


Regelungstechnik


Zusammenfassung

Joel von Rotz /  [Quelldateien](#)

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	4
Linear Algebra	4
Determinante	4
Inverse Matrix	4
Signal & System	4
Endwertsatz	4
Anfangswertsatz	4
Z-Transformation	4
Transformationen	4
Laplace	4
Z-Transformation	4
Euler Approximation	5
Systeme	5
Grundlegende Systeme	5
Regler System	5
Geschlossenes System	5
Offenes System	5
Vorsteuerung	5
Minimalphasiges System	5
Führungsverhalten	5
Merkmale	5
Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrößen	6
Störverhalten	6
Merkmale	6
Darstellungsarten	7
Blockdiagrammalgebra	7
Verkettung	7
Parallel	7
Rückkopplung	7
Regel von Mason	7
Zustandsraumdarstellung	7
Autonomes, zeitinvariantes System	8
Allgemeine Systeme	8
Lineares Zustandsraummodell	8
Übertragungsfunktion	8
Dynamik	8
Lösen von Differential Gleichungen	8
Gleichgewichtslage	8
Testfunktion Sprungantwort	8
Stabilität	9
Allgemein	9
Linearer Systeme	9
Linearisierung	9
Hurwitz-Kriterium	9
Nyquist	10

Allgemein – Variante Winkeländerung	10
Allgemein – Variante Umläufe	10
Einfach – Variante Links liegen	11
Einfach – Variante Umläufe	11
Stabilitätsreserve / Robustheit	11
Prozess	12
Modellierung	12
Identifikation	12
Methode der kleinsten Quadrate	12
Regelung	13
Sensitivitätsfunktionen	13
'Gang of Four'	13
Anforderungen	13
Stabilität	13
Stationäre Genauigkeit	13
Schnelligkeit	14
Dämpfung	14
Eigenschaften	14
Robustheit	14
Dynamik	14
Modularität	14
Genauigkeit	14
Herauserforderungen	14
Steuerung	15
P-Regler	15
PI-Regler	15
PD-Regler	15
Filter D-Anteil	15
PID-Regler	15
Proportional k_p	16
Integral k_i, T_i	16
Differential k_d, T_d	16
Auslegung anhand...	16
... Modelle geringer Ordnung	16
... Bodediagramm	16
... Einstellregeln im Zeitbereich	17
... Einstellregeln im Frequenzbereich	17
Stellgrößen-Sättigung	17
Windup	17
Anti-Windup	17
Loop Shaping	18
Lag & Lead Kompensatoren	18
Lead ($a < b$)	18
Lag ($a > b$)	18
Grenzen des Loop-Shapings	19
Diskretisierung	19
PID-Regler	19
Auslegung	19
MATLAB	19
Vektoren	19
Plotting	20
XY-Graph	20
XYY-Graph	20
Transferfunktion <code>tf(...)</code>	20
PID-Regler <code>pidstd</code>	20
Bode-Diagramm <code>bode</code>	20

Nyquist-Diagramm <code>nyquist</code>	21
Sprungantwort <code>step</code>	21
Impulsantwort <code>impulse</code>	21
Pol-Nullstellen-Diagramm <code>pzmap</code>	21
Margin <code>margin(tf)</code>	22
Zustandsraumdarstellung <code>ss()</code>	22
Reglersimulator <code>Sisotool(tf(...))</code>	22
Weitere Befehle	22
<code>minreal</code>	22
 Anleitungen / Vorgehen	22
Modellierung dynamischer Systeme	22
Stabilitätsbestimmung	22
Parameter Identifikation	22
Linearität & Zeitinvarianzen	23
LTI-Systeme	23
Zeitinvarianz	23
Linearität	23
Linearisierung	23
Zustandsraumdarstellung	23
Differentialgleichung	24
Übertragungselemente	24
Elementare Glieder	24
Elementare Funktionen	24
Polüberschuss n_{pe}	24
Bezeichnete Glieder	25
P-Glied7	25
I-Glied	25
PT1-Glied	25
PT2-Glied	25
IT-Glied	25
DT1-Glied	26
Anderes Zeug	26
Glossar	28

💡 Vorgehen MEP

- Zuerst lösen, was man kann und nicht zu lange Zeit verlieren
- 10 Minuten pro Aufgabe
 - Gewisse Aufgaben brauchen mehr als 10 Minuten, andere weniger
- Aufgaben sind meist einfacher als man denkt
 - Es gibt verschiedene Lösungsansätze
 - Annahmen treffen oder fragen, falls man unsicher ist
- Wenn Zeit übrig, Lösung validieren

Kurzfassung

Linear Algebra

Determinante

2 × 2-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3 × 3-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

2 × 2-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3 × 3-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Signal & System

! Gültigkeit End- & Anfangswertsatz

End- & Anfangswertsatz gilt nur bei stabilen Systemen.

Endwertsatz

Laplace

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

falls $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existiert

Z-Transformation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

falls $X(z)$ nur Pole mit $|z| < 1$ oder bei $z = 1$

Anfangswertsatz

Laplace

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

falls $x(0^+)$ existiert

Z-Transformation

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Transformationen

Laplace

Signal $u(t)$	$\circ \rightarrow \bullet$ $U(s)$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(at)$	$\frac{a}{(s + \alpha)^2 + a^2}$

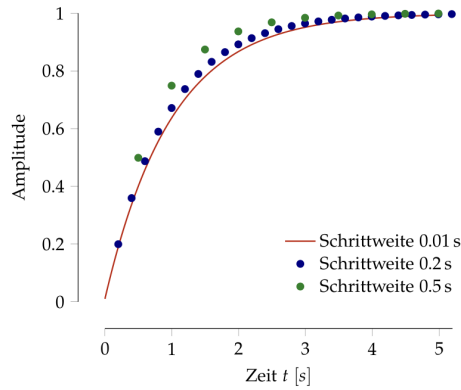
Signal $u(t)$	$\circ \rightarrow \bullet$ $U(s)$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(at)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + a^2}$

Z-Transformation

Signal $u[k]$	$\circ \rightsquigarrow \bullet$ $U(z)$
$\delta[k]$	1
$\sigma[k]$	$\frac{z}{z - 1}$
k	$\frac{z}{(z - 1)^2}$

Signal $u[k]$	$\circ \rightsquigarrow \bullet$ $U(z)$
$\delta[k - m]$	z^{-m}
a^k	$\frac{z}{z - a}$
$\frac{1}{k!}$	$e^{1/z}$

Euler Approximation



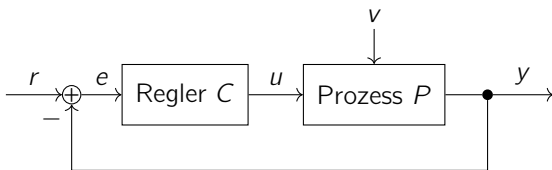
$$x(t+h) \approx x(t) + h \frac{dx}{dt} = x(t) + h \cdot f(x(t), u(t))$$

$$x[k+1] \approx x[k] + h \cdot f(x[k], u[k])$$

Systeme

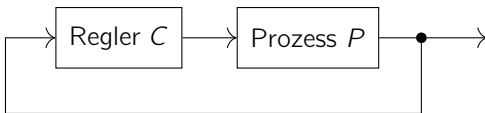
Grundlegende Systeme

Regler System

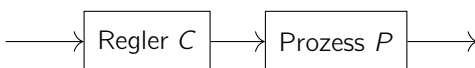


r : Führungsgrösse (Soll-Wert)
 e : Regelfehler
 u : Stell-/Steuergrösse
 y : Regelgrösse (Ist-Wert)
 v : Störgrösse

Geschlossenes System



Offenes System

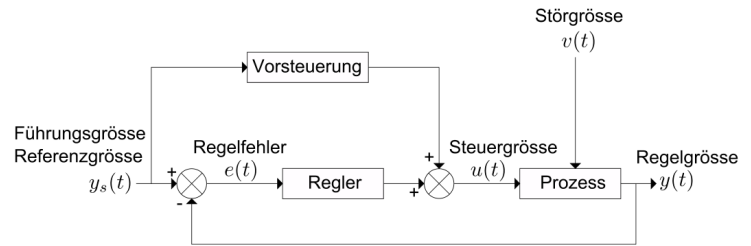


! Schleifenübertragungsfunktion

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).



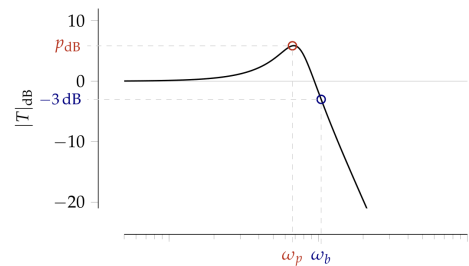
Minimalphasiges System

Liegen keine Pole oder Nullstellen in der rechten Halbebene, so spricht man von **minimalphasigen Systemen**. Amplituden- und Phasengang stehen in einer direkten Beziehung zueinander. Es gilt **nur bei minimalphasigen Systemen**:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d \log |G|}{d \log \omega}$$

Pro 20dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung $+90^\circ$, respektive -90° .

Führungsverhalten



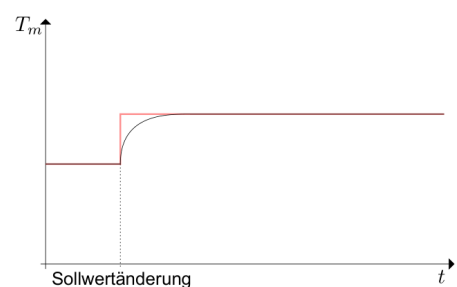
$$G_{yr} = T = \frac{PC}{1+PC} \quad \text{und} \quad G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

Merkmale

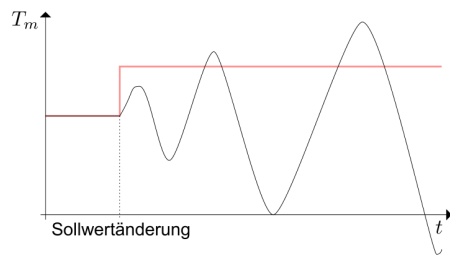
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**

Gutes Führungsverhalten



Instabilität



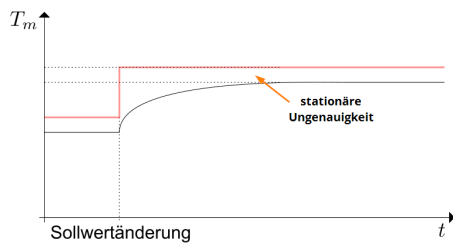
i Stationärer Fehler

Bei Rampe: $e_0 = 0$ Bei Parabel $e_0 = e_1 = 0$

Störverhalten

$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit



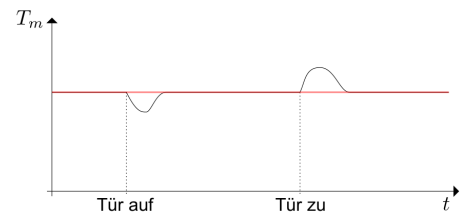
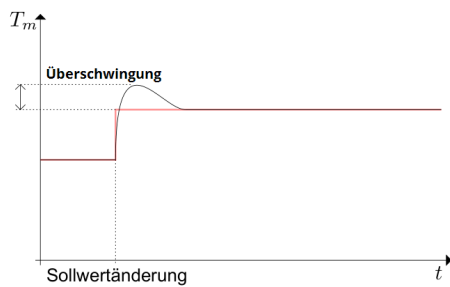
Merkmale

Das Störverhalten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes.**

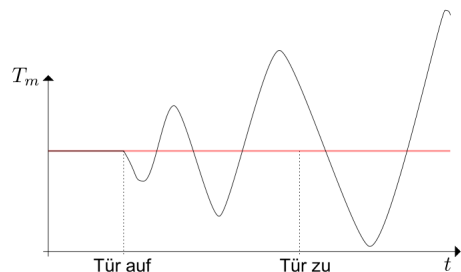
Gutes Störverhalten

Überschwingen

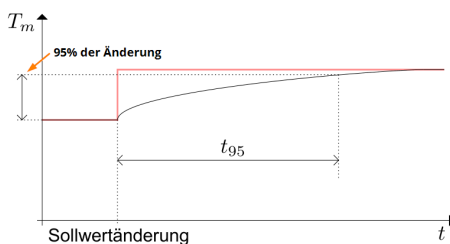


rot: Sollwert

Instabilität



Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes



Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrößen

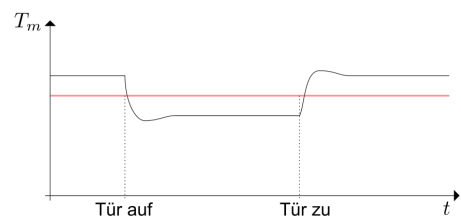
Der bleibende Fehler bei sich langsam oder nicht ändernden Führungsgrößen ergibt sich anhand des Verlaufs der Übertragungsfunktion bei tiefen Frequenzen.

$$G_{yr} \approx 1 - e_0 - e_1 \cdot s - e_2 \cdot s^2 - \dots$$

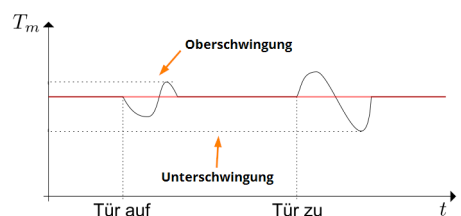
$$e = e_0 \cdot r + e_1 \cdot \dot{r} + e_2 \cdot \ddot{r} + \dots$$

Typ	r	e
Sprung	s_0	$e_0 s_0$
Rampe	$v_0 t$	$e_0 v_0 t + e_1 v_0$
Parabel	$a_0 t^2$	$e_0 a_0 t^2 + e_1 2a_0 t + e_2 2a_0$

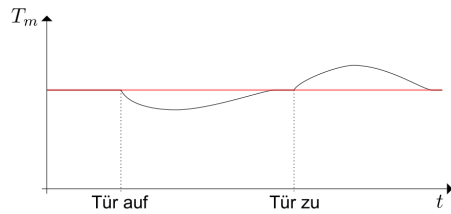
Stationärer Fehler / Ungenauigkeit



Überschwingen



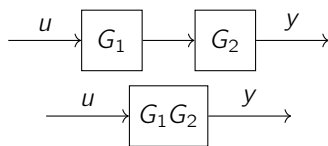
Langsames Erreichen des stationären Wertes



Darstellungsarten

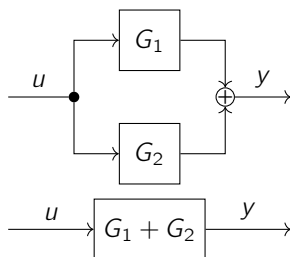
Blockdiagrammalgebra

Verkettung



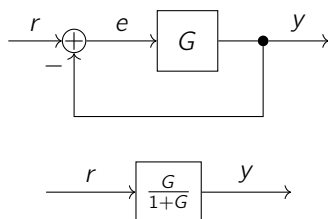
$$y = G_2(G_1 \cdot u) = (G_1 G_2) \cdot u$$

Parallel



$$y = G_1 \cdot u + G_2 \cdot u = (G_1 + G_2) \cdot u$$

Rückkopplung



$$\begin{aligned} y &= G \cdot e = G(r - y) \\ (1 + G) \cdot y &= G \cdot r \\ y &= \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{G_{yr}} \cdot r \end{aligned}$$

Regel von Mason

$$G_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

P_k = Vorwärtspfad k

$$\Delta = 1 - \sum \text{aller Loops}$$

+ \sum aller Produkte 2er Loops, die sich nicht berühren

- \sum aller Produkte 3er Loops, die sich nicht berühren

+ ...

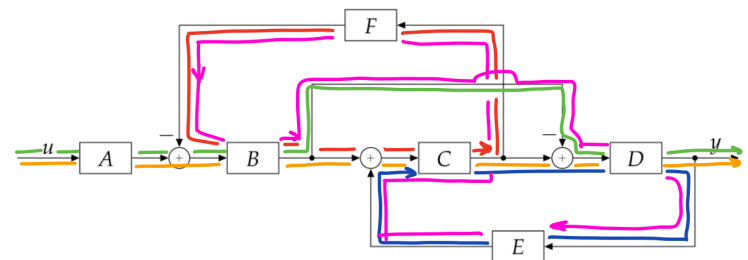
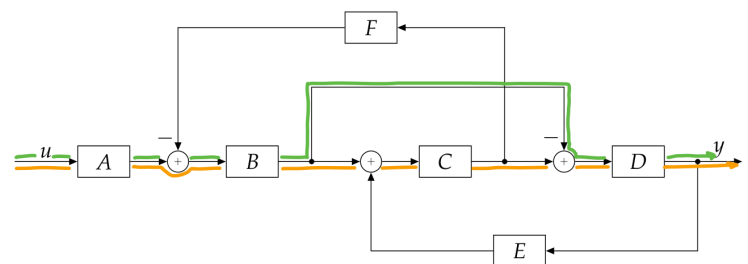
$$\Delta_k = 1 - \sum \text{aller Loops, die } P_k \text{ nicht berühren}$$

+ \sum aller Produkte 2er Loops, die P_k & sich nicht berühren

- \sum aller Produkte 3er Loops, die P_k & sich nicht berühren

+ ...

Beispiel



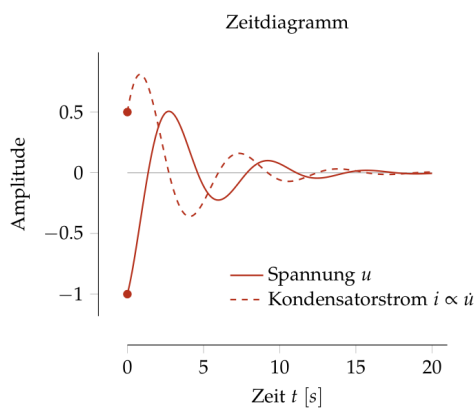
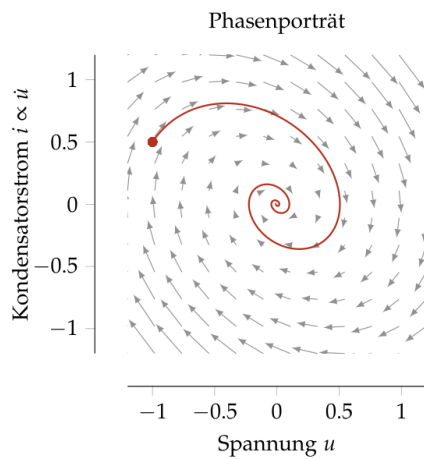
$$P_1 = ABCD \quad \Delta_1 = 1 - 0 \quad P_2 = ABD \quad \Delta_2 = 1 - 0$$

$$\Delta = 1 - ((-BCF) + CDE + ((-B)(-D)(CEF)))$$

$$G_{uy} = \frac{ABD(1 + C)}{A + BCF - CDE - BCDEF}$$

Zustandsraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträt* kann das System *visualisiert* werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträt den zeitlichen Verlauf verfolgen.



$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

\mathbf{A} : beschreibt Dynamik
 \mathbf{B} : beschreibt Steuereinfluss
 \mathbf{C} : beschreibt Messung
 \mathbf{D} : beschreibt Durchgriff

Übertragungsfunktion

Wird als Eingangssignal u

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

gegeben, ergibt sich folgendes Ausgangssignal

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{\text{stationär } y_s} e^{st}$$

Übertragungsfunktion

i Hinweis

Ist \mathbf{A} stabil, so geht der transiente Anteil y_t asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion.

Autonomes, zeitinvariantes System

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)} \xrightarrow{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

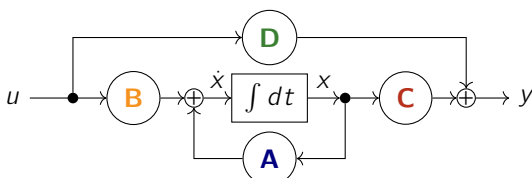
Allgemeine Systeme

$$u \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{matrix}} \rightarrow y$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.



Dynamik

Lösen von Differential Gleichungen

! Lösung einer Differentialgleichung

$$x(t_0) = x_0 \quad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

Gleichgewichtslage

Eine Gleichgewichtslage ist ein Zustand in dem das System stabil ist. Dies ist auch bekannt als stationäres Verhalten und weist keine Veränderungen auf mit der Zeit.

x_e ist eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems $\frac{dx}{dt} = F(x)$ falls:

$$F(x_e) = 0 \rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_e} = 0$$

Testfunktion Sprungantwort

Anhand folgender Funktion kann die Sprungantwort eines Systems angegeben werden.

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Die Antwort setzt aus einem *zeitabhängigen* und einem *konstanten* Teil zusammen.

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{zeitabhängig}} - \underbrace{CA^{-1}B + D}_{\text{konstant}} \quad t > 0$$

Das System strebt gegen Wert wenn A asymptotisch stabil ist \rightarrow der *zeitabhängige* Teil strebt, falls A asymptotisch stabil ist, der Gleichgewichtslage $x = 0$ zu. Der *konstante* Teil entspricht dem Wert bei $\omega \rightarrow 0$ und damit der *Gleichspannungsverstärkung*.

Stabilität

Allgemein

Die Stabilität ist in drei Zustände eingeteilt.

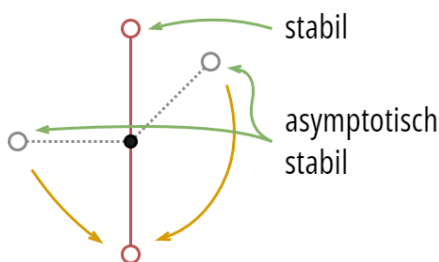
- **stabil**, falls alle Zustände in der Nähe der Gleichgewichtslage x_e zu Lösungen führen.
- **asymptotisch stabil**, falls alle Zustände in der Nähe von x_e nach langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) in x_e enden.
- **instabil**, falls der Zustand nie eine Gleichgewichtslage erreicht.

Stabilität ist im Allgemeinen eine *lokale* Eigenschaft innerhalb eines Bereiches des Zustandsraums!

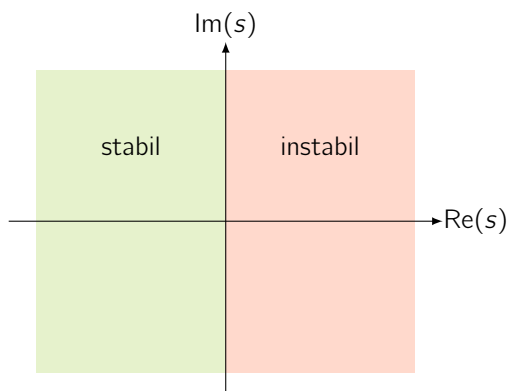
i Beispiel

Ein Pendel, welches die gesamte Rotationsachse (360°, rundherum) ausnützen kann, hat zwei Gleichgewichtslagen:

- **stabile** Position oben
- **asymptotische stabile** Positionen, welche immer nach unten verlaufen.



Linearer Systeme



Polstellen eines linearen Systems ($\frac{dx}{dt} = Ax$ & $x(0) = x_0$) können mit dem *charakteristischen Polynom* berechnet werden.

! charakteristisches Polynom

Die Nullstellen von λ werden mit der Dynamik-Matrix A berechnet. Diese entsprechen dem Nennerpolynom $C(sI - A)^{-1}$

$$\lambda(A) := \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$

🔥 Gültigkeit

Stabilität linearer Systeme ist nur von A abhängig, nicht vom Anfangswert x_0 . Dies gilt Global!

Ebenfalls sind stabile lineare Systeme **global** gültig.

Linearisierung

Ist das linearisierte System asymptotisch stabil, so ist das nicht-lineare System in der **Umgebung der Gleichgewichtslage** ebenfalls asymptotisch stabil.

Hurwitz-Kriterium

🔥 Vorsicht

GESCHLOSSENER KREIS VERWENDEN!

! Hurwitz-Kriterium

Die Polstellen-Gleichung $\lambda(s)$ mit $a_0 > 0$ hat dann, und nur dann, ausschliesslich Lösungen mit negativen reellen Teilen, falls alle Unterdeterminante der Hurwitz-Matrix positiv sind: $\det H_n > 0$

$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{n_P \cdot n_C}{d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C}$$

$$C = \frac{n_C}{d_C} \quad P = \frac{n_P}{d_P}$$

n_C : Zähler (*numerator*) des Reglers C
 d_C : Nenner (*divider*) des Reglers C
 n_P : Zähler (*numerator*) des Prozess P
 d_P : Nenner (*divider*) des Prozess P

$$\lambda = d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C$$

$$\lambda(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

💡 Tipp

- Bei $n \leq 2$ genügt die Bedingung, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen.
- $\det H_n = a_n \cdot \det H_{n-1}$ – Wird nicht immer verwendet (nur bei Spalte Wert unten rechts, Rest der Spalte 0).
- Fehlt ein Koeffizient oder ist dieser negativ, so ist die Bedingung nicht erfüllt

$$s^3 + 2s^2 + 10 \rightarrow \text{instabil, da } 0 \cdot s$$

🔥 Was mit Hurwitz nicht möglich ist

Das Hurwitz-Kriterium beschreibt keine *Robustheit* der Stabilität und erlangt keine Einsicht, wie der Regler $C = \frac{n_c}{d_c}$ gewählt werden sollte.

Beispiel

$$\lambda = 8s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2 = a_0s^4 + a_1s^3 + \cdots + a_4$$

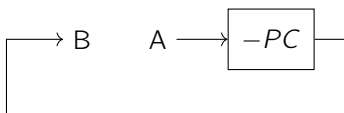
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det H_1 = 2 > 0 \quad \checkmark$$

$$\det H_2 = 2 - 24 = -22 > 0 \quad \times$$

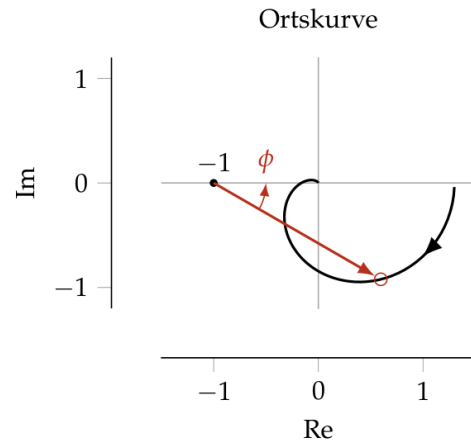
Nyquist

Wenn $L(s) = -1$, so kann eine stationäre Schwingung eingestellt werden!



$$B = -P(s)C(s) \cdot A \Rightarrow \underline{P(s)C(s) = -1}$$

Allgemein – Variante Winkeländerung



$$\Delta\phi = a \frac{\pi}{2} + r\pi \hat{=} a \cdot 90^\circ + r \cdot 180^\circ$$

a : Anzahl Pole auf der Im -Achse

r : Anzahl Pole rechts der Im -Achse

Nur bei $\Delta\phi \geq 0^\circ$ ist der *geschlossene* Kreis **stabil**.

! Offen stabile Systeme

Systeme, welche offen stabil sind, müssen der Bedingung $\Delta\phi = 0$ genügen.

Das Kriterium ist ebenfalls anwendbar, wenn die Ortskurve experimentell ermittelt wurde.

i Totzeit

Die Bedingung gilt auch für Systeme mit Totzeit

Allgemein – Variante Umläufe

Das System G_{yr} ist stabil wenn $P = U$

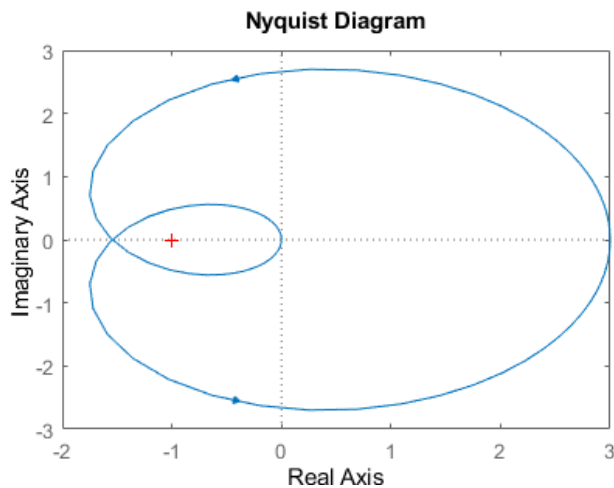
P : Anzahl instabiler Polstellen von $L(s)$

U : Anzahl Umläufe der Nyquist-Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [-\infty, \infty]$ um

Beispiel

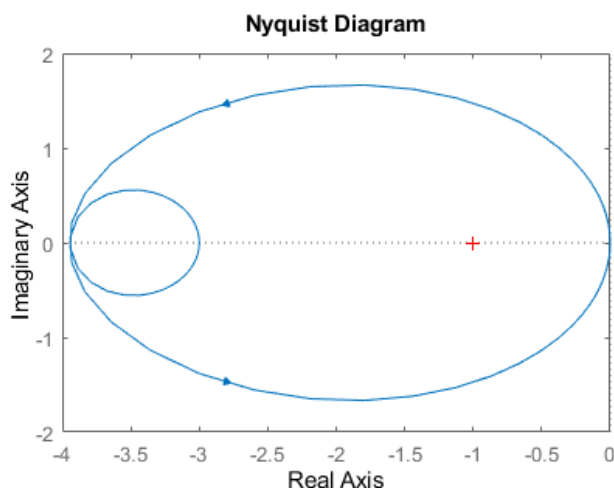
$$L(s) = \frac{9(s+2)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$

Stabilitätsreserve / Robustheit



→ $P = U = 2$: stabil

$$L(s) = \frac{18(s-1)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$



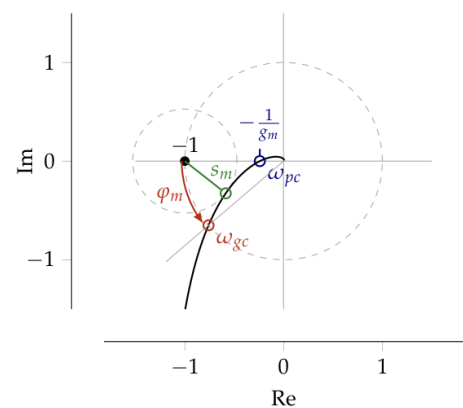
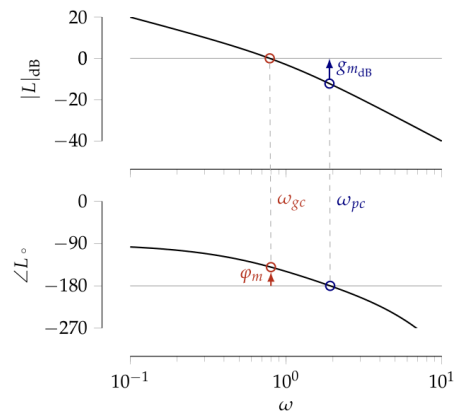
→ $P = 2, U = 1$: instabil

Einfach – Variante Links liegen

Für Systeme mit maximal zwei instabilen Polen im Ursprung (aber keinen weiteren instabilen Polen) genügt die Bedingung, dass der Punkt $(-1, 0)$ links liegen gelassen wird, wenn entlang der Ortskurve $\omega : 0 \rightarrow \infty$ verfahren wird.

Einfach – Variante Umläufe

Das System G_{yr} ist stabil, wenn die Nyquist Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [0, \infty]$ den Punkt $(-1, 0)$ **nicht** umläuft.

Phasenreserve φ_m

Eintritt in den Einheitskreis → *gain crossover*

$$\omega_{gc} : |L(j\omega_{gc})| = 1$$

Abstand zu -1 wird mit Phasenreserve φ_m ausgedrückt

$$\varphi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

Amplitudenreserve g_m

Überschreiten der negativen *Re*-Achse → *phase crossover*

$$\omega_{pc} : \angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$$

Abstand zu -1 wird durch die Amplitudenreserve g_m ausgedrückt.

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$

Wird die Achse nicht überschritten, so ist $g_m \rightarrow \infty$

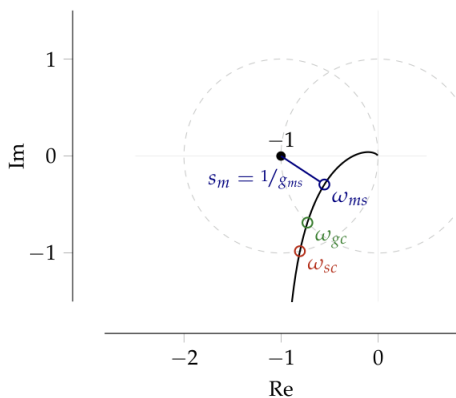
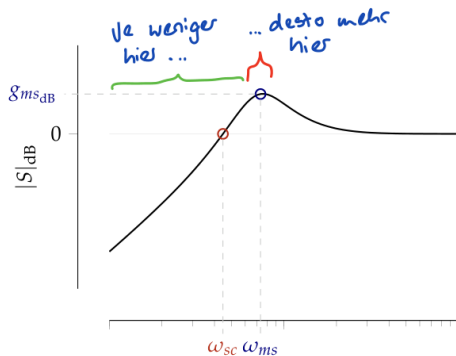
→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

Stabilitätsreserve s_m

Kleinsten Abstand zum Punkt -1

Der Wert kann von der Ortskurve abgelesen werden oder entspricht dem Maximum der Sensitivitätsfunktion S .

$$\omega_{ms} = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} |S(j\omega)| \quad s_m = \frac{1}{|S(j\omega_{ms})|} = \frac{1}{g_{ms}}$$

**i Praxiswerte**

Folgende Werte dienen als *Boilerplate* für die Reglerauslegung

$$\varphi_m \approx 30^\circ - 60^\circ$$

$$g_m \approx 2 - 5$$

$$s_m \approx 0.5 - 0.8$$

$$\omega_{gc} \approx \frac{1}{\tau} : \tau \text{ von Sprungantwort}$$

Modellierung**! Vereinfachung**

Modelle repräsentieren immer eine Vereinfachung des eigentlichen Systems und fokussiert daher immer auf ein

Teil des Systems.

Beispiel: Die Modellierung des Tempomats konzentriert sich mehr auf die Geschwindigkeit des Fahrzeugs als auf die Auswirkungen eines Atombombeneinschlags auf das Fahrzeug.

Identifikation

...welche Klasse – Ausgehend von einem LTI-System sind der Grad von Zähler- und Nennerpolynom festzulegen. Zudem sind allfällige Totzeiten zu berücksichtigen.

...welche Eingangssignale – Das zu testende System muss hinreichend mit einem Signal angeregt werden → Diracstöße, Sprungfunktionen, Rampen und harmonische Funktionen

...was meint 'gleichwertig' – Da Ein- & Ausgangsgrößen beobachtet werden, kann y des zu testenden Systems und \hat{y} des zu vergleichenden Modells verglichen werden. Mit dem resultierenden Fehler $\epsilon = y - \hat{y}$ können Grenzen festgelegt werden.

...wie kann ein Modell gefunden werden – Trial & Error mit Sprungantwort und Bodediagramm.

Methode der kleinsten Quadrate

Mit dieser Methode können Parameter anhand Messwerten bestimmt werden.

$$\underbrace{y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_n y[k-n]}_{A(z^{-1})y} = \underbrace{b_1 u[k-1] + \dots + b_n u[k-n]}_{B(z^{-1})u}$$

$$\beta^T = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

$$\epsilon = A(z^{-1})y - B(z^{-1})u = \underbrace{y}_{\text{Gemessen}} - \underbrace{\Phi\beta}_{\text{Modell}}$$

$$y = \begin{pmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[n+N] \end{pmatrix}$$

Prozess

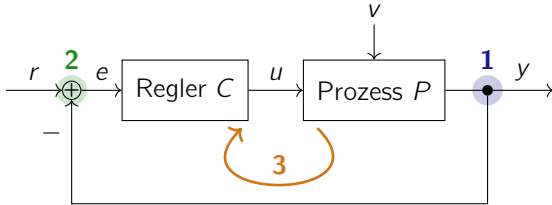
$$\Phi = \begin{pmatrix} -y[n] & -y[n-1] & \dots & -y[1] & u[n] & u[n-1] & \dots & u[1] \\ -y[n+1] & -y[n] & \dots & -y[2] & u[n+1] & u[n] & \dots & u[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y[n+N-1] & -y[n+N-2] & \dots & -y[N] & u[n+N-1] & u[n+N-2] & \dots & u[N] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

Regelung

Feedback Control

Ziel eines Reglers ist die Angleichung einer Regelgrösse y an eine Führungsgrösse r , sodass idealerweise $y = r$.

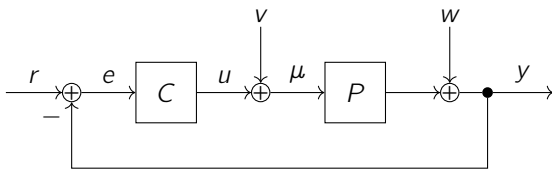


Merkmale einer Regelung

Folgende Merkmale **muss** eine Regelung aufweisen, ansonsten ist es keine Regelung.

1. Erfassung (Messen) der Regelgrösse
2. Vergleich von Regel- und Führungsgrösse
3. Geschlossener Wirkungskreis

Sensitivitätsfunktionen



'Gang of Four'

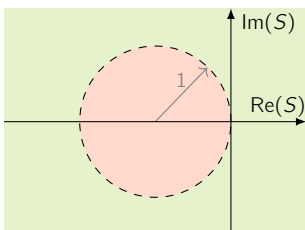
Das Verhalten der Regelung kann durch die folgenden vier Sensitivitätsfunktionen beschrieben werden.

Sensitivity Function

$$G_{er} = S = \frac{1}{1 + PC}$$

i Bedeutung

Sensitivitäts-Übergangsfrequenz ω_{sc} kennzeichnet den Übergang von Dämpfung zur Verstärkung



$$|S(j\omega)| < 1 \quad \text{Dämpfung}$$

$$|S(j\omega)| > 1 \quad \text{Verstärkung}$$

Load Sensitivity Function

$$G_{vy} = PS = \frac{1}{1 + PC}$$

Complementary Sensitivity Function

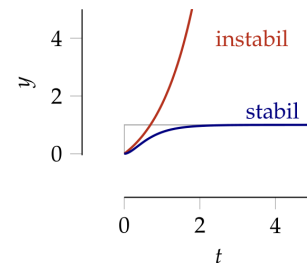
$$G_{yr} = T = \frac{1}{1 + PC} \stackrel{!}{=} 1$$

Noise Sensitivity Function

$$G_{ur} = CS = \frac{C}{1 + PC}$$

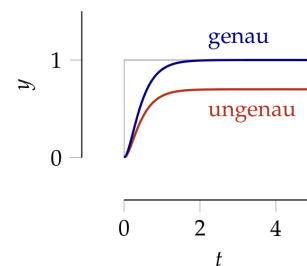
Anforderungen

Stabilität



- binäres Kriterium und zwingend zu erfüllen
- Für lineare Systeme gilt dies **global**, egal welcher AP
- Die Stabilität kann anhand des Polnullstellendiagramms beurteilt und mit Hurwitz & Nyquist untersucht werden

Stationäre Genauigkeit

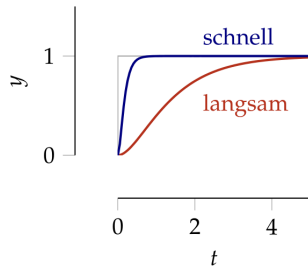


- Beschreibt bleibender Fehler, nach Abklingung der transienten Vorgänge
- Gutes Mass ist stationärer Regelfehler e

$$e = \frac{1}{1 + PC} r + \frac{-P}{1 + PC} v + \frac{-1}{1 + PC} w$$

$$e_{stationr} = \frac{1}{1 + PC} \Big|_{s=0} \cdot r_0 + \frac{-P}{1 + PC} \Big|_{s=0} \cdot v_0 + \frac{-1}{1 + PC} \Big|_{s=0} \cdot w_0$$

Schnelligkeit



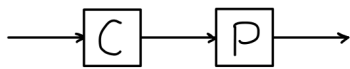
- Für Charakterisierung des dynamischen Verhaltens wird **Gesamtregelkreis** betrachtet in Bezug auf Führungsgrösse

$$y = \frac{PC}{1 + PC} r$$

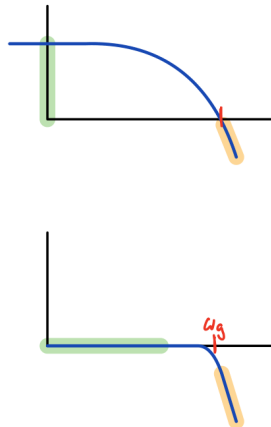
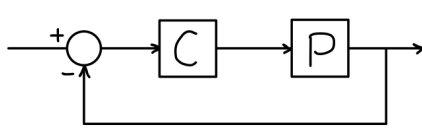
- Als Kriterium dient die Grenzfrequenz $\omega_g \rightarrow$ Beschreibt ab wann das Verhalten deutlich degradiert ($\omega_g < \omega$)

$$\omega_g : |L(s)|_{s=j\omega_g} \approx 1$$

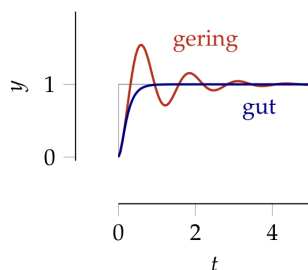
offener Kreis



geschlossener Kreis



Dämpfung



- Unterdrückung von schwingenden Signalteilen, welche Anzeichen von Instabilität sind
- Gutes Mass ist die Phasenlage im Bereich von ω_g

Eigenschaften

Robustheit

Robustheit bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.

Robustheit gegenüber Unsicherheit \rightarrow Standhaltung gegenüber Störungen

Dynamik

Die *Dynamik* eines Systems kann durch eine Regelung beeinflusst und verändert werden.

- Instabile Systeme \rightarrow stabil
- Träges System \rightarrow schnell
- Abdriftende System \rightarrow konstant.

Abhängigkeit

Viele Systemeigenschaften sind nicht unabhängig voneinander. Sie unterliegen von Natur aus bestimmten Beschränkungen

- Stabiles Flugverhalten \rightarrow keine hohe Manövrierbarkeit

!! Regelungen können helfen, diese Abhängigkeiten teilweise aufzuheben!

Safety Critical

Werden instabile Systeme mittels Regelung stabilisiert, so wird die Regelung kritisch für die Sicherheit des Systems.

Modularität

In einem modularen System sind die einzelnen Module möglichst unabhängig voneinander \rightarrow Module können einfach ersetzt oder erweitert werden.

- Wohldefinierte Ein-/Ausgänge, Beziehungen dazwischen \rightarrow Verhalten unabhängig von äusseren Umständen \rightarrow ebenfalls Ziel von Regler

Mittels Regelung lassen sich Komponenten unabhängiger und damit zusammengesetzte Systeme Modularer machen.

Genauigkeit

Mit Regelung können unerwünschte Störeinflüsse ausgeglichen werden \rightarrow Verbessert Genauigkeit und Auflösung (z.B. bei Sensoren).

Anwendungen

Ein Konzept einer hohen Genauigkeit ist, mittels Regelung wird ein bestimmten und wohldefinierten Arbeitspunkt ausgeregt und dabei aufgewendete Stellgrösse als Messgrösse des Sensors interpretiert dies.

Beispiel: Seismographen, sehr präzise Waagen

Herausforderungen

Regelungen bringen viele Vorteile, aber auch einige Nachteile:

Gefahr der Instabilität – Auch geregelte Systeme haben einen Kipppunkt, wo die Mitkopplung dominant wird und zur Instabilität führt. Ziel einer Regelung ist das System unter allen Umständen stabil zu halten (nicht nur unter Normalbedingung sondern auch unter allen Störeinflüssen \rightarrow anspruchsvoll).

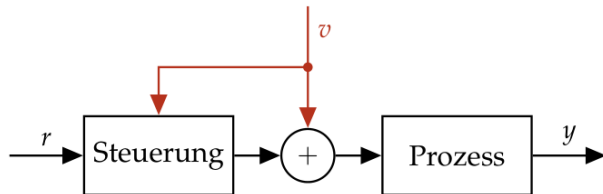
Beispiel: Mikrophonverstärkung bei Beschallungsanlage zu weit aufgedreht → pfeifen

Messfehler – Jede Regelgrösse wird messtechnisch verfasst → verbundene Messfehler gehen in Systemverhalten ein (betrifft statische Fehler, dynamische Fehler, wie Rauschen)

Komplexität – Die Implementation eines Regelsystems bei hoher Komplexität wird anspruchsvoller und mit entsprechendem Aufwand verbunden.

Steuerung

Feedforward Control



P-Regler

$$C(s) = k_p \quad u = k_p \cdot e$$

Achtung

$e = 0$ ist mit einem P-Regler nicht möglich. Unter Annahme eines stabilen Regelkreises:

$$G_{er} = \frac{1}{1 + P \cdot C} = \frac{1}{1 + P \cdot k_p}$$

entsteht ein bleibender Fehler von:

$$G_{er}(0) = \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} = \frac{1}{1 + P(0) \cdot k_p}$$

Dies kann mit einer Vorsteuerung korrigiert werden, was aber Störeinflüsse nicht ausschliesst:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + u_{ff} = k_p \cdot e(t) + \frac{r}{P(0)}$$

Besser ist ein PI-Regler

PI-Regler

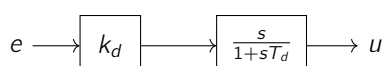
$$C_{PI} = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad u = k_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$$

PD-Regler

$$C_{PD} = k_p \cdot (1 + T_d \cdot s) \quad u = k_d \frac{de}{dt}$$

Filter D-Anteil

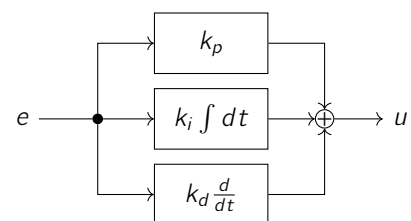
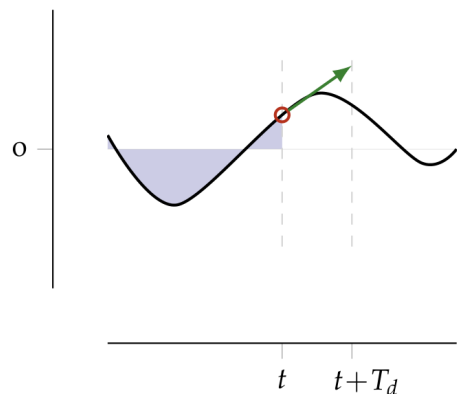
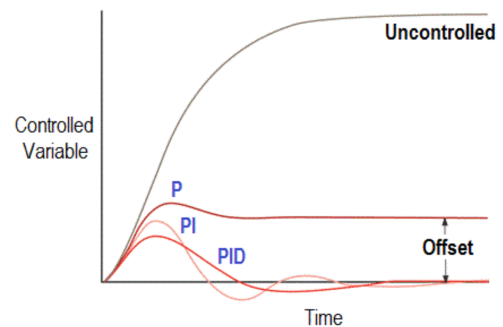
Hochfrequente Änderungen (z.B. Sprungantworten) führt zu hohem D-Anteil → Erweiterung TP-Filter



Für tiefe Frequenzen ($|s| \ll \frac{1}{T_d}$) wird $G_{ue} \approx k_p T_d s$ und hohe Frequenzen wird $G_{ue} \approx k_p$ (limitiert durch k_p)

$$C_D(s) = k_p \frac{T_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d} = \underbrace{k_d \cdot s}_{\text{D-Anteil}} \underbrace{\frac{1}{1 + s \cdot T_d}}_{\text{Filter}}$$

PID-Regler



$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = k_p \cdot \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{T_i \cdot s}$$

$$= \underbrace{k_p \cdot e}_{\text{P}} + \underbrace{\frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I}} + \underbrace{k_p \cdot T_d \frac{de}{dt}}_{\text{D}}$$

k_p : Reglerverstärkung
 $T_i = k_p/k_i$: Nachstellzeit
 $T_d = k_d/k_o$: Vorhaltzeit

! Wichtig

Diese Beschreibung ist nur eine idealisierte Repräsentation, welche für das Verständnis des System hilfreich ist. Im praktischen Einsatz sind Modifikationen notwendig.

Proportional k_p

P-Anteil verstärkt den Regelfehler e um die *Proportionalverstärkung* k_p .

$$C(s) = k_p \quad u = k_p \cdot e$$

! Proportionalband

$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{falls } e \geq e_{\max} \\ k_p \cdot e & \text{falls } e_{\min} < e < e_{\max} \\ u_{\min} & \text{falls } e \leq e_{\min} \end{cases}$$

mit

$$e_{\min} = \frac{u_{\min}}{k_p} \quad e_{\max} = \frac{u_{\max}}{k_p}$$

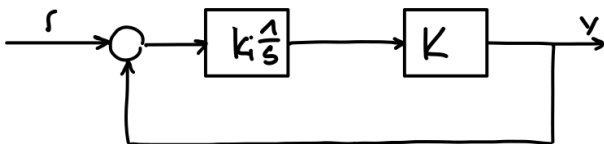
Integral k_i, T_i

Mit dem I-Anteil werden *vergangene* Fehler mitberechnet → stationäre Fehler des P-Anteils wird korrigiert.

Die Stellgröße wird dadurch solange geregelt, bis der Regelfehler $e = 0$ wird.

Differential k_d, T_d

Der D-Anteil reagiert auf *zukünftige* Fehler, indem die Steigung mit einem Verstärkungsfaktor k_d verstärkt wird.

Auslegung anhand...**... Modelle geringer Ordnung****Approximation 0-er Ordnung**

Für einen statischen Prozess $K = P(0)$ und einen I-Regler wird $L = PC = K \cdot \frac{k_i}{s}$:

$$G_{yr} = \frac{K \cdot k_i}{s + K \cdot k_i} = \frac{1}{1 + s \cdot T_{cl}}$$

$$k_i = \frac{1}{T_{cl} \cdot K} = \frac{1}{T_{cl} \cdot P(0)}$$

! mittlere Verzögerungszeit

Die Auslegung bedingt, dass der Prozess gut durch eine Konstante beschrieben werden kann. Ein vernünftiges Kriterium dafür ist die Bedingung:

$$T_{cl} > T_{ar} \quad T_{ar} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$

T_{ar} : mittlere Verzögerungszeit

T_{cl} : Zeitkonstante des geschlossenen Kreises

T_{ar} beschreibt die Zeit, bis die Sprungantwort des Systems sich gesetzt hat.

Approximation 1-ter Ordnung

Näherung erster Ordnung kann folgendes Modell gewählt werden.

$$P \approx P(0) + P'(0)s \approx \frac{P(0)}{1 + sT_{ar}}$$

... Bodediagramm

Diese Auslegung wird mit dem **offenen** Regelkreis gemacht.

$$C(s) = k_i \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s} = k_p \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{s \cdot T_i}$$

Zielgrößen: Durchtrittsfrequenz ω_{gc} , die Phasenreserve φ_m und allenfalls Amplitudenreserve g_m .

! Vorgehen

Prozess: $P(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$ mit Ziel $\omega_{gc} \geq 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\varphi_m \geq 50$.

1. P-Regler für Erreichung von ω_{gc} . Mit $|k_p \cdot P(j\omega_{gc})| = 1$ (Nyquist-Kriterium) folgt:

$$k_p = \frac{1}{\left| \frac{10}{1+10j} \right|} = \frac{(\sqrt{1^2 + 10^2})^2}{10} = 10.1$$

$$C(s) = k_p = 10.1$$

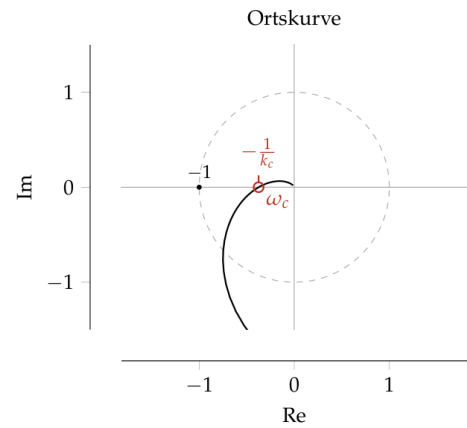
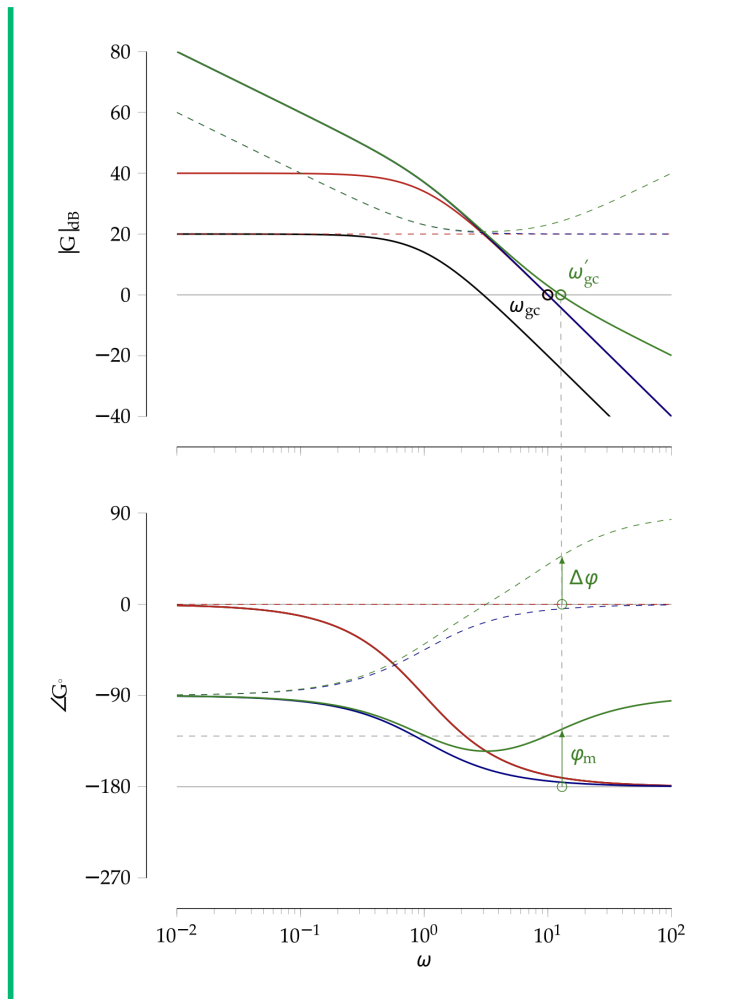
2. PI-Regler für Reduktion der zusätzlichen Phasensenkung im Bereich von ω_{gc}

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)}{s} = \frac{10 \cdot (1 + s)}{s}$$

1. PID-Regler für genügend Phasenabhebung im Bereich von ω_{gc}

$$\begin{aligned} C(s) &= k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s} \\ &= 10 \cdot \frac{(1 + s)(1 + 0.1s)}{s} \end{aligned}$$

4. Kontrolle von resultierenden Durchtrittsfrequenz ω'_{gc} und damit ergebenden Phasenreserve φ_m .



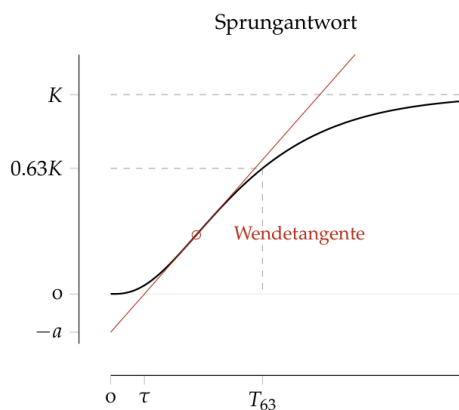
Typ	k_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot k_c$	—	—
PI	$0.4 \cdot k_c$	$0.8 \cdot T_c$	—
PID	$0.6 \cdot k_c$	$0.5 \cdot T_c$	$0.125 \cdot T_c$

Stellgrößen-Sättigung

⚠ Sättigungseffekt

Arbeitet der Regelkreis in der Sättigung, so ist dieser faktisch unterbrochen – *das System arbeitet als offener Kreis*, solange der Aktor im gesättigtem Zustand ist.

... Einstellregeln im Zeitbereich



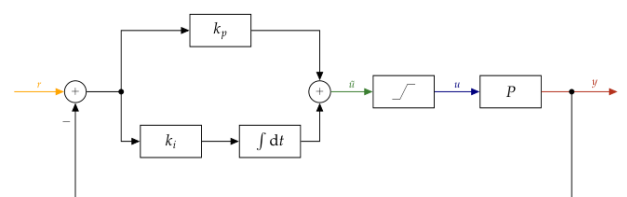
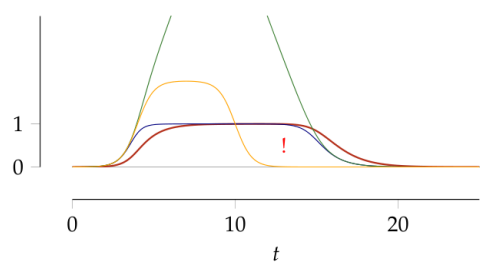
Typ	k_p	T_i	T_d
P	$1/a$	—	—
PI	$0.9/a$	$3 \cdot \tau$	—
PID	$1.2/a$	$2 \cdot \tau$	$0.5 \cdot \tau$

... Einstellregeln im Frequenzbereich

Verstärkung k erhöhen, bis sich eine anhaltende Schwingung einstellt. Regelparameter anhand kritischer Verstärkung k_c & Periodendauer T_c ermitteln.

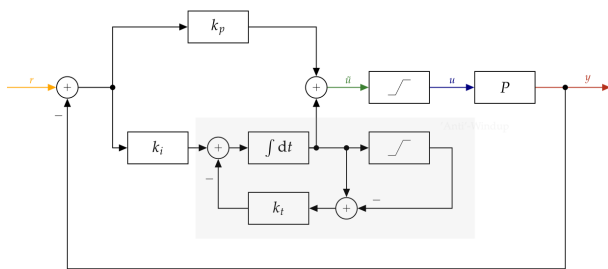
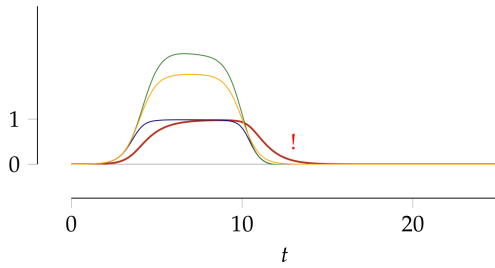
Windup

Bei Sättigung baut Fehler den I-Anteil auf. Muss nach Erholung abgebaut werden.

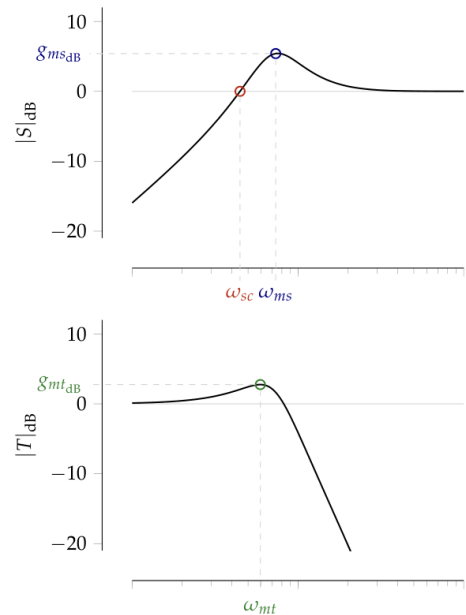


Anti-Windup

Exzessiver Anteil wird mit einem invertierten Vorzeichen an den Integrator zurückgeführt und somit der Windup klein gehalten → kürzere *Erholzeit* nach Stellgrössensättigung



$$k_t \approx 10k_i$$



Lag & Lead Kompensatoren

$$C(s) = k \cdot \prod_i \left(\frac{s + a_i}{s + b_i} \right)$$

Mit $a_i > 0, b_i > 0, k > 0$

i PI-Regler & D-Anteil

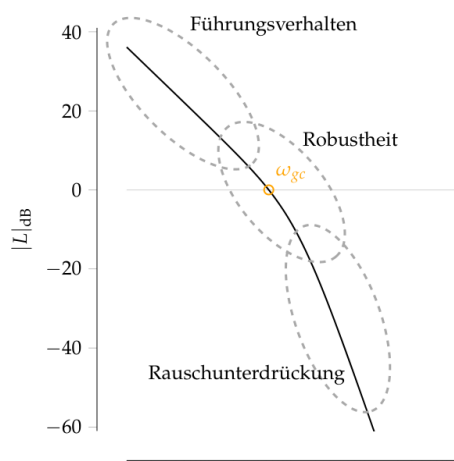
PI Regler $\rightarrow b = 0$

D-Anteil mit Beschränkung $\rightarrow a = 0$

Loop Shaping

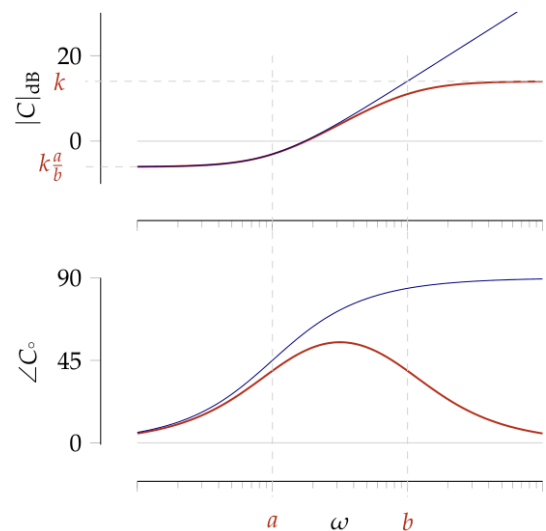
! Verlauf von $|L|$

$\omega < \omega_{gc}$ möglichst gross
 $\omega \approx \omega_{gc}$ möglichst flach
 $\omega > \omega_{gc}$ möglichst klein



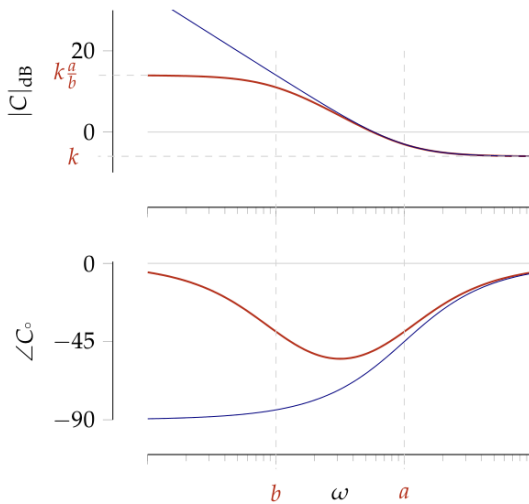
Lead ($a < b$)

Verstärkung bei hohen Frequenzen + Phasenhebung (max 90° pro Ordnung)



Lag ($a > b$)

Verstärkung bei tiefen Frequenzen + Phasensenkung (max -90° pro Ordnung)



Grenzen des Loop-Shapings

Der Beeinflussung des Systemverhalten durch Regelung sind bestimmte Grenzen gesetzt. Verhalten kann nicht uniform verbessert werden.

i Bode's Integral

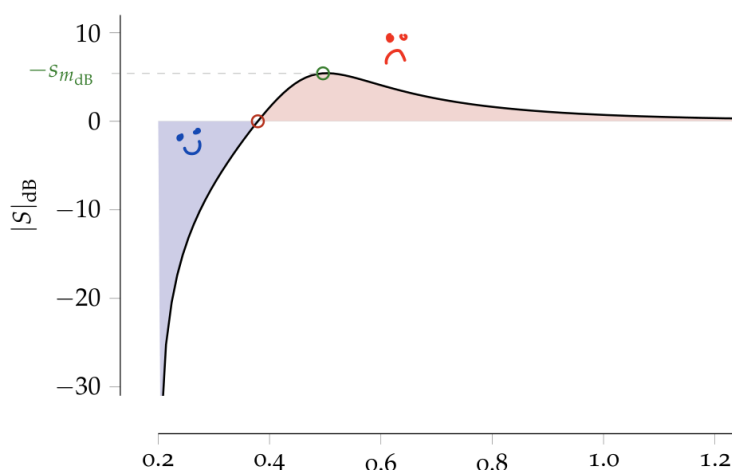
Ist der geschlossene Regelkreis mit L stabil und geht $sL(s)$ für $s \rightarrow \infty$ gegen null, dann ist

$$\int_0^{\infty} \log|S(j\omega)| d\omega = \pi \sum p_k$$

wobei p_k die Pole in der rechten Halbebene sind. Ist L an sich stabil, so gilt

$$\int_0^{\infty} \log|S(j\omega)| d\omega = 0$$

Alle Verbesserungen werden mit Verschlechterungen komplementiert.



Diskretisierung

PID-Regler

Auslegung

Digitalrechner arbeiten zeitdiskret \leftrightarrow Prozesse sind von zeitkontinuierlicher Natur

i Perspektiven für Entwurf zeitdiskrete Regler

1. Prozess:
2. Regler:

MATLAB

Vektoren

Vektoren werden mit `[...]` deklariert. Elemente werden Spaltenweise mit einem Leerschlag ' ' oder Komma , eingeteilt und mit einem Semikolon ; Reihenweise geteilt.

```
data = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]; % same as [1 2 3;4 5 6;7 8 9];
```

i Grösse size

Mit `size` kann die Grösse einer Variable ermittelt werden. `size` gibt als Resultat ein 1x2 Vektor zurück (`[Rows Columns]`)

```
>> a = 1
>> size(a)
     1     1 % rows, columns
```

```
a = 1
```

`[1]` oder einfach `1`

Die `size`-Funktion gibt auch bei einzelnen Werte eine Grösse aus, nämlich `[1 1]`

```
b = [1 2 3] % Linienvektor
```

`[1 2 3]`

```
c = [2;3;4] % Spaltenvektor
```

`[2;3;4]`

💡 Slicing

Mit *Slicing* kann ein Teil einer Matrix **kopiert** werden und einer anderen Variable zugewiesen werden.

```
<matrix>(<rowStart>:<rowEnd>,<colStart>:<colEnd>)
```

Plotting

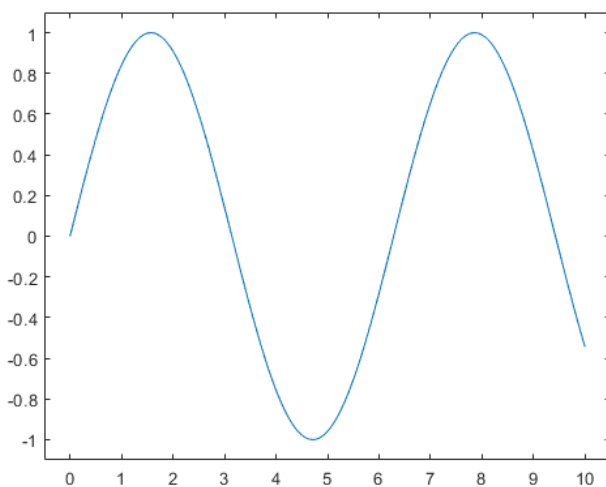
i Figure-Separierung

Mit `figure(n)` können mehrere Plot-Befehle in eigene Figuren geladen werden.

XY-Graph

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;
y = sin(t);

plot(t,y);
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);
```



XYY-Graph

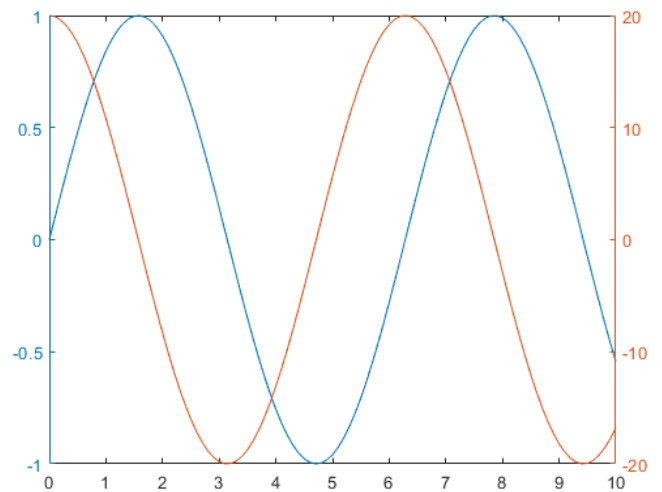
Mit `yyaxis` kann die Y-Achse beim selben Plot mit left & right gewechselt werden.

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;

yyaxis left;
plot(t, sin(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);

yyaxis right;
```

```
plot(t, 20*cos(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-20.5 20.5]);
```

Transferfunktion `tf(...)`

Mit dem Befehl `tf(...)` kann eine Transferfunktion deklariert werden mit Zähler- und Nenner-zeilenvektoren.

```
sys = tf(numerator,denominator);
```

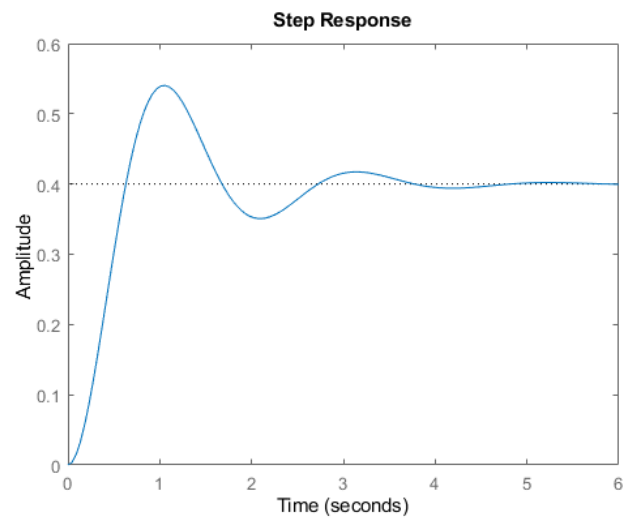
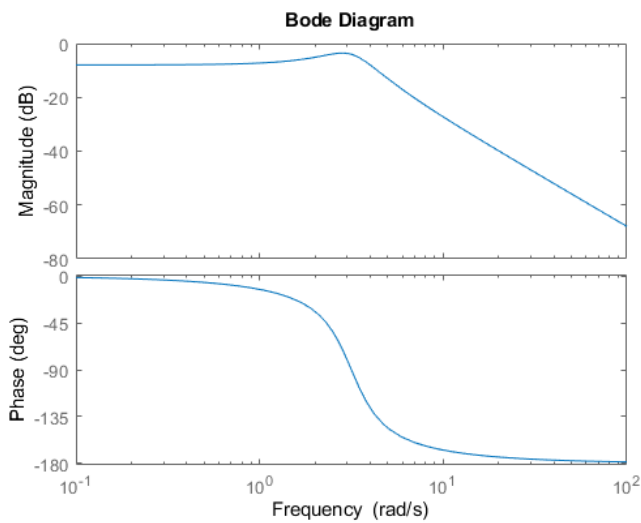
Die Transferfunktion kann in anderen Funktion wiederverwendet werden, wie zum Beispiel `step` oder `bode`. Folgende Beispiele sind mit der `sys`-Transferfunktion (folgende Gleichung) gemacht.

$$G_{\text{sys}}(s) = \frac{4}{s^2 + s + 10}$$

```
sys = tf(4,[1 2 10]);
```

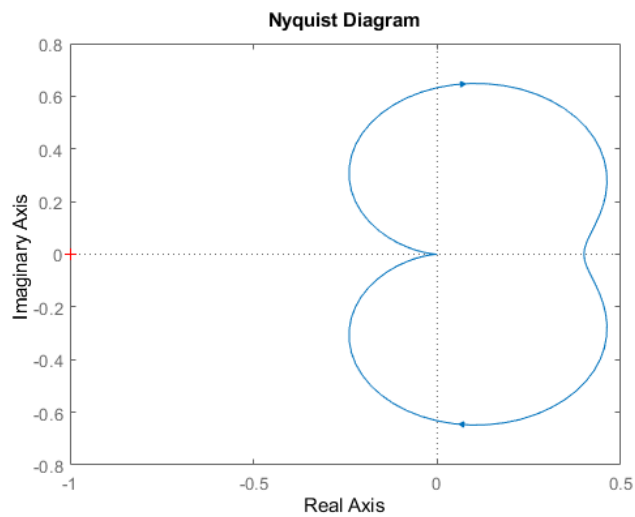
PID-Regler `pidstd`Bode-Diagramm `bode`

```
bode(sys,{0.1,100}); % or bode(sys);
% grid on; to enable Grid in Plot
```



Nyquist-Diagramm nyquist

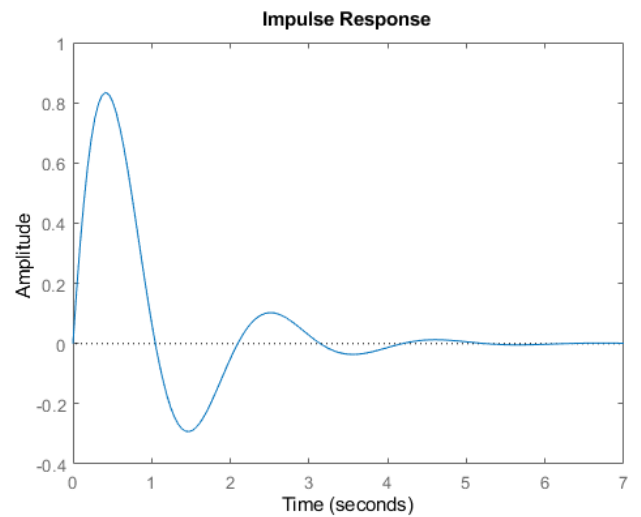
```
nyquist(sys)
```



Impulsantwort impulse

Mit `impulse(. . .)` kann die Impulsantwort der Transferfunktion ausgegeben werden.

```
impulse(sys);
```



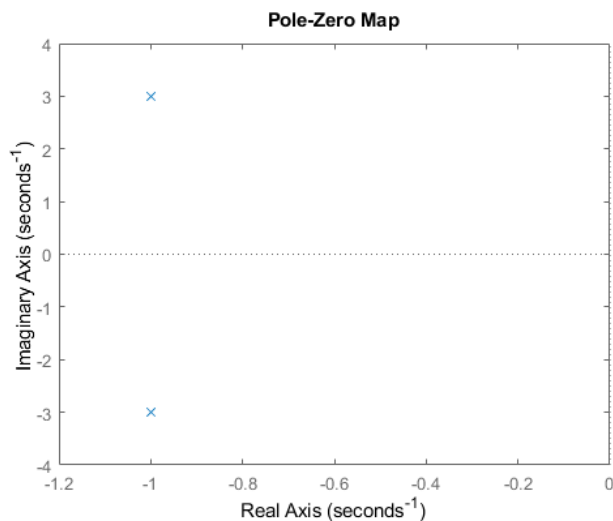
Sprungantwort step

Mit `step(. . .)` kann eine Transferfunktion mit der Sprungfunktion σ verwendet werden. Damit

```
step(sys);
```

Pol-Nullstellen-Diagramm pzmap

```
pzmap(sys);  
ylim([-4 4]); xlim([-1.2 0]);
```



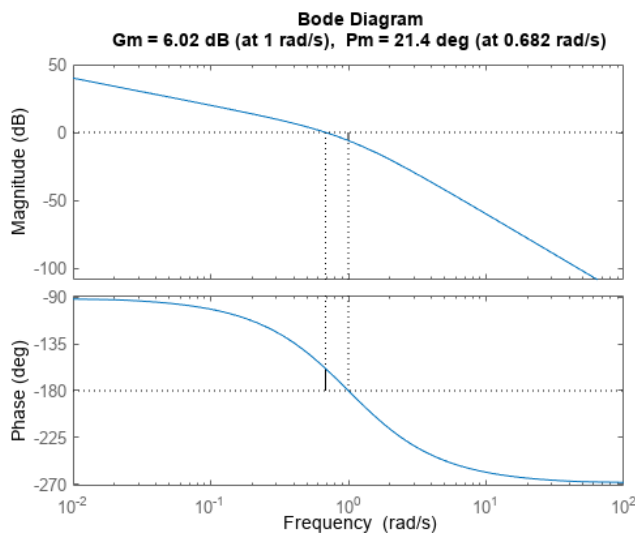
🔥 MATLAB Zauber

Damit die Pol- und Nullstellen erkennbar sind, muss eventuell mit den Darstellungsgrenzen gespielt werden.

Margin `margin(tf)`

Mit dem Befehl `margin(tf)` kann das Bode-Diagramm

```
margin(tf(1,[1 2 1 0]))
```



Zustandsraumdarstellung `ss()`

Mit `ss(. . .)` können vier Matrizen A, B, C, D zu einer Zustandsraumdarstellung zusammengeführt werden.

```
A = [0 1; -5 -2];
B = [0; 3];
C = [0 1];
D = 0;
Ts = 0.25;
sys = ss(A,B,C,D,Ts);
```

Es kann ebenfalls `bode`, `nyquist`, `step`, etc. angewendet werden, da die ZRD eine andere Darstellung der Übertragungsfunktion ist.

Reglersimulator `Sisotool(tf(...))`

Mit `sisotool` kann ein Regler C basierend auf einem Prozess P ausgelegt werden.

```
P = tf(...);
sisotool(P); % Der Prozess wird angegeben
```

Weitere Befehle

`minreal`

Kürzt doppelte Nullstellen heraus algebraisch -> reduzieren auf Minimalform

📖 Anleitungen / Vorgehen

Modellierung dynamischer Systeme

1. Festlegung der Systemgrenzen sowie der Ein-/ Ausgangsgrößen.
2. Identifikation der relevanten Energiespeicher und der zugehörigen 'Füllstandsgrößen'.
3. Formulierung der Bilanzgleichungen für die Energiespeicher.

$$\frac{d}{dt} \text{Füllstand} = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}$$

4. Formulierung der Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Energiespeichern.
5. Identifikation der Systemparameter anhand von Spezifikationen oder Experimenten.
6. Validierung des Modells durch Experimente. Je nach Resultat Iteration des Verfahrens.

Stabilitätsbestimmung

1. Offener Kreis bilden $L = PC$
2. Nyquist/Ortskurve zeichnen `nyquist(L)`
3. Bodediagramm zeichnen `margin(L)`, `bode(L)`
4. Stabilitätsbedingung anhand Nyquist-Kriterium prüfen

Parameter Identifikation

1. Hypothese über die Modellstruktur (Naturgesetze oder Black Box). Beispiel

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs}{s^2 + a_1s + a_2}$$

2. Gute Anregung (Impuls, Sprung, Rampe, . . .) auswählen und Experiment durchführen
3. Messdaten $y(k)$ speichern
4. Mit $(u(k), y(k))$ die Parameter (b, a_1, a_2) bestimmen
5. Modell & Parameter validieren (wenn nicht gut, zurück zu Punkt 1 mit neuem Modell)

Linearität & Zeitinvarianzen

LTI-Systeme

! Anforderung

Alle Kriterien *Zeitinvarianz*, *Verstärkungs* und *Überlagerungsprinzip* müssen für LTI-System gelten.

💡 Tipp

Zustands-, Ein- oder Ausgangsgrößen in nichtlinearen Operationen (\cdot^2 , \sin , $\ln \dots$) in Differenzialgleichung deuten auf ein **nicht lineares** System.

$$\begin{aligned} y &= e^{-t} \cdot \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitvariant} \\ y &= \int_0^t u(\tau) d\tau && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\ y &= \dot{u} + 1 && \rightarrow \text{zeitinvariant} \\ y &= \ddot{y} - u \cdot \dot{y} && \rightarrow \text{nicht linear} \\ y &= \sqrt{u^2 + 1} && \rightarrow \text{nicht linear} \\ y &= 2 \cdot u + 4 && \rightarrow \text{linear} \end{aligned}$$

Zeitinvarianz

System ist *zeitinvariant*, falls dessen Wirkungsweise nicht von der Zeit t abhängig ist. Das heisst, das System

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

liefert auf ein Signal $x(t)$ mit einer Verzögerung $a > 0$ ebenfalls ein verzögertes Ausgangssignal

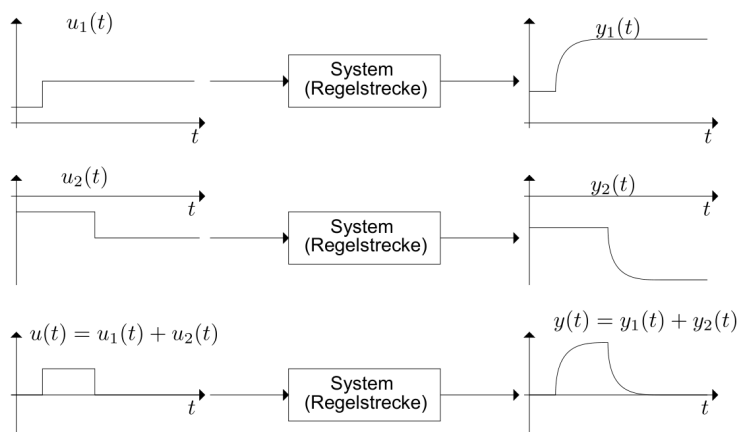
$$y(t+a) = H\{x(t+a)\}$$

Linearität

Ein System ist *linear*, falls das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip gelten.

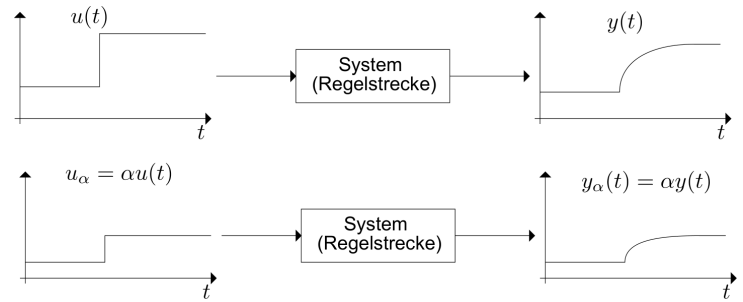
Überlagerungsprinzip

Wenn $y_1(t)$ die Antwort auf $u_1(t)$ ist und $y_2(t)$ die Antwort auf $u_2(t)$ ist, so ist $y_1(t) + y_2(t)$ die Antwort auf $u_1(t) + u_2(t)$.



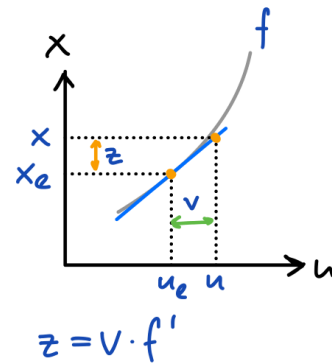
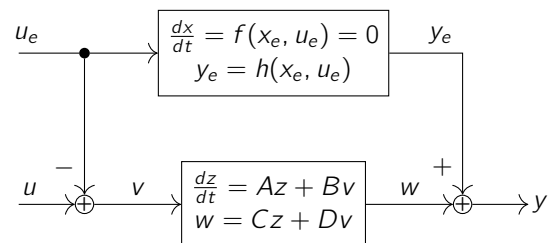
Verstärkungsprinzip

Wenn $y(t)$ die Antwort auf $u(t)$ ist, $\alpha \cdot y(t)$ ist die Antwort auf $\alpha \cdot u(t)$.



Linearisierung

Zustandsraumdarstellung



Ein nicht-lineares System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

kann an einem Arbeitspunkt linearisiert werden. Anhand eines Arbeitspunktes wird die Tangente mit folgender Gleichung berechnet.

$$f(x, u) \approx f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} \cdot (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} \cdot (u - u_e)$$

Das nicht-lineare System kann als Zustandsraum-Darstellung linearisiert werden. Folgende Gleichungen

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)}$$

ergeben die Linearisierung.

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv \quad w = Cz + Dv$$

mit $z = x - x_e$, $v = u - u_e$ und $w = y - y_e$ mit $y_e = h(x_e, u_e)$.

Differentialgleichung

$$F(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0 \quad \text{mit } m \leq n$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_{(y_e, u_e)} z^{(n)} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_{(y_e, u_e)} \dot{z} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(y_e, u_e)} z + \left. \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \right|_{(y_e, u_e)} v^{(m)} + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right|_{(y_e, u_e)} \dot{v} + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{(y_e, u_e)} v = 0$$

mit $z = y - y_e$ & $v = u - u_e$.

Vorgehen

Beispiel mit Differentialgleichung

$$M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

1. Alle Elemente auf eine Seite bringen und Differentialgleichung gleich 0 setzen $f(\dots) = F(\dots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 - M \cdot g}_{F(y^{(n)}, \dots, y, u^{(m)}, \dots, u)} = 0$$

$$\rightarrow f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

2. Gleichgewichtslage bestimmen, Änderungsraten = 0 $\rightarrow h^{(n>0)} = 0$

$$\bar{h} = h_0 = \sqrt[3]{\frac{M \cdot g}{k}}$$

3. Deltagrössen definieren $\bar{h}^{(n>0)} = 0$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h - \bar{h} \\ \Delta \dot{h} &= \dot{h} - \dot{\bar{h}} = \dot{h} \\ \Delta \ddot{h} &= \ddot{h} - \ddot{\bar{h}} = \ddot{h} \end{aligned}$$

4. Linearisierung machen (Ableiten, dann Gleichgewichtslage einsetzen!)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{h}} \right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \ddot{h} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta \dot{h} + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=\bar{h}} \cdot \Delta h = 0$$

5. linearisierte Differentialgleichung aufbauen

$$M \Delta \ddot{h} + \alpha \Delta \dot{h} + 3k \bar{h}^2 = 0$$

Übertragungselemente

Elementare Glieder

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= b_0 \cdot \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \end{aligned}$$

m : Nullstellen $z_{1\dots m}$

n : Polstellen $p_{1\dots m}$

Elementare Funktionen

Werden für die Beschreibung beliebiger LTI-Systeme verwendet. Mit Parametern $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$

Typ	System	Übertragungsfunktion
Integrator	$\dot{y} = u$	$\frac{1}{s}$
Differentiator	$y = \dot{u}$	s
Erste Ordnung	$\dot{y} + ay = u$	$\frac{1}{s+a}$
Doppelintegrator	$\ddot{y} = u$	$\frac{1}{s^2}$
Gedämpfter Oszillator	$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
Zustandsdarstellung	$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$	$C(sI - A)^{-1}B + D$
PID Regler	$y = k_p u + k_d \dot{u} + k_i \int u$	$k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$
Totzeit	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{\tau}{n} s)^n}$

$$\begin{aligned} G(s) &= k && \text{: konstanter Faktor} \\ G(s) &= s + a && \text{: einfache reelle Nullstelle} \\ G(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 && \text{: konj. komplexe Nullstellen } (\zeta \leq 1) \\ G(s) &= \frac{1}{s+a} && \text{: einfacher reeller Pol} \\ G(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} && \text{: konj. komplexe Pole } (\zeta \leq 1) \\ G(s) &= e^{-s\tau} && \text{: Totzeitglied } \tau > 0 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Nullstellen

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{konj. komplex} \end{cases}$$

Polüberschuss n_{pe}

Der *Polüberschuss* oder *relativer Grad* beschreibt die Differenz zwischen der Pol- und Nullstellen-Ordnung.

$$n_{pe} = n - m$$

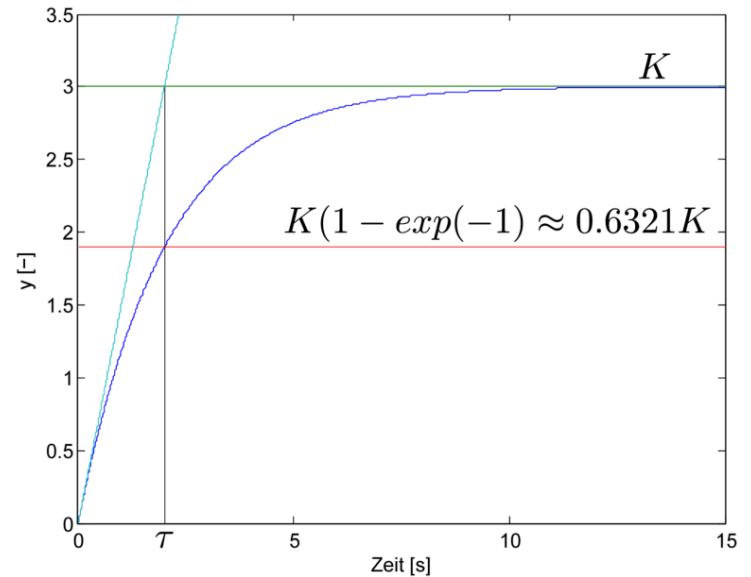
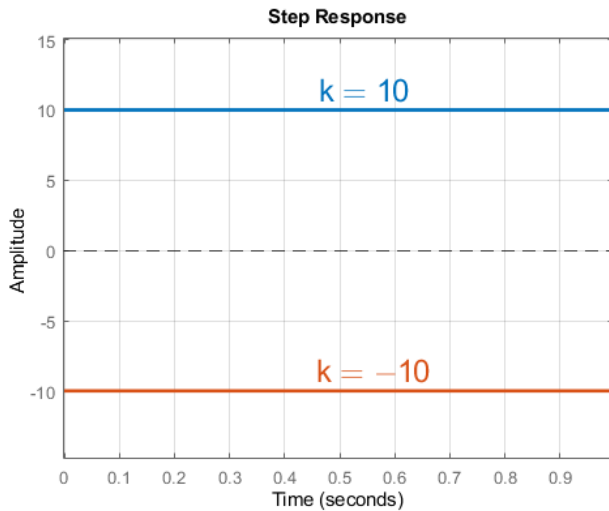
$$\begin{aligned} n_{pe} &\geq 0 && \text{proper/gebrochenrational} \\ n_{pe} &> 0 && \text{strictly proper/echt gebrochenrational} \end{aligned}$$

$$y = \begin{cases} \# & \text{falls } n_{pe} \leq -2 & \text{bsp } s^2 \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = -1 & s \\ \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = 0 & 1 \\ t \cdot \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = 1 & 1/s \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls } n_{pe} = n \geq 2 & 1/s^2 \end{cases}$$

Bezeichnete Glieder

P-Glied

$$G(s) = k \quad \text{konstanter Faktor}$$

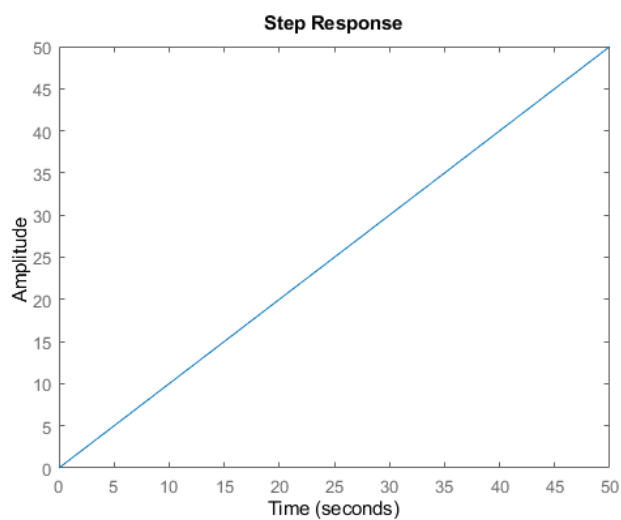


PT2-Glied

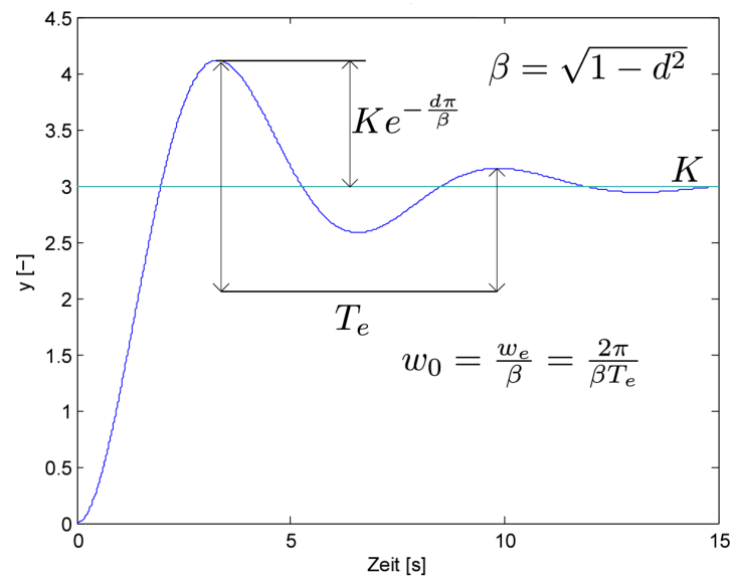
$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

I-Glied

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Integrator}$$



Sprungantwort & $d \triangleq \zeta$



PT1-Glied

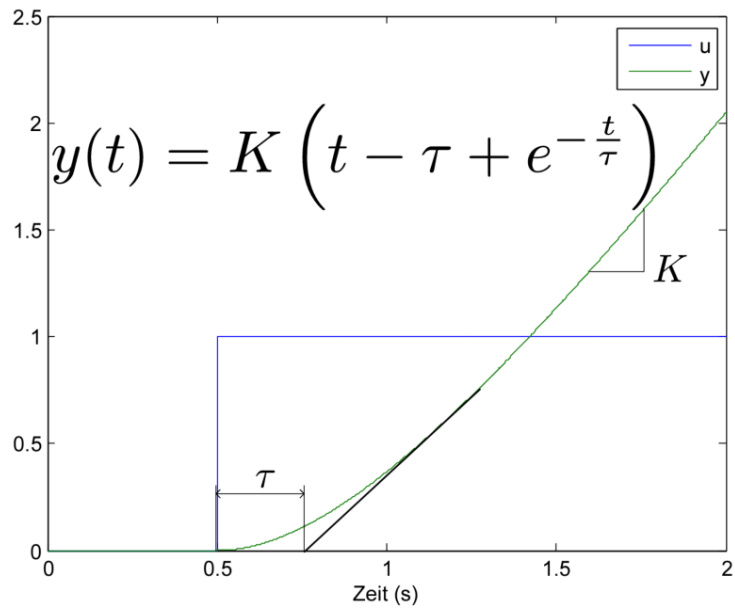
$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

IT-Glied

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

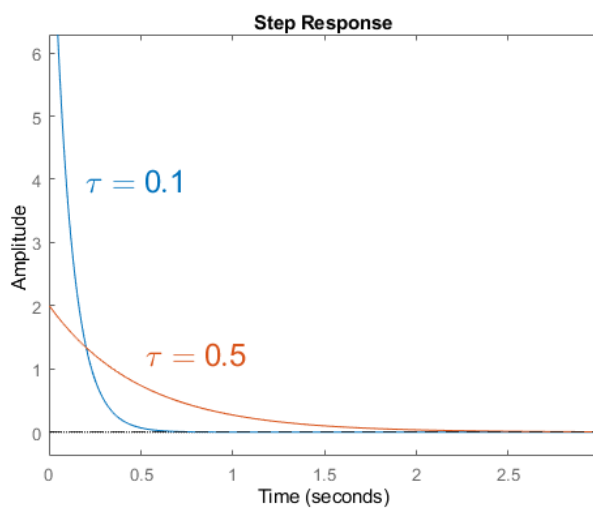
Sprungantwort

Sprungantwort



DT1-Glied

$$G(s) = \frac{s}{1 + sT} \quad \text{Gefilterter Differentiator}$$



Anderes Zeug

Betrag von Zeitverzögerungen sind immer = 1, da die Phase keine Rolle spielt.

$$|PC| = 1 \Rightarrow \left| k \cdot e^{-0.2s} \frac{10}{s} \right|$$



→ [Project Pigeon](#)

Glossar

- *SISO* – **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput
- *MIMO* – **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput