Regelungstechnik

Zusammenfassung

Joel von Rotz / Quelldateien

Inhaltsverzeichnis

Vorgehen MEP

- Zuerst lösen, was man kann und nicht zu lange Zeit verlieren
- 10 Minuten pro Aufgabe
  - Gewisse Aufgaben brauchen mehr als 10 Minuten, andere weniger
- Aufgaben sind meist einfacher als man denkt
  - Es gibt verschiedene Lösungsansätze
  - Annahmen treffen oder fragen, falls man unsicher ist
- Wenn Zeit übrig, Lösung validieren

Kurzfassung

Linear Algebra

Determinante

2 × 2-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3 × 3-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

2 × 2-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3 × 3-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Signal & System

! Gültigkeit End- & Anfangswertsatz

End- & Anfangswertsatz gilt nur bei stabilen Systemen.

Endwertsatz

Laplace

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s)$$

falls $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existiert

Z-Transformation

$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

falls $X(z)$ nur Pole mit $|z| < 1$ oder bei $z = 1$

Anfangswertsatz

Laplace

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot X(s)$$

falls $x(0^+)$ existiert

Z-Transformation

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Transformationen

Laplace

Signal $u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(s)$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(at)$	$\frac{a}{(s+a)^2+\alpha^2}$

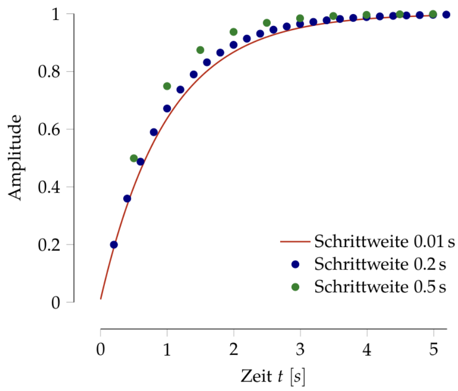
Signal $u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(s)$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(at)$	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\alpha^2}$

Z-Transformation

Signal $u[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(z)$
$\delta[k]$	1
$\sigma[k]$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

Signal $u[k]$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(z)$
$\delta[k-m]$	z^{-m}
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{1}{k!}$	$e^{1/z}$

Euler Approximation

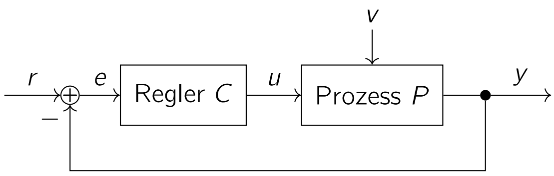


$$x(t+h) \approx x(t) + h\frac{dx}{dt} = x(t) + h \cdot f(x(t), u(t))$$
$$x[k+1] \approx x[k] + h \cdot f(x[k], u[k])$$

Systeme

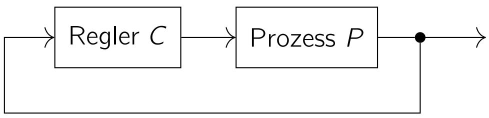
Grundlegende Systeme

Regler System

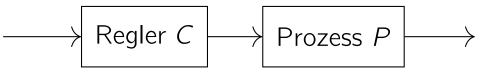


r : Führungsgrösse (Soll-Wert)
e : Regelfehler
u : Stell-/Steuergrösse
y : Regelgrösse (Ist-Wert)
v : Störgrösse

Geschlossenes System



Offenes System

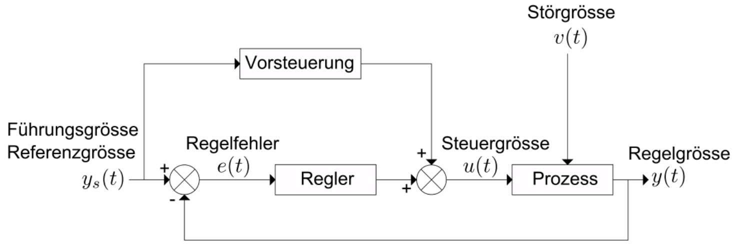


! Schleifenübertragungsfunktion

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).



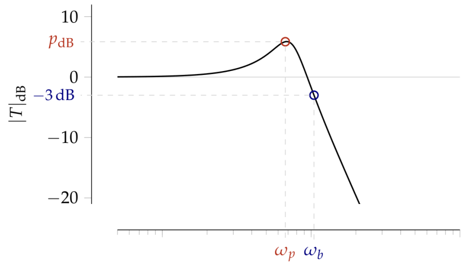
Minimalphasiges System

Liegen keine Pole oder Nullstellen in der rechten Halbebene, so spricht man von **minimalphasigen Systeme**. Amplituden- und Phasengang stehen in einer direkten Beziehung zueinander. Es gilt **nur bei minimalphasigen Systemen**:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d\log|G|}{d\log\omega}$$

Pro 20dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung $+90°$, respektive $-90°$.

Führungsverhalten



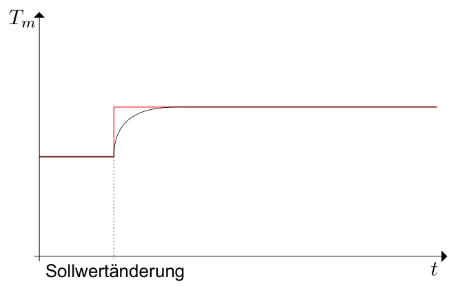
$$G_{yr} = T = \frac{PC}{1+PC} \quad \text{und} \quad G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

Merkmale

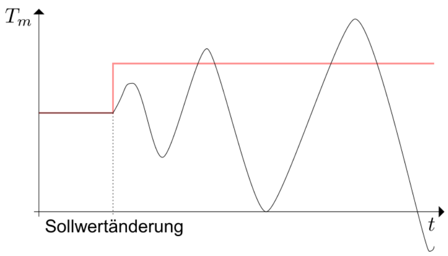
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**

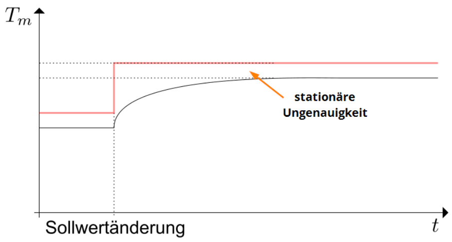
Gutes Führungsverhalten



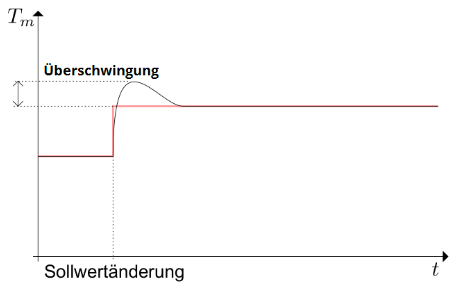
Instabilität



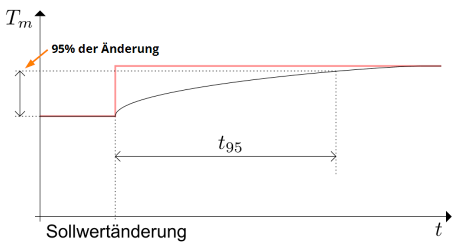
Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit



Überschwingen



Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes



Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrössen

Der bleibende Fehler bei sich langsam oder nicht ändernden Führungssgrössen ergibt sich anhand des Verlaufs der Übertragungsfunktion bei tiefen Frequenzen.

$$G_{yr} \approx 1 - e_0 - e_1 \cdot s - e_2 \cdot s^2 - \cdots$$

$$e = e_0 \cdot r + e_1 \cdot \dot{r} + e_2 \cdot \ddot{r} + \cdots$$

Typ	r	e
Sprung	s_0	$e_0 s_0$
Rampe	$v_0 t$	$e_0 v_0 t + e_1 v_0$
Parabel	$a_0 t^2$	$e_0 a_0 t^2 + e_1 2 a_0 t + e_2 2 a_0$

> **Stationärer Fehler**
>
> Bei Rampe: $e_0 = 0$ Bei Parabel $e_0 = e_1 = 0$

Störverhalten

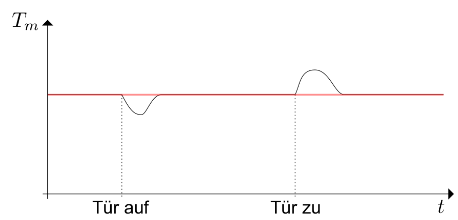
$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

Merkmale

Das Störverhlaten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

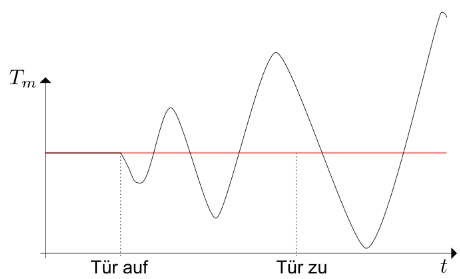
- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**.

Gutes Störverhalten

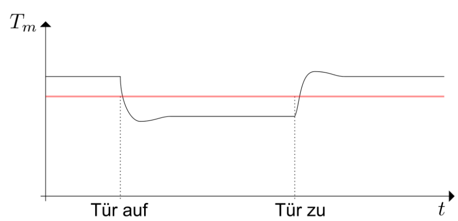


rot: Sollwert

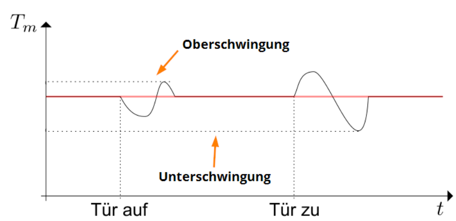
Instabilität



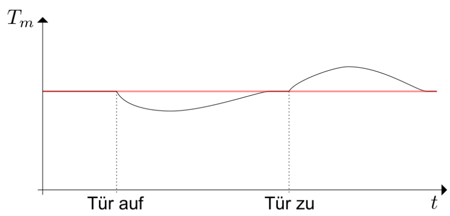
Stationärer Fehler / Ungenauigkeit



Überschwingen



Langsames Erreichen des stationären Wertes

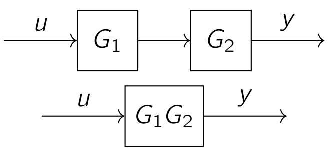


$$
\begin{aligned}
P_k &= \text{Vorwärtspfad } k \\
\Delta &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops} \\
&\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die sich nicht berühren} \\
&\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die sich nicht berühren} \\
&\quad + \cdots \\
\Delta_k &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops, die } P_k \text{ nicht berühren} \\
&\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\
&\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

Darstellungsarten

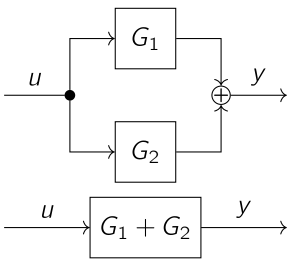
Blockdiagrammalgebra

Verkettung



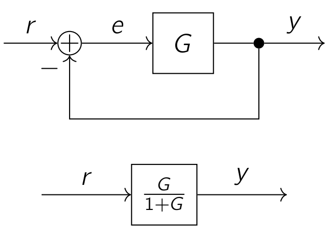
$$y = G_2(G_1 \cdot u) = (G_1G_2) \cdot u$$

Parallel



$$y = G_1 \cdot u + G_1 \cdot u = (G_1 + G_2) \cdot u$$

Rückkopplung

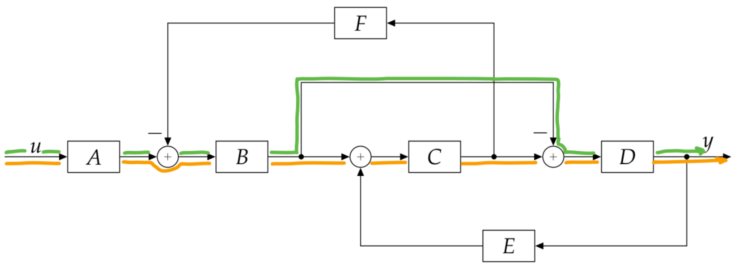


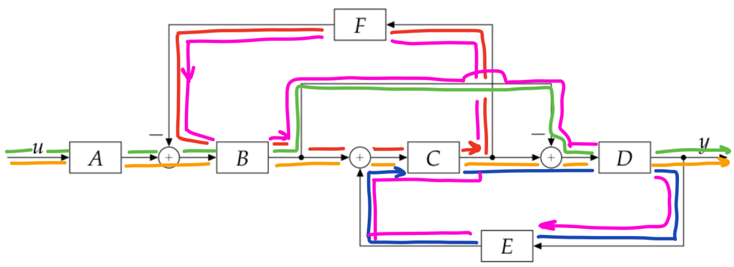
$$
\begin{aligned}
y &= G \cdot e = G(r - y) \\
(1 + G) \cdot y &= G \cdot r \\
y &= \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{G_{yr}} \cdot r
\end{aligned}
$$

Regel von Mason

$$G_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

Beispiel





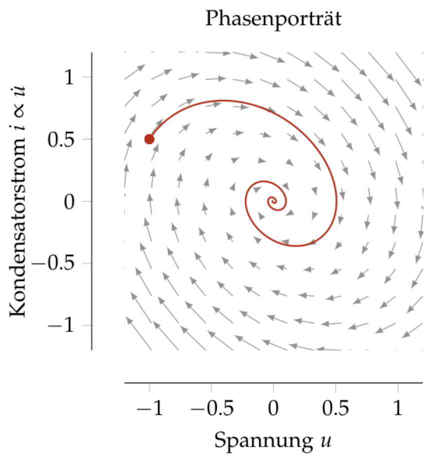
$P_1 = ABCD \quad \Delta_1 = 1 - 0 \quad P_2 = ABD \quad \Delta_2 = 1 - 0$

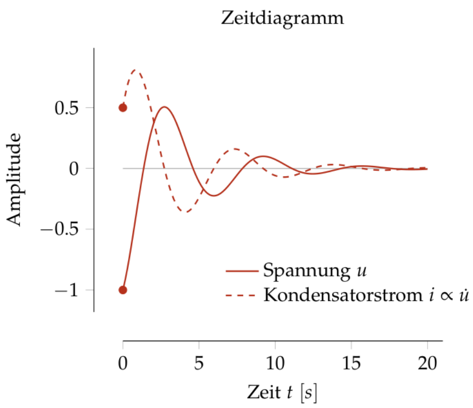
$\Delta = A - ((-BCF) + CDE + ((-B)(-D)(CEF))$

$$G_{uy} = \frac{ABD(1 + C)}{A + BCF - CDE - BCDEF}$$

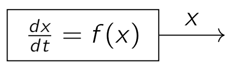
Zustandraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträit* kann das System *visualisiert* werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträit den zeitlichen Verlauf verfolgen.





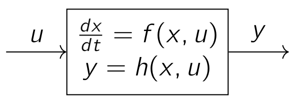
Autonomes, zeitinvariantes System



$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

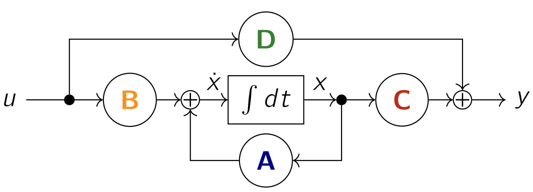
Allgemeine Systeme



$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad y = h(x,u)$$

Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.



$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

A : beschreibt Dynamik
B : beschreibt Steuereinfluss
C : beschreibt Messung
D : beschreibt Durchgriff

Übertragungsfunktion

Wird als Eingangssignal u

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

gegeben, ergibt sich folgendes Ausgangssignal

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{\overbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}^{\text{Übertragungsfunktion}}\, e^{st}}_{\text{stationär } y_s}$$

> **Hinweis**
>
> Ist A stabil, so geht der transiente Anteil y_t asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion.

Dynamik

Lösen von Differential Gleichungen

> **! Lösung einer Differentialgleichung**
>
> $$x(t_0) = x_0 \qquad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

Gleichgewichtslage

Eine Gleichgewichtslage ist ein Zustand in dem das System stabil ist. Dies ist auch bekannt als *stationäres* Verhalten und weist keine Veränderungen auf mit der Zeit.

x_e ist eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems $\frac{dx}{dt} = F(x)$ falls:

$$F(x_e) = 0 \rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x_e} = 0$$

Testfunktion Sprungantwort

Anhand folgender Funktion kann die Sprungantwort eines Systems angegeben werden.

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Die Antwort setzt aus einem *zeitabhängigen* und einem *konstanten* Teil zusammen.

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{zeitabhängig}} \underbrace{-CA^{-1}B + D}_{\text{konstant}} \qquad t > 0$$

Das System strebt gegen Wert wenn A asymptotisch stabil ist → der *zeitabhängige* Teil strebt, falls A asymptotisch stabil ist, der Gleichtgewichtslage $x = 0$ zu. Der *konstante* Teil entspricht dem Wert bei $\omega \to 0$ und damit der *Gleichspannungsverstärkung*.

Stabilität

Allgemein

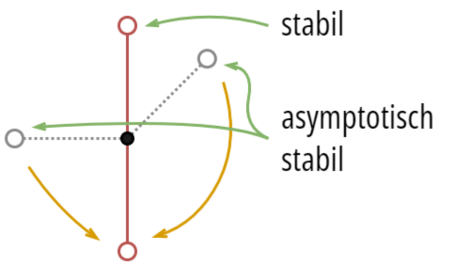
Die Stabilität ist in drei Zustände eingeteilt.

- **stabil**, falls alle Zustände in der Nähe der Gleichgewichtslage x_e zu Lösungen führen.
- **asymptotisch stabil**, falls alle Zustände in der Nähe von x_e nach langer Zeit ($t \to \infty$) in x_e enden.
- **instabil**, falls der Zustand nie eine Gleichgewichtslage erreicht.

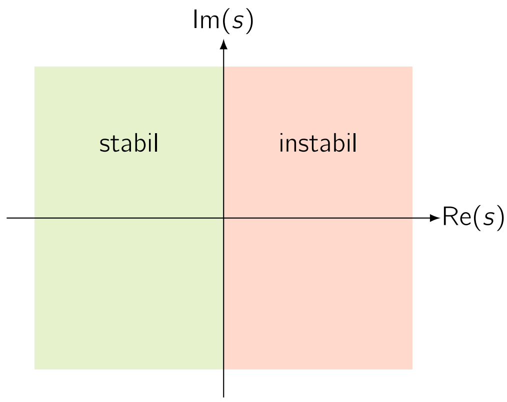
Stabilität ist im Allgemeinen eine *lokale* Eigenschaft innerhalb eines Bereiches des Zustandsraums!

Beispiel

Ein Pendel, welches die gesamte Rotationsachse (360°, rundherum) ausnützen kann, hat zwei Gleichgewichtslagen:
- **stabile** Position oben
- **asymptotische stabile** Positionen, welche immer nach unten verlaufen.



Linearer Systeme



Polstellen eines linearen Systems ($\frac{dx}{dt} = Ax$ & $x(0) = x_0$) können mit dem *charakteristischen Polynoms* berechnet werden.

charakteristisches Polynom

Die Nullstellen von λ werden mit der Dynamik-Matrix A berechnet. Diese entsprechen dem Nennerpolynom $C(sI-A)ˆ{-1}

$$\lambda(A) := \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$

Gültigkeit

Stabilität linearer Systeme ist nur von A abhängig, nicht vom Anfangswert x_0. Dies gilt Global!
Ebenfalls sind stabile lineare Systeme **global** gültig.

Linearisierung

Ist das linearisiterte System asymptotisch stabil, so ist das nichtlineare System in der **Umgebung der Gleichgewichtslage** ebenfalls asymptotisch stabil.

Hurwitz-Kriterium

Wichtig

GESCHLOSSENER KREIS VERWENDEN!

Hurwitz-Kriterium

Die Polstellen-Gleichung $\lambda(s)$ mit $a_0 > 0$ hat dann, und nur dann, ausschliesslich Lösungen mit negativen reellen Teilen, falls alle Unterdeterminante der Hurwitz-Matrix positiv sind: $\det H_n > 0$

$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{n_P \cdot n_C}{d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C}$$

n_C : Zähler (*numerator*) des Reglers C
d_C : Nenner (*divider*) des Reglers C
n_P : Zähler (*numerator*) des Prozess P
d_P : Nenner (*divider*) des Prozess P

$$\lambda = d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C$$

$$\lambda(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

> **Tipp**
>
> - Bei $n \leq 2$ genügt die Bedingung, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen.
> - $\det H_n = a_n \cdot \det H_{n-1}$ – Wird nicht immer verwendet (nur bei Spalte Wert unten rechts, Rest der Spalte 0).
> - Fehlt ein Koeffizient oder ist dieser negativ, so ist die Bedingung nicht erfüllt
>
> $$s^3 + 2s^2 + 10 \rightarrow \text{instabil, da } 0 \cdot s$$

> **Was mit Hurwitz nicht möglich ist**
>
> Das Hurwitz-Kriterium beschreibt keine *Robustheit* der Stabilität und erlangt keine Einsicht, wie der Regler $C = \frac{n_c}{d_c}$ gewählt werden sollte.

Beispiel

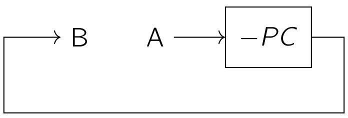
$\lambda = 8s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2 = a_0 s^4 + a_1 s^3 + \cdots + a_4$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det H_1 &= 2 > 0 \quad \checkmark \\ \det H_2 &= 2 - 24 = -22 > 0 \quad \times \end{aligned}$$

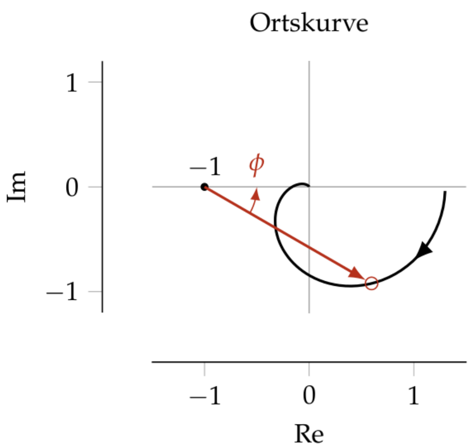
Nyquist

Wenn $L(s) = -1$, so kann eine stationäre Schwingung eingestellt werden!



$$B = -P(s)C(s) \cdot A \quad \Rightarrow \quad \underline{P(s)C(s) = -1}$$

Allgemein – Variante Winkeländerung



$$\Delta\phi = a\frac{\pi}{2} + r\pi \mathrel{\hat{=}} a \cdot 90° + r \cdot 180°$$

a : Anzahl Pole auf der Im-Achse
r : Anzahl Pole rechts der Im-Achse

Nur bei $\Delta\phi \geq 0°$ ist der *geschlossene* Kreis **stabil**.

> **! Offen stabile Systeme**
>
> Systeme, welche offen stabil sind, müssen der Bedinung $\Delta\phi = 0$ genügen.
> Das Kriterium ist ebenfalls anwendbar, wenn die Ortskurve experimentell ermittelt wurde.

> **Totzeit**
>
> Die Bedingung gilt auch für Systeme mit Totzeit

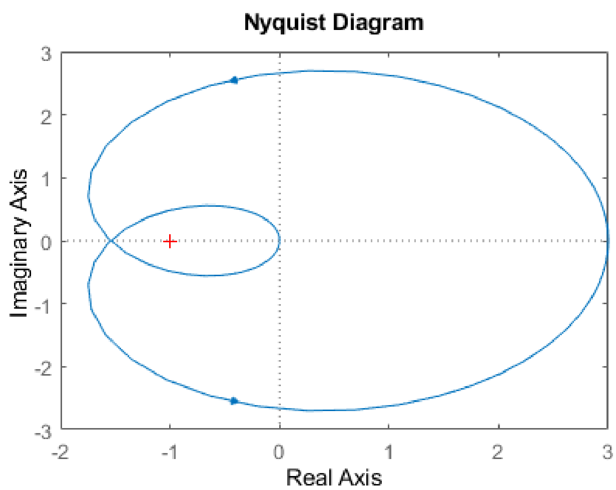
Allgemein – Variante Umläufe

Das System G_{yr} ist stabil wenn $P = U$

P : Anzahl instabiler Polstellen von $L(s)$
U : Anzahl Umläufe der Nyquist-Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [-\infty, \infty]$ un

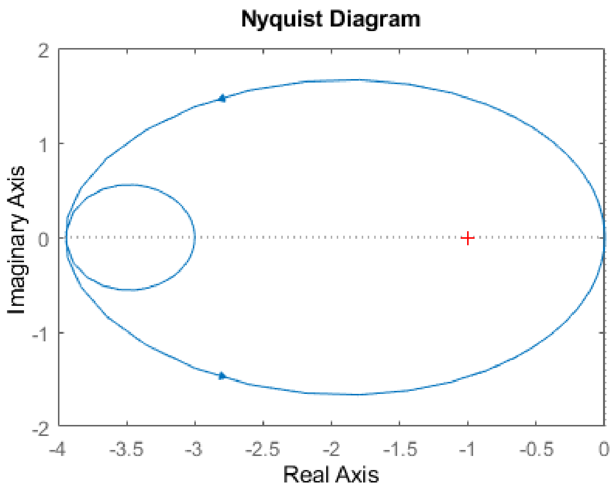
Beispiel

$$L(s) = \frac{9(s+2)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$



$\rightarrow \; P = U = 2$: stabil

$$L(s) = \frac{18(s-1)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$



→ $P = 2, U = 1$: instabil

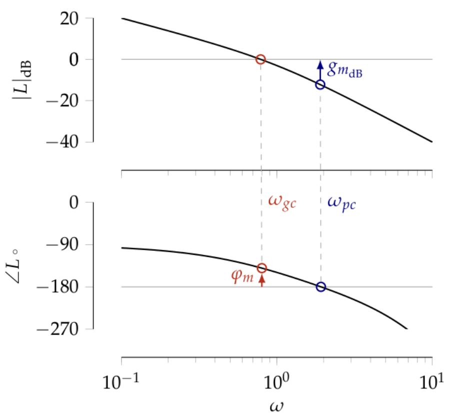
Einfach – Variante Links liegen

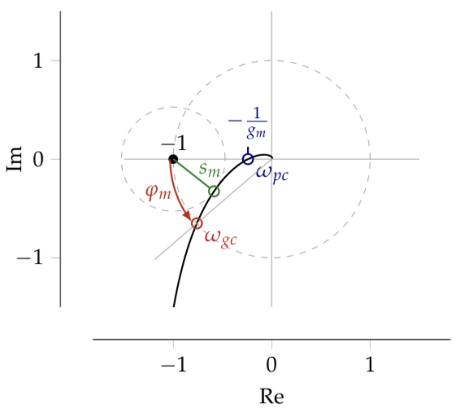
Für Systeme mit maximal zwei instabilen Polen im Ursprung (aber keinen weiteren instabilen Polen) genügt die Bedingung, dass der Punkt $(-1, 0)$ *links liegen gelassen* wird, wenn entlang der Ortskurve $\omega : 0 \to \infty$ verfahren wird.

Einfach – Variante Umläufe

Das System G_{yr} ist stabil, wenn die Nyquist Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [0, \infty]$ den Punkt $(-1, 0)$ **nicht** umläuft.

Stabilitätsreserve / Robustheit





Phasenreserve φ_m

Eintritt in den Einheitskreis → *gain crossover*

$$\omega_{gc} : |L(j\omega_{gc})| = 1$$

Abstand zu -1 wird mit Phasenreserve φ_m ausgedrückt

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

Amplitudenreserve g_m

Überschreiten der negativen Re-Achse → *phase crossover*

$$\omega_{pc} : \angle L(j\omega_{gc}) = -180^\circ$$

Abstand zu -1 wird durch die Amplitudenreserve g_m ausgedrückt.

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$

Wird die Achse nicht überschritten, so ist $g_m \to \infty$

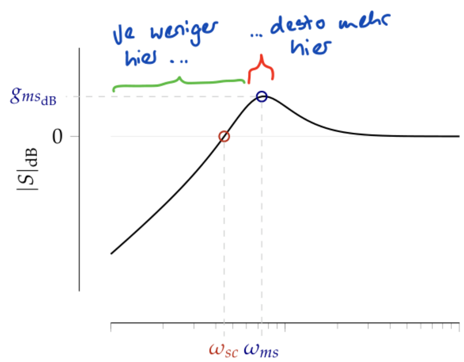
→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

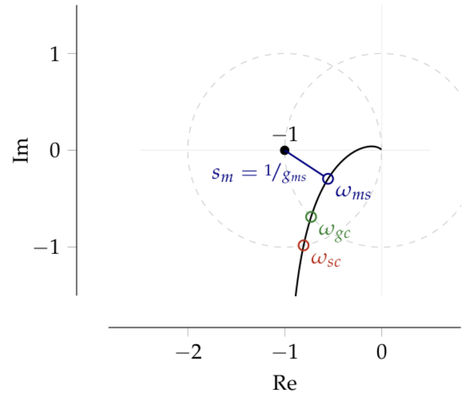
Stabilitätsreserve s_m

Kleinester Abstand zum Punkt -1

Der Wert kann von der Ortskurve abgelesen werden oder entspricht dem Maximum der Sensitivitätsfunktion S.

$$\omega_{ms} = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} |S(j\omega)| \qquad s_m = \frac{1}{|S(j\omega_{ms})|} = \frac{1}{g_{ms}}$$





Praxiswerte

Folgende Werte dienen als *Boilerplate* für die Reglerauslegung

$$\varphi_m \approx 30° - 60°$$
$$g_m \approx 2 - 5$$
$$s_m \approx 0.5 - 0.8$$
$$\omega_{gc} \approx \frac{1}{\tau} : \tau \text{ von Sprungantwort}$$

Prozess

Modellierung

Vereinfachung

Modelle repräsentieren immer eine Vereinfachung des eigentlichen Systems und fokusiert daher immer auf ein Teil des Systems.

Beispiel: Die Modellierung des Tempomats konzentriert sich mehr auf die Geschwindigkeit des Fahrzeugs als auf die Auswirkungen eines Atombombeneinschlags auf das Fahrzeug.

Identifikation

...welche Klasse – Ausgehend von einem LTI-System sind der Grad von Zähler- und Nennerpolynom festzulegen. Zudem sidn allfällige Totzeiten zu berücksichtigen.

...welche Eingangssignale – Das zu testende System muss hinreichend mit einem Signal angeregt werden → Diracstösse, Sprungfunktionen, Rampen und harmonische Funktionen

...was meint 'gleichwertig' – Da Ein- & Ausgangsgrössen beobachtet werden, kann y des zu testenden Systems und $\hat{y}$ des zu vergleichenden Modell verglichen werden. Mit dem resultierenden Fehler $\epsilon = y - \hat{y}$ können Grenzen festgelegt werden.

...wie kann ein Modell gefunden werden – Trial & Error mit Sprungantwort und Bodediagramm.

Methode der kleinsten Quadrate

Mit dieser Methode können Parameter anhand Messwerten bestummen werden.

$$\underbrace{y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \cdots + a_n y[k-n]}_{A(z^{-1})y}$$
$$= \underbrace{b_1 u[k-1] + \cdots + b_n u[k-n]}_{B(z^{-1})u}$$

$$\beta^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = A(z^{-1})y - B(z^{-1})u = \underbrace{y}_{Gemessen} - \underbrace{\Phi\beta}_{\text{Modell}}$$

$$y = \begin{pmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[n+N] \end{pmatrix}$$

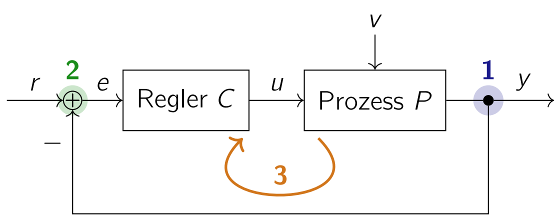
$$\Phi = \begin{pmatrix} -y[n] & -y[n-1] & \cdots & -y[1] & u[n] & u[n-1] & \cdots & u[1] \\ -y[n+1] & -y[n] & \cdots & -y[2] & u[n+1] & u[n] & \cdots & u[2] \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -y[N+n-1] & -y[N+n-2] & \cdots & -y[N] & u[N+n-1] & u[N+n-2] & \cdots & u[N] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y$$

Regelung

Feedback Control

Ziel eines Reglers ist die Angleichung einer Regelgrösse y an eine Führungsgrösse r, sodass idealerweise $y = r$.

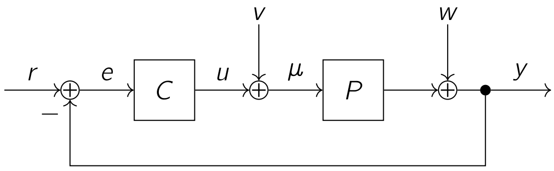


Merkmale einer Regelung

Folgende Merkmale **muss** eine Regelung aufweisen, ansonsten ist es keine Regelung.

1. Erfassung (Messen) der Regelgrösse
2. Vergleich von Regel- und Führungsgrösse
3. Geschlossener Wirkungskreis

Sensitivitätsfunktionen



'Gang of Four'

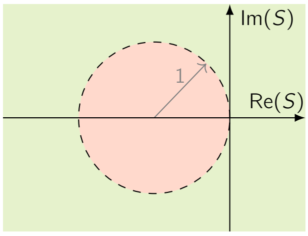
Das Verhalten der Regelung kann durch die folgenden vier Sensitivitätsfunktionen beschrieben werden.

Sensitivity Function

$$G_{er} = S = \frac{1}{1+PC}$$

Bedeutung

Sensitivitäts-Übergangsfrequenz ω_{sc} kennzeichnet den Übergang von Dämpfung zur Verstärkung



$|S(j\omega)| < 1$ Dämpfung
$|S(j\omega)| > 1$ Verstärkung

Load Sensitivity Function

$$G_{vy} = PS = \frac{1}{1+PC}$$

Complementary Sensitivity Function

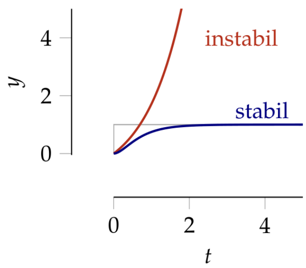
$$G_{yr} = T = \frac{1}{1+PC} \stackrel{!}{=} \underline{1}$$

Noise Sensitivity Function

$$G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

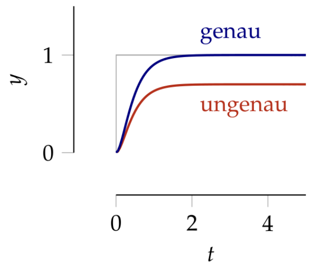
Anforderungen

Stabilität



- binäres Kriterium und zwingend zu erfüllen
- Für lineare Systeme gilt dies **global**, egal welcher AP
- Die Stabilität kann anhand des Polnullstellendiagramms beurteilt und mit Hurwitz & Nyquist untersucht werden

Stationäre Genauigkeit

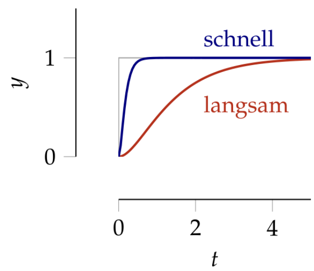


- Beschreibt bleibender Fehler, nach Abklingung der transienten Vorgänge
- Gutes Mass ist stationärer Regelfehler e

$$e = \frac{1}{1+PC}r + \frac{-P}{1+PC}v + \frac{-1}{1+PC}w$$

$$e_{stationr} = \left.\frac{1}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot r_0 + \left.\frac{-P}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot v_0 + \left.\frac{-1}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot w_0$$

Schnelligkeit

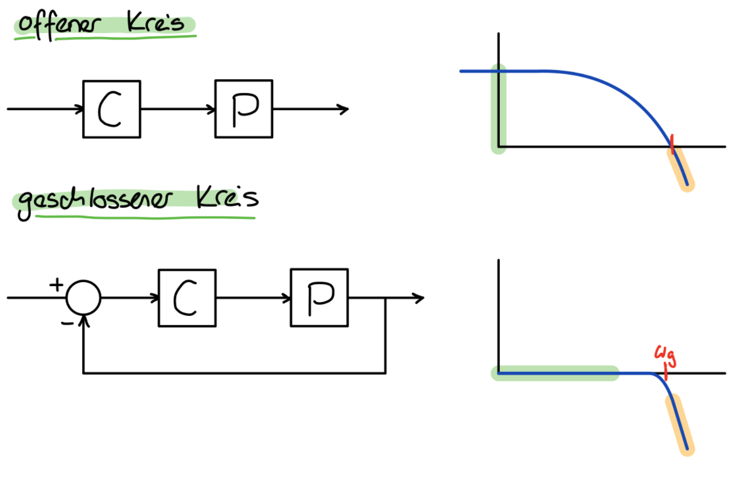


- Für Charakterisierung des dynamischen Verhaltens wird **Gesamtregelkreis** betrachtet in Bezug auf Führungsgrösse

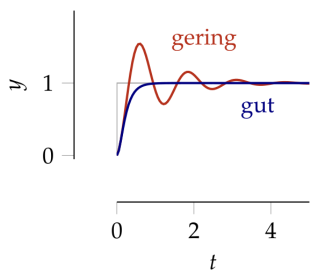
$$y = \frac{PC}{1+PC}r$$

- Als Kriterium dient die Grenzfrequenz $\omega_g \rightarrow$ Beschreibt ab wann das Verhalten deutlich degradiert ($\omega_g < \omega$)

$$\omega_g : |L(s)|_{s=j\omega_g} \approx 1$$



Dämpfung



- Unterdrückung von schwingenden Signalteilen, welche Anzeichen von Instabilität sind
- Gutes Mass ist die Phasenlage im Bereich von ω_g

Eigenschaften

Robustheit

Robustheit bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.

Robustheit gegenüber Unsicherheit → Standhaltung gegenüber Störungen

Dynamik

Die *Dynamik* eines Systems kann durch eine Regelung beeinflusst und verändert werden.

- Instabile Systeme → stabil
- Träges System → schnell
- Abdriftende System → konstant.

Abhängigkeit

Viele Systemeigenschaften sind nicht unabhängig voneinander. Sie unterliegen von Natur aus bestimmten Beschränkungen

- Stabiles Flugverhalten → keine hohe Manövrierbarkeit

!! Regelungen können helfen, diese Abhängigkeiten teilweise aufzuheben!

Safety Critical

Werden instabile Systeme mittels Regelung stabilisiert, so wird die Regelung kritisch für die Sicherheit des Systems.

Modularität

In einem modularen System sind die einzelnen Module möglichst unabhängig voneinander → Module können einfach ersetzt oder erweitert werden.

- Wohldefinierte Ein-/Ausgänge, Beziehungen dazwischen → Verhalten unabhängig von äusseren Umständen → ebenfalls Ziel von Regler

Mittels Regelulng lassen sich Komponenten unabhängiger und damit zusammengesetzte Systeme Modularer machen.

Genauigkeit

Mit Regelung können unerwünschte Störeinflüsse ausgeglichen werden → Verbessert Genauigkeit und Auflösung (z.B. bei Sensoren).

Anwendungen

Ein Konzept einer hohen Genauigkeit ist, mittels Regelung wird ein bestimmten und wohldefinierten Arbeitspunkt ausgeregelt und dabei aufgewendete Stellgrösse als Messgrösse des Sensors interpretiert dies.
Beispiel: Seismographgen, sehr präzise Waagen

Herauserforderungen

Regelungen bringen viele Vorteile, aber auch einige Nachteile:

Gefahr der Instabilität – Auch geregelte Systeme haben einen Kipppunkt, wo die Mitkopplung dominant wird und zur Instabilität führt. Ziel einer Regelung ist das System unter allen Umständen stabil zu halten (nicht nur unter Normalbedingung sondern auch unter allen Störeinflüssen → anspruchsvoll).

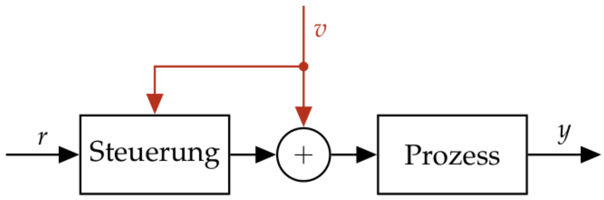
Beispiel: Mikrophonverstärkung bei Beschallungsanlage zu weit aufgedreht → pfeifen

Messfehler – Jede Regelgrösse wird messtechnisch verfasst → verbundene Messfehler gehen in Systemverhalten ein (betrifft statische Fehler, dynamische Fehler, wie Rauschen)

Komplexität – Die Implementation eines Regelsystems bei hoher Komplexität wird anspruchsvoller und mit entsprechendem Aufwand verbunden.

Steuerung

Feedforward Control



P-Regler

$$C(s) = k_p \qquad u = k_p \cdot e$$

> **Achtung**
>
> $e = 0$ ist mit einem P-Regler nicht möglich. Unter Annahme eines stabilen Regelkreises:
>
> $$G_{er} = \frac{1}{1 + P \cdot C} = \frac{1}{1 + P \cdot k_p}$$
>
> entsteht ein bleibender Fehler von:
>
> $$G_{er}(0) = \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} = \frac{1}{1 + P(0) \cdot k_p}$$
>
> Dies kann mit einer Vorsteuerung korrigiert werden, was aber Störeinflüsse nicht ausschliesst:
>
> $$u(t) = k_p \cdot e(t) + u_{ff} = k_p \cdot e(t) + \frac{r}{P(0)}$$
>
> Besser ist ein PI-Regler

PI-Regler

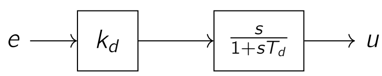
$$C_{PI} = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \qquad u = k_i \cdot \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

PD-Regler

$$C_{PD} = k_p \cdot (1 + T_d \cdot s) \qquad u = k_d \frac{de}{dt}$$

Filter D-Anteil

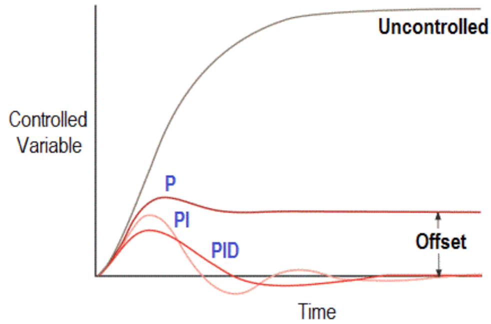
Hochfrequente Änderungen (z.B. Sprungantworten) führt zu hohem D-Anteil → Erweiterung TP-Filter

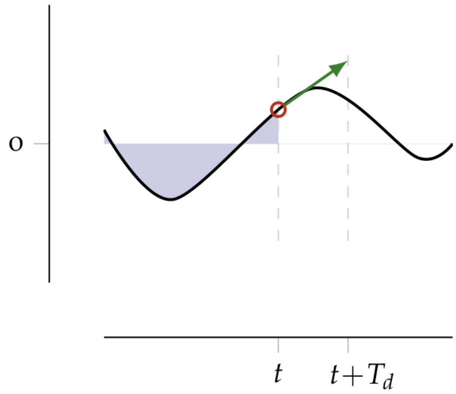


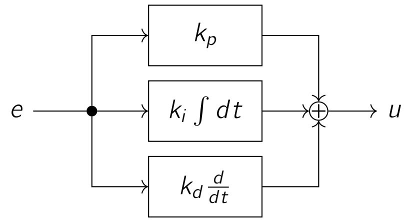
Für tiefe Frequenzen ($|s| \ll \frac{1}{T_d}$) wird $G_{ue} \approx k_p T_d s$ und hohe Frequenzen wird $G_{ue} \approx k_p$ (limitiert durch k_p)

$$C_D(s) = k_p \frac{T_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d} = \frac{\overbrace{k_d \cdot s}^{\text{D-Anteil}}}{\underbrace{1 + s \cdot T_d}_{\text{Filter}}}$$

PID-Regler







$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = k_p \cdot \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{T_i \cdot s}$$

$$= \underbrace{k_p \cdot e}_{\text{P}} + \underbrace{\frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I}} + \underbrace{k_p \cdot T_d \frac{de}{dt}}_{\text{D}}$$

k_p : Reglerverstärkung
$T_i = {}^{k_p}/_{k_i}$: Nachstellzeit
$T_d = {}^{k_d}/_{k_p}$: Vorhaltzeit

> **Wichtig**
>
> Diese Beschreibung ist nur eine idealisierte Repräsentation, welche für das Verständnis des System hilfreich ist. Im praktischen Einsatz sind Modifikationen notwendig.

Proportional k_p

P-Anteil verstärkt den Regelfehler e um die *Proportionalverstärkung* k_p.

$$C(s) = k_p \qquad u = k_p \cdot e$$

Proportionalband

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{falls } e \geq e_{max} \\ k_p \cdot e & \text{falls } e_{min} < e < e_{max} \\ u_{min} & \text{falls } e \geq e_{min} \end{cases}$$

mit

$$e_{min} = \frac{u_{min}}{k_p} \qquad e_{max} = \frac{u_{max}}{k_p}$$

Integral k_i, T_i

Mit dem I-Anteil werden *vergangene* Fehler mitberechnet → stationäre Fehler des P-Anteils wird korrigiert.

Die Stellgrösse wird dadurch solange geregelt, bis der Regelfehler $e = 0$ wird.

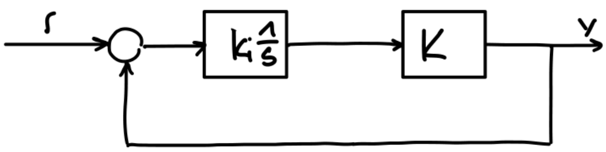
Differential k_d, T_d

Der D-Anteil reagiert auf *zukünftige* Fehler, indem die Steigung mit einem Verstärkungsfaktor k_d verstärkt wird.

Auslegung anhand...

...Modelle geringer Ordnung

Approximation 0-er Ordnung



Für einen statischen Prozess $K = P(0)$ und einen I-Regler wird $L = PC = K \cdot \frac{k_i}{s}$:

$$G_{yr} = \frac{K \cdot k_i}{s + K \cdot k_i} = \frac{1}{1 + s \cdot T_{cl}}$$

$$k_i = \frac{1}{T_{cl} \cdot K} = \frac{1}{T_{cl} \cdot P(0)}$$

mittlere Verzögerungszeit

Die Auslegung bedingt, dass der Prozess gut durch eine Konstante beschrieben werden kann. Ein vernünftiges Kriterium dafür ist die Bedingung:

$$T_{cl} > T_{ar} \qquad T_{ar} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$

T_{ar} : mittlere Verzögerungszeit
T_{cl} : Zeitkonstante des geschlossenen Kreises

T_{ar} beschreibt die Zeit, bis die Sprungantwort des Systems sich gesetzt hat.

Approximation 1-ter Ordnung

Näherung erster Ordnung kann folgendes Modell gewählt werden.

$$P \approx P(0) + P'(0)s \approx \frac{P(0)}{1 + sT_{ar}}$$

...Bodediagramm

Diese Auslegung wird mit dem **offenen** Regelkreis gemacht.

$$C(s) = k_i \frac{(1 + s\,T_1)(1 + s\,T_2)}{s} = k_p \frac{(1 + s\,T_i)(1 + s\,T_d)}{s \cdot T_i}$$

Zielgrössen: Durchtrittsfrequenz ω_{gc}, die Phasenreserve φ_m und allenfalls Amplitudenreserve g_m.

Vorgehen

Prozess: $P(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$ mit Ziel $\omega_{gc} \geq 10\frac{rad}{s}$, $\varphi_m \geq 50$.

1. P-Regler für Erreichung von ω_{gc}. Mit $|k_p \cdot P(j\omega_{gc})| = 1$ (Nyquist-Kriterium) folgt:

$$k_p = \frac{1}{\left|\frac{10}{1+10j}\right|} = \frac{(\sqrt{1^2 + 10^2})^2}{10} = 10.1$$

$$C(s) = k_p = 10.1$$

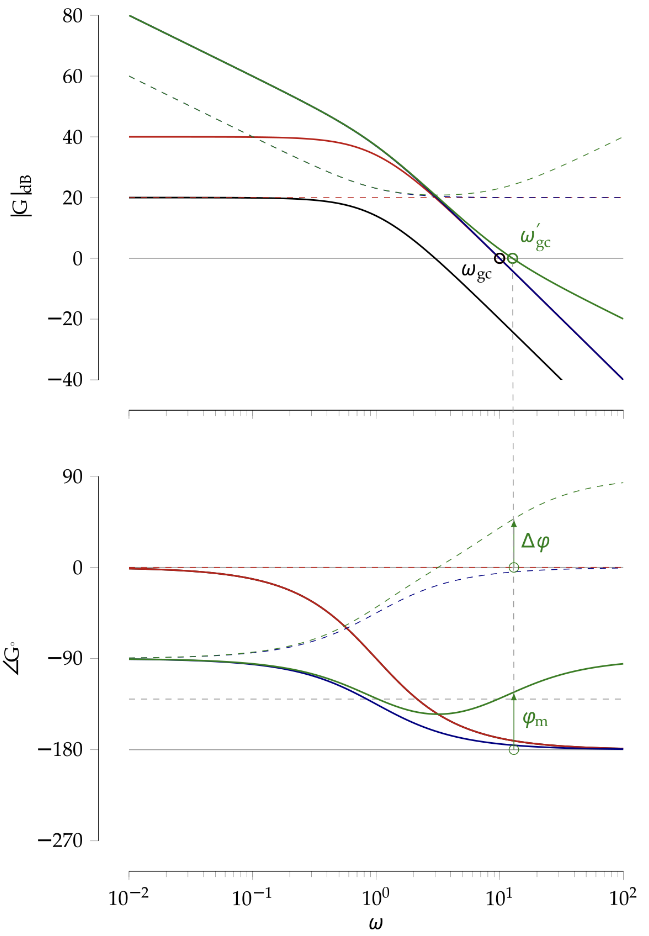
2. PI-Regler für Reduktion der zusätzlichen Phasensenkung im Bereich von ω_{gc}

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)}{s} = \frac{10 \cdot (1 + s)}{s}$$

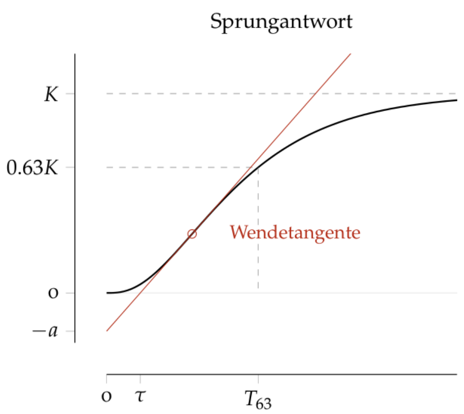
1. PID-Regler für genügend Phasenabhebung im Bereich von ω_{gc}

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s} = 10 \cdot \frac{(1 + s)(1 + 0.1s)}{s}$$

4. Kontrolle von resultiernden Durchtrittsfrequenz ω'_{gc} und damit ergebenden Phasenreserve φ_m.



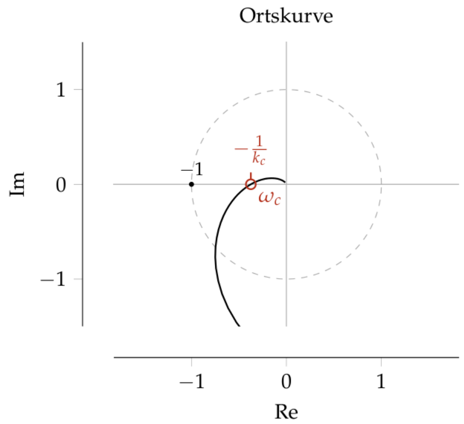
... Einstellregeln im Zeitbereich



Typ	k_p	T_i	T_d
P	$^1/_a$	-	-
PI	$^{0.9}/_a$	$3 \cdot \tau$	-
PID	$^{1.2}/_a$	$2 \cdot \tau$	$0.5 \cdot \tau$

... Einstellregeln im Frequenzbereich

Verstärkung k erhöhen, bis sich eine anhaltende Schwingung einstellt. Regelparameter anhand kritischer Verstärkung k_c & Periodendauer T_c ermitteln.



Typ	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_c$	–	–
PI	$0.4 \cdot k_c$	$0.8 \cdot T_c$	–
PID	$0.6 \cdot k_c$	$0.5 \cdot T_c$	$0.125 \cdot T_c$

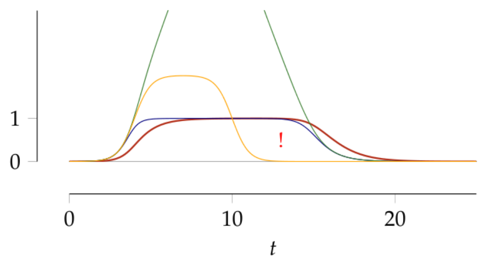
Stellgrössen-Sättigung

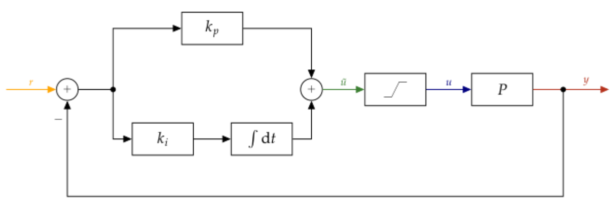
Sättigungseffekt

Arbeitet der Regelkreis in der Sättigung, so ist dieser faktisch unterbrochen – *das System arbeitet als offener Kreis*, solange der Aktor im gesättigtem Zustand ist.

Windup

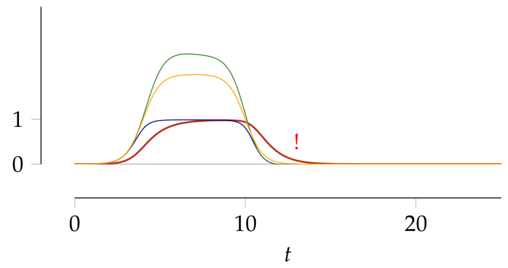
Bei Sättigung baut Fehler den I-Anteil auf. Muss nach Erholung abgebaut werden.

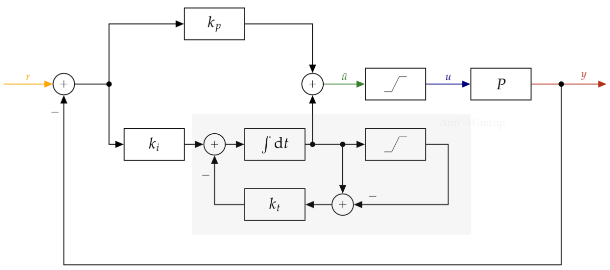




Anti-Windup

Exzessiver Anteil wird mit einem invertierten Vorzeichen an den Integrator zurückgeführt und somit der Windup klein gehalten → kürzere *Erholzeit* nach Stellgrössensättigung



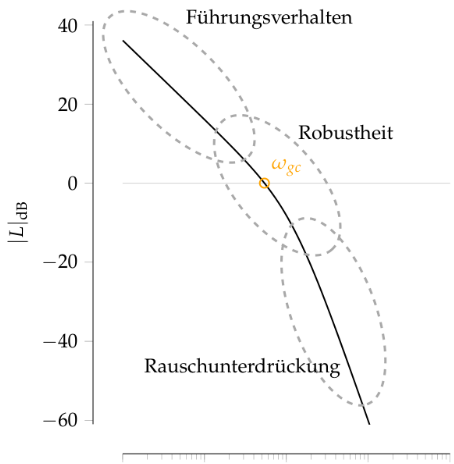


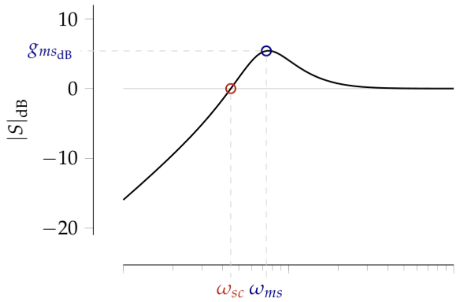
$k_t \approx 10k_i$

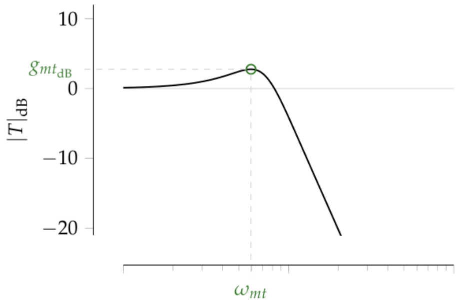
Loop Shaping

! Verlauf von $|L|$

$$\begin{aligned} \omega < \omega_{gc} &\quad \text{möglichst gross} \\ \omega \approx \omega_{gc} &\quad \text{möglichst flach} \\ \omega > \omega_{gc} &\quad \text{möglichst klein} \end{aligned}$$







Lag & Lead Kompensatoren

$$C(s) = k \cdot \prod_i \left(\frac{s + a_i}{s + b_i} \right)$$

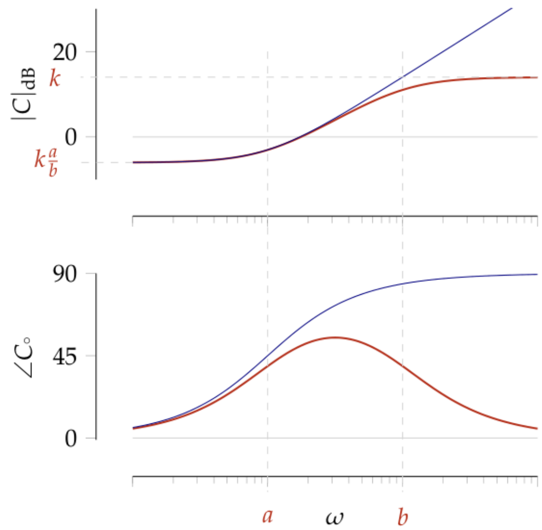
Mit $a_i > 0$, $b_i > 0$, $k > 0$

ℹ PI-Regler & D-Anteil

PI Regler $\rightarrow \quad b = 0$
D-Anteil mit Beschränkung $\rightarrow \quad a = 0$

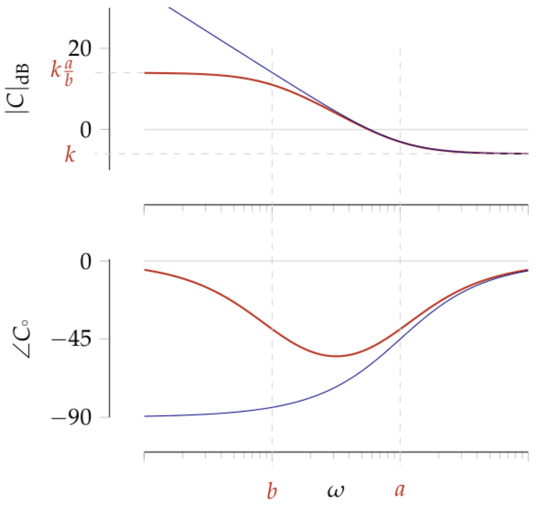
Lead ($a < b$)

Verstärkung bei hohen Frequenzen + Phasenanhebung (max 90° pro Ordnung)



Lag ($a > b$)

Verstärkung bei tiefen Frequenzen + Phasensenkung (max −90° pro Ordnung)

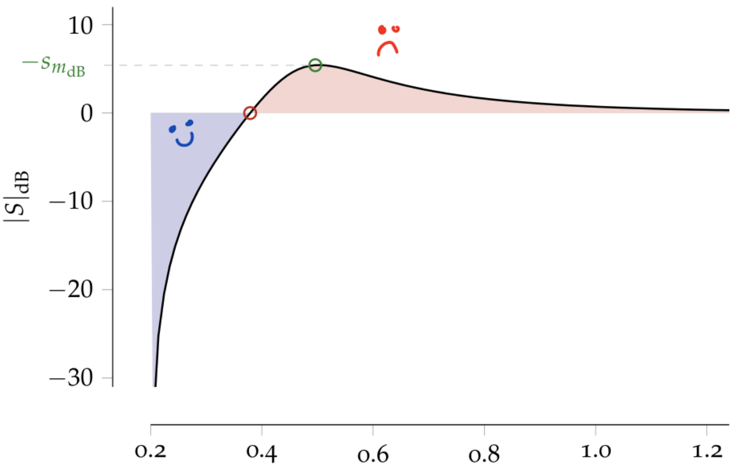


Grenzen des Loop-Shapings

Der Beeinflussing des Systemverhalten durch Regelung sind bestimmte Grenzen gesetzt. Verhalten kann nicht uniform verbessert werden.

> **Bode's Integral**
>
> Ist der geschlossene Regelkreis mit L stabil und geht $sL(s)$ für $s \to \infty$ gegen null, dann ist
>
> $$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|\ d\omega = \pi \sum p_k$$
>
> wobei p_k die Pole in der rechten Halbebene sind. Ist L an sich stabil, so gilt
>
> $$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|\ d\omega = 0$$

Alle Verbesserungen werden mit Verschlechterungen komplementiert.



Diskretisierung

PID-Regler

Auslegung

Digitalrechner arbeiten zeitdiskret ↔ Prozesse sind von zeitkontinuierlicher Natur

> **Perspektiven für Entwurf zeitdiskrete Regler**
>
> 1. *Prozess*:
> 2. *Regler*:

MATLAB

Vektoren

Vektoren werden mit `[...]` deklariert. Elemente werden Spaltenweise mit einem Leerschlag `' '` oder Komma `,` eingeteilt und mit einem Semikolon `;` Reihenweise geteilt.

```
data = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]; % same as [1 2 3;4 5 6;7 8 9];
```

> **Grösse `size`**
>
> Mit `size` kann die Grösse einer Variable ermittelt werden. `size` gibt als Resultat ein 1x2 Vektor zurück $\left(\begin{bmatrix}\text{Rows} & \text{Columns}\end{bmatrix}\right)$
>
> ```
> >> a = 1
> >> size(a)
>      1     1   % rows, columns
> ```

```
a = 1
```

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad \text{oder einfach} \quad 1$$

Die `size`-Funktion gibt auch bei einzelnen Werte eine Grösse aus, nämlich $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

```
b = [1 2 3] % Linienvektor
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

```
c = [2;3;4] % Spaltenvektor
```

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

Slicing

Mit *Slicing* kann ein Teil einer Matrix **kopiert** werden und einer anderen Variable zugewiesen werden.

```
<matrix>(<rowStart>:<rowEnd>,<colStart>:<colEnd>)
```

Plotting

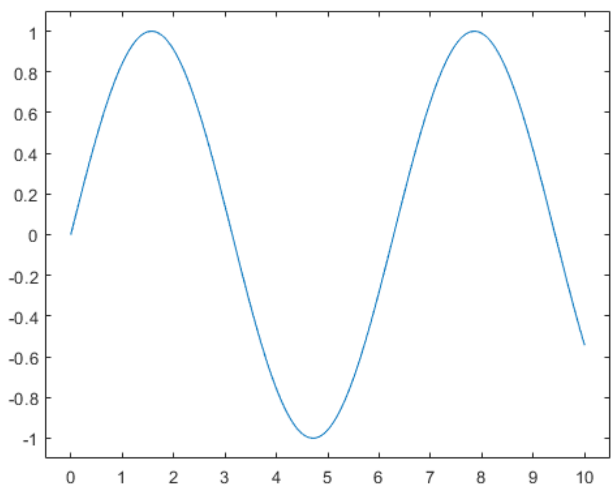
Figure-Separierung

Mit `figure(n)` können mehrere Plot-Befehle in eigene Figuren geladen werden.

XY-Graph

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;
y = sin(t);

plot(t,y);
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);
```



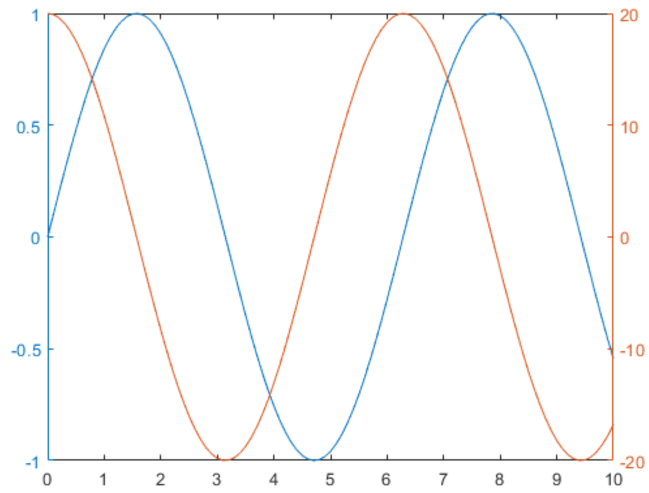
XYY-Graph

Mit `yyaxis` kann die Y-Achse beim selben Plot mit `left` & `right` gewechselt werden.

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;

yyaxis left;
plot(t, sin(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);

yyaxis right;
plot(t, 20*cos(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-20.5 20.5]);
```



Transferfunktion `tf(...)`

Mit dem Befehl `tf(...)` kann eine Transferfunktion deklariert werden mit Zähler- und Nenner-Zeilenvektoren.

```
sys = tf(numerator,denominator);
```

Die Transferfunktion kann in anderen Funktion wiederverwendet werden, wie zum Beispiel `step` oder `bode`. Folgende Beispiele sind mit der `sys`-Transferfunktion (folgende Gleichung) gemacht.

$$G_{\text{sys}}(s) = \frac{4}{s^2 + s + 10}$$

```
sys = tf(4,[1 2 10]);
```

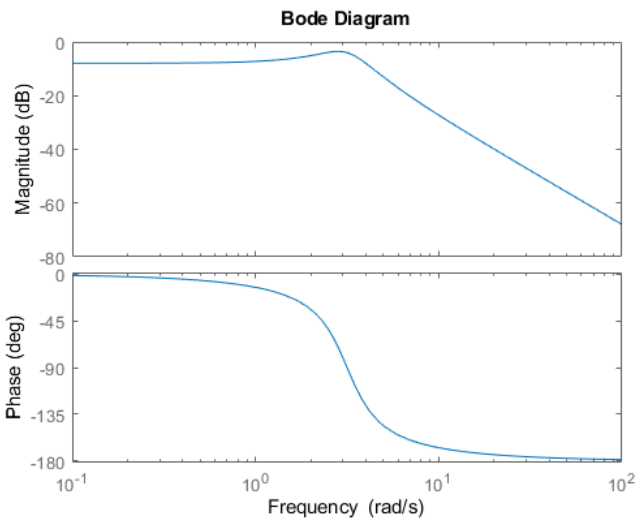
PID-Regler `pidstd`

```

```

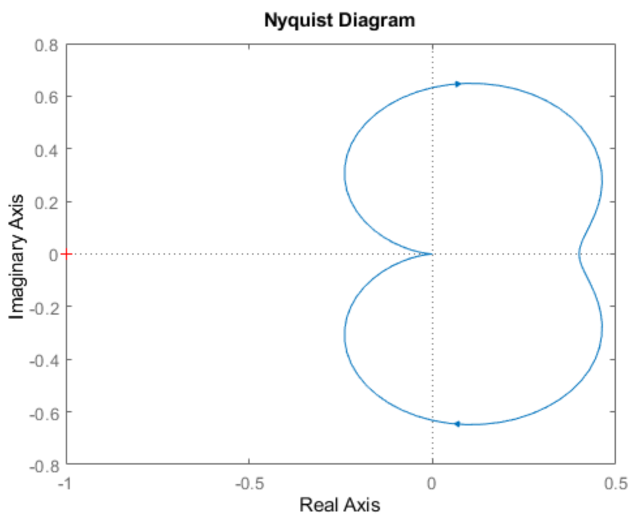
Bode-Diagramm `bode`

```
bode(sys,{0.1,100}); % or bode(sys);
% grid on; to enable Grid in Plot
```



Nyquist-Diagramm `nyquist`

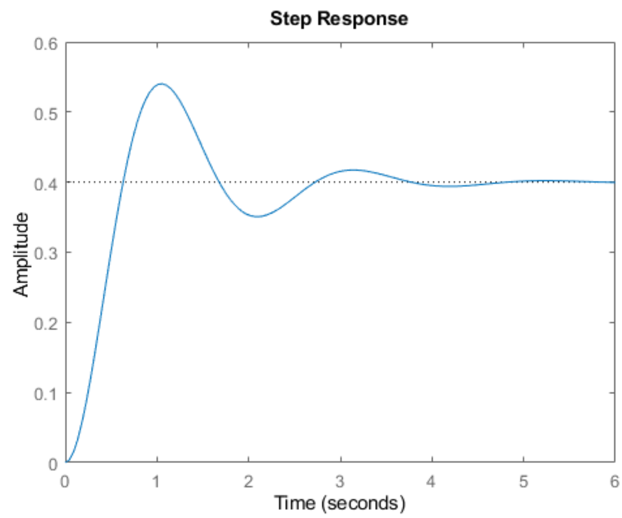
```
nyquist(sys)
```



Sprungantwort `step`

Mit `step(...)` kann eine Transferfunktion mit der Sprungfunktion σ verwendet werden. Damit

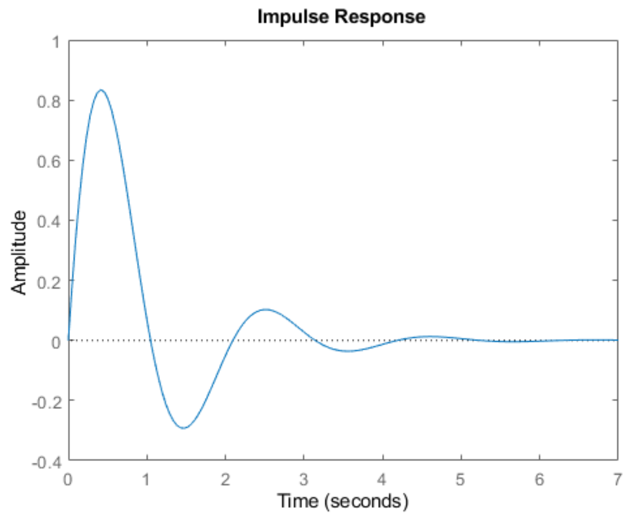
```
step(sys);
```



Impulsantwort `impulse`

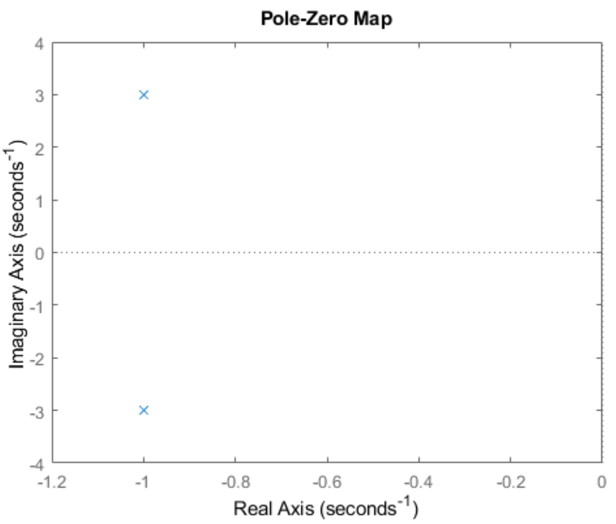
Mit `impulse(...)` kann die Impulsantwort der Transferfunktion ausgegeben werden.

```
impulse(sys);
```



Pol-Nullstellen-Diagramm `pzmap`

```
pzmap(sys);
ylim([-4 4]); xlim([-1.2 0]);
```



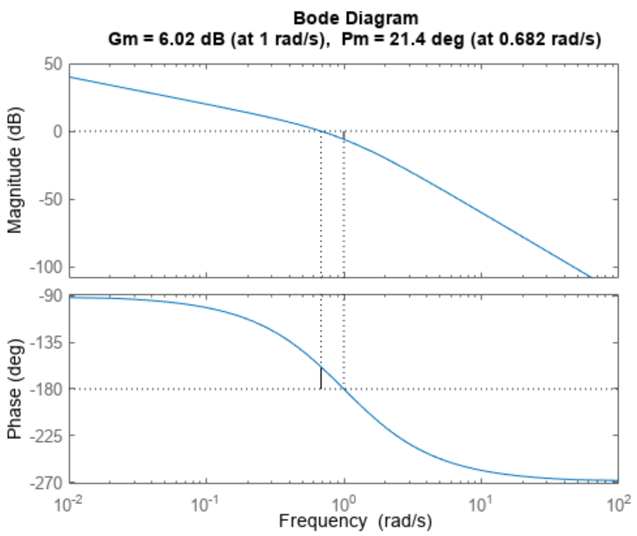
🔥 MATLAB Zauber

Damit die Pol- und Nullstellen erkennbar sind, muss eventuell mit den Darstellungsgrenzen gespielt werden.

Margin `margin(tf)`

Mit dem Befehl `margin(tf)` kann das Bode-Diagramm

```
margin(tf(1,[1 2 1 0]))
```



Zustandsraumdarstellung `ss()`

Mit `ss(...)` können vier Matrizen A, B, C, D zu einer Zustandsraumdarstellung zusammengeführt werden.

```
A = [0 1;-5 -2];
B = [0;3];
C = [0 1];
D = 0;
Ts = 0.25;
sys = ss(A,B,C,D,Ts);
```

Es kann ebenfalls `bode`, `nyquist`, `step`, etc. angewendet werden, da die ZRD eine andere Darstellung der Übertragungsfunktion ist.

Reglersimulator `Sisotool(tf(...))`

Mit `sisotool` kann ein Regler C basierend auf einem Prozess P ausgelegt werdne.

```
P = tf(...);
sisotool(P); % Der Prozess wird angegeben
```

Weitere Befehle

`minreal`

Kürzt doppelte Nullstellen heraus algebraisch -> reduzieren auf Minimalform

Anleitungen / Vorgehen

Modellierung dynamischer Systeme

1. Festlegung der Systemgrenzen sowie der Ein-/ Ausgangsgrössen.
2. Identifikation der relevanten Energiespeicher und der zugehörigen 'Füllstandsgrössen'.
3. Formulierung der Bilanzgleichungen für die Energiespeicher.

$$\frac{d}{dt}\text{Füllstand} = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}$$

4. Formulierung der Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Energiespeichern.
5. Identifikation der Systemparameter anhand von Spezifikationen oder Experimenten.
6. Validierung des Modells durch Experimente. Je nach Resultat Iteration des Verfahrens.

Stabilitätsbestimmung

1. Offener Kreis bilden $L = PC$
2. Nyquist/Ortskurve zeichenen `nyquist(L)`
3. Bodediagramm zeichnen `margin(L)`, `bode(L)`
4. Stabilitätsbedingung anhand Nyquist-Kriterium prüfen

Parameter Identifikation

1. Hypothese über die Modellstruktur (Naturgesetze oder Black Box). Beispiel

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

2. *Gute* Anregung (Impuls, Sprung, Rampe,...) auswählen und Experiment durchführen
3. Messdaten $y(k)$ speichern
4. Mit $(u(k), y(k))$ die Parameter (b, a_1, a_2) bestimmen
5. Modell & Parameter validieren (wenn nicht gut, zurück zu Punkt 1 mit neuem Modell)

Linearität & Zeitinvarianzen

LTI-Systeme

! Anforderung

Alle Kriterien *Zeitinvarianz*, *Verstärkungs* und *Überlagerungsprinzip* müssen für LTI-System gelten.

Tipp

Zustands-, Ein- oder Ausgangsgrössen in nichtlinearen Operationen ($\cdot^2$, sin, ln . . .) in Differenzialgleichung deuten auf ein **nicht lineares** System.

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-t} \cdot \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitvariant} \\
y &= \int_0^t u(\tau)d\tau && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\
y &= \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\
y &= \ddot{y} - u \cdot \dot{y} && \rightarrow \text{nicht linear} \\
y &= \sqrt{u^2 + 1} && \rightarrow \text{nicht linear} \\
y &= 2 \cdot u + 4 && \rightarrow \text{linear}
\end{aligned}
$$

Zeitinvarianz

System ist *zeitinvariant*, falls dessen Wirkungsweise nicht von der Zeit t abhängig ist. Das heisst, das System

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

liefert auf ein Signal $x(t)$ mit einer Verzögerung $a > 0$ ebenfalls ein verzögertes Ausgangssignal

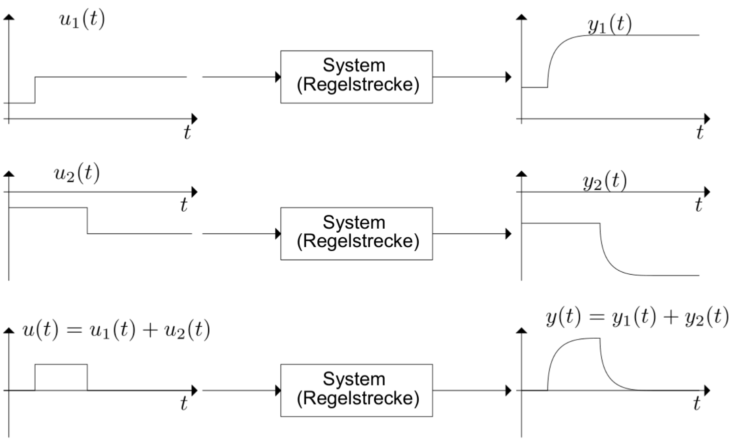
$$y(t + a) = H\{x(t + a)\}$$

Linearität

Ein System ist *linear*, falls das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip gelten.

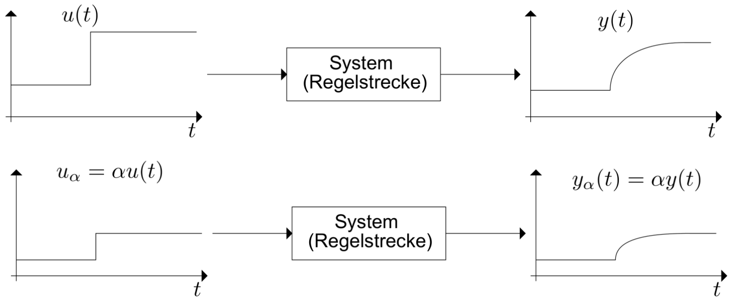
Überlagerungsprinzip

Wenn $y_1(t)$ die Antwort auf $u_1(t)$ ist und $y_2(t)$ die Antwort auf $u_2(t)$ ist, so ist $y_1(t) + y_2(t)$ die Antwort auf $u_1(t) + u_2(t)$.



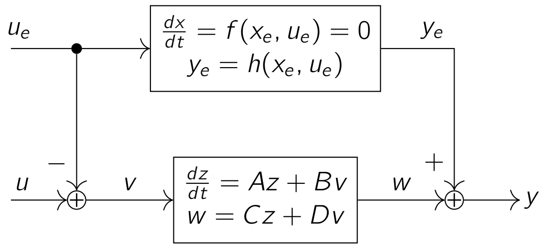
Verstärkungsprinzip

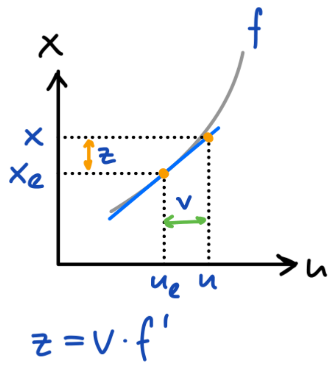
Wenn $y(t)$ die Antwort auf $u(t)$ ist, $\alpha \cdot y(t)$ ist die Antwort auf $\alpha \cdot u(t)$.



Linearisierung

Zustandsraumdarstellung





Ein nicht-lineares System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad y = h(x, u)$$

kann an einem Arbeitspunkt linearisiert werden. Anhand eines Arbeitspunktes wird die Tangente mit folgender Gleichung berechnet.

$$f(x, u) \approx f(x_e, u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} \cdot (x - x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} \cdot (u - u_e)$$

Das nicht-lineare System kann als Zustandsraum-Darstellung linearisiert werden. Folgende Gleichungen

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}\right] \qquad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$$

ergeben die Linearisierung.

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv \qquad w = Cz + Dv$$

mit $z = x - x_e$, $v = u - u_e$ und $w = y - y_e$ mit $y_e = h(x_e, u_e)$.

Differentialgleichung

$$F(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0 \quad \text{mit } m \leq n$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{(y_e,u_e)} z^{(n)} + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{(y_e,u_e)} \dot{z} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(y_e,u_e)} z + \left.\frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\right|_{(y_e,u_e)} v^{(m)} + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_{(y_e,u_e)} \dot{v} + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{(y_e,u_e)} v = 0$$

mit $z = y - y_e$ & $v = u - u_e$.

Vorgehen

$$M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

1. Differentialgleichung gleich 0 setzen $f(\cdots) = F(\cdots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 - M \cdot g}_{F(y^{(n)}, \dots, y, u^{(m)}, \dots, u)} = 0$$

$$\rightarrow \quad f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

2. Arbeitspunkt/stationärer Zustand berechnen $(h^{(n>0)} = 0)$

$\bar{h} = h_0 = \sqrt[3]{\frac{M \cdot g}{k}}$

3. Deltagrössendefinieren

$$\Delta h = h - \bar{h}$$
$$\Delta \dot{h} = \dot{h}$$
$$\Delta \ddot{h} = \ddot{h}$$

3. In Linearisierungsgleichung einsetzten

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{h}}\right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \ddot{h} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \dot{h} + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta h = 0$$

$$M \Delta \ddot{h} + \alpha \Delta \dot{h} + 3k\bar{h}^2 = 0$$

Übertragungselemente

Elementare Glieder

$$G(s) = \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} = b_0 \cdot \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

m : Nullstellen $z_{1 \dots m}$
n : Polstellen $p_{1 \dots m}$

Elementare Funktionen

Werden für die Beschreibung beliebiger LTI-Systeme verwendet. Mit Parametern $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$

Typ	System	Übertragungsfunktion
Integrator	$\dot{y} = u$	$\frac{1}{s}$
Differentiator	$y = \dot{u}$	s
Erste Ordung	$\dot{y} + ay = u$	$\frac{1}{s+a}$
Doppelintegrator	$\ddot{y} = u$	$\frac{1}{s^2}$
Gedämpfter Oszillator	$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u$	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$
Zustandsdarstellung	$\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$	$C(sI - A)^{-1}B + D$
PID Regler	$y = k_p u + k_d \dot{u} + k_i \int u$	$k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$
Totzeit	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+s\frac{\tau}{n})^n}$

$G(s) = k$: konstanter Faktor
$G(s) = s + a$: einfache reelle Nullstelle
$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$: konj. komplexe Nullstellen ($\zeta \leq 1$)
$G(s) = \frac{1}{s+a}$: einfacher reller Pol
$G(s) = \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$: konj. komplexe Pole ($\zeta \leq 1$)
$G(s) = e^{-s\tau}$: Totzeitglied $\tau > 0$

Die zugehörigen Nullstellen

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{konj. komplex} \end{cases}$$

Polüberschuss n_{pe}

Der *Polüberschuss* oder *relativer Grad* beschreibt die Differenz zwischen der Pol- und Nullstellen-Ordnung.

$$n_{pe} = n - m$$

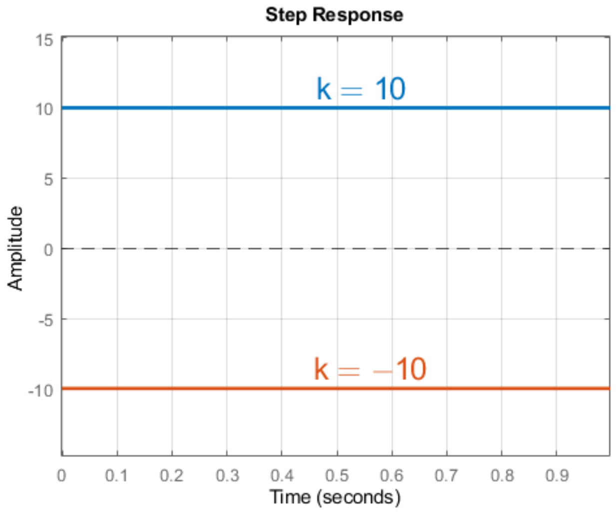
$n_{pe} \geq 0$ *proper*/gebrochenrational
$n_{pe} > 0$ *strictly proper*/echt gebrochenrational

$$y = \begin{cases} \nexists & \text{falls} \quad n_{pe} \leq -2 & \text{bsp} \quad s^2 \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = -1 & s \\ \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = 0 & 1 \\ t \cdot \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = 1 & 1/s \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = n \geq 2 & 1/s^2 \end{cases}$$

Bezeichnete Glieder

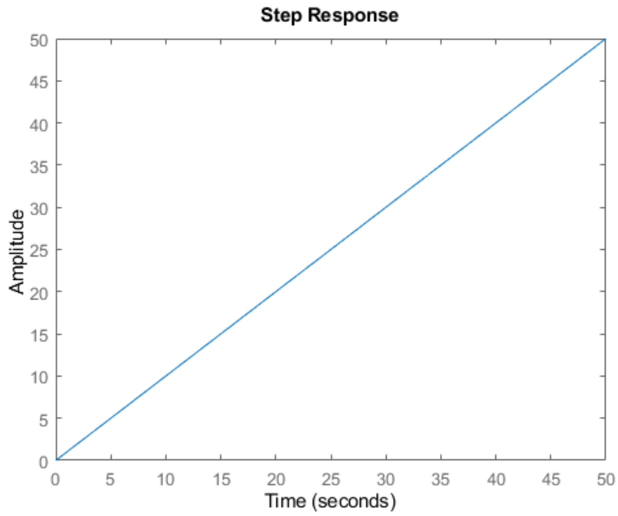
P-Glied7

$$G(s) = k \qquad \text{konstanter Faktor}$$



I-Glied

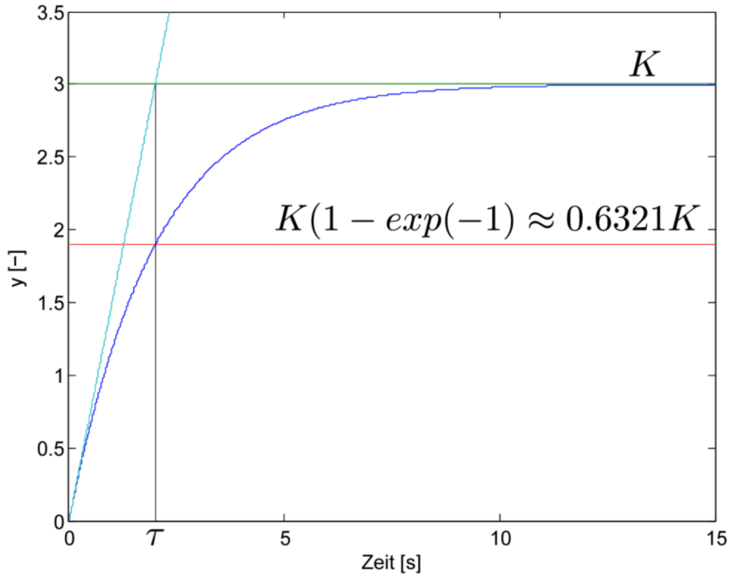
$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{Integrator}$$



PT1-Glied

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

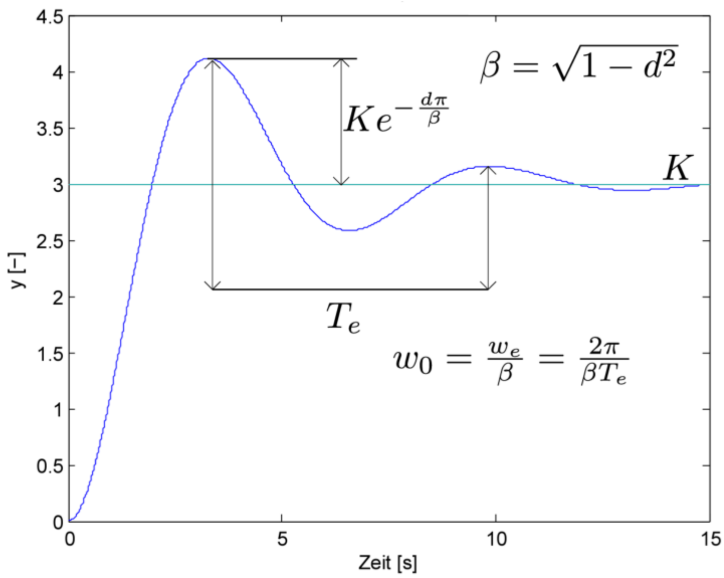
Sprungantwort



PT2-Glied

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

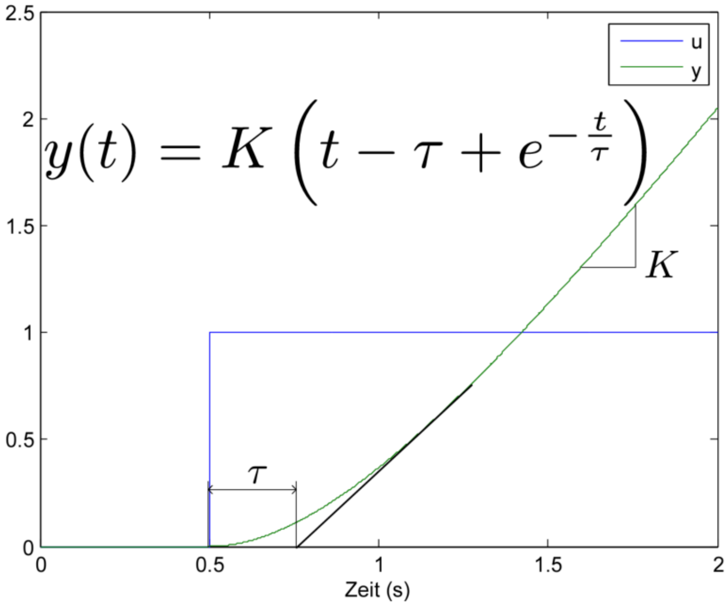
Sprungantwort & $d \mathrel{\widehat{=}} \zeta$



IT-Glied

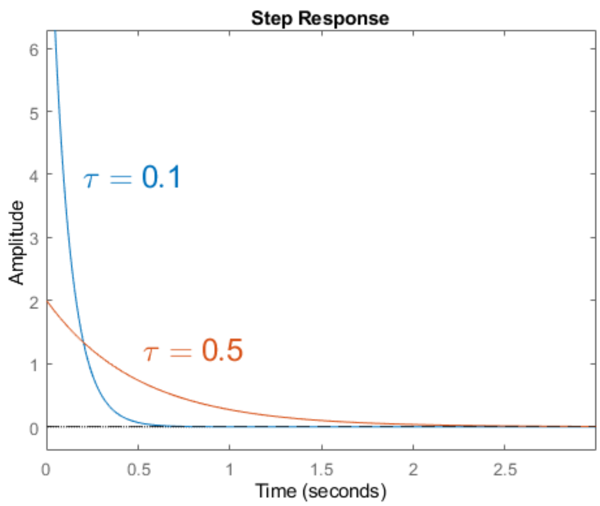
$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

Sprungantwort



DT1-Glied

$$G(s) = \frac{s}{1 + sT} \qquad \text{Gefilterter Differentiator}$$



Anderes Zeug

Betrag von Zeitverzögerungen sind immer = 1, da die Phase keine Rolle spielt.

$$|PC| = 1 \Rightarrow |k \cdot e^{-0.2s} \frac{10}{s}|$$

→ Project Pigeon

Glossar

- *SISO* – **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput
- *MIMO* – **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput