# Regelungstechnik

*Zusammenfassung*

Joel von Rotz / Quelldateien

## Inhaltsverzeichnis

# Linear Algebra Kurzfassung

## Determinante

### 2 × 2-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

### 3 × 3-Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

## Inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$$

### 2 × 2-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 3 × 3-Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

# Signal & System Kurzfassung

## Endwertsatz

### Laplace

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s)$$

falls $\lim_{t \to \infty} x(t)$ existiert

### Z-Transformation

$$\lim_{k \to \infty} x[k] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$$

falls $X(z)$ nur Pole mit $|z| < 1$ oder bei $z = 1$

## Anfangswertsatz

### Laplace

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)$$

falls $x(0^+)$ existiert

### Z-Transformation

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

## Transformationen

### Laplace

| Signal $u(t)$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\sin(at)$ | $\frac{a}{(s+a)^2+\alpha^2}$ |

| Signal $u(t)$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(s)$ |
|---|---|
| $\sigma(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{s-\alpha}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\cos(at)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\alpha^2}$ |

### Z-Transformation

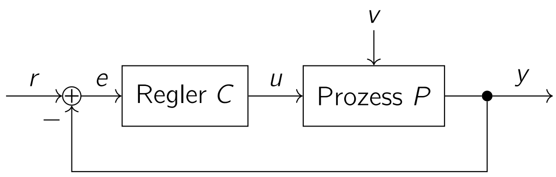
| Signal $u[k]$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(z)$ |
|---|---|
| $\delta[k]$ | $1$ |
| $\sigma[k]$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $k$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |

| Signal $u[k]$ | $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $U(z)$ |
|---|---|
| $\delta[k-m]$ | $z^{-m}$ |
| $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $\frac{1}{k!}$ | $e^{1/z}$ |

# Systeme

## Grundlegende Systeme

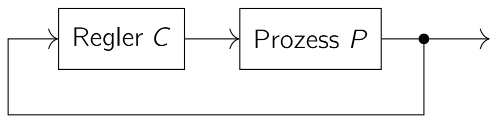
### Regler System




- $r$ : Führungsgrösse (Soll-Wert)
- $e$ : Regelfehler
- $u$ : Stell-/Steuergrösse
- $y$ : Regelgrösse (Ist-Wert)
- $v$ : Störgrösse

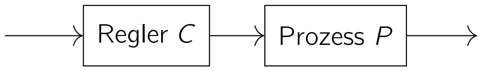
*Rückkopplung* beschreibt eine Anordnung, bei welcher zwei oder mehr dynamische Systeme Systeme untereinander so verbunden sind, dass sie sich gegenseitig beeinflussen.

### Geschlossenes System




Schwieriger zum Berechnen und zum Untersuchen, da diese ein rückgekoppeltes Signal (mit dem Eingangssignal kombinierend) Teil des Eingangssignals zum System besitzen.

### Offenes System




Schleifenübertragungsfunktion

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

Kein rückgekoppeltes Signal. Wird für Stabilitätsbestimmung und Anpassungen verwendet.

## Minimalphasiges System

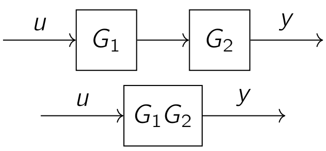
Liegen keine Pole oder Nullstellen in der rechten Halbebene, so spricht man von **minimalphasigen Systeme**. Amplituden- und Phasengang stehen in einer direkten Beziehung zueinander. Es gilt **nur bei minimalphasigen Systemen**:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d\log|G|}{d\log\omega}$$

Pro 20dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung $+90°$, respektive $-90°$.

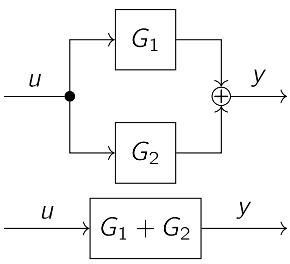
## Blockdiagrammalgebra

### Verkettung



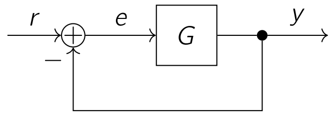

$$y = G_2(G_1 \cdot u) = (G_1G_2) \cdot u$$

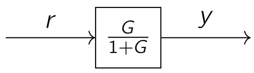
### Parallel




$$y = G_1 \cdot u + G_1 \cdot u = (G_1 + G_2) \cdot u$$

### Rückkopplung



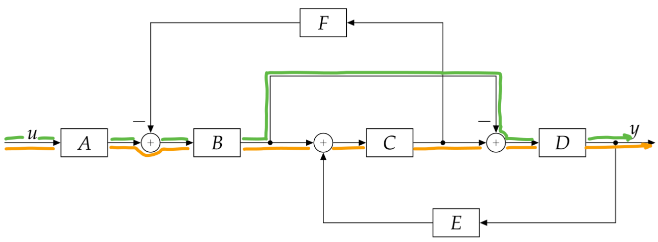

$$\begin{aligned} y &= G \cdot e = G(r - y) \\ (1+G) \cdot y &= G \cdot r \\ y &= \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{G_{yr}} \cdot r \end{aligned}$$

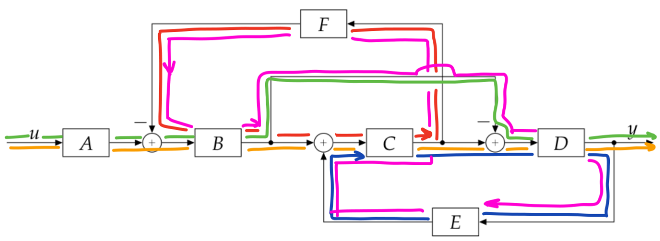
### Regel von Mason

$$G_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} P_k &= \text{Vorwärtspfad } k \\ \Delta &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops} \\ &\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die sich nicht berühren} \\ &\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die sich nicht berühren} \\ &\quad + \cdots \\ \Delta_k &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops, die } P_k \text{ nicht berühren} \\ &\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\ &\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

Beispiel




$P_1 = ABCD \quad \Delta_1 = 1 - 0 \quad P_2 = ABD \quad \Delta_2 = 1 - 0$

$$\Delta = A - ((-BCF) + CDE + ((-B)(-D)(CEF))$$

$$G_{uy} = \frac{ABD(1+C)}{A + BCF - CDE - BCDEF}$$

## Identifikation

Unter dem Begriff der *Identifikation* versteht man die Bestimmung eines Modells aus einer vorgegebenen Klasse von Modellen, anhand der Ein-/Ausgangsgrössen, so, dass dieses möglichst gleichwertig dem getesteten System ist.

...welche Klasse – Ausgehend von einem LTI-System sind der Grad von Zähler- und Nennerpolynom festzulegen. Zudem sidn allfällige Totzeiten zu berücksichtigen.

...welche Eingangssignale – Das zu testende System muss hinreichend mit einem Signal angeregt werden → Diracstösse, Sprungfunktionen, Rampen und harmonische Funktionen

...was meint 'gleichwertig' – Da Ein- & Ausgangsgrössen beobachtet werden, kann $y$ des zu testenden Systems und $\hat{y}$ des zu vergleichenden Modell verglichen werden. Mit dem resultierenden Fehler $\epsilon = y - \hat{y}$ können Grenzen festgelegt werden.

...wie kann ein Modell gefunden werden – Trial & Error mit Sprungantwort und Bodediagramm.

### Methode der kleinsten Quadrate

Mit dieser Methode können Parameter anhand Messwerten bestummen werden.

$$\underbrace{y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \cdots + a_n y[k-n]}_{A(z^{-1})y} = \underbrace{b_1 u[k-1] + \cdots + b_n u[k-n]}_{B(z^{-1})u}$$

$$\beta^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = A(z^{-1})y - B(z^{-1})u = \underbrace{y}_{Gemessen} - \underbrace{\Phi\beta}_{\text{Modell}}$$

$$y = \begin{pmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[n+N] \end{pmatrix}$$

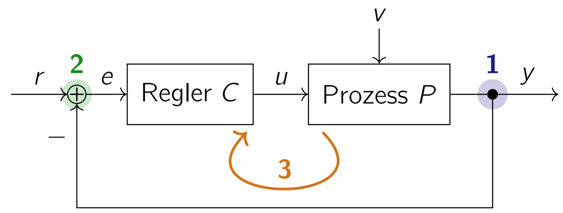
$$\Phi = \begin{pmatrix} -y[n] & -y[n-1] & \cdots & -y[1] & u[n] & u[n-1] & \cdots & u[1] \\ -y[n+1] & -y[n] & \cdots & -y[2] & u[n+1] & u[n] & \cdots & u[2] \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -y[N+n-1] & -y[N+n-2] & \cdots & -y[N] & u[N+n-1] & u[N+n-2] & \cdots & u[N] \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y$$

# Regelung

Feedback Control

Ziel eines Reglers ist die Angleichung einer Regelgrösse $y$ an eine Führungsgrösse $r$, sodass idealerweise $y = r$.

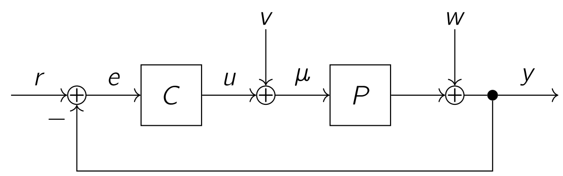



**Merkmale einer Regelung**

Folgende Merkmale **muss** eine Regelung aufweisen, ansonsten ist es keine Regelung.

1. Erfassung (Messen) der Regelgrösse
2. Vergleich von Regel- und Führungsgrösse
3. Geschlossener Wirkungskreis

## Sensitivitätsfunktionen




### 'Gang of Four'

Das Verhalten der Regelung kann durch die folgenden vier Sensitivitätsfunktionen beschrieben werden.

Sensitivity Function

$$G_{er} = S = \frac{1}{1+PC}$$

Load Sensitivity Function

$$G_{vy} = PS = \frac{1}{1+PC}$$

Complementary Sensitivity Function

$$G_{yr} = T = \frac{1}{1+PC} \stackrel{!}{=} \underline{1}$$

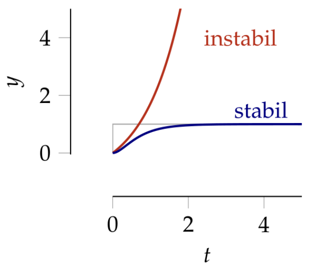
Noise Sensitivity Function

$$G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

Wahrer Fehler

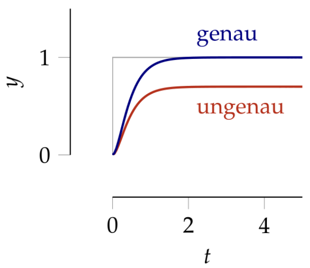
## Anforderungen

### Stabilität




- binäres Kriterium und zwingend zu erfüllen
- Für lineare Systeme gilt dies **global**, egal welcher AP
- Die Stabilität kann anhand des Polnullstellendiagramms beurteilt und mit Hurwitz & Nyquist untersucht werden

### Stationäre Genauigkeit

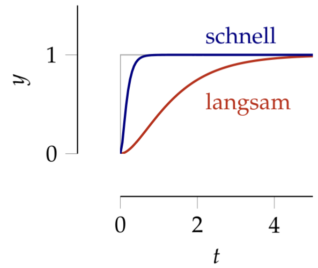



- Beschreibt bleibender Fehler, nach Abklingung der transienten Vorgänge
- Gutes Mass ist stationärer Regelfehler $e$

$$e = \frac{1}{1+PC}r + \frac{-P}{1+PC}v + \frac{-1}{1+PC}w$$

$$e_{stationr} = \left.\frac{1}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot r_0 + \left.\frac{-P}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot v_0 + \left.\frac{-1}{1+PC}\right|_{s=0} \cdot w_0$$

### Schnelligkeit

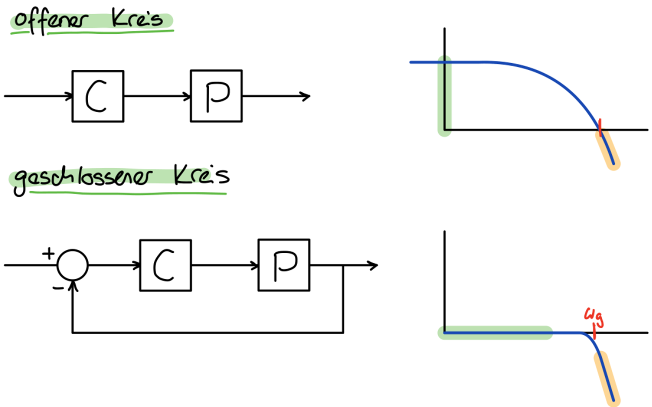



- Für Charakterisierung des dynamischen Verhaltens wird **Gesamtregelkreis** betrachtet in Bezug auf Führungsgrösse

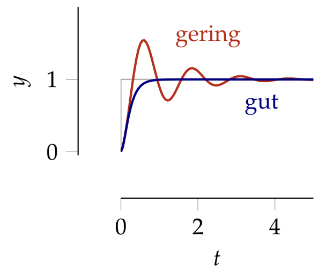
$$y = \frac{PC}{1+PC}r$$

- Als Kriterium dient die Grenzfrequenz $\omega_g$ $\rightarrow$ Beschreibt ab wann das Verhalten deutlich degradiert $(\omega_g < \omega)$

$$\omega_g : |L(s)|_{s=j\omega_g} \approx 1$$




### Dämpfung




- Unterdrückung von schwingenden Signalteilen, welche Anzeichen von Instabilität sind
- Gutes Mass ist die Phasenlage im Bereich von $\omega_g$

## Eigenschaften

### Robustheit

*Robustheit* bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen ohne Anpassung seiner anfänglich stabilen Struktur standzuhalten.

Robustheit gegenüber Unsicherheit → Standhaltung gegenüber Störungen

### Dynamik

Die *Dynamik* eines Systems kann durch eine Regelung beeinflusst und verändert werden.

- Instabile Systeme → stabil
- Träges System → schnell
- Abdriftende System → konstant.

> Abhängigkeit
>
> Viele Systemeigenschaften sind nicht unabhängig voneinander. Sie unterliegen von Natur aus bestimmten Beschränkungen
> - Stabiles Flugverhalten → keine hohe Manövrierbarkeit
>
> !! Regelungen können helfen, diese Abhängigkeiten teilweise aufzuheben!

> Safety Critical
>
> Werden instabile Systeme mittels Regelung stabilisiert, so wird die Regelung kritisch für die Sicherheit des Systems.

### Modularität

In einem modularen System sind die einzelnen Module möglichst unabhängig voneinander → Module können einfach ersetzt oder erweitert werden.

- Wohldefinierte Ein-/Ausgänge, Beziehungen dazwischen → Verhalten unabhängig von äusseren Umständen → ebenfalls Ziel von Regler

Mittels Regelulng lassen sich Komponenten unabhängiger und damit zusammengesetzte Systeme Modularer machen.

### Genauigkeit

Mit Regelung können unerwünschte Störeinflüsse ausgeglichen werden → Verbessert Genauigkeit und Auflösung (z.B. bei Sensoren).

> Anwendungen
>
> Ein Konzept einer hohen Genauigkeit ist, mittels Regelung wird ein bestimmten und wohldefinierten Arbeitspunkt ausgeregelt und dabei aufgewendete Stellgrösse als Messgrösse des Sensors interpretiert dies.
> Beispiel: Seismographgen, sehr präzise Waagen

### Herauserforderungen

Regelungen bringen viele Vorteile, aber auch einige Nachteile:

**Gefahr der Instabilität** – Auch geregelte Systeme haben einen Kipppunkt, wo die Mitkopplung dominant wird und zur Instabilität führt. Ziel einer Regelung ist das System unter allen Umständen stabil zu halten (nicht nur unter Normalbedingung sondern auch unter allen Störeinflüssen → anspruchsvoll).

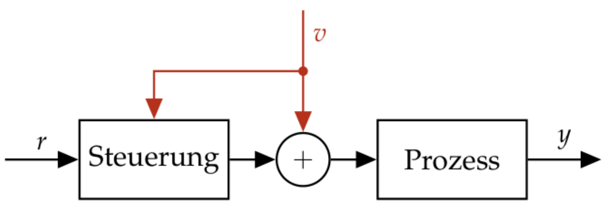
Beispiel: Mikrophonverstärkung bei Beschallungsanlage zu weit aufgedreht → pfeifen

**Messfehler** – Jede Regelgrösse wird messtechnisch verfasst → verbundene Messfehler gehen in Systemverhalten ein (betrifft statische Fehler, dynamische Fehler, wie Rauschen)

**Komplexität** – Die Implementation eines Regelsystems bei hoher Komplexität wird anspruchsvoller und mit entsprechendem Aufwand verbunden.

## Steuerung

Feedforward Control

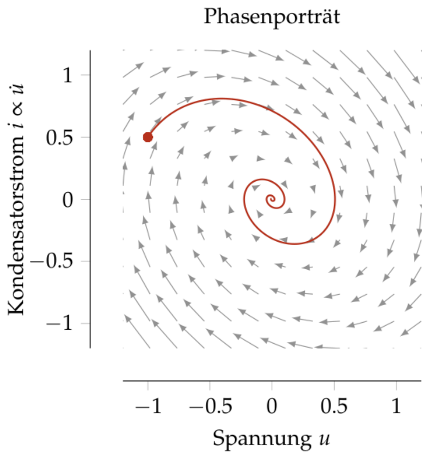


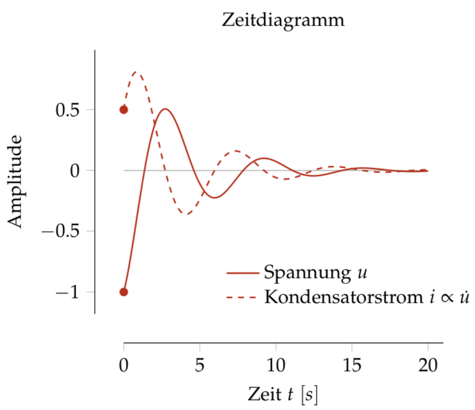

# Modellierung

> Vereinfachung
>
> Modelle repräsentieren immer eine Vereinfachung des eigentlichen Systems und fokusiert daher immer auf ein Teil des Systems.
>
> Beispiel: Die Modellierung des Tempomats konzentriert sich mehr auf die Geschwindigkeit des Fahrzeugs als auf die Auswirkungen eines Atombombeneinschlags auf das Fahrzeug.

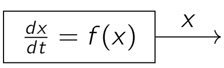
## Zustandsraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträt* kann das System *visualisiert* werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträt den zeitlichen Verlauf verfolgen.



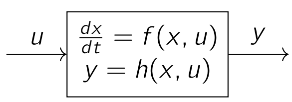

### Autonomes, zeitinvariantes System




$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

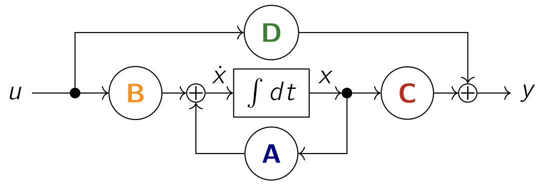
### Allgemeine Systeme




$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad y = h(x,u)$$

### Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.




$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

$A$ : beschreibt Dynamik
$B$ : beschreibt Steuereinfluss
$C$ : beschreibt Messung
$D$ : beschreibt Durchgriff

## Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion (oder Transferfunktion) beschreibt die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangsgrösse.

$$G_{AE}(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$A$ : **A**usgangssignal
$E$ : **E**ingangssignal

## Führungsverhalten

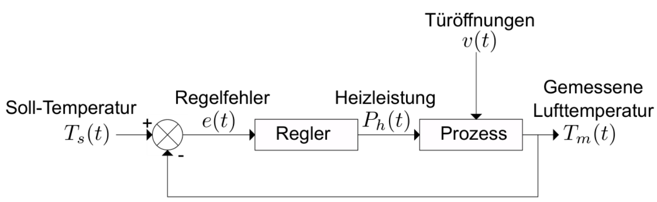
Das Führungsverhalten beschreibt die Beziehung zwischen der Führungsgrösse und der Regelgrösse (sogenannter *Soll-Ist*-Vergleich).

### Merkmale

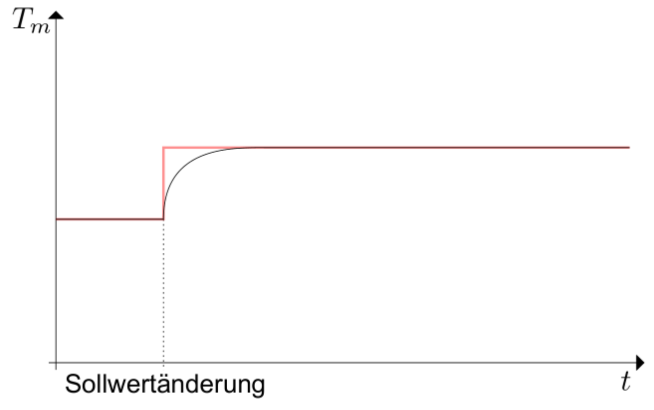
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**

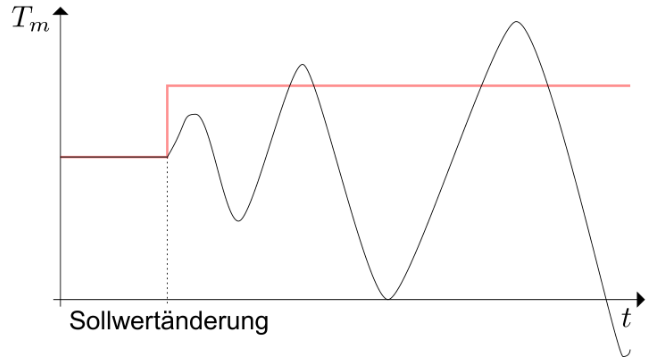
Folgendes Beispiel ist eine Sauna:



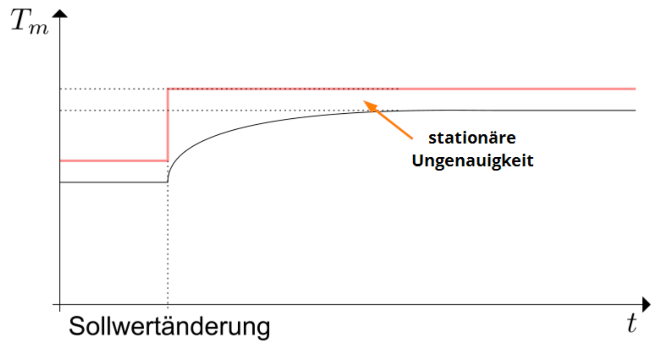
**Gutes Führungsverhalten**



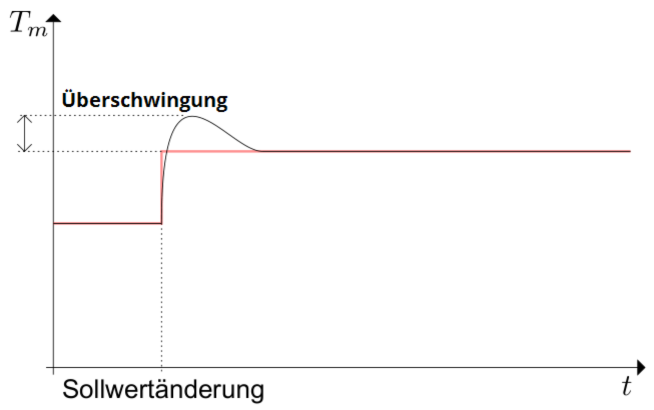

**Instabilität**



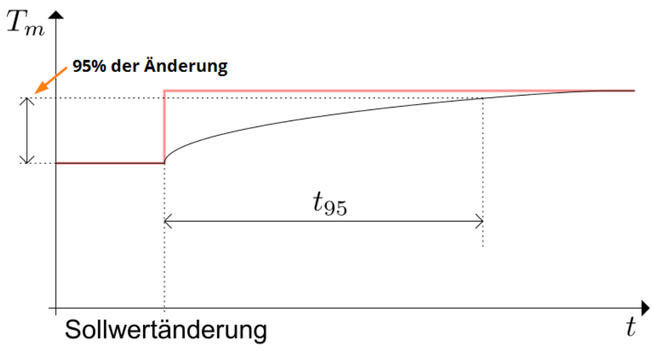

**Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit**




**Überschwingen**




**Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes**




## Störverhalten

Das Störverhalten beschreibt den Einfluss der Störgrössen $v$ auf die Regelgrösse $y$ bei einer konstanten Führungsgrösse $r$. Ein gutes Störverhalten minimiert diese Einflüsse, wobei die Definition von "gut" abhängig vom entsprechenden System ist.

$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

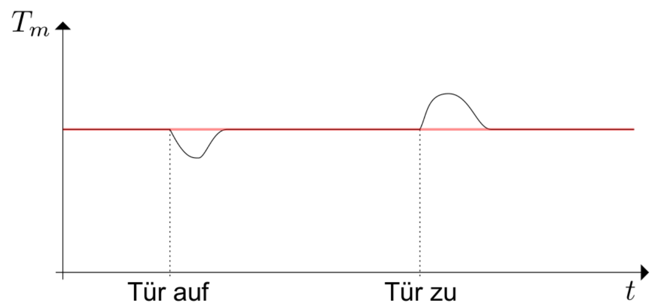
Beispiel: Eine Saune kann sich dies eher noch erlauben, da eine Überschwingung nur einen kleinen Einfluss auf die Systemqualität hat.

### Merkmale

Das Störverhlaten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

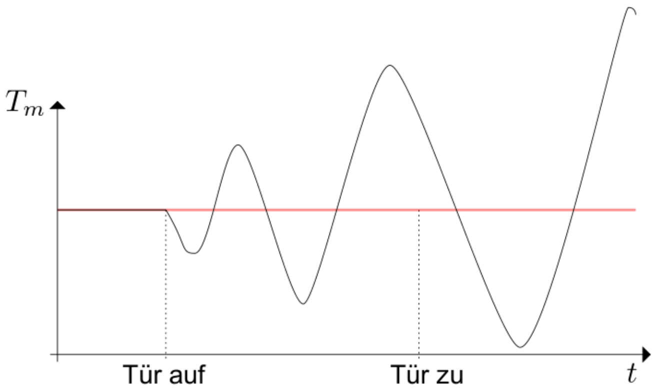
- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**.

**Gutes Störverhalten**

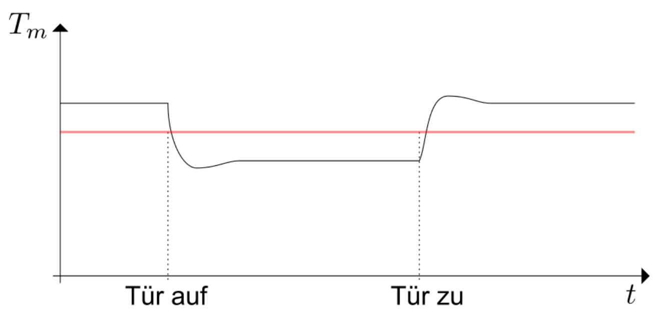



rot: Sollwert

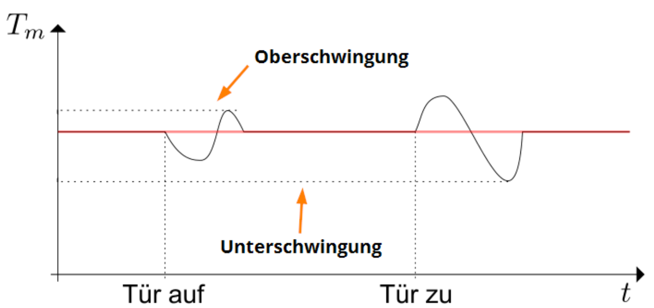
### Instabilität



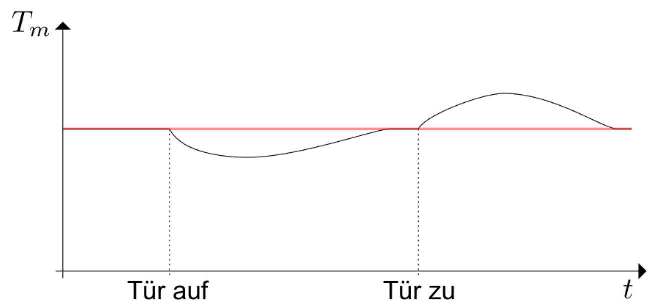

### Stationärer Fehler / Ungenauigkeit




### Überschwingen

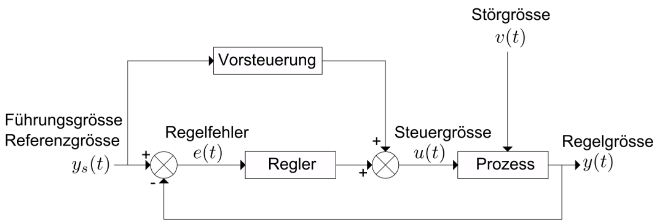



### Langsames Erreichen des stationären Wertes




### Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).




## Dynamik

### Lösen von Differential Gleichungen

**Lösung einer Differentialgleichung**

$$x(t_0) = x_0 \qquad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

### Gleichgewichtslage

Eine Gleichgewichtslage ist ein Zustand in dem das System stabil ist. Dies ist auch bekannt als *stationäres* Verhalten und weist keine Veränderungen auf mit der Zeit.

$x_e$ ist eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems $\frac{dx}{dt} = F(x)$ falls:

$$F(x_e) = 0 \rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x_e} = 0$$

### Stabilität

**Stabilität (allgemein)**

Die Stabilität ist in drei Zustände eingeteilt.

- **stabil**, falls alle Zustände (unterschiedliche Anfangspositionen) in der Nähe der Gleichgewichtslage $x_e$ zu Lösungen führen.
- **asymptotisch stabil**, falls alle Zustände in der

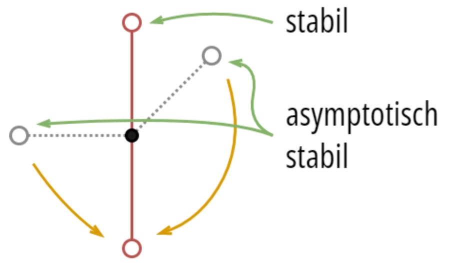
Nähe von $x_e$ nach langer Zeit ($t \to \infty$) in $x_e$ enden.

- **instabil**, falls der Zustand nie eine Gleichgewichtslage erreicht.

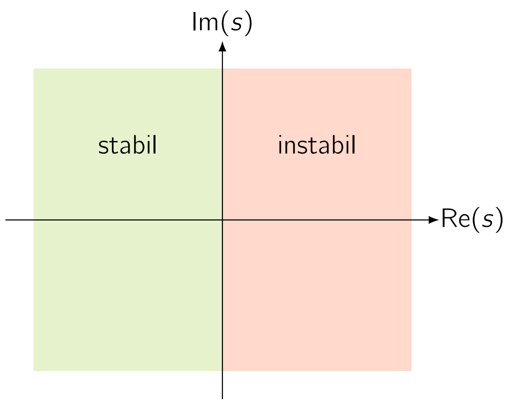
Stabilität ist im Allgemeinen eine *lokale* Eigenschaft innerhalb eines Bereiches des Zustandsraums!

Beispiel: Ein Pendel, welches die gesamte Rotationsachse (360°, rundherum) ausnützen kann, hat zwei Gleichgewichtslagen:

- **stabile** Position oben
- **asymptotische stabile** Positionen, welche immer nach unten verlaufen.




### Stabilität linearer Systeme




Polstellen eines linearen Systems ($\frac{dx}{dt} = Ax$ & $x(0) = x_0$) können mit dem *charakteristischen Polynoms* berechnet werden.

**charakteristisches Polynom**

Die Nullstellen von $\lambda$ werden mit der Dynamik-Matrix $A$ berechnet.

$$\lambda(A) := \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A) = 0\}$$

**Gültigkeit**

Stabilität linearer Systeme ist nur von $A$ abhängig, nicht vom Anfangswert $x_0$. Dies gilt Global!

### Stabilität Linearisierung

Ist das linearisiterte System asymptotisch stabil, so ist das nicht-lineare System in der **Umgebung der Gleichgewichtslage** ebenfalls asymptotisch stabil.

## Testfunktion Sprungantwort

Anhand folgender Funktion kann die Sprungantwort eines Systems angegeben werden.

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Die Antwort setzt aus einem *zeitabhängigen* und einem *konstanten* Teil zusammen.

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{zeitabhängig}} \underbrace{-CA^{-1}B + D}_{\text{konstant}} \qquad t > 0$$

Das System strebt gegen Wert wenn A asymptotisch stabil ist $\to$ der *zeitabhängige* Teil strebt, falls A asymptotisch stabil ist, der Gleichtgewichtslage $x = 0$ zu. Der *konstante* Teil entspricht dem Wert bei $\omega \to 0$ und damit der *Gleichspannungsverstärkung*.

## Linearität & Zeitinvarianzen

### LTI-Systeme

**! Anforderung**

Alle Kriterien *Zeitinvarianz*, *Verstärkungs* und *Überlagerungsprinzip* müssen für LTI-System gelten.

**Tipp**

Zustands-, Ein- oder Ausgangsgrössen in nichtlinearen Operationen ( $\cdot^2$, sin, ln ...) in Differenzialgleichung deuten auf ein **nicht lineares** System.

$$\begin{aligned}
y &= e^{-t} \cdot \dot{u} + 1 && \to \text{zeitvariant} \\
y &= \textstyle\int_0^t u(\tau)d\tau && \to \text{zeitinvariant} \\
y &= \dot{u} + 1 && \to \text{zeitinvariant} \\
y &= \ddot{y} - u \cdot \dot{y} && \to \text{nicht linear} \\
y &= \sqrt{u^2 + 1} && \to \text{nicht linear} \\
y &= 2 \cdot u + 4 && \to \text{linear}
\end{aligned}$$

### Zeitinvarianz

System ist *zeitinvariant*, falls dessen Wirkungsweise nicht von der Zeit $t$ abhängig ist. Das heisst, das System

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

liefert auf ein Signal $x(t)$ mit einer Verzögerung $a > 0$ ebenfalls ein verzögertes Ausgangssignal

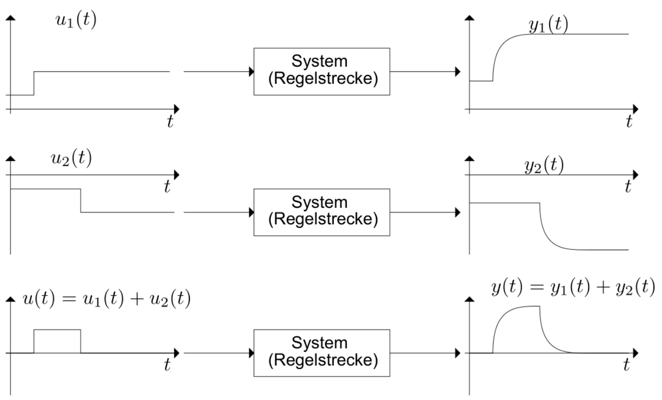
$$y(t+a) = H\{x(t+a)\}$$

### Linearität

Ein System ist *linear*, falls das Verstärkungs- und Überlagerungsprinzip gelten.

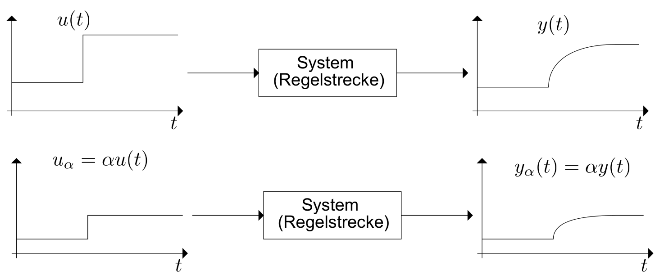
### Überlagerungsprinzip

Wenn $y_1(t)$ die Antwort auf $u_1(t)$ ist und $y_2(t)$ die Antwort auf $u_2(t)$ ist, so ist $y_1(t) + y_2(t)$ die Antwort auf $u_1(t) + u_2(t)$.



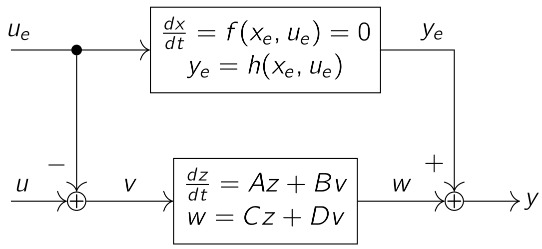

### Verstärkungsprinzip

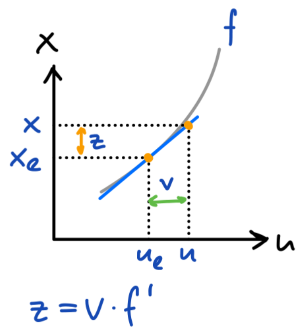
Wenn $y(t)$ die Antwort auf $u(t)$ ist, $\alpha \cdot y(t)$ ist die Antwort auf $\alpha \cdot u(t)$.




## Linearisierung

### Zustandsraumdarstellung




Ein nicht-lineares System:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad y = h(x,u)$$

kann an einem Arbeitspunkt linearisiert werden. Anhand eines Arbeitspunktes wird die Tangente mit folgender Gleichung berechnet.

$$f(x,u) \approx f(x_e,u_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} \cdot (x - x_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)} \cdot (u - u_e)$$

Das nicht-lineare System kann als Zustandsraum-Darstellung linearisiert werden. Folgende Gleichungen

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_e,u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x_e,u_e)}$$

ergeben die Linearisierung.

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bv \qquad w = Cz + Dv$$

mit $z = x - x_e$, $v = u - u_e$ und $w = y - y_e$ mit $y_e = h(x_e, u_e)$.

**Differentialgleichung**

$$F(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0 \quad \text{mit } m \leq n$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{(y_e,u_e)} z^{(n)} + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{(y_e,u_e)} \dot{z} + \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{(y_e,u_e)} z +$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}\right|_{(y_e,u_e)} v^{(m)} + \dots + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_{(y_e,u_e)} \dot{v} + \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{(y_e,u_e)} v = 0$$

mit $z = y - y_e$ & $v = u - u_e$.

**Vorgehen**

$$M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 = M \cdot g - k \cdot h^3$$

1. Differentialgleichung gleich 0 setzen $f(\cdots) = F(\cdots) = 0$

$$\underbrace{M \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \alpha \frac{dh}{dt} + k \cdot h^3 - M \cdot g = 0}_{F(y^{(n)}, \dots, y, u^{(m)}, \dots, u)}$$

$$\rightarrow \quad f(\ddot{h}, \dot{h}, h) = 0$$

2. Arbeitspunkt/stationärer Zustand berechnen ($h^{(n>0)} = 0$)

$\overline{h} = h_0 = \sqrt[3]{\frac{M \cdot g}{k}}$

3. Deltagrössendefinieren

$$\Delta h = h - \overline{h}$$
$$\Delta$$

3. In Linearisierungsgleichung einsetzten

$$\left.\frac{\delta f}{\delta \ddot{h}}\right|_{h=\overline{h}}$$

## Hurwitz-Kriterium

**! Hurwitz-Kriterium**

Die Polstellen-Gleichung $\lambda(s)$ mit $a_0 > 0$ hat dann, und nur dann, ausschliesslich Lösungen mit negativen reellen Teilen, falls alle Unterdeterminante der Hurwitz-Matrix positiv sind:
$\det H_n > 0$

$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{n_P \cdot n_C}{d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C}$$

$n_C$ : Zähler (*numerator*) des Reglers $C$
$d_C$ : Nenner (*divider*) des Reglers $C$
$n_P$ : Zähler (*numerator*) des Prozess $P$
$d_P$ : Nenner (*divider*) des Prozess $P$

$$\lambda = d_P \cdot d_C + n_P \cdot n_C$$

$$\lambda(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

**Tipp**

- Bei $n \leq 2$ genügt die Bedingung, dass alle Koeffizienten positiv sein müssen.
- $\det H_n = a_n \cdot \det H_{n-1}$ – Wird nicht immer verwendet (nur bei Spalte Wert unten rechts, Rest der Spalte 0).
- Fehlt ein Koeffizient oder ist dieser negativ, so ist die Bedingung nicht erfüllt

$$s^3 + 2s^2 + 10 \rightarrow \text{instabil, da } 0 \cdot s$$

**Was mit Hurwitz nicht möglich ist**

Das Hurwitz-Kriterium beschreibt keine *Robustheit* der Stabilität und erlangt keine Einsicht, wie der Regler $C = \frac{n_c}{d_c}$ gewählt werden sollte.

Beispiel

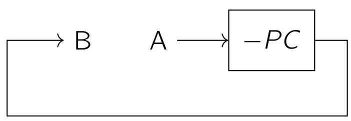
$\lambda = 8s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2 = a_0 s^4 + a_1 s^3 + \dots + a_4$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det H_1 = 2 > 0$ ✓
$\det H_2 = 2 - 24 = -22 > 0$ ×

## Nyquist

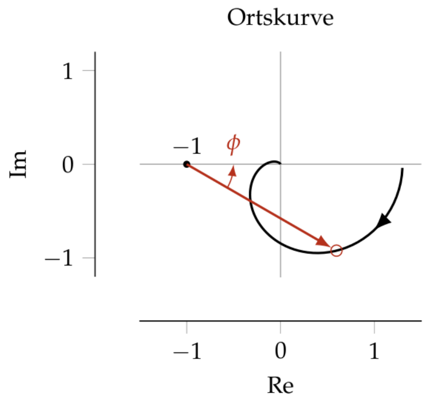
Wenn $L(s) = -1$, so kann eine stationäre Schwingung eingestellt werden!



$$B = -P(s)C(s) \cdot A \quad \Rightarrow \quad \underline{P(s)C(s) = -1}$$

## Allgemein

### Variante Winkeländerung




$$\Delta\phi = a\frac{\pi}{2} + r\pi \mathrel{\hat{=}} a \cdot 90° + r \cdot 180°$$

$a$ : Anzahl Pole <u>auf</u> der $Im$-Achse
$r$ : Anzahl Pole <u>rechts</u> der $Im$-Achse

Nur bei $\Delta\phi \geq 0°$ ist der *geschlossene* Kreis **stabil**.

**! Offen stabile Systeme**

Systeme, welche offen stabil sind, müssen der Bedingung $\Delta\phi = 0$ genügen.
Das Kriterium ist ebenfalls anwendbar, wenn die Ortskurve experimentell ermittelt wurde.

**i Totzeit**

Die Bedingung gilt auch für Systeme mit Totzeit

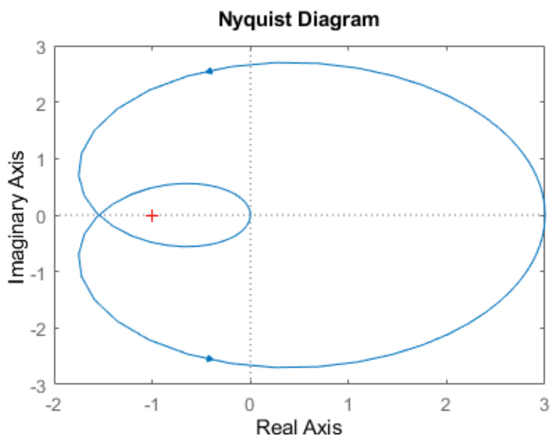
### Variante Umläufe

Das System $G_{yr}$ ist stabil wenn $P = U$

$P$ : Anzahl instabiler Polstellen von $L(s)$
$U$ : Anzahl Umläufe der Nyquist-Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [-\infty, \infty]$ um den Punkt $(-1, 0)$ im <u>Gegenuhrzeigersinn</u>

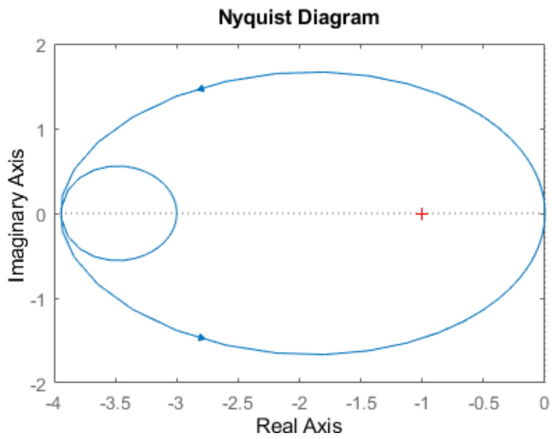
<u>Beispiel</u>

$$L(s) = \frac{9(s+2)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$




$\rightarrow$ $P = U = 2$ : stabil

$$L(s) = \frac{18(s-1)(s+4)}{(s-2)(s+3)(s-4)}$$




$\rightarrow P = 2, U = 1$ : instabil

## Einfaches Kriterium

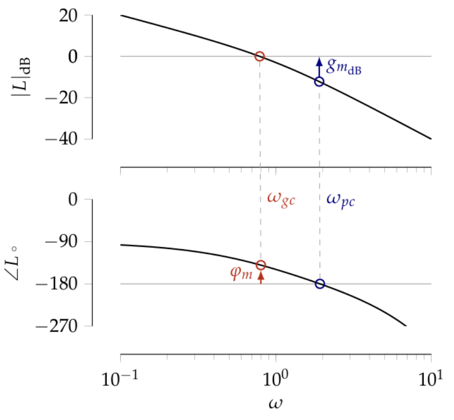
### Variante Links liegen

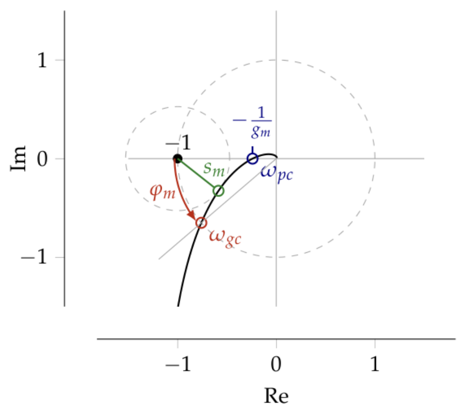
Für Systeme mit maximal zwei instabilen Polen im Ursprung (aber keinen weiteren instabilen Polen) genügt die Bedingung, dass der Punkt $(-1, 0)$ *links liegen gelassen* wird, wenn entlang der Ortskurve $\omega: 0 \rightarrow \infty$ verfahren wird.

