LOGARITHMEN UND POTENZRECHNUNG

3APC – AMA

ZAHLENBEREICHE

N – Natürliche Zahlen
1, 2, 3, …

N_0 inkl. 0

Z – Ganze Zahlen
… −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3

Q – Rationale Zahlen
Z und Brüche

POTENZGLEICHUNGEN

Eine einfache Gleichung mit drei unbekannten

$$a = b^c, a \in Q, b \in \mathrm{N}, c \in Z$$

- Der Wert der Variablen ist unbekannt (in einem festgelegten Zahlenbereich).
- Setzt man nun z.B. folgende Werte ein
  - b = 2
  - c = 3
- dann gilt für a
  - $a = 2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$

Bei Potenzgleichungen spricht man von Basis, Exponent und Potenz.

Basis$^{\text{Exponent}}$ = (Wert der) Potenz

NEGATIVE EXPONENTEN

$(1/4)^{-2} = 4^2$

Ist diese Aussage richtig?

Ja, da gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Probe:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{1}\right) * \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2$$

RECHENREGELN POTENZGLEICHUNG

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(a^m)^n = a^{m*n}$
- $a^m * a^n = a^{(m+n)}$
- $(a*b)^n = a^n * b^n$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^0 = 1$

5

REIHENFOLGE RECHENREGELN

Klammer
Potenz
Punktrechnung
Strichrechnung

6

BEISPIELE POTENZGLEICHUNG

Aufgabe 1:

Rechnen Sie folgende Beispiele unter Verwendung der jeweiligen Rechenregel (zuerst Rechenregel anwenden, dann ausrechnen).

a) 5^{-3}
b) $(12 * 4)^2$
c) $4^{\frac{3}{2}}$
d) $\frac{6^9}{6^7}$

7

LÖSUNG

a) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$
b) $(12 * 4)^2 = 12^2 * 4^2 = 144 * 16 = 2304$
c) $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
d) $\frac{6^9}{6^7} = 6^{9-7} = 6^2 = 36$

8

LOGARITHMUS

Bei der Potenzgleichung Beispiel $p = b^x$ gilt
- b = Basis
- x = Exponent
- p = Potenz

Wie berechnet man nun aber den Exponenten, wenn folgendes gegeben ist:
- Bei Basis 2 erhält man als Ergebnis die Potenz 8 ($8 = 2^x$). Welchen Wert hat der Exponent?
- geg.: Basis b = 2
- Potenz p = 8
- ges.: Exponent x = ?
- $p = b^x$, z.B. Probieren: 2 * 2 = 4 * 2 = 8, daher x = 3
- Durch Probieren kommt man hier noch zu einem Ergebnis, aber bei $2^x = 0{,}2031$?

9

Wird der Exponent gesucht, muss man den Logarithmus anwenden.

Es gilt: **Logarithmus**

$\log_{Basis}$ (Potenz) = Exponent (Logarithmus = Exponent)

Von einer Logarithmusgleichung spricht man, wenn die Potenz gesucht wird.

10

Das Beispiel muss also wie folgt lauten.
- Bei Basis 2 erhält man als Ergebnis die Potenz 8. Berechnen Sie den Logarithmus
- geg.: Basis b = 2
- Potenz p = 8
- ges.: Exponent (Logarithmus) x = ?

Dann kann der Exponent wie folgt berechnet werden
- $\log_2 (8) = x$
- Nicht alle Taschenrechner verfügen über die Möglichkeit den Logarithmus zu einer beliebigen Basis direkt zu berechnen. Meist muss dies mittels dekadischem oder natürlichem Logarithmus (Euler) erfolgen, dazu später mehr.

11

BEISPIELE: UMFORMEN

Aufgabe 3:

Formen Sie die Potenzgleichung in eine Logarithmusgleichung und umgekehrt um.

a) $\log_5 (125) = 3$

b) $5^4 = 625$

c) $\log_7 (49) = 2$

12

Lösung:

a) $\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

b) $5^4 = 625 \Leftrightarrow \log_5 625 = 4$

c) $\log_7 49 = 2 \Leftrightarrow 7^2 = 49$

13

LOGARITHMUS UND POTENZGLEICHUNG

Definition:

Potenzgleichung

- $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Potenz}$

Logarithmus

- $\log_{\text{Basis}} \text{Potenz} = \text{Exponent}$

14

SPEZIELLE LOGARITHMEN

Dekadischer Logarithmus zur Basis 10 (Zehnerlogarithmus)

$\log_{10} (a) = \mathbf{lg}\ \mathbf{(a)} = \mathbf{x} \Leftrightarrow 10^x = a$

Natürlicher Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl 2,71828183)

$\log_e (a) = \mathbf{ln}\ \mathbf{(a)} = \mathbf{x} <=> e^x = a$

Zweierlogarithmus zur Basis 2

$\log_2 (a) = \mathbf{lb}\ \mathbf{(a)} = \mathbf{x} <=> 2^x = a$

15

LOGARITHMUS BERECHNEN

Jeder (halbwegs gute) Taschenrechner besitzt die Funktion zur Berechnung der Logarithmen (log Basis 10 und ln Basis e). Wie aber berechnet man den $\log_2 64$, wenn der Taschenrechner diese Funktion nicht bereitstellt?

Das ist einfach, wenn der Logarithmus eine endliche (positive) Zahl ist, wie in folgendem Beispiel

- $\log_2 64 = ?$
- Wie oft muss 2 potenziert werden, damit man 64 erhält?
- Antwort 6mal, denn $2^6 = 64$. Was ist aber bei $\log_{10} 0{,}5$? Hier ist das Ergebnis −0,30103.

16

Es gibt dafür die Logarithmentafeln (errechnet durch Binomischen Lehrsatz, Interpolation/Annäherung etc.), aus denen die entsprechenden Ergebnisse entnommen werden können.

Bis jetzt aber waren die Beispiele so einfach gehalten, dass sie durch "Suche" des richtigen Exponenten gelöst werden konnten. Zunächst aber einige grundlegende Rechengesetze für Logarithmenberechnung.

RECHENREGEL

$$\log_b(m * n) = \log_b(m) + \log_b(n)$$

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b(m) - \log_b(n)$$

$$\log_b(m^x) = x * \log_b(m)$$

$$\log_b\left(\sqrt[n]{m}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) * \log_b(m)$$

DEKADISCHER LOGARITHMUS

Basis 10

Logarithmen mit anderer Basis können durch folgende Formel ermittelt werden:

$$\log_a(b) = \frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}$$

alternative Schreibweise $\frac{lg(b)}{lg(a)}$

Beispiel: Folgendes Beispiel kann einfach mit dem Taschenrechner gerechnet werden

$$\log_2(64) = \frac{\log_{10}(64)}{\log_{10}(2)} = 6$$

MULTIPLIKATION

Berechnen Sie unter Verwendung der Rechenregeln und des dekadischen Logarithmus

a) $\log_3 (9 * 27)$

b) $\log_4 (16 * 64) =$

Lösung:

a) $\log_3 9 + \log_3 27 = \frac{\lg(9)}{\lg(3)} + \frac{\lg(27)}{\lg(3)} = 2 + 3 = 5$

b) $log_4(16) + log_4(64) = \frac{\lg(16)}{\lg(4)} + \frac{\lg(64)}{\lg(4)} = 2 + 3 = 5$

DIVISION

Berechnen Sie unter Verwendung der Rechenregeln und des dekadischen Logarithmus

a) $log_7\left(\frac{1}{49}\right)$

b)$log_8\left(\frac{0{,}125}{64}\right)$

Lösung

a) $log_7(1) - log_7(49) = \frac{\lg(1)}{\lg(7)} - \frac{\lg(49)}{\lg(7)} = 0 - 2 = -2$

b) $log_8(0{,}125) - log_8(64) = \frac{\lg(0{,}125)}{\lg(8)} - \frac{\lg(64)}{\lg(8)} =$

$-1 - 2 = -3$

21

POTENZ

Berechnen Sie unter Verwendung der Rechenregeln und des dekadischen Logarithmus

a) $\log_4 (16^3)$

b) $log_2[(2^2)^{-2}]$

Lösung

a) $3 * log_4(16) = 3\,\frac{\lg(16)}{\lg(4)} = 6$

b) $log_2(2^{-4}) = -4 * log_2(2) = -4 * \frac{\lg(2)}{\lg(2)} = -4$

22

WURZEL

Berechnen Sie unter Verwendung der Rechenregeln und des dekadischen Logarithmus

a) $log_5(\sqrt[3]{25})$

b) $log_8(\sqrt[5]{2^{10}})$

Lösung:

a) $log_5\left(25^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} * log_5(25) = \frac{1}{3} * \frac{\lg(25)}{\lg(5)} = \frac{2}{3} = 0{,}667$

b) $log_8(\sqrt[5]{2^{10}}) = log_8\left(2^{\frac{10}{5}}\right) = \frac{10}{5} * log_8(2) = 2 * \frac{\lg(2)}{\lg(8)} = 0{,}667$

23

WOZU BENÖTIGT MAN DIE LOGARITHMUSBERECHNUNG?

Vor der Entwicklung von Rechenmaschinen galten die Logarithmentafeln als das unentbehrliche Rechenhilfsmittel.

Heute dient der Logarithmus in der Mathematik als Hilfsmittel und formuliert Zusammenhänge in der Natur und der Gesellschaft.

Beispiele:

- Weber-Fechnersche Gesetz: die Empfindung ändert sich proportional mit dem Logarithmus des physikalischen Reizes
- logarithmisches Pegelmaß
- die logarithmisch geteilte Erdbebenskala nach Richter
- die Berechnung von Dezibel usw.

24

Eine Bakterienkultur wächst um 15% in der Stunde. Nach wie vielen Stunden gibt es 500.000 Bakterien, wenn am Anfang 200.000 Bakterien vorhanden sind?

Lösung:

500.000 = 200.000 * $1{,}15^t$ (Anmerkung: t ist die gesuchte Zeit – pro t = $t^{-1} = x^t$)

5/2 = $1{,}15^t$

log (5/2) = t * log 1,15

t = (log(5/2)) / (log 1,15)

t = 6,56

Nach ca. 6 – 7 Stunden sind es 500.000 Bakterien.

BEISPIEL EPIDEMIE

Wenn sich die Zahl der Infizierten jeden zweiten Tag verdoppelt, dann hätte man bei ausgehend 1 Infizierten, wie viele Infizierte nach 30 Tagen?

$I(T) = 1 * \sqrt{2}^T, I = Infizierte, T = Tage$

$I(30) = \sqrt{2}^{30} = 32768$

Wann hat man 8.000.000 Infizierte?

$I(T) = \sqrt{2}^T = 8.000.000$

$log_{\sqrt{2}}(8.000.000) = \frac{\lg(8.000.000)}{\lg(\sqrt{2})} = 46$

REGELN DER POTENZGLEICHUNG

Bei **negativer Basis** ist die **Potenz positiv**, wenn der **Exponent gerade** ist,

$(-2)^4 = (-2) * (-2) * (-2) * (-2) = 16$.

Ist der **Exponent ungerade** und die **Basis negativ**, ist auch die **Potenz negativ**.

$(-2)^3 = (-2) * (-2) * (-2) = -8$

Anmerkung: Potenzen können auch als Wurzelrechnung angeschrieben werden:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$