

# *Inhaltsverzeichnis*

<b>SW6 Grundelemente</b>	<b>3</b>
Elementare Glieder . . . . .	3
Identifikation . . . . .	14



## SW6 Grundelemente

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt."*

— Brief von C.F. Gauss an F. Bolyai, 1808

Die Klasse der LZI Systeme ist einzigartig. Keine anderes Konzept vermag mehr unterschiedliche reale Systeme zu repräsentieren oder stellt mächtigere Methoden zur Analyse bereit. Alle linearen, zeitinvarianten und endlichdimensionalen Systeme können durch rationale Funktionen beschrieben werden, welche sich wiederum in Faktoren zerlegen oder als Partialsummen darstellen lassen.



C.F. Gauss [Bildquelle] hat 1799 als erster den **Fundamentalsatz der Algebra** bewiesen, gemäss welchem Polynom mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  besitzt und daher um diese reduziert werden kann. Als Folge davon hat jedes Polynom  $n$ -ten Grades auch  $n$  Nullstellen.

### Elementare Glieder

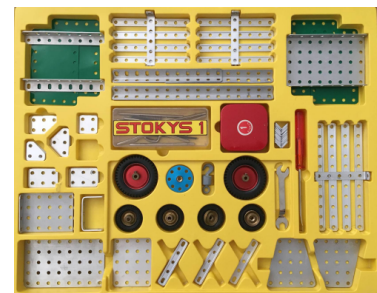
Nach Abspaltung einer allfälligen Zeitverzögerung durch ein Totzeitglied darf daher von einem Modell der Form

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$\leftarrow$  Anzahl Nullstellen  
 $\leftarrow$  Anzahl Polstellen

$$= b_0 \cdot (s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot \dots \cdot (s + z_m) \cdot \frac{1}{s + p_1} \cdot \frac{1}{s + p_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s + p_n}$$

mit  $m$  Nullstellen  $z_{1\dots m}$  und  $n$  Polen  $p_{1\dots n}$  ausgegangen werden. Dabei treten komplexe Pole und Nullstellen stets als konjugiert komplexe Paare auf. Offensichtlich genügt daher eine kleine Kollektion elementarer Funktionen zur Beschreibung beliebiger LZI Systeme.



'Stockys' Grundbaukasten 1, Fa. Stockmann Luzern

Es sind dies, mit den Parametern  $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$ ,

$G(s) = k$	konstanter Faktor
$G(s) = s + a$	einfache reelle Nullstelle
$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$	konj. komplexe Nullstellen ( $\zeta \leq 1$ )
$G(s) = \frac{1}{s + a}$	einfacher reeller Pol
$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	konj. komplexe Pole ( $\zeta \leq 1$ )
$G(s) = e^{-s\tau}$	Totzeitglied $\tau > 0$

Mitunter werden auch folgende Parameter und Bezeichnungen verwendet:

$k$	P-Glied
$\frac{1}{s}$	I-Glied
$\frac{1}{1+sT}$	PT <sub>1</sub> -Glied
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	PT <sub>2</sub> -Glied
$\frac{1}{s(1+sT)}$	IT-Glied
$\frac{s}{1+sT}$	DT <sub>1</sub> -Glied

Die zugehörigen Nullstellen  $\lambda$  der Polynome liegen bei

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{konj. komplex} \end{cases}$$

Mittels Verknüpfung dieser elementaren Glieder durch Verkettung und Addition lassen sich komplexe Systeme modellieren. Wie die 'Regel von Mason' zeigt, resultieren dabei aber wiederum rationale Funktionen. Die Differenz der Ordnung von Zähler- und Nennerpolynom  $n_{pe} = n - m$  wird **Polüberschuss** oder **relativer Grad** genannt. Ist  $n_{pe} \geq 0$  so spricht man von 'proper', 'gebrochenrational', ist  $n_{pe} > 0$  so spricht man von 'strictly proper' oder echt gebrochenrational.

$n$ : Polstellen  
 $m$ : Nullstellen

$n_{pe} \geq 0 \rightarrow$  proper  
gebrochenrational

$n_{pe} > 0 \rightarrow$  strictly proper

### Polüberschuss $n_{pe}$

Für die Antwort  $y$  auf einen Sprung  $\sigma$  am Eingang  $u$  eines Systems mit Moden  $e^{st}$  gilt qualitativ:

$$y = \begin{cases} \ddot{\phantom{t}} & \text{falls } n_{pe} \leq -2 \rightarrow \text{z.B. } s^2 \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = -1 \\ \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = 0 \\ t\sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = 1 \\ t^n\sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = n \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} s^2 \\ s \\ 1 \\ \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{matrix}$$

Liegen **keine Pole oder Nullstellen** in der **rechten Halbebene**, so spricht man von **minimalphasigen Systemen**. Für diese stehen **Amplituden- und Phasengang** in einer **direkten Beziehung** zueinander.

↳ stabile Systeme

**Amplituden-/ vs. Phasengang**

Für minimalphasige Systeme gilt:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d \log |G|}{d \log \omega} \quad \text{steigung der Betragskennlinie}$$

Die Phase bildet demnach in erster Näherung die *Steigung* der Betragskennlinie ab. Pro 20 dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung  $+90^\circ$ , respektive  $-90^\circ$ .

$\pm 20 \text{ dB/Dekade}$  entspricht  
 $\pm 1$  Steigung

Gilt aber nur für stabile Systeme!

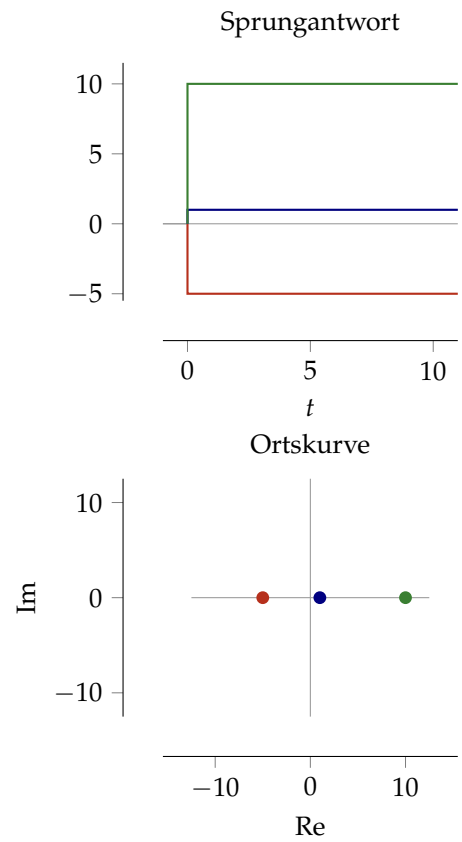
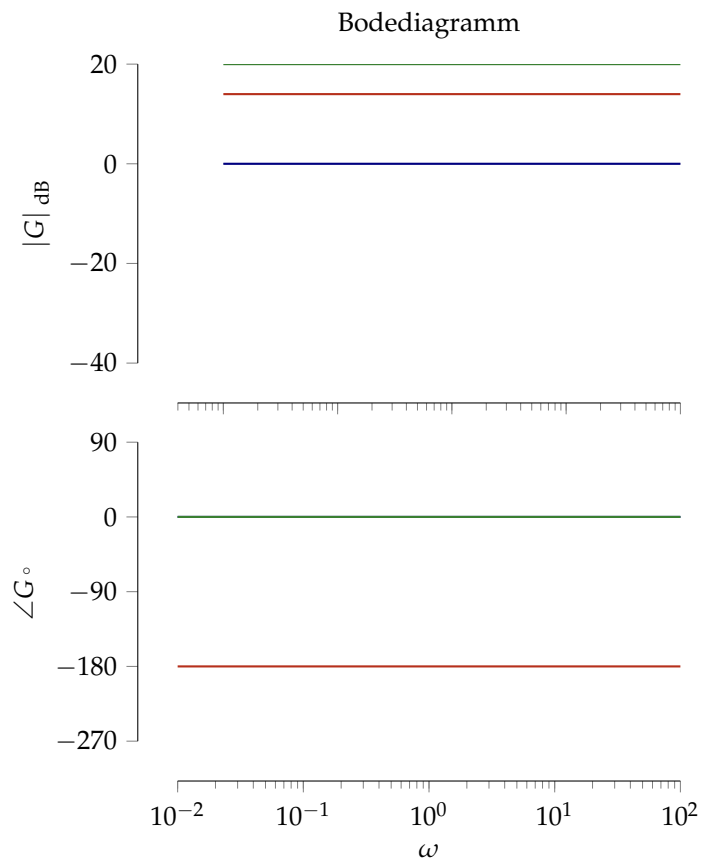
Die Bildung der inversen Funktionen  $G^{-1}$  hat eine Spiegelung der Bodediagramme von  $G$  an der 0 dB, respektive  $0^\circ$ , Linie zur Folge. Die zugehörige Ortskurve erfährt eine Spiegelung am Einheitskreis.

**SKIZZIEREN DES BODEDIAGRAMMS.** Aufgrund gewählten Skalierung der Bodediagramme lassen sich verkettete Systeme durch grafische Addition der Teilgraphen darstellen. Dies gilt für die logarithmierten Beträge (es ist  $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$  und damit  $\log |X \cdot Y| = \log |X| + \log |Y|$ ), als auch für die Phasen ( $\angle X \cdot Y = \angle X + \angle Y$ ).

Zum Zeichnen des Betrags- und Phasengangs wird bevorzugt der Verlauf beginnend bei  $\omega \rightarrow j0$  hin zu  $\omega \rightarrow j\infty$  aufgetragen. Jede Nullstelle  $z$  hat einen Anstieg der Betragskennlinie um  $+20 \text{ dB/Dek.}$  und eine Phasenverschiebung von  $+90^\circ$  ( $\Re(z) < 0$ ), resp.  $-90^\circ$  ( $\Re(z) > 0$ ) zur Folge. Jeder Pol  $p$  führt analog zu einem Abfall von  $-20 \text{ dB/Dek.}$  in der Betragskennlinie und einer Phasenverschiebung von  $-90^\circ$  ( $\Re(z) < 0$ ), resp.  $+90^\circ$  ( $\Re(z) > 0$ ). Ist  $b_0 < 0$ , so ist von einer zusätzlichen Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  auszugehen.

KONSTANTER FAKTOR :  $y = ku$ .

$$G = k \quad k = -5 \quad k = 1 \quad k = 10$$



REELLER POL :  $\dot{y} + ay = u$ .

$$G = \frac{1}{s+a}$$

$$\omega_g = |a| \Rightarrow$$

$$a = -1 \quad a = 0 \quad a = +1$$

$$\angle G(j\omega_g) = -45 / -135^\circ$$

$$|G(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$$

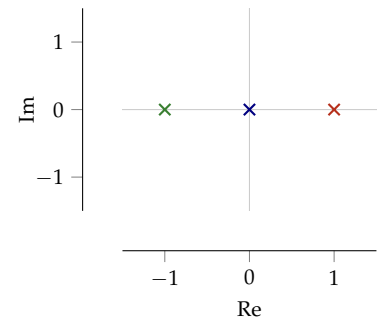
$$\omega \ll \omega_g :$$

$$|G| \approx \frac{1}{|a|}$$

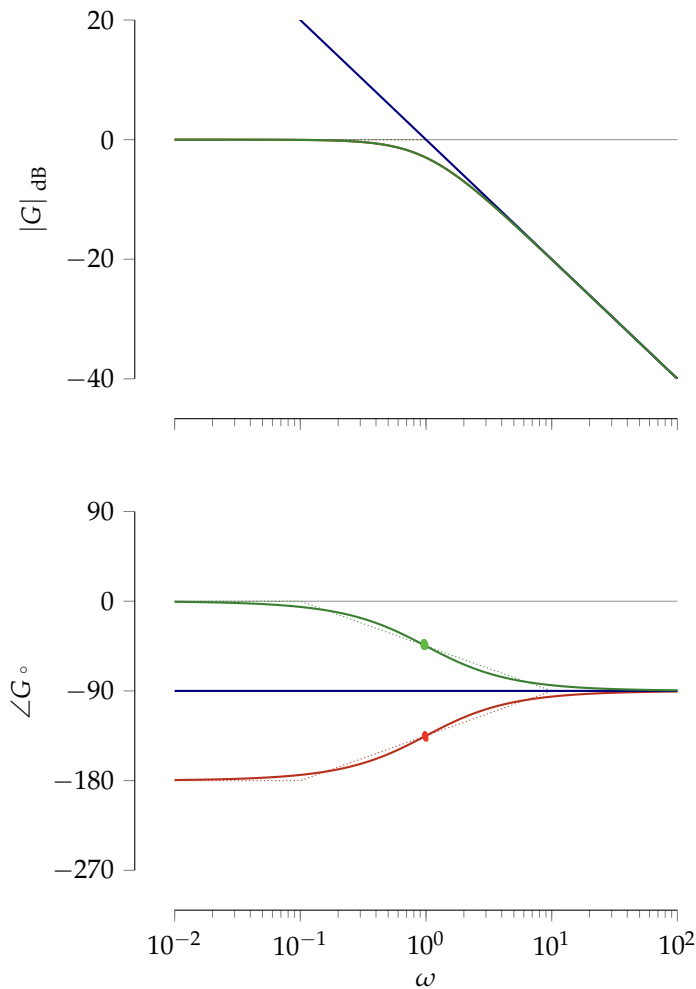
$$\omega_g \ll \omega :$$

$$|G| \propto -20 \text{ dB/Dek.}$$

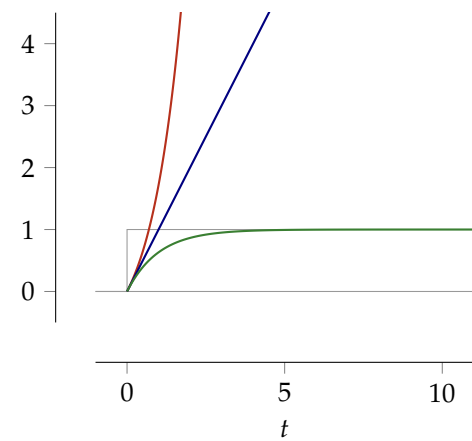
Pol-Nullstellenplan



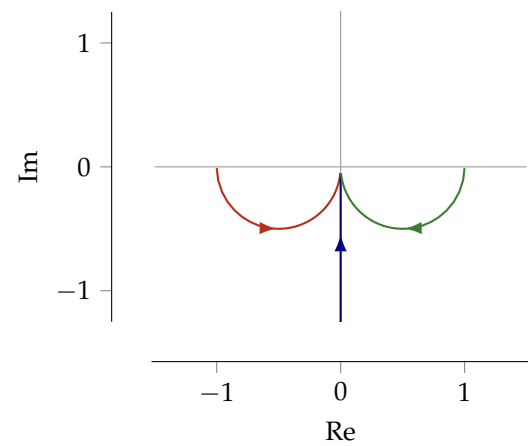
Bodediagramm



Sprungantwort



Ortskurve



KONJUGIERT KOMPLEXES POLPAAR :  $\ddot{y} + 2a\dot{y} + by = u$ .

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = 1 \quad \zeta = 1 \quad \zeta = 0.5 \quad \zeta = 0.1$$

$$\angle G(j\omega_0) = -90^\circ$$

$$\omega \ll \omega_0 :$$

$$|G| \approx 1/\omega_0^2$$

$$\omega_0 \ll \omega :$$

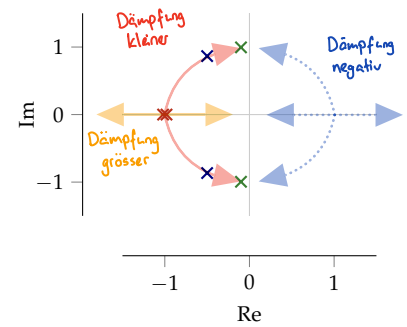
$$|G| \propto -40 \text{ dB/Dek.}$$

$$(M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}})$$

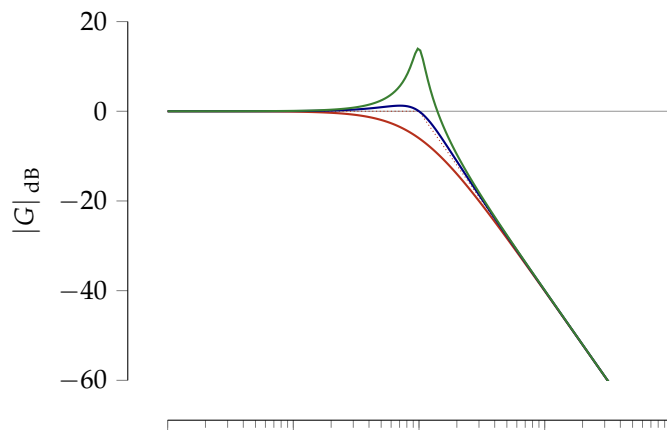
relatives Überschiessen

↳ Aktuell noch nicht wichtig

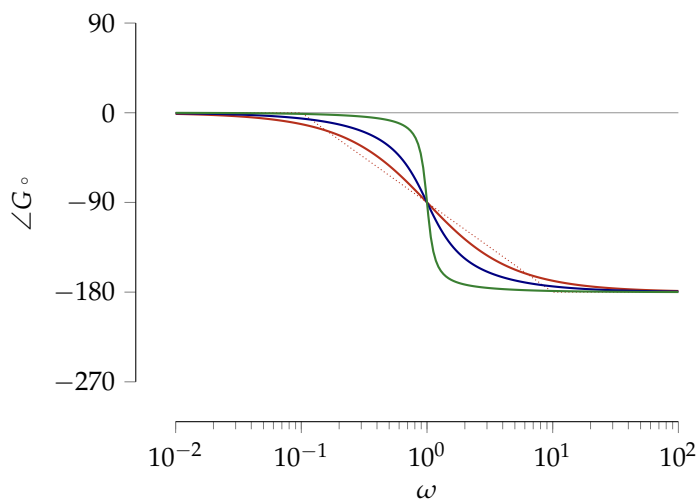
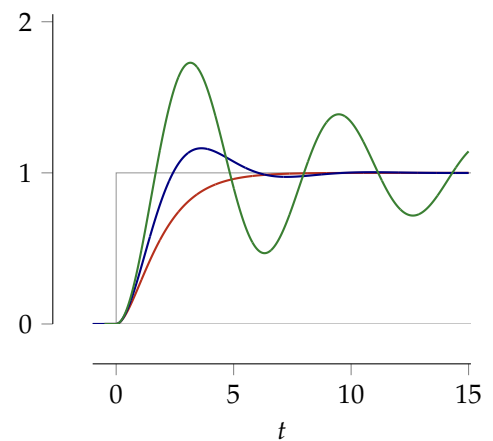
Pol-Nullstellenplan



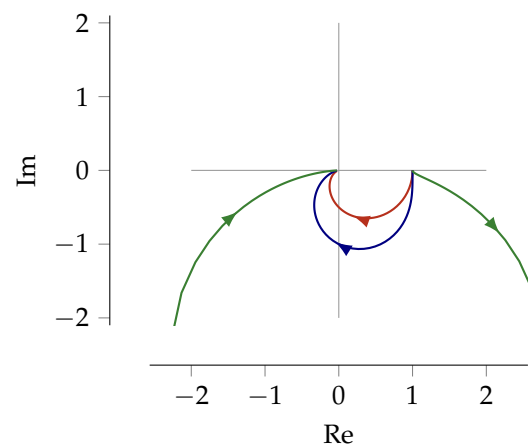
Bodediagramm



Sprungantwort



Ortskurve





REELLE NULLSTELLE :  $y = \dot{u} + au$ .

$$G = s + a$$

$$a = -1 \quad a = 0 \quad a = +1$$

$$\omega_g = |a| \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega_g) = +45^\circ / +135^\circ$$

$$|G(j\omega_g)| = \sqrt{2} \approx +3 \text{ dB}$$

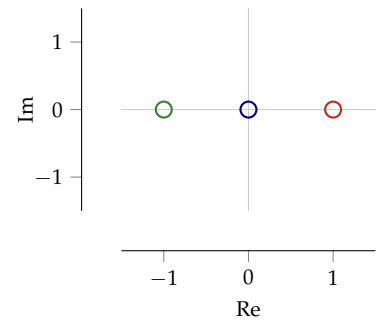
$$\omega \ll \omega_g :$$

$$|G| \approx |a|$$

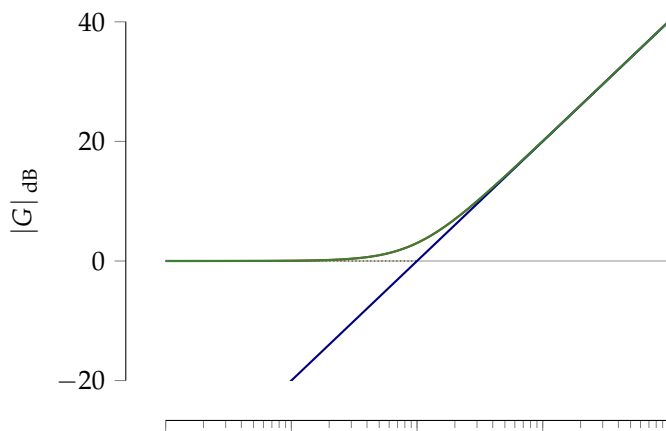
$$\omega_g \ll \omega :$$

$$|G| \propto +20 \text{ dB/Dek.}$$

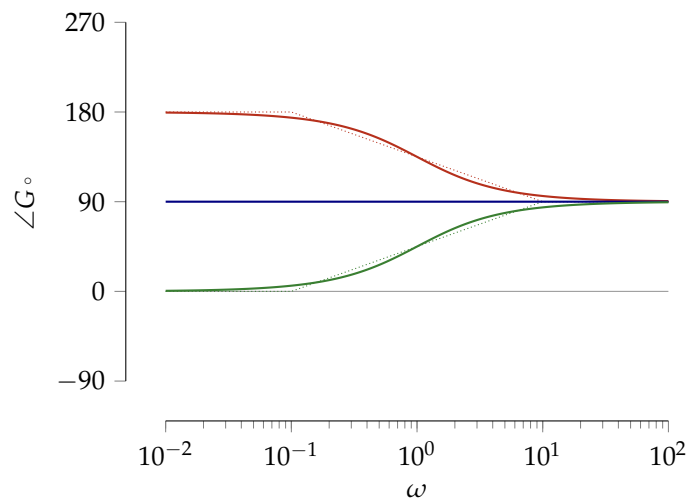
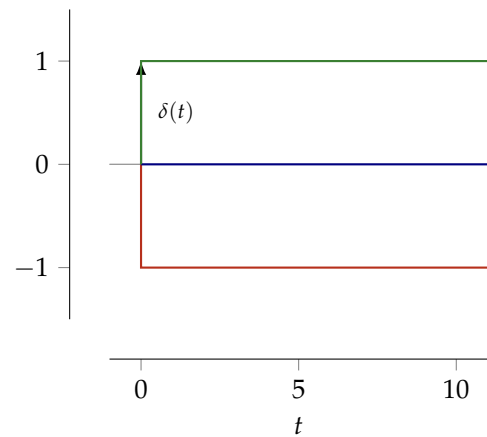
Pol-Nullstellenplan



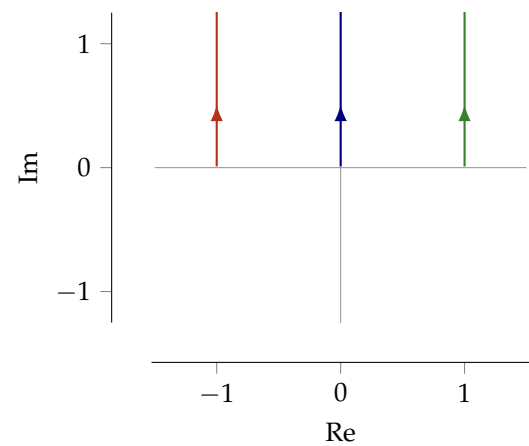
Bodediagramm



Sprungantwort



Ortskurve



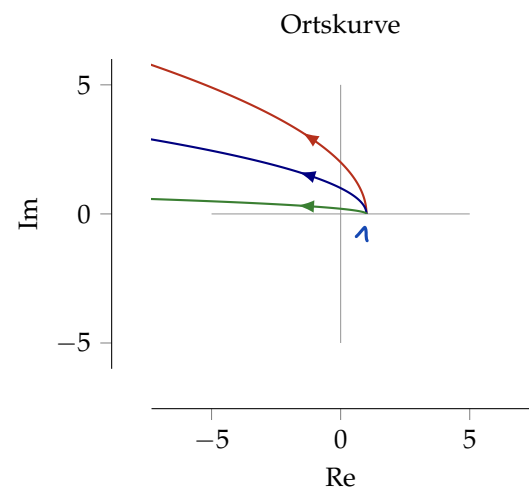
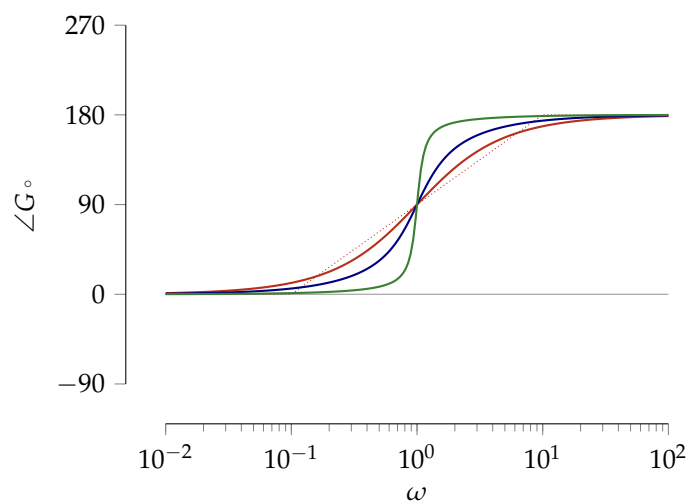
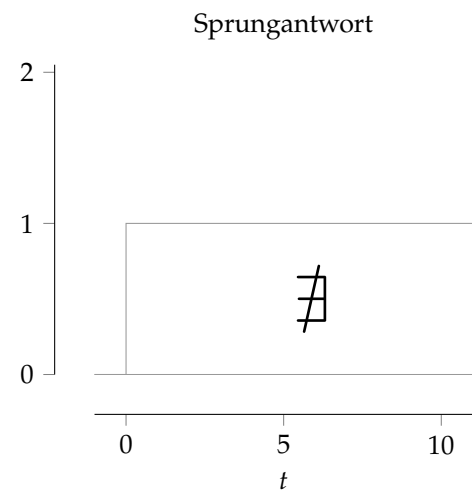
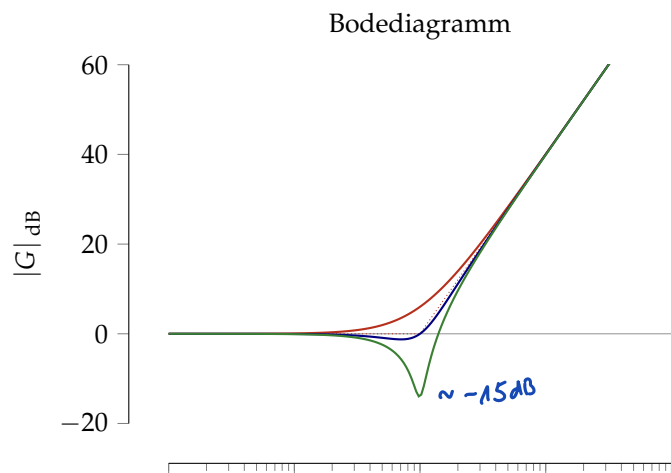
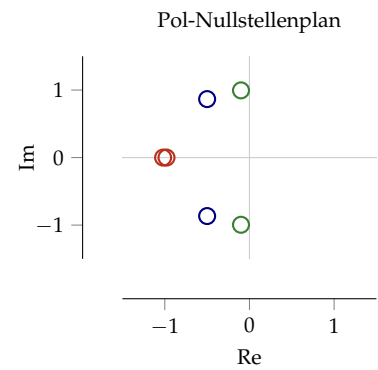
KONJUGIERT KOMPLEXES NULLSTELLENPAAR :  $y = \ddot{u} + a\dot{u} + bu$ .

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \quad \omega_0 = 1 \quad \zeta = 1 \quad \zeta = 0.5 \quad \zeta = 0.1$$

$$\angle G(j\omega_0) = +90]^\circ$$

$$\omega \ll \omega_0 : |G| \approx \omega_0^2$$

$$\omega_0 \ll \omega : |G| \propto +40 \text{ dB/Dek.}$$



TOTZEIT, VERZÖGERUNG :  $y(t) = u(t - \tau)$ .

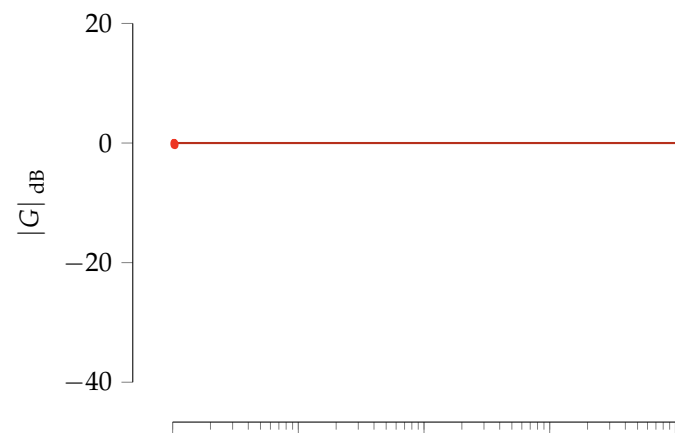
$$G = e^{-s\tau} \quad \tau > 0 \quad \tau = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\omega\tau$$

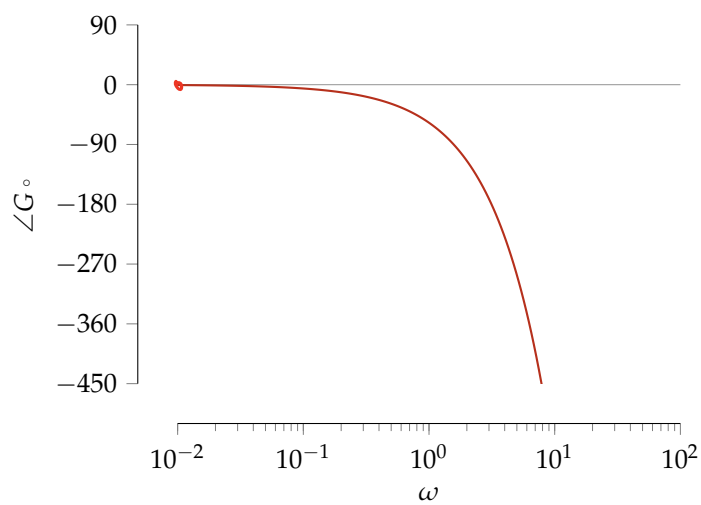
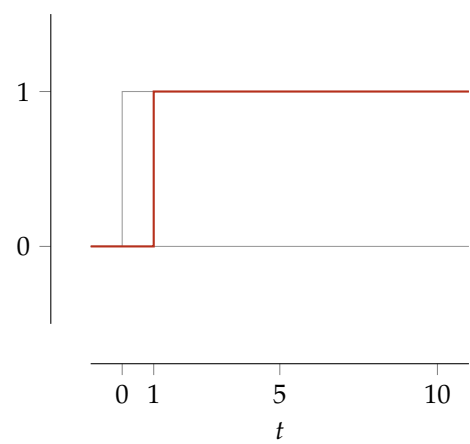
$$|G| = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$e^{-s\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + s\frac{\tau}{n})^n}$$

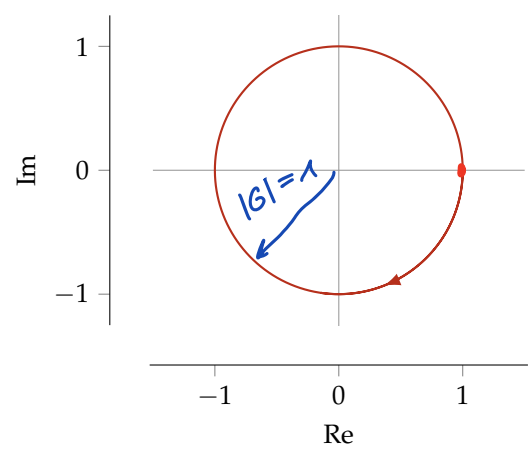
Bodediagramm



Sprungantwort



Ortskurve



## VERKETTUNG – BEISPIEL.

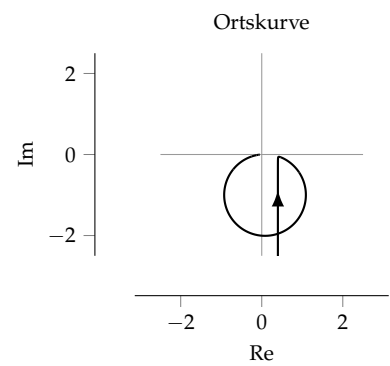
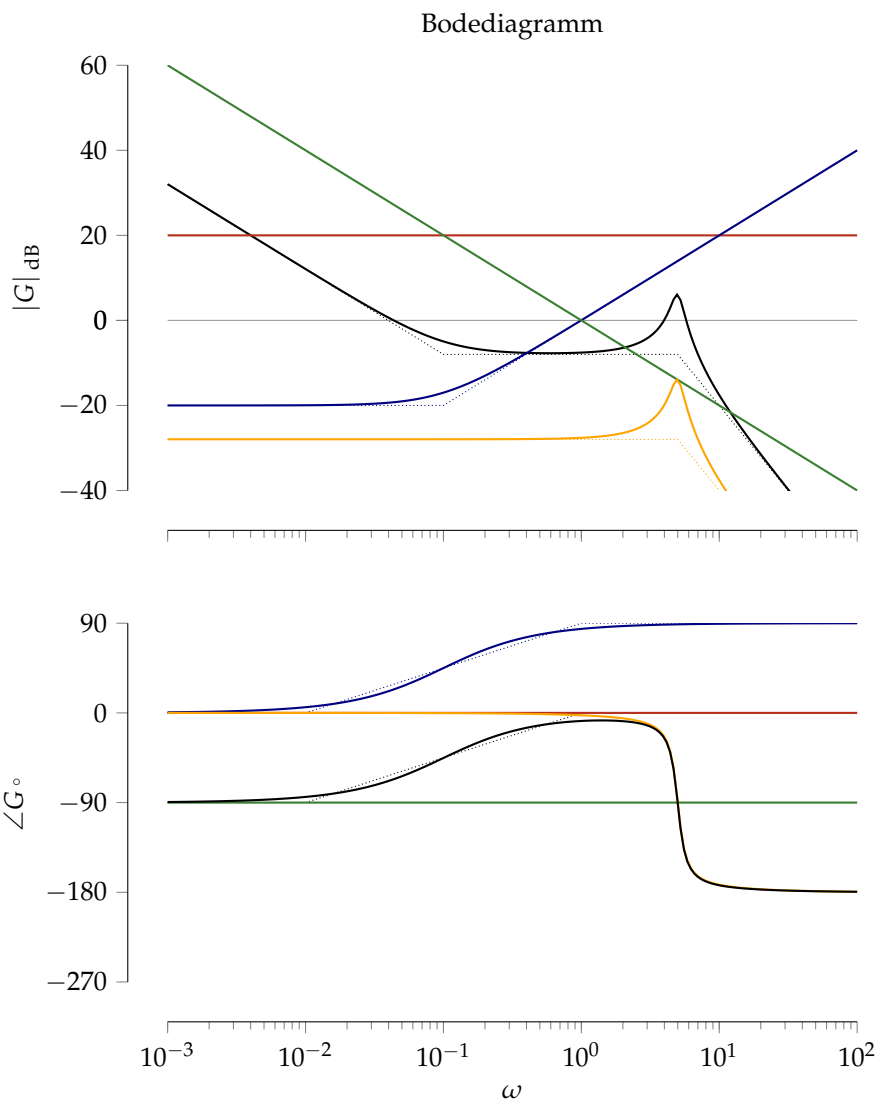
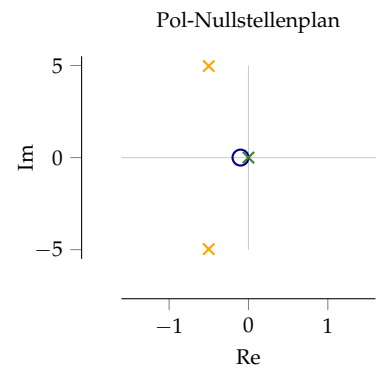
$$G = \frac{10s+1}{s^3+s^2+25s} = \underbrace{10}_{G_1} \cdot \underbrace{(s+0.1)}_{G_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{G_3} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+s+25}}_{G_4}$$

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = (s+0.1)$$

$$G_3 = \frac{1}{s}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2+s+25} = \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2} \quad \text{mit } \omega_0 = 5, \zeta = 0.1$$



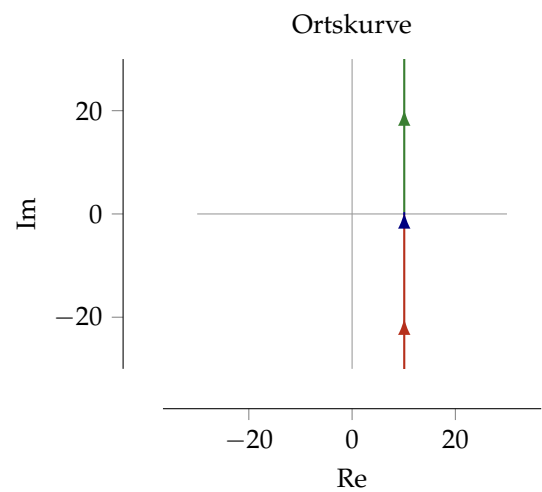
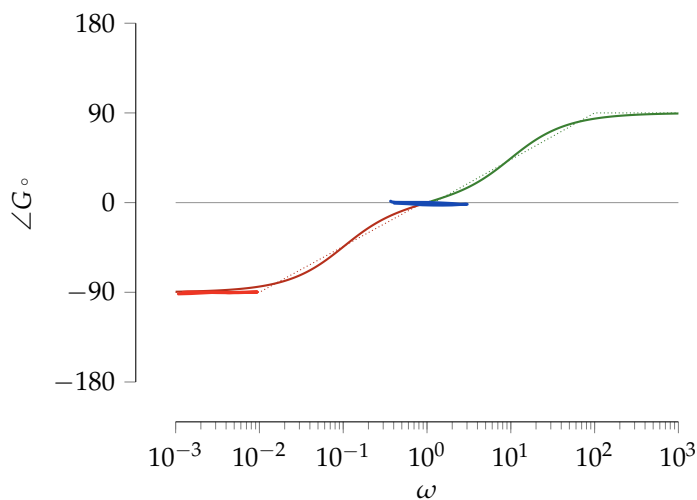
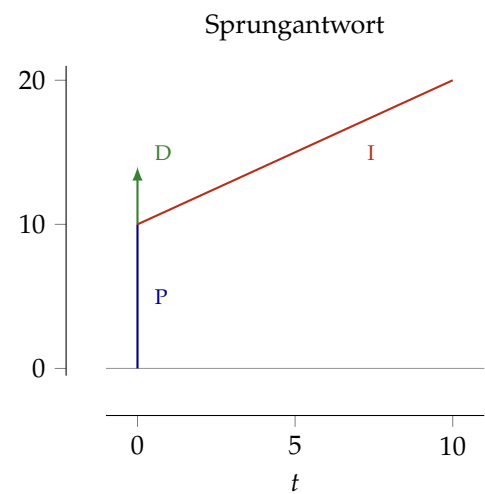
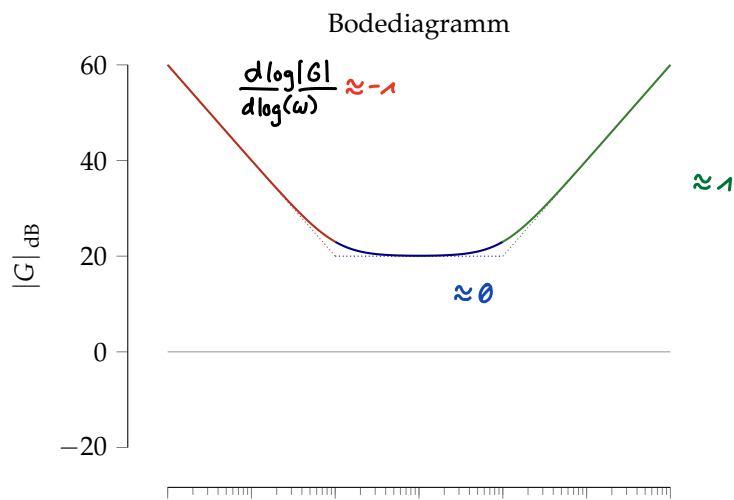
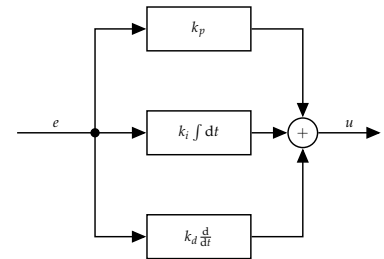
## ADDITION – BEISPIEL PID.

$$u = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de}{dt}$$

$$u = k_p e + k_i \frac{1}{s} e + k_d s e$$

$$G = \frac{u}{e} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} = k \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s}$$

Graphen für  $k = 1, T_1 = 0.1, T_2 = 10$  sowie  $k_p = 10.1, k_i = 1, k_d = 1$



## Identifikation

Bei praktischen Problemstellungen der Regelungstechnik existiert selten hinreichend *a priori* Wissen über das zu regelnde System, um damit einen Regler mit befriedigendem Regelverhalten zu entwerfen. Es ist daher meist notwendig, die vorhandenen Informationen mittels Experimenten zu validieren, zu verfeinern und zu ergänzen. Dies wird in der Regelungstechnik als *Identifikation* bezeichnet.

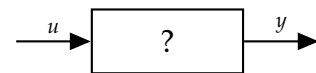
### Identifikation

Unter dem Begriff der *Identifikation* versteht man die Bestimmung eines Modells aus einer vorgegebenen Klasse von Modellen, anhand der Ein- und Ausgangsgrößen, so, dass dieses gleichwertig dem getesteten System ist.

Eine gute Übersicht findet sich etwa in 'System Identification - A Survey'

Diese Definition führt auf vier wesentliche Fragen der Identifikation:

1. ... welche Klasse? Ausgehend von LZI Systemen sind der Grad von Zähler- und Nennerpolynom festzulegen. Zudem sind allfällige Totzeiten zu berücksichtigen. Die Einschränkung auf LZI Modelle bedingt meist eine vorgängige Abklärung und Festlegung annähernd linearer Arbeitspunkte und Aussteuerbereiche.
2. ... welche Eingangssignale? Die gewählten Eingangsgrößen  $u$  müssen das zu testende System hinreichend anregen. Als Signale bieten sich Diracstöße, Sprungfunktionen, Rampen und harmonische Funktionen an. Der Arbeitspunkt und die Amplituden sind so zu wählen, dass diese im linearen Arbeitsbereich liegen. Instabile Prozesse bedingen meist eine minimale Stabilisierung für den Betrieb, wodurch die Eingangssignale nicht frei wählbar sind.
3. ... was meint 'gleichwertig'? Da die Ein- / Ausgangsgrößen beobachtet werden, bietet sich ein Vergleich der gemessenen Antwort  $y$  zur Antwort  $\hat{y}$  des zu vergleichenden Modells an. Der resultierende Fehler  $\epsilon = y - \hat{y}$  wird bevorzugt durch die Quadratfunktion gewichtet und über die beobachtete Sequenz summiert, wodurch die Bewertung anhand von  $\sum \epsilon^2$  erfolgt. Die Festlegung entsprechender Grenzen richtet sich nach dem intendierten Verwendungszweck des Modells.
4. ... wie kann ein Modell gefunden werden? Liegt hinreichend Erfahrungswissen vor, so kann ein gerichtetes Probieren ('trial & error') durchaus erfolgversprechend sein. Dies kann beispielsweise anhand der Sprungantwort oder des Bodediagramms erfolgen. Im allgemeinen sind mathematische und systematische Verfahren, ausgerichtet auf Minimierung des Fehlers, zu bevorzugen.



Tabellen und Wegleitungen für ein gerichtetes Probieren finden sich in vielen Lehrbüchern der Regelungstechnik.

**METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.** Zur Bestimmung der Bahndaten des Kleinplaneten Ceres entwickelte der junge Gauss ein Verfahren, um wenige Parameter anhand einer Vielzahl von Messpunkten so zu bestimmen, dass der Fehler möglichst klein wird. Die Aufgabe entspricht der Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems und das von Gauss entwickelte Verfahren hat sich als *Methode der kleinsten Quadrate* in vielfältigen Anwendungen bewährt.

Ausgehend von einem zeitdiskreten Modell, mit dem Zeitverzögerungsoperator  $z^{-1}$

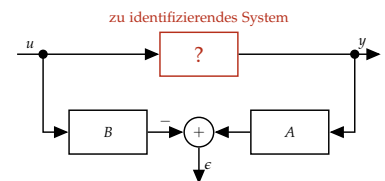
$$\underbrace{y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_n y[k-n]}_{A(z^{-1})y} = \underbrace{b_1 u[k-1] + \dots + b_n u[k-n]}_{B(z^{-1})u}$$

Für zeitkontinuierliche Systeme ist eine analoge Beschreibung möglich.

kann das Problem der Identifikation wie folgt formuliert werden:  
"Finde Parameter

$$\beta^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$$

so, dass für die Messdaten  $u$  und  $y$  der Fehler  $\epsilon = A(z^{-1})y - B(z^{-1})u$  möglichst klein wird."



Mit Hilfe der Definitionen

$$y = \begin{bmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[n+N] \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} -y[n] & -y[n-1] & \dots & -y[1] & u[n] & u[n-1] & \dots & u[1] \\ -y[n+1] & -y[n] & \dots & -y[2] & u[n+1] & u[n] & \dots & u[2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y[N+n-1] & -y[N+n-2] & \dots & -y[N] & u[N+n-1] & u[N+n-2] & \dots & u[N] \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T y = (\Phi^T \Phi) \cdot \beta$$

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = I \cdot \beta = \beta$$

$$\beta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \cdot y$$

und

entspricht dies der Aufgabe, den Fehler  $\epsilon = y - \Phi\beta$  zu minimieren. Wird als Mass die Summe der Fehler im Quadrat,  $\sum \epsilon^2$ , verwendet, so ergibt sich das Minimum für

$$\hat{\beta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

$\sum \epsilon^2$  minimiert

Anschaulich:  $\epsilon = 0 \Rightarrow y = \Phi\beta$   
von links mit  $\Phi^T$  multiplizieren,  
 $\Phi^T y = \Phi^T \Phi \beta$  und dann nach  $\beta$   
auflösen  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \beta$ .

$$\epsilon = y - \Phi\beta$$

Gemessen      Modell