### Variante Umläufe

Das System $G_{yr}$ ist stabil, wenn die Nyquist Kurve $L(j\omega)$ mit $\omega \in [0, \infty]$ den Punkt $(-1, 0)$ **nicht** umläuft.

## Stabilitätsreserve / Robustheit




### Phasenreserve $\varphi_m$

Eintritt in den Einheitskreis → *gain crossover*

$$\omega_{gc} : |L(j\omega_{gc})| = 1$$

Abstand zu $-1$ wird mit Phasenreserve $\varphi_m$ ausgedrückt

$$\varphi_m = 180° + \angle L(j\omega_{gc})$$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

### Amplitudenreserve $g_m$

Überschreiten der negativen *Re*-Achse → *phase crossover*

$$\omega_{pc} : \angle L(j\omega_{gc}) = -180°$$

Abstand zu $-1$ wird durch die Amplitudenreserve $g_m$ ausgedrückt.

$$g_m = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$

Wird die Achse nicht überschritten, so ist $g_m \to \infty$

→ kann im Bodediagramm abgelesen werden

### Stabilitätsreserve $s_m$

Minimaler Abstand zu $-1$

→ Kann nur aus Ortskurve abgelesen werden

### Praxiswerte

Folgende Werte dienen als *Boilerplate* für die Reglerauslegung

$$\begin{aligned} \varphi_m &\approx 30° - 60° \\ g_m &\approx 2 - 5 \\ s_m &\approx 0.5 - 0.8 \\ \omega_{gc} &\approx \tfrac{1}{\tau} : \tau \text{ von Sprungantwort} \end{aligned}$$

# Übertragungselemente

## Elementare Glieder

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= b_0 \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \end{aligned}$$

$m$ : Nullstellen $z_{1\ldots m}$
$n$ : Polstellen $p_{1\ldots m}$

### Elementare Funktionen

Werden für die Beschreibung beliebiger LTI-Systeme verwendet. Mit Parametern $k, a, \zeta, \omega_0, \tau \in \mathbb{R}$

| Typ | System | Übertragungsfunktion |
|---|---|---|
| Integrator | $\dot{y} = u$ | $\frac{1}{s}$ |
| Differentiator | $y = \dot{u}$ | $s$ |
| Erste Ordung | $\dot{y} + ay = u$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| Doppelintegrator | $\ddot{y} = u$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| Gedämpfter Oszillator | $\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u$ | $\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$ |
| Zustandsdarstellung | $\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ y = Cx + Du$ | $C(sI - A)^{-1}B + D$ |
| PID Regler | $y = k_p u + k_d \dot{u} + k_i \int u$ | $k_p + k_d s + \frac{k_i}{s}$ |
| Totzeit | $y(t) = u(t - \tau)$ | $e^{-\tau s} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+s\frac{\tau}{n})^n}$ |

$$\begin{aligned} G(s) &= k && : \text{konstanter Faktor} \\ G(s) &= s + a && : \text{einfache reelle Nullstelle} \\ G(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_o^2 && : \text{konj. komplexe Nullstellen } (\zeta \leq 1) \\ G(s) &= \tfrac{1}{s+a} && : \text{einfacher reller Pol} \\ G(s) &= \tfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_o^2} && : \text{konj. komplexe Pole } (\zeta \leq 1) \\ G(s) &= e^{-s\tau} && : \text{Totzeitglied } \tau > 0 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Nullstellen

$$\lambda = \begin{cases} -a & \text{einfach reell} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{konj. komplex} \end{cases}$$

**Polüberschuss** $n_{pe}$

Der *Polüberschuss* oder *relativer Grad* beschreibt die Differenz zwischen der Pol- und Nullstellen-Ordnung.

$$n_{pe} = n - m$$

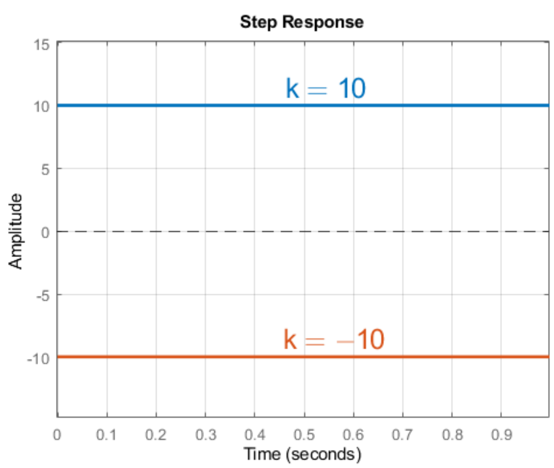
$$\begin{array}{ll} n_{pe} \geq 0 & \textit{proper}/\text{gebrochenrational} \\ n_{pe} > 0 & \textit{strictly proper}/\text{echt gebrochenrational} \end{array}$$

$$y = \begin{cases} \nexists & \text{falls} \quad n_{pe} \leq -2 \quad \text{bsp} \quad s^2 \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = -1 \quad\quad\quad s \\ \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = 0 \quad\quad\quad 1 \\ t \cdot \sigma(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = 1 \quad\quad\quad {}^1/_s \\ \delta(t)e^{st} + \dots & \text{falls} \quad n_{pe} = n \geq 2 \quad\quad {}^1/_{s^2} \end{cases}$$

## Bezeichnete Glieder

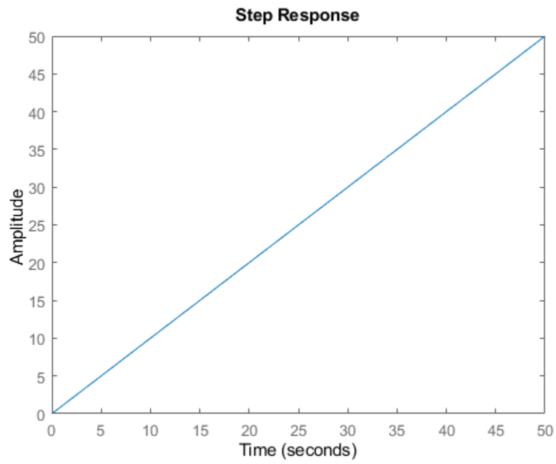
### P-Glied7

$$G(s) = k \qquad \text{konstanter Faktor}$$




### I-Glied

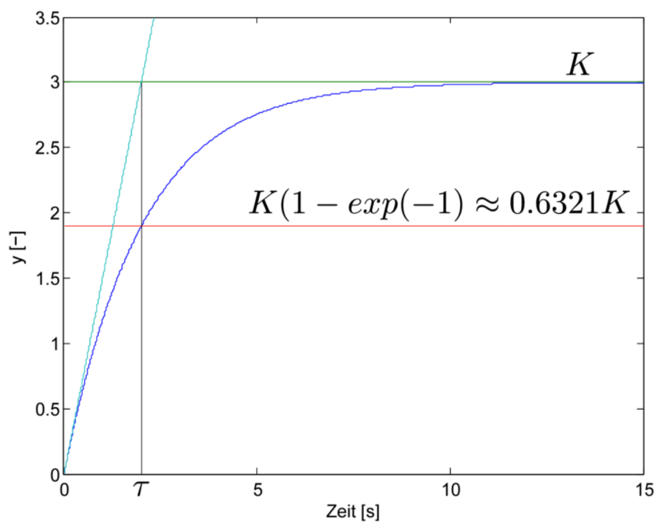
$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{Integrator}$$




### PT1-Glied

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

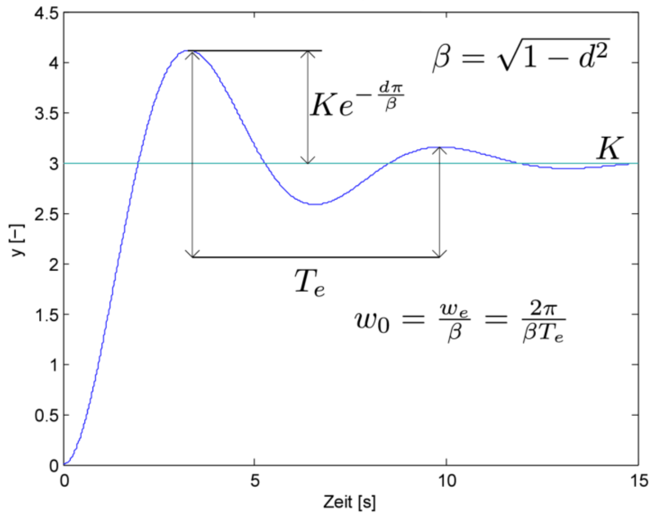
Sprungantwort




### PT2-Glied

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

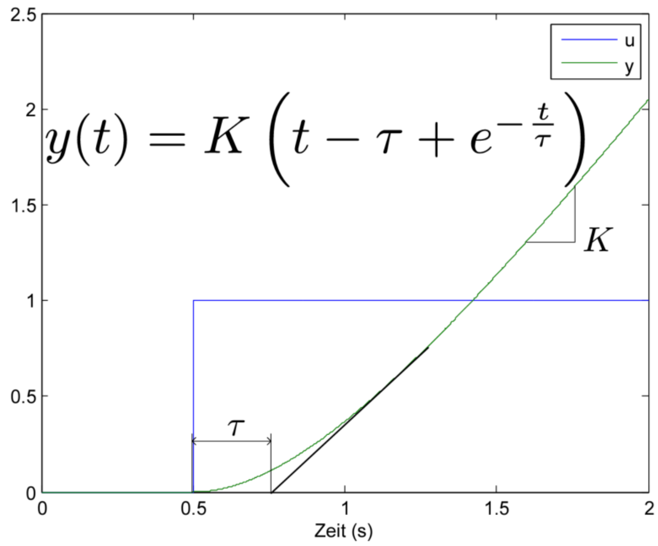
Sprungantwort & $d \mathrel{\widehat{=}} \zeta$




**IT-Glied**

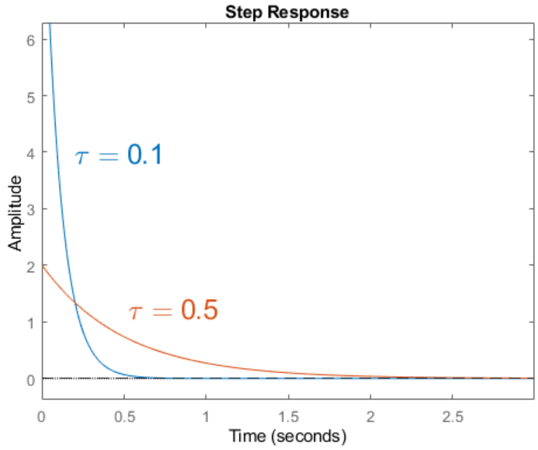
$$G(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}$$

Sprungantwort




**DT1-Glied**

$$G(s) = \frac{s}{1+sT} \qquad \text{Gefilterter Differentiator}$$

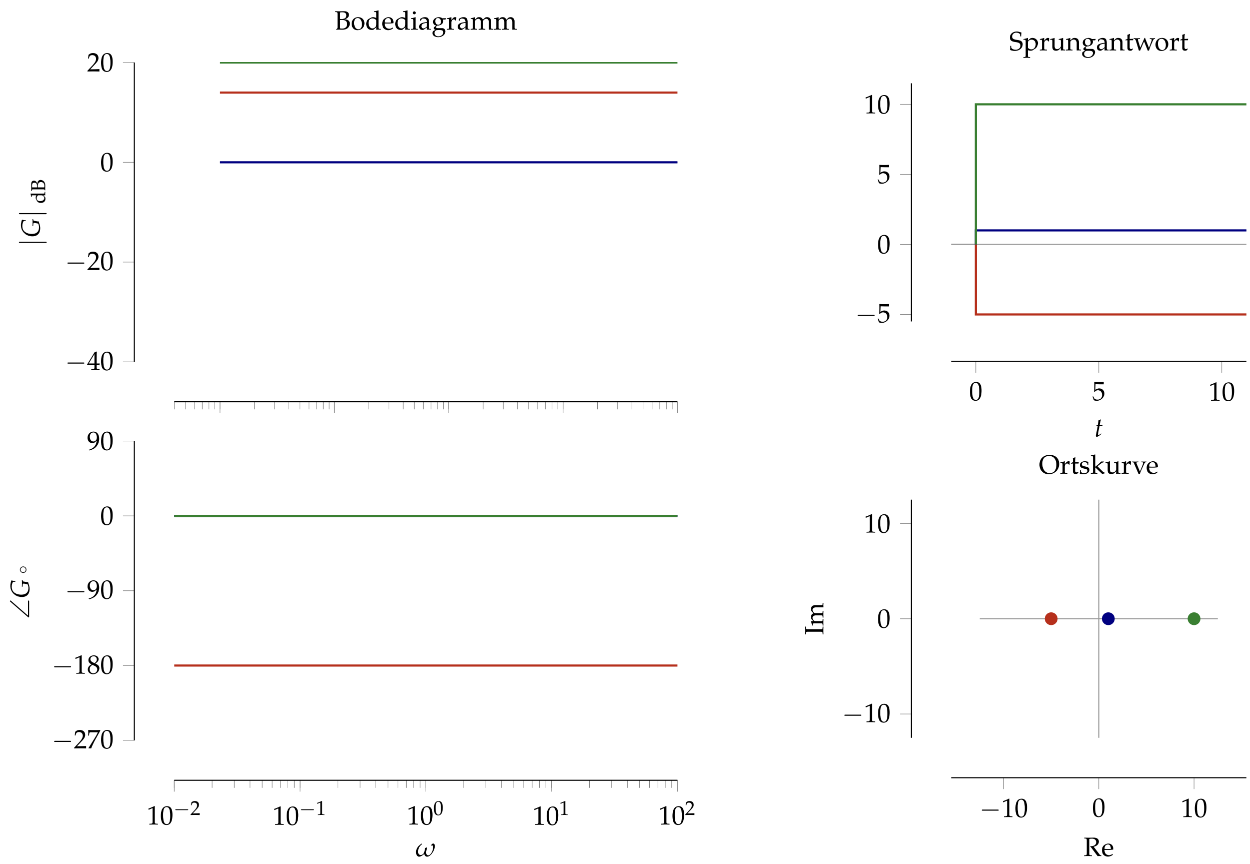



## Skizzieren von Bodediagramm

Folgende Seite beschreiben die Skizziermöglichkeiten, wie ein System im Bodediagramm gezeichnet werden kann.

KONSTANTER FAKTOR : $y = ku$.

$G = k$ $\quad$ $k = -5$ $\quad$ $k = 1$ $\quad$ $k = 10$



Reeller Pol : $\dot{y} + ay = u$.

$$G = \frac{1}{s+a} \qquad \textcolor{red}{a=-1} \quad \textcolor{blue}{a=0} \quad \textcolor{green}{a=+1}$$

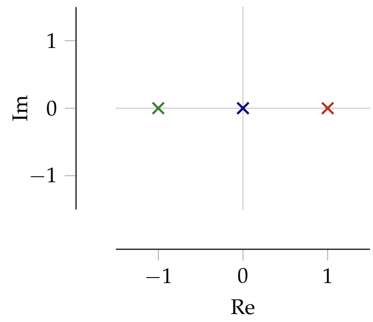
$$\omega_g = |a| \quad \Rightarrow \quad \angle G(j\omega_g) = -45 \,/ -135\,^\circ$$

$$|G(j\omega_g)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\text{ dB}$$

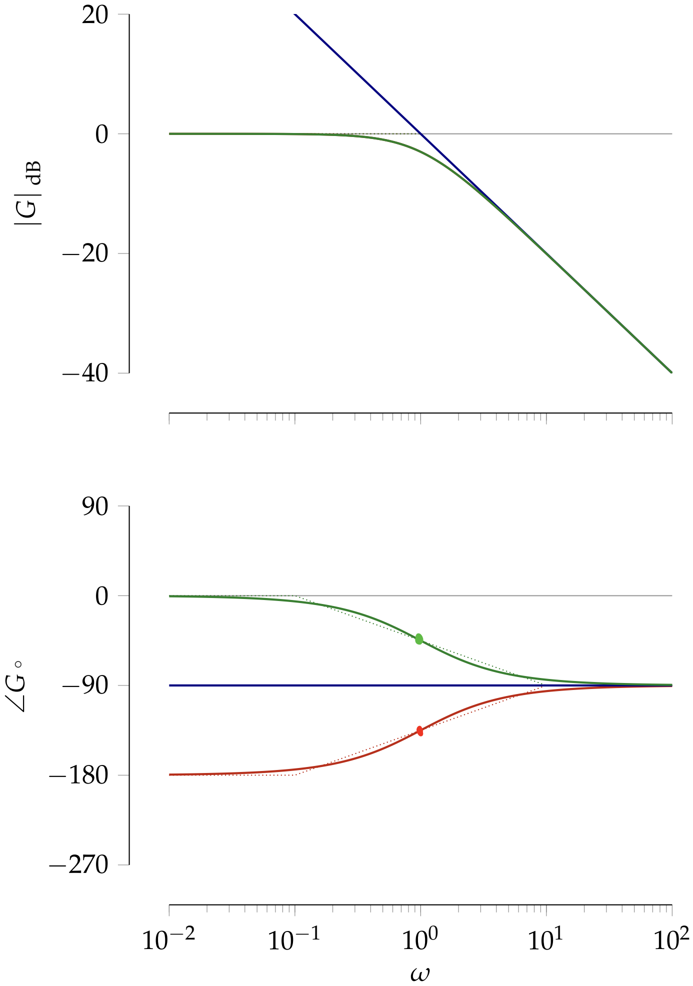
$$\omega \ll \omega_g \ : \qquad |G| \approx \frac{1}{|a|}$$

$$\omega_g \ll \omega \ : \qquad |G| \propto -20\ \text{dB/Dek.}$$

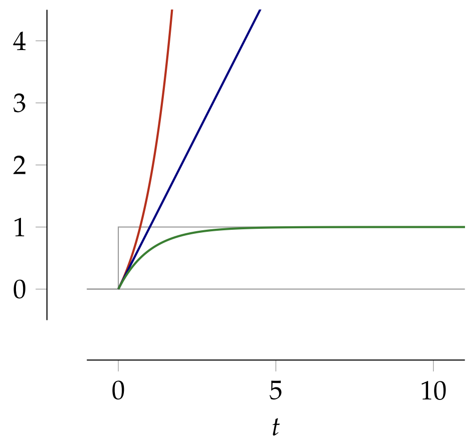
Pol-Nullstellenplan



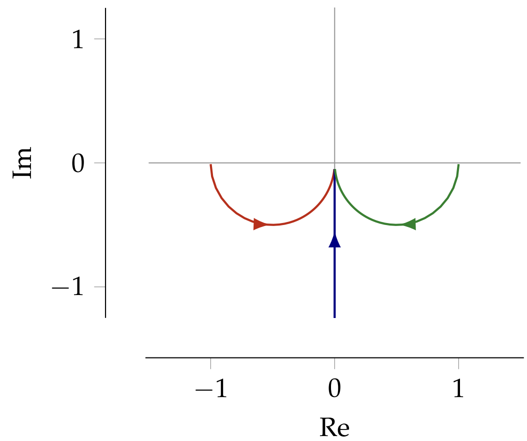

Bodediagramm




Sprungantwort

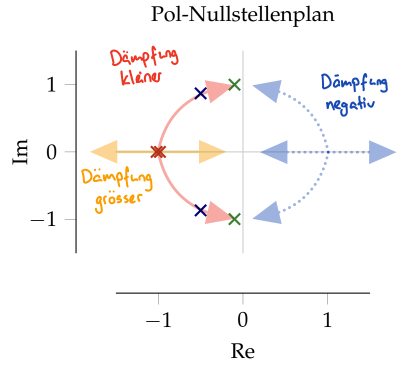



Ortskurve



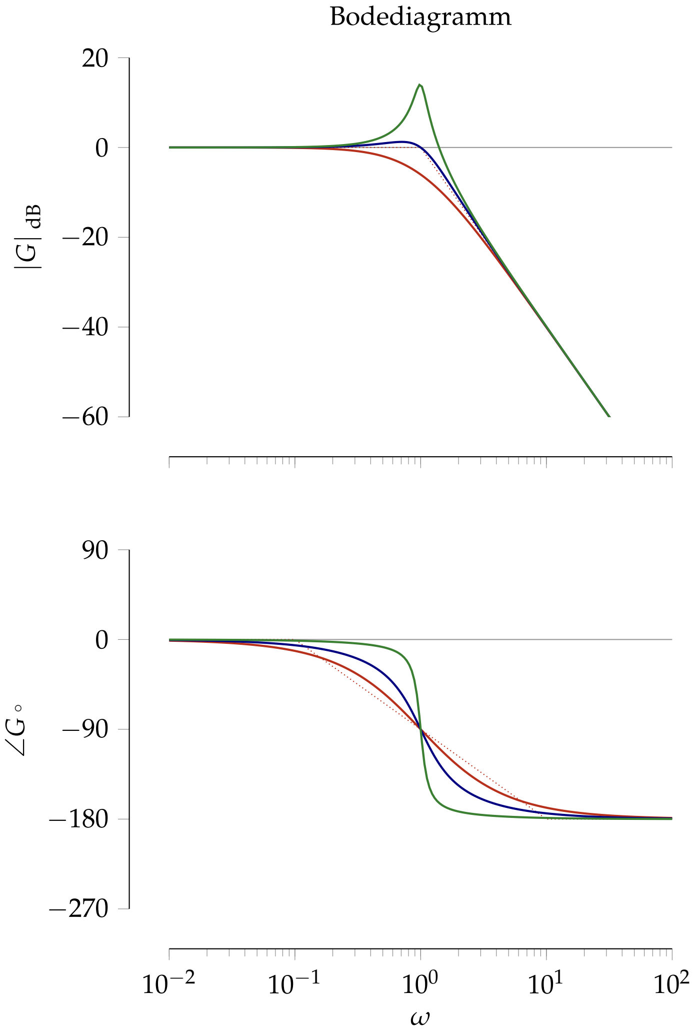
Konjugiert komplexes Polpaar : $\ddot{y} + 2a\dot{y} + by = u$.

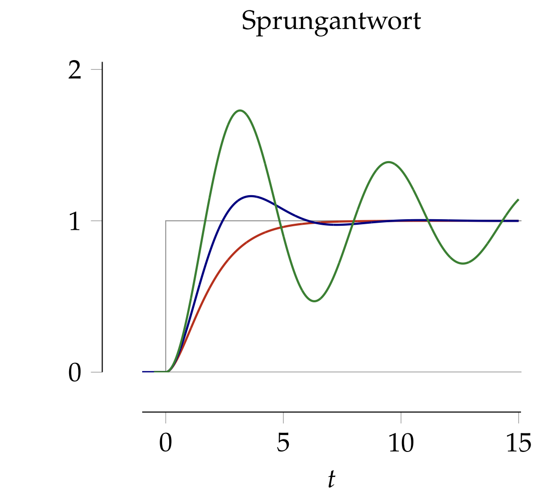
$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \omega_0 = 1 \quad \zeta = 1 \quad \zeta = 0.5 \quad \zeta = 0.1$$

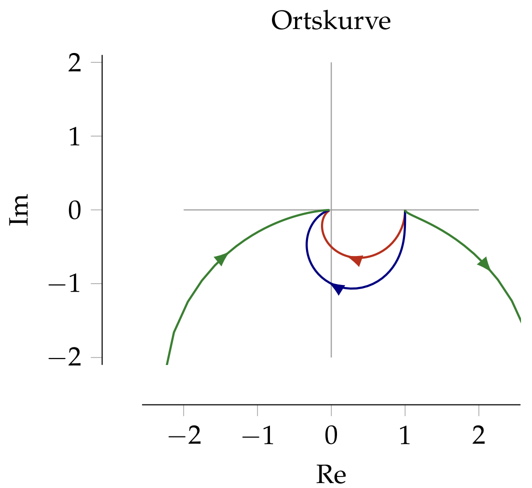



| | |
|---|---|
| | $\angle G(j\omega_0) = -90\,°$ |
| $\omega \ll \omega_0$ : | $\lvert G\rvert \approx 1/\omega_0^2$ |
| $\omega_0 \ll \omega$ : | $\lvert G\rvert \propto -40$ dB/Dek. |
| $\left(M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$ | relatives Überschiessen |

↳ Aktuell noch nicht wichtig



Reelle Nullstelle : $y = \dot{u} + au$.

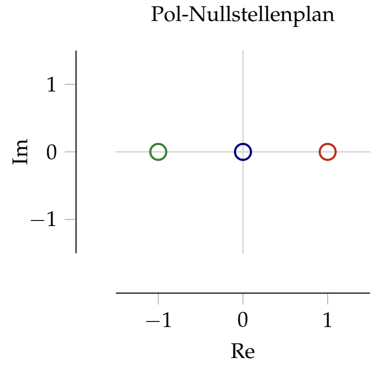
$G = s + a$ — $a = -1$ $a = 0$ $a = +1$

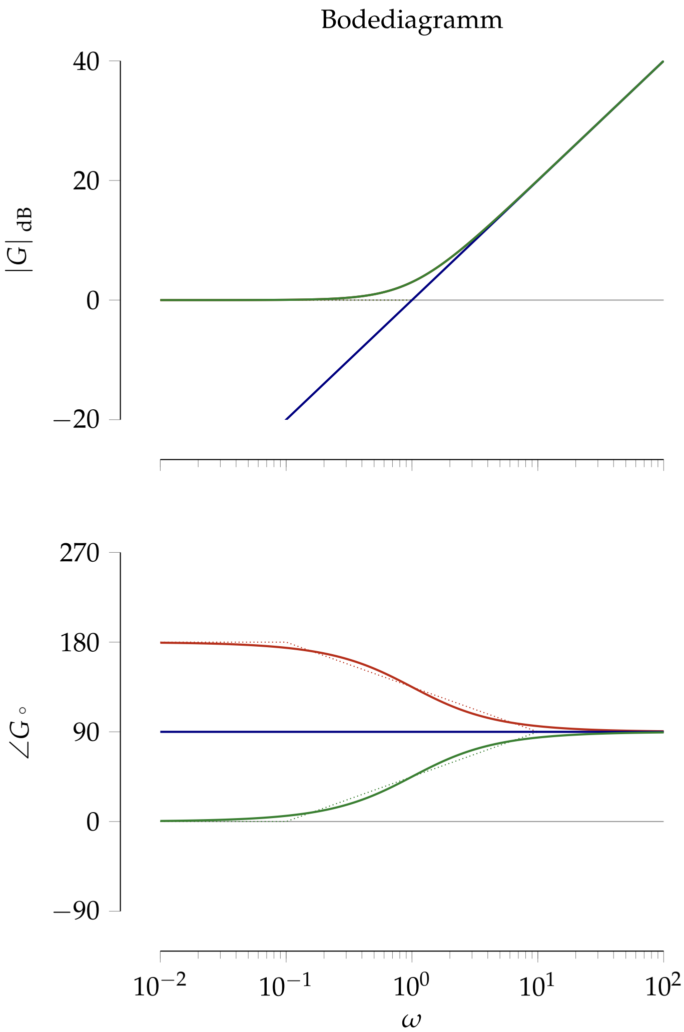
$\omega_g = |a| \quad \Rightarrow \quad \angle G(j\omega_g) = +45 / +135\,^\circ$

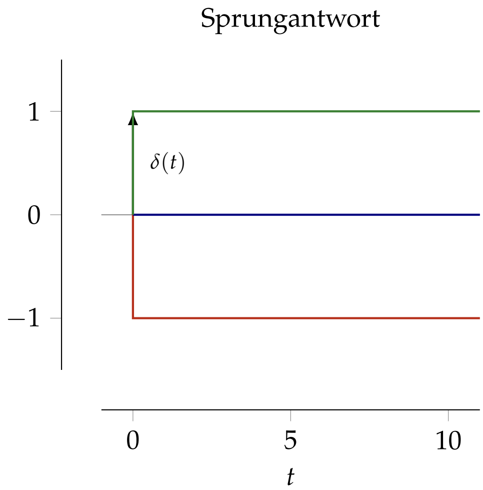
$|G(j\omega_g)| = \sqrt{2} \approx +3$ dB

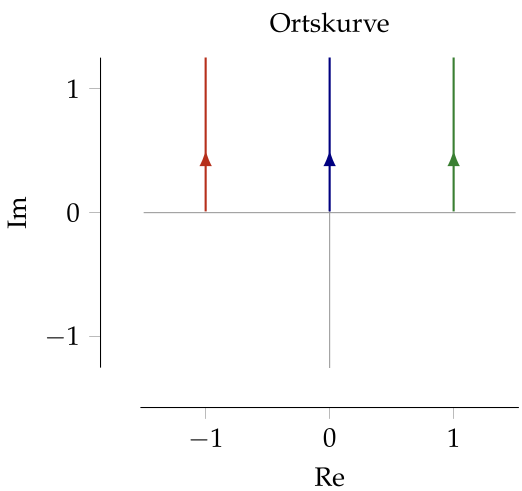
$\omega \ll \omega_g$ : $|G| \approx |a|$

$\omega_g \ll \omega$ : $|G| \propto +20$ dB/Dek.



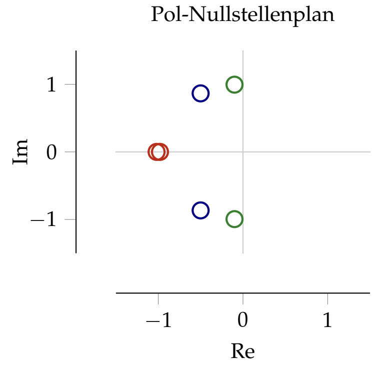
Konjugiert komplexes Nullstellenpaar : $y = \ddot{u} + a\dot{u} + bu$.

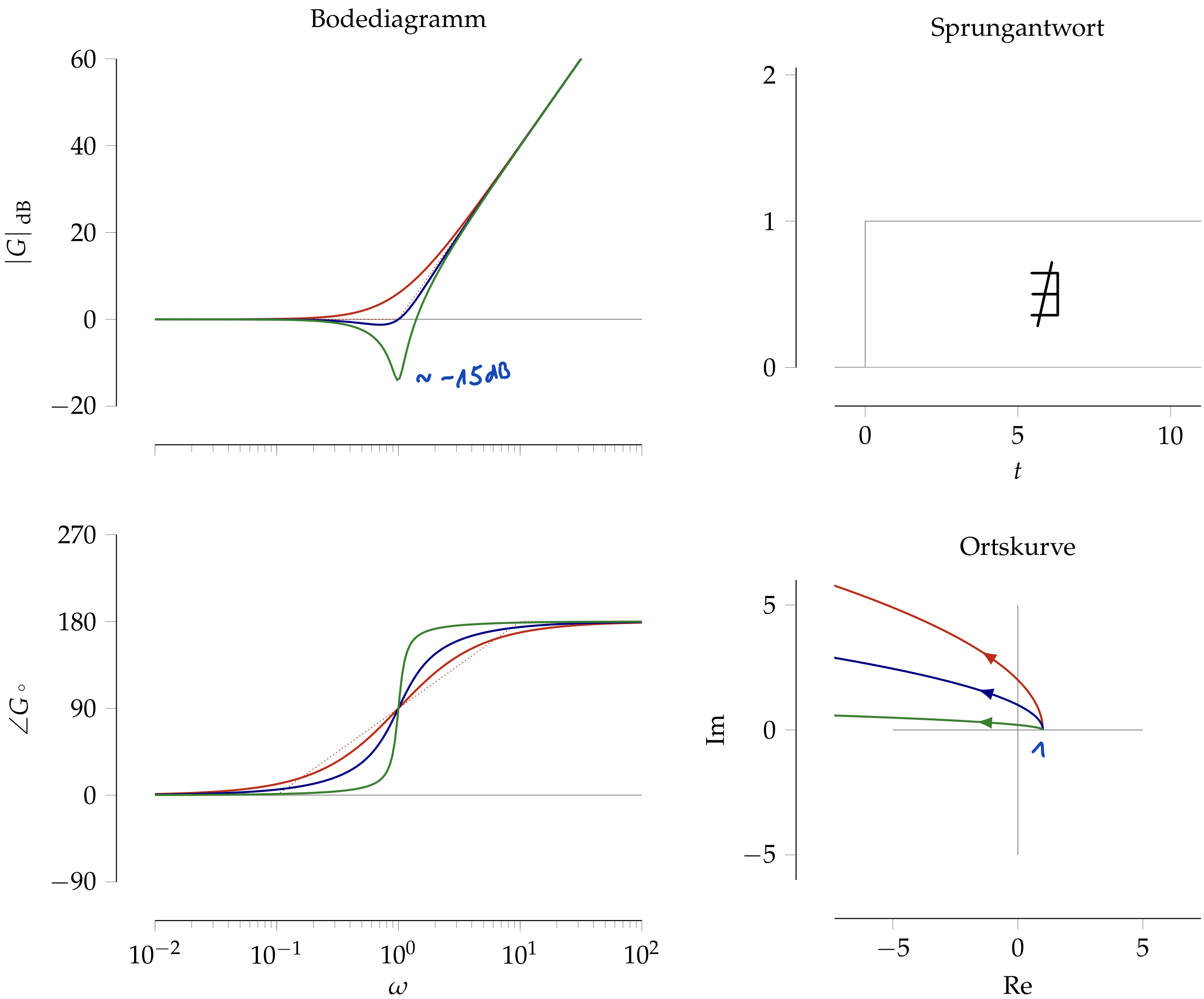
$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ $\quad$ $\omega_0 = 1$ $\zeta = 1$ $\zeta = 0.5$ $\zeta = 0.1$

$\angle G(j\omega_0) = +90]\ ^\circ$

$\omega \ll \omega_0$ : $\quad |G| \approx \omega_0^2$

$\omega_0 \ll \omega$ : $\quad |G| \propto +40$ dB/Dek.



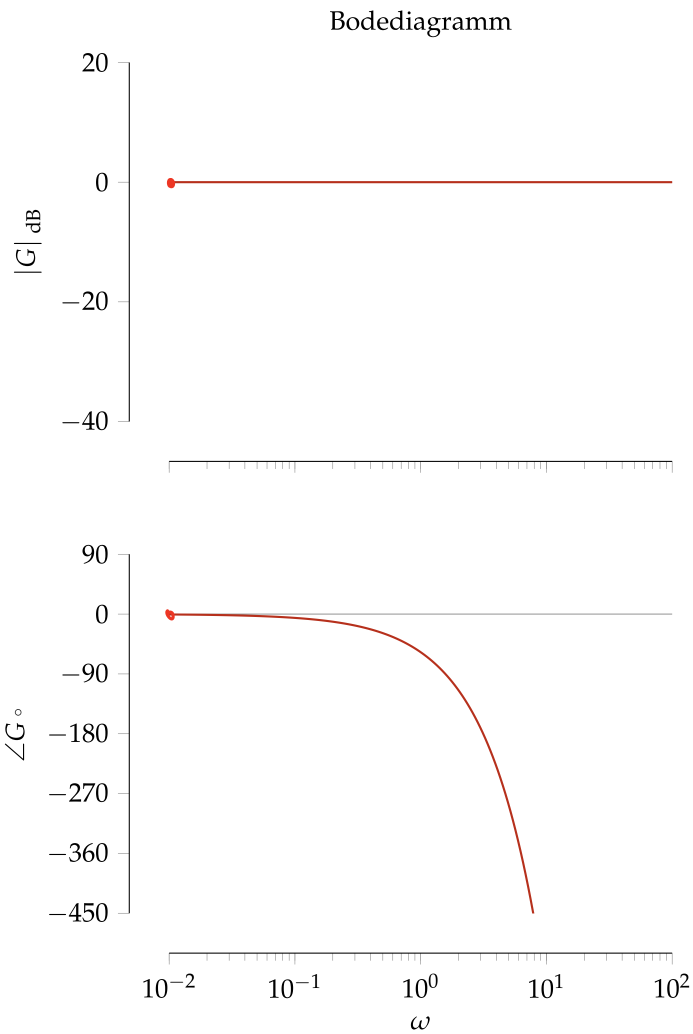
**Totzeit, Verzögerung** : $y(t) = u(t-\tau)$.

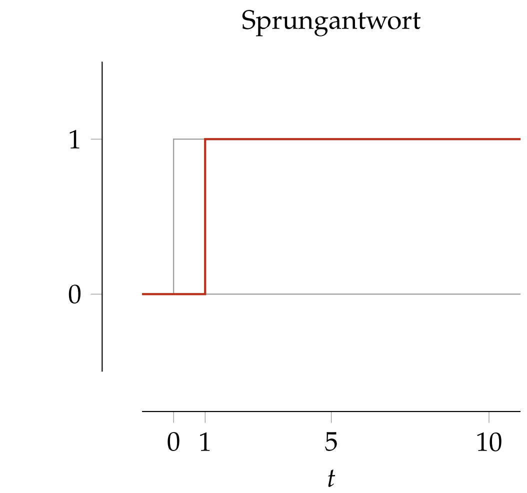
$G = e^{-s\tau} \quad \tau > 0$ $\qquad\qquad$ $\tau = 1$

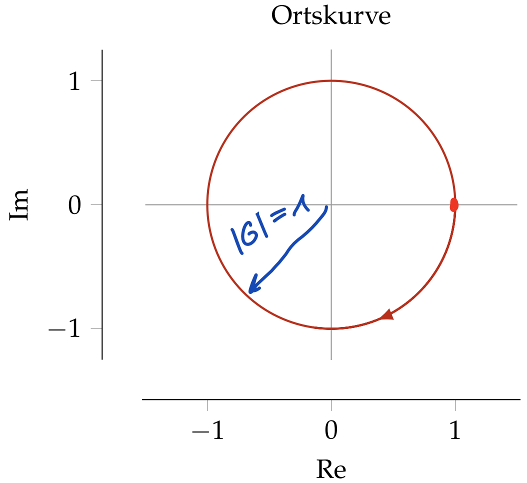
$\angle G(j\omega) = -\omega\tau$

$|G| = 1 = 0 \text{ dB}$

$$e^{-s\tau} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + s\frac{\tau}{n})^n}$$

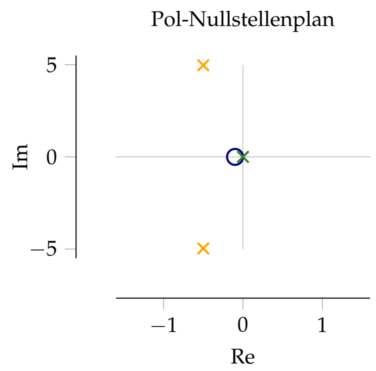


**Verkettung – Beispiel.**

$$G = \frac{10s+1}{s^3+s^2+25s} = \underbrace{10}_{G_1} \cdot \underbrace{(s+0.1)}_{G_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{G_3} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+s+25}}_{G_4}$$

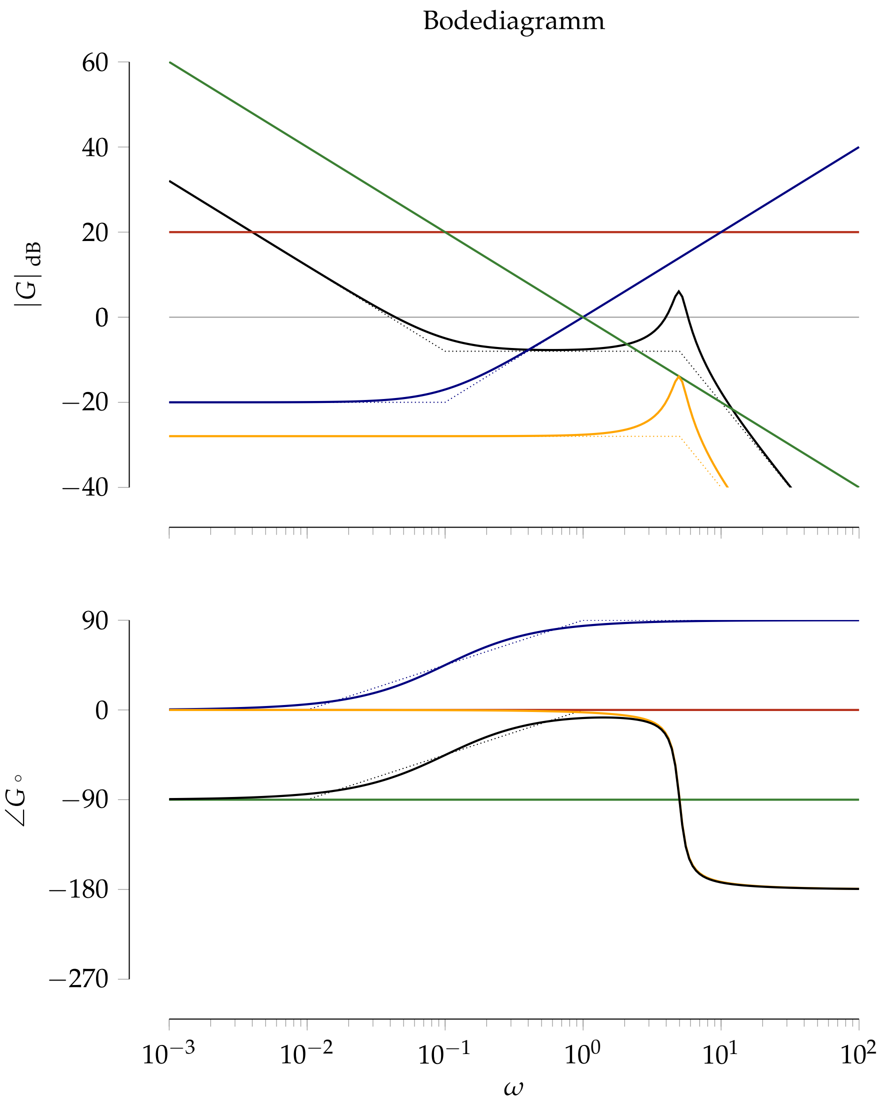


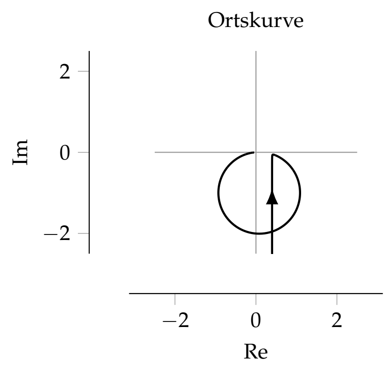

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = (s+0.1)$$

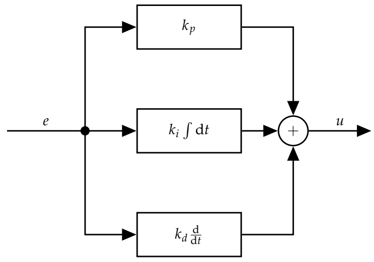
$$G_3 = \frac{1}{s}$$

$$G_4 = \frac{1}{s^2+s+25} = \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad \text{mit} \quad \omega_0 = 5\,, \;\; \zeta = 0.1$$



Addition – Beispiel PID.

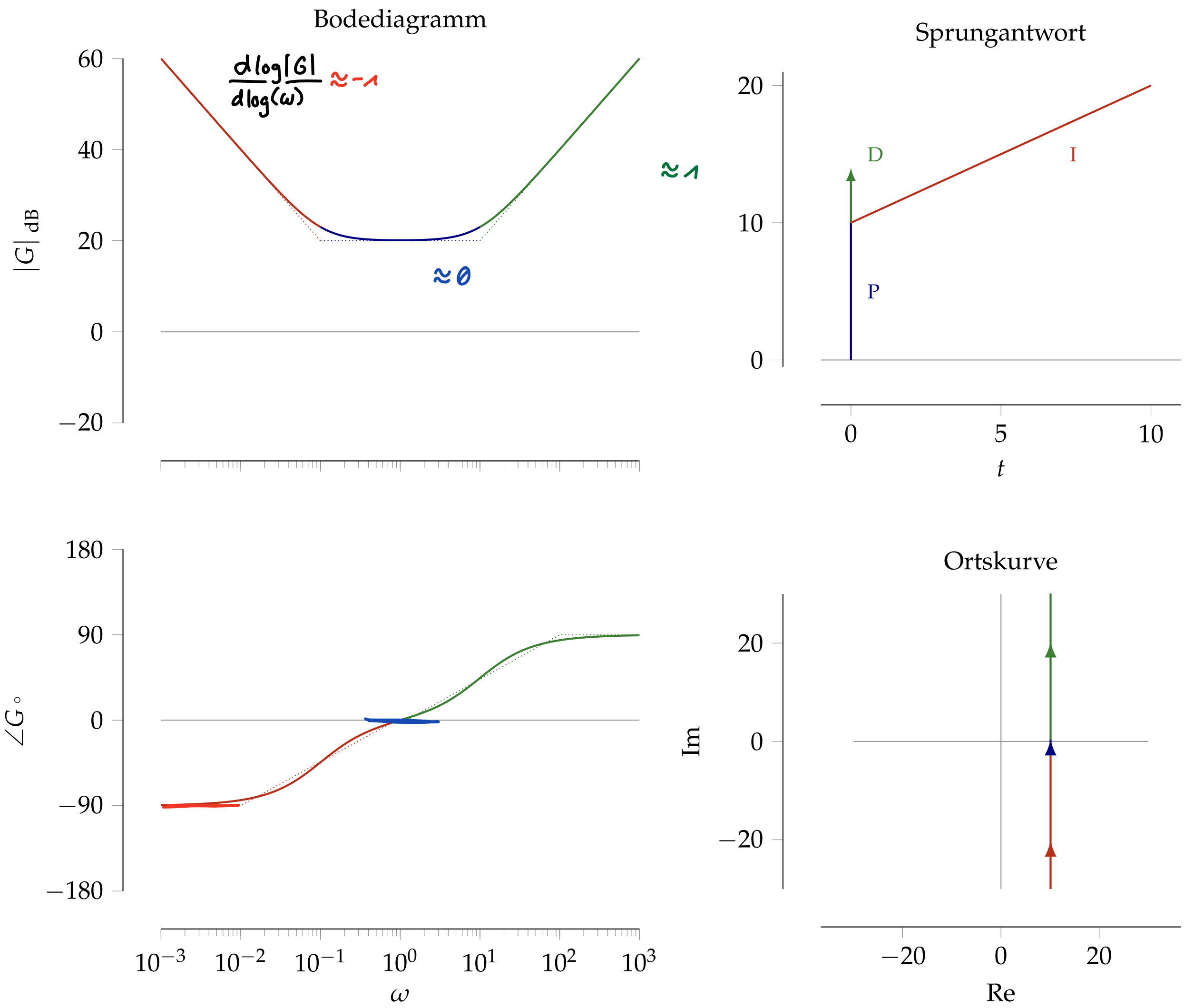



$$u = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + k_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

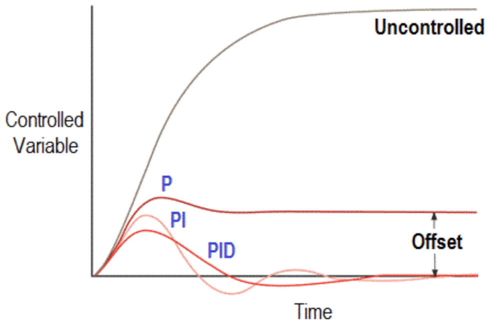
$$u = k_p e + k_i \frac{1}{s} e + k_d s e$$

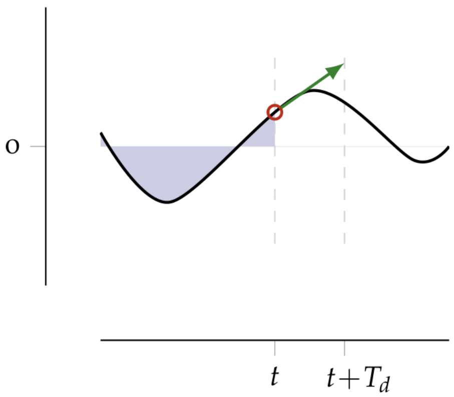
$$G = \frac{u}{e} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} = k \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s}$$

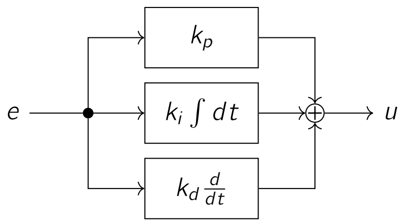
Graphen für $k = 1, T_1 = 0.1, T_2 = 10$ sowie $k_p = 10.1, k_i = 1, k_d = 1$



# PID-Regler




Die Aufgabe eines Reglers besteht darin, ausgehend von einem Regelfehler $e$ zum Zeitpunkt $t$ eine Stellgrösse $u$ so zu bestimmen, dass der Fehler in absehbarer Zeit reduziert wird.

**Verhalten Regler**

Grössere Fehler sollten zu grösseren Stellgrössen führen und kleinere Fehler zu kleineren Stellgrössen.

## Proportional $k_p$

P-Anteil verstärkt den Regelfehler $e$ um die *Proportionalverstärkung* $k_p$.

$$C(s) = k_p \qquad u = k_p \cdot e$$

**P-Regler**

$e = 0$ ist mit einem P-Regler nicht möglich. Unter Annahme eines stabilen Regelkreises:

$$G_{er} = \frac{1}{1 + P \cdot C} = \frac{1}{1 + P \cdot k_p}$$

entsteht ein bleibender Fehler von:

$$G_{er}(0) = \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} = \frac{1}{1 + P(0) \cdot k_p}$$

Dies kann mit einer Vorsteuerung korrigiert werden, was aber Störeinflüsse <u>nicht</u> ausschliesst:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + u_{ff} = k_p \cdot e(t) + \frac{r}{P(0)}$$

Besser ist ein PI-Regler

**Proportionalband**

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{falls } e \geq e_{max} \\ k_p \cdot e & \text{falls } e_{min} < e < e_{max} \\ u_{min} & \text{falls } e \geq e_{min} \end{cases}$$

mit

$$e_{min} = \frac{u_{min}}{k_p} \qquad e_{max} = \frac{u_{max}}{k_p}$$

**Permanentes Stellsignal $u$**

Wird ein permanentes Stellsignal $u$ benötigt, so gilt für den P-Regler einen bestimmten Fehler $e \neq 0$.

## Integral $k_i, T_i$

Mit dem I-Anteil werden *vergangene* Fehler mitberechnet $\rightarrow$ stationäre Fehler des P-Anteils wird korrigiert.

$$C_{PI} = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \qquad u = k_i \cdot \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

Die Stellgrösse wird dadurch solange geregelt, bis der Regelfehler $e = 0$ wird.

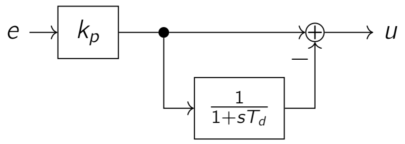
## Differential $k_d, T_d$

Der D-Anteil reagiert auf *zukünftige* Fehler, indem die Steigung mit einem Verstärkungsfaktor $k_d$ verstärkt wird.

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \qquad u = k_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

### Filter D-Anteil

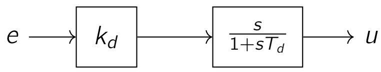
**Grund**: Für träge Prozess (z.B. mit Totzeit) führt eine sprungartige Veränderung (z.B. Sprungantwort oder Dirac-Impuls) zu einem sprungartigen Regelfehler $e(t) \approx \sigma$. Der D-Anteil wird daher mit einem Tiefpass-Filter erweitert.




Für tiefe Frequenzen ($|s| \ll \frac{1}{T_d}$) wird $G_{ue} \approx k_p T_d s$ und hohe Frequenzen wird $G_{ue} \approx k_p$ (limitiert durch $k_p$)

$$C_D(s) = k_p \frac{T_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d} = \frac{k_d \cdot s}{1 + s \cdot T_d}$$

Anders dargestellt:




## Übertragungsfunktion

$$C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = k_p \cdot \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{T_i \cdot s}$$
$$= \underbrace{k_p \cdot e}_{P} + \underbrace{\frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{I} + \underbrace{k_p \cdot T_d \frac{de}{dt}}_{D}$$

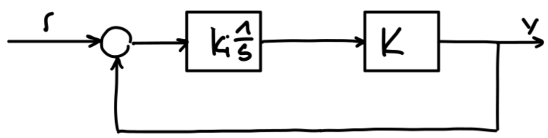
$k_p$ : Reglerverstärkung
$T_i = {}^{k_p}/_{k_i}$ : Nachstellzeit
$T_d = {}^{k_d}/_{k_o}$ : Vorhaltzeit

> **! Wichtig**
>
> Diese Beschreibung ist nur eine idealisierte Repräsentation, welche für das Verständnis des System hilfreich ist. Im praktischen Einsatz sind Modifikationen notwendig.

## Auslegung anhand…

### …Modelle geringer Ordnung

### Approximation 0-er Ordnung




Für einen statischen Prozess $K = P(0)$ und einen I-Regler wird $L = PC = K \cdot \frac{k_i}{s}$:

$$G_{yr} = \frac{K \cdot k_i}{s + K \cdot k_i} = \frac{1}{1 + s \cdot T_{cl}}$$

$$k_i = \frac{1}{T_{cl} \cdot K} = \frac{1}{T_{cl} \cdot P(0)}$$

> **mittlere Verzögerungszeit**
>
> Die Auslegung bedingt, dass der Prozess gut durch eine Konstante beschrieben werden kann. Ein vernünftiges Kriterium dafür ist die Bedingung:
>
> $$T_{cl} > T_{ar} \qquad T_{ar} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$
>
> $T_{ar}$ : mittlere Verzögerungszeit
> $T_{cl}$ : Zeitkonstante des geschlossenen Kreises
>
> $T_{ar}$ beschreibt die Zeit, bis die Sprungantwort des Systems sich gesetzt hat.

### Approximation 1-ter Ordnung

Näherung erster Ordnung kann folgendes Modell gewählt werden.

$$P \approx P(0) + P'(0)s \approx \frac{P(0)}{1 + sT_{ar}}$$

### …Bodediagramm

Diese Auslegung wird mit dem **offenen** Regelkreis gemacht.

$$C(s) = k_i \frac{(1 + s\,T_1)(1 + s\,T_2)}{s} = k_p \frac{(1 + s\,T_i)(1 + s\,T_d)}{s \cdot T_i}$$

Zielgrössen: Durchtrittsfrequenz $\omega_{gc}$, die Phasenreserve $\varphi_m$ und allenfalls Amplitudenreserve $g_m$.

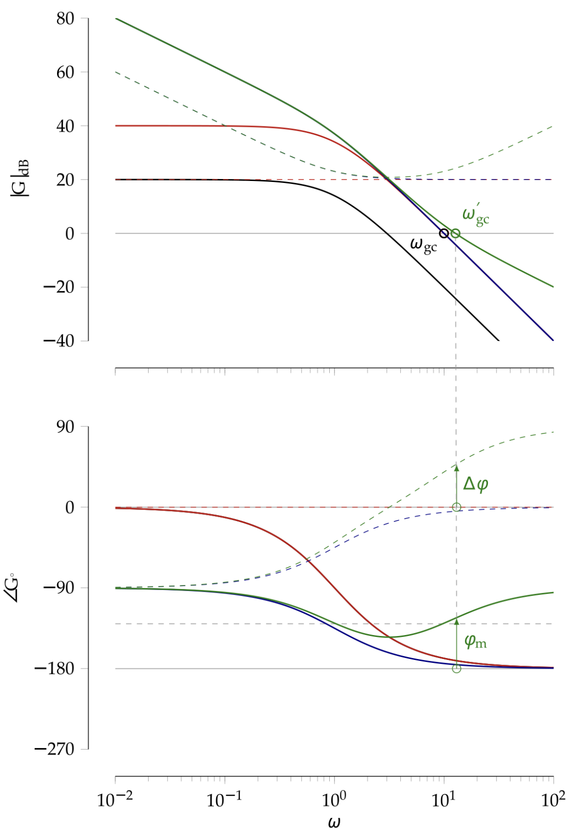
> **Vorgehen**
>
> Prozess: $P(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$ mit Ziel $\omega_{gc} \geq 10\frac{rad}{s}$, $\varphi_m \geq 50$.
>
> 1. P-Regler für Erreichung von $\omega_{gc}$. Mit $|k_p \cdot P(j\omega_{gc})| = 1$ (Nyquist-Kriterium) folgt:
>
> $$k_p = \frac{1}{\left|\frac{10}{1+10j}\right|} = \frac{(\sqrt{1^2+10^2})^2}{10} = 10.1$$
>
> $$C(s) = k_p = 10.1$$
>
> 2. PI-Regler für Reduktion der zusätzlichen Phasensenkung im Bereich von $\omega_{gc}$

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)}{s} = \frac{10 \cdot (1 + s)}{s}$$

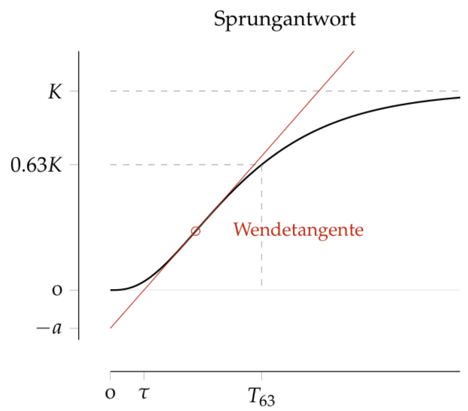
1. PID-Regler für genügend Phasenabhebung im Bereich von $\omega_{gc}$

$$C(s) = k_i \cdot \frac{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}{s} = 10 \cdot \frac{(1 + s)(1 + 0.1s)}{s}$$

4. Kontrolle von resultiernden Durchtrittsfrequenz $\omega'_{gc}$ und damit ergebenden Phasenreserve $\varphi_m$.

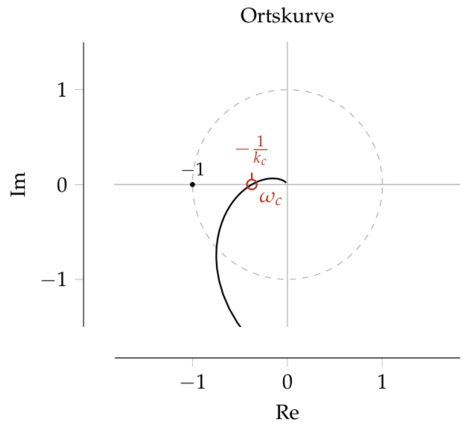



### . . . Einstellregeln im Zeitbereich




| Typ | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|
| P | $^1/_a$ | - | - |
| PI | $^{0.9}/_a$ | $3 \cdot \tau$ | - |
| PID | $^{1.2}/_a$ | $2 \cdot \tau$ | $0.5 \cdot \tau$ |

### . . . Einstellregeln im Frequenzbereich




| Typ | $k_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|
| P | $0.5 \cdot k_c$ | - | - |
| PI | $0.4 \cdot k_c$ | $0.8 \cdot T_c$ | - |
| PID | $0.6 \cdot k_c$ | $0.5 \cdot T_c$ | $0.125 \cdot T_c$ |

## Stellgrössen-Sättigung

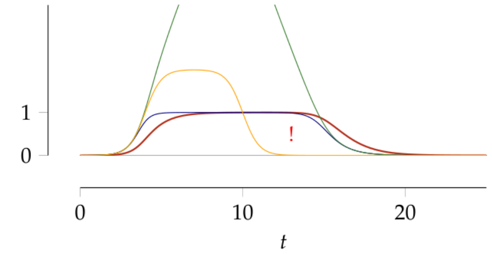
In Realität kann der Regler nur einen (hoffentlich bewusst) begrenzten Stell-Bereich ausgeben. Dies wird die *Stellgrössen-Sättigung* genannt.

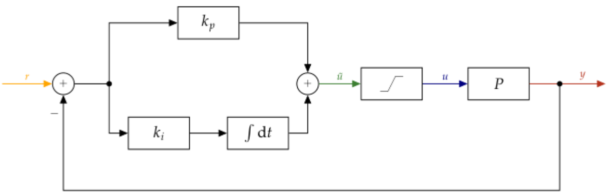
**Sättigungseffekt**

Arbeitet der Regelkreis in der Sättigung, so ist dieser faktisch unterbrochen – *das System arbeitet als offener Kreis*, solange in der Aktor im gesättigtem Zustand ist.

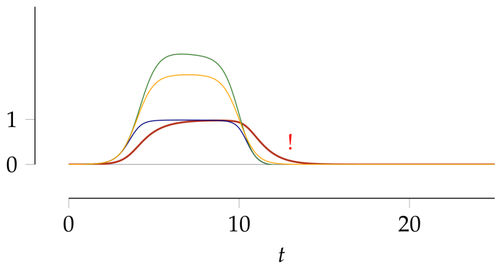
### Windup & Anti-Windup

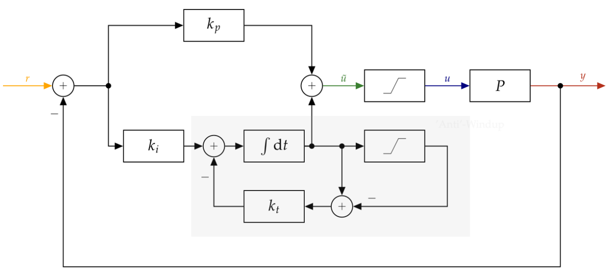
Enthält der Regelkreis einen I-Anteil und ist der Aktor im gesättigten Zustand, so lädt sich der I-Anteil mit einem $\neq 0$-Regelfehler auf. Dies bezeichnet man als **Windup**. Erholt sich der Aktor, muss der I-Anteil abgebaut werden.




Mit *Anti-Windup* wird der exzessive Anteil mit einem invertierten Vorzeichen an den Integrator zurückgeführt und somit der Windup klein gehalten. Die *Erholzeit* nach einer Stellgrössensättigung kann deutlich verkürzt werden.




$$k_t \approx 10k_i$$

# Diskretisierung

## PID-Regler

### Auslegung

Digitalrechner arbeiten zeitdiskret $\leftrightarrow$ Prozesse sind von zeitkontinuierlicher Natur

> **Perspektiven für Entwurf zeitdiskrete Regler**
>
> 1. *Prozess*:
> 2. *Regler*:

# MATLAB

## Vektoren

Vektoren werden mit `[...]` deklariert. Elemente werden Spaltenweise mit einem Leerschlag `' '` oder Komma `,` eingeteilt und mit einem Semikolon `;` Reihenweise geteilt.

```
data = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]; % same as [1 2 3;4 5 6;7 8 9];
```

> **Grösse `size`**
>
> Mit `size` kann die Grösse einer Variable ermittelt werden. `size` gibt als Resultat ein 1x2 Vektor zurück ($\begin{bmatrix}\text{Rows} & \text{Columns}\end{bmatrix}$)
>
> ```
> >> a = 1
> >> size(a)
>      1     1  % rows, columns
> ```

```
a = 1
```

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad \text{oder einfach} \quad 1$$

Die `size`-Funktion gibt auch bei einzelnen Werte eine Grösse aus, nämlich $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

```
b = [1 2 3] % Linienvektor
```

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

```
c = [2;3;4] % Spaltenvektor
```

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

> **Slicing**
>
> Mit *Slicing* kann ein Teil einer Matrix **kopiert** werden und einer anderen Variable zugewiesen werden.

```
<matrix>(<rowStart>:<rowEnd>,<colStart>:<
↪ colEnd>)
```

## Plotting

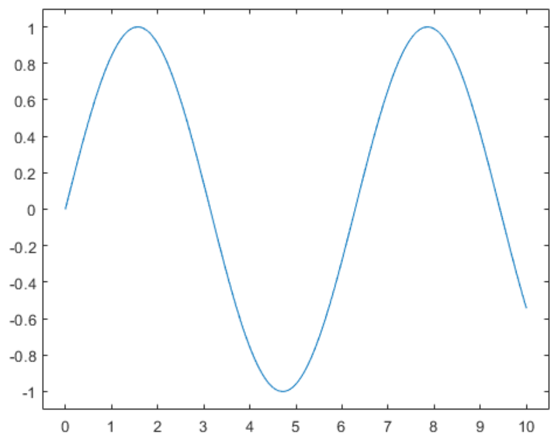
**Figure-Separierung**

Mit `figure(n)` können mehrere Plot-Befehle in eigene Figuren geladen werden.

### XY-Graph

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;
y = sin(t);

plot(t,y);
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);
```



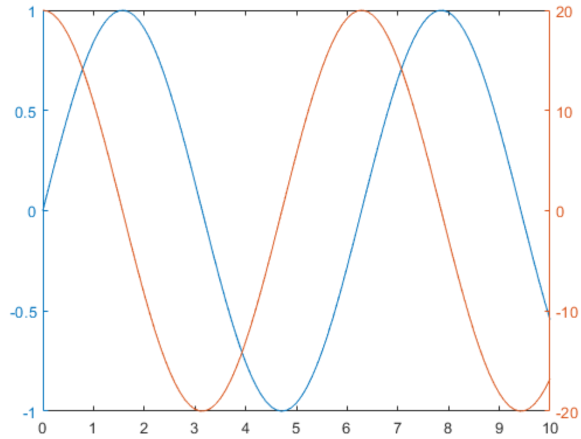
### XYY-Graph

Mit `yyaxis` kann die Y-Achse beim selben Plot mit `left` & `right` gewechselt werden.

```
figure(1);
t = 0:0.5:10;

yyaxis left;
plot(t, sin(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-1.1 1.1]);

yyaxis right;
plot(t, 20*cos(t));
xlim([-0.5 10.5]);
ylim([-20.5 20.5]);
```



## Transferfunktion `tf(...)`

Mit dem Befehl `tf(...)` kann eine Transferfunktion deklariert werden mit Zähler- und Nenner-Zeilenvektoren.

```
sys = tf(numerator,denominator);
```

Die Transferfunktion kann in anderen Funktion wiederverwendet werden, wie zum Beispiel `step` oder `bode`. Folgende Beispiele sind mit der `sys`-Transferfunktion (folgende Gleichung) gemacht.

$$G_{sys}(s) = \frac{4}{s^2 + s + 10}$$

```
sys = tf(4,[1 2 10]);
```

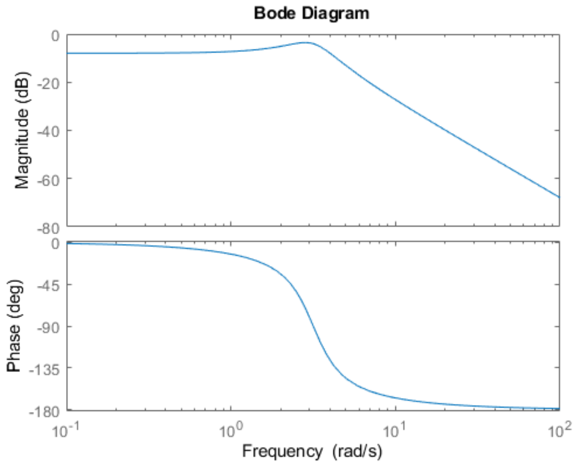
### PID-Regler `pidstd`

```

```

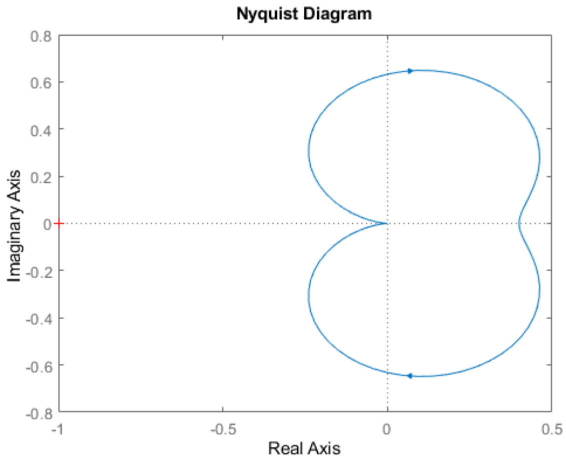
### Bode-Diagramm `bode`

```
bode(sys,{0.1,100}); % or bode(sys);
% grid on; to enable Grid in Plot
```




### Nyquist-Diagramm `nyquist`

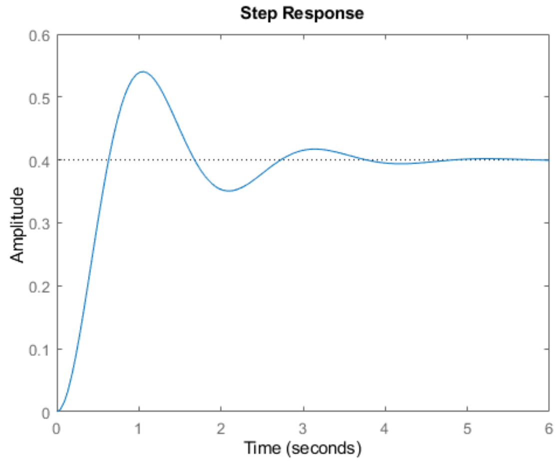
```
nyquist(sys)
```




### Sprungantwort `step`

Mit `step(...)` kann eine Transferfunktion mit der Sprungfunktion $\sigma$ verwendet werden. Damit

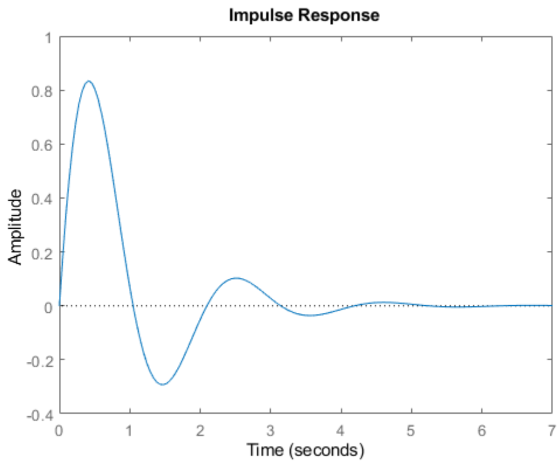
```
step(sys);
```




### Impulsantwort `impulse`

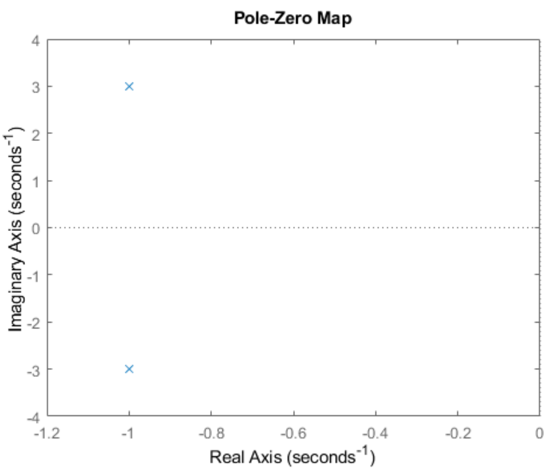
Mit `impulse(...)` kann die Impulsantwort der Transferfunktion ausgegeben werden.

```
impulse(sys);
```




### Pol-Nullstellen-Diagramm `pzmap`

```
pzmap(sys);
ylim([-4 4]); xlim([-1.2 0]);
```



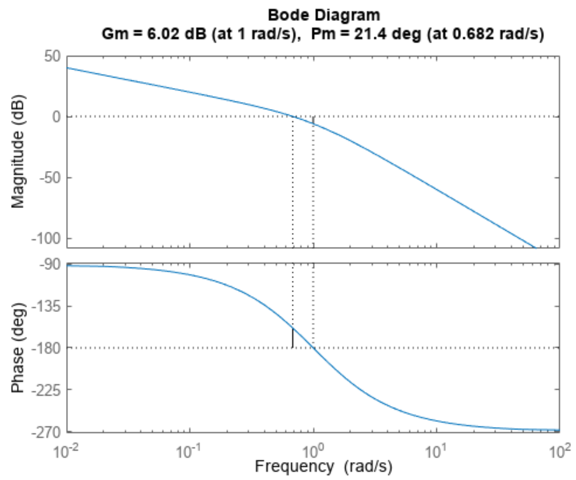

**MATLAB Zauber**

Damit die Pol- und Nullstellen erkennbar sind, muss eventuell mit den Darstellungsgrenzen gespielt werden.

### Margin `margin(tf)`

Mit dem Befehl `margin(tf)` kann das Bode-Diagramm

```
margin(tf(1,[1 2 1 0]))
```




### Zustandsraumdarstellung `ss()`

Mit `ss(...)` können vier Matrizen $A, B, C, D$ zu einer Zustandsraumdarstellung zusammengeführt werden.

```
A = [0 1;-5 -2];
B = [0;3];
C = [0 1];
D = 0;
Ts = 0.25;
sys = ss(A,B,C,D,Ts);
```

Es kann ebenfalls `bode`, `nyquist`, `step`, etc. angewendet werden, da die ZRD eine andere Darstellung der Übertragungsfunktion ist.

### Reglersimulator `Sisotool(tf(...))`

Mit `sisotool` kann ein Regler $C$ basierend auf einem Prozess $P$ ausgelegt werdne.

```
P = tf(...);
sisotool(P); % Der Prozess wird angegeben
```

- 

## Simulink

## Anleitungen / Vorgehen

### Modellierung dynamischer Systeme

1. Festlegung der Systemgrenzen sowie der Ein-/ Ausgangsgrössen.
2. Identifikation der relevanten Energiespeicher und der zugehörigen 'Füllstandsgrössen'.
3. Formulierung der Bilanzgleichungen für die Energiespeicher.

$$\frac{d}{dt}\text{Füllstand} = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}$$

4. Formulierung der Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Energiespeichern.
5. Identifikation der Systemparameter anhand von Spezifikationen oder Experimenten.
6. Validierung des Modells durch Experimente. Je nach Resultat Iteration des Verfahrens.

### Stabilitätsbestimmung

1. Offener Kreis bilden $L = PC$
2. Nyquist/Ortskurve zeichenen `nyquist(L)`
3. Bodediagramm zeichnen `margin(L)`, `bode(L)`
4. Stabilitätsbedingung anhand Nyquist-Kriterium prüfen

### Parameter Identifikation

1. Hypothese über die Modellstruktur (Naturgesetze oder Black Box). Beispiel

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

2. *Gute* Anregung (Impuls, Sprung, Rampe,...) auswählen und Experiment durchführen
3. Messdaten $y(k)$ speichern
4. Mit $(u(k), y(k))$ die Parameter $(b, a_1, a_2)$ bestimmen
5. Modell & Parameter validieren (wenn nicht gut, zurück zu Punkt 1 mit neuem Modell)

# Übertragungsfunktion

**Wichtig**

Egal welche Methode verwendet wird um die Übertragungsfunktion herzuleiten, es wird immer die gleiche Funktion ergeben.

## Harmonische Anregung linearer Systeme

Eingangssignal $u$:

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{\overbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}^{\text{Übertragungsfunktion}} e^{st}}_{\text{stationär } y_s}$$

**Hinweis**

Ist $A$ stabil, so geht transiente Anteil $y_t$ asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion


→ Project Pigeon

## Glossar

- *SISO* – **S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput
- *MIMO* – **M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput