Regelungstechnik

Zusammenfassung

Joel von Rotz / Quelldateien

Table of contents

Linear Algebra Kurzfassung 4
- Determinante 4
  - 2×2-Matrix 4
  - 3×3-Matrix 4
- Inverse Matrix 4
  - 2×2-Matrix 4
  - 3×3-Matrix 4

Signal & System Kurzfassung 4
- Endwertsatz 4
  - Laplace 4
  - Z-Transformation 4
- Anfangswertsatz 4
  - Laplace 4
  - Z-Transformation 4

Systeme 4
- Grundlegende Systeme 4
  - Regler System 4
  - Geschlossenes System 4
  - Offenes System 4

Regelung 4
- Sensitivitätsfunktionen 5
  - 'Gang of Four' 5
- Rückkopplung 5
- Eigenschaften 5
  - Robustheit 5
  - Dynamik 5
  - Modularität 6
  - Genauigkeit 6
  - Herauserforderungen 6
- Steuerung 6

Modellierung 6
- Zustandsraumdarstellung 6
  - Autonomes, zeitinvariantes System 7
  - Allgemeine Systeme 7
  - Lineares Zustandsraummodell 7
- Übertragungsfunktion 7
- Führungsverhalten 7
  - Merkmale 7
- Störverhalten 8
  - Merkmale 8
- Vorsteuerung 9

Dynamik 9
Lösen von Differential Gleichungen . . . 9
Gleichgewichtslage . . . 10
Stabilität . . . 10
Stabilität linearer Systeme . . . 10

Testfunktion Sprungantwort 10

Linearität & Zeitinvarianzen 10
Adjunkte adj(A) . . . 10
LTI-Systeme . . . 10
Zeitinvarianz . . . 11
Linearität . . . 11
Linearisierung . . . 12
Zustandsraumdarstellung . . . 12
Differentialgleichung . . . 12

Hurwitz-Kriterium 12

Nyquist 13

Grundelemente 13
Elementare Glieder . . . 13
Elementare Funktionen . . . 13

PID-Regler 13
Proportional k_p . . . 13
Integral k_i/T_i . . . 14
Proportional k_d/T_d . . . 14
Übertragungsfunktion . . . 14
Auslegung . . . 14
Anhand Bodediagramm . . . 14
Anhand von Einstellregeln . . . 15
Stellgrössen-Sättigung . . . 15
Windup & Anti-Windup . . . 15

Diskretisierung 15

MATLAB 15
Vektoren . . . 15
Plotting . . . 15
XY-Graph . . . 16
XYY-Graph . . . 16
Transferfunktion `tf(...)` . . . 16
PID-Regler `pidstd` . . . 16
Bode-Diagramm `bode` . . . 16
Nyquist-Diagramm `nyquist` . . . 17
Sprungantwort `step` . . . 17
Impulsantwort `impulse` . . . 17
Pol-Nullstellen-Diagramm `pzmap` . . . 17
Margin `margin(tf)` . . . 18
Zustandsraumdarstellung `ss()` . . . 18
Reglersimulator `Sisotool(tf(...))` . . . 18

Simulink 18

Prozess Typen 18
PT1 . . . 18

PT2 18

Anleitungen / Vorgehen **18**
Modellierung dynamischer Systeme 18

Übertragungsfunktion **19**
Harmonische Anregung linearer Systeme 19

Glossar **19**

Linear Algebra Kurzfassung

Determinante

2 × 2-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3 × 3-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - afh$$

Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$$

2 × 2-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3 × 3-Matrix

Signal & System Kurzfassung

Endwertsatz

Laplace

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s)$$

falls $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existiert

Z-Transformation

$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

falls $X(z)$ nur Pole mit $|z| < 1$ oder bei $z = 1$

Anfangswertsatz

Laplace

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot X(s)$$

falls $x(0^+)$ existiert

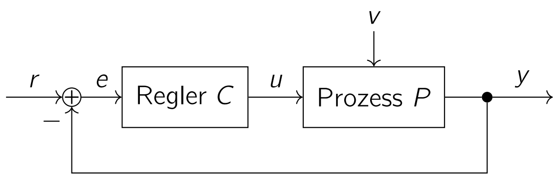
Z-Transformation

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Systeme

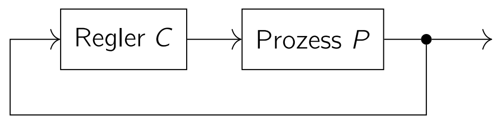
Grundlegende Systeme

Regler System



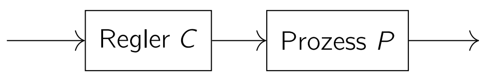
- r : Führungsgrösse (Soll-Wert)
- e : Regelfehler
- u : Stell-/Steuergrösse
- y : Regelgrösse (Ist-Wert)
- v : Störgrösse

Geschlossenes System



Schwieriger zum Berechnen und zum Untersuchen, da diese ein rückgekoppeltes Signal (mit dem Eingangssignal kombinierend) Teil des Eingangssignals zum System besitzen.

Offenes System



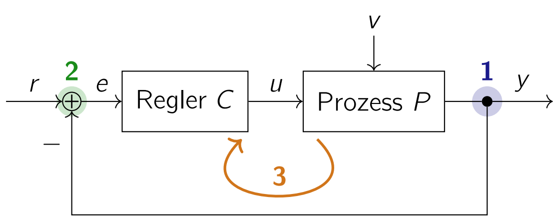
$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

Kein rückgekoppeltes Signal. Wird für Stabilitätsbestimmung und Anpassungen verwendet.

Regelung

Feedback Control

Ziel eines Reglers ist die Angleichung einer Regelgrösse y an eine Führungsgrösse r, sodass idealerweise $y = r$.

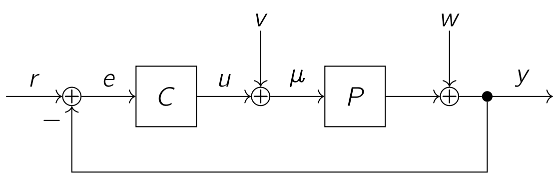


Merkmale einer Regelung

Folgende Merkmale **muss** eine Regelung aufweisen, ansonsten ist es keine Regelung.

1. Erfassung (Messen) der Regelgrösse
2. Vergleich von Regel- und Führungsgrösse
3. Geschlossener Wirkungskreis

Sensitivitätsfunktionen



'Gang of Four'

Das Verhalten der Regelung kann durch die folgenden vier Sensitivitätsfunktionen beschrieben werden.

Sensitivity Function

$$G_{er} = S = \frac{1}{1+PC}$$

Load Sensitivity Function

$$G_{vy} = PS = \frac{1}{1+PC}$$

Complementary Sensitivity Function

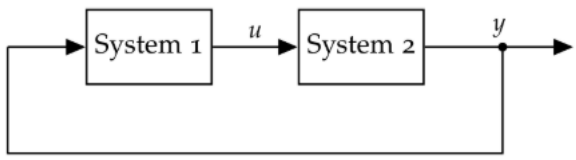
$$G_{yr} = T = \frac{1}{1+PC} \overset{!}{=} \underline{1}$$

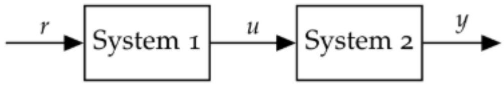
Noise Sensitivity Function

$$G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

Rückkopplung

Rückkopplung beschreibt eine Anordnung, bei welcher zwei oder mehr dynamische Systeme Systeme untereinander so verbunden sind, dass sie sich gegenseitig beeinflussen.





Caution

Geschlossene Kreise → schwieriger zum Berechnen und zum Untersuchen, da diese ein rückgekoppeltes Signal (mit dem Eingangssignal kombinierend) Teil des Eingangssignals zum System besitzen.
Offene Kreise → kein rückgekoppeltes Signal.

Eigenschaften

Robustheit

Robustheit bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.

Robustheit gegenüber Unsicherheit → Standhaltung gegenüber Störungen

Dynamik

Die *Dynamik* eines Systems kann durch eine Regelung beeinflusst und verändert werden.

- Instabile Systeme → stabil
- Träges System → schnell
- Abdriftende System → konstant.

Abhängigkeit

Viele Systemeigenschaften sind nicht unabhängig voneinander. Sie unterliegen von Natur aus bestimmten Beschränkungen

- Stabiles Flugverhalten → keine hohe Manövrierbarkeit

!! Regelungen können helfen, diese Abhängigkeiten teilweise aufzuheben!

Safety Critical

Werden instabile Systeme mittels Regelung stabilisiert, so wird die Regelung kritisch für die Sicherheit des Systems.

Modularität

In einem modularen System sind die einzelnen Module möglichst unabhängig voneinander → Module können einfach ersetzt oder erweitert werden.

- Wohldefinierte Ein-/Ausgänge, Beziehungen dazwischen → Verhalten unabhängig von äusseren Umständen → ebenfalls Ziel von Regler

Mittels Regelulng lassen sich Komponenten unabhängiger und damit zusammengesetzte Systeme Modularer machen.

Genauigkeit

Mit Regelung können unerwünschte Störeinflüsse ausgeglichen werden → Verbessert Genauigkeit und Auflösung (z.B. bei Sensoren).

i Anwendungen

Ein Konzept einer hohen Genauigkeit ist, mittels Regelung wird ein bestimmten und wohldefinierten Arbeitspunkt ausgeregelt und dabei aufgewendete Stellgrösse als Messgrösse des Sensors interpretiert dies.
→ Beispiel: Seismographgen, sehr präzise Waagen

Herauserforderungen

Regelungen bringen viele Vorteile, aber auch einige Nachteile:

Gefahr der Instabilität – Auch geregelte Systeme haben einen Kipppunkt, wo die Mitkopplung dominant wird und zur Instabilität führt. Ziel einer Regelung ist das System unter allen Umständen stabil zu halten (nicht nur unter Normalbedingung sondern auch unter allen Störeinflüssen → anspruchsvoll).

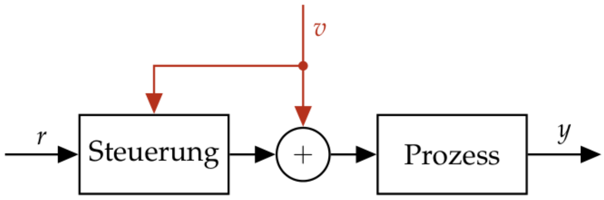
Beispiel: Mikrophonverstärkung bei Beschallungsanlage zu weit aufgedreht → pfeifen

Messfehler – Jede Regelgrösse wird messtechnisch verfasst → verbundene Messfehler gehen in Systemverhalten ein (betrifft statische Fehler, dynamische Fehler, wie Rauschen)

Komplexität – Die Implementation eines Regelsystems bei hoher Komplexität wird anspruchsvoller und mit entsprechendem Aufwand verbunden.

Steuerung

Feedforward Control



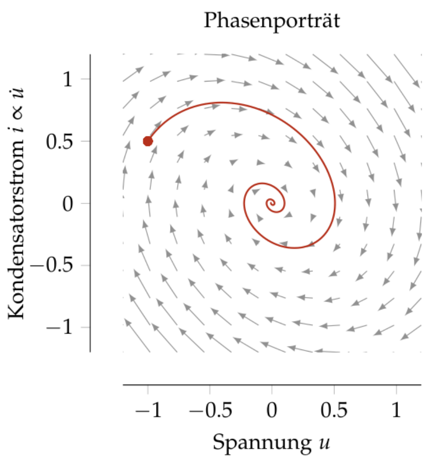
Modellierung

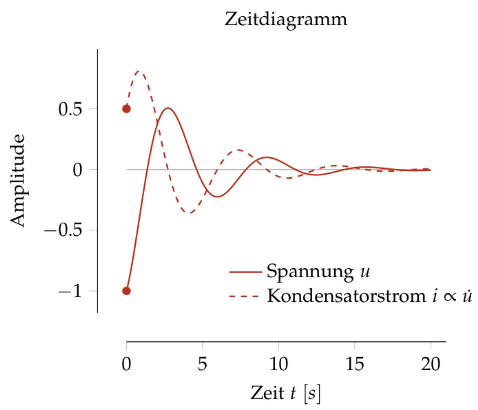
! Vereinfachung

Modelle repräsentieren immer eine Vereinfachung des eigentlichen Systems und fokusiert daher immer auf ein Teil des Systems.
Beispiel Die Modellierung des Tempomats konzentriert sich mehr auf die Geschwindigkeit des Fahrzeugs als auf die Auswirkungen eines Atombombeneinschlags auf das Fahrzeug.

Zustandsraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträit* kann das System *visualisiert* werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträit den zeitlichen Verlauf verfolgen.





Autonomes, zeitinvariantes System

$$\boxed{\tfrac{dx}{dt} = f(x)} \xrightarrow{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

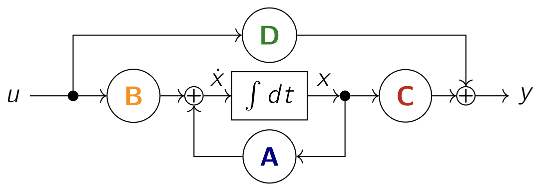
Allgemeine Systeme

$$\xrightarrow{u} \boxed{\begin{matrix}\tfrac{dx}{dt} = f(x,u) \\ y = h(x,u)\end{matrix}} \xrightarrow{y}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad y = h(x,u)$$

Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.



$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

A : beschreibt Dynamik
B : beschreibt Steuereinfluss
C : beschreibt Messung
D : beschreibt Durchgriff

Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion (oder Transferfunktion) beschreibt die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangsgrösse.

$$G_{AE}(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

A : **A**usgangssignal
E : **E**ingangssignal

Führungsverhalten

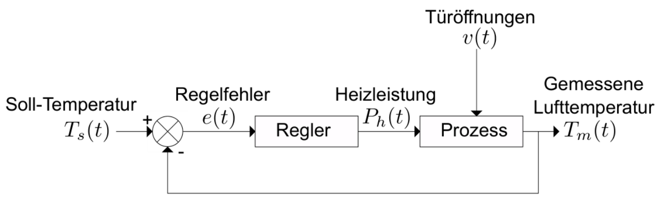
Das Führungsverhalten beschreibt die Beziehung zwischen der Führungsgrösse und der Regelgrösse (sogenannter *Soll-Ist*-Vergleich).

Merkmale

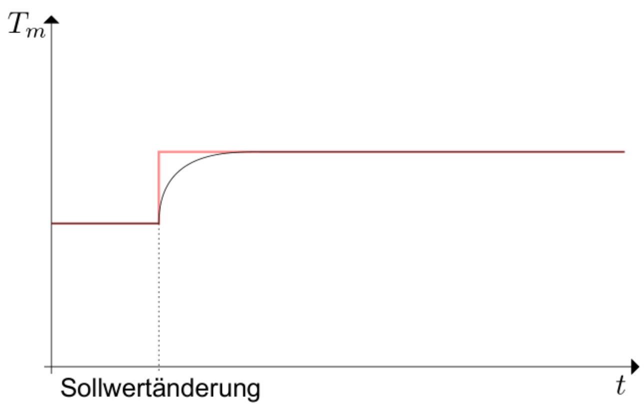
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**

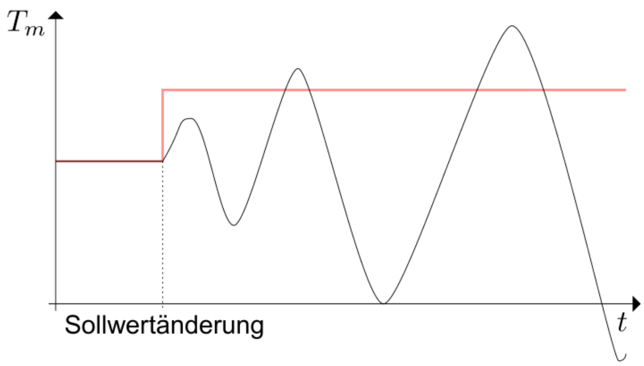
Folgendes Beispiel ist eine Sauna:



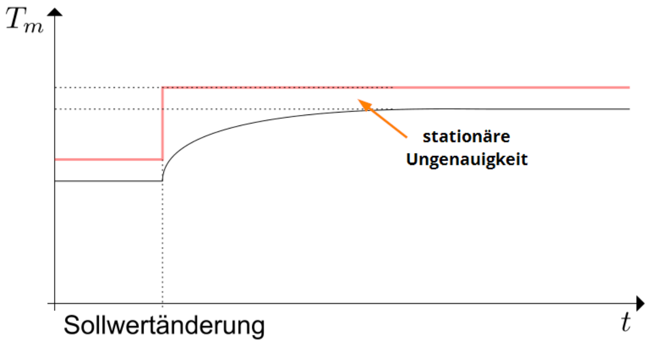
Gutes Führungsverhalten



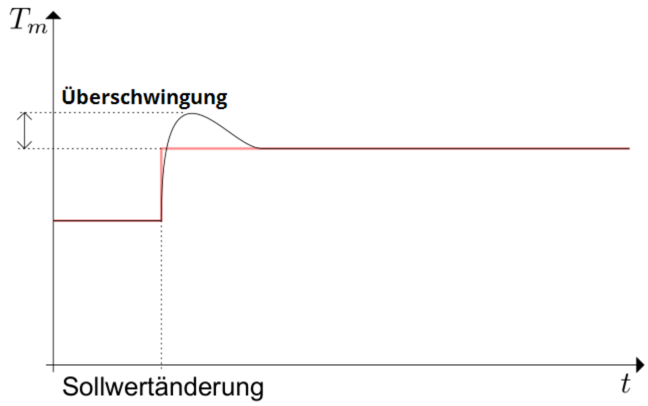
Instabilität



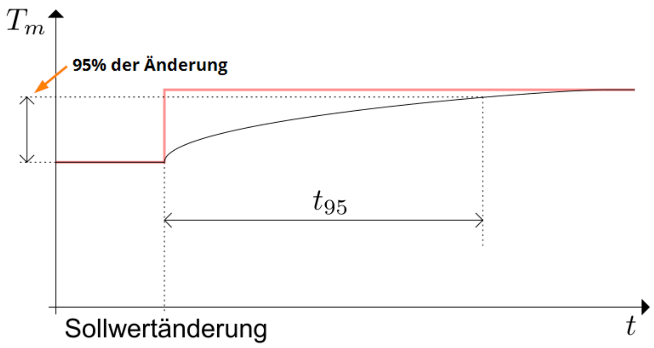
Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit



Überschwingen



Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes



Störverhalten

Das Störverhalten beschreibt den Einfluss der Störgrössen v auf die Regelgrösse y bei einer konstanten Führungsgrösse r. Ein gutes Störverhalten minimiert diese Einflüsse, wobei die Definition von "gut" abhängig vom entsprechenden System ist.

$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

Beispiel

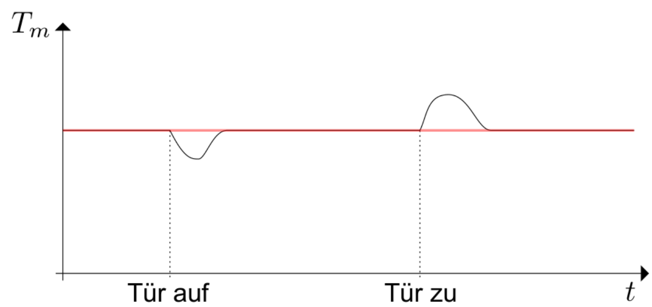
- Eine Saune kann sich dies eher noch erlauben, da eine Überschwingung nur einen kleinen Einfluss auf die Systemqualität hat.

Merkmale

Das Störverhlaten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

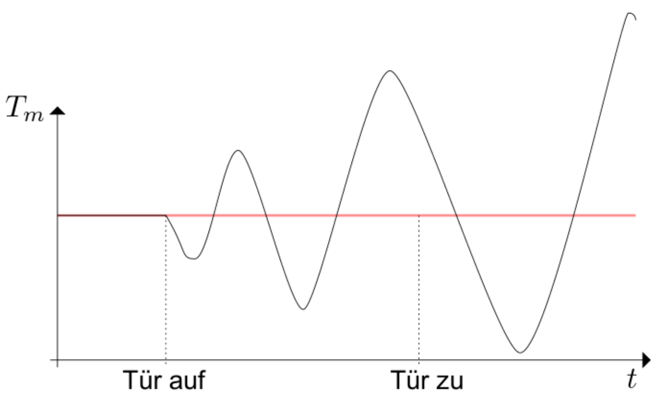
- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**.

Gutes Störverhalten

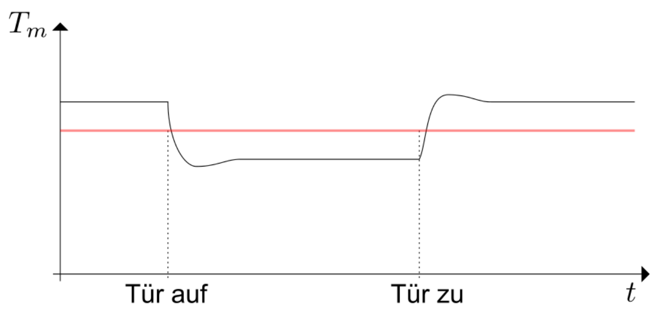


rot: Sollwert

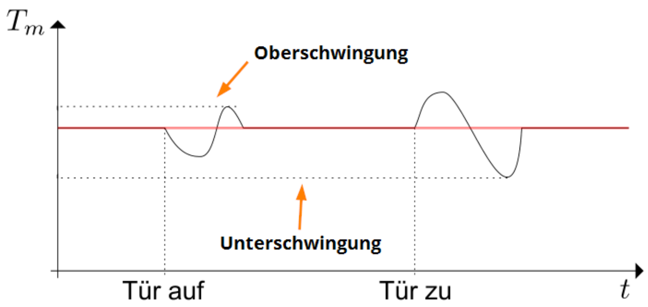
Instabilität



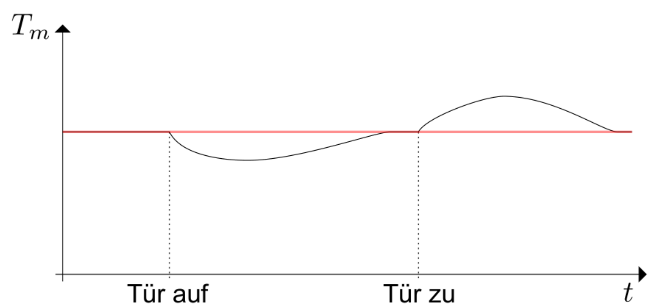
Stationärer Fehler / Ungenauigkeit



Überschwingen

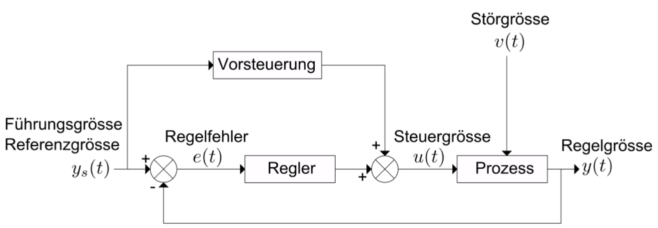


Langsames Erreichen des stationären Wertes



Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).



Dynamik

Lösung einer Differentialgleichung

$$x(t_0) = x_0 \qquad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

Gleichgewichtslage

Eine Gleichgewichtslage ist ein Zustand in dem das System stabil ist. Dies ist auch bekannt als *stationäres* Verhalten und weist keine Veränderungen auf mit der Zeit.

x_e ist eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems $\frac{dx}{dt} = F(x)$ falls:

$$F(x_e) = 0 \rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x_e} = 0$$

Stabilität

Stabilität (allgemein)

Die Stabilität ist in drei Zustände eingeteilt.

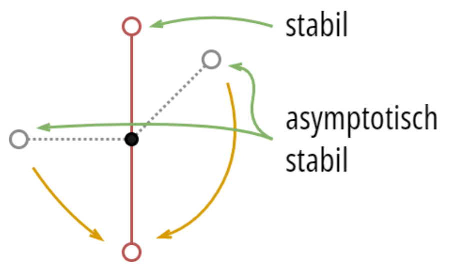
- **stabil**, falls alle Zustände (unterschiedliche Anfangspositionen) in der Nähe der Gleichgewichtslage x_e zu Lösungen führen.
- **asymptotisch stabil**, falls alle Zustände in der Nähe von x_e nach langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) in x_e enden.
- **instabil**, falls der Zustand nie eine Gleichgewichtslage erreicht.

Stabilität ist im Allgemeinen eine *lokale* Eigenschaft innerhalb eines Bereiches des Zustandsraums!

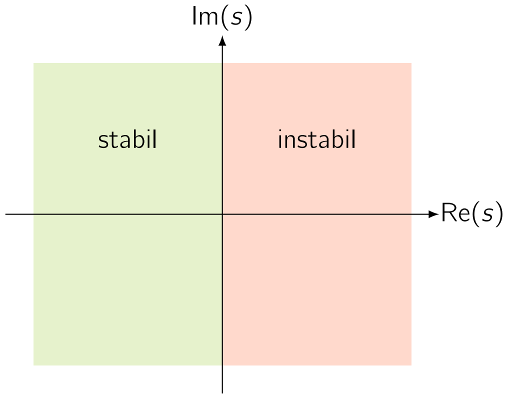
Beispiel - Pendel

Das Pendel, welches die gesamte Rotationsachse (360°, rundherum) ausnützen kann, hat zwei Gleichgewichtslagen:

- **stabile** Position oben
- **asymptotische stabile** Positionen, welche immer nach unten gehen.



Stabilität linearer Systeme



Polstellen eines linearen Systems ($\frac{dx}{dt} = Ax$ & $x(0) = x_0$) können mit dem *charakteristischen Polynoms* berechnet werden.

charakteristisches Polynom

Die Nullstellen von λ werden mit der Dynamik-Matrix A berechnet.

$$\lambda(A) := \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$

Gültigkeit

Stabilität linearer Systeme ist nur von A abhängig, nicht vom Anfangswert x_0. Dies gilt Global!

Testfunktion Sprungantwort

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{zeitabhängig}} \underbrace{-CA^{-1}B + D}_{\text{konstant}} \qquad t > 0$$

System strebt gegen Wert wenn A asymptotisch stabil ist.

Linearität & Zeitinvarianzen

Adjunkte adj(A)

$$\text{adj}(A) =$$

LTI-Systeme

! Anforderung

Alle Kriterien *Zeitinvarianz*, *Verstärkungs* und *Überlagerungsprinzip* müssen für LTI-System gelten.

Tipp

Zustands-, Ein- oder Ausgangsgrössen in nichtlinearen Operationen ($\cdot^2$, sin, ln . . .) in Differenzialgleichung deuten auf ein **nicht lineares** System.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-t} \cdot \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitvariant} \\
y &= \int_0^t u(\tau) d\tau && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\
y &= \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\
y &= \ddot{y} - u \cdot \dot{y} && \rightarrow \text{nicht linear} \\
y &= \sqrt{u^2 + 1} && \rightarrow \text{nicht linear} \\
y &= 2 \cdot u + 4 && \rightarrow \text{linear}
\end{aligned}
$$

Zeitinvarianz

System ist *zeitinvariant*, falls dessen Wirkungsweise nicht von der Zeit t abhängig ist. Das heisst, das System

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

liefert auf ein Signal $x(t)$ mit einer Verzögerung $a > 0$ ebenfalls ein verzögertes Ausgangssignal

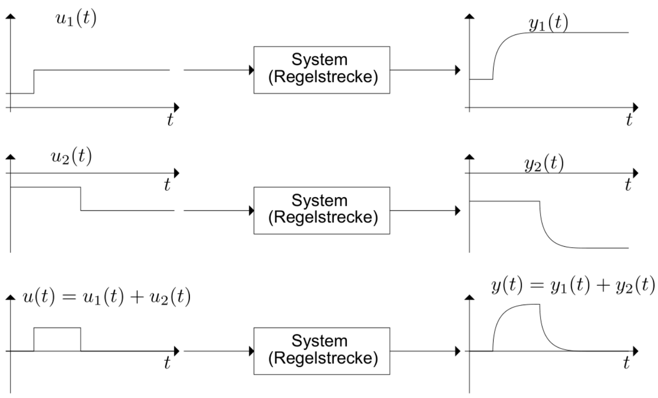
$$y(t + a) = H\{x(t + a)\}$$

Linearität

Ein System ist *linear*, falls das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip gelten.

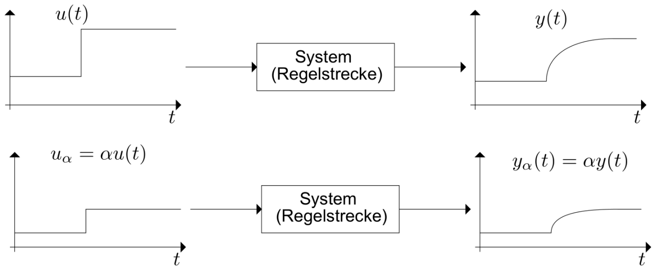
Überlagerungsprinzip

Wenn $y_1(t)$ die Antwort auf $u_1(t)$ ist und $y_2(t)$ die Antwort auf $u_2(t)$ ist, so ist $y_1(t) + y_2(t)$ die Antwort auf $u_1(t) + u_2(t)$.



Verstärkungsprinzip

Wenn $y(t)$ die Antwort auf $u(t)$ ist, $\alpha \cdot y(t)$ ist die Antwort auf $\alpha \cdot u(t)$.

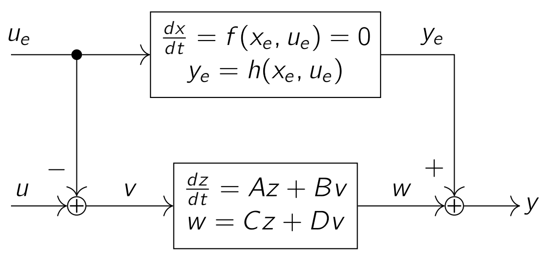


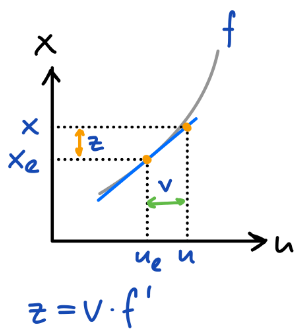
Linearisierung

! Stabilität Linearisierung

Ist das *linearisiterte* System asymptotisch stabil, so ist das *nicht-lineare* System in der Umgebung der Gleichgewichtslage ebenfalls asymptotisch stabil.

Zustandsraumdarstellung





Ein nicht-lineares System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad y = h(x, u)$$

kann an einem Arbeitspunkt mit folgenden Gleichungen

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)}$$

ergibt die Linearisierung

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv \qquad w = Cz + Dv$$

mit $z = x - x_e$, $v = u - u_e$ und $w = y - y_e$ mit $y_e = h(x_e, u_e)$.

Differentialgleichung

Vorgehen

$$M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

1. Differentialgleichung gleich 0 setzen $f(\cdots) = F(\cdots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 - M \cdot g = 0}_{F(y^{(n)},\ldots,y,u^{(m)},\ldots,u)}$$

$$\rightarrow \quad f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

2. Arbeitspunkt/stationärer Zustand berechnen ($h^{(n>0)} = 0$)

$\overline{h} = h_0 = \sqrt[3]{\frac{M \cdot g}{k}}$

3. Deltagrössendefinieren

$$\Delta h = h - \overline{h}$$
$$\Delta$$

3. In Linearisierungsgleichung einsetzten

$$\left.\frac{\delta f}{\delta \ddot{h}}\right|_{h = \overline{h}}$$

Hurwitz-Kriterium

! Hurwitz-Kriterium

Die Polstellen-Gleichung $\lambda(s)$ mit $a_0 > 0$ hat dann, und nur dann, ausschliesslich Lösungen mit negativen reellen Teilen, falls alle Unterdeterminante der Hurwitz-Matrix positiv sind:
$\det H_n > 0$

$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{n_P \cdot n_C}{d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C}$$

n_C : Zähler (*numerator*) des Reglers C
d_C : Nenner (*divider*) des Reglers C
n_P : Zähler (*numerator*) des Prozess P
d_P : Nenner (*divider*) des Prozess P

$$\lambda = d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C$$

$$\lambda(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det H_n =$$

Tip

Bei $n \leq 2$ genügt die Bedingung, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen.

Was mit Hurwitz nicht möglich ist

Das Hurwitz-Kriterium beschreibt keine *Robustheit* der Stabilität und erlangt keine Einsicht, wie der Regler $C = \frac{n_c}{d_c}$ gewählt werden sollte.

Nyquist

Grundelemente

Elementare Glieder

$$G(s) = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_n}$$
$$= b_0 \cdot (s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdots (s + z_m) \cdot \frac{1}{s + p_1} \cdot \frac{1}{s + p_2} \cdots \frac{1}{s + p_n}$$

m : Nullstellen $z_{1 \ldots m}$
n : Polstellen $p_{1 \ldots m}$

Elementare Funktionen

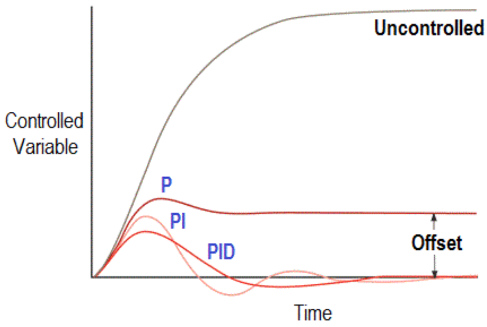
Mit Parametern $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$

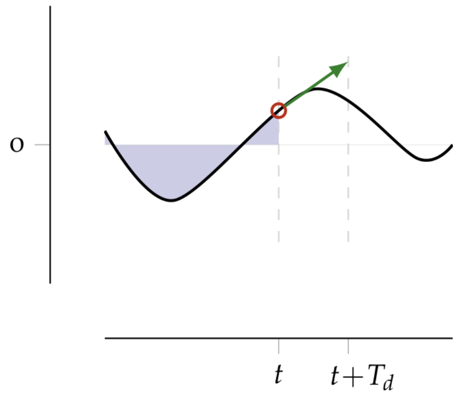
$G(s) = k$: konstanter Faktor
$G(s) = s + a$: einfache reelle Nullstelle
$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_o^2$: konj. komplexe Nullstellen ($\zeta \leq 1$)
$G(s) = \frac{1}{s+a}$: einfacher reller Pol
$G(s) = \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_o^2}$: konj. komplexe Pole ($\zeta \leq 1$)
$G(s) = e^{-s\tau}$: Totzeitglied $\tau > 0$

Die zugehörigen Nullstellen

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & konj.komplex \end{cases}$$

PID-Regler





Die Aufgabe eines Reglers besteht darin, ausgehen von einem Regelfehler e zum Zeitpunkt t eine Stellgrösse u so zu bestimmen, dass der Fehler in absehbarer Zeit reduziert wird.

Verhalten Regler

Grössere Fehler sollten zu grösseren Stellgrössen führen und kleinere Fehler zu kleineren Stellgrössen.

Proportional k_p

P-Anteil verstärkt den Regelfehler e um die *Proportionalverstärkung* k_p.

$$u = k_p(r - y) = k_p \cdot e$$

P-Regler

$e = 0$ ist mit einem P-Regler nicht möglich. Unter Annahme eines stabilen Regelkreises:

$$G_{er} = \frac{1}{1 + P \cdot C} = \frac{1}{1 + P \cdot k_p}$$

entsteht ein bleibender Fehler von:

$$G_{er}(0) = \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} = \frac{1}{1 + P(0) \cdot k_p}$$

! Proportionalband

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{falls } e \geq e_{max} \\ k_p \cdot e & \text{falls } e_{min} < e < e_{max} \\ u_{min} & \text{falls } e \geq e_{min} \end{cases}$$

mit

$$e_{min} = \frac{u_{min}}{k_p} \qquad e_{max} = \frac{u_{max}}{k_p}$$

Permanentes Stellsignal u

Wird ein permanentes Stellsignal u benötigt, so gilt für den P-Regler einen bestimmten Fehler $e \neq 0$.

Integral k_i/T_i

Mit dem I-Anteil werden *vergangene* Fehler mitberechnet → stationäre Fehler des P-Anteils wird korrigiert.

$$u = k_i \cdot \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

Die Stellgrösse wird dadurch solange geregelt, bis der Regelfehler $e = 0$ wird.

Proportional k_d/T_d

Der D-Anteil reagiert auf *zukünftige* Fehler, indem die Steigung mit einem Verstärkungsfaktor k_d verstärkt wird.

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de}{dt} \qquad u = k_d \frac{de}{dt}$$

! Limitierung der D-Verstärkung

Grund: Für träge Prozess führt eine sprungartige Veränderung (z.B. Sprungantwort oder Dirac-Impuls) zu einem sprungartigen Regelfehler $e(t) \approx \sigma$.

Übertragungsfunktion

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d \cdot s\right) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$

! Important

Diese Beschreibung ist nur eine idealisierte Repräsentation, welche für das Verständnis des System hilfreich ist. Im praktischen Einsatz sind Modifikationen notwendig.

Auslegung

Anhand Bodediagramm

Diese Auslegung fokussiert anhand des **offenen** Kreises ($L = C \cdot P$) des Regelkreises.

$$C(s) = k_i \frac{(1 + s\,T_1)(1 + s\,T_2)}{s} = k_p \frac{(1 + s\,T_i)(1 + s\,T_d)}{s \cdot T_i}$$

Zielgrössen: Durchtrittsfrequenz ω_{gc}, die Phasenreserve φ_m und allenfalls Amplitudenreserve g_m.

Vorgehen

Prozess: $P(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$ mit Ziel $\omega_{gc} \geq 10\frac{rad}{s}$, $\varphi_m \geq 50$.

1. P-Regler für Erreichung von ω_{gc}. Mit $|k_p \cdot P(j\omega_{gc})| = 1$ (Nyquist-Kriterium) folgt:

$$k_p = \frac{1}{\left|\frac{10}{1+10j}\right|} = \frac{(\sqrt{1^2 + 10^2})^2}{10} = 10.1$$

$$C(s) = k_p = 10.1$$

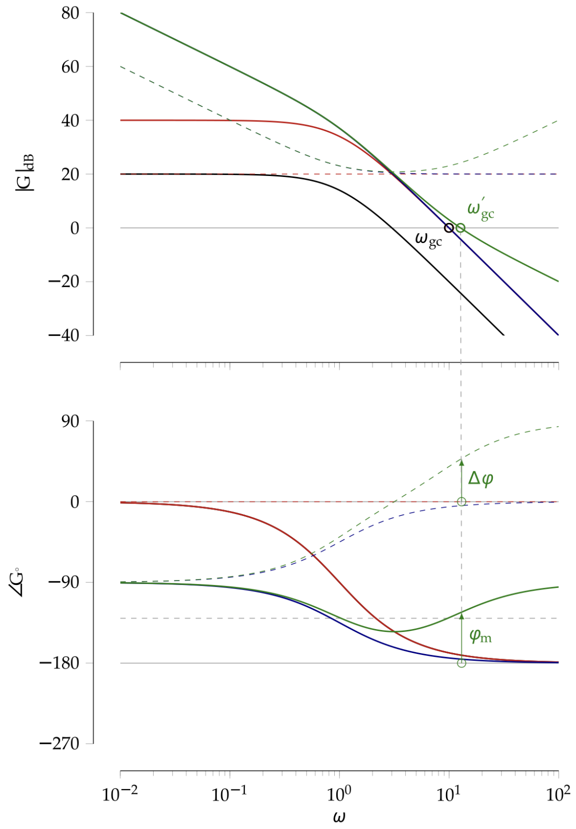
2. PI-Regler für Reduktion der zusätzlichen Phasensenkung im Bereich von ω_{gc}

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)}{s} = \frac{10 \cdot (1 + s)}{s}$$

1. PID-Regler für genügend Phasenabhebung im Bereich von ω_{gc}

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s} = 10 \cdot \frac{(1 + s)(1 + 0.1s)}{s}$$

4. Kontrolle von resultiernden Durchtrittsfrequenz ω'_{gc} und damit ergebenden Phasenreserve φ_m.



Anhand von Einstellregeln

Stellgrössen-Sättigung

Sättigungseffekt

Windup & Anti-Windup

Windup entsteht durch

Diskretisierung

Digitalrechner arbeiten zeitdiskret ↔ Prozesse sind von zeitkontinuierlicher Natur

Perspektiven für Entwurf zeitdiskrete Regler

1. *Prozess*:
2. *Regler*:

MATLAB

Vektoren

Vektoren werden mit `[. . . ]` deklariert. Elemente werden Spaltenweise mit einem Leerschlag `' '` oder Komma `,` eingeteilt und mit einem Semikolon `;` Reihenweise geteilt.

```
data = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]; % same as [1 2 3;4 5 6;7
↪  8 9];
```

Grösse `size`

Mit `size` kann die Grösse einer Variable ermittelt werden. `size` gibt als Resultat ein 1x2 Vektor zurück ($\begin{bmatrix}\text{Rows} & \text{Columns}\end{bmatrix}$)

```
>> a = 1
>> size(a)
     1      1   % rows, columns
```

```
a = 1
```

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad \text{oder einfach} \quad 1$$

Die `size`-Funktion gibt auch bei einzelnen Werte eine Grösse aus, nämlich $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

```
b = [1 2 3] % Linienvektor
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

```
c = [2;3;4] % Spaltenvektor
```

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

Slicing

Mit *Slicing* kann ein Teil einer Matrix **kopiert** werden und einer anderen Variable zugewiesen werden.

```
<matrix>(<rowStart>:<rowEnd>,<colStart>:<⌋
↪  colEnd>)
```

Plotting

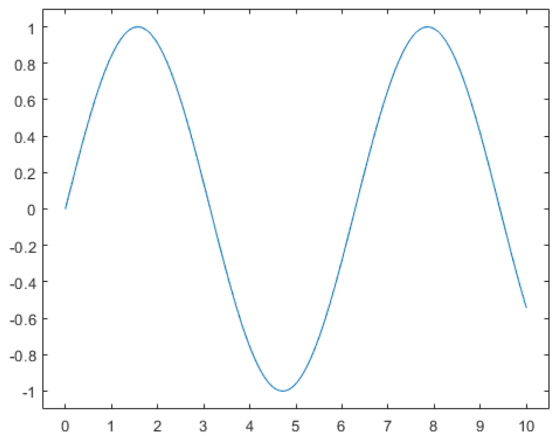
Figure-Separierung

Mit `figure(n)` können mehrere Plot-Befehle in eigene Figuren geladen werden.

XY-Graph

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;
y = sin(t);

plot(t,y);
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);
```



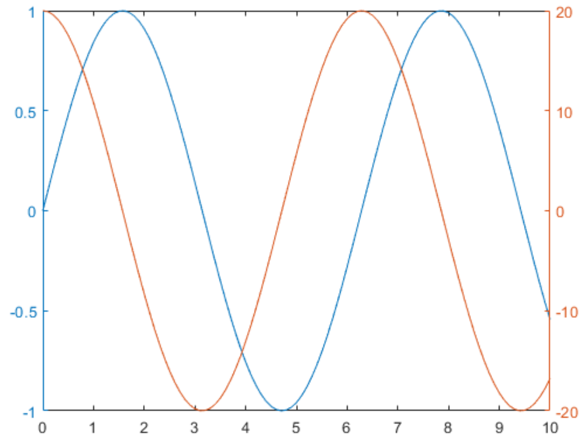
XYY-Graph

Mit `yyaxis` kann die Y-Achse beim selben Plot mit `left` & `right` gewechselt werden.

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;

yyaxis left;
plot(t, sin(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);

yyaxis right;
plot(t, 20*cos(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-20.5 20.5]);
```



Transferfunktion `tf(...)`

Mit dem Befehl `tf(...)` kann eine Transferfunktion deklariert werden mit Zähler- und Nenner-Zeilenvektoren.

```
sys = tf(numerator,denominator);
```

Die Transferfunktion kann in anderen Funktion wiederverwendet werden, wie zum Beispiel `step` oder `bode`. Folgende Beispiele sind mit der `sys`-Transferfunktion (folgende Gleichung) gemacht.

$$G_{\text{sys}}(s) = \frac{4}{s^2 + s + 10}$$

```
sys = tf(4,[1 2 10]);
```

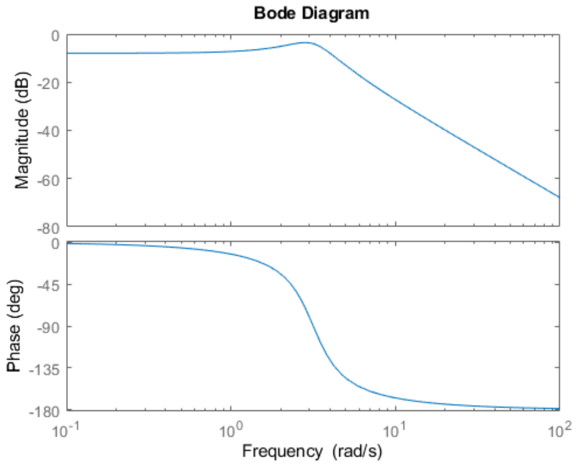
PID-Regler `pidstd`

```

```

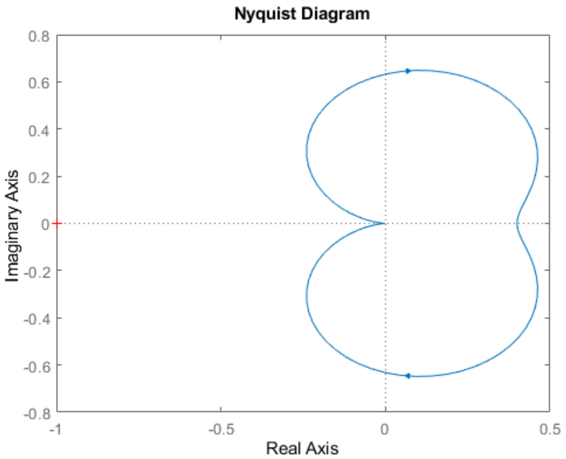
Bode-Diagramm `bode`

```
bode(sys,{0.1,100}); % or bode(sys);
% grid on; to enable Grid in Plot
```



Nyquist-Diagramm `nyquist`

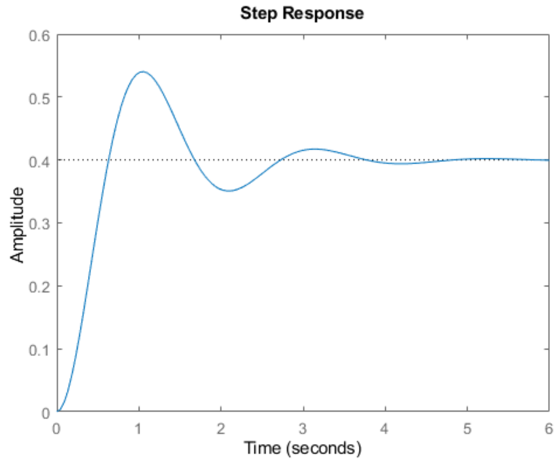
```
nyquist(sys)
```



Sprungantwort `step`

Mit `step(...)` kann eine Transferfunktion mit der Sprungfunktion σ verwendet werden. Damit

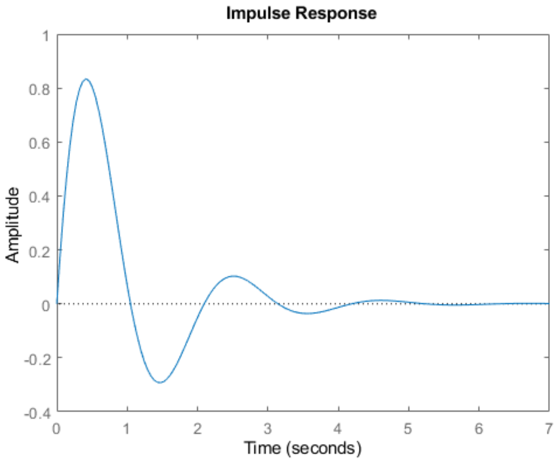
```
step(sys);
```



Impulsantwort `impulse`

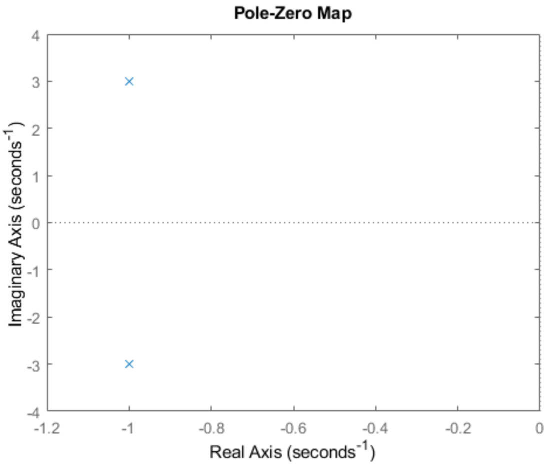
Mit `impulse(...)` kann die Impulsantwort der Transferfunktion ausgegeben werden.

```
impulse(sys);
```



Pol-Nullstellen-Diagramm `pzmap`

```
pzmap(sys);
ylim([-4 4]); xlim([-1.2 0]);
```

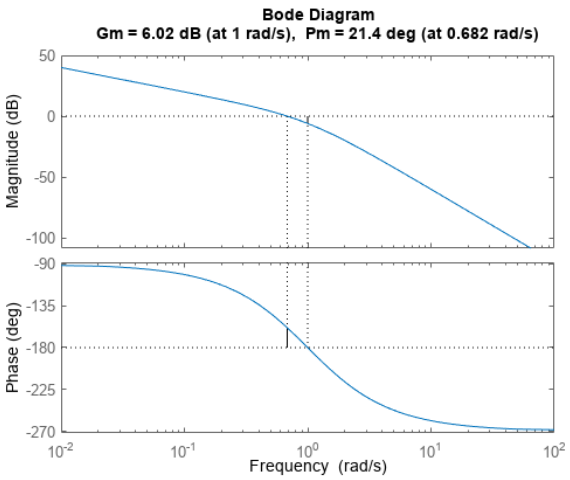


> MATLAB Zauber
>
> Damit die Pol- und Nullstellen erkennbar sind, muss eventuell mit den Darstellungsgrenzen gespielt werden.

Margin `margin(tf)`

Mit dem Befehl `margin(tf)` kann das Bode-Diagramm

```
margin(tf(1,[1 2 1 0]))
```



Zustandsraumdarstellung `ss()`

Mit `ss(...)` können vier Matrizen A, B, C, D zu einer Zustandsraumdarstellung zusammengeführt werden.

```
A = [0 1;-5 -2];
B = [0;3];
C = [0 1];
D = 0;
Ts = 0.25;
sys = ss(A,B,C,D,Ts);
```

Es kann ebenfalls `bode`, `nyquist`, `step`, etc. angewendet werden, da die ZRD eine andere Darstellung der Übertragungsfunktion ist.

Reglersimulator `Sisotool(tf(...))`

Mit `sisotool` kann ein Regler C basierend auf einem Prozess P ausgelegt werdne.

```
P = tf(...);
sisotool(P); % Der Prozess wird angegeben
```

-

Simulink

> Warum Simulink?
>
> In MATLAB können Übertragungsfunktionen berechnet werden und Regelkreise simuliert werden. Warum trotzdem Simulink verwenden?

Prozess Typen

PT1

PT2

Anleitungen / Vorgehen

Modellierung dynamischer Systeme

1. Festlegung der Systemgrenzen sowie der Ein-/ Ausgangsgrössen.
2. Identifikation der relevanten Energiespeicher und der zugehörigen 'Füllstandsgrössen'.
3. Formulierung der Bilanzgleichungen für die Energiespeicher.

$$\frac{d}{dt}\text{Füllstand} = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}$$

4. Formulierung der Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Energiespeichern.
5. Identifikation der Systemparameter anhand von Spezifikationen oder Experimenten.
6. Validierung des Modells durch Experimente. Je nach Resultat Iteration des Verfahrens.

Übertragungsfunktion

! Important

Egal welche Methode verwendet wird um die Übertragungsfunktion herzuleiten, es wird immer die gleiche Funktion ergeben.

Harmonische Anregung linearer Systeme

Eingangssignal u:

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{\overbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}^{\text{Übertragungsfunktion}}\, e^{st}}_{\text{stationär } y_s}$$

i Note

Ist A stabil, so geht transiente Anteil y_t asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion

Glossar

- *SISO* – **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput
- *MIMO* – **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput