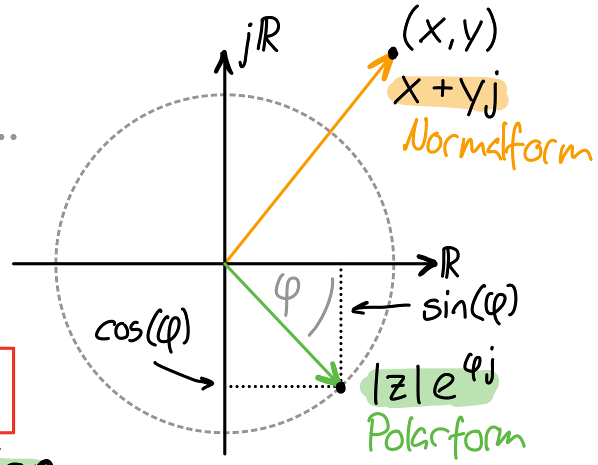
Mathematik FS22

$\mathbb{C}\,(1+2j) \leftarrow \mathbb{R}\,(\pi, e) \leftarrow \mathbb{Q}\,(\frac{1}{3}, -7.25) \leftarrow \mathbb{Z}\,(-1, -2) \leftarrow \mathbb{N}\,(0, 1, 2)$

can solve: $(\sqrt{\ }$ (Grenzwert (: (− · (+))))

$j^{4n} = 1$	$j^{1+4n} = j$	$j^{2+4n} = -1$	$j^{3+4n} = -j$



Konjugation (Imaginärteil negieren $j \to -j$)

$\boxed{\bar{z} = \overline{a + bj} = a - bj}$ $\quad \boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2} \in \mathbb{R}$

Rechnen mit Konjugationen

$\boxed{\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}}$ $\quad \boxed{\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}}$ $\quad \boxed{\overline{z / w} = \bar{z} / \bar{w}}$

$z = \bar{z}$	wenn $z \in \mathbb{R}$
$z = -\bar{z}$	wenn $z \in j\mathbb{R}$

Inversion & Division

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

Eulersche Formel (Pol → Norm)

$$r \cdot e^{\varphi j} = \underbrace{r \cdot \cos(\varphi)}_{x} + \underbrace{r \cdot \sin(\varphi)}_{y} j$$

Polarform Multiplikation Division

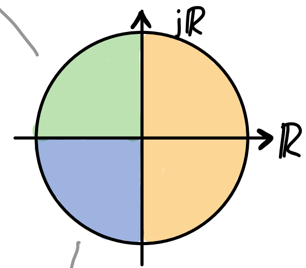
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2) j} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(\varphi_1 - \varphi_2) j}$$

Normalform → Polarform

Radius $r \cdot e^{\varphi j}$ Winkel von pos. X Achse

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \ \& \ y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \ \& \ y < 0 \end{cases}$$



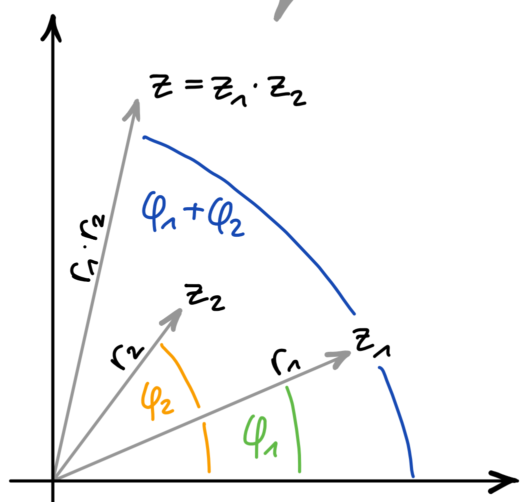
Rechnen mit Betrag

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Potenzen

$$z^n = r^n e^{n \varphi j}$$

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot(\varphi)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$e^{\varphi j}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} j$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} j$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} j$	j



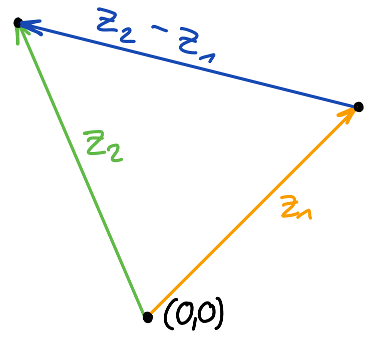
Abstandsmessung

Abstand

$$\boxed{|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|}$$

Dreiecksungleichung

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$



Allgemeine komplexe Wurzel

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}}$$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)j}}$$

↳ für $k = 0, 1, \dots, n-1$

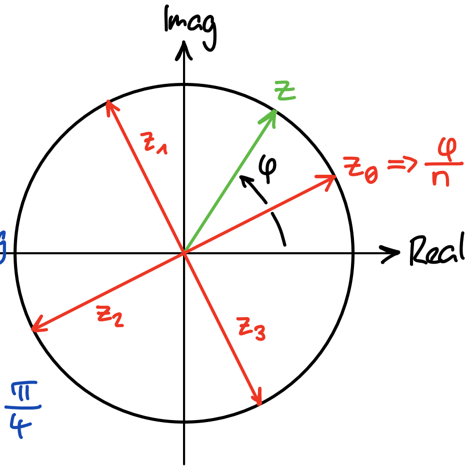
$$\left(\sum_{k=0}^{n} z_k = 0\right)$$

Einheitswurzel

$$\boxed{\zeta_k = e^{k\frac{2\pi}{n}j}}$$

Die erste Lösung ist immer bei $\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}$

z.B. $\sqrt[4]{z} \rightarrow \varphi = \pi \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$



Fundamentalsatz der Algebra / Folgerung

Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ vom Grad n mit komplexen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ kann in n Linearfaktoren faktorisiert werden

$$\rightarrow \quad p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

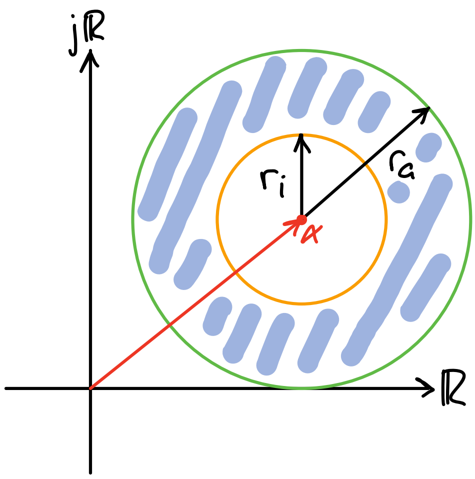
$z_1, \dots, z_n$ sind die Nullstellen von $p(z)$.

Merkregel

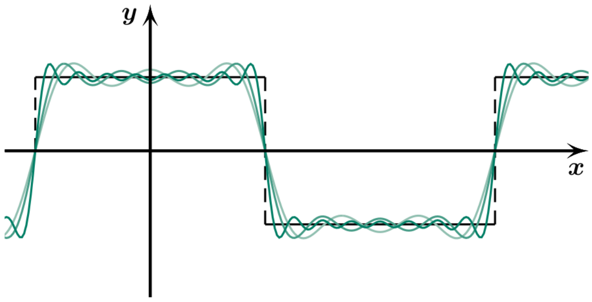
Die nicht reellen Nullstellen eines reellen Polynoms treten in komplex konjugierten Paaren auf $\rightarrow \left(p(z_1) = p(\overline{z}_1)\right)$

Menge von komplexen Zahlen

$$\boxed{r_i \leq |z - \alpha| \leq r_a}$$



Fourierreihe



$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx} \rightarrow \text{Mittelwert}$$

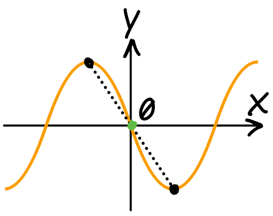
$$\boxed{a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(k\, \omega_0 x)\, dx}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(k\, \omega_0 x)\, dx}$$

↳ $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \right)$$

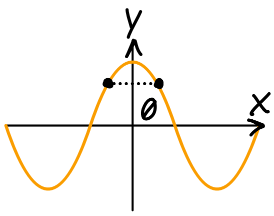
$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\, \omega_0 x) + b_n \sin(n\, \omega_0 x) \right)}$$



Ungerade Funktion

$(f(-x) = -f(x))$

$$\boxed{a_n = 0}$$



Gerade Funktion

$(f(-x) = f(x))$

$$\boxed{b_n = 0}$$

---

komplexe Form

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n \omega_0 t j}}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-n \omega_0 t j}\, dt}$$

↳ $n \in \mathbb{Z}$

real ↔ complex

$$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2}} \quad \boxed{c_n = \frac{a_n - b_n}{2}} \quad \boxed{c_{-n} = \frac{a_n + b_n j}{2}}$$

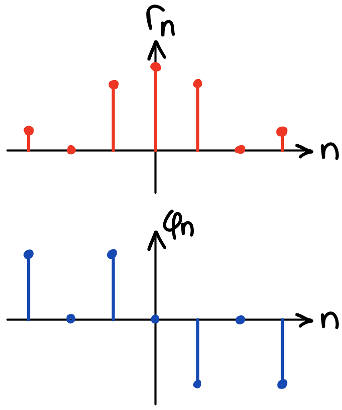
$$\boxed{a_0 = 2 c_0} \quad \boxed{a_n = c_n + c_{-n}} \quad \boxed{b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{j}}$$

Spektralanalyse

$$\boxed{c_n = r_n\, e^{\varphi_n j}}$$

$$\boxed{r_n = |c_n|} \qquad \boxed{\varphi_n = \arg(c_n)}$$

$r_n \geq 0$ $\qquad -\pi < \varphi_n \leq \pi$



Merkregel für **reelle** Funktionen

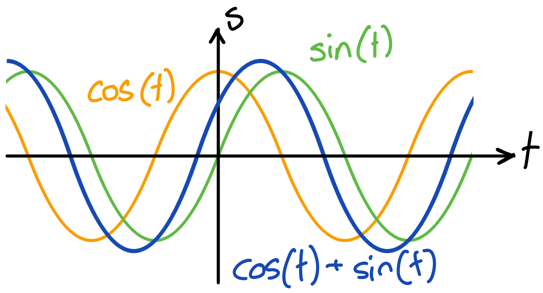
$$\boxed{r_{-n} = r_n} \qquad \boxed{\varphi_{-n} = -\varphi_n}$$

Harmonische Schwingung

$$\boxed{s(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \boxed{\delta = \varphi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{s(t) = A \sin(\omega t + \delta)}$$



komplex

$$\boxed{\underline{s}(t) = \underline{A}\, e^{\omega t j}} \qquad \boxed{\underline{A} = a - bj = A\, e^{\varphi j}}$$

Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\,\xi} \qquad \boxed{\xi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$k, m > 0$

Gedämpfte Schwingung

allgemeine charakt. DGL

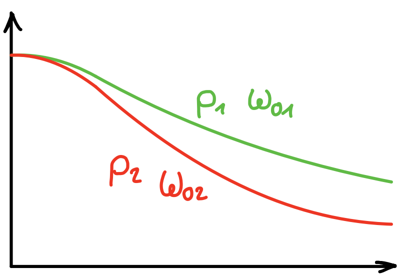
$$\boxed{\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0} \qquad \boxed{\Delta = 4(\rho^2 - \omega_0^2)}$$

Fall I $(\Delta > 0 \,/\, \rho > \omega_0)$

überkritisch / Kriechfall

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$



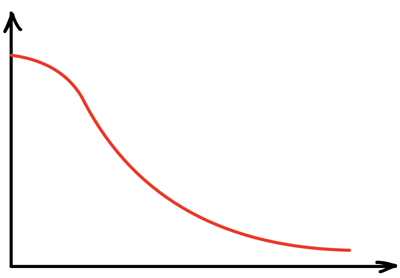
Fall II $(\Delta = 0 \,/\, \rho = \omega_0)$

Kritisch / aperiodischer Grenzfall

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\rho}$$

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{-\rho t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\rho t}}$$

geht am schnellsten auf 0



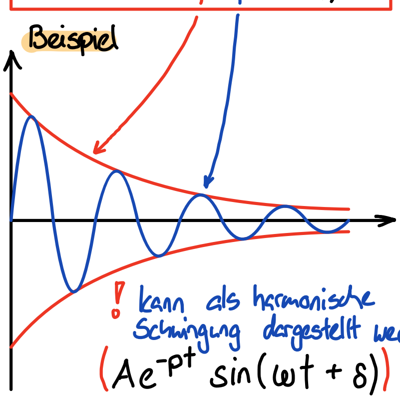
Fall III $(\Delta < 0 \,/\, \rho < \omega_0)$

unterkritisch / Schwingfall

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\rho t}\left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right)}$$

Beispiel



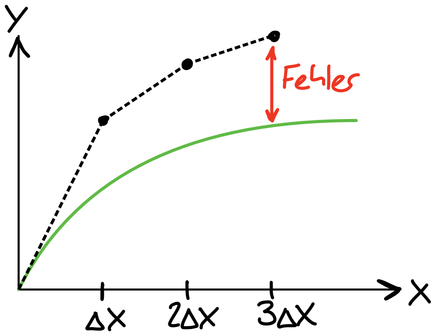
! kann als harmonische Schwingung dargestellt werden.
$(A e^{-\rho t} \sin(\omega t + \delta))$

Euler Verfahren

$$\boxed{y(t) \approx y_{t-1} + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx}}$$

Fehlerabschätzung

Wird die Anzahl der Schritte verdoppelt, so halbiert sich so in etwa der Fehler
↳ ungefähr



Überschätzung

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Unterschätzung

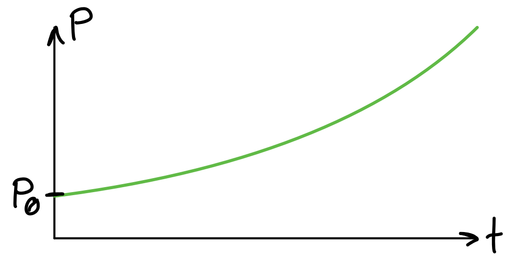
$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

Wachstum & Zerfall

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k \cdot P}$$

← absolute Wachstumsrate
— relative Wachstumsrate

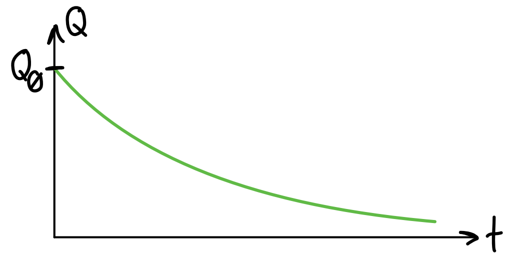
$$\boxed{P = P_0 e^{kt}}$$



Seeverschmutzung

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \underbrace{-r\frac{Q}{V}}_{\text{Abgabe}} + \underbrace{r\frac{Q}{V}}_{\text{Zufuhr}}}$$

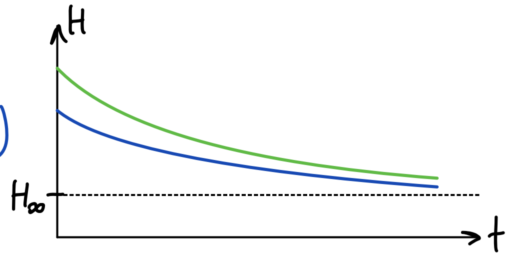
Q	Anteil Verschmutzung	z.B. [kg]
V	Volumen See	z.B. [km^3]
r	Flussrate	z.B. [$\frac{km^3}{a}$]
$\frac{dQ}{dt}$	Verschmutzungsrate	z.B. [$\frac{kg}{a}$]



Newtonisches Abkühlungsgesetz

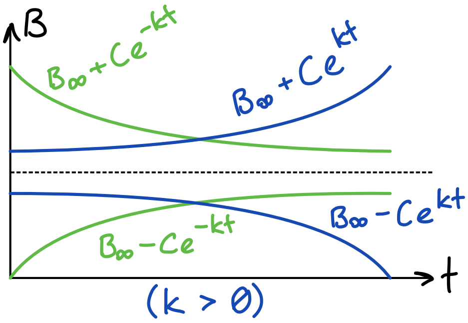
$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \alpha (H - H_\infty)}$$

H_∞ Zielwert (z.B. Raumtemperatur)



Gleichgewichtslösungen

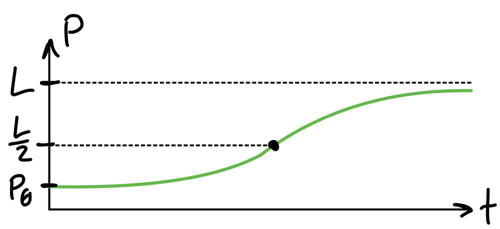
$$\boxed{\frac{dB}{dt} = k(B - B_\infty)} \qquad \boxed{B = Ce^{kt} + B_\infty}$$



! stabile GWL haben bei $t = \infty$ eine Änderungsrate von 0.
B_∞ kann bei $\frac{dB}{dt} = 0$ ermittelt werden.

Logistisches Modell

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)} \qquad \boxed{P = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}} \qquad \boxed{A = \frac{L - P_0}{P_0}}$$



Trennung der Variablen

$\frac{dy}{dx} = y \cdot x$ ✓ $\frac{dy}{dx} = y + x$ ✗

① Variablen trennen

$$\frac{dy}{y} = dx \cdot x$$

② Aufleiten (Konstante C nicht vergessen)

$$\ln(|y|) + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$$

③ nach y auflösen

$$\rightarrow y = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Variation der Konstanten

Allgemeine Form DGL 1. Ordnung

$$\boxed{y' + g(x)\,y = s(x)} \qquad y' - \frac{y}{x} = x$$

① homogene Lösung herleiten $(s(x) = 0)$

$$y_h = K \cdot x$$

② inhomogene Lösung herleiten

↳ Konstante von y_h als Funktion betrachten.

↳ homogene Lösung ableiten und in DGL einfügen

$$y_p = K(x)x \rightarrow y_p' = K(x)x + K(x)$$

$$y_p' - \frac{y_p}{x} = x \rightarrow K'(x) = 1$$

$$\int K'(x)\,dx \rightarrow y_p = K(x)x = Cx + x^2$$

③ Funktion zusammensetzen

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

C=0 setzen oder lassen (daraus entsteht direkt y)

Differentialgleichung 2. Ordnung

Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} u(t_0) = u_0 \\ u(t_1) = u_1 \end{pmatrix}$$

Randwertproblem

$$\begin{pmatrix} u(t_0) = u_0 \\ \dot{u}(t_0) = v_0 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

$$\boxed{\Delta = a^2 - 4b}$$

▸ **Fall I** $(\Delta > 0)$

$$\boxed{u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$

▸ **Fall II** $(\Delta = 0)$

$$\boxed{u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}}$$

▸ **Fall III** $(\Delta < 0)$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j}$$

$$\boxed{u(t) = e^{\alpha t}\left(B_1 \cos(\beta t) + B_2 \sin(\beta t)\right)}$$

inhomogene Gleichung

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

① allgemein y_p bestimmen (Vielfaches von $s(t)$)

② y_p ableiten und in ursprüngliche DGS einsetzen

③ homogen und inhomogen zusammensetzen

Phasenportrait

Das Phasenportrait ist die Darstellung einiger Lösungskurven in der Phasenebene.