
% when there are 3 clients in the system, the capability of the server doubles.

clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix)
% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);
format short g;
display(P)

% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);
xlabel("Κατάσταση")
ylabel("Πιθανότητα")
title("Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων");
set(gca,"fontsize", 12)

%client mean
k=[0,1, 2, 3, 4]
client_mean=sum(P .*k);
display(client_mean)

%P(blocking)
P_blocking=P(5);
display(P_blocking)
% transient probability of state 0 until convergence to ergodic probability.
%Convergence takes place P0 and P differ by 0.01
for i=1:1:5
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(i);
  if P0 - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(i+1);
hold on;
plot(T, Prob0, "linewidth", 1.4);
xlabel("Χρόνος (s)")
ylabel("Πιθανότητα")
title(sprintf('Κατάσταση %i', i-1));
axis([0 0.5])
set(gca,"fontsize", 12);
endfor
```