

Mathematik 1

Andreas Stahel

18. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	1
1.1	Einleitung und Grundbegriffe	1
1.2	Vektorfelder und graphische Lösungen	6
1.3	Theoretische Grundlage	11
1.4	Separierbare Gleichungen	13
1.5	Lineare Differentialgleichungen	20
1.5.1	Gleichungen erster Ordnung	20
1.5.2	Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	32
1.6	Zusammenstellung der Lösungsmethoden	48
1.7	Récapitulation des méthodes de solutions	49
1.8	Aufgaben	50
1.8.1	Vektorfelder und separierbare Differentialgleichungen	50
1.8.2	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	54
1.8.3	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	55
1.8.4	Vermischte Aufgaben	59
1.8.5	Lösungen zu einigen Aufgaben	63
1.9	Zusammenfassung	95
2	Die Laplace Transformation	96
2.1	Definitionen	97
2.2	Elementare Laplacetransformationen	97
2.3	Wichtige Eigenschaften der Laplacetransformation	104
2.3.1	Linearität	104
2.3.2	Transformation von Ableitungen und Ableitung von Transformationen	104
2.3.3	Grenzwertsätze	105
2.3.4	Verschiebungssätze	107
2.3.5	Ähnlichkeitssatz	111
2.3.6	Faltung	112
2.3.7	Periodische Funktionen	115
2.3.8	Delta-Funktion	118
2.4	Beispiele von Differentialgleichungen	120
2.5	Systeme von Gleichungen	124
2.6	Aufgaben	126
2.6.1	Lösungen zu einigen Aufgaben	136
2.7	Rechenregeln	162
2.8	Zusammenfassung	163
3	Anwendungen der Laplace Transformation	164
3.1	Lineare Differentialgleichungen und Stabilität	164
3.1.1	Homogene Gleichungen	164
3.1.2	Lokalisieren von Nullstellen von Polynomen, Kriterium von Routh	165

3.1.3	Inhomogene Gleichungen	170
3.2	Transferfunktionen	175
3.2.1	Definition einer Transferfunktion	175
3.2.2	Kombination von Transferfunktionen	176
3.2.3	Sprungantwort und Impulsantwort	177
3.3	Nyquist Plots	178
3.3.1	Lokalisieren von Nullstellen, Kriterium von Nyquist	178
3.3.2	Der Nyquist-Plot eines Systems	180
3.4	Frequenzgang, Bode Plots	183
3.4.1	Grundlage und Berechnung	183
3.4.2	Ein Hochpass Filter	185
3.4.3	Ein Tiefpass Filter	187
3.4.4	Von Bode-Plots zu einem Nyquist-Plot	188
3.4.5	Ein praktisch eingesetzter Tiefpass Filter	190
3.4.6	Operationsverstärker	194
3.4.7	Ein mechanisches System, Masse, Feder und Dämpfer	198
3.4.8	Ein elektrisches System, LRC Schwingkreis	199
3.5	Aufgaben	201
3.5.1	Lösungen zu einigen Aufgaben	220
3.6	Zusammenfassung	250
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen, zweiter Teil	251
4.1	Repetition	251
4.1.1	Elementar lösbare Probleme	251
4.2	Approximation durch Potenzreihen	253
4.3	Numerische Methoden	259
4.3.1	Das Euler Verfahren	259
4.3.2	Die Verfahren von Runge-Kutta (RK4) und Heun (RK2)	261
4.3.3	Verfahrens- und Rundungsfehler	263
4.3.4	Vergleich von verschiedenen numerischen Verfahren	265
4.3.5	Schrittweitenkontrolle	268
4.3.6	Globale Extrapolation und Rechenzeitabschätzungen	270
4.3.7	Systeme von Differentialgleichungen und Gleichungen höherer Ordnung	271
4.3.8	Zwei konkrete Algorithmen	272
4.3.9	Bemerkungen und Literaturhinweise	277
4.3.10	Beispiele	277
4.4	Gleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen	281
4.4.1	Vektorfelder für Systeme von zwei Differentialgleichungen	281
4.4.2	Umwandlung von Gleichungen höherer Ordnung in Systeme	282
4.4.3	Phasenporträts für eine Gleichung zweiter Ordnung	284
4.4.4	Lineare Systeme von Differentialgleichungen	284
4.4.5	Linearisierungen von Differentialgleichungen	299
4.4.6	Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren	309
4.5	Anwendungen	313
4.5.1	Ein Temperaturmessproblem	313
4.5.2	Von einem Tisch fallende Kette	313
4.5.3	Elektrische Schaltkreise, Kirchhoff'sche Regeln	316
4.5.4	Pendel	319
4.5.5	Abrollen von Zylindern und Kugeln	322
4.5.6	Populationsmodelle	325
4.5.7	Hängende Kabel	325

4.5.8 Flug auf eine Lichtquelle unter konstantem Winkel	327
4.6 Aufgaben	329
4.6.1 Lösungen zu einigen Aufgaben	348
4.7 Zusammenfassung	386
Literaturverzeichnis	388
Abbildungsverzeichnis	390
Tabellenverzeichnis	391

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einleitung und Grundbegriffe

Probleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich üblicherweise in drei Teilprobleme unterteilen

1. Aufstellen der Gleichungen
2. Lösen der Gleichungen
3. Interpretation des Resultates.

Der erste Punkt hängt natürlich von der betrachteten Anwendung ab und beinhaltet das Übersetzen des Anwendungsproblems in die Sprache der Mathematik. Dieser Aspekt wird von Mathematikern oft vernachlässigt, ist aber für Ingenieure von sehr grosser Bedeutung, da für den zweiten Teil moderne Hilfsmittel zu Verfügung stehen, sodass auch relativ schwierige Probleme noch gelöst werden können.

Das Lösen von Differentialgleichungen kann durch verschiedene Methoden erfolgen. Grundsätzlich ist zu unterscheiden zwischen analytischen und numerischen Verfahren. Oft ist es nicht notwendig die vollständige Lösung einer Gleichung zu finden, sondern es genügt gewisse Information über die Lösungen zu finden. Deshalb ist eine präzise Fragestellung beim Aufstellen der Gleichungen von grosser Bedeutung und der dritte Punkt immer im Auge zu behalten.

Für alle oben erwähnten Teilprobleme kann ein CAS (Computer Algebra System) eingesetzt werden, z.B. *Mathematica* oder *MAPLE*. Für numerische Probleme stehen in vielen Programmiersprachen Programme zur Verfügung, es wird nur darum gehen diese „richtig“ einzusetzen. In diesem Kurs werden vor allem *Octave* und *MATLAB* eingesetzt.

Eine Differentialgleichung (DGL) ist, wie der Name sagt, eine Gleichung in der Differentiale oder Ableitungen auftreten. Die Gleichung ist immer zu untersuchen auf abhängige und unabhängige Variablen. Es gibt sehr verschiedene Typen von Differentialgleichungen und es ist wichtig diese unterscheiden zu können.

1–1 Definition : Hier sind einige Begriffe.

- Die höchste auftretende Ableitung bestimmt die **Ordnung** der (DGL).
- Treten nur Ableitungen bezüglich einer unabhängigen Variablen auf, so handelt es sich um eine **gewöhnliche Differentialgleichung**.
- Treten Ableitungen bezüglich mehrerer unabhängigen Variablen auf so handelt es sich um eine **partielle Differentialgleichung**.
- Treten Ableitungen von mehreren abhängigen Variablen auf und auch die gleiche Anzahl Gleichungen, so handelt es sich um ein **System von Differentialgleichungen**.

1–2 Beispiel :

- Pendelgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\sin(y)$$

ist eine gewöhnliche DGL der Ordnung 2 mit unabhängiger Variablen t und abhängiger Variablen y .

-

$$\dot{x}^3 + x = 0$$

ist eine gewöhnliche DGL erster Ordnung mit unabhängiger Variablen t und abhängiger Variablen x .

-

$$a \ddot{y} + b \dot{y} + c y = f(t)$$

ist eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung mit unabhängiger Variablen t und abhängiger Variablen y und Parametern a, b, c .

- Biegung eines horizontalen Balkens

$$E I y^{(4)}(x) = f(x)$$

ist eine gewöhnliche DGL vierter Ordnung mit unabhängiger Variablen x und abhängiger Variablen y und Parametern E (Elastizitätsmodul) und I (Flächenmoment).

- Biegung eines horizontalen Balkens

$$E I y''(x) = M(x)$$

ist eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung mit unabhängiger Variablen x und abhängiger Variablen y und Parametern E (Elastizitätsmodul) und I (Flächenmoment).

- Wärmeleitungsgleichung (statisch)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

ist eine partielle DGL zweiter Ordnung mit unabhängigen Variablen x, y und abhängiger Variablen u .

- Wärmeleitungsgleichung (dynamisch)

$$k \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{du}{dt}$$

ist eine partielle DGL zweiter Ordnung mit unabhängigen Variablen t, x, y und abhängiger Variablen u und Parameter k .

- Wellengleichung (dynamisch)

$$k \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = \frac{d^2 u}{dt^2}$$

ist eine partielle DGL zweiter Ordnung mit unabhängigen Variablen t, x, y, z und abhängiger Variablen u und Parameter k .

◇

Partielle DGL sind wesentlich schwieriger zu behandeln als gewöhnliche DGL. In diesem Kurs werden nur gewöhnliche DGL untersucht.

1–3 Definition : Eine **explizite Differentialgleichung erster Ordnung** mit unabhängiger Variablen t und abhängiger Variablen x ist von der Form

$$(DGL) \quad \frac{d}{dt} x = f(t, x) \quad ,$$

wobei die Funktion f von zwei Argumenten abhängig sein kann. Hängt f nicht explizit von t ab, d.h.

$$\frac{d}{dt} x = f(x)$$

so ist die Gleichung **autonom**.

Bemerkung: Eine Differentialgleichung muss nicht unbedingt in expliziter Form vorliegen. So ist z.B. die Gleichung

$$\sqrt{\dot{x}^2 + t^2 x + 1} = 4$$

eine implizite Gleichung. Sie kann aber umgeformt werden zu

$$\dot{x}^2 = 15 - t^2 x \quad .$$

Falls man nun aufgrund der Entstehung (Elektronik, Physik, Mechanik, ...) der Gleichung weiss, dass $\dot{x} > 0$ und $t^2 x < 15$ so entsteht

$$\dot{x} = \sqrt{15 - t^2 x} \quad .$$

Dies ist nun eine explizite Gleichung.

Wir werden uns praktisch nur mit Gleichungen in expliziter Form beschäftigen.

1–4 Definition : Ein **Anfangswertproblem** ist eine Differentialgleichung mit einer zusätzlichen Anfangsbedingung. Die Anfangszeit t_0 und der Anfangswert x_0 sind gegeben und man untersucht.

$$(AWP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1–5 Definition : Eine Funktion $x(t)$ heisst **Lösung** auf dem Intervall I von (DGL), falls die Funktion differenzierbar ist und die Gleichung erfüllt, d.h.

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

1–6 Beispiel : Es ist zu beachten, dass die Lösung einer Differentialgleichung nie aus nur einem Wert bestehen kann, es muss immer eine Funktion sein. Zu einer Funktion gehören abhängige und unabhängige Variablen, Definitionsbereich und natürlich eine entsprechende Formel. Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} u(x) = 1 + (u(x))^2$$

hat die Funktion

$$y(x) = \tan x \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

als Lösung. Dies ist aber nicht die einzige Lösung. Tatsächlich ist für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(x) = \tan(x + \delta)$ mit passend gewähltem Definitionsbereich eine Lösung. \diamond

1–7 Beispiel : Newtonsches Abkühlungsgesetz [MeybVach90, p. 151]

Ein Körper der Temperatur $T(t)$ wird in ein Medium der Temperatur $U(t)$ eingetaucht. Falls $T(t) > U(t)$ wird der warme Körper das etwas kühlere Bad aufwärmen. Je grösser die Temperaturdifferenz $P(t) := T(t) - U(t)$, desto mehr Wärmeenergie wird vom Körper zum Bad fließen, desto schneller wird die Temperaturdifferenz abnehmen. Nun versucht man eine Gleichung für die **Änderungsrate** \dot{P} der Temperaturdifferenz zu finden, welche diesem qualitativen Verhalten entspricht. Isaac Newton hat die Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P$$

vorgeschlagen, wobei λ eine Konstante ist. „Die Abkühlgeschwindigkeit ist proportional zur Temperaturdifferenz“. Dies ist eine explizite, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit unabhängiger Variablen t und abhängiger Variablen P .

Um diese Gleichung zu lösen muss man nun eine Funktion finden, deren Ableitung gleich der ursprünglichen Funktion ist, bis auf einen Faktor $-\lambda$. Nach kurzem Nachdenken sollte man eine mögliche Lösung erraten wegen

$$\frac{d}{dt} e^{-\lambda t} = -\lambda e^{-\lambda t}$$

Diese Lösung kann noch mit einer beliebigen Konstanten c multipliziert werden und man erhält weitere Lösungen

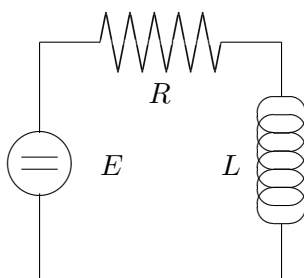
$$P(t) = c e^{-\lambda t}$$

Setzt man $t = 0$ ein, so kann die Konstante c bestimmt werden aus den Anfangstemperaturen $T(0)$ und $U(0)$ und es ergibt sich die Lösung $P(t) = P(0) e^{-\lambda t}$ oder

$$T(t) - U(t) = (T(0) - U(0)) e^{-\lambda t}$$

Diese Gleichung ist ein Beispiel einer linearen, homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. \diamond

1–8 Beispiel : Exponentielle Sättigung [MeybVach90, p. 151]



Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich für die Stromstärke $I(t)$ beim Einschalten eines Gleichstroms die Beziehung

$$L \frac{dI}{dt} + I R = E$$

mit dem Anfangswert $I(0) = 0$.

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit dem Strom I als abhängige Variable und der Zeit t als unabhängige Variable. Der Widerstandswert R und die Induktivität L sind Parameter. Wir können die Differentialgleichung umschreiben in die explizite Form

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I + \frac{E}{L}$$

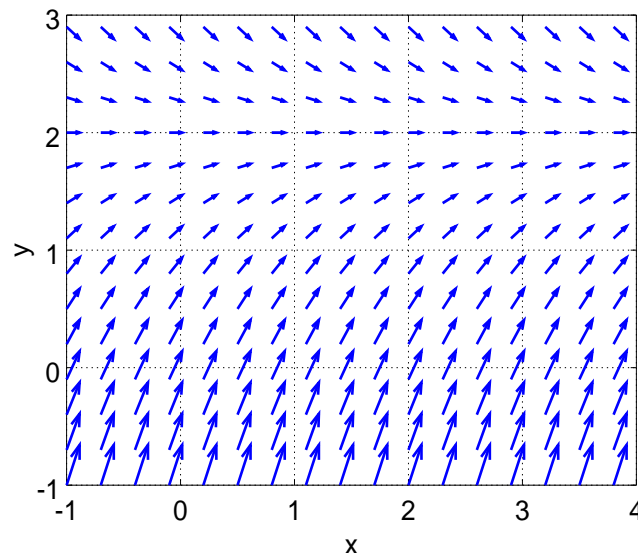


Abbildung 1.1: Exponentielle Sättigung des Stromes in einer Spule

Das qualitative Verhalten der Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y + 2$$

kann in Abbildung 1.1 untersucht werden. Für Werte $y < 2$ wird $\dot{y} > 0$ und somit muss die Lösungskurve ansteigen. Für Werte $y > 2$ wird $\dot{y} < 0$ und somit muss die Lösungskurve abfallen. Tritt der spezielle Fall $y = 2$ ein, so sieht man, dass sich der Wert von y nicht mehr ändern wird und wir somit eine **partikuläre Lösung** $y(t) = 2$ (konstant) haben. Genauso sieht man auch, dass $I(t) = E/R$ eine Lösung der ursprünglichen Aufgabe ist. Um nun die allgemeine Lösung zu finden führen wir die neue unabhängige Variable

$$u(t) = I(t) - \frac{E}{R}$$

ein und schreiben die Differentialgleichung um mittels

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I + \frac{E}{L} \\ &= -\frac{R}{L} \left(u + \frac{E}{R} \right) + \frac{E}{L} \\ &= -\frac{R}{L} u \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nun leichter lösen und wir erhalten

$$u(t) = u(0) e^{-\frac{R}{L} t}$$

oder für die ursprüngliche Variable $I(t)$

$$I(t) = \left(I(0) - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Wegen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ erhalten wir somit die Lösung

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Diese Gleichung ist ein Beispiel einer linearen, inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. \diamond

1.2 Vektorfelder und graphische Lösungen

Wir betrachten für eine gegebene Funktion $f(t, x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Ist eine Funktion $x(t)$ also eine Lösung, so können wir den Graphen dieser Lösung zeichnen. Für ein gegebenes t entspricht $\dot{x}(t)$ der Steigung dieser Kurve im Punkt $(t, x(t))$. Somit muss der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x(t)) \end{pmatrix}$$

ein **Tangentialvektor** an die Kurve $(t, x(t))$ sein. Falls wir wissen, dass unsere Kurve durch einen Punkt (t, x) in der Ebene geht, so kennen wir sofort einen Tangentialvektor an die Kurve, ohne die Kurve zu kennen. Dies können wir als Hilfsmittel einsetzen um den qualitativen Verlauf von Lösungskurven skizzieren zu können. Für einige Punkte in der (t, x) -Ebene zeichnen wir die Tangentialvektoren ein. Hierbei dürfen wir die Vektoren durchaus kürzer oder länger zeichnen, da nur die Richtung eine Rolle spielt. Anschließend passen wir die Lösungskurven den Richtungsvektoren an. Die Abbildung 1.1 zeigt dieses sogenannte **Vektorfeld** für die Differentialgleichung $\dot{x} = -x + 2$.

Ein systematisches Anwenden der obigen Idee kann auf die Methode der **Isoklinen** führen. Eine Isokline ist eine Kurve, entlang derer die Steigung der Lösungen der Differentialgleichungen konstant sind.

Um das Vektorfeld der Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ mittels Isoklinen zu skizzieren kann man das folgende Vorgehensschema verwenden.

1. Wähle einen Wert für die Steigung m .
2. Löse die Gleichung $f(x, y) = m$ und zeichne diese Kurve in der Graphik ein. Hierbei sind möglichst dünne Linien zu verwenden, da es sich nur um Hilfslinien handelt.
3. Entlang dieser Linien sind kurze Geradenstücke mit Steigung m gut sichtbar einzutragen.
4. Wiederhole die Schritte 1–3, bis das qualitative Verhalten der Lösungen klar wird.

Wir wollen dies an einem Beispiel illustrieren.

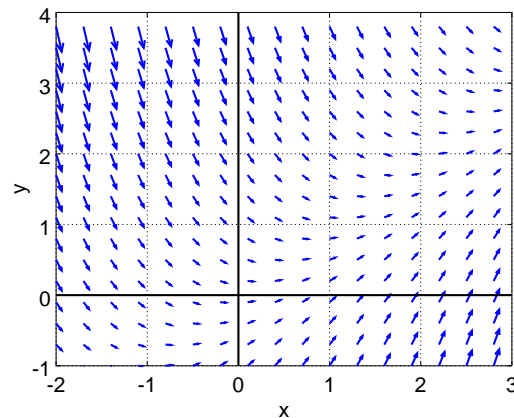
1–9 Beispiel : Für die Differentialgleichung

$$y' = x - y$$

sind die Isoklinen gegeben durch

$$x - y = m \quad \text{oder} \quad y = x - m$$

Dies entspricht Geraden mit Steigung 1 auf verschiedenen Höhen. Nach einigem Zeichnen sollte man auf ein Richtungsfeld in Abbildung 1.2 kommen. \diamond

Abbildung 1.2: Richtungsvektoren für die Gleichung $y' = -y + x$

1–10 Beispiel : Die Isokline für die Steigung m der Differentialgleichung

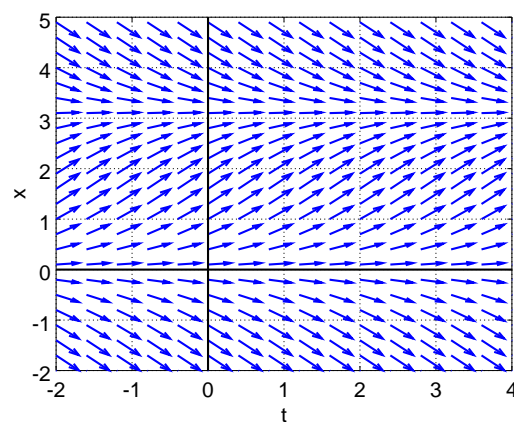
$$y' = -\frac{x}{y}$$

sind Lösungen der Gleichung $m = -\frac{x}{y}$ oder auch $y = \frac{-1}{m}x$ und somit Geraden durch den Ursprung mit Steigung $\frac{-1}{m}$. Somit sind die Lösungskurven der Differentialgleichung immer senkrecht zu den Verbindungsgeraden mit dem Ursprung. Zeichnet man diese Situation auf, so kommt man auf die Vermutung, dass die Lösungen Kreise sein könnten. Tatsächlich sind die Funktionen $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ auch Lösungen der Differentialgleichung. \diamond

1–11 Beispiel : Für eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sin x$$

sind die Isoklinen in der (t, x) -Ebene horizontale Geraden, da die Lösungen der Gleichung $\sin x = m$ von t unabhängig sind. Dies wird durch das Richtungsfeld in Abbildung 1.3 bestätigt. \diamond

Abbildung 1.3: Richtungsvektoren für die Gleichung $\dot{x} = \sin x$

1–12 Beispiel : (Einfaches Populationsmodell, logistische Gleichung)

Für eine Population betrachten wir die folgenden Größen

$$\begin{aligned} p(t) &= \text{Grösse der Population zur Zeit } t \\ 0 < \alpha &= \text{Geburtsrate} \\ 0 < \beta &= \text{Sterberate} \end{aligned}$$

Somit werden pro Zeiteinheit $\alpha p(t)$ Tiere geboren und $\beta p(t)$ Tiere sterben und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{p} = \alpha p - \beta p = (\alpha - \beta) p$$

mit der allgemeinen Lösung

$$p(t) = p(0) e^{(\alpha - \beta)t}$$

Ist $\alpha > \beta$, so wird die Bevölkerung exponentiell zunehmen. Für sehr grosse Populationen wird dies aber sicher nicht mehr möglich sein. Nun modifizieren wir diese Grundgleichung, indem wir einen weiteren Term dazufügen, der für grosse Werte von p die Sterberate vergrössert (z.B. durch Verhungern). Ein möglicher Vorschlag ist

$$\dot{p} = (\alpha - \beta) p - k p^2 = p (\alpha - \beta - k p) = f(p)$$

für eine positive Konstante k .

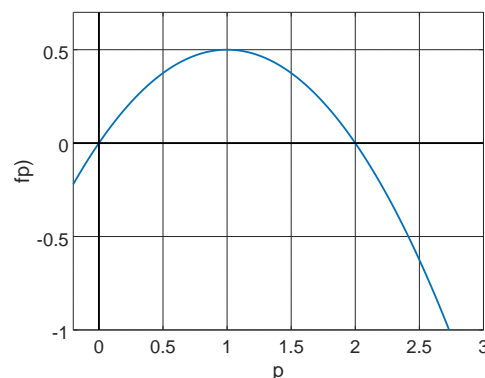


Abbildung 1.4: Der Graph von $f(p)$ für die logistische Gleichung

Dieses Modell wurde von Verhulst¹ vorgeschlagen und auch experimentell bestätigt. Der Graph von $f(p)$ als Funktion von p ist in Abbildung 1.4 gegeben für die speziellen Werte $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und $k = 0.5$. Die Isoklinen sind horizontale Geraden. Drei Lösungen der Differentialgleichung und ein Vektorfeld sind in Abbildung 1.5 gegeben. Die Abbildung 1.5 kann erzeugt werden durch MATLAB oder Octave.

go_logistic.m

```
t_max = 5; p_max = 3;
[t,p] = meshgrid(linspace(0, t_max,20),linspace(0,p_max,20));

v1= ones(size(t));
v2 = p.*(2-p);
figure(1)
quiver(t,p,v1,v2)
xlabel('Zeit t'); ylabel('Population p')
axis([0 t_max, 0 p_max])

[t1,p1] = ode45(@(t,p)p.*(2-p),linspace(0,t_max,50),0.4);
```

¹Pierre-Francois Verhulst (1804–1849), Biologe und Mathematiker

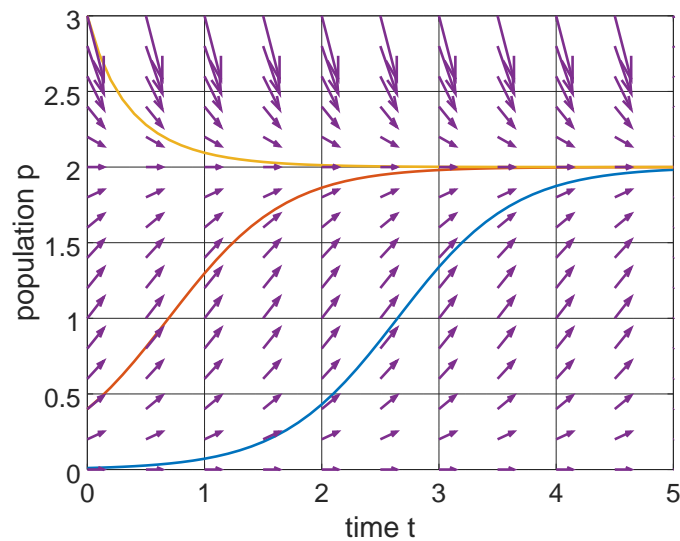


Abbildung 1.5: Vektorfeld und einige Lösungen für die logistische Gleichung

```
[t2,p2] = ode45(@(t,p)p.*(2-p), linspace(0,t_max,50),3.0);
[t3,p3] = ode45(@(t,p)p.*(2-p), linspace(0,t_max,50),0.01);
hold on
plot(t1,p1,'r',t2,p2,'r', t3,p3,'r')
hold off
```

Die Differentialgleichung

$$\dot{p} = p(\alpha - \beta - kp) = f(p)$$

ist ein typisches Beispiel einer separablen Gleichung und wir führen die Rechnungen an diesem Beispiel aus. Falls $p(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, so gilt

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)(\alpha - \beta - kp(t))} = 1$$

nun integrieren wir diese Gleichung bezüglich der Zeit und verwenden die Substitution $z = p(t)$ und erhalten somit

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\dot{p}(t)}{p(t)(\alpha - \beta - kp(t))} dt &= \int_0^T 1 dt \\ \int_{p(0)}^{p(T)} \frac{1}{z(\alpha - \beta - kz)} dz &= T \end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite kann mit der Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(\alpha - \beta - kz)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{\alpha - \beta - kz} \\ &= \frac{A(\alpha - \beta - kz) + Bz}{z(\alpha - \beta - kz)} \end{aligned}$$

bestimmt werden. Setzt man $z = 0$ und $z = \frac{\alpha - \beta}{k}$ ein so erhält man

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad \text{und} \quad B = \frac{k}{\alpha - \beta}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z(\alpha - \beta - kz)} dz &= \frac{1}{\alpha - \beta} \int \frac{1}{z} + \frac{k}{\alpha - \beta - kz} dz \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \int \frac{1}{z} + \frac{1}{\frac{\alpha - \beta}{k} - z} dz \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\ln|z| - \ln \left| \frac{\alpha - \beta}{k} - z \right| \right) + c_1 \end{aligned}$$

Setzen wir diese Beziehung im obigen Integral ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha - \beta} \left(\ln|p(T)| - \ln \left| \frac{\alpha - \beta}{k} - p(T) \right| \right) = T + c$$

Für eine Lösung $0 < p(T) < \frac{\alpha - \beta}{k}$ gilt also

$$|p(T)| / \left| \frac{\alpha - \beta}{k} - p(T) \right| = e^{(\alpha - \beta)(T + c)} = c_1 e^{(\alpha - \beta)T}$$

Indem wir das Vorzeichen auch noch in die Konstante c_2 stecken und T durch t ersetzen, erhalten wir die implizite Lösung

$$p(t) = c_2 e^{(\alpha - \beta)t} \left(\frac{\alpha - \beta}{k} - p(t) \right)$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $p(t)$ auflösen mit dem Resultat

$$p(t) = \frac{c_2 e^{(\alpha - \beta)t} \frac{\alpha - \beta}{k}}{1 + c_2 e^{(\alpha - \beta)t}}$$

In dieser Gleichung kann man leicht ablesen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{\alpha - \beta}{k}$$

was mit den Lösungen in Abbildung 1.5 übereinstimmt. ◇

1–13 Beispiel : Die Abbildung 1.6 zeigt ein Vektorfeld für die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x + \cos t$$

Diese Graphik wurde mit Hilfe von Octave erzeugt.

Octave

```
% script file to generate vector field and solutions
% for the differential equation d/dt x(t) = -x(t)+cos(t)

t = 0:0.5:7; %% define domain for t
x = -1:0.2:1; %% define domain for x

LinCos = @(t,x)-x + cos(t); %% describe the differential equation

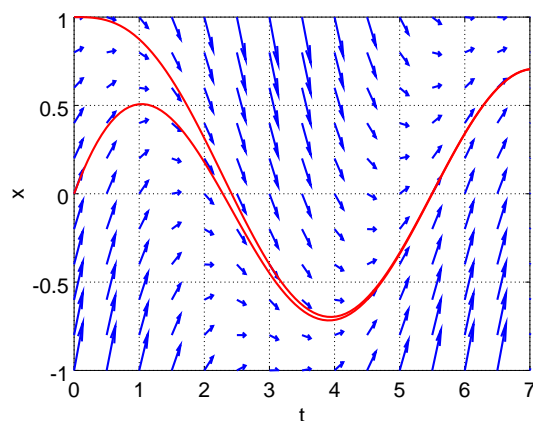
nt = length(t); nx = length(x); %% generate vectors
V1 = ones(nx,nt); V2 = V1; %% horizontal component constant 1
for i= 1:nt
    for j = 1:nx
        V2(j,i) = LinCos(t(i),x(j));
    end%for
end%for
```

```

figure(1);    %% create the vector field
hold off
scalefactor = 0.6;
quiver(t,x,V1,V2,scalefactor)
xlabel('t'); ylabel('x')
axis([min(t), max(t), min(x), max(x)])
grid on
hold on

T = linspace(0,max(t),100);    %% create and display solutions
[T1,X1] = ode45(LinCos,T,0);
[T2,X2] = ode45(LinCos,T,1);
plot(T1,X1,'r',T2,X2,'r')
hold off

```

Abbildung 1.6: Vektorfeld und Lösungen von $\dot{x} = -x + \cos t$

◇

1.3 Theoretische Grundlage

Es stellt sich nun die Frage ob Differentialgleichungen der Form

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

immer lösbar sind, d.h. ob es immer eine Lösung gibt, ob es mehrere Lösungen geben kann. Die Antwort wird gegeben durch ein fundamentales Resultat.

1–14 Theorem : (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche bezüglich der zweiten Variablen differenzierbar ist, mit stetiger Ableitung. Seien t_0 und x_0 gegebene Anfangsdaten. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dann gilt:

1. Es gibt ein maximales, offenes Intervall $I = (a, b)$ mit $t_0 \in I$ und (AWP) hat auf I genau eine Lösung $x(t)$.
2. Gilt $b < \infty$ so existiert der Limes $\lim_{t \rightarrow b-} \|x(t)\|$ nicht, d.h. meistens konvergiert dieser Ausdruck gegen unendlich.

Bemerkung: Es ist wichtig immer die Voraussetzungen des obigen Theorems zu überprüfen.

- Um sicher zu sein, dass es mindestens eine Lösung gibt muss die Funktion $f(t, x)$ stetig sein.
- Es gibt (nicht stetige) Funktionen, sodass (AWP) keine Lösung hat.
- Es gibt Funktionen $f(t, x)$ die nicht differenzierbar sind bezüglich x und das zugehörige (AWP) hat mehrere Lösungen.

In weitergehender Literatur über gewöhnliche Differentialgleichungen sind solche Beispiele angegeben. In konkreten Situationen ist ein solches Fehlverhalten meist durch die Anwendung erklärbar.

Bemerkung: Es gilt auch eine Version dieses Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hierbei sollte die rechte Seite der Differentialgleichung bezüglich aller abhängigen Variablen stetig differenzierbar sein.

1–15 Satz : Als Konsequenz des obigen Theorems wissen wir, dass sich verschiedene Lösungen einer Differentialgleichung nicht schneiden. Schneiden sich zwei Lösungen im Punkt (t_0, x_0) , so müssen die beiden Lösungen identisch sein, da sie Lösung des selben Anfangswertproblems sind.

Manchmal ist es günstiger statt des Anfangswertproblems (AWP) eine äquivalente **Integralgleichung** zu betrachten.

1–16 Theorem : Eine Funktion $x(t)$ ist genau dann eine Lösung von (AWP), falls die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

gelöst wird.

Beweis : Differenziere die Integralgleichung, beziehungsweise integriere die Differentialgleichung. □
Ein möglicher Beweis des obigen Existenzsatzes beruht auf dieser Integralgleichung.

1-17 Beispiel : Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = x + t = f(t, x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

wird gelöst durch

$$x(t) = 2e^t - 1 - t$$

Offensichtlich sind alle Funktionen differenzierbar die eindeutig bestimmte Lösung existiert für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $a = -\infty$ und $b = \infty$. \diamond

1-18 Beispiel : Für

$$\dot{x} = 1 + x^2 = f(t, x) \quad \text{und} \quad x(0) = 0$$

ist die Funktion offensichtlich stetig und differenzierbar bezüglich der Variablen t und x . Somit ist die Lösung $x(t) = \tan t$ die Lösung des Problems, die aber nur für $-\pi/2 = a < t < b = \pi/2$ existiert. Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \pi/2-} \tan t = \infty$ lässt sich leicht verifizieren. \diamond

1-19 Beispiel : Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = \sqrt{|x|} = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ist die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar (bei $x = 0$) bezüglich x . Somit ist nicht sicher ob es eine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Tatsächlich ist eine Lösung gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

aber ebenso ist

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{4} & \text{für } t \geq c \\ 0 & \text{für } t < c \end{cases}$$

für jedes $c > 0$ eine Lösung des selben Anfangswertproblems. \diamond

1.4 Separierbare Gleichungen

Hat eine Differentialgleichung die spezielle Form

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x) g(t)$$

und ist $x(t)$ tatsächlich eine Lösung, so können wir (falls $f(x(t)) \neq 0$) durch $f(x(t))$ dividieren und erhalten

$$\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = g(t)$$

Nun versuchen wir diese Gleichung bezüglich t zu integrieren und verwenden die Substitution $z = x(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} dt &= \int g(t) dt \\ \int \frac{1}{f(z)} dz &= \int g(t) dt \\ H(z) &= G(t) + c \\ H(x(t)) &= G(t) + c \end{aligned}$$

Hierbei sind H und G Stammfunktionen von $1/f$ und g . Hier haben wir nun gezeigt, dass eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung auch die Gleichung $H(x(t)) = G(t) + c$ erfüllen muss. Dies ist keine Differentialgleichung, sondern eine „gewöhnliche“ Gleichung. Praktisch wird dieses Verfahren in der anderen Richtung verwendet: man versucht die normale Gleichung zu lösen, um zu einer Lösung der Differentialgleichung zu kommen.

Durch eine formale Umformung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x) g(t)$$

erhält man

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t) dt$$

und anschließende Integration führt auf

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt$$

Dieses Verfahren heisst auch **Separation der Variablen**, da die Terme mit unabhängigen und abhängigen Variablen je auf eine Seite der Gleichung isoliert werden. Somit erhält man eine implizite Gleichung für die Lösung, falls die zwei Integrale bestimmt werden können. Die Integrationskonstante kann meist mittels der Anfangsbedingung bestimmt werden.

Bei diesem Lösungsverfahren können Probleme auftreten, indem die Integrale nicht leicht zu bestimmen sind oder indem die entstehende implizite Gleichung für x und t nicht explizit nach x auflösbar ist. *Mathematica* ist gut einsetzbar um diese Probleme, falls möglich, zu überwinden.

1–20 Beispiel : Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

führt durch Separation der Variablen auf die Integrale

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int 1 dt$$

und somit

$$\arctan x = t + c$$

Wenden wir die \tan -Funktion auf diese Gleichung an, so erhalten wir die Lösungen

$$x(t) = \tan(t + c)$$

wobei die Konstante c durch eine eventuelle Anfangsbedingung zu bestimmen wäre. Beachte dass die Lösung dieser Differentialgleichung nicht für alle Werte von t existieren. Es muss $|t - c| < \frac{\pi}{2}$ gelten. Dies ist konsistent mit der Aussage in Theorem 14 auf Seite 12. \diamond

1–21 Beispiel : Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = a x$$

führt durch Separation der Variablen auf die Integrale

$$\int \frac{1}{x} dx = \int a dt$$

und somit

$$\ln |x| = a t + c$$

Wenden wir die \exp -Funktion auf diese Gleichung an, so erhalten wir

$$|x| = e^{at+c} = e^c e^{at}$$

Nun stecken wir das Vorzeichen von x und e^c in eine neue Konstante c_1 und erhalten die Lösungen

$$x(t) = c_1 e^{at}$$

wobei die Konstante c_1 durch eine eventuelle Anfangsbedingung zu bestimmen wäre. \diamond

1–22 Beispiel : Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t) x$$

führt durch Separation der Variablen auf die Integrale

$$\int \frac{1}{x} dx = \int a(t) dt$$

und somit

$$\ln |x| = A(t) + c$$

wobei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$ ist. Wenden wir die exp-Funktion auf diese Gleichung an, so erhalten wir

$$|x| = e^{A(t)+c} = e^c e^{A(t)}$$

Nun stecken wir das Vorzeichen von x und e^c in eine neue Konstante c_1 und erhalten die Lösungen

$$x(t) = c_1 e^{A(t)}$$

wobei die Konstante c_1 durch eine eventuelle Anfangsbedingung zu bestimmen wäre. Dieses Resultat wird oft auch gegeben durch die Formel

$$x(t) = c_1 e^{\int^t a(\tau) d\tau} = c_1 \exp \left(\int^t a(\tau) d\tau \right)$$

◇

1–23 Beispiel : (Fallschirmspringen)

Ein Fallschirmspringer fällt bei geöffnetem Schirm mit einer vertikalen Geschwindigkeit von $v(t)$. Die wirkenden Kräfte sind in erster Linie die Gravitation und die Bremswirkung des Schirmes. Die Bremskraft ist in etwa proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Aufgrund des Gesetzes von Newton ist die resultierende Kraft gleich Masse mal Beschleunigung des Springers. Formulieren wir dieses physikalischen Grundlagen als Gleichung, so erhalten wir

$$m a = m \dot{v} = m g - k v^2$$

Dies ist eine separierbare Differentialgleichung für die abhängige Variable v und wir können die Integrale

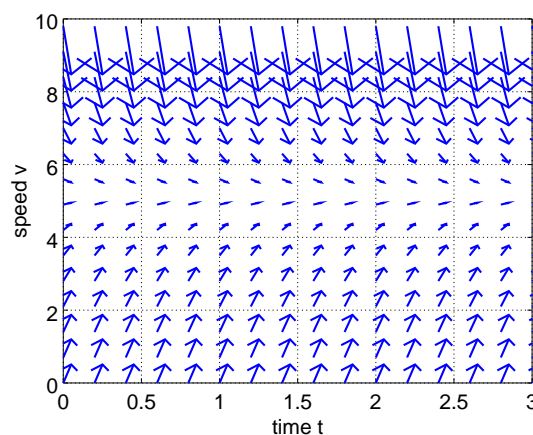


Abbildung 1.7: Vektorfeld der Differentialgleichung eines Fallschirmsprunges

$$\int \frac{m}{m g - k v^2} dv = \int 1 dt$$

betrachten. Multiplizieren wir beide Seiten mit $-k/m$ und setzen $A = \sqrt{mg/k}$ so erhalten wir

$$\int \frac{1}{v^2 - A^2} dv = \frac{-k}{m} \int 1 dt$$

Integration mittels Partialbruchzerlegung führt auf

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v^2 - A^2} dv &= \int \frac{1}{(v - A)(v + A)} dv \\ &= \int \frac{a}{v - A} + \frac{b}{v + A} dv = \int \frac{a(v + A) + b(v - A)}{(v - A)(v + A)} dv \end{aligned}$$

Setzen wir $v = A$ und $v = -A$ ein, so erhalten wir

$$1 = a \cdot 2A \quad \text{und} \quad 1 = -b \cdot 2A$$

und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v^2 - A^2} dv &= \frac{1}{2A} \int \frac{1}{v - A} - \frac{1}{v + A} dv \\ &= \frac{1}{2A} (\ln |v - A| - \ln |v + A|) + c = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{v - A}{v + A} \right| + c \end{aligned}$$

Damit haben wir die implizite Gleichung

$$\frac{1}{2A} \ln \left| \frac{v - A}{v + A} \right| = \frac{-k}{m} t + c$$

Daraus erhalten wir durch anwenden der Exponentialfunktion

$$\left| \frac{v - A}{v + A} \right| = \exp\left(\frac{-2Ak}{m} t + c\right)$$

oder auch

$$\frac{v - A}{v + A} = B \exp\left(\frac{-2Ak}{m} t\right)$$

Diese Gleichung ist ohne grössere Schwierigkeiten nach v auflösbar und wir erhalten

$$v(t) = \frac{A (1 + B \exp(\frac{-2Ak}{m} t))}{1 - B \exp(\frac{-2Ak}{m} t)}$$

Da e^{-x} gegen Null konvergiert, falls $x \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = A = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Die Schlussgeschwindigkeit ist also unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit und hängt nur von der Masse m des Springers und der Konstanten k ab. Dies wird durch das Vektorfeld in Abbildung 1.7 bestätigt. Hierbei wurden die Konstanten $m = 80 \text{ kg}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $k = 30 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ verwendet. \diamond

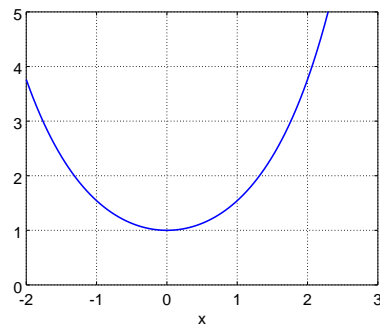


Abbildung 1.8: Graph einer Kettenlinie

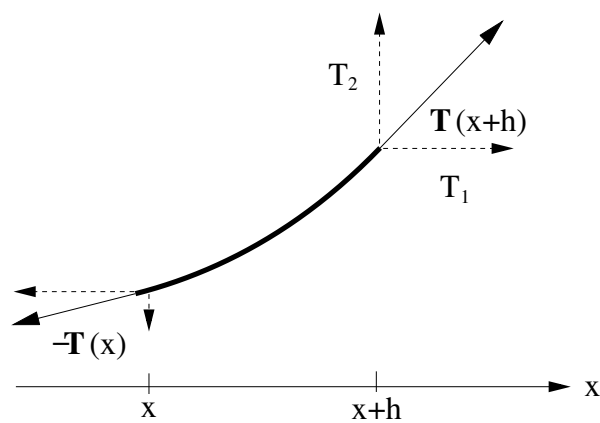


Abbildung 1.9: Herleitung der Gleichung der Kettenlinie

1–24 Beispiel : (Kettenlinie)

Die Funktion $y = f(x)$ soll die Höhe eines Kabels über dem Boden angeben. Die Masse des Kabel pro Länge sei gegeben durch ρ . Das Kabel ist ideal flexibel, d.h. es lässt sich beliebig leicht biegen und knicken. Entlang des Kabels wird eine Kraft $\vec{T}(x)$ wirken, die immer tangential zum Kabel sein muss, da sich das Kabel sonst bewegen würde. In Abbildung 1.9 ist der Kabelabschnitt zwischen x und $x + h$ gezeichnet, zusammen mit den auf dieses Kabelstück wirkenden Kräfte. Einzig die Gewichtskraft ist nicht eingezeichnet. Wir verwenden die Notation

$$\vec{T}(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{T}(x+h) = \begin{pmatrix} T_1(x+h) \\ T_2(x+h) \end{pmatrix}$$

für die Komponenten der Kraftvektoren.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ist die Länge des Kabelstückes zwischen x und $x + h$ ist gegeben durch

$$\Delta s = \int_x^{x+h} \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h$$

für ein geeignetes ξ zwischen x und $x + h$. Somit wirkt eine vertikale Gewichtskraft der Stärke

$$\Delta F_G = -\sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h \rho g$$

Nun können wir die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen (T_1) und vertikalen (T_2) Komponenten aufstellen und erhalten

$$\begin{aligned} T_1(x+h) - T_1(x) &= 0 \\ T_2(x+h) - T_2(x) &= +\sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h \rho g \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass die Horizontalkomponente konstant sein muss, d.h. $T_1(x) = T_1$. Dividiert man die zweite Gleichung durch h und bildet anschliessend den Grenzwert $h \rightarrow 0$ so erhält man die Bedingung

$$\frac{d}{dx} T_2(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \rho g$$

Da die Kraft in die Richtung des Kabel zeigen muss gilt auch

$$f'(x) = \frac{T_2(x)}{T_1} \quad \text{oder} \quad T_2(x) = T_1 f'(x)$$

Setzt man die beiden obigen Gleichungen zusammen so erhält man die Differentialgleichung

$$T_1 f''(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \rho g$$

für die Funktion $f(x)$. Dies ist eine Gleichung zweiter Ordnung, aber mit der Substitution $u = f'$ erhalten wir die separable Gleichung

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho g}{T_1} \sqrt{1 + (u)^2}$$

Verwenden wir die Abkürzung $\alpha = \rho g/T_1$ so sind die Integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + (u)^2}} du = \int \alpha dx$$

aufzulösen und somit (Integration)

$$\operatorname{arcsinh} u = \alpha x + c_1 \quad \text{oder} \quad u(x) = \sinh(\alpha x + c_1)$$

Durch eine einfache Integration folgt hieraus

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + c_1) + c_2$$

Durch umbenennen der Konstanten kann man hieraus die Formel

$$y(x) = \frac{T_1}{\rho g} \left(\cosh \left(\frac{\rho g}{T_1} (x - x_0) \right) - 1 \right) + h_0$$

herleiten. ◇

1–25 Beispiel : Ein Tank enthält ursprünglich 100 l Salzlösung mit 10 kg Salz. Pro Sekunde werden 5 Liter reines Wasser dazugegeben. Gleichzeitig fließen aber 4 Liter pro Sekunde der gut gemischten Lösung ab. Bestimmen Sie die Menge des Salzes in der Mischung als Funktion der Zeit t .

Lösung: Sei $y(t)$ der Salzgehalt im Wasser, gemessen in kg. Somit ist $y(0) = 10$. Nach der Zeit t sind $100 + t$ Liter Lösung im Gefäß und somit ist die Konzentration gegeben durch

$$\text{Konzentration} = \frac{y(t)}{100 + t}$$

Nun kann man die Bilanzgleichung für die Änderungsrate der Menge Salz in der Mischung aufstellen.

$$\begin{aligned} \text{Änderung} &= \text{Zufluss} - \text{Abfluss} \\ \frac{d}{dt} y &= 0 - \frac{y}{100 + t} 4 \end{aligned}$$

Somit haben wir die separable Differentialgleichung

$$\dot{y} = -\frac{4}{100 + t} y$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{4 dt}{100 + t} \\ \ln |y| &= -4 \ln |100 + t| + c \\ y(t) &= \frac{C}{(100 + t)^4} \end{aligned}$$

Die Betragszeichen können problemlos entfernt werden, da sowohl $y(t)$ als auch $100 + t$ positiv sind. Mittels $y(0) = 10$ kann nun C bestimmt werden durch

$$10 = \frac{C}{(100 + 0)^4} \quad \text{oder} \quad C = 10^9$$

und damit können wir leicht einen Graphen der Lösung erstellen (siehe Abbildung 1.10). ◇

1–26 Beispiel : Um die Gleichung $\dot{x}(t) = \cos(x(t))$ zu lösen kann man versuchen die Methode der Separation der Variablen zu verwenden. Mit Hilfe einer Integrationstabelle oder *Mathematica* erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \cos(x(t)) \\ \int \frac{1}{\cos(x)} dx &= \int 1 dt \\ \ln \left(\frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right) &= t + c \\ \frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)} &= \exp(t + c) \\ \tan(x/2) &= \frac{\exp(t + c) - 1}{1 + \exp(t + c)} = \frac{\exp(\frac{t+c}{2}) - \exp(\frac{t+c}{2})}{\exp(\frac{t+c}{2}) + \exp(\frac{t+c}{2})} = \tanh\left(\frac{t + c}{2}\right) \\ x(t) &= 2 \arctan \left(\tanh\left(\frac{t + c}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

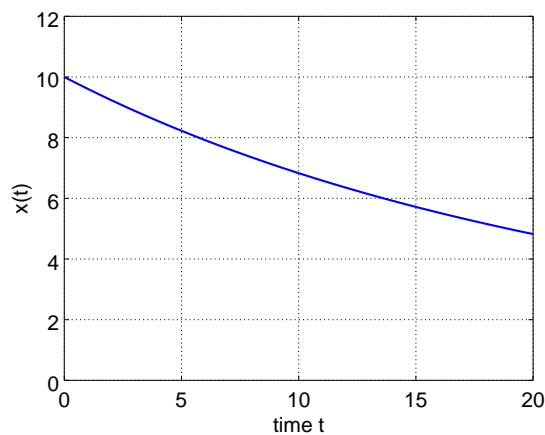


Abbildung 1.10: Lösung eines Mischungsproblems



1.5 Lineare Differentialgleichungen

Viele Fragestellungen führen zu linearen Differentialgleichungen oder linearen Systemen von Differentialgleichungen. Folglich werden diese sehr sorgfältig untersucht.

1.5.1 Gleichungen erster Ordnung

Eine allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Koeffizienten $a(t)$ und inhomogenem Beitrag $f(t)$ ist von der Form

$$\dot{x}(t) = a(t) x(t) + f(t)$$

Zu bestimmen ist die Lösung $x(t)$.

Lineare homogene Gleichungen

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = a(t) x(t)$$

wobei $a(t)$ eine stetige Funktion von t ist. Diese Gleichung ist separabel. Die Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = c \exp\left(\int^t a(\tau) d\tau\right).$$

Hierbei steht das Symbol

$$A(t) = \int^t a(\tau) d\tau.$$

für irgendeine Stammfunktion von $a(t)$. Die Integrationskonstante kann in der Konstanten c absorbiert werden. Der Wert der Konstanten c ist mittels der Anfangsbedingung zu bestimmen. Im einfachsten Fall einer Konstanten $a(t) = a$ ergibt sich

$$x(t) = c e^{at}$$

1–27 Beispiel : Das Beispiel auf Seite 19 einer Salzlösung führte auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{y} &= -\frac{4}{100+t} y \\ y(0) &= 10 \end{cases}$$

Also haben wir in diesem Beispiel

$$a(t) = -\frac{4}{100+t}$$

und somit ist

$$A(t) = \int^t -\frac{4}{100+\tau} d\tau = -4 \ln(100+t)$$

eine Stammfunktion von a und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$y(t) = c \exp(-4 \ln(100+t)) = \frac{c}{(100+t)^4}$$

und wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 10$ gilt $c = 10^9$. ◇

Nun wollen wir eine wesentliche Eigenschaft von Lösungen von homogenen, linearen Differentialgleichungen herleiten. Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$\dot{y} = a(t) y$$

und ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so können wir die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c y_1(t) + y_2(t)) &= c \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) \\ a(t) (c y_1(t) + y_2(t)) &= c a(t) y_1(t) + a(t) y_2(t) \end{aligned}$$

verwenden, um zu zeigen, dass auch

$$y(t) = c y_1(t) + y_2(t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist. Dieses wichtige Resultat können wir auch wie folgt formulieren

Lösungen von linearen, homogenen Differentialgleichungen können addiert werden und mit Konstanten multipliziert, wir erhalten als Resultate Lösungen der Differentialgleichung.

Diese Eigenschaft zeigt sich ebenso bei von Lösungen Systemen von n linearen, homogenen Gleichungen. Ist \mathbf{A} eine $n \times n$ -Matrix und \vec{y}_1, \vec{y}_2 Spaltenvektoren der Länge n mit

$$\mathbf{A} \vec{y}_1 = \vec{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \vec{y}_2 = \vec{0}$$

so gilt auch

$$\mathbf{A} (c \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = c \mathbf{A} \vec{y}_1 + \mathbf{A} \vec{y}_2 = \vec{0}$$

Ist $y_h(t)$ eine Lösung von

$$\dot{y} = a(t) y$$

so kann man zeigen, dass **jede Lösung** von der Form

$$y(t) = c y_h(t)$$

ist, für eine geeignete Wahl der Konstanten c . Das oben vorgestellte Rechenverfahren erlaubt es uns, eine Lösung zu finden, falls wir nur das Integral $\int^t a(\tau) d\tau$ bestimmen können. Somit können wir auch alle Lösungen angeben.

Lineare inhomogene Gleichungen

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$\dot{y}(t) - a(t) y(t) = f(t)$$

wobei $a(t)$ und $f(t)$ stetige Funktionen von t sind.

Nun wollen wir eine wesentliche Eigenschaft von Lösungen von inhomogenen, linearen Differentialgleichungen herleiten. Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$\dot{y} = a(t) y + f(t)$$

so gilt wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_1(t) - y_2(t)) &= \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t) \\ a(t) (y_1(t) - y_2(t)) &= a(t) y_1(t) - a(t) y_2(t) \end{aligned}$$

für die Differenz

$$y_h(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

die homogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}_h &= \frac{d}{dt} (y_1(t) - y_2(t)) \\ &= \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t) \\ &= a(t) y_1(t) + f(t) - a(t) y_2(t) - f(t) \\ &= a(t) (y_1(t) - y_2(t)) \\ &= a(t) y_h \end{aligned}$$

Ist $y_h(t)$ eine Lösung des homogenen Problems und $y_p(t)$ eine **partikuläre Lösung**, d.h. irgendeine Lösung des inhomogenen Problems

$$\begin{aligned} \dot{y}_h(t) &= a(t) y_h(t) \\ \dot{y}_p(t) &= a(t) y_p(t) + f(t) \end{aligned}$$

so ist für jede Konstante c die neue Funktion

$$y(t) = c y_h(t) + y_p(t)$$

der inhomogenen Gleichung. Diese Überlegungen führen zum folgenden, wichtigen Resultat.

1–28 Theorem : *Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{y}(t) - a(t) y(t) = f(t)$$

ist gegeben durch

$$y(t) = c y_h(t) + y_p(t)$$

wobei die Konstante c mittels der Anfangsbedingung zu bestimmen ist.

Dieses Theorem führt zum folgenden systematischen Vorgehen um lineare, inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

1. Sind die Funktionen $a(t)$ und $f(t)$ stetig?
2. Finde die allgemeine Lösung $y_h(t)$ des homogenen Problems.
3. Finde irgendeine partikuläre Lösung $y_p(t)$.
4. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$y(t) = c y_h(t) + y_p(t)$$
5. Bestimme die Konstante c durch die Anfangsbedingung, falls vorhanden.

1–29 Beispiel : Um das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -2y + 3 \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

zu lösen, verwendet man die offensichtliche Lösung $y_h(t) = e^{-2t}$ des zugehörigen homogenen Problems $\dot{y} = -2y$. Durch intensives Raten kann man auch auf die partikuläre Lösung $y_p(t) = 3/2$ kommen. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = c y_h(t) + y_p(t) = c e^{-2t} + \frac{3}{2}$$

Die Anfangsbedingung

$$y(0) = c e^0 + \frac{3}{2} = 0$$

liefert den Wert $c = -3/2$ und somit haben wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2t})$$

des Anfangswertproblems gefunden. ◇

Eine Lösung des zugehörigen homogenen Problems $\dot{y} = a(t) y$ kann immer gegeben werden durch

$$y_h(t) = \exp\left(\int^t a(\tau) d\tau\right)$$

Wir benötigen aber noch ein Verfahren um eine partikuläre Lösung zu finden.

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Für Differentialgleichungen mit konstantem Koeffizienten a der Form

$$\dot{y} + a y = f(t)$$

mit speziell einfachen Funktionen $f(t)$, kann man oft die Form (Ansatz) einer partikulären Lösung erraten. Hier ist eine kurze Tabelle von einfachen Funktionen $f(t)$ und der zugehörigen partikulären Lösung $y_p(t)$.

Funktion $f(t)$	Form der Lösung $y_p(t)$
k	c
$k_1 t + k_0$	$c_1 t + c_0$
Polynom vom Grad n	Polynom vom Grad n
$\sin(\omega t)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
$\cos(\omega t)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
$e^{\lambda t}$ mit $\lambda \neq -a$	$c e^{\lambda t}$
e^{-at}	$c t e^{-at}$

1–30 Beispiel : Um eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} + 2y = 2t + \cos(3t) + 3e^{-t}$$

zu finden kann man drei Teilprobleme betrachten.

(a) Berücksichtige $2t$.

Der Ansatz für die Lösung ist $y_p(t) = c_1 t + c_0$. Das muss in die Differentialgleichung eingesetzt werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c_1 t + c_0) + 2 (c_1 t + c_0) &= 2t \\ c_1 + 2c_1 t + 2c_0 &= 2t \\ \begin{cases} 2c_1 &= 2 \\ c_1 + 2c_0 &= 0 \end{cases} \\ y_p(t) &= t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Berücksichtige $\cos(3t)$.

Der Ansatz für die Lösung ist $y_p(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$. Das muss in die Differentialgleichung eingesetzt werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) + 2 (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) &= \cos(3t) \\ (-3c_1 \sin(3t) + 3c_2 \cos(3t)) + (2c_1 \cos(3t) + 2c_2 \sin(3t)) &= \cos(3t) \\ \cos(3t) (3c_2 + 2c_1) + \sin(3t) (-3c_1 + 2c_2) &= \cos(3t) \\ \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 &= 1 \\ -3c_1 + 2c_2 &= 0 \end{cases} \\ c_1 = \frac{2}{13} \quad c_2 = \frac{3}{13} \\ y_p(t) = \frac{1}{13} (2 \cos(3t) + 3 \sin(3t)) \end{aligned}$$

(c) Berücksichtige $3e^{-t}$.

Der Ansatz für die Lösung ist $y_p(t) = c_1 e^{-t}$. Das muss in die Differentialgleichung eingesetzt werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c_1 e^{-t}) + 2 c_1 e^{-t} &= 3 e^{-t} \\ c_1 e^{-t} (-1 + 2) &= 3 e^{-t} \\ c_1 &= 3 \\ y_p(t) &= 3 e^{-t} \end{aligned}$$

Nun sind die drei Lösungen der Teilprobleme zu addieren um eine partikuläre Lösung des Systems zu erhalten.

$$y_p(t) = \left(t - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{13} (2 \cos(3t) + 3 \sin(3t)) \right) + (3 e^{-t})$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$y(t) = c e^{-2t} + \left(t - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{13} (2 \cos(3t) + 3 \sin(3t)) \right) + (3 e^{-t})$$

wobei c eine beliebige Konstante ist.



Methode des integrierenden Faktors, Variation der Konstanten

Ist für ein Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} + a y &= f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

der Koeffizient a konstant, so kann auch die Methode der **Variation der Konstanten** verwendet werden um ein Anfangswertproblem zu lösen.

$\dot{y}(t) + a y(t) = f(t)$	ursprüngliche Gleichung
$e^{at} (\dot{y}(t) + a y(t)) = e^{at} f(t)$	Multiplikation mit e^{at}
$\frac{d}{dt} (e^{at} y(t)) = e^{at} f(t)$	die Kunst des Sehens
$e^{at} y(t) = \int e^{at} f(t) dt$	Integration bezüglich t
$e^{at} y(t) = c + \int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau$	andere Notation
$y(t) = c e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau$	Division durch e^{at}
$y(t) = y_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau$	$y(0) = y_0$ einsetzen

Der Faktor e^{at} heisst auch **integrierender Faktor**. Diese längere Rechnung führt auf die Formel

$$y(t) = e^{-at} y_0 + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -a y(t) + f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

1-31 Beispiel : Beim Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -2 y(t) + 3 \\ y(0) &= 4 \end{aligned}$$

muss man $a = 2$ und $f(t) = 3$ setzen und erhält dann

$\dot{y}(t) + 2 y(t) = 3$	ursprüngliche Gleichung
$e^{2t} (\dot{y}(t) + 2 y(t)) = e^{2t} 3$	Multiplikation mit e^{2t}
$\frac{d}{dt} (e^{2t} y(t)) = e^{2t} 3$	die Kunst des Sehens
$e^{2t} y(t) = \int e^{2t} 3 dt$	Integration bezüglich t
$e^{2t} y(t) = c + \frac{3}{2} e^{2t}$	andere Notation
$e^{2t} y(t) = 4 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} e^{2t}$	$y(0) = 4$ einsetzen
$y(t) = e^{-2t} \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$	Division durch e^{2t}

Dieses Resultat kann man auch mit der Formel

$$y(t) = e^{-at} y_0 + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

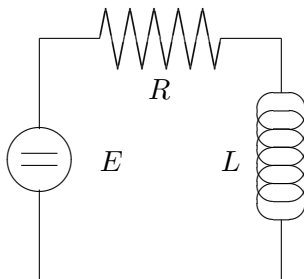
$$\begin{aligned}
 &= e^{-2t} 4 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 3 d\tau \\
 &= e^{-2t} 4 + \left(\frac{3}{2} e^{-2(t-\tau)} \right) \Big|_{\tau=0}^t \\
 &= e^{-2t} 4 + \frac{3}{2} (1 - e^{-2t}) \\
 &= e^{-2t} \left(4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

erzeugt werden. Es muss festgehalten werden, dass der Rechenaufwand für beide Rechenwege gleich gross ist. \diamond

Element	Widerstand	Kapazität	Induktivität
Impedanz	R	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega L$
Spannungsabfall	$V = RI$	$V = \frac{1}{C} \int I dt$	$V = L \frac{dI}{dt}$
Strom	$I = \frac{V}{R}$	$I = C \frac{dV}{dt}$	$I = \frac{1}{L} \int V dt$

Tabelle 1.1: Elementare Eigenschaften der drei elektrischen Grundelemente

1–32 Beispiel : In Tabelle 1.1 können die Strom–Spannungsbeziehungen der drei passiven Grundelemente abgelesen werden. Zusammen mit den Regeln von Kirchhoff können viele Schaltungen damit vollständig charakterisiert werden.



Ist die externe Spannung gegeben durch $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, so erhält man für die Stromstärke $I(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t)$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$$

ist gegeben durch

$$I_h(t) = c e^{-\frac{R}{L} t}$$

Um die allgemeine Lösung zu finden benötigen wir also noch eine partikuläre Lösung.

Lösung A Rechnung mit reellen Funktionen.

Der integrierende Faktor ist $e^{\frac{R}{L} t}$ und wir erhalten

$$e^{\frac{R}{L} t} I(t) = \int e^{\frac{R}{L} t} \frac{E_0}{L} \cos(\omega t) dt$$

Bestimmen wir das Integral, so erhalten wir hieraus durch sorgfältiges Ablesen in einer Tabelle von Integralen

$$e^{\frac{R}{L} t} I(t) = e^{\frac{R}{L} t} \frac{E_0}{L} \frac{1}{\omega^2 + R^2/L^2} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right) + c_1$$

Da wir eine partikuläre Lösung suchen dürfen wir $c_1 = 0$ wählen und erhalten somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$I(t) = c e^{-t \frac{R}{L}} + \frac{E_0}{L} \frac{1}{\omega^2 + R^2/L^2} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right)$$

oder auch

$$I(t) = c e^{-t \frac{R}{L}} + \frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t))$$

Wegen der Beziehung

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi)$$

wobei

$$C^2 = A^2 + B^2 \quad \text{und} \quad \tan \phi = -\frac{B}{A}$$

können wir dies auch umschreiben zu

$$I(t) = c e^{-t \frac{R}{L}} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{mit} \quad \tan \phi = -\frac{\omega L}{R}$$

Für t genügend gross kann der homogene Anteil der Lösung vernachlässigt werden und wir erhalten

$$\frac{I(t)}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

d.h. einen Widerstandsfaktor von $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ und eine Phasenverschiebung von ϕ .

Lösung B Rechnung mit komplexen Funktionen.

Da $\cos(\omega t)$ der Realteil von $e^{i\omega t}$ ist betrachten wir die neue, komplexwertige Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} e^{i\omega t}$$

Der integrierende Faktor ist auch hier $e^{\frac{R}{L}t}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{\frac{R}{L}t} I(t) &= \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E_0}{L} e^{i\omega t} dt \\ &= \int e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t} \frac{E_0}{L} dt \\ &= \frac{1}{\frac{R}{L} + i\omega} e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t} \frac{E_0}{L} + c_1 \\ &= \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t} + c_1 \end{aligned}$$

Somit ist eine komplexe, partikuläre Lösung gegeben durch

$$I_p(t) = \frac{E_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{E_0 (R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{i\omega t}$$

Somit gilt für den Quotienten aus komplexer Spannung durch komplexen Strom

$$\frac{U(t)}{I_p(t)} = R + i\omega L = Z$$

Die komplexe Zahl Z hat einen Betrag von $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ ein Argument von $\arg Z = \phi$ mit $\tan \phi = \omega L/R$. Die Grösse Z heisst auch **komplexe Impedanz** und es gilt die einfache Beziehung

$$E(t) = Z I(t)$$

d.h. die Impedanz entspricht einem komplexen Widerstand. Die Impedanz hängt von der Frequenz ω ab und man sieht leicht, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} Z(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0+} (R + i\omega L) = R$$

Dies impliziert, dass für kleines ω die Induktivität keine Rolle spielt. ◇

1–33 Beispiel :

Ist die externe Spannung gegeben durch $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, so erhält man für die Ladung $Q(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = 0$$

ist gegeben durch

$$Q_h(t) = c e^{-\frac{1}{RC} t}$$

Diese Lösung fällt exponentiell ab und wir werden diese vernachlässigen und nur das Verhalten der partikulären Lösung untersuchen. Wir verwenden ausschliesslich die Methode der komplexen Funktion.

Da $\cos(\omega t)$ der Realteil von $e^{i\omega t}$ ist betrachten wir die neue, komplexwertige Differentialgleichung

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = \frac{E_0}{R} e^{i\omega t}$$

Der integrierende Faktor ist hier $e^{\frac{1}{RC} t}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{RC} t} Q(t) &= \int e^{\frac{1}{RC} t} \frac{E_0}{R} e^{i\omega t} dt = \int e^{(\frac{1}{RC} + i\omega) t} \frac{E_0}{R} dt \\ &= \frac{1}{\frac{1}{RC} + i\omega} e^{(\frac{1}{RC} + i\omega) t} \frac{E_0}{R} + c_1 = \frac{E_0 C}{1 + i\omega RC} e^{(\frac{1}{RC} + i\omega) t} + c_1 \end{aligned}$$

Somit ist eine komplexe, partikuläre Lösung gegeben durch

$$Q_p(t) = \frac{E_0 C}{1 + i\omega RC} e^{i\omega t}$$

Da der Strom gegeben ist als Ableitung der Ladung bezüglich der Zeit gilt

$$I(t) = \frac{i\omega E_0 C}{1 + i\omega RC} e^{i\omega t}$$

Somit gilt für den Quotienten aus komplexer Spannung durch komplexen Strom

$$\frac{U(t)}{I(t)} = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C} = \frac{1}{i\omega C} + R = Z$$

Die komplexe Zahl Z hat einen Betrag von

$$|Z| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2}}{\omega C}$$

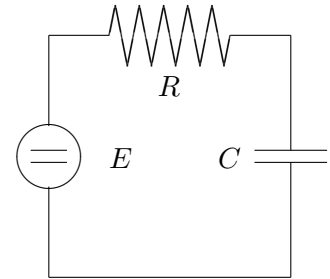
ein Argument von $\arg Z = \phi$ mit $\tan \phi = -1/(\omega RC)$. Der Winkel ϕ entspricht der Phasenverschiebung von Strom und Spannung. Es gilt auch hier die Beziehung

$$E(t) = Z I(t)$$

d.h. die Impedanz entspricht einem komplexen Widerstand. Die Impedanz hängt von der Frequenz ω ab und man sieht leicht, dass

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{i\omega C} + R \right) = R$$

dies impliziert, dass für sehr grosse ω die Kapazität keine Rolle spielt. ◇



Ist für ein Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{y} + a(t) y &= f(t) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

der Koeffizient $a(t)$ nicht konstant, so kann auch die Methode der **Variation der Konstanten** verwendet werden um ein Anfangswertproblem zu lösen. Allerdings ist der **integrierende Faktor** zuerst zu bestimmen. Sei $A(t)$ irgendeine Stammfunktion von $a(t)$, d.h.

$$\frac{d}{dt} A(t) = a(t)$$

Dann kann der Ausdruck

$$e^{A(t)}$$

als integrierender Faktor verwendet werden. Im Spezialfall $a = \text{konst}$ ergibt sich der bereits bekannte Term e^{at} . Um nun die Lösung zu bestimmen, kann das folgende Rechenschema eingesetzt werden.

$\dot{y}(t) + a(t) y(t) = f(t)$	ursprüngliche Gleichung
$e^{A(t)} (\dot{y}(t) + a(t) y(t)) = e^{A(t)} f(t)$	Multiplikation mit $e^{A(t)}$
$\frac{d}{dt} (e^{A(t)} y(t)) = e^{A(t)} f(t)$	die Kunst des Sehens
$e^{A(t)} y(t) = \int e^{A(t)} f(t) dt$	Integration bezüglich t
$e^{A(t)} y(t) = c + \int_0^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau$	andere Notation
$y(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau$	Division durch $e^{A(t)}$

1–34 Beispiel : Es gibt noch einen weiteren, äquivalenten Ansatz um Probleme der Form

$$\dot{y}(t) + a(t) y(t) = f(t)$$

zu lösen. Dieser Trick ist der Grund für den Namen „Variation der Konstanten“. Das Verfahren kann in drei Teilschritte aufgeteilt werden.

1. Lösen der homogenen Gleichung durch Separation der Variablen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} y(t) &= -a(t) y(t) \\ \int \frac{1}{y} dy &= - \int a(t) dt \\ \ln y &= - \int^t a(\tau) d\tau + c \\ y(t) &= k e^{-\int^t a(\tau) d\tau} = k e^{-A(t)}\end{aligned}$$

2. Jetzt macht man den Ansatz der **Variation der Konstanten**, d.h. man ersetzt die Konstante k durch eine Funktion $k(t)$ und setzt in die Differentialgleichung ein. Dabei sei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$

$$\begin{aligned}y(t) &= k(t) e^{-A(t)} \\ \dot{y}(t) &= \dot{k}(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)} \\ \dot{y}(t) + a(t) y(t) &= \dot{k}(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)} + k(t) a(t) e^{-A(t)} \\ &= \dot{k}(t) e^{-A(t)} = f(t)\end{aligned}$$

Diese Rechnung führt auf die Gleichung

$$\dot{k}(t) = e^{A(t)} f(t)$$

für die Funktion $k(t)$ mit der Lösung (durch Integration)

$$k(t) = c + \int^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau$$

3. Nun erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t) e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \left(c + \int^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau \right) \\ &= c e^{-A(t)} + \int^t e^{A(\tau)-A(t)} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

◇

1–35 Beispiel : Hier ein Beispiel, gelöst durch Variation der Konstanten.

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{t} y(t) = \cos(t)$$

1. Lösen der homogenen Gleichung durch Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -\frac{1}{t} y(t) \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int \frac{1}{t} dt \\ \ln y &= -\ln t + c \\ y(t) &= \frac{k}{t} \end{aligned}$$

2. Die Konstante k zu einer Funktion $k(t)$ machen und in die Differentialgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{k(t)}{t} \\ \dot{y}(t) &= \frac{\dot{k}(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2} \\ \dot{y}(t) + \frac{1}{t} y(t) &= \frac{\dot{k}(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2} + \frac{k(t)}{t^2} = \frac{\dot{k}(t)}{t} = \cos t \end{aligned}$$

Diese Rechnung führt auf die Gleichung

$$\dot{k}(t) = t \cos t$$

für die Funktion $k(t)$ mit der Lösung (durch Integration)

$$k(t) = c + \cos t + t \sin t$$

3. Nun erhält man die Lösung

$$y(t) = \frac{k(t)}{t} = \frac{c + \cos t + t \sin t}{t} = \frac{c}{t} + \frac{\cos t}{t} + \sin t$$

◇

1–36 Beispiel : Ein Tank enthält ursprünglich 100 l reines Wasser. Pro Sekunde werden 5 Liter Salzlösung mit einer Massenkonzentration von 10% dazugegeben. Gleichzeitig fließen aber 4 Liter pro Sekunde der gut gemischten Lösung ab. Bestimmen Sie die Menge des Salzes in der Mischung als Funktion der Zeit t

Lösung: Sei $y(t)$ der Salzgehalt im Wasser, gemessen in kg. Somit ist $y(0) = 0$. Nach der Zeit t sind $100 + t$ Liter Lösung im Gefäß und somit ist die Konzentration gegeben durch

$$\text{Konzentration} = \frac{y(t)}{100 + t}$$

Nun kann man die Bilanzgleichung für die Änderungsrate der Menge Salz in der Mischung aufstellen.

$$\begin{aligned} \text{Änderung} &= \text{Zufluss} - \text{Abfluss} \\ \frac{d}{dt} y &= 5 \cdot 0.1 - \frac{y}{100 + t} 4 \end{aligned}$$

Somit haben wir die Differentialgleichung

$$\dot{y} + \frac{4}{100 + t} y = 0.5$$

In diesem Beispiel ist $a(t) = 4/(100 + t)$ und wir können die Stammfunktion $A(t) = 4 \ln(100 + t)$ verwenden. Das führt auf den integrierenden Faktor

$$e^{A(t)} = e^{4 \ln(100+t)} = (100 + t)^4$$

Wir erhalten somit

$\dot{y}(t) + \frac{4}{100+t} y(t) = 0.5$	ursprüngliche Gleichung
$(100 + t)^4 \left(\dot{y}(t) + \frac{4}{100+t} y(t) \right) = (100 + t)^4 0.5$	Multiplikation mit $e^{A(t)}$
$\frac{d}{dt} ((100 + t)^4 y(t)) = (100 + t)^4 0.5$	die Kunst des Sehens
$(100 + t)^4 y(t) = \int (100 + t)^4 0.5 dt$	Integration bezüglich t
$(100 + t)^4 y(t) = \frac{1}{5} (100 + t)^5 0.5 + c$	Integral ausrechnen
$(100 + t)^4 y_p(t) = \frac{1}{5} (100 + t)^5 0.5$	eine partikuläre Lösung
$y_p(t) = \frac{1}{10} (100 + t)$	Division durch $(100 + t)^4$

Da die Lösung des homogenen Problems gegeben ist durch

$$y_h(t) = c (100 + t)^{-4}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y(t) = c (100 + t)^{-4} + \frac{1}{10} (100 + t)$$

Aus der Bedingung $y(0) = 0$ folgt die Gleichung

$$y(0) = 0 = c 100^{-4} + \frac{1}{10} 100$$

mit der Lösung $c = -10^9$ und somit ist die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = -\frac{10^9}{(100 + t)^4} + \frac{100 + t}{10}$$

Da zur Zeit t genau $100 + t$ Liter im Tank sind und Lösung mit einer Konzentration von 10% nachfließt, hätte man die partikuläre Lösung $y_p(t) = (100 + t)/10$ durchaus auch erraten können. \diamond

1.5.2 Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ und inhomogenem Beitrag $f(t)$ ist von der Form

$$a(t) \ddot{x}(t) + b(t) \dot{x}(t) + c(t) x(t) = f(t)$$

Zu bestimmen ist die Lösung $x(t)$. Wir untersuchen nur Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, d.h. für $a \neq 0$

$$a \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + c x(t) = f(t)$$

Homogene Gleichungen

1–37 Beispiel : Um die Differentialgleichung

$$2 \ddot{x}(t) + 10 \dot{x}(t) + 12 x(t) = 0$$

zu lösen verwenden wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$. Nun ist dies in der Gleichung einzusetzen und wir erhalten

$$2 \lambda^2 e^{\lambda t} + 10 \lambda e^{\lambda t} + 12 e^{\lambda t} = 0$$

Hier kann durch den Faktor $e^{\lambda t} \neq 0$ dividiert werden und wir erhalten eine quadratische Gleichung für λ

$$2 \lambda^2 + 10 \lambda + 12 = 2 (\lambda + 2) (\lambda + 3) = 0$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -3$$

Somit haben wir zwei verschiedene (linear unabhängige) Lösungen

$$x_1(t) = e^{-2t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-3t}$$

Man kann nun auch leicht verifizieren, dass jede Funktion

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist. ◇

1–38 Theorem : Seien $b(t)$ und $c(t)$ stetige Funktionen. Dann hat eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y}(t) + b(t) \dot{y}(t) + c(t) y(t) = 0$$

immer zwei linear unabhängige Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$. Jede Lösung $y(t)$ ist von der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

für geeignete Konstanten c_1 und c_2 .

Für gegebene Werte von t_0 , y_0 und y_1 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + b(t) \dot{y}(t) + c(t) y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \end{cases}$$

genau eine Lösung. Sie ist von der oben gegebenen Form, wobei die Konstanten c_1 und c_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Als Konsequenz des obigen Theorems genügt es zwei (linear unabhängige) Lösungen zu finden, um **alle Lösungen** zu kennen. In diesem Abschnitt werden wir nur den einfachen Spezialfall von konstanten Koeffizienten ansehen, d.h. Differentialgleichungen der Form

$$a \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + c x(t) = 0$$

wobei $a \neq 0$, b und c Konstanten sind. Wir verwenden den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ und setzen ihn in die Gleichung ein.

$$a \lambda^2 e^{\lambda t} + b \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = (a \lambda^2 + b \lambda + c) e^{\lambda t} = 0$$

Um die Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung zu finden, muss man also die **charakteristische Gleichung**

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

untersuchen. Je nach Lage der Nullstellen $\lambda_{1,2}$ ergeben sich verschiedene Lösungen der Differentialgleichungen. Hierzu ist zuerst die **Diskriminate** $D = b^2 - 4ac$ zu bestimmen und dann müssen drei Fälle unterschieden werden.

1. $D > 0$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und beide sind reell.

Somit haben wir zwei verschiedene (linear unabhängige) Lösungen

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Man kann nun auch leicht verifizieren, dass jede Funktion

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist.

2. $D = 0$: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Sofort erhält man eine Lösung

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

Die zweite, unabhängige Lösung lässt sich aber nicht auf die selbe Art erzeugen. Man kann aber leicht verifizieren, dass

$$y_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$$

die Gleichung auch löst. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = e^{\lambda_1 t} (c_1 + t c_2)$$

3. $D < 0$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$

Verwenden wir die selbe Idee wie im ersten Fall, so erhalten wir die **komplexen** Hilfslösungen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ u_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

Lösungen von linearen Differentialgleichungen können addiert, subtrahiert und mit Konstanten multipliziert werden: man erhält immer wieder Lösungen. Mit dieser einfachen Idee bilden wir

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} (u_1(t) + u_2(t)) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ y_2(t) &= \frac{1}{2i} (u_1(t) - u_2(t)) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

und haben nun zwei linear unabhängige reelle Lösungen gefunden. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$$

Die beiden Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ treten auch als Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$ auf. Dies kann hilfreich sein, um sich die Struktur der Formeln leichter merken zu können.

1–39 Beispiel : Um die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0 \\ y(1) = 2 \\ \dot{y}(1) = -1 \end{cases}$$

zu finden muss man die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

untersuchen. Es gilt $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{-2t} (c_1 + c_2 t)$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$\dot{y}(t) = -2e^{-2t} (c_1 + c_2 t) + c_2 e^{-2t}$$

Setzen wir dies in die Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^{-2} (c_1 + c_2) = 2 \\ -2e^{-2} (c_1 + c_2) + c_2 e^{-2} = -1 \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2e^2 \\ -2c_1 - c_2 = -e^2 \end{cases}$$

mit den Lösungen $c_1 = -e^{+2}$ und $c_2 = 3e^{+2}$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(t) = e^{-2t+2} (-1 + 3t)$$

◇

1–40 Beispiel : Um die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 4 \end{cases}$$

zu finden muss man die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 2^2 = 0$$

untersuchen. Es gilt $\lambda_{1,2} = 1 \pm i2$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^t (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Eine leichte Rechnung liefert

$$\dot{y}(t) = e^t (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) + e^t (-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t))$$

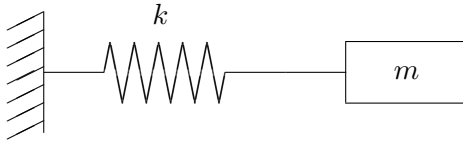
Setzen wir dies in die Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 4 \end{cases}$$

mit den Lösungen $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(t) = e^t (2 \cos(2t) + \sin(2t))$$

◇

1-41 Beispiel :


Sei y die horizontale Auslenkung aus der Ruhelage der Masse m . Sie sei durch eine Feder mit Federkonstanten k an einer festen Wand befestigt. Die Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit mit Proportionalitätskonstante α .

Dann beschreibt die Differentialgleichung

$$m \ddot{y} = -k y - \alpha \dot{y}$$

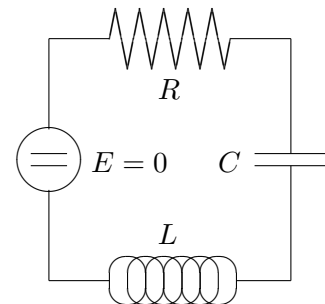
das Verhalten der Masse. Somit haben wir ein Beispiel einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.


1-42 Beispiel :

Sei I der durch den Widerstand R fließende Strom und Q die Ladung auf dem Kondensator. Dann gilt $\frac{d}{dt} Q = I$ und aus der Spannungsregel von Kirchhoff erhalten wir

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

Somit haben wir auch hier ein Beispiel einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

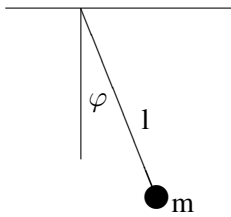


Die beiden obigen Beispiele zeigen, dass ein elektrischer LRC Kreis und eine Masse und Feder auf den selben Typ Differentialgleichung führen. Man kann eine Übersetzungstabelle zwischen elektrischen und mechanischen Systemen erstellen, siehe Tabelle 1.2.

elektrisch		mechanisch	
Induktivität	L	Masse	m
Widerstand	R	Dämpfungskonstante	α
Kapazität	$1/C$	Federkonstante	k
Ladung	Q	Auslenkung	y
Strom	I	Geschwindigkeit	\dot{y}

Tabelle 1.2: Gegenüberstellung von mechanischen und elektrischen Schwingkreisen

1-43 Beispiel :



Beim skizzierten Fadenpendel mit der Länge l und der Masse m schwingt die Masse auf einem Kreis mit Radius L . Als einzige externe Kraft wird die nach unten wirkende Gewichtskraft betrachtet. Hiervon bestimmen wir die Komponente tangential zum Kreis und erhalten $m g \sin \varphi$. Aus dem Newtonschen Gesetz ergibt sich nun

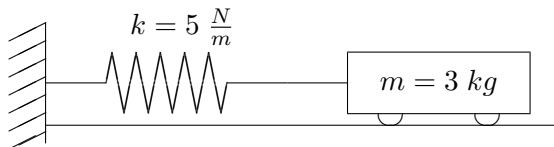
$$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin \varphi$$

Fügen wir noch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft dazu und verwenden die für kleine Auslenkungswinkel φ gültige Approximation $\sin \varphi \approx \varphi$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

◇

1-44 Beispiel :



Der Wagen in der Figur links bewege sich reibungsfrei. Zur Zeit $t = 0$ sei er in der Position $y = 0$ und bewege sich mit $2 \frac{m}{s}$ nach rechts. Zu berechnen sind Amplitude und Frequenz der resultierenden Bewegung des Wagens.

Lösung: Das zu lösende Anfangswertproblem ist

$$\begin{cases} m \ddot{y}(t) + k y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$m \lambda^2 + k = 0$$

sind gegeben durch $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-k/m} = \pm i \omega$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Aus der Bedingung $y(0) = 0$ folgt sofort $c_1 = 0$ und aus der zweiten Anfangsbedingung ergibt sich dann

$$y(t) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega t) = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Durch einsetzen der gegebenen Zahlen für m und k kann man hieraus die Antwort leicht ablesen. Es ergibt sich eine Amplitude von $1.55 m$ und 0.2 volle Schwingungsdurchläufe pro Sekunde. ◇

1-45 Beispiel : Für die Gleichungen eines Feder-Masse-Systems mit Dämpfung

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

seien m und k fest gegeben, aber die Konstante $\alpha > 0$ wir variiert. Zu untersuchen ist die qualitative Form der Lösungen. Die charakteristische Gleichung ist

$$m \lambda^2 + \alpha \lambda + k = 0$$

Lösung: Es sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. schwache Dämpfung $\alpha^2 < 4km$

In diesem Falle sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i\omega$$

und somit haben wir die folgenden Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\frac{-\alpha}{2m}t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \\ &= e^{\frac{-\alpha}{2m}t} c \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

für geeignete Konstante c und δ . Dies entspricht einer periodischen Bewegung mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$$

deren Amplitude exponentiell abfällt mit einem Exponenten $\frac{-\alpha}{2m}$. Eine typische Lösung sehen Sie in Abbildung 1.11. Die Lösung hat für positive t unendlich viele Nullstellen mit je konstantem Abstand. Die Periode ist gegeben durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

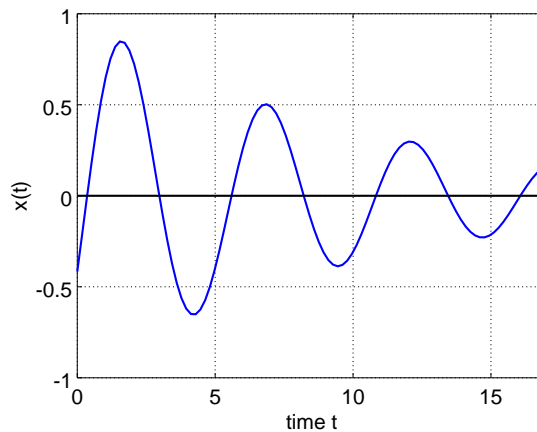


Abbildung 1.11: Schwache Dämpfung

2. kritische Dämpfung $\alpha^2 = 4km$

In diesem Falle ist die doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms gegeben durch

$$\lambda = \lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m}$$

und somit haben wir die folgenden Lösungen der Differentialgleichung

$$y(t) = e^{\frac{-\alpha}{2m}t} (c_1 + c_2 t)$$

Eine typische Lösung sehen Sie in Abbildung 1.12(a). Die Lösung hat für positive t eine oder keine Nullstelle.

3. starke Dämpfung $\alpha^2 > 4km$

In diesem Falle sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{\alpha^2 - 4km} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \beta$$

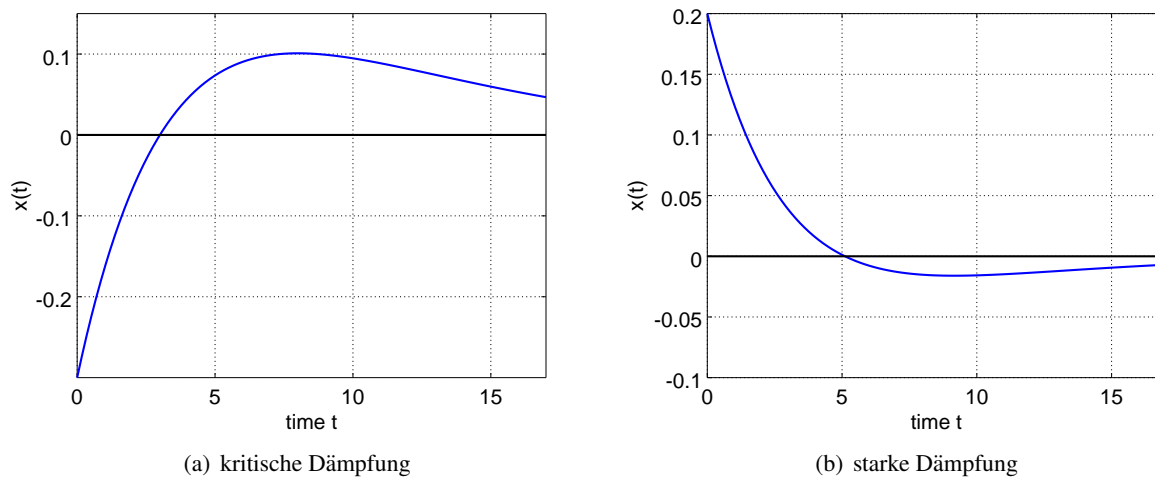


Abbildung 1.12: Kritische und starke Dämpfung

und somit haben wir die folgenden Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \exp\left(\frac{-\alpha}{2m} t\right) \left(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m} t\right) \left(c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4km}}{m} t\right)\right)
 \end{aligned}$$

Eine typische Lösung sehen Sie in Abbildung 1.12(b). Die Lösung hat für positive t eine oder keine Nullstelle.

◇

1–46 Beispiel : In der vorangehenden Aufgabe ist die Dämpfungskonstante so zu wählen, dass die Amplitude der Lösung möglichst schnell gegen Null konvergiert.

Lösung: Da α frei wählbar ist können alle drei typischen Fälle auftreten und immer tritt exponentielle Konvergenz gegen Null auf. Somit wir müssen die drei Exponenten bestimmen und vergleichen.

1. **schwache Dämpfung** $\alpha^2 < 4km$

Die Lösung ist

$$y(t) = e^{\frac{-\alpha}{2m} t} c \cos(\omega t + \delta)$$

und somit ist das Abfallverhalten durch

$$e^{\frac{-\alpha}{2m} t}$$

bestimmt.

2. **kritische Dämpfung** $\alpha^2 = 4km$

Die Amplitude der Lösung

$$y(t) = e^{\frac{-\alpha}{2m} t} (c_1 + c_2 t)$$

konvergiert schneller gegen Null als jede Funktion der Form

$$y(t) = e^{\frac{-\bar{\alpha}}{2m} t}$$

falls nur $\bar{\alpha} < \alpha$.

3. starke Dämpfung $\alpha^2 > 4km$

In der Lösung

$$y(t) = \exp\left(-\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m}t\right) \left(c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4km}}{m}t\right)\right)$$

darf der c_2 -Teil für grosse t vernachlässigt werden und somit verhält sich die Amplitude wie

$$\exp\left(-\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m}t\right)$$

Somit können wir die folgende Funktion untersuchen

$$D(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2m} & \text{falls } \alpha^2 \leq 4km \\ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m} & \text{falls } \alpha^2 > 4km \end{cases}$$

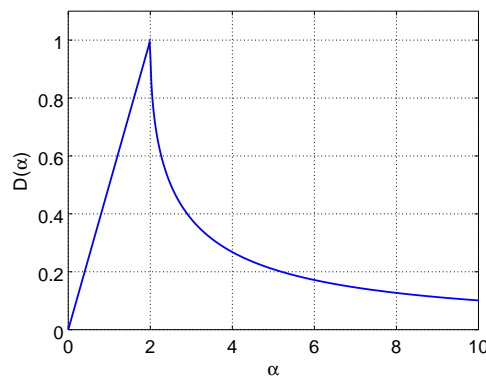


Abbildung 1.13: Exponent der Dämpfung als Funktion der Dämpfungskonstante α

Um die Maxima dieser Funktion zu finden müssen wir den zweiten Ausdruck bezüglich α ableiten und erhalten

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4km} \right) = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4km}} < 0$$

Somit ist die Funktion für $\alpha^2 > 4km$ strikt fallend. Somit nimmt die Funktion $D(\alpha)$ ihren maximalen Wert von $\frac{\sqrt{4km}}{2m} = \sqrt{k/m}$ bei $\alpha^2 = 4km$ an. Somit liefert die kritische Dämpfung die schnellste Konvergenz gegen Null. Der Graph der Funktion $D(\alpha)$ als Funktion der Dämpfungskonstante α für den Spezialfall $k = m = 1$ ist gegeben in Abbildung 1.13. \diamond

1–47 Beispiel : Von einem Masse–Feder–System mit Masse $m = 2$ kg weiss man, dass die Masse zwei vollständige Schwingungen pro Sekunde macht. Nach einer Minute hat sich die Amplitude in etwa halbiert. Bestimmen Sie k und α .

Lösung: Es liegt der Fall einer schwachen Dämpfung vor und von der Lösung

$$y(t) = e^{\frac{-\alpha}{2m}t} c \cos(\omega t + \delta)$$

wissen wir aufgrund der gegebenen Informationen

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2\pi} &= 2 \\ \exp\left(\frac{-\alpha}{2m} 60\right) &= 0.5\end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit $m = 2 \text{ kg}$ sofort

$$\begin{aligned}\omega &= 4\pi \approx 12.57 \\ \alpha &= -\frac{2m}{60} \ln 0.5 \approx 0.046\end{aligned}$$

Aus der Beziehung

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2$$

findet man leicht

$$k = m \left(\omega^2 + \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 \right) \approx 316$$

◇

Inhomogene Gleichungen

Eine inhomogene Gleichung unterscheidet sich von einer homogenen Gleichung nur durch den zusätzlichen Term $f(t)$ auf der rechten Seite der Gleichung. Folglich ist es keine Überraschung, dass auch die theoretischen Resultate ähnlich sind.

1–48 Theorem : Seien $b(t)$, $c(t)$ und $f(t)$ stetige Funktionen. Dann hat eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y}(t) + b(t) \dot{y}(t) + c(t) y(t) = f(t)$$

immer zwei linear unabhängige Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ des zugehörigen homogenen Problems und $y_p(t)$ eine partikuläre Lösung. Dann ist jede Funktion der Form

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Problems.

Für gegebene Werte von t_0 , y_0 und y_1 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + b(t) \dot{y}(t) + c(t) y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \end{cases}$$

genau eine Lösung. Sie ist von der oben gegebenen Form, wobei die Konstanten c_1 und c_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit dem Spezialfall der konstanten Koeffizienten beschäftigen und somit Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \end{cases}$$

untersuchen. Aufgrund des obigen Theorems kann man den folgenden Rechenweg einschlagen um eine Lösung zu finden.

1. Finde linear unabhängige Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der homogenen Differentialgleichung

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = 0$$

Hierzu brauchen wir nur die charakteristische Gleichung

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

zu lösen.

2. Finde eine partikuläre Lösung $y_p(t)$. Hierzu werden wir die Methode der **unbestimmten Koeffizienten** verwenden.
3. Bestimme die Konstanten c_1 und c_2 in der allgemeinen Lösung

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

mit Hilfe der Anfangsbedingung.

1–49 Beispiel : Um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4 y = 17 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 2 \end{cases}$$

zu lösen, verwenden wir die Lösungen $\lambda = \pm i2$ der charakteristischen Gleichung. Das führt zu den homogenen Lösungen

$$y_1(t) = \cos(2t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sin(2t)$$

Durch intelligentes Raten versuchen wir $y_p(t) = k$ und setzen in der Differentialgleichung ein

$$\frac{d^2 k}{dt^2} + 4 k = 17$$

um sehen, dass $y_p(t) = 17/4$ tatsächlich eine partikuläre Lösung ist. Somit ist die allgemeine Lösung von der Form

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \frac{17}{4} + c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Setzt man dies in die Anfangsbedingungen ein, so erhält man zwei lineare Gleichungen für die Konstanten c_1 und c_2 .

$$\begin{cases} \frac{17}{4} + c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \\ 0 - 2 c_1 \sin(0) + 2 c_2 \cos(0) = 2 \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{17}{4} \\ 2 c_2 = 2 \end{cases}$$

Somit haben wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = \frac{17}{4} - \frac{17}{4} \cos(2t) + \sin(2t)$$

◇

1–50 Beispiel : Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = e^{-3t} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

hat dieselben Lösungen des homogenen Problems wie das vorangehende Problem, d.h.

$$y_1(t) = \cos(2t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sin(2t)$$

Durch intelligentes Raten versuchen wir $y_p(t) = k e^{-3t}$ und setzen das in der Differentialgleichung ein

$$\frac{d^2}{dt^2} k e^{-3t} + 4 k e^{-3t} = e^{-3t}$$

Das führt auf die Gleichung

$$e^{-3t} (9k + 4k) = e^{-3t}$$

mit der Lösung $k = 1/13$. Somit ist $y_p(t) = e^{-3t}/13$ tatsächlich eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \frac{1}{13} e^{-3t} + c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Setzt man dies in die Anfangsbedingungen ein, so erhält man zwei lineare Gleichungen für die Konstanten c_1 und c_2 .

$$\begin{cases} \frac{1}{13} + c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \\ \frac{-3}{13} - 2c_1 \sin(0) + 2c_2 \cos(0) = 0 \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{1}{13} \\ 2c_2 = \frac{3}{13} \end{cases}$$

Somit haben wir die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{13} e^{-3t} - \frac{1}{13} \cos(2t) + \frac{3}{26} \sin(2t)$$

◇

In den beiden vorangehenden Beispielen wurde die Form der partikulären Lösung jeweils erraten und die exakten Werte der Koeffizienten durch einsetzen in die Differentialgleichung bestimmt. Die selbe Idee kann man für Lösungen der Gleichung

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = f(t)$$

für einfache Funktionen $f(t)$ einsetzen. Um die richtige Form der partikulären Lösung $y_p(t)$ zu erraten, kann die folgende Tabelle verwendet werden. Hierbei sind P_n , Q_n und R_n Polynome der Ordnung n mit unabhängiger Variablen t . Die Werte $\lambda_{1,2}$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

Funktion $f(t)$	$y_p(t)$ Form der Lösung	Bedingung
$P_n(t)$	$y_p(t) = Q_n(t)$	falls $\lambda_{1,2} \neq 0$
$P_n(t)$	$y_p(t) = t Q_n(t)$	falls $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$
$P_n(t)$	$y_p(t) = t^2 Q_n(t)$	falls $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$e^{\alpha t}$	$y_p(t) = k e^{\alpha t}$	falls $\lambda_{1,2} \neq \alpha$
$e^{\alpha t}$	$y_p(t) = k t e^{\alpha t}$	falls $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 \neq \alpha$
$e^{\alpha t}$	$y_p(t) = k t^2 e^{\alpha t}$	falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$
$P_n(t) e^{\alpha t}$	$y_p(t) = Q_n(t) e^{\alpha t}$	falls $\lambda_{1,2} \neq \alpha$
$P_n(t) e^{\alpha t}$	$y_p(t) = t Q_n(t) e^{\alpha t}$	falls $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 \neq \alpha$
$P_n(t) e^{\alpha t}$	$y_p(t) = t^2 Q_n(t) e^{\alpha t}$	falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$
$\sin(\omega t)$	$y_p(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$	falls $\lambda_{1,2} \neq i\omega$
$\sin(\omega t)$	$y_p(t) = t (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))$	falls $\lambda_1 = i\omega$
$\cos(\omega t)$	$y_p(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$	falls $\lambda_{1,2} \neq i\omega$
$\cos(\omega t)$	$y_p(t) = t (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))$	falls $\lambda_1 = i\omega$
$e^{\alpha t} P_n(t) \sin(\omega t)$	$y_p(t) = e^{\alpha t} (Q_n(t) \sin(\omega t) + R_n(t) \cos(\omega t))$	falls $\lambda_{1,2} \neq \alpha \pm i\omega$
$e^{\alpha t} P_n(t) \sin(\omega t)$	$y_p(t) = t e^{\alpha t} (Q_n(t) \sin(\omega t) + R_n(t) \cos(\omega t))$	falls $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$
$e^{\alpha t} P_n(t) \cos(\omega t)$	$y_p(t) = e^{\alpha t} (Q_n(t) \sin(\omega t) + R_n(t) \cos(\omega t))$	falls $\lambda_{1,2} \neq \alpha \pm i\omega$
$e^{\alpha t} P_n(t) \cos(\omega t)$	$y_p(t) = t e^{\alpha t} (Q_n(t) \sin(\omega t) + R_n(t) \cos(\omega t))$	falls $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

Die Länge der Tabelle zeigt, dass ein erfolgreiches, strukturloses Memorisieren kaum möglich sein wird. Hier sind mögliche Daumenregeln, um die Struktur der Tabelle zu erkennen.

1. Ist der inhomogene Term $f(t)$ eine Summe von verschiedenen Termen, so können diese einzeln behandelt werden und die daraus resultierenden Teillösungen summiert werden. Für die Einzelterme können die folgenden einfachen Regeln verwendet werden.

Funktion $f(t)$	→	Ansatz für partikuläre Lösung $y_p(t)$
Polynom vom Grad n	→	Polynom vom Grad n
Exponentialfunktion $e^{\alpha t}$	→	Exponentialfunktion $e^{\alpha t}$
Trig. Funktion mit Frequenz ω	→	Trig. Funktion mit Frequenz ω
Produkt von Obigen	→	Produkt von Obigen

2. Setzt man die obige partikuläre Lösung $y_p(t)$ in die Differentialgleichung ein und erhält

$$a \ddot{y}_p(t) + b \dot{y}_p(t) + c y_p(t) = 0$$

so ist der Ansatz mit t zu multiplizieren. Das Verfahren kann bei Bedarf wiederholt werden.

3. Ist die Funktion $f(t)$ eine Summe mehrerer Terme, so können die einzelnen Terme separat behandelt werden und anschliessend die Resultate summiert werden.

1-51 Beispiel : Um eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = 7 \sin(t)$$

zu finden verwendet man den Ansatz

$$y_p(t) = a \cos t + b \sin t$$

und setzt in die Differentialgleichung ein

$$(-a \cos t - b \sin t) + (-a \sin t + b \cos t) + 4(a \cos t + b \sin t) = 7 \sin t$$

oder auch

$$\sin t (-b - a + 4b) + \cos t (-a + b + 4a) = 7 \sin t$$

Separiert man Terme mit $\sin t$ und $\cos t$, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -a + 3b = 7 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

mit den Lösungen $a = -7/10$ und $b = 21/10$. Somit ist eine partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(t) = \frac{-7}{10} \cos t + \frac{21}{10} \sin t$$

◇

1-52 Beispiel : Die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = 3e^{2t}$$

gehörenden homogenen Problems ist

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

Für die partikuläre Lösung kann der Ansatz $y_p(t) = k e^{2t}$ verwendet werden. Setzt man diesen in die Gleichung ein, so ergibt sich

$$2^2 k e^{2t} - 4 k e^{2t} = 3 e^{2t}$$

Diese Gleichung kann **nicht** nach k aufgelöst werden, da der linke Ausdruck Null ist. Deshalb ist der neue Ansatz $y_p(t) = k t e^{2t}$ zu versuchen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - 4y(t) &= 3 e^{2t} \\ (2^2 k t e^{2t} + 4 k e^{2t}) - 4 k t e^{2t} &= 3 e^{2t} \\ t (2^2 k - 4 k) + 4 k &= 3 \\ k &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{4} t e^{2t}$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 durch Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

◇

1–53 Beispiel : Ist $0 < \delta$ eine kleine Konstante, so entspricht die Gleichung

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t)$$

einem schwach gedämpften Masse–Feder–System mit natürlicher Frequenz ω_0 , d.h. ohne Dämpfung würde das System mit dieser Frequenz schwingen. Der inhomogene Term $F_0 \cos(\omega t)$ entspricht einer externen, zeitperiodischen Kraft mit Amplitude F_0 . Nun versuchen wir das qualitative Verhalten der Lösung zu beschreiben.

Homogene Lösung: Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2} \right) = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_\delta$$

Somit ist die Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos(\omega_\delta t) + c_2 \sin(\omega_\delta t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Partikuläre Lösung: Eine mögliche Form der partikulären Lösung ist

$$y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t + \phi)$$

wobei die Konstante A und B zu bestimmen wären. Wir verwenden den wesentlich effizienteren komplexen Ansatz

$$y_p(t) = c e^{i\omega t}$$

Setzen wir diesen in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$c (-\omega^2 + 2i\omega\delta + \omega_0^2) e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

für die Konstante c . Somit gilt

$$c = \frac{F_0}{-\omega^2 + 2i\omega\delta + \omega_0^2} = F_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} e^{i\phi} = F_0 A e^{i\phi}$$

wobei

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \quad \text{und} \quad \tan \phi = \frac{-2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Somit ist die komplexe, partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(t) = F_0 A e^{i\omega t + i\phi}$$

Betrachtet man nur den Realteil hiervon, so ergibt sich

$$y_p(t) = F_0 A \cos(\omega t + \phi) = F_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

Im Vergleich zu $F_0 \cos(\omega t)$ kann der Faktor A als **Verstärkungsfaktor** aufgefasst werden und ϕ als **Phasenverschiebung**.

Allgemeine Lösung: Der homogene Anteil der allgemeinen Lösung

$$y(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos(\omega_\delta t) + c_2 \sin(\omega_\delta t)) + F_0 A \cos(\omega t + \phi)$$

konvergiert gegen Null falls $t \rightarrow \infty$. Also gilt für grosse Zeiten

$$y(t) \approx y_p(t) = F_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \delta^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

Nun werden wir das Langzeitverhalten des Systems untersuchen in Abhängigkeit der Anregerfrequenz ω .

Phasenverschiebung ϕ : Statt der Beziehung $\tan \phi = \frac{-2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}$ müssen wir das Argument einer komplexen Zahl untersuchen

$$\phi = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta)$$

als Kurve in der komplexen Ebene \mathbb{C} für verschiedene Werte von $0 \leq \omega < \infty$. Es ergibt sich eine nach links geöffnete Parabel. Sei nun ε eine kleine positive Zahl, dann gilt

$0 < \omega^2 = \varepsilon$	$-1 \ll \tan \phi < 0$	$0 > \phi \approx 0$
$0 < \omega^2 < \omega_0^2$	$\tan \phi < 0$	$0 > \phi > -\frac{\pi}{2}$
$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon$	$\tan \phi \ll -1$	$\phi \approx -\frac{\pi}{2}$
$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon$	$\tan \phi \gg 1$	$\phi \approx -\frac{\pi}{2}$
$\omega_0^2 < \omega^2 < \infty$	$\infty > \tan \phi > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \phi < -\pi$

Verändert sich also die Frequenz ω der externen Anregung von 0 zu ∞ , so verschiebt sich die Phasenverschiebung von 0 zu $-\pi$.

Verstärkungsfaktor A : Der Verstärkungsfaktor $A(\omega)$ ist gegeben durch

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \delta^2}}$$

Um das qualitative Verhalten dieser Funktion zu untersuchen, setzen wir $z = \omega^2$ und betrachten zuerst die Funktion

$$f(z) = (\omega_0^2 - z)^2 + 4z\delta^2$$

Um die Extrema der Funktion zu finden, setzen wir die Ableitung Null

$$\frac{d}{dz} f(z) = -2(\omega_0^2 - z) + 4\delta^2 = 0$$

und erhalten für die nach oben geöffnete Parabel einen Scheitel bei

$$z_R = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

Somit wird der maximale Wert von $A(\omega)$ erreicht bei $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. Der minimale Wert von $f(\omega^2)$ ist

$$f(\omega_R^2) = (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + 4\omega_R^2 \delta^2 = (2\delta^2)^2 + 4(\omega_0^2 - 2\delta^2)\delta^2 = 4(\omega_0^2 - \delta^2)\delta^2$$

In Abbildung 1.14(a) sehen Sie den Graphen von $f(\omega^2)$ für das Zahlenbeispiel $\omega_0 = 10$ und $\delta = 0.5$. Somit hat die Funktion $A(\omega) = 1/\sqrt{f(\omega^2)}$ ein Maximum bei der **Resonanzfrequenz** ω_R

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

und der Maximalwert des Verstärkungsfaktors gegeben durch

$$A(\omega_R) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Offensichtlich gilt $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0$. In Abbildung 1.14(b) sehen Sie den Graphen von $A(\omega)$.

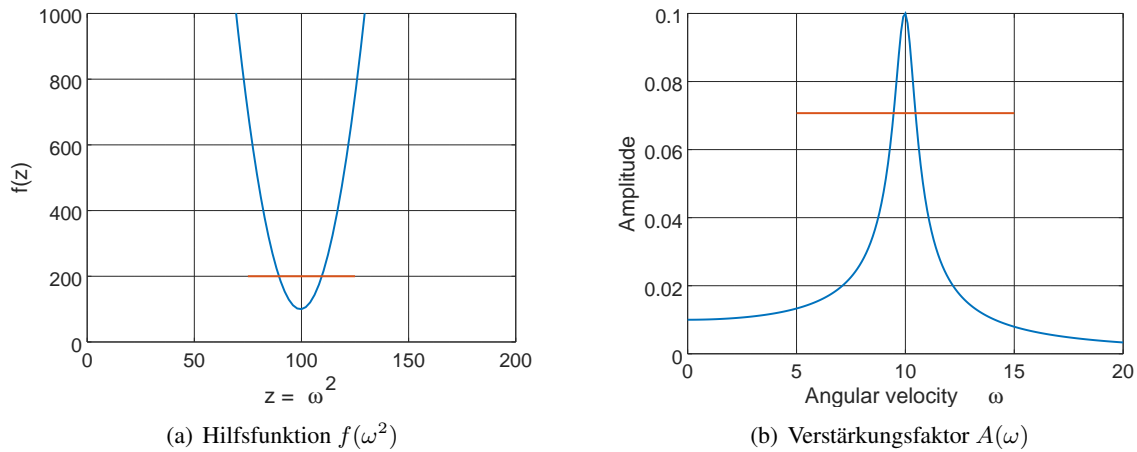


Abbildung 1.14: Gütefaktor eines Resonanzsystems

Die Breite der Resonanzkurve ist ein Mass für den **Gütefaktor** Q des Resonators. Die Breite wird bestimmt auf der Höhe $\frac{1}{\sqrt{2}} H \approx 0.71 H$, wobei H die maximale Höhe ist. Für die Funktion $f(z)$ sind diese Werte bestimmt durch

$$\begin{aligned} 2 f(z_R) &= f(z) = f(z_R) + (z - z_R)^2 \\ (z - z_R)^2 &= f(z_R) = 4 (\omega_0^2 - \delta^2) \delta^2 \\ z - z_R &= 2 \delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{aligned}$$

Falls $\delta \ll \omega_0$ so gilt $\omega_r \approx \omega_0$ und

$$\begin{aligned} z - z_R &= \omega^2 - \omega_R^2 = (\omega - \omega_R)(\omega + \omega_R) \approx (\omega - \omega_0) 2 \omega_0 \\ \omega - \omega_0 &\approx \frac{2 \delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2 \omega_0} \approx \frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = \delta \end{aligned}$$

Somit gilt in Abbildung 1.14(b) die Beziehung

$$2 \delta = \text{volle Breite auf 71\% der maximalen Höhe}$$

Der Gütefaktor Q ist gegeben durch

$$Q = \frac{\pi f_R}{\delta} = \frac{\omega_R}{2 \delta} = \frac{\omega_R}{\text{volle Breite auf Höhe } H/\sqrt{2}}$$

Somit entspricht ein grosser Wert des Gütefaktors Q einem System mit wenig Reibung. ◇

1.6 Zusammenstellung der Lösungsmethoden

Bisher haben wir wenige Verfahren kennen gelernt um einfache gewöhnliche Differentialgleichungen analytische zu lösen. Die folgende Zusammenstellung kann Ihnen helfen die Übersicht zu bewahren. Es gibt noch sehr viele Verfahren um gewöhnliche Differentialgleichungen analytische zu lösen. Einige der Methoden sind in *Mathematica* implementiert und viele Verfahren sind in einem umfassenden Buch von Erich Kamke [Kamke] beschrieben.

1. Gleichungen erster Ordnung:

(a) separable Gleichungen

Typisches Beispiel

$$\frac{dy}{dt} = (t^2 + 1) e^{3y}$$

Verfahren: Variablen separieren, Integrieren um eine implizite Lösung zu erhalten, Auflösen um eine explizite Gleichung zu erhalten.

(b) lineare Gleichung

i. homogene, lineare Gleichung

Typisches Beispiel

$$y'(x) = x y(x)$$

Verfahren: ist separierbar, lösen durch Integration.

Der wichtige (und einfache) Fall $y' = a y$ wird gelöst durch $y(x) = c e^{ax}$

ii. inhomogene, lineare Gleichung

A. konstanter Koeffizient

Typisches Beispiel

$$y'(x) - y(x) = x \sin x$$

Verfahren: Methode der unbestimmten Koeffizienten um eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Damit das Verfahren eine Lösung liefert, muss der inhomogene Term eine Kombination von Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen sein.

B. nicht konstanter Koeffizient

Typisches Beispiel

$$y'(x) - x y(x) = x \sin x$$

Verfahren: integrierender Faktor

2. Gleichungen zweiter Ordnung:

(a) linear, konstante Koeffizienten, homogen

Typisches Beispiel

$$y'' + 5y' - 10y = 0$$

Verfahren: charakteristische Gleichung, Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$

Allgemeine Lösung: $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

(b) linear, konstante Koeffizienten, inhomogen

Typisches Beispiel

$$y''(x) + 5y'(x) - 10y(x) = \sin(3x) + e^x$$

Verfahren: Methode der unbestimmten Koeffizienten um eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ zu finden. Damit das Verfahren eine Lösung liefert, muss der inhomogene Term eine Kombination von Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen sein.

Allgemeine Lösung: $y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

1.7 Récapitulation des méthodes de solutions

On a discuté quelques méthodes pour résoudre des équations différentielles ordinaires. La récapitulation ci-dessous peut vous aider de bien choisir la méthode pour un problème donné. Il existe plus de méthodes analytiques pour trouver des solutions des équations différentielles ordinaires. *Mathematica* utilise quelques méthodes différentes et le livre de Erich Kamke [Kamke] contient même plus de ces méthodes.

1. équations de l'ordre un:

- (a) équations séparables
exemple typique

$$\frac{dy}{dt} = (t^2 + 1) e^{3y}$$

méthode: séparer les variables et intégrer pour obtenir une solution implicite. Puis résoudre pour arriver à une solution explicite.

- (b) équation linéaire

- i. équation linéaire et homogène
exemple typique

$$y'(x) = x y(x)$$

méthode: séparable, résoudre par intégration.

La solution du cas le plus simple et important $y' = a y$ est donnée par $y(x) = c e^{ax}$

- ii. équation linéaire et inhomogène

- A. coefficient constant
exemple typique

$$y'(x) - y(x) = x \sin x$$

méthode: coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière $y_p(x)$. Pour obtenir une solution le terme inhomogène doit être une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques, exponentielles et des polynômes.

- B. coefficient non constant
exemple typique

$$y'(x) - x y(x) = x \sin x$$

méthode: facteur intégrant

2. équations de l'ordre deux:

- (a) linéaire, homogène, coefficient constant
exemple typique

$$y'' + 5y' - 10y = 0$$

méthode: équation caractéristique, point de départ $y(t) = e^{\lambda t}$

solution générale: $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

- (b) linéaire, inhomogène, coefficient constant
exemple typique

$$y''(x) + 5y'(x) - 10y(x) = \sin(3x) + e^x$$

méthode: coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière $y_p(x)$. Pour obtenir une solution le terme inhomogène doit être une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques, exponentielles et des polynômes.

solution générale: $y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

1.8 Aufgaben

1.8.1 Vektorfelder und separierbare Differentialgleichungen

• Aufgabe 1-1:

Zeichnen Sie ein Vektorfeld für die Differentialgleichung

$$y' = -y(y^2 - 1)$$

und skizzieren Sie einige Lösungen. Die Gleichung ist nicht zu lösen.

• Aufgabe 1-2:

Zeichnen Sie ein Vektorfeld für die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x + 1 - t$$

und skizzieren Sie einige Lösungen.

• Aufgabe 1-3:

Zu untersuchen ist die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d y}{d x} = y(1 - y)$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld der Differentialgleichung für den Bereich $0 \leq x \leq 3$ und $-1 \leq y \leq 2$.

(b) Finden Sie die exakte Lösung der obigen Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$. Die Zwischenschritte sind zu zeigen.

(a) Esquisser le champ vectoriel de cette équation pour le domaine $0 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$.

(b) Trouver la solution exacte de l'équation ci-dessus avec la condition initiale $y(0) = 2$. Montrer les calculs.

• Aufgabe 1-4:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} x(t) = \sin x(t) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 7$.

(b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 2$ und $x_0 = 5$.

(c) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.1$ **graphisch**.

(a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 7$.

(b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 2$ et $x_0 = 5$.

(c) Déterminer d'une façon exacte la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.1$ en utilisant un argument **graphique**.

• Aufgabe 1-5:

Examiner l'équation différentielle

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} y(x) = (y(x) - 1)^3$$

- (a) Dessiner le champ vectoriel de cette équation différentielle pour $-2 \leq x \leq 4$ et $-1 \leq y \leq 5$.
- (b) Esquisser quelques solutions.
- (c) Trouver la solution exacte de l'équation avec la condition initiale $y(0) = 3$.

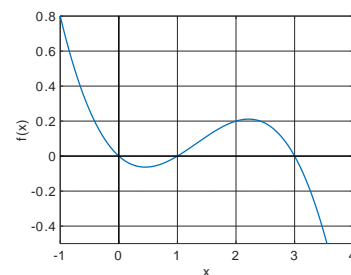
- (a) Zeichnen Sie das Vektorfeld dieser Differentialgleichung für $-2 \leq x \leq 4$ und $-1 \leq y \leq 5$.
- (b) Skizzieren Sie einige Lösungen.
- (c) Bestimmen Sie die exakte Lösung der Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 3$.

• **Aufgabe 1–6:**

Untersuchen Sie die untenstehende Differentialgleichung, wobei der Graph der Funktion $f(x)$ unten gezeigt ist.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Examiner l'équation différentielle avec la fonction $f(x)$ montrée ci-dessous.



- (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-1 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 5$.
- (b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = -0.3$, $x_0 = 0.3$, $x_0 = 2$ und $x_0 = 3.7$.
- (c) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 1.2$ **graphisch**.
- (d) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $D = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.3$ **graphisch**.

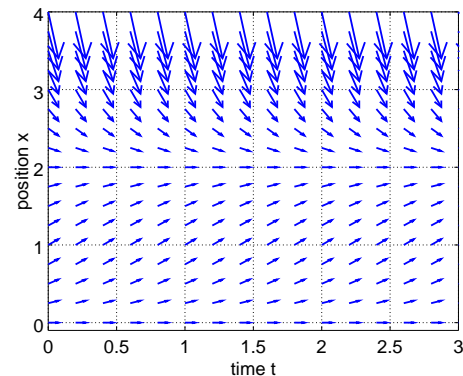
- (a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $-1 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 5$.
- (b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = -0.3$, $x_0 = 0.3$, $x_0 = 2$ et $x_0 = 3.7$.
- (c) Déterminer d'une façon exacte la limite $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 1.2$ en utilisant un argument **graphique**.
- (d) Déterminer d'une façon exacte la limite $D = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.3$ en utilisant un argument **graphique**.

• **Aufgabe 1–7:**

- (a) Untersuchen Sie die Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d}{dx} y(x) = \cos(y(x))$ **graphisch**. Bestimmen Sie die Werte von A , B und C .
- (b) Unten sehen Sie das Vektorfeld für eine einfache Differentialgleichung der Form $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Finden Sie eine der möglichen Funktionen $f(x)$.

- (a) Examiner l'équation différentielle $\frac{d}{dx} y(x) = \cos(y(x))$ et les solutions d'une façon **graphique**. Trouver les valeurs de A , B et C .
- (b) Ci-dessous trouvez le champ vectoriel d'une équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Déterminer une des fonctions $f(x)$ possibles.

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \quad \text{falls/si} \quad y(0) = 0.5 \\
 B &= \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \quad \text{falls/si} \quad y(0) = 3.2 \\
 C &= \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) \quad \text{falls/si} \quad y(0) = 0.5
 \end{aligned}$$



Achtung: (a) und (b) sind unabhängig.

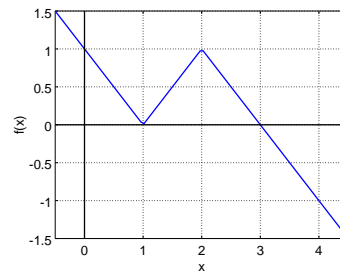
Attention: (a) et (b) sont indépendants.

• Aufgabe 1–8:

Untersuchen Sie die untenstehende Differentialgleichung, wobei der Graph der Funktion $f(x)$ unten gezeigt ist.

Examiner l'équation différentielle avec la fonction $f(x)$ montrée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t)) \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned}$$



(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $0 \leq x \leq 4$.

(a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \leq t \leq 3$ et $0 \leq x \leq 4$.

(b) Skizzieren Sie die drei Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = 0.2$, $x_0 = 1.2$ und $x_0 = 3.8$.

(b) Esquisser les trois solutions avec les valeurs initiales $x_0 = 0.2$, $x_0 = 1.2$ et $x_0 = 3.8$.

(c) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.2$ **graphisch**.

(c) Déterminer d'une façon exacte la limite $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.2$ en utilisant un argument **graphique**.

(d) Bestimmen Sie den exakten Grenzwert $D = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 1.2$ **graphisch**.

(d) Déterminer d'une façon exacte la limite $D = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 1.2$ en utilisant un argument **graphique**.

• Aufgabe 1–9:

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = 8x^3y^2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

• Aufgabe 1–10:

Finden Sie die Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2) x y^2$$

• Aufgabe 1–11:

Versuchen Sie Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y}{x - y}$$

mittels Separation der Variablen zu lösen.

• Aufgabe 1–12:

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = 3x^2(y + 2) \\ y(4) = 4 \end{cases}$$

Falls möglich ist eine explizite Lösung anzugeben.

• Aufgabe 1–13:

Bei radioaktiven Elementen ist die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Elemente proportional zur Anzahl der vorhandenen Elemente. Formulieren Sie dieses Gesetz als Differentialgleichung mit der Anzahl N der Elemente als abhängiger Variablen. Bestätigen Sie die im Kapitel über Exponentialfunktionen verwendete Formel.

• Aufgabe 1–14:

Ein kugelförmiger Wassertropfen fällt durch wasserhaltige Luft (Wolke) und sammelt hierbei Wasser ein. Nehmen Sie an, dass die Menge des pro Zeiteinheit aufgenommenen Wassers proportional zur Oberfläche des Tropfens ist. Finden Sie die Differentialgleichung für den Radius r des Tropfens und lösen Sie die Gleichung.

• Aufgabe 1–15:

Betrachten Sie alle Kurven $x \cdot y = c$. Finden Sie die Funktion $f(x)$ deren Graph durch den Punkt $(3, 1)$ geht und der senkrecht zur obigen Kurvenschar ist.

• Aufgabe 1–16:

Die Tragseile einer Hängebrücke nehmen eine Form an, die der Kettenlinie sehr ähnlich ist. Vernachlässigen Sie das Gewicht des Tragseiles, sowie der vertikalen Seile. Nur das Gewicht der Fahrbahn soll berücksichtigt werden. Es ist gegeben durch ρ (Masse pro Laufmeter).

(a) Leiten Sie die Differentialgleichung her für die Höhe $f(x)$ als Funktion der horizontalen Koordinate x .

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung.

Tipp: Konstruktion der Kettenlinie ansehen (Seite 18).

• Aufgabe 1–17:

Die Tragseile einer Hängebrücke nehmen eine Form an, die der Kettenlinie sehr ähnlich ist. Vernachlässigen Sie das Gewicht des Tragseiles. Das Gewicht der Fahrbahn und der vertikalen Seile soll berücksichtigt werden. Die Angaben sind gegeben durch ρ_1 (Masse pro Laufmeter der Fahrbahn) und der Masse der vertikalen Seile pro (horizontalen) Laufmeter kann durch $\rho_2 f(x)$ beschrieben werden (wieso?).

(a) Leiten Sie die Differentialgleichung her für die Höhe $f(x)$ als Funktion der horizontalen Koordinate x .

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung.

(c) Finde Sie die eindeutig bestimmte Lösung mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Tipp: Konstruktion der Kettenlinie ansehen (Seite 18).

• Aufgabe 1–18:

Pour un processus adiabatique d'un gaz idéal de volume V et pression p on sait que

Für einen adiabatischen Vorgang mit einem idealen Gas (Volumen V und Druck p) gilt

$$\frac{dp}{dV} = - \left(\frac{c_p}{c_V} \right) \frac{p}{V}$$

Utiliser la notation

Hierbei ist

- c_V spezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Volumen
 capacité spécifique de chaleur pour un volume fixe
 c_p spezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Druck
 capacité spécifique de chaleur pour une pression fixe

- (a) Trouver la pression p comme fonction du volume V . (a) Bestimmen Sie den Druck p als Funktion des Volumens V .
 (b) Montrer que $p \cdot V^\kappa = \text{const}$ pour une constante κ appropriée. Trouver κ . (b) Zeigen Sie, dass $p \cdot V^\kappa = \text{const}$ für eine geeignete Konstante κ . Bestimmen Sie κ .

1.8.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung**• Aufgabe 1–19:**

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} - y = e^{2t}$$

• Aufgabe 1–20:

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x y' + y + 4 = 0$$

• Aufgabe 1–21:

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x y' + y = \sin x$$

• Aufgabe 1–22:

Finden Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' - y = e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

• Aufgabe 1–23:

Eine Gesellschaft mit beschränkter Haftung (GmbH) möchte hochgiftigen Abfall im Meer versenken. Die verwendeten Behälter widerstehen einem Aufprall mit $12 \frac{m}{sec}$. Der Strömungswiderstand der Fässer ist proportional zur Geschwindigkeit und gegeben durch $k v$, wobei $k \approx 0.64 \frac{kg}{sec}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\dot{v} = \alpha - \frac{k}{m} v$$

die obige Situation beschreibt und finden Sie die physikalische Bedeutung der Konstanten α .

- (b) Wie schwer dürfen die Fässer höchstens sein, damit die Auftreffgeschwindigkeit auch in grossen Tiefen die Grenze nicht übersteigen.

• **Aufgabe 1–24:**

Ein Tank enthält 100 l Wasser. Irrtümlicherweise werden 15 kg Salz dazugeschüttet statt 10 kg. Zur Korrektur des Fehlers wird unten Wasser abgelassen (3 l/min) und oben frisches Wasser dazugeschüttet (2 l/min). Durch ständiges Umrühren wird die Konzentration in der Mischung konstant gehalten. Wie lange dauert es, bis die gewünschte Konzentration erreicht ist.

• **Aufgabe 1–25:**

Ein Tank enthält 100 l Wasser. Irrtümlicherweise werden 15 kg Salz dazugeschüttet statt 10 kg. Zur Korrektur des Fehlers wird unten Wasser abgelassen (2 l/min) und oben frisches Wasser dazugeschüttet (3 l/min). Durch ständiges Umrühren wird die Konzentration in der Mischung konstant gehalten. Wie lange dauert es, bis die gewünschte Konzentration erreicht ist.

• **Aufgabe 1–26:**

Une citerne contient 150 l de l'eau pure. On ajoute 5 l de solution salée par minute (avec une concentration de 0.5 kg/l) et on laisse écouler 3 l par minute de la mixture. Quand est la concentration dans la citerne égale à 0.1 kg/l ?

Ein Tank enthält 150 l reines Wasser. Es werden pro Minute 5 l Wasser mit einer Salzkonzentration von 0.5 kg/l dazugeschüttet und 3 l der Mischung unten abgelassen. Wann ist die Konzentration im Tank 0.1 kg/l ?

• **Aufgabe 1–27:**

Ein Metallklotz mit einer Temperatur von 200°C wird in ein Kühlbad mit fester Temperatur (60°C) getaucht. Nach 3 Minuten beträgt die Temperatur des Klotzes 120°C . Wann wird die Temperatur 80°C erreichen?

1.8.3 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

• **Aufgabe 1–28:**

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

• **Aufgabe 1–29:**

Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \dot{y}(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

• **Aufgabe 1–30:**

Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$2y''(x) + 4y'(x) + 10y(x) = 7e^{2x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Die Lösung ist **exakt** anzugeben und der Rechenweg klar aufzuzeigen (ohne Taschenrechner).

avec la condition initiale $y(0) = 0$. Rendre la solution dans une forme **exacte** et montrer les résultats intermédiaires (sans calculatrice).

• Aufgabe 1–31:

Trouver toutes les solutions **exactes** générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

Bestimmen Sie die **exakten** allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

$$(a) \quad \frac{d^4}{dt^4} y(t) = k^4 y(t) \quad \text{avec/wobei} \quad k > 0$$

$$(b) \quad \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 0 \quad \text{avec/mit} \quad y(0) = 0$$

$$(c) \quad \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 7t$$

• Aufgabe 1–32:

Finden Sie die exakten, allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Die Rechnungen sind zu zeigen.

Trouver les solutions générales, exactes des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

$$(a) \quad \ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) + 12y(t) = 0$$

$$(b) \quad \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 12y(t) = e^{2t}$$

$$(c) \quad \dot{y}(t) = y^2(t)$$

• Aufgabe 1–33:

Examiner les solutions de l'équation différentielle suivante. Montrer les calculs.

Untersuchen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichung. Zwischenschritte sind zu zeigen.

$$y'' + y' - 6y = 1$$

(a) Trouver toutes les solutions.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen.

(b) Il existe une solution avec $y(0) = 1$ telle que la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existe. Trouver cette solution.

(b) Es gibt eine Lösung mit $y(0) = 1$, sodass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert. Bestimmen Sie diese Lösung.

• Aufgabe 1–34:

(a) Trouver toutes les solutions de l'équation $2y'' + 2y' - 12y = 0$

(a) Finde alle Lösungen $y(x)$ der Gleichung $2y'' + 2y' - 12y = 0$.

(b) Trouver toutes les solutions des équations $2y'' + 2y' - 12y = x$ et $y(0) = y'(0) = 0$

(b) Finde alle Lösungen $y(x)$ der Gleichungen $2y'' + 2y' - 12y = x$ und $y(0) = y'(0) = 0$.

• Aufgabe 1–35:

Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$2y''(x) + 4y'(x) + 10y(x) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

• Aufgabe 1–36:

Finde alle Lösungen der Differentialgleichung

$$2y''(x) + 4y'(x) + 10y(x) = \cos(x)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

• Aufgabe 1–37:

Für beide Teilaufgaben sind die Rechenschritte und Zwischenresultate klar anzugeben.

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von

$$y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = x \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'''(x) - y'(x) = 0 \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1$$

• Aufgabe 1–38:

Trouver toutes les solutions de l'équation

Finde alle Lösungen $y(x)$ der Gleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 4$$

• Aufgabe 1–39:

Trouver toutes les solutions **complexes** de l'équation

Finde alle **komplexen** Lösungen $y(x)$ der Gleichung

$$y'' + 3y' + 2y = e^{ix}$$

• Aufgabe 1–40:

Trouver toutes les solutions de l'équation

Finde alle Lösungen $y(x)$ der Gleichung

$$\begin{cases} y'' - 5y' - 6y = e^{3x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

• Aufgabe 1–41:

Trouver toutes les solutions de l'équation

Finde alle Lösungen $y(x)$ der Gleichung

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^x(2x - 3) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

• Aufgabe 1–42:

Pour une équation différentielle de la forme

Von einer Differentialgleichung der Form

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$$

on connaît la solution générale (c_1 et c_2 sont des constantes)

kennt man die allgemeine Lösung (c_1 und c_2 sind Konstanten)

$$y(x) = c_1 e^{-x} \sin(2x) + c_2 e^{-x} \cos(2x) + x^2 \quad .$$

Trouver b , c et la fonction $g(x)$.

Bestimme b , c und die Funktion $g(x)$.

• Aufgabe 1–43:

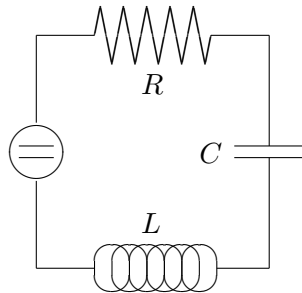
La solution générale d'une équation différentielle est donnée par

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + x^2 + e^x$$

Trouver une des équations différentielles possible avec la solution ci-dessus.

Bestimmen Sie eine mögliche Differentialgleichung mit der obigen Lösung.

• Aufgabe 1–44:


Der links gezeichnete Schaltkreis soll mit einer Frequenz von 400 Hz oszillieren und in 10 sec soll die Amplitude auf 90% der ursprünglichen Niveaus absinken. Was können Sie über die Werte von L , R und C aussagen? Die Rechnung ist mit der externen Spannung $E(t) = 0$ auszuführen.

• Aufgabe 1–45:
Euler–Knickgleichung

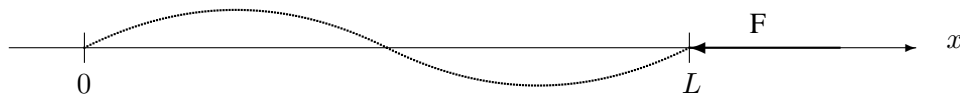
Die Differentialgleichung

La solution de l'équation différentielle

$$E I y''(x) = -F y(x) \quad \text{für/pour} \quad 0 < x < L \quad \text{und/et} \quad y(0) = y(L) = 0$$

beschreibt die Biegelinie $y(x)$ eines horizontalen Stabes aus einem Material mit Elastizitätsmodul E und einem Querschnitt mit Flächenträgheitsmoment I . An einem Ende greift eine horizontale Kraft der Stärke F an.

donne le fléchissement $y(x)$ d'une poutre de module d'élasticité E et dont le moment d'inertie I de la section est donné. A droite on applique une force F .



- Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.
- Verwenden Sie die Bedingung $y(L) = 0$ um zu zeigen, dass für kleine Kräfte F die triviale Lösung $y(x) = 0$ die einzige Lösung der Differentialgleichung ist.
- Es gibt eine kleinste Kraft F_0 , bei welcher der Stab verbogen wird, d.h. es gibt eine von Null verschiedene Lösung. Berechnen Sie diese Kraft.
- Wie gross ist die Kraft F in der Situation der obigen Figur?

- Trouver la solution générale de l'équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 0$.
- Utiliser la condition $y(L) = 0$ pour montrer que la solution triviale $y(x) = 0$ est la seule solution possible, si la force F est petite.
- Il existe une force minimale F_0 , telle que la poutre peut se déformer (une solution $y(x)$ différente de zéro). Trouver cette force.
- Trouver la force dans la situation de la figure ci-dessus.

• Aufgabe 1–46:

Bestimmen Sie die exakten Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

Trouver les solutions exactes des équations différentielles ci-dessous.

- $\ddot{y} + 2y = t^2$
- $7\dot{y} + 6y = \sin t$ mit/avec $y(0) = 0$

• Aufgabe 1–47:

Eine durch eine Feder gehaltene Masse mit $m = 2$ kg schwingt horizontal mit 10 Schwingungen pro Sekunde. Nach einer Minute ist die Amplitude auf 50% des Anfangswertes abgefallen.

- (a) Bestimmen Sie die Federkonstante k und die Dämpfungskonstante α in $m \ddot{y} = -k y - \alpha \dot{y}$.
- (b) Für welche Werte der Dämpfungskonstante α (k und m fest) schwingt das System **nicht** mehr?

Une masse $m = 2$ kg est reliée à un ressort et oscille avec 10 oscillations par seconde. Après une minute l'amplitude a diminué à 50% de l'amplitude initiale.

- (a) Déterminer la constante du ressort k et la constante d'amortissement α dans l'équation $m \ddot{y} = -k y - \alpha \dot{y}$.
- (b) Pour quelles valeurs de la constante d'amortissement α (k et m fixe) le système n'oscille-t-il plus?

1.8.4 Vermischte Aufgaben

• Aufgabe 1–48:

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

- (a) $\dot{y} - y = 1$ avec/mit $y(0) = 1$
- (b) $\dot{y} + 4y = e^{-4t}$ avec/mit $y(0) = 2$
- (c) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0$ avec/mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$
- (d) $\ddot{y} + y = \cos(2t)$ avec/mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$
- (e) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$ avec/mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y^{(3)}(0) = 0$

Die Aufgabe kann auch mittel Laplacetransformation gelöst werden und taucht im Kapitel 2 noch einmal auf als Aufgabe 2–25.

• Aufgabe 1–49:

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs intermédiaires.

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

- (a) $2\ddot{y}(t) - 18y(t) = 54$
- (b) $y'' - 7y' + 10y = 0$ avec/mit $y(0) = 0$ et/und $y'(0) = -6$
- (c) $y'' - 7y' + 10y = x$ avec/mit $y(0) = 0$

• Aufgabe 1–50:

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

- (a) $\frac{d}{dt} y(t) = e^{-3t} y(t)$
- (b) $y''(x) - 7y'(x) + 12y(x) = x$ avec/mit $y(0) = y'(0) = 0$

• Aufgabe 1–51:

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2y(x) = x + e^{2x}$.
- (b) Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung ist gegeben durch $y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 3x^2$. Bestimmen Sie eine mögliche Differentialgleichung.

- (a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = x + e^{2x}$.
- (b) La solution générale d'une équation différentielle est donnée par $y(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 3x^2$. Trouver une des équations différentielles possibles.

• **Aufgabe 1–52:**

Bestimmen Sie die exakten Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

Trouver les solutions exactes des équations différentielles ci-dessous.

$$(a) \quad \dot{y} - 2y = \sin(2t) + t$$

$$(b) \quad \ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = e^{-t} \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

• **Aufgabe 1–53:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y'(x) = -2xy(x)$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(a) Trouver la solution générale de l'équation différentielle.

(b) Anschliessend ist die Lösung mit $y(0) = -2$ zu bestimmen.

(b) Trouver ensuite la solution avec $y(0) = -2$.

(c) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-2 < x < 2$ und $-2 < y < 2$

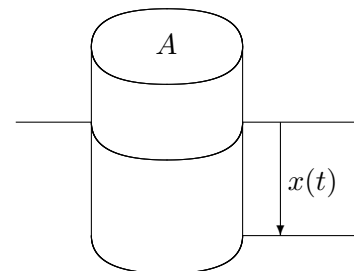
(c) Esquisser le champ vectoriel pour $-2 < x < 2$ et $-2 < y < 2$

• **Aufgabe 1–54:**

Eine zylinderförmige Boje mit Masse m und Grundfläche A sinke um $x(t)$ ins Wasser ein. Dann gilt die untenstehende Differentialgleichung. Hierbei ist ρ die Dichte von Wasser.

$$\begin{array}{lcl} \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} & = & \text{Gewichtskraft} + \text{Auftrieb} \\ m \ddot{x}(t) & = & mg - \rho g A x(t) \\ \text{masse} \cdot \text{accélération} & = & \text{gravitation} + \text{portance} \end{array}$$

Une bouée cylindrique de masse m avec une aire de base A s'enfonce dans l'eau de $x(t)$. L'équation différentielle ci-dessus donne la description de cette situation. La densité de l'eau est ρ .



(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

(a) Trouver la solution générale de cette équation.

(b) Eine Boje sinkt in Ruhe um h ins Wasser ein. Bestimmen Sie die Frequenz der auf und ab schwingenden Boje als Funktion von h .

(b) Sans mouvement la bouée s'enfonce de h dans l'eau. Déterminer la fréquence avec laquelle la bouée oscille, comme fonction de h .

• **Aufgabe 1–55:**

Zu untersuchen ist die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)x$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld der Differentialgleichung für den Bereich $0 \leq x \leq 3$ und $0 \leq y \leq 2$.

(b) Finden Sie die exakte Lösung der obigen Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

• **Aufgabe 1–56:**

(Diese Aufgabe ist etwas schwieriger)

Ein Pilot steuert sein Flugzeug so, dass die Nase immer direkt auf sein Ziel Z zeigt, das ursprünglich genau westlich seines Startpunktes liegt. Seine Geschwindigkeit (relativ zur umgebenden Luft) sei v km/h und ein Wind bläst mit Geschwindigkeit w km/h aus dem Süden. Der Startplatz sei a km vom Ziel Z entfernt. [TenePoll85, p. 168]

Bestimmen Sie die Flugbahn des Flugzeugs.

• **Aufgabe 1–57:**

Ein zylinderförmiges Fass mit Durchmesser 1 m und Höhe 1 m ist vollständig gefüllt. An der Unterkante befindet sich ein Loch von 1 mm Radius. Wie lange dauert es, bis das Fass ausgelaufen ist?

• **Aufgabe 1–58:**

Das Fass in der obigen Aufgabe wird auf die Seite gekippt und wieder gefüllt. Das Loch befinde sich wieder am tiefsten Punkt. Wie lange dauert es, jetzt bis es ausgelaufen ist?

• **Aufgabe 1–59:**

Betrachte die Gleichung

Regarder l'équation

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

(a) Für einen festen Wert von $\lambda > 0$ finde man alle Lösungen der Gleichung, welche auch die Bedingung $y(0) = 0$ erfüllen.

(a) Pour une valeur fixe de $\lambda > 0$ on doit trouver toutes les solutions de l'équation au-dessus, avec la condition $y(0) = 0$ de plus.

(b) Finde die Werte von $\lambda > 0$ für welche die Gleichung mit den zwei Nebenbedingungen $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$ eine Lösung hat, die nicht überall Null ist.

(b) Trouver les valeurs de $\lambda > 0$, telles que l'équation ci-dessus avec les conditions $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$ ait une solution, qui n'est pas partout égale à zéro.

• **Aufgabe 1–60:**

Der ursprüngliche Pegelstand in einem Wasserbehälter der Form $z = x^2 + y^2$ beträgt 4 m, wobei x, y und z in m gemessen sind. Zuunterst befindet sich ein kreisförmiges Loch mit einem Radius von 1 Zentimeter.

1. Wie lange dauert es, bis dieser Behälter ausgelaufen ist?

2. Wann beträgt der Pegelstand noch 1 Meter.

Tipp: Für die Ausflussgeschwindigkeit v bei einem Pegelstand von h Meter gilt $v = \sqrt{2hg}$, wobei für die Gravitationskonstante $g = 10 \frac{m}{s^2}$ verwendet werden soll.

• **Aufgabe 1–61:**

Regarder l'équation différentielle

Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = y(y^2 - 4y + 3)$$

pour la fonction $y(x)$.

für die Funktion $y(x)$.

(a) Dessiner le champs vectoriel et quelques solutions typiques pour cette équation.

(a) Skizziere das Vektorfeld und wenige typische Lösungen für diese Gleichung.

(b) Calculer la solution avec la condition initiale $y(0) = 2$.

(b) Bestimme die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

(c) Trouver $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ pour cette solution. Dans le calcul on peut admettre que cette limite existe.

(c) Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ für diese Lösung, wobei Sie in Verlaufe der Rechnung verwenden dürfen, dass dieser Limes existiert (ohne Beweis).

• Aufgabe 1–62:

Zwei Männer fahren in einem kleinen Motorboot. Die Masse der Passagiere und des Bootes ist 500 kg und der Motor erzeugt eine konstante Kraft von $F = 200 \text{ N}$. Der Widerstand R des Wasser sei proportional zur Geschwindigkeit v des Bootes, mit einer Proportionalitätskonstante von $k = 10 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$.

Deux hommes utilisent un petit bateau avec une masse totale de 500 kg . Le moteur applique une force constante de $F = 200 \text{ N}$. La résistance R (frottement) de l'eau est proportionnelle à la vitesse v du bateau avec une constante de proportionnalité de $k = 10 \frac{\text{N s}}{\text{m}}$.

- Stellen Sie die Differentialgleichung auf für die Geschwindigkeit $v(t)$.
- Skizzieren Sie das zu dieser Gleichung gehörende Vektorfeld.
- Nach langer Zeit wird sich eine Endgeschwindigkeit v_∞ einstellen. Berechnen Sie diese.
- Das Boot startet. Wie lange dauert es, bis die Geschwindigkeit $0.9 v_\infty$ erreicht wird und welche Strecke hat das Boot dann zurückgelegt?

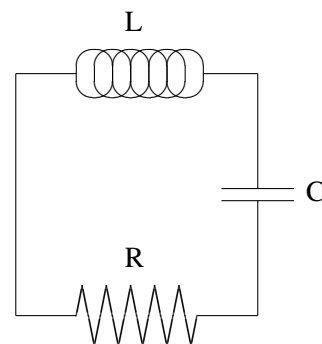
- Trouver une équation différentielle pour la vitesse $v(t)$.
- Dessiner le champ vectoriel de cette équation.
- Après un temps assez grand le bateau va atteindre une vitesse finale v_∞ . Calculer cette vitesse.
- Le bateau est lancé. Trouver le temps nécessaire pour atteindre la vitesse $0.9 v_\infty$ et aussi la distance parcourue.

• Aufgabe 1–63:

Betrachte einen einfachen LRC–Stromkreis mit kleinem Widerstand R . Die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ durch den Widerstand lautet

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

- Leite die Formel für die Kreisfrequenz ω des Stromes $i(t)$ her, als Funktion von L , C und R .
- Ist $R = 0$, so hat die Schaltung eine natürliche Kreisfrequenz ω_0 . Finde eine einfache Formel für die Abweichung $\omega - \omega_0$ für kleine Werte von R . Nimmt ω zu oder ab, falls R ansteigt?
- Es sei $R = 1 \text{ Ohm}$, $C = \frac{1}{500} \text{ Farad}$ und $L = \frac{1}{20} \text{ Henry}$. Bestimme den relativen Fehler von ω , falls R , C und L je eine Toleranz vom 10% aufweisen.


• Aufgabe 1–64:

- Die Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{y} - 2t \dot{y} - 4y = 0$$

hat zwei linear unabhängige Lösungen von der Form $y(t) = t^n$ für geeignete Werte von n . Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung mit $y(1) = 0$ und $\dot{y}(1) = 5$.

- Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$t^2 \ddot{y} - 2t \dot{y} - 4y = 7$$

• Aufgabe 1–65:

Wird ein Betrag s auf einem Konto kontinuierlich verzinst und pro Zeiteinheit ein fester Betrag abgehoben, so kann dies beschrieben werden durch die untenstehende Differentialgleichung mit geeigneten Konstanten α und q .

Une banque paie de l'intérêt d'une façon continue pour un capital s . Par unité de temps une somme fixe de ce capital est retirée de ce capital. Cette situation est décrite par l'équation différentielle ci-dessous, avec des constantes α et q .

$$\frac{d}{dt} s(t) = \alpha s(t) - q \quad \text{mit/avec} \quad s(0) = s_0$$

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.</p> <p>(b) Die Bank zahlt einen jährlichen Zins von 5%. Bestimmen Sie den Wert von α.</p> <p>(c) Nach wievielen Jahren (T) wird ein Kapital von 1'000'000.– bei einem Zins von 5% und einen jährlichen Verbrauch von 70'000.– aufgebraucht sein.</p> | <p>(a) Trouver la solution générale de cette équation différentielle.</p> <p>(b) La banque paie un intérêt de 5% par année. Calculer la valeur de α.</p> <p>(c) Le taux d'intérêt annuel est 5% pour une somme initiale de 1'000'000.– et le client utilise 70'000.– par année. Après combien d'années (T) le capital est-il consommé?</p> |
|--|---|

1.8.5 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1–1 : Die Abbildung wurde mit *Octave* oder *MATLAB* erzeugt durch den untenstehenden Code.

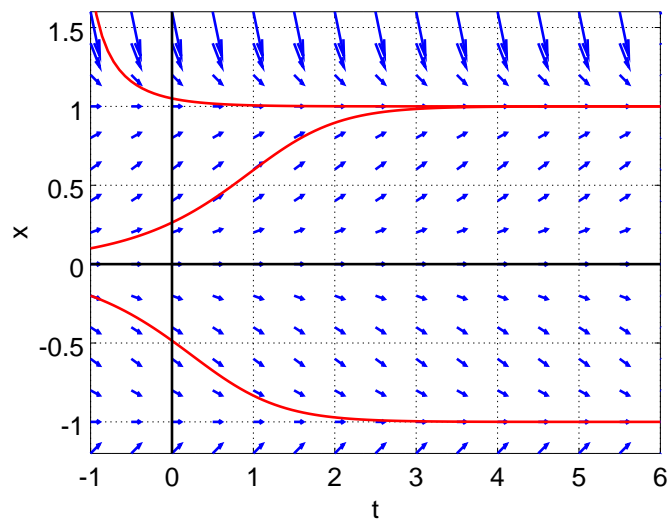
Octave

```
% script file to generate vector field and solutions
% for the differential equation d/dt x = -x*(x^2-1)
t = -1:0.5:6;          %% define domain for t
x = -1.2:0.2:1.6;      %% define domain for x
vf = @(t,x) -x.*(x.^2-1); %% describe the differential equation

nt = length(t); nx = length(x); %% generate vectors
V1 = ones(nx,nt); V2 = V1;      %% horizontal component constant 1
for i= 1:nt
    for j = 1:nx
        V2(j,i) = vf(t(i),x(j));
    end%for
end%for

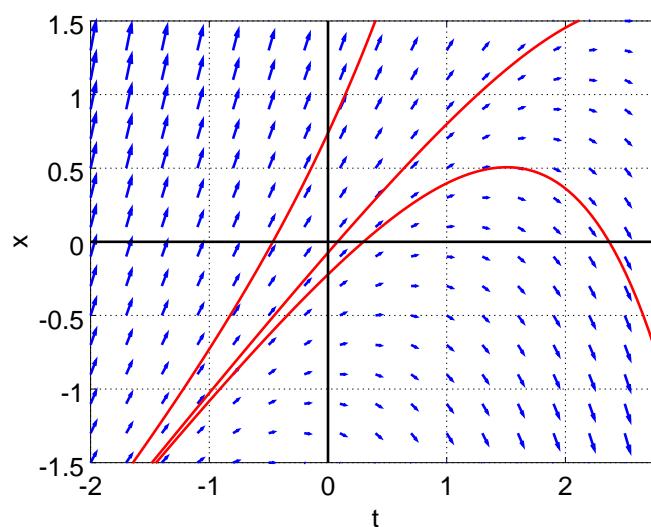
figure(1); %% create the vector field
hold off
scalefactor = 0.6;
quiver(t,x,V1,V2,scalefactor)
xlabel('t'); ylabel('x')
axis([min(t), max(t), min(x), max(x)])
grid on
hold on

T = linspace(-1,max(t),100); %% create and display solutions
[T1,X1] = ode45(vf,T,0.1); [T2,X2] = ode45(vf,T,-0.2); [T3,X3] = ode45(vf,T,+1.8);
plot(T1,X1,'r',T2,X2,'r',T3,X3,'r')
plot([min(t),max(t)], [0,0], 'k', [0 0], [min(x),max(x)], 'k')
hold off
```



Lösung zu Aufgabe 1–2 : Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = t + c e^t$$



Lösung zu Aufgabe 1–3 :

(a) Mit Octave

Octave

```
x = 0:0.3:3; %% define domain for x
y = -1:0.2:2; %% define domain for y
vf = @(x,y) y.*(1-y); %% describe the differential equation

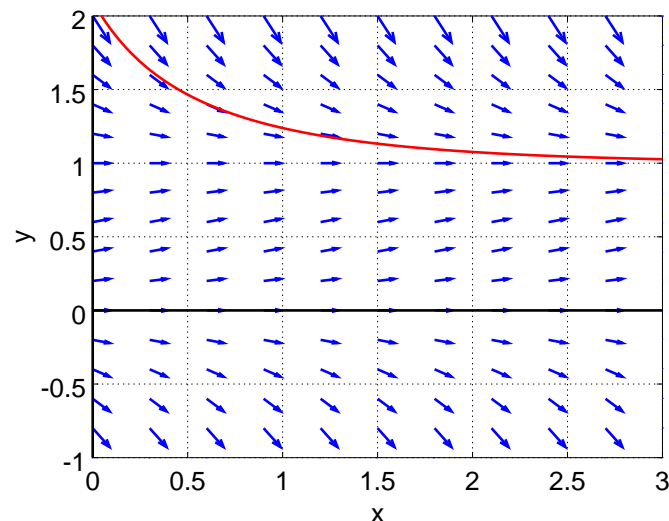
nx = length(x); ny = length(y); %% generate vectors
V1 = ones(ny,nx); V2 = V1; %% horizontal component constant 1
for i= 1:nx
    for j = 1:ny
        V2(j,i) = vf(x(i),y(j));
    end%for
end%for
```

```

figure(1);    %% create the vector field
hold off
scalefactor = 0.6;
quiver(x,y,V1,V2,scalefactor)
xlabel('x'); ylabel('y')
axis([min(x), max(x), min(y), max(y)])
grid on
hold on

X = linspace(min(x),max(x),100);    %% create and display solutions
[X1,Y1] = ode45(vf,X,2.1);
plot(X1,Y1,'r')
plot([min(x),max(x)], [0,0], 'k', [0 0], [min(y),max(y)], 'k')
hold off

```

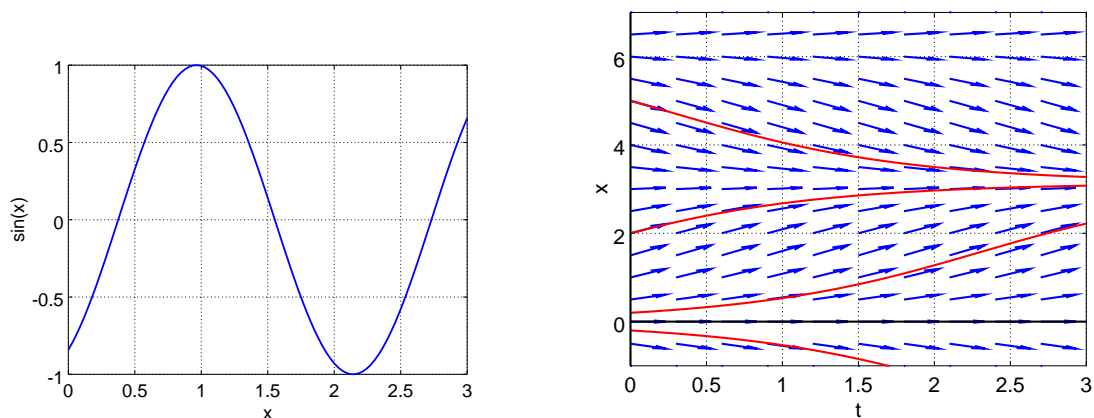


(b) Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int 1 \, dx && \text{TR verwenden} \\
 \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| &= x + c && \text{verwende } y(x) > 1 \\
 \frac{y}{y-1} &= k e^x \\
 \frac{2}{2-1} &= k && \text{verwende Anfangsbedingung } y(0) = 2 \\
 \frac{y}{y-1} &= 2 e^x \\
 y &= (y-1) 2 e^x \\
 y(x) &= \frac{-2 e^x}{1-2 e^x} = \frac{2 e^x}{2 e^x - 1} = \frac{2}{2 - e^{-x}}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–4 :

(a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x) = \sin(x)$ gegeben durch



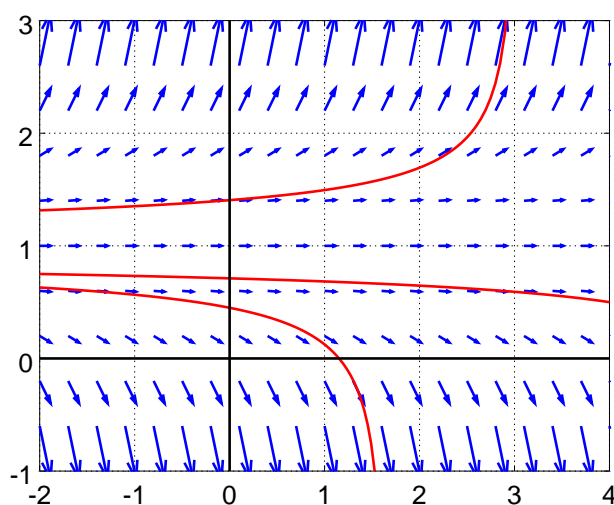
Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.

(b) Siehe oben

(c) Aus der Graphik liest man ab, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi$.

Lösung zu Aufgabe 1–5 :

(a) Es handelt sich um eine autonome Differentialgleichung.



(b) Siehe oben.

(c) Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y &= (y-1)^3 \\ \frac{1}{(y-1)^3} dy &= 1 dx \\ \int (y-1)^{-3} dy &= \int 1 dx \\ \frac{-1}{2} (y-1)^{-2} &= x + c \quad \text{verwende } y(0) = 3 \end{aligned}$$

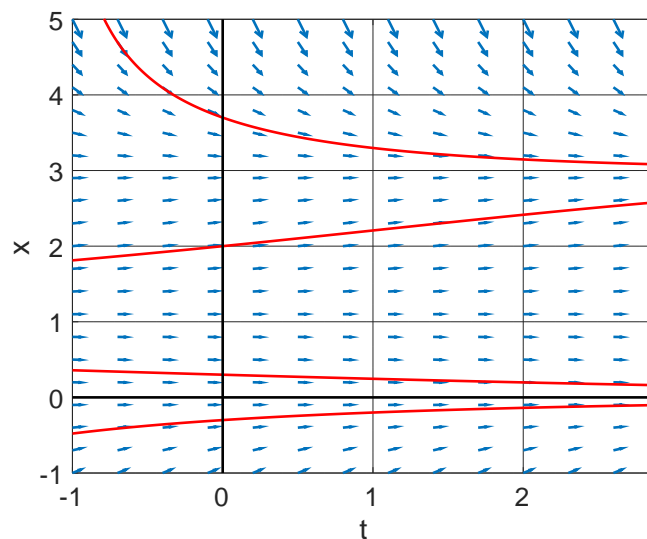
$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2} (3-1)^{-2} &= 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-1}{8} \\
\frac{1}{(y-1)^2} &= -2x + \frac{2}{8} \\
(y-1)^2 &= \frac{1}{\frac{1}{4} - 2x} \\
y-1 &= \pm \sqrt{\frac{4}{1-8x}} \quad \text{verwende } y(x) > 1 \\
y &= 1 + \sqrt{\frac{4}{1-8x}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1-6 :

(a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x)$ gegeben. In der Graphik von $f(x)$ liest man ab, dass

- Für $x < 0$ ist $f(x) > 0$ und somit $\dot{x} > 0$. Je näher x bei 0, desto kleiner wird $f(x) = \dot{x}$.
- Für $0 < x < 1$ ist $f(x) < 0$ und somit $\dot{x} < 0$. Der negativste Wert liegt bei $x \approx 0.5$.
- Für $1 < x < 3$ ist $f(x) > 0$ und somit $\dot{x} > 0$. Der grösste Wert liegt bei $x \approx 2.2$.
- Für $3 < x$ ist $f(x) < 0$ und somit $\dot{x} < 0$. Je grösser x , desto grösser $f(x) = \dot{x}$.

Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.



(b) Siehe oben

(c) Aus der Graphik liest man ab, dass $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 3$.

(d) Aus der Graphik liest man ab, dass $D = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$.

Lösung zu Aufgabe 1-7 :

(a)

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad C = -\frac{\pi}{2}$$

- (b) Die Funktion f muss Nullstellen haben bei 0 und 2. Dazwischen muss sie positiv sein. Für $x > 2$ gilt $f(x) < 0$. Der Wert von $f(4)$ sollte stark negativ sein. Eine der möglichen Lösungen ist

$$f(x) = x(2 - x)$$

Die Graphik wurde mit dieser Funktion erzeugt.

Octave

```
t = 0:0.2:3; x = 0:0.25:4;
[tt,xx] = meshgrid(t,x);
ode = @(t,x) x.*(2-x); %% describe the vector field

vt = ones(size(tt)); vx = vt;
for kx = 1:length(x)
    vx(kx,:) = ode(0,x(kx));
end

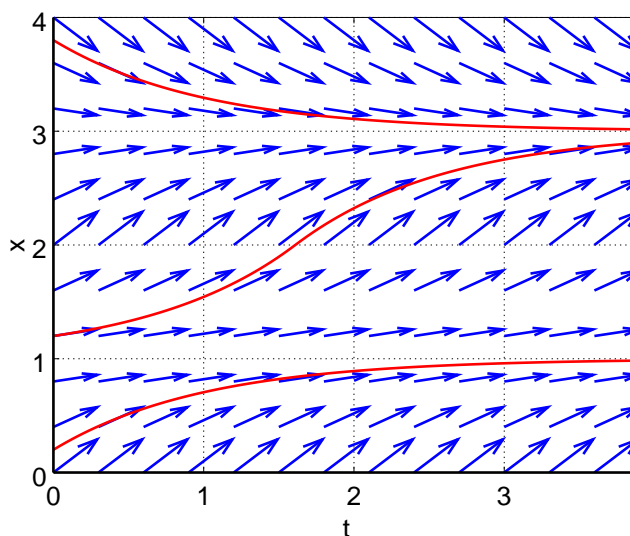
quiver(tt,xx,vt,vx,2)
axis([min(t),max(t),min(x)-0.1,max(x)])
xlabel('time t'); ylabel('position x')
```

Lösung zu Aufgabe 1–8 :

- (a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x)$ gegeben. In der Graphik von $f(x)$ liest man ab, dass

- Für $x < 1$ ist $f(x) > 0$ und somit $\dot{x} > 0$. Je näher x bei 1, desto kleiner wird $f(x) = \dot{x}$.
- Bei $x = 1$ gilt $f(1) = 0$ und somit muss das Vektorfeld auf der Höhe $x = 1$ horizontal sein. Die Lösungen werden diese horizontale Linie nicht kreuzen.
- Für $1 < x < 3$ ist $f(x) > 0$ und somit $\dot{x} < 0$. Je näher x bei 1 oder 3, desto kleiner wird $f(x) = \dot{x}$.
- Für $3 < x$ ist $f(x) < 0$ und somit $\dot{x} < 0$.

Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.



- (b) Siehe oben

(c) Aus der Graphik liest man ab, dass $C = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$.

(d) Aus der Graphik liest man ab, dass $D = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 3$.

Lösung zu Aufgabe 1–9 : Für $y \neq 0$ ist diese Gleichung separierbar

$$\begin{array}{ll}
 \frac{dy}{dx} = 8x^3 y^2 & \text{ursprüngliche Gleichung} \\
 \frac{dy}{y^2} = 8x^3 dx & \text{separierte Gleichung} \\
 \int \frac{1}{y^2} dy = \int 8x^3 dx & \text{integrieren} \\
 \frac{-1}{y} = 2x^4 + c & \text{implizite Gleichung gefunden} \\
 \frac{-1}{3} = 2 \cdot 2^4 + c & \text{Konstante bestimmen} \\
 c = -\frac{97}{3} & \text{Konstante gefunden} \\
 y(x) = \frac{-1}{2x^4 + c} & \text{explizite Lösung} \\
 y(x) = \frac{-1}{2x^4 - 97/3} & \text{Konstante einsetzen}
 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 1–10 : Für $y \neq 0$ ist diese Gleichung separierbar

$$\begin{array}{ll}
 \frac{dy}{dx} = (1 + x^2) x y^2 & \text{ursprüngliche Gleichung} \\
 \frac{dy}{y^2} = (x + x^3) dx & \text{separierte Gleichung} \\
 \int \frac{1}{y^2} dy = \int x + x^3 dx & \text{integrieren} \\
 \frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c & \text{implizite Gleichung gefunden} \\
 y(x) = \frac{-1}{x^2/2 + x^4/4 + c} & \text{explizite Lösung} \\
 y(x) = \frac{-4}{2x^2 + x^4 + c_1} & \text{vereinfacht}
 \end{array}$$

Die Konstante c_1 kann nicht bestimmt werden, da keine Anfangsbedingung gegeben ist.

Lösung zu Aufgabe 1–11 : Diese Gleichung ist **NICHT** separierbar.

Lösung zu Aufgabe 1–12 : Allgemeine Lösung nach der Separation und Integration

$$\ln |y + 2| = x^3 + c$$

Bestimmen der Konstanten durch die Bedingung $y(4) = 4$

$$\ln |y + 2| = x^3 + \ln 6 - 64$$

Explizite Lösung

$$|y + 2| = \exp(x^3 + \ln 6 - 64) = 6 e^{(x^3)} e^{-64}$$

Somit erhalten wir zwei mögliche Formeln für die Lösung

$$\begin{array}{lcl}
 y(x) & = & 6 e^{(x^3)} e^{-64} - 2 \\
 y(x) & = & -6 e^{(x^3)} e^{-64} - 2
 \end{array}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung kommt aber nur die erste in Frage und somit

$$y(x) = 6 e^{(x^3)} e^{-64} - 2$$

Lösung zu Aufgabe 1–14 : Für die Oberfläche O und das Volumen V einer Kugel gilt

$$O = 4\pi r^2 \quad \text{und} \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Die Beschreibung besagt, dass

$$\frac{dV}{dt} = k O$$

Wegen

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2 \dot{r}$$

gilt also

$$4\pi r^2 \dot{r} = k 4\pi r^2$$

oder nach elementaren Vereinfachungen

$$\dot{r} = k$$

Diese sehr einfache Differentialgleichung hat die Lösungen

$$r(t) = k t + r(0)$$

Lösung zu Aufgabe 1–15 : Für die Kurvenschar gilt

$$y(x) = \frac{c}{x} \quad y'(x) = -\frac{c}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Soll die gesuchte Kurve überall senkrecht zu den obigen Kurven sein, so muss gelten

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{y(x)} \\ y(x) y'(x) &= x \\ \frac{1}{2} y^2(x) &= \frac{1}{2} x^2 - c \\ y^2 &= x^2 + C \end{aligned}$$

Wegen $y(3) = 1$ ergibt sich $C = -8$ und somit die Lösung $y(x) = +\sqrt{x^2 - 8}$.

Lösung zu Aufgabe 1–16 :

- (a) Die Länge des Stassenstückes zwischen x und $x + h$ ist gegeben durch h und somit wirkt eine vertikale Gewichtskraft der Stärke

$$\Delta F_G = h \rho g$$

Nun können wir die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen und vertikalen Komponenten aufstellen und erhalten

$$\begin{aligned} T_1(x + h) - T_1(x) &= 0 \\ T_2(x + h) - T_2(x) &= h \rho g \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass die Horizontalkomponente konstant sein muss, d.h. $T_1(x) = T_1$. Dividiert man die zweite Gleichung durch h und bildet anschliessend den Grenzwert $h \rightarrow 0$, so erhält man die Bedingung

$$\frac{d}{dx} T_2(x) = \rho g$$

Genauso wie bei der Kettenlinie erhält man auch hier

$$f'(x) = \frac{T_2(x)}{T_1} \quad \text{oder} \quad T_2(x) = T_1 f'(x)$$

Setzt man die beiden obigen Gleichungen zusammen, so erhält man die Differentialgleichung

$$T_1 f''(x) = \rho g$$

für die Funktion $f(x)$.

- (b) Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber durch elementare Integration direkt lösbar ist mit der Lösung

$$f(x) = \frac{\rho g}{2T_1} x^2 + ax + b$$

für geeignete Konstanten a und b . Das Tragseil nimmt somit die Form einer Parabel an.

Lösung zu Aufgabe 1–17 :

- (a) Die Länge des Stassenstückes zwischen x und $x + h$ ist gegeben durch h und somit wirkt eine vertikale Gewichtskraft der Stärke

$$\Delta F_G = h g (\rho_1 + \rho_2 f(x))$$

Nun können wir die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen und vertikalen Komponenten aufstellen und erhalten

$$\begin{aligned} T_1(x+h) - T_1(x) &= 0 \\ T_2(x+h) - T_2(x) &= h g (\rho_1 + \rho_2 f(x)) \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass die Horizontalkomponente konstant sein muss, d.h. $T_1(x) = T_1$. Dividiert man die zweite Gleichung durch h und bildet anschliessend den Grenzwert $h \rightarrow 0$ so erhält man die Bedingung

$$\frac{d}{dx} T_2(x) = g (\rho_1 + \rho_2 f(x))$$

Genauso wie bei der Kettenlinie erhält man auch hier

$$f'(x) = \frac{T_2(x)}{T_1} \quad \text{oder} \quad T_2(x) = T_1 f'(x)$$

Setzt man die beiden obigen Gleichungen zusammen so erhält man die Differentialgleichung

$$T_1 f''(x) = g (\rho_1 + \rho_2 f(x))$$

für die Funktion $f(x)$. Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$f''(x) = \frac{g \rho_2}{T_1} f(x) + \frac{g \rho_1}{T_1}$$

- (b) Mit der Definition

$$\alpha = \sqrt{\frac{g \rho_2}{T_1}}$$

sind die Lösungen des homogenen Problems gegeben durch

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$f_p(x) = c$$

und setzen in der Differentialgleichung ein. Es ergibt sich die einfache Gleichung

$$0 = \frac{g \rho_2}{T_1} c + \frac{g \rho_1}{T_1}$$

und somit $c = -\rho_1/\rho_2$. Die allgemeine Lösung ist also gegeben durch

$$f(x) = f_p(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = \frac{-\rho_1}{\rho_2} + c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

(c) Die Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ führen nun auf die Lösung

$$f(x) = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cosh(\alpha x) - 1)$$

Lösung zu Aufgabe 1–18 :

(a) Separable Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV} &= - \left(\frac{c_p}{c_V} \right) \frac{p}{V} \\ \int \frac{1}{p} dp &= \int - \left(\frac{c_p}{c_V} \right) \frac{1}{V} dV \\ \ln |p| &= - \left(\frac{c_p}{c_V} \right) \ln |V| + k \\ p &= V^{-\left(\frac{c_p}{c_V}\right)} e^k = \frac{k_1}{V^{\left(\frac{c_p}{c_V}\right)}} \end{aligned}$$

(b)

$$p \cdot V^{\left(\frac{c_p}{c_V}\right)} = k_1$$

und somit ist der Adiabatenexponent gegeben durch $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$.

Lösung zu Aufgabe 1–19 :

$$y(t) = c e^t + e^{2t}$$

Lösung zu Aufgabe 1–20 :

$$y(x) = \frac{c}{x} - 4$$

Lösung zu Aufgabe 1–21 :

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{\cos x}{x}$$

Lösung zu Aufgabe 1–22 :

$$y(x) = (x - 1) e^x$$

Lösung zu Aufgabe 1–23 :

(a) Sei m die Masse des Fasses und V sein Volumen und ρ die Dichte von Wasser. Dann folgt aus Newton's Gesetz

$$m \dot{v} = m g - \rho g V - k v$$

oder auch

$$\dot{v} = g - \frac{\rho g V}{m} - \frac{k}{m} v$$

(b) Eine Untersuchung des Vektorfeldes zeigt, dass sich für grosse Zeiten (Tiefen) eine Endgeschwindigkeit v_∞ einstellen wird, die durch die Bedingung

$$m g - \rho g V - k v_\infty = 0$$

charakterisiert ist. Somit gilt

$$m g = +\rho g V + k v_\infty$$

Lösung zu Aufgabe 1–24 : Sei $y(t)$ der Salzgehalt im Wasser, gemessen in kg. Somit ist $y(0) = 15$. Gesucht wird die Zeit t , für die gilt

$$\frac{y(t)}{100-t} = \frac{10}{100}.$$

Es gilt (wieso?)

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{100-t} 3$$

und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{3 dt}{100-t} \\ \ln |y(t)| &= 3 \ln |100-t| + c \\ y(t) &= C (100-t)^3 \end{aligned}$$

Die Betragszeichen können problemlos entfernt werden, da sowohl $y(t)$ als auch $100-t$ positiv sind. Mittels $y(0) = 15$ kann nun C bestimmt werden und damit kann die Frage beantwortet werden.

Lösung zu Aufgabe 1–25 : Sei $y(t)$ der Salzgehalt im Wasser, gemessen in kg. Somit ist $y(0) = 15$. Gesucht wird die Zeit t , für die gilt

$$\frac{y(t)}{100+t} = \frac{10}{100}.$$

Es gilt (wieso?)

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{100+t} 2$$

und somit

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{2 dt}{100+t} \\ \ln |y(t)| &= -2 \ln |100+t| + c \\ y(t) &= \frac{C}{(100+t)^2} \end{aligned}$$

Die Betragszeichen können problemlos entfernt werden, da sowohl $y(t)$ als auch $100+t$ positiv sind. Mittels $y(0) = 15$ kann nun C bestimmt werden und damit kann die Frage beantwortet werden.

Lösung zu Aufgabe 1–26 : Sei $y(t)$ die Menge Salz (in kg) im Tank. Die zu lösende Differentialgleichung ist

$$\frac{d y}{d t} = -3 \frac{y}{150+2 t} + 0.5 \cdot 5$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Gleichung erster Ordnung.

Die homogene Lösung kann durch Separation der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d t} &= \frac{-3}{150+2 t} y \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{-3}{150+2 t} dt \\ \ln |y(t)| &= \frac{-3}{2} \ln(150+2 t) + c_1 \\ y(t) &= c (150+2 t)^{-3/2} \end{aligned}$$

Man erhält somit

$$y_h(t) = \frac{c}{(150+2 t)^{3/2}}$$

Eine partikuläre Lösung kann durch Variation der Konstanten gefunden werden. Man erhält $y_p(t) = \frac{1}{2} (150+2 t)$. Diese partikuläre Lösung kann durch einsetzen überprüft werden.

$$\dot{y}_p(t) = 1 \quad \text{und} \quad -3 \frac{y_p(t)}{150+2 t} + 2.5 = -3 \frac{\frac{1}{2} (150+2 t)}{150+2 t} + 2.5 = 1$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{2} (150 + 2t) + \frac{c}{(150 + 2t)^{3/2}}$$

Die Anfangsbedingung ist $y(0) = 0$ und das führt auf

$$0 = \frac{150}{2} + \frac{c}{150^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{150^{5/2}}{2}$$

und damit die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2} (150 + 2t) - \frac{150^{5/2}}{2 (150 + 2t)^{3/2}}$$

Die Bedingung, damit die Konzentration 10% ergibt, ist

$$\frac{y(t)}{150 + 2t} = 0.1$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{150^{5/2}}{2 (150 + 2t)^{5/2}} &= 0.1 \\ \frac{150^{5/2}}{2 (150 + 2t)^{5/2}} &= 0.4 \\ t &= \frac{1}{2} \left(\frac{150}{0.8^{2/5}} - 150 \right) \approx 7.00216 \end{aligned}$$

Somit ist die Konzentration nach ca. 7 Minuten auf dem gewünschten Wert von 10%.

Lösung zu Aufgabe 1–27 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T(t) - 60) &= -\lambda (T(t) - 60) \\ T(t) - 60 &= c_0 e^{-\lambda t} \\ T(t) - 60 &= 140 e^{-\lambda t} \quad \text{verwende Anfangstemperatur} \\ 120 - 60 &= 140 e^{-\lambda \cdot 3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3} \ln \frac{140}{60} \approx 0.28243 \\ 80 - 60 = 20 &= 140 e^{-\lambda t_c} \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{140}{20} \approx 6.89 \quad \text{min} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–28 : Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = e^{-2t} (c_1 + c_2 t)$$

$$\begin{cases} c_1 + 0 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

mit den Lösungen $c_1 = 1$ und $c_2 = 3$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(t) = e^{-2t} (1 + 3t)$$

Lösung zu Aufgabe 1–29 : Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = (\lambda - 2)^2 + 4^2 = 0$$

Es gilt $\lambda_{1,2} = 2 \pm i 4$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{2t} (c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t))$$

Nach einigen Rechnungen führt dies auf die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{2t-\pi} \sin(4t)$$

Lösung zu Aufgabe 1–30 :

- Homogenes Problem:

Die charakteristische Gleichung der homogenen Differentialgleichung $2y''(x) + 4y'(x) + 10y(x) = 0$ ist

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 10 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2 + 4 = 0$$

mit den beiden Lösungen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i 2$. Somit ist die Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = e^{-x} (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$$

- partikuläre Lösung:

Der Ansatz ist $y_p = k e^{2x}$ und aus der Differentialgleichung wird

$$\begin{aligned} 2y_p''(x) + 4y_p'(x) + 10y_p(x) &= 7e^{2x} \\ 2 \cdot 4k e^{2x} + 4 \cdot 2k e^{2x} + 10k e^{2x} &= 7e^{2x} \\ 8k + 8k + 10k &= 7 \\ k &= \frac{7}{26} \end{aligned}$$

- Anfangswert:

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{7}{26} e^{2x} + e^{-x} (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$$

Bei $x = 0$ erhalten wir

$$0 = \frac{7}{26} + c_1$$

und somit $c_1 = -7/26$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = \frac{7}{26} e^{2x} + e^{-x} \left(\frac{-7}{26} \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1–31 :

- (a) Verwende $\lambda^4 - k^4 = (\lambda^2 - k^2)(\lambda^2 + k^2) = (\lambda - k)(\lambda + k)(\lambda^2 + k^2)$

$$y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} + c_3 \cos(kt) + c_4 \sin(kt)$$

Funktionen die mit ihrer vierten Ableitung übereinstimmen können auch durch intelligentes Raten bestimmt werden.

(b) Charakteristische Gleichung verwenden

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 4\lambda + 13 &= (\lambda + 2)^2 + 3^2 = 0 \\ y_h(t) &= e^{-2t} (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) \\ y_h(0) &= c_1 = 0 \\ y(t) &= c_2 e^{-2t} \sin(3t)\end{aligned}$$

(c) Homogene Lösung der vorangehenden Teilaufgabe verwenden

$$\begin{aligned}y_p(t) &= A + Bt \quad \text{einsetzen} \\ 0 + 4B + 13(A + Bt) &= 0 + 7t \\ B = \frac{7}{13} \quad \text{und} \quad A &= -\frac{4B}{13} = -\frac{28}{13^2} \\ y_p(t) &= \frac{-28}{169} + \frac{7}{13}t \\ y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = e^{-2t} (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) + \frac{-28}{169} + \frac{7}{13}t\end{aligned}$$

Die Aufgabe kann auch mit Laplacetransformationen gelöst werden, die Rechnungen sind aber aufwändiger.

Lösung zu Aufgabe 1–32 :

(a) Homogene, lineare Gleichung, Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) + 12y(t) &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 12 &= (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \\ y(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}\end{aligned}$$

(b) Inhomogene, lineare Gleichung. Zuerst ist das homogene Problem zu lösen

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 12y(t) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 12 &= (\lambda - 2)^2 + 8 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm i\sqrt{8} \\ y_h(t) &= e^{2t} (c_1 \cos(\sqrt{8}t) + c_2 \sin(\sqrt{8}t))\end{aligned}$$

Anschliessend ist eine partikuläre Lösung zu bestimmen

$$\begin{aligned}\ddot{y}_p(t) - 4\dot{y}_p(t) + 12y_p(t) &= e^{2t} \\ y_p(t) &= k e^{2t} \\ k(4 - 8 + 12) e^{2t} &= e^{2t} \\ y_p(t) &= \frac{1}{8} e^{2t}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{2t} (c_1 \cos(\sqrt{8}t) + c_2 \sin(\sqrt{8}t)) + \frac{1}{8} e^{2t}$$

(c) Dies ist eine separable Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2} dy &= 1 dt \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int 1 dt \\ -\frac{1}{y} &= t + c \\ y(t) &= \frac{-1}{t + c}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–33 :

- (a) Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ mit den beiden Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$. Somit ist die allgemeine homogene Lösung

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

Eine partikuläre Lösung kann erraten (oder Methode der unbestimmten Koeffizienten) werden als $y_p(t) = -1/6$ und somit haben wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{-1}{6} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

- (b) Damit der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert, muss $c_1 = 0$ sein. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt nun

$$1 = \frac{-1}{6} + c_2 e^0 \quad \implies \quad c_2 = \frac{7}{6}$$

und somit

$$y(t) = \frac{1}{6} (-1 + 7 e^{-3t})$$

Lösung zu Aufgabe 1–34 :

- (a)

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

- (b)

$$y(x) = \frac{1}{40} e^{2x} - \frac{1}{90} e^{-3x} - \frac{1}{12} x - \frac{1}{72}$$

Lösung zu Aufgabe 1–35 :

$$y(x) = c e^{-x} \sin(2x)$$

Lösung zu Aufgabe 1–37 :

- (a) Zwei Lösungswege sind möglich

- Charakteristische Gleichung und Methode der unbestimmten Koeffizienten.
Lösung des homogenen Problems

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 4\lambda + 13 &= 0 \\ (\lambda + 2)^2 + 9 &= 0 \\ (\lambda + 2 - 3i)(\lambda + 2 + 3i) &= 0 \\ y_h(x) &= c_1 e^{-2x} \cos(3x) + c_2 e^{-2x} \sin(3x)\end{aligned}$$

Partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(x) &= a + b x \\ 0 + 4b + 13(a + b x) &= 0 + 1x \quad \implies \quad b = \frac{1}{13}, \quad a = -\frac{4}{13} \quad b = -\frac{4}{169} \\ y_p(x) &= \frac{-4}{169} + \frac{1}{13} x \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} \cos(3x) + c_2 e^{-2x} \sin(3x) + \frac{-4}{169} + \frac{1}{13} x$$

mit der Ableitung

$$y'(x) = c_1 e^{-2x} (-2 \cos(3x) - 3 \sin(3x)) + c_2 e^{-2x} (-2 \sin(3x) + 3 \cos(3x)) + \frac{1}{13}$$

Anfangswerte verwenden

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 e^{-2 \cdot 0} \cos(3 \cdot 0) + c_2 e^{-2 \cdot 0} \sin(3 \cdot 0) + \frac{-4}{169} + \frac{1}{13} \cdot 0 = c_1 - \frac{4}{169} \\ 2 &= -2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{13} \\ \implies c_1 &= \frac{4}{169} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{3} (2 + 2c_1 - \frac{1}{13}) = \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 169 + 2 \cdot 4 - 13}{169} = \frac{111}{169} \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = \frac{4}{169} e^{-2x} \cos(3x) + \frac{111}{169} e^{-2x} \sin(3x) + \frac{-4}{169} + \frac{1}{13} x$$

• Mit Laplace Transformation

$$\begin{aligned} s^2 X(s) - 2 + 4s X(s) + 13 X(s) &= \frac{1}{s^2} \\ (s^2 + 4s + 13) X(s) &= \frac{1}{s^2} + 2 = \frac{1 + 2s^2}{s^2} \\ X(s) &= \frac{1 + 2s^2}{s^2 (s^2 + 4s + 13)} = \frac{1 + 2s^2}{s^2 ((s+2)^2 + 3^2)} \\ &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B(s+2) + C}{(s+2)^2 + 3^2} \\ 1 + 2s^2 &= (A_1 s + A_2) ((s+2)^2 + 3^2) + (B(s+2) + C) s^2 \\ s = 0 \implies 1 &= A_2 ((2)^2 + 3^2) + 0 \implies A_2 = \frac{1}{13} \\ \text{ableiten und } s = 0 \implies 4 &= A_1 ((2)^2 + 3^2) + A_2 4 + 0 \implies A_1 = \frac{-4}{169} \\ s = -2 + 3i \implies 1 + 2(-2 + 3i)^2 &= 0 + (B 3i + C) (-2 + 3i)^2 \\ -9 - 24i &= (B 3i + C) (-5 - 12i) \\ &= (36B - 5C) + i(-15B - 12C) \\ \begin{bmatrix} 36 & -5 \\ -15 & -12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} \implies B = \frac{4}{169}, \quad C = \frac{333}{169} \\ x(t) &= A_1 + A_2 x + B e^{-2t} \cos(3x) + C \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3x) \\ &= \frac{-4}{169} + \frac{1}{13} x + \frac{4}{169} e^{-2t} \cos(3x) + \frac{111}{169} e^{-2t} \sin(3x) \end{aligned}$$

(b) • Mit charakteristischer Gleichung

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - \lambda &= 0 \\
\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0 \\
y(x) &= c_1 1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \\
0 &= c_1 + c_2 + c_3 \\
1 &= c_1 + c_2 e + c_3 e^{-1} = c_1 + c_2 e + c_3 \frac{1}{e} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/e \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{e-1} \begin{bmatrix} e & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c_3}{e-1} \begin{bmatrix} e & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c_3}{e-1} \begin{pmatrix} e - 1/e \\ -1 + 1/e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c_3}{e-1} \begin{pmatrix} \frac{e^2-1}{e} \\ \frac{-e+1}{e} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c_3}{e} \begin{pmatrix} e+1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 - 1/e \\ 1/e \end{pmatrix} \\
y(x) &= \frac{-1+e^x}{e-1} + c_3 \left(-1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} e^x + e^{-x} \right)
\end{aligned}$$

• Mit Laplace Transformation

$$\begin{aligned}
0 &= y'''(x) - y'(x) \\
0 &= s^3 Y(s) - y''(0) - s y'(0) - s^2 y(0) - s Y(s) - y(0) \\
(s^3 - s) Y(s) &= y''(0) + s y'(0) \\
Y(s) &= \frac{y''(0)}{s(s^2 - 1)} + \frac{y'(0)}{s^2 - 1} \\
y(x) &= y''(0) (\cosh(x) - 1) + y'(0) \sinh(x) \\
1 = y(1) &= y''(0) (\cosh(1) - 1) + y'(0) \sinh(1) \\
y'(0) &= \frac{1 - y''(0) (\cosh(1) - 1)}{\sinh(1)} \\
y(x) &= y''(0) (\cosh(x) - 1) + \frac{1 - y''(0) (\cosh(1) - 1)}{\sinh(1)} \sinh(x)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–38 :

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 2$$

Lösung zu Aufgabe 1–39 :

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1-i3}{10} e^{ix}$$

Lösung zu Aufgabe 1–40 :

$$y(x) = \frac{10}{21} e^{6x} + \frac{45}{28} e^{-x} - \frac{1}{12} e^{3x}$$

Lösung zu Aufgabe 1–41 :

$$y(x) = e^{2x} + x e^x$$

Lösung zu Aufgabe 1–42 : Les solutions du problème homogène sont $e^{-x} \cos(2x)$ et $e^{-x} \sin(2x)$. Donc $\lambda_{1,2} = -1 \pm i 2$ sont les zéros de l'équation caractéristique

$$(\lambda + 1 + i 2) (\lambda + 1 - i 2) = \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

Donc on a $b = 2$ et $c = 5$ et l'équation homogène est

$$y''(x) + 2 y'(x) + 5 y(x) = 0$$

Maintenant on peut trouver $g(x)$ par $y_p(x) = x^2$ avec

$$g(x) = y_p''(x) + 2 y_p'(x) + 5 y_p(x) = 2 + 4x + 5x^2$$

Lösung zu Aufgabe 1–43 : Die Lösung hat die allgemeine Struktur

$$y(x) = (c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)) + (x^2 + e^x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Die homogene Lösung ist $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$ und hier ist sofort klar, dass die zweite Ableitung der Funktionen mit der ursprünglichen Funktionen übereinstimmen, bis auf den Faktor 9. Somit ist die homogene Gleichung gegeben durch

$$\ddot{y}_h(t) + 9 y_h(t) = 0$$

Setzt man die bekannte partikuläre Lösung $y_p(t) = x^2 + e^x$ in ein, so ergibt sich

$$\ddot{y}_p(t) + 9 y_p(t) = 2 + e^x + 9(x^2 + e^x)$$

und somit die Antwort

$$\ddot{y}(t) + 9 y(t) = 2 + e^x + 9(x^2 + e^x)$$

Lösung zu Aufgabe 1–45 :

(a) Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y''(x) = -\frac{F}{EI} y(x) \quad \implies \quad y(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$$

wobei $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$ und wegen $y(0) = 0$ muss $c_2 = 0$ sein und wir haben die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \sin(\alpha x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

(b) Die Bedingung $y(L) = 0$ führt zu $c_1 \sin(\alpha L) = 0$. Falls $0 < \alpha L < \pi$ so ist $\sin(\alpha L) \neq 0$ und es muss $c_1 = 0$ sein. Somit ist $y(x) = 0$ die einzige Lösung, falls $\sin(\alpha L) \neq 0$. Das führt auf die Bedingung

$$\alpha L = \sqrt{\frac{F}{EI}} L \neq k \pi \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Dies ist genau dann erfüllt wenn

$$F \neq EI \left(\frac{k \pi}{L}\right)^2 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Somit wird der Stab für Kräfte

$$F < EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

nicht verbogen.

- (c) Die obige Bedingung wird verletzt für $k = 1$, der kleinst mögliche Wert von k . Somit ist die kritische Kraft

$$F_0 = E I \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

- (d) Die gezeichnete Situation entspricht einer Lösung

$$y(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

und somit muss $k = 2$ sein, d.h wir haben

$$F = E I \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2$$

Lösung zu Aufgabe 1–46 :

- (a) Eine Lösung des homogenen Problems ist

$$y_h(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$$

Die partikuläre Lösung ist ein Polynom vom Grad 2.

$$\begin{aligned} y_p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \ddot{y}_p + 2y_p &= 2a_2 + 2a_0 + 2a_1 t + 2a_2 t^2 = 0 + 0t + 1t^2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen kann von unten nach oben aufgelöst werden. Man erhält

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -a_2 = -\frac{1}{2}$$

und somit

$$y_p(t) = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) + \frac{t^2 - 1}{2}$$

- (b) Für die Lösung des homogenen Problems muss die charakteristische Gleichung

$$7\lambda + 6 = 0$$

gelöst werden. Es ergibt sich die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} = c_1 e^{-\frac{6}{7}t}$$

Eine partikuläre Lösung hat die Form $y_p(t) = a \cos t + b \sin t$. Das kann in die Gleichung eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned} 7(-a \sin t + b \cos t) + 6(a \cos t + b \sin t) &= \sin t \\ \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{85} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 e^{\frac{6}{7}t} + \frac{1}{85} (-7 \cos t + 6 \sin t)$$

Die Anfangsbedingung führt auf die Gleichung

$$y(0) = 0 = c_1 - \frac{1}{85} 7$$

und somit ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{85} (7 e^{-\frac{6}{7}t} - 7 \cos t + 6 \sin t)$$

Lösung zu Aufgabe 1–47 : Die Differentialgleichung ist

$$2\ddot{y} + \alpha \dot{y} + k y = 0$$

und somit ist die charakteristische Gleichung

$$2\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 8k} \right) = -\frac{\alpha}{4} \pm i \sqrt{\frac{8k - \alpha^2}{16}}$$

Die oszillierenden Lösungen sind somit

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\alpha}{4}t} \cos \left(\sqrt{\frac{8k - \alpha^2}{16}} t + \delta \right)$$

(a) Nach 60 Sekunden ist die Amplitude halbiert, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y(0) &= y(0) e^{-\frac{\alpha}{4} 60} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\frac{\alpha}{4} 60} \\ 2 &= e^{15\alpha} \\ \alpha &= \frac{\ln 2}{15} \approx 0.0462 \end{aligned}$$

Da die Frequenz 10 Hz ist gilt für die Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu = 20\pi = \sqrt{\frac{8k - \alpha^2}{16}} \\ 400\pi^2 &= \frac{8k - \alpha^2}{16} \\ 8k - \alpha^2 &= 16 \cdot 400\pi^2 \\ k &= \frac{1}{8} (16 \cdot 400\pi^2 + \alpha^2) \approx 7896 \end{aligned}$$

(b) Das System schwingt falls eine schwache Dämpfung vorliegt, d.h.

$$\alpha^2 - 8k < 0$$

Somit schwingt das System nicht mehr falls

$$\alpha \geq \sqrt{8k} \approx 251.3$$

Lösung zu Aufgabe 1–48 : Quelle: [Zill89, §7.4]

- (a) Zuerst soll der homogene Anteil $y_h(t)$ bestimmt werden, anschliessend eine partikuläre Lösung $y_p(t)$. Dann kann die noch fehlende Konstante mittels der Anfangsbedingung bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \dot{y}_h(t) - y_h(t) &= 0 \implies y_h(t) = c_1 e^t \\ \dot{y}_p(t) &= k \implies k = -1 \\ y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t - 1 \\ y(0) &= 1 \implies c_1 = 2 \\ y(t) &= 2e^t - 1 \end{aligned}$$

- (b) Hier ist zu beachten, dass der erste Ansatz $y_p(t) = k e^{-4t}$ noch mit t zu multiplizieren ist, da $y_p(t)$ sonst Lösung der homogenen Gleichung ist.

$$\begin{aligned} \dot{y}_h(t) + 4 y_h(t) &= 0 \implies y_h(t) = c_1 e^{-4t} \\ y_p(t) &= k t e^{-4t} \implies k(1 - 4t + 4t) e^{-4t} = e^{-4t} \implies k = 1 \\ y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-4t} + t e^{-4t} \\ y(0) &= 2 \implies c_1 = 2 \\ y(t) &= 2e^{-4t} + t e^{-4t} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_h(t) + 5 \dot{y}_h(t) + 4 y_h(t) &= 0 \implies \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4 \\ y_h(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \\ y(0) &= 1 \implies c_1 + c_2 = 1 \\ \dot{y}(0) &= 0 \implies -c_1 - 4c_2 = 0 \\ y(t) &= \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_h(t) + y_h(t) &= 0 \implies y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_p(t) &= k_1 \cos(2t) + k_2 \sin(2t) \\ \ddot{y}_p(t) + y_p(t) &= -4k_1 \cos(2t) - 4k_2 \sin(2t) + k_1 \cos(2t) + k_2 \sin(2t) = \cos(2t) \\ \implies -4k_1 + k_1 &= 1 \quad \text{und} \quad -4k_2 - k_2 = 0 \\ \implies k_1 &= \frac{-1}{3} \quad \text{und} \quad k_2 = 0 \\ y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3} \cos(2t) \\ y(0) &= 1 \implies c_1 - \frac{1}{3} = 1 \implies c_1 = \frac{4}{3} \\ \dot{y}(0) &= -1 \implies c_2 = -1 \\ y(t) &= \frac{4}{3} \cos t - \sin t - \frac{1}{3} \cos(2t) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} y_h^{(4)}(x) - y_h(x) &= 0 \implies \lambda^4 - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm i \\ y_h(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \\ y(0) &= +1 \implies c_1 + c_2 + c_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(0) &= +0 \implies c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\
y''(0) &= -1 \implies c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\
y'''(0) &= +0 \implies c_1 - c_2 - c_4 = 0 \\
&\implies c_1 = c_2 = c_4 = 0 \quad \text{und} \quad c_3 = 1 \\
y(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–49 :

- (a) Die charakteristische Gleichung ist $2\lambda^2 - 18 = 0$ mit den beiden reellen Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm 3$ und somit ist

$$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$$

Eine partikuläre Lösung kann leicht erraten werden: $y_p(t) = -3$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - 3$$

- (b) Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ mit den beiden reellen Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 5$. Somit ist

$$y(t) = y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$$

Die beiden Anfangsbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 0 \\
2c_1 + 5c_2 &= -6
\end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $c_1 = 2$ und $c_2 = -2$. Somit ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = 2e^{2t} - 2e^{5t}$$

- (c) Die charakteristische Gleichung stimmt mit der vorangehenden Teilaufgabe überein. Somit ist die Lösung des homogenen Problems bereits berechnet. Der Ansatz für eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = ax + b$. Die Koeffizienten a und b werden bestimmt durch einsetzen in die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y'' - 7y' + 10y &= x \\
0 - 7a + 10(ax + b) &= 1x + 0 \\
\text{Somit gilt} \quad a &= \frac{1}{10} \quad \text{und} \quad b = \frac{7}{10}a = \frac{7}{100} \\
y_p(x) &= \frac{1}{10}x + \frac{7}{100}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + \frac{1}{10}x + \frac{7}{100}$$

Da nur eine Anfangsbedingung vorliegt können nicht beide Konstanten bestimmt werden, aber eine der beiden kann eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 = c_1 + c_2 + \frac{7}{100} \\
c_2 &= -c_1 - \frac{7}{100}
\end{aligned}$$

und somit

$$y(x) = c_1 e^{2t} - \left(c_1 + \frac{7}{100}\right) e^{5t} + \frac{1}{10}x + \frac{7}{100}$$

Lösung zu Aufgabe 1–50 :

(a) Die Gleichung ist separabel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} y(t) &= e^{-3t} y(t) \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int e^{-3t} dt \\ \ln |y| &= \frac{-1}{3} e^{-3t} + c \\ |y(t)| &= \exp\left(\frac{-1}{3} e^{-3t} + c\right) = \exp(-e^{-3t}/3) e^c \\ y(t) &= k \exp(-e^{-3t}/3) = k e^{(-e^{-3t}/3)}\end{aligned}$$

Hierbei sind c und k reelle Konstanten.

(b) Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Verwenden Sie die Methoden der charakteristischen Gleichung und unbestimmten Koeffizienten.

- Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$ mit den beiden reellen Lösungen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 4$. Somit ist die Lösung des homogenen Problems

$$y(t) = y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

- Der Ansatz für eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = ax + b$. Die Koeffizienten a und b werden bestimmt durch einsetzen in die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}y'' - 7y' + 14y &= x \\ 0 - 7a + 12(ax + b) &= 1x + 0 \\ \text{Somit gilt} \quad a &= \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad b = \frac{7}{12}a = \frac{7}{144} \\ y_p(x) &= \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}\end{aligned}$$

- Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

Durch verwenden der beiden Anfangsbedingungen können nun die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt werden. Man erhält

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 = c_1 + c_2 + \frac{7}{144} \\ y'(0) &= 0 = 3c_1 + 4c_2 + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{144} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

mit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{144} \\ \frac{9}{144} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

und somit auf die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{144} (-16e^{3t} + 9e^{4t} + 12x + 7) = \frac{-1}{9}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

Lösung zu Aufgabe 1–51 :

- (a) Die homogene Gleichung ist $y'(x) = -2y(x)$ mit allgemeiner Lösung $y_h(x) = c e^{-2x}$. Der Ansatz für eine partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 e^{2x} \\ y_p'(x) + 2y_p(x) &= c_1 + 2c_2 e^{2x} + 2(c_0 + c_1 x + c_2 e^{2x}) \\ &= c_1 + 2c_0 + 2c_1 x + (2c_2 + 2c_2) e^{2x} = 0 + 1x + 1e^{2x} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig falls

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_0 &= 0 \\ 2c_1 &= 1 \\ 4c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Mit der offensichtlichen Lösung $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_0 = \frac{-1}{4}$. Somit ist

$$y_p(x) = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y_h(x) + y_p(x) = c e^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

- (b) Die gegebene Lösung hat die Struktur $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Die homogene Lösung $y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$ zeigt, dass es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt. Komplexe Lösungen $\lambda = \alpha + i\beta$ der charakteristischen Gleichung führen zu homogenen Lösungen $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ und $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. Somit lesen wir ab, dass $\lambda = 0 \pm 3i$ Lösungen der charakteristischen Gleichung sind, z.B. $\lambda^2 + 9 = 0$. Somit ist $y''(x) + 9y(x) = 0$ eine mögliche homogene Gleichung. Der Anteil $y_p(x) = 3x^2$ ist eine partikuläre Lösung der Gleichung, d.h. es gilt

$$y_p''(x) + 9y_p(x) = 6 + 27x^2 = f(x)$$

Somit ist die lineare, inhomogene Differentialgleichung gegeben durch

$$y''(x) + 9y(x) = 6 + 27x^2$$

Lösung zu Aufgabe 1–52 :

- (a) Eine Lösung des homogenen Problems ist $y_h(t) = e^{2t}$. Die partikuläre Lösung besteht aus zwei Anteilen.

$$\begin{aligned} y_{p1}(t) &= a_1 \sin(2t) + a_2 \cos(2t) \\ \dot{y}_{p1} - 2y_{p1} &= 2a_1 \cos(2t) - 2a_2 \sin(2t) - 2a_1 \sin(2t) - 2a_2 \cos(2t) \\ 1 \sin(2t) + 0 \cos(2t) &= (-2a_2 - 2a_1) \sin(2t) + (2a_1 - 2a_2) \cos(2t) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2a_2 - 2a_1 \\ 2a_1 - 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen kann aufgelöst werden. Man erhält $a_1 = a_2 = \frac{-1}{4}$ und somit

$$y_{p1}(t) = \frac{-1}{4} (\sin(2t) + \cos(2t))$$

Der zweite Anteil kann bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} y_{p2}(t) &= b_0 + b_1 t \\ \dot{y}_{p1} - 2 y_{p1} &= b_1 - 2 b_0 - 2 b_1 t \\ 0 + t &= (-2 b_0 + b_1) - 2 b_1 t \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 b_0 + b_1 \\ -2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auch dieses System von Gleichungen kann leicht aufgelöst werden. Man erhält $b_1 = \frac{-1}{2}$ und $b_0 = \frac{b_1}{2} = \frac{-1}{4}$ und somit

$$y_{p2}(t) = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(t) = c y_h(t) + y_{p1}(t) + y_{p2}(t) = c e^{2t} - \frac{1}{4} (\sin(2t) + \cos(2t)) - \frac{1}{4} - \frac{t}{2}$$

(b) Für die Lösung des homogenen Problems muss die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 2^2 = 0$$

gelöst werden. Die beiden konjugiert komplexen Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i2$$

und somit ist die Lösung des homogenen Problems

$$y_h(t) = e^t (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$$

Für eine partikuläre Lösung kann der Ansatz $y_p(t) = k e^{-t}$ verwendet werden. Das führt auf

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 2\dot{y} + 5y &= e^{-t} \\ k e^{-t} + k 2 e^{-t} + k 5 e^{-t} &= e^{-t} \\ k &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^t (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) + \frac{1}{8} e^{-t}$$

Die Anfangsbedingungen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= c_1 + \frac{1}{8} \\ 0 = \dot{y}(0) &= c_1 + 2c_2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen wird gelöst durch $c_1 = \frac{-1}{8}$ und $c_2 = \frac{1}{8}$. Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = e^t \left(-\frac{1}{8} \cos(2t) + \frac{1}{8} \sin(2t) \right) + \frac{1}{8} e^{-t}$$

Lösung zu Aufgabe 1–53 :

(a) Separable Gleichung

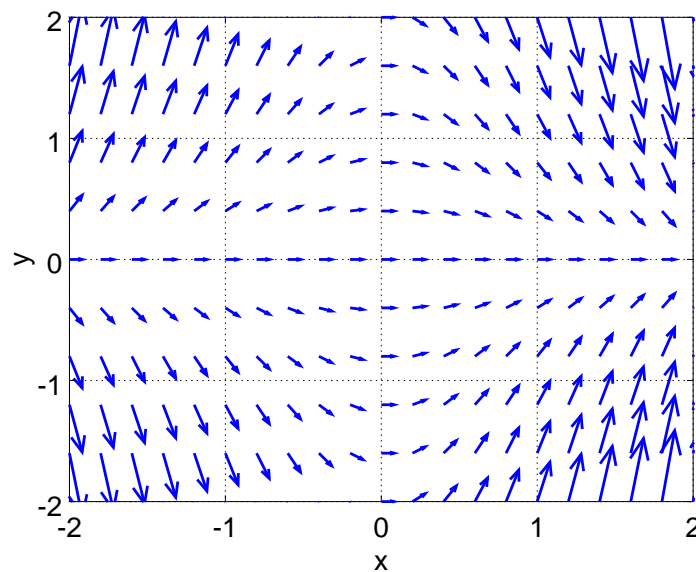
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -2xy \\ \frac{dy}{y} &= -2x \, dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -2x \, dx \\ \ln |y| &= -x^2 + c \\ |y| &= e^{-x^2+c} \\ y(x) &= k e^{-x^2}\end{aligned}$$

Die Lösung ist somit eine Gauss'sche Glockenkurve.

(b) Mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(0) = -2$ erhält man sofort

$$y(x) = -2 e^{-x^2}$$

(c) Mit *Mathematica* kann ein passendes Vektorfeld erzeugt werden.



Lösung zu Aufgabe 1–54 :

(a) Mit $\omega^2 = \frac{\rho g A}{m}$ gilt

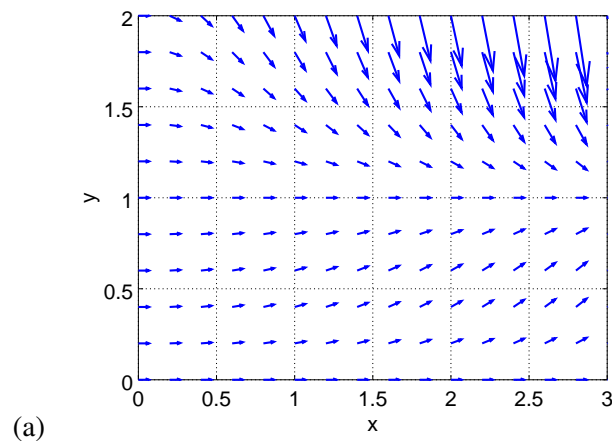
$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= g - \frac{\rho g A}{m} x(t) \\ \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) &= g \\ x_p(t) &= \frac{m}{\rho A} = \frac{g}{\omega^2} \\ x_h(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\ x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \\ &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho g A}{m}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho g A}{m}} t\right) + \frac{m}{\rho A}\end{aligned}$$

(b) Da die Boje in Ruhe um h einsinkt ist $x_p(t) = h = \frac{g}{\omega^2}$ und somit $\omega^2 = \frac{g}{h}$.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{g}{h}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{h}}$$

Dies zeigt, dass eine Boje die nur wenig einsinkt schnell oszillieren wird. Eine tief einsinkende Boje wird langsam schwingen.

Lösung zu Aufgabe 1–55 :



(b) Separation der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(1-y)} &= x \, dx \\ \ln \frac{y}{y-1} &= \frac{x^2}{2} + c \\ \frac{y}{y-1} &= k e^{\frac{x^2}{2}} \\ \frac{2}{2-1} &= k \quad \text{Anfangsbedingung verwendet} \\ \frac{y}{y-1} &= 2 e^{x^2/2} \\ y &= (y-1) 2 e^{x^2/2} \\ y &= \frac{-2 e^{x^2/2}}{1 - 2 e^{x^2/2}} = \frac{2}{2 - e^{-x^2/2}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–56 : Wählen Sie ein Koordinatensystem mit dem Ziel im Ursprung und der x -Achse nach Osten zeigend und die y -Achse nach Norden zeigend. Dies führt nach einigen Überlegungen zur Gleichung

$$y'(x) = \frac{v y(x) - w \sqrt{x^2 + y(x)^2}}{x v}$$

Tipp: Führen Sie die neue Variable $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ ein und setzen Sie $k = \frac{w}{v} < 1$. Somit gilt

$$\frac{du}{dx} = \frac{xy'(x) - y(x)}{x^2}$$

oder auch

$$y(x) = x u(x) \quad \text{und} \quad y'(x) = u(x) + x u'(x)$$

Diese Beziehung setzen wir in der Differentialgleichung ein und erhalten

$$u(x) + x u'(x) = \frac{v x u(x) - w \sqrt{x^2 + x^2 u(x)^2}}{xv}$$

oder auch die neue, äquivalente Differentialgleichung für die unabhängige Variable u

$$u'(x) = \frac{-k}{x} \sqrt{1 + u^2}$$

wobei $k = \frac{w}{v}$. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass $x > 0$. Dies ist eine separable Gleichung und wir erhalten die Integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du = \int \frac{-k}{x} dx$$

mit den Lösungen

$$\operatorname{arcsinh} u = -k \ln x + c$$

oder

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -k \ln x + c$$

1. Wir verwenden die erste Form der Lösung. Um die Konstante c zu bestimmen setzen wir die Bedingung $y(a) = 0$, oder auch $u(a) = 0$ ein und erhalten

$$\operatorname{arcsinh} 0 = -k \ln a + c$$

und somit

$$c = k \ln a$$

Das führt auf die Lösung

$$u(x) = \sinh(-k \ln x + k \ln a) = \sinh\left(k \ln \frac{a}{x}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} y(x) &= x u(x) = x \sinh\left(k \ln \frac{a}{x}\right) \\ &= x \frac{1}{2} \left(\exp\left(k \ln \frac{a}{x}\right) - \exp\left(-k \ln \frac{a}{x}\right) \right) \\ &= \frac{x}{2} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^k - \left(\frac{x}{a}\right)^k \right) \end{aligned}$$

2. Wir können natürlich auch die zweite Form der Lösung verwenden, was auf die Gleichung

$$u + \sqrt{1 + u^2} = C_0 x^{-k}$$

führt. Die Bedingung $u(a) = 0$ führt nun auf

$$C_0 = a^k$$

Nun muss die Gleichung

$$u - \left(\frac{a}{x}\right)^k = -\sqrt{1 + u^2}$$

nach u aufgelöst werden. Durch quadrieren erhält man

$$u^2 - 2u \left(\frac{a}{x}\right)^k + \left(\frac{a}{x}\right)^{k2} = 1 + u^2$$

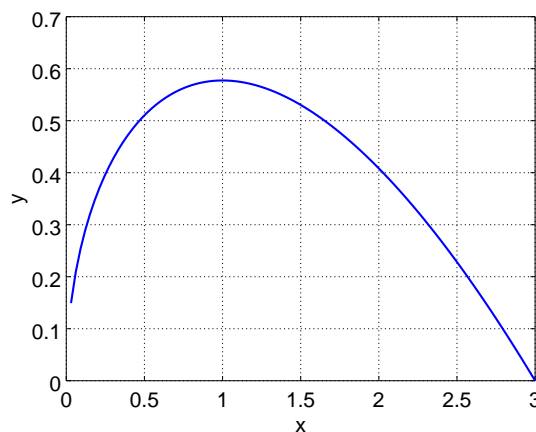
und somit

$$u = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a}{x} \right)^k - \left(\frac{a}{x} \right)^{-k} \right)$$

Durch die Beziehung $y(x) = x u(x)$ wird daraus

$$y(x) = \frac{x}{2} \left(\left(\frac{a}{x} \right)^k - \left(\frac{x}{a} \right)^k \right)$$

Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Lösung für $a = 3$ und $k = 1/2$.



Lösung zu Aufgabe 1–57 : Verwenden Sie die folgenden Größen: $V(t)$: Volumen der Flüssigkeit, $h(t)$: Höhe der Flüssigkeit, $v(t)$: Ausflussgeschwindigkeit, R : Radius des Fasses, r : Radius des Lochs. Dann gilt

$$V(t) = \pi R^2 h(t) \quad \implies \quad \frac{d}{dt} V(t) = \pi R^2 \frac{d}{dt} h(t)$$

Ein Energieerhaltungsargument liefert $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$ und somit $v = \sqrt{2 g h}$. Volumenerhaltung führt nun zu einer Differentialgleichung für die abhängige Grösse $h(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= -\pi r^2 v = -\pi r^2 \sqrt{2 g h} \\ \pi R^2 \frac{d}{dt} h(t) &= -\pi r^2 \sqrt{2 g h} \\ \frac{d}{dt} h(t) &= -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2 g h} \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Separation der Variablen und der Anfangsbedingung $h(0) = h_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{h}} dh &= \int -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2 g} dt \\ 2 \sqrt{h} &= -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2 g} t + C \\ 2 \sqrt{h_0} &= -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2 g} 0 + C \quad \text{Anfangsbedingung} \\ C &= 2 \sqrt{h_0} \\ h(t) &= \left(-\frac{r^2}{2 R^2} \sqrt{2 g} t + \sqrt{h_0} \right)^2 \end{aligned}$$

Das Fass ist leer zum Zeitpunkt $t = T$ falls $h(T) = 0$, d.h.

$$T = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Lösung zu Aufgabe 1–62 :

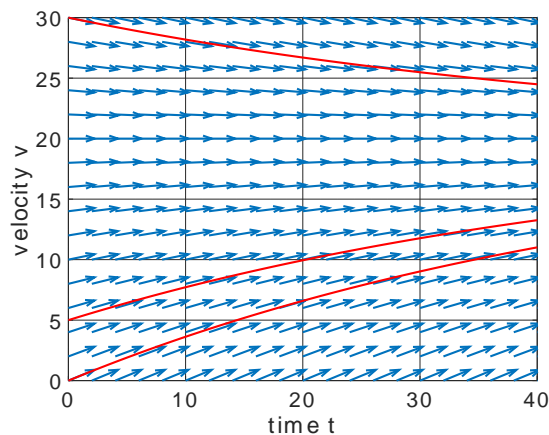
(a) $a(t) = \dot{v}(t)$ und nach dem Gesetz von Newton gilt

$$m \dot{v}(t) = m a(t) = F - k v(t)$$

und somit erhalten wir die lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m} v(t) + \frac{F}{m} = -\frac{10}{500} v(t) + \frac{200}{500} = -0.02 v(t) + 0.4$$

(b) Die Isoklinen sind hier horizontale Geraden.



- (c)
- physikalische Lösung: Nach langer Zeit sind Wasserwiderstand R und Motorkraft F gleich gross, d.h. $k v_\infty = F$.
 - graphische Lösung: im obigen Vektorfeld ist ersichtlich, dass die Geschwindigkeit gegen $v_\infty = 20 \frac{m}{s}$ konvergiert.
 - rechnerische Lösung: die lineare inhomogene Differentialgleichung kann leicht gelöst werden. Das Resultat ist

$$v(t) = c e^{-0.02t} + \frac{0.4}{0.02} = c e^{-0.02t} + 20$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt $v(t) \rightarrow 20 = v_\infty$.

$$v_\infty = 20 \frac{m}{sec}$$

(d) Die Lösung ist gegeben durch

$$v(t) = 20 \left(1 - e^{-t/50} \right)$$

und somit ist die Gleichung

$$18 = 20 \left(1 - e^{-t/50} \right)$$

nach t aufzulösen mit der Lösung

$$T = -50 \ln(1 - 0.9) \approx 115.13 \text{ sec}$$

Die zurückgelegte Distanz lässt sich durch das Integral

$$\int_0^T v(t) dt = \int_0^T 20 \left(1 - e^{-t/50}\right) dt = 20 \left(t + 50 e^{-t/50}\right) \Big|_{t=0}^T \approx 1402.6 \text{ m}$$

bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 1–63 :

(a)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2L} \left(-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right) = \alpha \pm j \omega$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$i(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

(b) Betrachten wir die Funktion

$$\omega(R) = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

so gilt $R = 0$ gilt

$$\omega(0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

und

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{2 \left(\frac{-R}{4L^2}\right)}{2 \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{-1}{\omega} \left(\frac{R}{4L^2}\right) = \frac{-R}{4\omega L^2}$$

Die Ableitung von ω bezüglich R verschwindet bei $R = 0$ und ist für kleine Werte von $R > 0$ leicht negativ. Somit ändert ω nur sehr wenig, wird aber etwas kleiner.

(c) Hierzu sind auch die partiellen Ableitungen von ω bezüglich L und C zu bestimmen

$$\frac{\partial \omega}{\partial C} = \frac{-1}{2\omega C^2 L} \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial L} = \frac{C R^2 - 2L}{4\omega C L^3}$$

Nun können die gegebenen Zahlen in die Formel

$$\begin{aligned} \Delta \omega &\leq \left(\left| \frac{\partial \omega}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial \omega}{\partial L} \Delta L \right| + \left| \frac{\partial \omega}{\partial C} \Delta C \right| \right) \\ &= \left| \frac{-R^2}{4\omega L^2} \frac{\Delta R}{R} \right| + \left| \frac{C R^2 - 2L}{4\omega C L^2} \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{-1}{2\omega C L} \frac{\Delta C}{C} \right| \\ &= \left(\frac{R^2}{4\omega L^2} + \frac{2L - C R^2}{4\omega C L^2} + \frac{1}{2\omega C L} \right) 0.1 \end{aligned}$$

eingesetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 1–64 :

(a) Einsetzen in die Gleichung

$$\begin{aligned} n(n-1)t^n - 2nt^n - 4t^n &= 0 \\ n(n-1) - 2n - 4 &= 0 \\ n^2 - 3n - 4 &= 0 \\ n_{1,2} &= \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{9+16}) = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

somit sind die beiden unabhängigen Lösungen $y_1(t) = t^4$ und $y_2(t) = t^{-1}$. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 t^4 + c_2 t^{-1}$$

Die beiden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 1$ führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 4c_1 - c_2 &= 5 \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = 1 = -c_2$ und somit

$$y(t) = t^4 - t^{-1}$$

(b) Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch $y_p(t) = 7/4$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \frac{7}{4} + c_1 t^4 + c_2 t^{-1}$$

Lösung zu Aufgabe 1–65 :

(a) Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s(t) &= \alpha s(t) - q \\ s(t) &= \frac{q}{\alpha} + \left(s_0 - \frac{q}{\alpha}\right) e^{\alpha t} \\ s(t) &= \frac{q}{\alpha} + c e^{\alpha t} \\ s_0 &= \frac{q}{\alpha} + c \\ s(t) &= \frac{q}{\alpha} + \left(s_0 - \frac{q}{\alpha}\right) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

(b) Wird nur verzinst und kein Kapital ($q = 0$) abgehoben, so vereinfacht sich die Lösung. Zur Zeit $t = 1$ kann aufgelöst werden

$$1.05 s_0 = s(1) = s_0 e^{\alpha} \implies \alpha = \ln(1.05) \approx 0.04879$$

(c) Verwende das obige α und $q = 70'000$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q}{\alpha} + \left(s_0 - \frac{q}{\alpha}\right) e^{\alpha T} \\ e^{\alpha T} &= \frac{q}{q - s_0 \alpha} \\ T &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{q}{q - s_0 \alpha} \right) \approx 24.47 \end{aligned}$$

Somit ist das Kapital nach 24.5 Jahren aufgebraucht.

1.9 Zusammenfassung

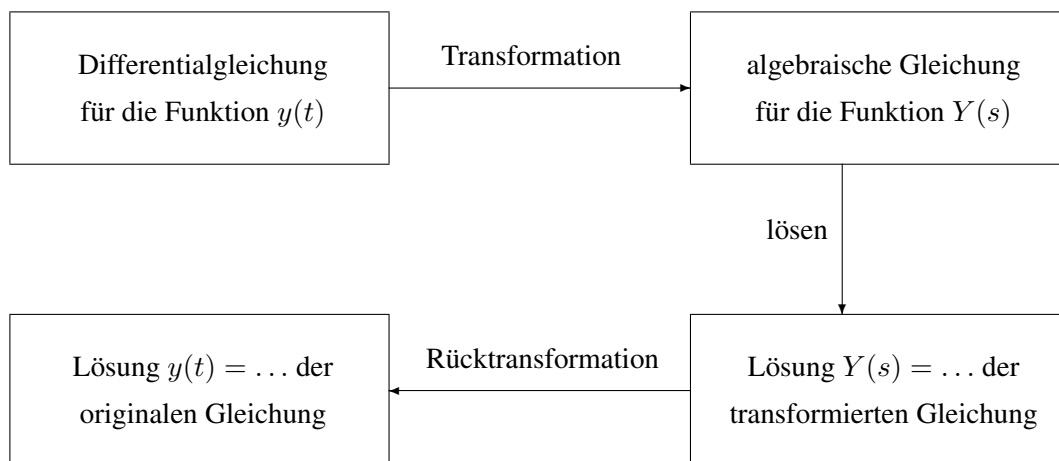
Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- verschiedene Typen von Differentialgleichungen klassifizieren können.
- einfache Differentialgleichungen aufstellen können.
- einfache Vektorfelder zeichnen können.
- separierbare Gleichungen lösen können.
- homogene und inhomogene, lineare Gleichungen erster Ordnung lösen können.
- homogene und inhomogene, lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen können.

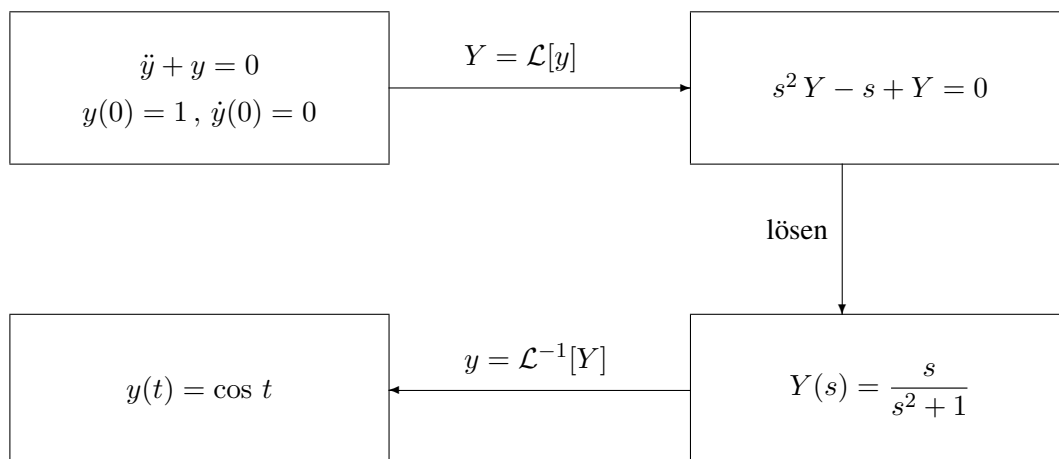
Kapitel 2

Die Laplace Transformation

Es gibt verschiedene Arten von Transformationen (z.B. Laplace- und Fourier-Transformation). Grundsätzlich wird versucht, eine schwer zu lösende Gleichung (z.B. Differentialgleichung) zu **transformieren** in eine einfacher zu lösende Gleichung (z.B. eine algebraische Gleichung), meistens für eine andere Funktion. Anschliessend ist aus dieser transformierten Lösung die Lösung der ursprünglichen Gleichung zu konstruieren, durch eine sogenannte Rücktransformation. Dieses generelle Vorgehen ist durch die untenstehende Graphik illustriert.



Als konkretes Beispiel wird eine einfache Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation gelöst.



In Verlaufe dieses Kapitels werden Sie sehen, dass das obige Problem leicht lösbar ist. Wir werden uns auf Resultate über die Laplacetransformation konzentrieren, Anwendungen werden im nächsten Kapitel untersucht.

2.1 Definitionen

2-1 Definition : Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** falls es Konstanten M und $c > 0$ gibt mit

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad \text{für } t \geq 0$$

2-2 Definition : Die **Laplace transformierte** $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ von exponentieller Ordnung ist gegeben durch

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Die Laplacetransformation entspricht einem uneigentlichen Parameterintegral. Der Parameter s wird zur Variablen der Laplacetransformierten. Mit dem Majorantenkriterium sieht man, dass die Laplacetransformation für $s > c$ existiert, falls die Funktion $f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist. In diesem Kapitel untersuchen wir nur solche Funktionen.

Es ist zu beachten, dass die Laplacetransformation \mathcal{L} aus einer Funktion $f(t)$ (unabhängige Variable t) eine **neue Funktion** $F(s)$ erzeugt, mit einer neuen unabhängigen Variablen s . Aus einer Funktion wird eine Funktion konstruiert.

2.2 Elementare Laplacetransformationen

Mit Hilfe des obigen Integrales können die folgenden Resultate verifiziert werden.

$$\begin{aligned} 1 &\circ\bullet \frac{1}{s} \quad \text{für } s > 0 \\ t &\circ\bullet \frac{1}{s^2} \quad \text{für } s > 0 \\ t^2 &\circ\bullet \frac{2}{s^3} \quad \text{für } s > 0 \\ t^n &\circ\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } s > 0 \\ e^{at} &\circ\bullet \frac{1}{s-a} \quad \text{für } s > a \\ \sin(at) &\circ\bullet \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{für } s > 0 \\ \cos(at) &\circ\bullet \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{für } s > 0 \end{aligned}$$

Diese kurze Tabelle zeigt, weshalb die **Partialbruchzerlegungen** für das bestimmen der Funktion $f(t)$ aus der Laplacetransformierten $F(s)$ wesentlich ist.

2-3 Beispiel : Als typisches Beispiel wird die Laplacetransformierte der Funktion $f(t) = t$ sorgfältig bestimmt. In sehr vielen Berechnungen von Laplacetransformationen kann das Verfahren der partiellen Integration verwendet werden und immer sind Grenzwerte zu berechnen (uneigentliches Integral).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t](s) &= \int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t e^{-st} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^M + \int_0^M \frac{1}{s} e^{-st} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_{t=0}^M \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

falls $s > 0$. Ist $s \leq 0$, so existiert die Laplacetransformation nicht. \diamond

2–4 Beispiel : Zu berechnen ist die Laplacetransformation der Funktion $f(t) = e^{7t}$ mit Hilfe der Definition als uneigentliches Integral.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{7t}](s) &= \int_0^\infty e^{7t} e^{-st} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{(7-s)t} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7-s} e^{(7-s)t} \Big|_{t=0}^M \right) \\
&= \frac{1}{7-s} \lim_{M \rightarrow \infty} (e^{(7-s)M} - 1) \\
&= \frac{1}{s-7}
\end{aligned}$$

falls $s > 7$. Ist $s \leq 7$, so existiert die Laplacetransformation nicht. \diamond

2–5 Beispiel : Zu berechnen ist die Laplacetransformation der Funktion $f(t) = t e^{7t}$ mit Hilfe der Definition als uneigentliches Integral.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t e^{7t}](s) &= \int_0^\infty t e^{7t} e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t e^{(7-s)t} dt \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{7-s} e^{(7-s)t} \Big|_{t=0}^M - \frac{1}{7-s} \int_0^M e^{(7-s)t} dt \right) \\
&= 0 - \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7-s} \int_0^M e^{(7-s)t} dt \right) \\
&= 0 + \frac{1}{s-7} \mathcal{L}[e^{7t}](s) = \frac{1}{(s-7)^2}
\end{aligned}$$

falls $s > 7$. Ist $s \leq 7$, so existiert die Laplacetransformation nicht. \diamond

2–6 Beispiel : Das bestimmen der Laplacetransformationen der trigonometrischen Funktionen ist erstaunlich trickreich und basiert auf zweifacher partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)] &= \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} dt \\
&= \frac{-\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^\infty + \frac{a}{s} \int_0^\infty \cos(at) e^{-st} dt \\
&= 0 + \frac{a}{s} \int_0^\infty \cos(at) e^{-st} dt \\
&= \frac{-a \cos(at)}{s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^\infty - \frac{a^2}{s^2} \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} dt \\
&= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \mathcal{L}[\sin(at)]
\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist korrekt für $s > 0$. Somit erhalten wir eine Gleichung für die Laplacetransformation der Funktion $\sin(at)$. Diese Gleichung kann aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) \mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \frac{a}{s^2} \\ \left(\frac{s^2 + a^2}{s^2}\right) \mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \frac{a}{s^2} \\ \mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

◇

2-7 Beispiel : Gegeben sei die Laplacetransformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ durch

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s-1)}$$

Zu bestimmen ist die Originalfunktion $f(t)$.

Lösung: Dazu verwendet man eine Partialbruchzerlegung. Man weiss (sollte wissen), dass die Funktion $F(s)$ umgeschrieben werden kann zu

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}$$

für geeignete reelle Konstanten A , B und C . Um diese Konstanten zu bestimmen setzt man in der zu lösenden Gleichung

$$s+1 = A(s+2)(s-1) + B s(s-1) + C s(s+2)$$

nacheinander $s = 0$, $s = -2$ und $s = 1$ und erhält

$$\begin{aligned} 0+1 &= -A \cdot 2 + 0 + 0 \\ -2+1 &= 0 + B \cdot 6 + 0 \\ 1+1 &= 0 + 0 + C \cdot 3 \end{aligned}$$

und somit $A = -1/2$, $B = -1/6$ und $C = 2/3$. Es gilt also

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s-1)} = \frac{-1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{6} \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s-1}$$

Die obige Rechnung kann auch mit Hilfe von *Octave*¹ verifiziert werden.

Octave

```
num = [ 1 1]; % numerator 1*s+1
denum = conv([1 0],conv([1 2],[1 -1])); % denominator s*(s+2)*(s-1)
denum = [1 1 -2 0];
[R,P,K,E] = residue(num,denum)
-->
R =    0.66667
    -0.50000
    -0.16667
P =     1
     0
    -2
K = [] (0x0)
E =     1
     1
     1
```

¹Der MATLAB Befehl `residue()` gibt kein viertes Argument E zurück mit der Ordnung der mehrfachen Polstelle. Für mehrfache Polstellen werden die Koeffizienten in R in aufsteigender Reihenfolge angezeigt, genau wie bei *Octave*.

Der Vektor \mathbf{R} enthält die Koeffizienten und der Vektor \mathbf{P} die Nullstellen der Nenner, d.h.

$$F(s) \approx \frac{0.66667}{s-1} + \frac{-0.5}{s} + \frac{-0.16667}{s+2}$$

Wegen

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$$

erhält man das gewünschte Resultat

$$f(t) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t$$

◇

2-8 Beispiel : Gegeben ist die Laplacetransformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ durch

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^2}$$

Zu bestimmen ist die Originalfunktion $f(t)$.

Lösung: Dazu verwendet man wieder eine Partialbruchzerlegung. Man weiss (oder sollte wissen), dass die Funktion $F(s)$ umgeschrieben werden kann zu

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

für geeignete reelle Konstanten A_1, A_2, B_1 und B_2 . Um diese Konstanten zu bestimmen, setzt man in der zu lösenden Gleichung

$$s+1 = A_1 s(s+2)^2 + A_2 (s+2)^2 + B_1 s^2(s+2) + B_2 s^2$$

nacheinander $s = 0$ und $s = -2$ und erhält

$$\begin{aligned} 1 &= A_2 \cdot 4 \\ -1 &= B_2 \cdot 4 \end{aligned}$$

und somit $A_2 = 1/4$ und $B_2 = -1/4$. Leitet man beide Seiten der obigen Gleichung ab bezüglich s und setzt $s = 0$ und $s = -2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 \cdot 4 + A_2 \cdot 4 \\ 1 &= B_1 \cdot 4 - B_2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Da die Werte von A_2 und B_2 bereits bekannt sind ergibt sich hier (zufällig) $A_1 = B_1 = 0$ und es gilt somit

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^2}$$

Wegen

$$\mathcal{L}[t e^{at}](s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

gilt also

$$f(t) = \frac{t}{4} - \frac{t}{4} e^{-2t}$$

Mit Octave kann die obige Rechnung auch ausgeführt werden.

Octave


```

num = [ 1 1]; % numerator 1*s+1
denum = conv([1 0 0],[1 4 4]); % denominator s^2*(s+2)^2
denum = [1 4 4 0 0];
[R,P,K,E] = residue (num,denum)
-->
R =  0.00000
    0.25000
   -0.00000
   -0.25000
P =  0
    0
   -2
   -2
K = [] (0x0)
E =  1
    2
    1
    2
    
```

Der Vektor R enthält die Koeffizienten und der Vektor P die Nullstellen der Nenner und E die Multiplizitäten d.h.

$$F(s) \approx \frac{0}{s} + \frac{0.25}{s^2} + \frac{0}{s+2} + \frac{-0.25}{(s+2)^2}$$

◇

2-9 Beispiel : Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2(s^2+9)}$$

ist gegeben durch

$$F(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+9} = \frac{A_1 s (s^2+9) + A_2 (s^2+9) + (Bs+C) s^2}{s^2 (s^2+9)}$$

Somit ist die zu untersuchende Gleichung

$$2s+3 = A_1 s (s^2+9) + A_2 (s^2+9) + (Bs+C) s^2$$

Diese Gleichung zeigt zwei spezielle Probleme:

- eine doppelte Nullstelle des Nenners bei $s = 0$
- ein Paar von konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners bei $\pm i 3$

Wir wählen wieder geeignete Werte von s um das Problem zu lösen.

- Mit $s = 0$ erhalten wir sofort

$$3 = 0 + A_2 (0^2 + 9) + 0$$

und somit $A_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- Nun verwenden wir die komplexe Nullstelle $s = +i 3$ und erhalten

$$6i+3 = 0 + (B 3i + C) (-9) = -27 B i + (-9 C)$$

Da die beiden Konstanten B und C reell sind können wir Real- und Imaginärteil separat untersuchen und erhalten sofort $B = \frac{6}{-27} = \frac{-2}{9}$ und $C = \frac{-1}{3}$.

- Um die doppelte Nullstelle bei $s = 0$ zu untersuchen, verwenden wir die Ableitung der ursprünglichen Gleichung

$$2 = A_1 (1 (s^2 + 9) + s (2s)) + A_2 (2s) + B s^2 + (B s + C) 2s$$

und setzen erneut $s = 0$

$$2 = A_1 (9) + A_2 0 + 0$$

um $A_1 = \frac{2}{9}$ abzulesen.

Insgesamt erhalten wir somit

$$F(s) = \frac{\frac{2}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{\frac{-2}{9}s}{s^2 + 9} + \frac{\frac{-1}{3}}{s^2 + 9}$$

mit der inversen Laplacetransformation

$$f(t) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}\cos(3t) - \frac{1}{9}\sin(3t)$$

Die Partialbruchzerlegung kann durch *Octave* erzeugt werden durch

Octave

```
num = [2 3]; % numerator 2*s+3
denum = [1 0 9 0 0]; % denominator s^4+9*s^2
[R,P,K,E] = residue (num,denum)
-->
R =  -0.11111 + 0.05556i
      -0.11111 - 0.05556i
       0.22222 + 0.00000i
       0.33333 + 0.00000i
P =  0 + 3i
      -0 - 3i
       0 + 0i
       0 + 0i
K = [] (0x0)
E = 1
      1
      1
      2
```

Der Vektor **R** enthält die Koeffizienten und der Vektor **P** die Nullstellen der Nenner und **E** die Multiplizitäten d.h.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-0.11111 + i 0.05556}{s - i 3} + \frac{-0.11111 - i 0.05556}{s + i 3} + \frac{0.22222}{s} + \frac{0.33333}{s^2} \\ &= \frac{(-0.11111 + i 0.05556)(s + i 3) + (-0.11111 - i 0.05556)(s - i 3)}{(s + i 3)(s - i 3)} + \frac{0.22222}{s} + \frac{0.33333}{s^2} \\ &= \frac{-0.22222s - 0.33333}{s^2 + 9} + \frac{0.22222}{s} + \frac{0.33333}{s^2} \end{aligned}$$

Der komplexe Beitrag musste noch in die richtige Form gebracht werden. Das Resultat stimmt mit der Handrechnung überein. \diamond

2-10 Beispiel : Für die rationale Funktion

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 25)^2}$$

ist die Laplace-Rücktransformation **nicht** offensichtlich. Mit *Octave* erhalten wir die komplexe Partialbruchzerlegung

Octave

```
[r, p, k, e] = residue (1, [1 0 50 0 25^2])
-->
r =      0.000000 - 0.002000i
      -0.010000 - 0.000000i
      0.000000 + 0.002000i
      -0.010000 - 0.000000i
p =      0.0000 + 5.0000i
      0.0000 + 5.0000i
      -0.0000 - 5.0000i
      -0.0000 - 5.0000i
k = [] (0x0)
e =      1
      2
      1
      2
```

d.h.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{-i/500}{s-i5} + \frac{+i/500}{s+i5} - \frac{1/100}{(s-i5)^2} - \frac{1/100}{(s+i5)^2} \\
 &= \frac{i}{500} \left(\frac{-(s+i5) + (s-i5)}{(s-i5)(s+i5)} \right) - \frac{1}{100} \left(\frac{(s+i5)^2 + (s-i5)^2}{(s-i5)^2(s+i5)^2} \right) \\
 &= \frac{i}{500} \frac{-i10}{s^2+25} - \frac{1}{100} \frac{2s^2 - 2 \cdot 25}{(s^2+25)^2} \\
 &= \frac{1}{50} \frac{1}{s^2+25} - \frac{1}{50} \frac{s^2-25}{(s^2+25)^2} = \frac{1}{(s^2+25)^2}
 \end{aligned}$$

Für die Laplace–Rücktransformation erhalten wir direkt aus der komplexen Zerlegung

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{-i/500}{s-i5} + \frac{+i/500}{s+i5} - \frac{1/100}{(s-i5)^2} - \frac{1/100}{(s+i5)^2} \\
 f(t) &= \frac{i}{500} (-\exp(i5t) + \exp(-i5t)) - \frac{t}{100} (+\exp(i5t) + \exp(-i5t)) \\
 &= \frac{i}{500} (-\cos(5t) - i\sin(5t) + \cos(5t) - i\sin(5t)) - \\
 &\quad - \frac{t}{100} (\cos(5t) + i\sin(5t) + \cos(5t) - i\sin(5t)) \\
 &= \frac{+2}{500} \sin(5t) - \frac{2t}{100} \cos(5t) = \frac{+1}{250} \sin(5t) - \frac{1}{50} t \cos(5t)
 \end{aligned}$$

Da jeweils ein komplexer Term und der konjugiert komplexe Term gemeinsam auftreten kann man auch leicht anders rechnen.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{-i/500}{s-i5} + \frac{+i/500}{s+i5} - \frac{1/100}{(s-i5)^2} - \frac{1/100}{(s+i5)^2} \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{-i/500}{s-i5} - \frac{1/100}{(s-i5)^2} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{-i/500(s+i5)}{s^2+25} - \frac{1/100(s+i5)^2}{(s^2+25)^2} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{+1/100}{s^2+25} - \frac{1/100(s^2-25)}{(s^2+25)^2} \right) = \frac{1}{50} \frac{+1}{s^2+25} - \frac{1}{50} \frac{s^2-25}{(s^2+25)^2} = \frac{1}{(s^2+25)^2}
 \end{aligned}$$

und für die inverse Laplace Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2 \operatorname{Re} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-i/500}{s-i5} - \frac{1/100}{(s-i5)^2} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{-i}{500} \exp(+i5t) - \frac{1}{100} t \exp(+i5t) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{+1}{500} \sin(5t) - \frac{1}{100} t \cos(5t) \right) = \frac{+1}{250} \sin(5t) - \frac{1}{50} t \cos(5t)
 \end{aligned}$$

◇

Weitere Beispiele von Partialbruchzerlegungen finden Sie im Kapitel über das bestimmte Integral.

2.3 Wichtige Eigenschaften der Laplacetransformation

2.3.1 Linearität

2–11 Theorem :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c f] &= c \mathcal{L}[f] \\ \mathcal{L}[f + g] &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]\end{aligned}$$

d.h. die Operation ist **linear**.

Der Beweis dieser Tatsache basiert auf der Linearität des Integrales und ist elementar.

2.3.2 Transformation von Ableitungen und Ableitung von Transformationen

2–12 Theorem :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= s \mathcal{L}[f](s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''](s) &= s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0) - f'(0) \\ \mathcal{L}[f'''](s) &= s^3 \mathcal{L}[f](s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \\ \mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\end{aligned}$$

Alle auftretenden Ableitungen müssen stückweise stetig und von exponentieller Ordnung sein.

Beweis : Eine partielle Integration zeigt, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}[f(t)](s)\end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage verifiziert. Eine einfache Iteration erzeugt die anderen Resultate.

$$\mathcal{L}[f''] = s \mathcal{L}[f'] - f'(0) = s (s \mathcal{L}[f] - f(0)) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}[f] - s f(0) - f'(0)$$

□

2–13 Satz :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](s) &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)](s) \\ \int_0^t f(\tau) d\tau &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right](t)\end{aligned}$$

2–14 Satz :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} F(s) &= -\mathcal{L}[t f(t)](s) \\ \frac{d^n}{ds^n} F(s) &= (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s) \\ \frac{d^n}{ds^n} F &= (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]\end{aligned}$$

Beweis : Ein uneigentliches Integral ist bezüglich des Parameters abzuleiten.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\ &= - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[t f(t)](s)\end{aligned}$$

Durch mehrfaches Ausführen dieser Rechnung erhält man das gewünschte Resultat. \square

2–15 Beispiel :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t \sin t] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{+2s}{(s^2 + 1)^2} \\ \mathcal{L}[t \cos t] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos t] = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{2s^2}{(s^2 + 1)^2} - \frac{1}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

\diamond

2.3.3 Grenzwertsätze

2–16 Satz : (Grenzwertsatz)

Sind eine Funktion $f(t)$ und ihre Ableitung von exponentieller Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} (s F(s)) &= f(0+)\end{aligned}$$

Beweis : Gilt für die Funktion $|f(t)| \leq M e^{ct}$, so ist für $s > c$

$$\begin{aligned}|F(s)| &= \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t) e^{-st}| dt \\ &\leq \int_0^\infty |M e^{ct} e^{-st}| dt \leq M \int_0^\infty e^{(c-s)t} dt = M \frac{1}{s-c} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}s F(s) &= \int_0^\infty f(t) s e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{d}{dt} e^{-st} \right) dt \\ &= -f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(0+) + 0\end{aligned}$$

\square

2–17 Beispiel : Die Funktion $f(t) = e^{-t} \sin(2t)$ erfüllt die Bedingung des obigen Grenzwertsatzes. Wegen

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-t} \sin(2t)](s) = \frac{2}{(s-1)^2 + 4}$$

gilt

$$s F(s) = \frac{2s}{(s-1)^2 + 4} \rightarrow 0 = f(0) \quad \text{falls } s \rightarrow \infty$$

Für die Funktion $g(t) = e^{-t} \cos(2t)$ erhalten wir

$$G(s) = \mathcal{L}[e^{-t} \cos(2t)](s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}$$

und somit

$$s G(s) = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2 + 4} \rightarrow 1 = g(0) \quad \text{falls } s \rightarrow \infty$$

◇

Aufgrund dieses Satzes ist klar, dass die Funktion $\frac{s^2 - 3}{s^2 + 2s + 3}$ **nicht** die Laplacetransformation einer Funktion exponentieller Ordnung sein kann.

2–18 Satz : (Grenzwertsatz)

Gilt für eine Funktion

$$\int_0^\infty |f'(t)| dt < \infty$$

so existiert die Laplacetransformation $F(s)$ für $s > 0$ und es gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0+} s F(s) = f(\infty) = \lim_{M \rightarrow \infty} f(M)$$

Beweis : Gemäss der Rechnung im vorangehenden Beweis gilt

$$\begin{aligned} s F(s) &= \int_0^\infty f(t) s e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{d}{dt} e^{-st} \right) dt \\ &= -f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0) + \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \xrightarrow{s \rightarrow 0+} f(0) + \int_0^\infty f'(t) dt = f(\infty) \end{aligned}$$

□

2–19 Beispiel : Die Funktion $f(t) = e^{-t} \sin(2t)$ erfüllt die Bedingung des obigen Grenzwertsatzes. Wegen

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-t} \sin(2t)](s) = \frac{2}{(s-1)^2 + 4}$$

gilt

$$s F(s) = \frac{2s}{(s-1)^2 + 4} \rightarrow 0 = f(\infty) \quad \text{falls } s \rightarrow 0+$$

Für die Funktion $g(t) = e^{-t} \cos(2t)$ erhalten wir

$$G(s) = \mathcal{L}[e^{-t} \cos(2t)](s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}$$

und somit

$$s G(s) = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2 + 4} \rightarrow 0 = g(\infty) \quad \text{falls } s \rightarrow 0+$$

◇

2.3.4 Verschiebungssätze

2–20 Satz : (Erster Verschiebungssatz)

Mit $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= F(s - a) \\ e^{at} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s - a)]\end{aligned}$$

Beweis :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt \\ \mathcal{L}[f(t)](s - a) &= \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt\end{aligned}$$

□

2–21 Beispiel : Da die Laplacetransformierte von $\cos \omega t$ gegeben ist durch $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ gilt

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t](s) = \mathcal{L}[\cos \omega t](s - a) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

◇

Die Laplacetransformation kann auch verwendet werden um Einschaltvorgänge zu behandeln. Bei solchen Problemen ist diese Methode meist wesentlich effizienter als andere.

2–22 Definition : (Sprungfunktion)

$$U(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{falls } a \leq t \end{cases}$$

Diese Funktion heisst **Heaviside**-Funktion.

2–23 Satz : (Zweiter Verschiebungssatz)

Für $a \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t - a) U(t - a)](s) &= e^{-as} \mathcal{L}[f](s) = e^{-as} F(s) \\ f(t - a) U(t - a) &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)](t)\end{aligned}$$

Beweis : Die Substitution $\tau = t - a$ führt auf

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t - a) U(t - a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t - a) U(t - a) dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t - a) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

□

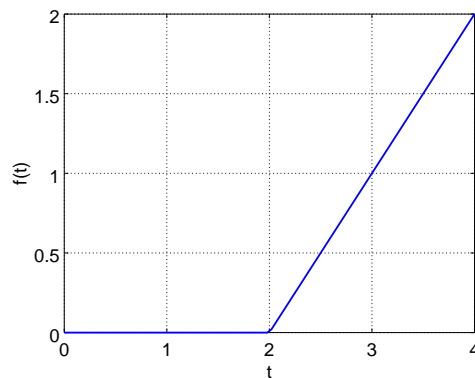


Abbildung 2.1: Graph einer linearen Funktion mit Schalter

2–24 Beispiel : Zu untersuchen ist die Funktion $f(t) = t - 2$, die allerdings erst für $t \geq 2$ „eingeschaltet“ wird. Für $t < 2$ ist die Funktion Null. Der Graph ist gegeben in Abbildung 2.1. Zu bestimmen ist die Laplacetransformation.

Lösung: Es gilt

$$f(t) = (t - 2) U(t - 2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 2 \\ t - 2 & \text{falls } t \geq 2 \end{cases}$$

Somit erhält man mit Hilfe des zweiten Verschiebungssatzes

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[(t - 2) U(t - 2)](s) = e^{-2s} \mathcal{L}[t](s) = e^{-2s} \frac{1}{s^2}$$

◇

2–25 Beispiel : Zu untersuchen ist die Funktion $f(t)$ die nur für $2 \leq t \leq 4$ von Null verschieden ist. In diesem Bereich ist der Wert der Funktion 2. Der Graph ist gegeben in Abbildung 2.2. Zu bestimmen ist die

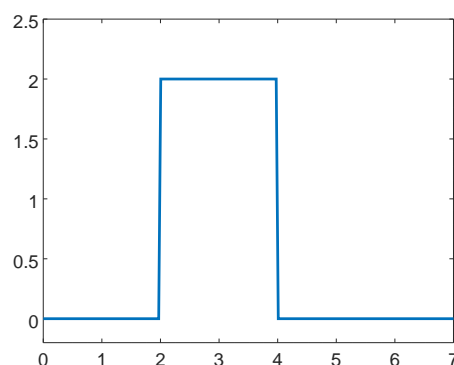


Abbildung 2.2: Graph einer Ein- und Aus-Schaltfunktion

Laplacetransformation.

Lösung: Es gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 2 \\ 2 & \text{falls } 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{falls } t > 4 \end{cases}$$

Es gilt

$$f(t) = 2 U(t - 2) - 2 U(t - 4)$$

und somit erhält man mit Hilfe des zweiten Verschiebungssatzes

$$\mathcal{L}[f(t)] = 2 \mathcal{L}[U(t - 2)] - 2 \mathcal{L}[U(t - 4)] = 2 e^{-2s} \frac{1}{s} - 2 e^{-4s} \frac{1}{s} = \frac{2}{s} e^{-2s} (1 - e^{-2s})$$

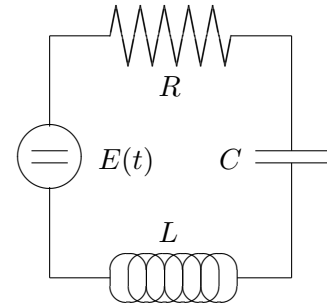
◇

2-26 Beispiel :

Sei I der durch den Widerstand R fließende Strom und Q die Ladung auf dem Kondensator. Dann gilt $\frac{d}{dt} Q = I$ und

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

Somit haben wir ein Beispiel einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zur Zeit $t = 0$ sei das System in Ruhe, d.h. $Q(0) = \dot{Q}(0) = 0$.



Als konkretes Beispiel untersuchen wir

$$L = 1 \quad , \quad R = 2 \quad , \quad C = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2 \\ 2 & \text{für } 2 < t \leq 4 \\ 0 & \text{für } 4 < t \end{cases}$$

und wir haben die Differentialgleichung

$$\ddot{Q} + 2 \dot{Q} + 5 Q = E(t)$$

Setzen wir $Y(s) = \mathcal{L}[Q(t)](s)$, so erhalten wir daraus durch Laplacetransformation

$$\begin{aligned} (s^2 Y(s) - s Q(0) - \dot{Q}(0)) + 2 (s Y(s) - Q(0)) + 5 Y(s) &= \mathcal{L}[E(t)](s) \\ (s^2 + 2s + 5) Y(s) - s Q(0) - \dot{Q}(0) - 2 Q(0) &= 2 e^{-2s} \frac{1}{s} - 2 e^{-4s} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

für die speziell einfachen Anfangswerte $Q(0) = \dot{Q}(0) = 0$ gilt also

$$Y(s) = 2 e^{-2s} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - 2 e^{-4s} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Um mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{s((s+1)^2 + 2^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1) + C}{(s+1)^2 + 2^2}$$

dieses Problem zu lösen, muss die Gleichung

$$1 = A((s+1)^2 + 2^2) + (B(s+1) + C)s$$

gelöst werden. Mit $s = 0$ erhält man sofort $1 = A 5$ und somit $A = 1/5$. Der Wert $s = -1 + i 2$ führt auf

$$\begin{aligned} 1 &= (B((-1 + i 2) + 1) + C)(-1 + i 2) \\ &= (i 2 B + C)(-1 + i 2) \\ &= -4 B - C + i(-2 B + 2 C) \end{aligned}$$

Teilt man diese Gleichung auf in Real- und Imaginär-Teil, so folgt sofort, dass $B = C$ und $B = C = -1/5$. Somit haben wir die Laplacetransformierte Y der Funktion $Q(t)$ dargestellt durch

$$Y(s) = \frac{2}{5} e^{-2s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right) - \frac{2}{5} e^{-4s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] &= \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] &= e^{-t} \cos(2t) \end{aligned}$$

und dem Verschiebungssatz gilt also

$$Q(t) = \frac{2}{5} \left(1 - e^{-(t-2)} \cos(2(t-2)) - \frac{1}{2} e^{-(t-2)} \sin(2(t-2)) \right) U(t-2) - \frac{2}{5} \left(1 - e^{-(t-4)} \cos(2(t-4)) - \frac{1}{2} e^{-(t-4)} \sin(2(t-4)) \right) U(t-4)$$

Wegen der beiden Schrittfunktionen $U(t-2)$ und $U(t-4)$ verschwindet die Funktion $Q(t)$ für $0 \leq t \leq 2$. Für $2 \leq t \leq 4$ „sieht“ man nur den ersten Teil. Für $t \geq 4$ wirken beide Teile der Lösungsformel. Abbildung 2.3 kann mit MATLAB/Octave erzeugt werden.

```
t = linspace(0,10,200);
y = 2/5*(1-exp(2-t).*(cos(2*(t-2))+sin(2*(t-2))/2)).*(t>2)...
    -2/5*(1-exp(4-t).*(cos(2*(t-4))+sin(2*(t-4))/2)).*(t>4);

plot(t,y)
axis([0 7 -0.2 0.6]); xlabel('t'); ylabel('f(t)')
```

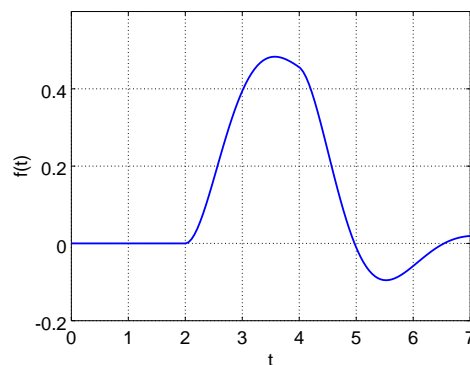


Abbildung 2.3: Verhalten einer LRC -Schaltung bei Ein- und Aus-Schaltvorgängen



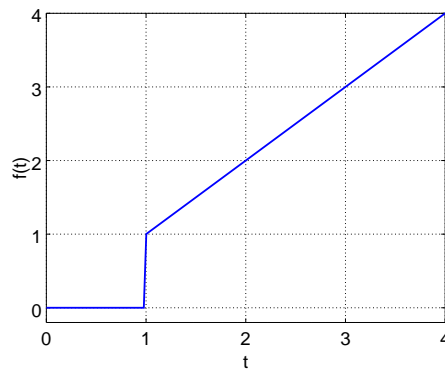


Abbildung 2.4: Graph einer linearen Funktion mit Schalter

2–27 Beispiel : Zu untersuchen ist die Funktion $f(t) = t$, die allerdings erst für $t \geq 1$ „eingeschaltet“ wird. Für $t < 1$ ist die Funktion Null. Der Graph ist gegeben in Abbildung 2.4. Zu bestimmen ist die Laplacetransformation.

Lösung: Es gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 1 \\ t & \text{falls } t \geq 1 \end{cases}$$

Der Verschiebungssatz ist nicht direkt anwendbar, da die Verschiebung der Schrittfunktion U und der „elementaren“ Funktion gleich sein müssen. Es gilt aber $t = (t - 1) + 1$ und somit

$$f(t) = (t - 1) U(t - 1) + 1 U(t - 1)$$

und somit erhält man mit Hilfe des zweiten Verschiebungssatzes

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(t - 1) U(t - 1)] + \mathcal{L}[1 U(t - 1)] = e^{-s} \mathcal{L}[t] + e^{-s} \mathcal{L}[1] = e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

◇

2.3.5 Ähnlichkeitssatz

2–28 Satz : (Ähnlichkeitssatz)

Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ a f(at) &= \mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

Beweis :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt \quad \text{Substitution } \tau = at \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau/a} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

□

2–29 Beispiel :

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[\sin t]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

◇

2.3.6 Faltung

2–30 Definition : Sind f und g zwei Funktionen, so heisst die neue Funktion $h(t) = (f * g)(t)$ die **Faltung** von f und g , wobei

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

2–31 Beispiel : Wir berechnen die Faltung der beiden Funktionen e^t und $\sin t$.

$$\begin{aligned} e^t * \sin t &= \int_0^t e^\tau \sin(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^\tau (\sin t \cos \tau - \cos t \sin \tau) d\tau \\ &= \sin t \frac{e^\tau}{2} (\cos \tau + \sin \tau) \Big|_{\tau=0}^t - \cos t \frac{e^\tau}{2} (\sin \tau - \cos \tau) \Big|_{\tau=0}^t \\ &= \frac{1}{2} (e^t - \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Man kann aber auch folgendermassen vorgehen

$$\begin{aligned} \sin t * e^t &= \int_0^t \sin \tau e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t \sin \tau e^{-\tau} d\tau \\ &= e^t \frac{e^{-\tau}}{2} (-\sin \tau - \cos \tau) \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{2} (e^t - \sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Die beiden Resultate sind identisch. Das folgende Resultat zeigt, dass dies kein Zufall ist.

◇

2–32 Satz : Das Faltungsprodukt ist kommutativ, d.h.

$$f * g = g * f$$

Beweis : Der Beweis beruht auf einer geschickten Substitution $s = t - \tau$ ($ds = -d\tau$)

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_t^0 f(t - s) g(s) (-ds) = \int_0^t g(s) f(t - s) ds = (g * f)(t) \end{aligned}$$

□

2–33 Satz : Der **Faltungssatz** zeigt, dass die Laplacetransformation einer Faltung gleich dem Produkt der Laplacetransformationen ist, präziser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](s) &= F(s) G(s) \\ (f * g)(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) G(s)](t) \end{aligned}$$

Beweis : Sei

$$F(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \text{und} \quad G(s) = \int_0^\infty g(\beta) e^{-s\beta} d\beta$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty g(\beta) e^{-s\beta} d\beta \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) g(\beta) e^{-s(\tau+\beta)} d\beta d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_0^\infty g(\beta) e^{-s(\tau+\beta)} d\beta \right) d\tau \\ &\quad \text{Substitution: } t = \tau + \beta, \quad dt = d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau \\ &\quad \text{Integrationsreihenfolge ändern} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) e^{-st} d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot (f * g)(t) dt \\ &= \mathcal{L}[f * g](s) \end{aligned}$$

□

2–34 Satz : Für eine Konstante $a \neq 0$ wird das Anfangswertproblem

$$\dot{y} + a y = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0$$

gelöst durch

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Diese explizite Formel wird mit **Variation–der–Konstanten–Formel** bezeichnet oder auch **Formel von Duhamel**.

Beweis : Es gilt

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} \cdot (F(s) + y_0)$$

Wegen des Faltungssatzes gilt also

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \cdot (F(s) + y_0) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \cdot y_0 \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \cdot F(s) \right] \\ &= y_0 e^{-at} + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] * f(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

□

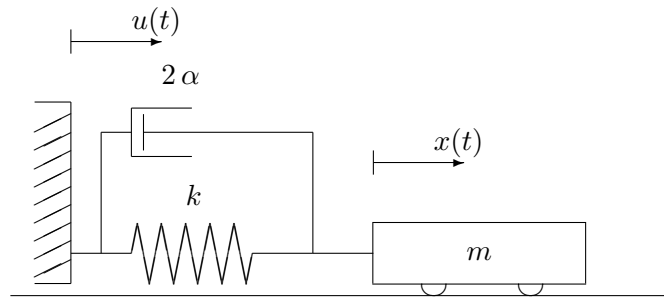


Abbildung 2.5: Stossübertragung

2–35 Beispiel : In Abbildung 2.5 finden Sie ein Masse-Feder System. Die Befestigung links wird durch einen Schlag bewegt, d.h. $u(t)$ ist bekannt. Die Masse m wird reagieren. Wir gehen davon aus, dass $x(0) = \dot{x}(0) = u(0) = \dot{u}(0) = 0$. Das Gesetz von Newton liefert die Differentialgleichung

$$m \ddot{x}(t) = -k (x(t) - u(t)) - 2\alpha (\dot{x}(t) - \dot{u}(t))$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir $m = 1$ und gehen von schwacher Dämpfung aus ($k > \alpha^2$). Durch Laplacetransformation erhält man aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (s^2 + 2\alpha s + k) X &= (2\alpha s + k) U \\ X &= \frac{2\alpha s + k}{s^2 + 2\alpha s + k} U = U - \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + k} U \\ X - U &= -\frac{1}{(s + \alpha)^2 + k - \alpha^2} \cdot s^2 U \end{aligned}$$

Da

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{k - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin(\sqrt{k - \alpha^2} t)\right](s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2 + k - \alpha^2}$$

erhalten wird durch Laplacerücktransformation und den Faltungssatz

$$x(t) - u(t) = (g * \ddot{u})(t) = \frac{-1}{\sqrt{k - \alpha^2}} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin(\sqrt{k - \alpha^2}(t - \tau)) \ddot{u}(\tau) d\tau$$

Somit ist die Position $x(t)$ der Masse durch ein Integral bestimmt. ◇

2–36 Beispiel : Um den Ausdruck

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right]$$

zu berechnen setzt man

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + k^2}$$

und somit

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2 + k^2}\right] = \frac{1}{k} \sin(kt)$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identität

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

mit $x = k\tau$ und $y = k(t - \tau)$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right] &= \frac{1}{k^2} \int_0^t \sin(k\tau) \sin(k(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2} \int_0^t \cos(k(2\tau - t)) - \cos(kt) d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{2k} \sin(k(2\tau - t)) - \tau \cos(kt) \right) \Big|_{\tau=0}^t \\ &= \frac{\sin(kt) - kt \cos(kt)}{2k^3}\end{aligned}$$

◇

2.3.7 Periodische Funktionen

2–37 Satz : Ist die Funktion $f(t)$ **periodisch** mit Periode T , so gilt

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Beweis : Das unbestimmte Integral wird aufgeteilt in unendlich viele Teilintegrale über die Periodenintervalle. Auf jedem Teilintervall wird eine Substitution ausgeführt $t = nT + \tau$. Da die Funktion f T -periodisch ist, gilt $f(nT + \tau) = f(\tau)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-st} dt \\ &\quad t = nT + \tau \quad \text{und somit} \quad dt = d\tau \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(\tau) e^{-s(nT + \tau)} d\tau = \sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \right) \left(\int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) = \left(\frac{1}{1 - e^{-sT}} \right) \left(\int_0^T f(t) e^{-st} dt \right)\end{aligned}$$

Im letzten Rechenschritt wurde der Wert der geometrischen Reihe bestimmt. □

2–38 Beispiel : Die Schrittfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{falls } a < t \leq b \end{cases}$$

wird b -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt. Erstellen Sie einen Graphen dieser Funktion. Die Laplacetransformation erhält man durch die Rechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \left(\frac{1}{1 - e^{-sb}} \right) \left(\int_0^b f(t) e^{-st} dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - e^{-sb}} \right) \left(\int_0^a 1 e^{-st} dt \right) = \left(\frac{1}{1 - e^{-sb}} \right) \left(\frac{1 - e^{-as}}{s} \right)\end{aligned}$$

Der Spezialfall $a = b$ ergibt (wie erwartet) die Laplacetransformation der konstanten Funktion 1. ◇

2–39 Beispiel : Die $2T$ -periodische Funktion sei im Intervall $[0, 2T]$ bestimmt durch die beiden Geradenstücke von $(0, 0)$ zu $(T, 1)$ und von $(T, 1)$ zu $(2T, 0)$. Zu bestimmen ist die Laplacetransformierte $F(s)$. Der Graph dieser Funktion für $T = 1$ ist in Abbildung 2.6 zu sehen. Die Graphik wurde erzeugt durch den Octave/MATLAB-Code.

```
t = linspace(-2.5, 5.5, 200);
y = abs(mod(t+1, 2)-1);
plot(t, y)
axis([-2.5 5.5 -1 2])
xlabel('t'); ylabel('f(t)')
```

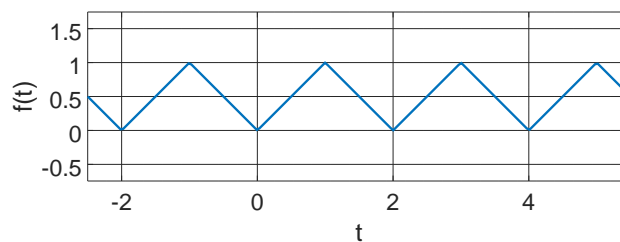


Abbildung 2.6: Graph einer Dreiecksfunktion

Lösung: Auf dem Intervall $[0, 2T]$ kann die Funktion beschrieben werden durch

$$f(t) = \begin{cases} t/T & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 2 - t/T & \text{für } T < t \leq 2T \end{cases}$$

Da die Funktion $2T$ periodisch ist gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-s2T}} \int_0^{2T} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-s2T}} \left(\int_0^T e^{-st} t/T dt + \int_T^{2T} e^{-st} (2 - t/T) dt \right) \end{aligned}$$

Nun können die beiden Integrale einzeln bestimmt werden durch die Rechnungen

$$\int_0^T e^{-st} t dt = -\frac{1+ts}{s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^T = \frac{1}{s^2} - \frac{1+sT}{s^2} e^{-sT}$$

und (Substitution $\tau = t - T$)

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} e^{-st} (2T - t) dt &= \int_0^T e^{-s(\tau+T)} (T - \tau) d\tau \\ &= e^{-sT} \int_0^T e^{-s\tau} (T - \tau) d\tau \\ &= e^{-sT} \left(\frac{-T}{s} e^{-s\tau} + \frac{1+ts}{s^2} e^{-st} \Big|_{t=0}^T \right) \\ &= e^{-sT} \left(\frac{sT-1}{s^2} + \frac{1+sT-sT}{s^2} e^{-sT} \right) \\ &= \frac{sT-1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} e^{-2sT} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Laplacetransformation

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{T(1-e^{-2sT})} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1+sT}{s^2} e^{-sT} + \frac{sT-1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} e^{-2sT} \right) \\
 &= \frac{1}{T(1-e^{-2sT})} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} e^{-2sT} \right) \\
 &= \frac{1}{T s^2 (1-e^{-2sT})} (1-e^{-sT})^2 \\
 &= \frac{1}{T s^2} \frac{1-e^{-sT}}{1+e^{-sT}} = \frac{1}{T s^2} \frac{e^{sT/2} - e^{-sT/2}}{e^{sT/2} + e^{-sT/2}} = \frac{1}{T s^2} \tanh(sT/2)
 \end{aligned}$$

◇

2–40 Beispiel : Versucht man die Laplacetransformation der Ableitung der Funktion des vorangehenden Beispiels zu bestimmen, so kann man die Eigenschaft $\mathcal{L}[f'](s) = s F(s) - f(0)$ verwenden. Dies führt auf

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \frac{1}{T s^2} \tanh(sT/2) - 0 = \frac{1}{T s} \tanh(sT/2)$$

In der Abbildung 2.6 kann man auch ablesen, dass

$$f'(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ -1/T & \text{für } T < t \leq 2T \end{cases}$$

Eine Integration führt somit auf

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f'](s) &= \frac{1}{1-e^{-2sT}} \left(\int_0^T e^{-st} \frac{1}{T} dt + \int_T^{2T} e^{-st} \frac{-1}{T} dt \right) \\
 &= \frac{1}{T(1-e^{-2sT})} \left(\int_0^T e^{-st} dt - \int_T^{2T} e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{1}{T(1-e^{-2sT})} \frac{1}{s} (1 - e^{-sT} - e^{-sT} + e^{-2sT}) \\
 &= \frac{1}{T s} \tanh(sT/2)
 \end{aligned}$$

Wie erwartet liefern also die beiden obigen Rechenverfahren das selbe Ergebnis.

◇

2–41 Beispiel :

Bestimmen Sie die Laplacetransformation der periodischen Funktion in Abbildung 2.7.

$$y(t) = \max \{0, \sin(t + \pi)\}$$

Lösung:

1. Variante: mit einem Integral

Die Funktion ist 2π -periodisch und $\sin(t + \pi) = -\sin t$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt \\
 &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} y(t) dt \\
 &= \frac{-1}{1-e^{-2\pi s}} \int_\pi^{2\pi} e^{-st} \sin(t) dt = \frac{-1}{1-e^{-2\pi s}} \left(\frac{e^{-st}}{1+s^2} (-\cos t - s \sin t) \right) \Big|_\pi^{2\pi} \\
 &= \frac{-1}{1-e^{-2\pi s}} \frac{-e^{-s2\pi} - e^{-s\pi}}{1+s^2} = \frac{e^{-s2\pi} + e^{-s\pi}}{(1+s^2)(1-e^{-2\pi s})} \\
 &= \frac{1}{1+s^2} e^{-s\pi} \frac{e^{-s\pi} + 1}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})} = \frac{1}{1+s^2} \frac{e^{-s\pi}}{(1-e^{-\pi s})}
 \end{aligned}$$

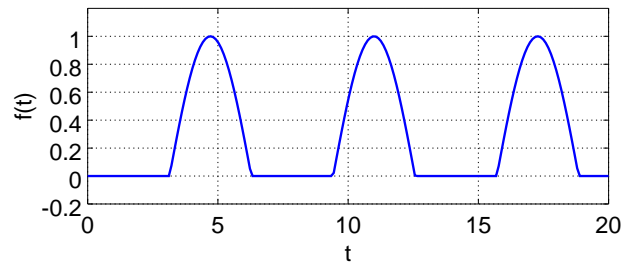


Abbildung 2.7: Graph einer periodischen Funktion

2. Variante: Tabelle und zweiter Verschiebungssatz

Es ist zu beachten, dass bei Laplacetransformationen die Funktion für negative Werte von t immer 0 ist, d.h. eigentlich untersuchen wir die Funktion

$$y(t) = U(t) \max\{0, \sin(t + \pi)\}$$

Wenn der Graph der Funktion um π nach links verschoben wird, so entsteht eine Funktion deren Laplace-transformation oft tabelliert ist.

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t - \pi) f(t - \pi) \\ f(t) &= \max\{0, \sin t\} \\ F(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})} \\ Y(s) &= e^{-\pi s} F(s) = e^{-\pi s} \frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})} \end{aligned}$$

3. Variante: ohne Tabelle und Integral

Die Idee der vorangehenden Rechnung kann noch anders verwendet werden. Um den Ansatz zu verstehen **muss** eine Graphik erstellt werden.

$$\begin{aligned} \sin t &= y(t - \pi) - y(t) \quad \text{für } t \geq \pi \\ \sin(t - \pi) U(t - \pi) &= y(t) - U(t - \pi) y(t - \pi) \\ e^{-s\pi} \frac{1}{s^2 + 1} &= Y(s) - e^{-s\pi} Y(s) \\ Y(s) &= \frac{e^{-s\pi}}{s^2 + 1} \frac{1}{1 - e^{-s\pi}} \end{aligned}$$

◇

Es gibt ausführliche Tabellen von Laplacetransformierten von ähnlichen Funktionen. *Mathematica* oder Taschenrechner können die Funktion einer Tabelle übernehmen, speziell mit Hilfe von [[Graf96](#)].

2.3.8 Delta-Funktion

2-42 Definition : (Delta-Funktion von Dirac²)

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{falls } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > \varepsilon \end{cases}$$

²Paul Adrian Maurice Dirac (1902–1984), britischer Physiker.

$$\delta_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{falls } t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{für } t < t_0 \text{ und } t > t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Somit ist δ_ε eine stückweise stetige Funktion. Die **Deltafunktion** ist formal definiert durch

$$\begin{aligned} \delta(t) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \delta_\varepsilon(t) \\ \delta(t - t_0) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \delta_\varepsilon(t - t_0) \end{aligned}$$

Es sollte aber festgehalten, dass δ keine Funktion im üblichen Sinn ist, sondern eine sogenannte **Distribution**. Sie ist charakterisiert durch die folgende Eigenschaft.

2-43 Satz : Für jede stetige Funktion gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Beweis :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_\varepsilon(t - t_0) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t) dt = f(t_0)$$

□

2-44 Satz : Für $t_0 > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta] &= 1 \\ \mathcal{L}[\delta(t - t_0)] &= e^{-st_0} \end{aligned}$$

Für $f(t) = \delta(t)$ gilt $F(s) = 1$ und somit $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$. Dies zeigt, dass die Delta-, „Funktion“ keine Funktion im üblichen Sinne ist.

2-45 Satz : Im Sinne der Laplacetransformation kann die Impulsfunktion $\delta(t - t_0)$ auch als Ableitung der Sprungfunktion $U(t - t_0)$ aufgefasst werden, falls $t_0 > 0$.

Beweis :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(U(t - t_0))'](s) &= s \mathcal{L}[U(t - t_0)](s) - U(0 - t_0) \\ &= s e^{-st_0} \frac{1}{s} - 0 = e^{-st_0} = \mathcal{L}[\delta(t - t_0)](s) \end{aligned}$$

□

Weichen zwei stückweise stetige Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ nur bei einzelnen Punkten voneinander ab, so gilt

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \mathcal{L}[g]$$

d.h. sie haben die selbe Laplacetransformation. Rechnet man mit Laplacetransformationen, so sind die beiden Funktionen f und g nicht unterscheidbar.

2-46 Theorem : Sind $f(t)$ und $g(t)$ zwei stückweise stetige Funktionen und gilt

$$F(s) = G(s) \quad \text{für alle } s > M$$

so stimmen f und g überall überein, ausser bei einzelnen Punkten.

2.4 Beispiele von Differentialgleichungen

2–47 Beispiel : Das einleitende Beispiel dieses Kapitels war die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 0$$

Die Laplacetransformation dieses Anfangswertproblems ergibt

$$s^2 Y - s + Y = 0$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Also ist

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right](t) = y(t) = \cos t$$

◇

2–48 Beispiel : Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = t^2 e^{3t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 6$$

Lösung: Sei $Y = \mathcal{L}[y]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{y}] &= s^2 Y - 2s - 6 \\ \mathcal{L}[\dot{y}] &= sY - 2 \\ \mathcal{L}[t^2 e^{3t}] &= \frac{2}{(s-3)^3} \end{aligned}$$

und somit wird aus der Differentialgleichung für y eine algebraische Gleichung für Y

$$s^2 Y - 2s - 6 - 6sY + 12 + 9Y = \frac{2}{(s-3)^3}$$

Diese Gleichung kann nun aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} (s^2 - 6s + 9)Y &= \frac{2}{(s-3)^3} - 6 + 2s \\ Y(s) &= \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{-6 + 2s}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3} \\ y(t) &= \frac{2}{4!} t^4 e^{3t} + 2e^{3t} = \left(\frac{1}{12} t^4 + 2\right) e^{3t} \end{aligned}$$

◇

2–49 Beispiel : Bei der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{y}(0) = 2 \quad \text{und} \quad y(1) = 2$$

ist unbedingt zu beachten, dass die zweite Bedingung **keine Anfangsbedingung** ist, sondern bei der Zeit $t = 1$ gegeben ist. Es handelt sich um ein **Randwertproblem**. Um dieses Problem zu lösen führt man $y(0)$ als zu bestimmende Unbekannte ein und erhält.

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 Y - sy(0) - 2 + 2sY - 2y(0) + Y \\ Y(s) &= y(0) \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} = y(0) \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} \\ &= y(0) \frac{1}{s+1} + y(0) \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} \\ y(t) &= y(0) e^{-t} + y(0) t e^{-t} + 2t e^{-t} = y(0) e^{-t} + (y(0) + 2) t e^{-t} \end{aligned}$$

Nun verwendet man die Bedingung $y(1) = 2$ um $y(0)$ zu bestimmen

$$\begin{aligned} 2 &= y(1) = y(0) e^{-1} + (y(0) + 2) 1 e^{-1} \\ 2e &= y(0) + (y(0) + 2) \\ y(0) &= e - 1 \end{aligned}$$

und somit ist

$$y(t) = y(0) e^{-t} + (y(0) + 2) t e^{-t} = (e - 1) e^{-t} + (e + 1) t e^{-t}$$

◇

2–50 Beispiel : Ein Balken der Länge L ist an beiden Enden auf der selben Höhe eingespannt und in der Mitte wirkt eine Kraft der Stärke F_0 senkrecht nach oben. Die Situation kann beschrieben werden durch die Gleichung

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 y}{dx^4} &= F_0 \delta(x - L/2) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \quad , \quad y(L) = y'(L) = 0 \end{aligned}$$

Lösung: Wir verwenden die beiden Abkürzungen $a = y''(0)$ und $b = y'''(0)$ und die Notationen $t = x$ und $K_0 = F_0/(EI)$.

$$\begin{aligned} s^4 Y(s) - s a - b &= K_0 e^{-s \frac{L}{2}} \\ Y(s) &= \frac{a}{s^3} + \frac{b}{s^4} + K_0 e^{-s \frac{L}{2}} \frac{1}{s^4} \\ y(t) &= \frac{a}{2} t^2 + \frac{b}{6} t^3 + \frac{K_0}{6} U(t - L/2) (t - \frac{L}{2})^3 \end{aligned}$$

Um die noch unbekannten Konstanten a und b zu bestimmen verwenden wir die Bedingungen bei $x = L$.

$$\begin{aligned} y(L) = 0 &= \frac{a}{2} L^2 + \frac{b}{6} L^3 + \frac{K_0}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \\ y'(L) = 0 &= a L + \frac{b}{2} L^2 + \frac{K_0}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} 3a + Lb &= \frac{-K_0}{8} L \\ 2a + Lb &= \frac{-K_0}{4} L \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$a = \frac{K_0}{8} L \quad , \quad b = \frac{-K_0}{2}$$

Somit ist die Auslenkung des Balkens gegeben durch die Fallunterscheidung

$$y(x) = \begin{cases} \frac{K_0 L}{16} x^2 - \frac{K_0}{12} x^3 & \text{für } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{K_0 L}{16} x^2 - \frac{K_0}{12} x^3 + \frac{K_0}{6} (x - \frac{L}{2})^3 & \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Aus diesen Formeln kann man leicht ablesen, dass

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \text{für } x \neq L/2$$

und

$$y'''(x) = \begin{cases} -\frac{K_0}{2} & \text{für } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ -\frac{K_0}{2} + K_0 & \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Die dritte Ableitung springt also um den Betrag K_0 bei $x = L/2$. Dies kann auch durch Integration der vierten Ableitung bestätigt werden. Die maximale Auslenkung ist

$$y(L/2) = \frac{1}{192} \frac{F_0}{EI} L^3$$

◇

2-51 Beispiel : Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 16y = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 1$$

und

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{für } t > \pi \end{cases}$$

Lösung: Für die Inhomogenität $f(t)$ gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(4t) - \cos(4t) U(t - \pi) \\ &= \cos(4t) - \cos(4(t - \pi)) U(t - \pi) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} s^2 Y - 1 + 16Y &= \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + 16} - e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 16} \\ Y &= \frac{s}{(s^2 + 16)^2} - e^{-\pi s} \frac{s}{(s^2 + 16)^2} + \frac{1}{s^2 + 16} \end{aligned}$$

Die inverse Laplacetransformierte von $\frac{s}{(s^2+16)^2}$ kann entweder in einer Tabelle nachgeschlagen werden oder bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2 + 16)^2} &= \frac{-1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 16} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + 16)^2}\right] &= \frac{+1}{2} t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 16}\right] = \frac{+1}{2} t \frac{\sin(4t)}{4} = \frac{1}{8} t \sin(4t) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8} t \sin(4t) - \frac{1}{8} (t - \pi) \sin(4(t - \pi)) U(t - \pi) + \frac{1}{4} \sin(4t) \\ &= \frac{1}{8} t \sin(4t) - \frac{1}{8} (t - \pi) \sin(4t) U(t - \pi) + \frac{1}{4} \sin(4t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8} t \sin(4t) + \frac{1}{4} \sin(4t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{2+\pi}{8} \sin(4t) & \text{falls } t > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

◇

2–52 Beispiel : Ein gedämpftes Federsystem genügt der Gleichung

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$$

wobei α und β positive Konstanten sind. Somit gilt

$$s^2 Y - s y_0 - y_1 + 2\alpha s Y - 2\alpha y_0 + (\alpha^2 + \beta^2)Y = 0$$

oder auch

$$Y(s) = \frac{k_0 + k_1 s}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Daraus können wir bereits ablesen, dass die Lösung von der Form

$$y(t) = e^{-\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2 sein muss. Die Lösung fällt exponentiell ab.

Nun wird diesem Federsystem nach der Zeit T ein Kraftstoss von gegebener Stärke A gegeben.

$$f(t) = A \delta(t - T) \quad , \quad F(s) = A e^{-sT}$$

Das System ist nun beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2)y = A f(t)$$

Das führt auf die Laplacetransformierte

$$Y(s) = \frac{k_0 + k_1 s}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + A e^{-sT} \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Zuerst untersuchen wir nur den zweiten Term

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-sT} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] = U(t - T) \left(e^{-\alpha(t-T)} \sin(\beta(t - T)) \right)$$

Somit gilt

$$y(t) = e^{-\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) + U(t - T) \frac{A}{\beta} e^{-\alpha(t-T)} \sin(\beta(t - T))$$

für geeignete Konstanten c_1 und c_2 , die aus Anfangsbedingungen zu bestimmen wären. ◇

2–53 Beispiel : Nun wird dem obige Federsystem periodisch (Periode T) ein Kraftstoss von gegebener Stärke A gegeben. Zu bestimmen ist das Verhalten des Systems nach langer Zeit. Dazu definieren wir die T -periodische Funktion

$$f(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Die Laplace-Transformierte $F(s)$ kann bestimmt werden als

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{A}{1 - e^{-sT}}$$

Das System ist nun beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2)y = f(t)$$

Das führt auf die Laplacetransformierte

$$Y(s) = \frac{k_0 + k_1 s}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A}{1 - e^{-sT}} \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Der Lösungsbeitrag des ersten Terms fällt exponentiell ab. Somit müssen wir für die hier gestellte Frage nur den zweiten Term berücksichtigen. Die Lösung muss T -periodisch sein und somit müssen wir nur die Werte $0 < t < T$ untersuchen. Mit Hilfe des Faltungssatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 - e^{-sT}} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] = \delta(t) * (e^{-\alpha t} \sin(\beta t)) \\ &= \int_0^t \delta(t - \tau) \left(e^{-\alpha(\tau)} \sin(\beta(\tau)) \right) d\tau = e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$y(t) = \frac{A}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{für } 0 < t < T$$

und diese Funktion muss periodisch fortgesetzt werden. \diamond

2.5 Systeme von Gleichungen

Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man auch Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen.

2–54 Beispiel : Betrachten Sie das einfache System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn, gezeigt in Abbildung 2.8. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$

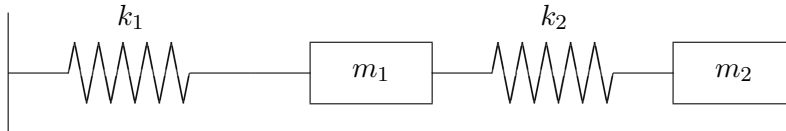


Abbildung 2.8: System von zwei Massen und Federn

der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Kraft f der Form

$$f(t) = A \cos(\omega t).$$

Aus der Physik (Mechanik) weiss man, dass die Grössen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ das folgende System von Differentialgleichungen lösen müssen.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Durch Laplacetransformation $X_i = \mathcal{L}[x_i]$ wird daraus

$$\begin{aligned} m_1 (s^2 X_1 - s x_1(0) - \dot{x}_1(0)) &= -k_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_1) + F(s) \\ m_2 (s^2 X_2 - s x_2(0) - \dot{x}_2(0)) &= -k_2 (X_2 - X_1) \end{aligned}$$

d.h. ein System von linearen Gleichungen für X_1 und X_2 .

Als etwas konkreteres Beispiel betrachten wir eine Anordnung mit den folgenden Daten

$$k_1 = 6 \quad , \quad k_2 = 4 \quad , \quad m_1 = m_2 = 1 \quad \text{und} \quad f(t) = 0$$

mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_1(0) = 1 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = -1$$

Das führt auf das System

$$\begin{aligned} s^2 X_1 - 1 &= -6 X_1 + 4 (X_2 - X_1) \\ s^2 X_2 + 1 &= -4 (X_2 - X_1) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (s^2 + 10) X_1 - 4 X_2 &= 1 \\ -4 X_1 + (s^2 + 4) X_2 &= -1 \end{aligned}$$

Standardverfahren führen auf die Lösungen

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} \\ X_2(s) &= \frac{-s^2 - 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der inversen Laplacetransformation kann man nun die ursprünglichen Funktionen bestimmen. Dies sei am Beispiel $x_1(t)$ illustriert. Ein Partialbruchansatz zeigt

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{A s + B}{s^2 + 2} + \frac{C s + D}{s^2 + 12}$$

die zu lösende Gleichung ist also

$$s^2 = (A s + B)(s^2 + 12) + (C s + D)(s^2 + 2)$$

Mit $s = i\sqrt{2}$ wird daraus

$$-2 = (i A \sqrt{2} + B)(-2 + 12) + 0 = i 10 \sqrt{2} A + 10 B$$

und somit $A = 0$ und $B = -1/5$.

Mit $s = i\sqrt{12}$ wird daraus

$$-12 = 0 + (i C \sqrt{12} + D)(-12 + 2) + 0 = -i 10 \sqrt{12} C - 10 D$$

und somit $C = 0$ und $D = 6/5$.

Aus diesen Rechnungen folgt

$$X_1(s) = \frac{-1}{5} \frac{1}{s^2 + 2} + \frac{6}{5} \frac{1}{s^2 + 12}$$

und somit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{-1}{5} \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} + \frac{6}{5} \frac{\sin(\sqrt{12}t)}{\sqrt{12}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{10} \sin(\sqrt{12}t) \end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung erhält man

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5} \sin(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{3}}{10} \sin(\sqrt{12}t)$$

◇

2.6 Aufgaben

• Aufgabe 2-1:

Bestimmen Sie die Laplacetransformationen der folgenden Funktionen mit Hilfe der Definition durch ein uneigentliches Integral.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq 2 \\ 0 & \text{falls } t > 2 \end{cases} & \text{(b)} & f(t) = e^{t+7} \\ \text{(c)} & f(t) = t e^{4t} & \text{(d)} & f(t) = e^{-t} \sin t \\ \text{(e)} & f(t) = t \cos t \end{array}$$

• Aufgabe 2-2:

Verwenden Sie eine Tabelle von elementaren Laplacetransformationen und elementare Algebra um die Laplacetransformationen der folgenden Funktionen zu bestimmen.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(t) = t^5 & \text{(b)} & f(t) = 4t - 10 \\ \text{(c)} & f(t) = t^2 + 6t - 3 & \text{(d)} & f(t) = (t+1)^3 \\ \text{(e)} & f(t) = 4t^2 + \sin(3t) & \text{(f)} & f(t) = \sinh t \\ \text{(g)} & f(t) = t \sinh t & \text{(h)} & f(t) = t^2 \sinh t \\ \text{(i)} & f(t) = \cos^2 t & \text{(j)} & f(t) = \cos t \cos(2t) \end{array}$$

Tipp für die beiden letzten Teilprobleme: geeignete trigonometrische Identitäten verwenden.

Kontrollieren Sie die obigen Aufgaben mit Hilfe von technischen Hilfsmitteln.

• Aufgabe 2-3:

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Tabelle

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3} \right] & \text{(b)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4} \right] \\ \text{(c)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-3)^4} \right] & \text{(d)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{4s+1} \right] \\ \text{(e)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s-2} \right] & \text{(f)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s^2+49} \right] \\ \text{(g)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s^2-49} \right] & \text{(h)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5s}{s^2+49} \right] \\ \text{(i)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5s}{s^2-49} \right] \end{array}$$

Kontrollieren Sie die obigen Aufgaben mit Hilfe von technischen Hilfsmitteln.

• Aufgabe 2-4:

Bestimmen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+s^2}{s(s-1)(s+1)(s-\pi)} \right] & \text{(b)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} \right] \\ \text{(c)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s^2-4)(s+5)} \right] & \text{(d)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4-9} \right] \\ \text{(e)} & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right] \end{array}$$

Kontrollieren Sie die obigen Aufgaben mit Hilfe von technischen Hilfsmitteln.

• Aufgabe 2-5:

Finden Sie in **Ihrer** Formelsammlung

- (a) Die Tabelle der Laplacetransformationen.
- (b) Die Tabelle der inversen Laplacetransformationen.

(c) Die Liste der Eigenschaften der Laplacetransformationen:

- Transformation von Ableitungen
- Ableitungen einer Transformation
- Verschiebungssätze
- Grenzwertsätze
- Faltungssatz
- Transformationen von stückweise definierten Funktionen
- Transformationen von periodischen Funktionen

• **Aufgabe 2-6:**

Calculer les expressions suivantes

$$A(s) = \mathcal{L}[t^2 - t \cdot \cos(3t)](s)$$

$$B(s) = \mathcal{L}[e^{-3t} t^4](s)$$

$$C(s) = \mathcal{L}[t U(t-2)](s)$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s+2)}\right](t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s-1)^2 + 9}\right](t)$$

• **Aufgabe 2-7:**

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

(a) $y(t) = t^2 \sin(2t)$

(b) $y(t) = e^{-2t} U(t-3)$

(c) $y(t) = (t+3)^2$

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$). Montrer les pas intermédiaires.

(d) $Y(s) = \frac{s-4}{s^2 + 2s + 6}$

(e) $Y(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$

• **Aufgabe 2-8:**

Calculer les expressions suivantes

$$A(s) = \mathcal{L}[t \cdot \sinh(3t)](s)$$

$$B(s) = \mathcal{L}[e^{-3t} \cos(2t)](s)$$

$$C(s) = \mathcal{L}[e^{-3t} U(t-2)](s)$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s+1)(s-4)}\right](t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s-2)^2 + 25}\right](t)$$

• **Aufgabe 2-9:**

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$A(s) = \mathcal{L}[2t \cdot \cosh(3t)](s)$$

$$B(s) = \mathcal{L}[e^{2t} t^4](s)$$

$$C(s) = \mathcal{L}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) U(t-1)\right](s)$$

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)(s+3)}\right](t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s}{(s+2)^2 + 16}\right](t)$$

• **Aufgabe 2-10:**

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

(a) $f(t) = (t-1)^2$

(b) $g(t) = e^{-3t} \cos(\pi t)$

(c) $H(s) = \frac{s+3}{s(s-2)}$

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$). Montrer les pas intermédiaires.

(d) $K(s) = \frac{s}{(s+3)^3}$

(e) $L(s) = \frac{s-3}{s^2 + 2s + 4}$

• Aufgabe 2-11:

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$). Die Rechnungen sind zu zeigen.

(a) $y(t) = e^{3t} \sin(4t)$

(b) $y(t) = e^{-4t} U(t-3)$

(c) $y(t) = (t+2)^3$

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$). Montrer les pas intermédiaires.

(d) $Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+7s+12)}$

(e) $Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2+4}$

• Aufgabe 2-12:

Berechnen Sie

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+4} \right]$$

mit Hilfe des Faltungssatzes.

• Aufgabe 2-13:

Finden Sie für die folgenden Ausdrücke die Laplacetransformation $Y(s)$ (resp. die ursprüngliche Funktion $y(t)$)

(a) $y(t) = e^{-3t} \cos(2t)$

(b) $y(t) = e^{2t} U(t-1)$

(c) $Y(s) = \frac{s}{(s-2)^2+1}$

Pour les expressions suivantes trouver la transformation de Laplace $Y(s)$ (resp. la fonction originale $y(t)$)

(d) $Y(s) = \frac{s}{(s-2)^2+1}$

(e) $y(t) = (t-2)^3$

(f) $Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}$

• Aufgabe 2-14:

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\mathcal{L}[t \cos(2t) - e^{3t}](s)$

(b) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s^2}{(s+1)(s-2)(s+3)} \right]$

(c) Sei $f(t) = (t-1)U(t-3)$. Berechne $F(s)$

(d) Sei $f(t) = \cos(at) \cos(bt)$ mit $a \neq b$. Berechne $F(s)$. Tip: Trigonometrie

(e) $\mathcal{L}^{-1} \left[e^{-2s} \frac{2}{s^2+6s+13} \right]$

• Aufgabe 2-15:

Verwenden Sie die Methode der Partialbruchzerlegung um die ursprüngliche Funktion aus den gegebenen Laplacetransformationen zu bestimmen. Die Rechnungen sind zu zeigen.

(a) $F(s) = \frac{s+3}{s(s-2)}$

(b) $G(s) = \frac{s}{(s+3)^3}$

(c) $H(s) = \frac{s-3}{(s+2)(s^2+2s+4)}$

Utiliser la méthode de fractions partielles pour trouver les fonctions originales des transformations ci-dessous. Montrer les calculs.

• Aufgabe 2-16:

Für eine positive Konstante a sei die Funktion $f(t)$ gegeben durch

Pour une constante a examiner la fonction $f(t)$ donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \cos(at) & \text{für/pour } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2a} \\ 0 & \text{für/pour } \frac{\pi}{2a} < t \end{cases}$$

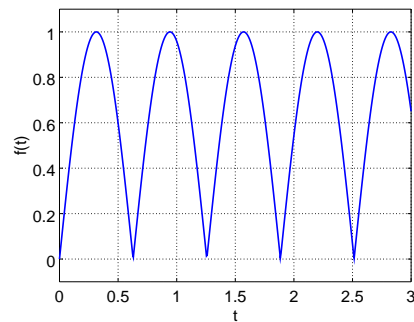
- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion
- (b) Berechnen Sie $\mathcal{L}[f]$ mit Hilfe der Definition der Laplacetransformation (Integral).
- (c) Berechnen Sie $\mathcal{L}[f]$, indem Sie die Laplacetransformationen von $\cos(at)$, $\sin(at)$ und Rechenregeln verwenden.

• **Aufgabe 2–17:**

Untersuchen Sie die Funktion $f(t) = |\sin(5t)|$. Der Graph der Funktion ist rechts gegeben. Examiner la fonction $f(t) = |\sin(5t)|$, le graphe se trouve à droite.

Verwenden Sie / Utiliser

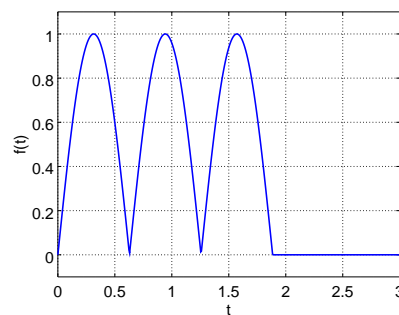
$$\mathcal{L}[|\sin t|](s) = \frac{(1 + e^{-\pi s})}{(1 - e^{-\pi s})} \frac{1}{s^2 + 1}$$



- (a) Bestimmen Sie $F(s)$.
- (b) Stellen Sie ein eigentliches Integral auf, mit dessen Hilfe $F(s)$ auch bestimmt werden könnte. Das Integral ist nicht zu berechnen.
- (c) Bestimmen Sie die Laplacetransformation $G(s)$ der unten gezeigten Funktion $g(t)$. Das Resultat ist nicht zu vereinfachen.

- (a) Dessiner le graphe de cette fonction.
- (b) Trouver $\mathcal{L}[f]$ à l'aide de la définition de la transformation de Laplace (intégral).
- (c) Trouver $\mathcal{L}[f]$ à l'aide des règles de calcul et avec les transformations des fonctions $\cos(at)$ et $\sin(at)$.

- (a) Trouver $F(s)$.
- (b) Donner une intégrale propre qui permet de trouver $F(s)$. Ne calculer pas l'intégrale.
- (c) Calculer la transformation de Laplace $G(s)$ de la fonction $g(t)$ ci-dessous. Pas nécessaire de simplifier le résultat.



• **Aufgabe 2–18:**

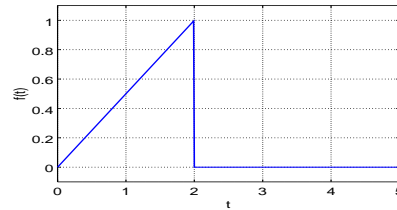
Bestimmen Sie die Funktion $f(t)$ falls

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 13}$$

• **Aufgabe 2–19:**

Untersuchen Sie die rechtsstehende Funktion $f(t)$ und die entsprechende Laplacetransformation $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

$$f(t) = \begin{cases} t/2 & \text{für/pour } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{für/pour } 2 \leq t \end{cases}$$



Examiner la fonction $f(t)$ montrée à droite et sa transformation de Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Berechnen Sie $F(s)$ mit Hilfe der Definition der Laplacetransformation als Integral.</p> <p>(b) Schreiben Sie die Funktion $f(t)$ als Summe und Produkt von elementaren Funktionen und Schrittfunktionen. Bestimmen Sie $F(s)$ auch aufgrund dieser Rechnung.</p> <p>(c) Die obige Funktion wird 10-periodisch fortgesetzt zur neuen Funktion $g(t)$, d.h. nach 10, 20, 30, ... Zeiteinheiten wird das Rampensignal jeweils noch einmal eingeschaltet. Berechnen Sie $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$.</p> | <p>(a) Déterminer $F(s)$ à l'aide de la définition de la transformation de Laplace comme intégrale.</p> <p>(b) Réécrire la fonction $f(t)$ comme somme et produit des fonctions élémentaires et fonction de pas. Puis trouver $F(s)$ aussi à l'aide de ce résultat.</p> <p>(c) La fonction ci-dessus est régénérée avec une période de 10 pour obtenir une nouvelle fonction $g(t)$. Donc le triangle réapparaît aussi après 10, 20, 30, ... unités de temps. Calculer $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$.</p> |
|--|--|

• **Aufgabe 2–20:**

Gegeben ist die Laplacetransformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ durch

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^3}$$

Zu bestimmen ist die Originalfunktion $f(t)$.

• **Aufgabe 2–21:**

Gegeben ist die Laplacetransformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ durch

$$F(s) = \frac{s^2+2}{s^3+4s^2+12s}$$

Zu bestimmen ist die Originalfunktion $f(t)$.

• **Aufgabe 2–22:**

Gegeben ist die Laplacetransformierte $F(s)$ einer Funktion $f(t)$ durch

$$F(s) = \frac{s^3}{(s-1)^5}$$

Zu bestimmen ist die Originalfunktion $f(t)$.

• **Aufgabe 2–23:**

Berechnen Sie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right]$$

• **Aufgabe 2–24:**

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

- (a) $2\ddot{y}(t) - 8y(t) = 0$
 (b) $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec/mit $y(0) = 0$ et/und $y'(0) = 1$
 (c) $y'' - 5y' + 6y = x$ avec/mit $y(0) = 0$

• Aufgabe 2–25:

Trouver toutes les solutions générales des équations différentielles suivantes. Montrer les calculs.

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Zwischenschritte sind zu zeigen.

- (a) $\dot{y} - y = 1$ avec/mit $y(0) = 1$
 (b) $\dot{y} + 4y = e^{-4t}$ avec/mit $y(0) = 2$
 (c) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0$ avec/mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$
 (d) $\ddot{y} + y = \cos(2t)$ avec/mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$
 (e) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$ avec/mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y^{(3)}(0) = 0$

Die Aufgabe kann auch mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten gelöst werden und taucht im Kapitel 1 noch einmal auf als Aufgabe 1–48.

• Aufgabe 2–26:

Finden Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung.

Trouver la solution de l'équation différentielle suivante.

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 1 + \cos(3t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2$$

• Aufgabe 2–27:

Finden Sie die exakte Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe von Laplacetransformationen. Tipp: -2 , $-1/2$ und 1

Trouver la solution exacte de l'équation différentielle ci-dessous à l'aide de la transformation de Laplace.

Tip: -2 , $-1/2$ et 1

$$2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t} \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad y''(0) = 1$$

• Aufgabe 2–28:

Finden Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe von Laplacetransformation.

Trouver la solution de l'équation différentielle suivante à l'aide des transformation de Laplace.

$$\frac{d^3}{dt^3}x - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = e^{-2t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 2$$

Der Taschenrechner darf **nur** für das Bestimmen der Nullstellen eines Polynoms verwendet werden.

Utiliser la calculatrice **seulement** pour trouver les zéros d'un polynôme.

• Aufgabe 2–29:

Untersuchen Sie alle exakten Lösungen der Differentialgleichung mit Hilfe von Laplacetransformationen. Alle Zwischenschritte sind zu zeigen.

Examiner toutes les solutions exactes de l'équation différentielle ci-dessous à l'aide de la transformation de Laplace. Montrer tous les pas intermédiaires.

$$y''' - 3y'' - 4y' + 12y = t \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

- (a) Die Lösung enthält einen Term e^{3t} . Finden Sie die zugehörige Konstante. (a) La solution contient un terme e^{3t} . Trouver la constante pour ce terme.
- (b) Die Lösung enthält ein Polynom. Bestimmen Sie dieses. (b) La solution contient un polynôme, trouver le.

• Aufgabe 2–30:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 3e^{2t} \quad \text{mit/avec} \quad y'''(0) = y''(0) = y'(0) = 0 \quad \text{und/et} \quad y(0) = 7$$

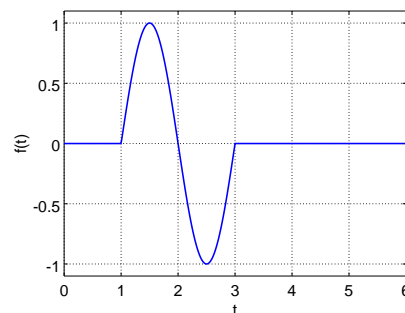
- (a) Bestimmen Sie $Y(s)$ und die exakte **Form** der Partialbruchzerlegung von $Y(s)$.
Tip: $(a^2 - 1) = (a + 1)(a - 1)$ (a) Trouver $Y(s)$ et la **forme** exacte de la décomposition en éléments fractions simples de $Y(s)$.
Tip: $(a^2 - 1) = (a + 1)(a - 1)$
- (b) Geben Sie die exakte Form der Lösung $y(t)$ an. Die Koeffizienten sind **nicht** zu berechnen. (b) Donner la forme exacte de la solution $y(t)$. **On n'a pas** besoin de calculer les coefficients.
- (c) Die Lösung besteht aus 5 Beiträgen. Bestimmen Sie den Beitrag, der am schnellsten divergiert, inklusive Koeffizient in der Partialbruchzerlegung. (c) La solution consiste de 5 expressions simples. Déterminer le terme qui diverge le plus rapidement, y inclus le coefficient de l'élément en fractions simples.
- (d) Bestimmen Sie ebenso den Beitrag, der am schnellsten gegen 0 konvergiert. (d) De la même façon trouver le terme qui tend vers zéro le plus rapidement.

• Aufgabe 2–31:

Eine Funktion $f(t)$ ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} -\sin(\pi t) & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Graph der Funktion ist rechts gegeben.



- (a) Stellen Sie das Integral für $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ auf. Das Integral ist **nicht** zu berechnen. (a) Calculer $F(s)$ sans intégrales, mais avec l'aide des théorèmes de déplacement et

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

• Aufgabe 2–32:

Untersuchen Sie die rechts gezeigte Funktion $f(t)$.

(a) Schreiben Sie die Laplacetransformation $F(s)$ als Summe von zwei bestimmten Integralen. Die Integrale sind **nicht zu berechnen**.

(b) Schreiben Sie $f(t)$ mit Hilfe der Schrittfunktion von Heaviside.

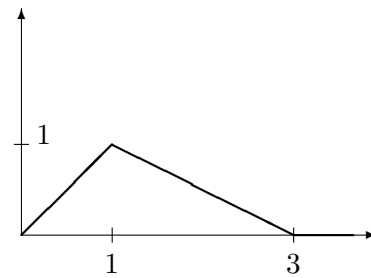
(c) Bestimmen Sie $F(s)$.

Examiner la fonction $f(t)$ ci-dessus.

(a) Écrire la transformation de Laplace $F(s)$ comme somme de deux intégrales définies. **Ne calculer pas** les intégrales.

(b) Écrire la fonction $f(t)$ à l'aide des fonctions de Heaviside.

(c) Trouver $F(s)$.



• **Aufgabe 2–33:**

Finden Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe von Laplacetransformationen. Quelle: [Zill89, §7.4]

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{für } t > 1 \end{cases} \quad \text{mit } y(0) = 0$$

• **Aufgabe 2–34:**

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0 \quad \text{mit } \dot{y}(0) = 0, \quad y(2) = 3$$

Die Lösung ist exakt anzugeben.

• **Aufgabe 2–35:**

Lösen Sie das Randwertproblem mit Hilfe von Laplacetransformationen.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \quad \text{mit } \dot{y}(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

Die Lösung ist exakt anzugeben.

• **Aufgabe 2–36:**

Finden Sie die exakte Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= 2x - y \\ \frac{d}{dt} y &= x + 2y \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und $y(0) = 0$. Verwenden Sie Laplacetransformationen.

• **Aufgabe 2–37:**

Examiner le système des équations

Untersuchen Sie das folgende System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -ax(t) - by(t) + Ce^{-t} \end{aligned} \quad \text{avec/mit} \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

- (a) Résoudre pour $X(s)$ (indépendante de $Y(s)$). (a) Bestimmen Sie $X(s)$ (unabhängig von $Y(s)$).
- (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide de la solution $x_p(t)$ ci-dessous. (b) Bestimmen Sie die Werte von a und b mit Hilfe der untenstehenden Lösung $x_p(t)$.
- (c) Déterminer la valeur de la constante C . (c) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten C .

$$x_p(t) = e^{-3t} (A \cos(2t) + B \sin(2t)) + e^{-t}$$

• Aufgabe 2–38:

Ein schwingendes, gedämpftes Federsystem wird beschrieben durch die Gleichung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = f(t) \quad \text{und} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Als externe Kraft $f(t)$ wird zu jedem ganzzahligen Vielfachen von T Zeiteinheiten ein Kraftstoß der Stärke 1 (Dirac–Delta–Funktion) angewendet. Die Laplacetransformation $F(s)$ ist somit

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

- (a) Verwenden Sie die ersten drei Terme der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1 - e^{-sT}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}$$

um eine Approximation der Lösung $y(t)$ zu finden.

- (b) Finden Sie eine Reihenentwicklung der exakten Lösung $y(t)$.
- (c) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ den Wert von $y(nT)$ als Summe von endlich vielen Termen.

• Aufgabe 2–39:

Für die Spannung $y(t)$ über einem RC -Glied gilt die Differentialgleichung

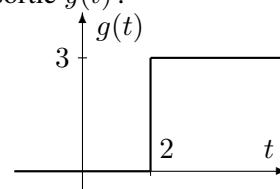
Pour la tension $y(t)$ sur un élément RC on trouve l'équation différentielle

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = g(t)$$

Hierbei ist $g(t)$ die unten gezeigte Eingangsspannung. Zur Zeit $t = 0$ sei $y(0) = 1$. Zu untersuchen ist die resultierende Ausgangsspannung $y(t)$.

La tension d'entrée $g(t)$ est montrée ci-dessous. Pour le temps initial $t = 0$ on a $y(0) = 1$. Examiner la tension de sortie $y(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls/si } t \leq 2 \\ 3 & \text{falls/si } t > 2 \end{cases}$$



- (a) Berechnen Sie $y(t)$ mit Hilfe von Laplacetransformationen. (a) Calculer $y(t)$ à l'aide des transformations de Laplace.
- (b) Bestimmen Sie $y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ (b) Calculer $y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

• Aufgabe 2–40:

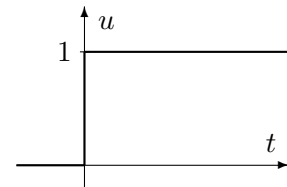
Für die Spannung $y(t)$ über einem RC -Glied gilt die Differentialgleichung

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

Hierbei ist $u(t)$ eine bekannte Eingangsspannung. Zur Zeit $t = 0$ sei $y(0) = 0$. Zu untersuchen ist die resultierende Ausgangsspannung $y(t)$.

(a) Die Eingangsspannung sei die rechts gezeigte Sprungfunktion

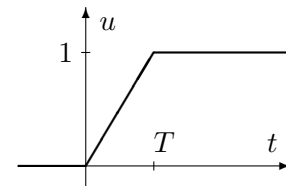
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



- Berechnen Sie $y(t)$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.
- Bestimmen $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
- Nach welcher Zeit t_a erreicht $y(t)$ genau 90% der Maximalspannung?

(b) Die Eingangsspannung sei die rechts gezeigte Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t/T & \text{für } 0 < t \leq T \\ 1 & \text{für } t > T \end{cases}$$



- Berechnen Sie $y(t)$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.
- Bestimmen $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
- Nach welcher Zeit t_b erreicht $y(t)$ genau 90% der Maximalspannung? Sie dürfen davon ausgehen, dass $t_b > T$.

(c) Verifizieren Sie

$$\lim_{T \rightarrow 0+} t_b = t_a$$

• Aufgabe 2–41:

Für die Spannung $y(t)$ über einem RC-Glied gilt die Differentialgleichung

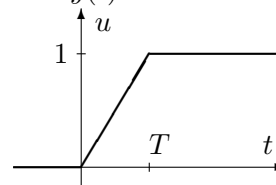
Pour la tension $y(t)$ sur élément RC on trouve l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

Hierbei ist $u(t)$ die unten gezeigte Eingangsspannung. Zur Zeit $t = 0$ sei $y(0) = 0$. Zu untersuchen ist die resultierende Ausgangsspannung $y(t)$.

La tension d'entrée $u(t)$ est montrée ci-dessous. Pour le temps initial $t = 0$ on a $y(0) = 0$. Examiner la tension de sortie $y(t)$.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls/si } t \leq 0 \\ t/T & \text{falls/si } 0 < t \leq T \\ 1 & \text{falls/si } t > T \end{cases}$$



(a) Bestimmen Sie $Y(s)$

(a) Trouver $Y(s)$

(b) Berechnen Sie $y(t)$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.

(b) Calculer $y(t)$ à l'aide des transformations de Laplace.

(c) Bestimmen $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

(c) Calculer $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

(d) Nach welcher Zeit t_a erreicht $y(t)$ genau 90% der Maximalspannung?

(d) Après quel temps t_a la tension $y(t)$ atteint 90% de la tension finale?

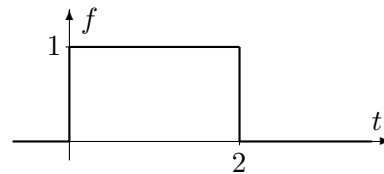
• Aufgabe 2–42:

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) + f(t) \\ x(0) &= 0 \quad y(0) = 1\end{aligned}$$

- Finden Sie ein Gleichungssystem für $X(s)$ und $Y(s)$.
- Berechnen Sie $X(s)$.
- Berechnen Sie $x(t)$.

Examiner les équations différentielles suivantes



- Trouver un système des équations pour $X(s)$ et $Y(s)$.
- Calculer $X(s)$.
- Calculer $x(t)$.

• Aufgabe 2–43:

In der untenstehenden Figur gilt $m = 2$ kg, $k = 50$ N/m und $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Die Funktion $u(t)$ ist bekannt, sie entspricht der Position der beweglichen Wand links.



Dans la figure ci-dessous on a $m = 2$ kg, $k = 50$ N/m et $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. La fonction $u(t)$ est connue, elle donne la position de la paroi mobile à gauche.

- Verwenden Sie das Gesetz von Newton um die Differentialgleichung für $x(t)$ aufzustellen.
 - Verwenden Sie Laplacetransformation um eine Integralformel für $x(t)$ zu finden. Das Integral enthält die Funktion u .
Tipp: Faltung
 - Berechnen Sie $x(t)$ für $t > 2$ für das unten gegebene $u(t)$.
- Utiliser la loi de Newton pour trouver une équation différentielle pour $x(t)$.
 - Utiliser une transformation de Laplace pour trouver une intégrale pour la fonction $x(t)$.
L'intégrale contient la fonction u .
Tip: convolution.
 - Calculer $x(t)$ pour $t > 2$ si $u(t)$ est donné par la fonction ci-dessous.

$$u(t) = 1 - U(t - 2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{falls } t > 2 \end{cases}$$

2.6.1 Lösungen zu einigen Aufgaben
Lösung zu Aufgabe 2–1 :

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq 2 \\ 0 & \text{falls } t > 2 \end{cases}$$

und somit

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^2 1 e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^2 = \frac{-e^{-2s} + 1}{s}$$

(b)

$$f(t) = e^{t+7} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{e^7}{s-1}$$

(c)

$$f(t) = t e^{4t} \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

(d)

$$f(t) = e^{-t} \sin t \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

(e)

$$f(t) = t \cos t \quad \Longrightarrow \quad F(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 2–6 :

$$\begin{aligned} A(s) &= \mathcal{L}[t^2 - t \cdot \cos(3t)](s) = \mathcal{L}[t^2](s) - \mathcal{L}[t \cdot \cos(3t)](s) \\ &= \frac{2}{s^3} + \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 9} = \frac{2}{s^3} + \frac{9 - s^2}{(s^2 + 9)^2} \\ B(s) &= \mathcal{L}[e^{-3t} t^4](s) = \frac{24}{(s+3)^5} \\ C(s) &= \mathcal{L}[t U(t-2)](s) = \mathcal{L}[(t-2) U(t-2) + 2 U(t-2)](s) \\ &= e^{-2s} \frac{1}{s^2} + e^{-2s} \frac{2}{s} = e^{-2s} \frac{1 + 2s}{s^2} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s+3}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + B(s-1)}{(s-1)(s+2)}$$

führt mittels $s = 1$ und $s = -2$ zu $A = \frac{4}{3}$ und $B = \frac{-1}{3}$.

$$\begin{aligned} d(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s+2)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4/3}{s-1}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/3}{s+2}\right](t) = \frac{4}{3} e^t - \frac{1}{3} e^{-2t} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s-1)^2 + 9}\right](t) = \frac{7}{3} e^t \sin(3t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–7 :

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(2t)](s) &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ \mathcal{L}[t \sin(2t)](s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(2t)](s) = -\frac{d}{ds} \frac{2}{s^2 + 4} = +\frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \\ \mathcal{L}[t^2 \sin(2t)](s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t \sin(2t)](s) = -\frac{d}{ds} \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} = -\frac{4(s^2 + 4)^2 - 4s \cdot 2(s^2 + 4) \cdot 2s}{(s^2 + 4)^4} \\ &= \frac{-4(s^2 + 4) + 16s^2}{(s^2 + 4)^3} = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-2t} U(t-3) = e^{-6} e^{-2(t-3)} U(t-3) \\
 Y(s) &= e^{-6} e^{-3s} \mathcal{L}[e^{-2t}](s) = e^{-6} e^{-3s} \frac{1}{s+2}
 \end{aligned}$$

oder auch mit

$$\mathcal{L}[e^{-2t} U(t-3)](s) = \mathcal{L}[U(t-3)](s+2) = e^{-3(s+2)} \frac{1}{s+2}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (t+3)^2 = t^2 + 6t + 9 \\
 Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}
 \end{aligned}$$

(d) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung oder

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{s-4}{s^2+2s+6} = \frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+5} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+\sqrt{5}^2} - \frac{5}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2+\sqrt{5}^2} \\
 y(t) &= e^{-1t} \cos(\sqrt{5}t) - \sqrt{5} e^{-1t} \sin(\sqrt{5}t)
 \end{aligned}$$

(e) Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{s+2}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+B(s-1)}{(s-1)(s+1)} \\
 s+2 &= A(s+1)+B(s-1) \\
 s=1 &: 3 = +A \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2} \\
 s=-1 &: 1 = -B \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2} \\
 Y(s) &= \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} \\
 y(t) &= \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2-8 : Verwende $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und die Rechenregeln für Laplacetransformationen

$$\begin{aligned}
 A(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sinh(3t)](s) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-3)^2} - \frac{1}{(s+3)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(s^2+6s+9) - (s^2-6s+9)}{(s^2-9)^2} = \frac{6s}{(s^2-9)^2} \\
 A(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sinh(3t)](s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{3}{s^2-9} \right) = \frac{3 \cdot 2s}{(s^2-9)^2} = \frac{6s}{(s^2-9)^2} \\
 B(s) &= \mathcal{L}[e^{-3t} \cos(2t)](s) = \mathcal{L}[\cos(2t)](s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} \\
 C(s) &= \mathcal{L}[e^{-3t} U(t-2)](s) = \mathcal{L}[e^{-6} e^{-3(t-2)} U(t-2)](s) = e^{-6} e^{-2s} \frac{1}{s+3}
 \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s-3}{(s+1)(s-4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-4} = \frac{A(s-4)+B(s+1)}{(s+1)(s-4)}$$

führt mittels $s = -1$ und $s = +4$ zu $A = \frac{4}{5}$ und $B = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} d(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s+1)(s-4)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4/5}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/5}{s-4}\right](t) = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{4t} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s-2)^2+25}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-2)+4}{(s-2)^2+25}\right](t) = 2e^{2t}\cos(5t) + \frac{4}{5}e^{2t}\sin(5t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2-9 : Verwende $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und die Rechenregeln für Laplacetransformationen

$$\begin{aligned} A(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[2 \cosh(3t)](s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+3} \right) = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s+3)^2} \\ &= \frac{(s^2+6s+9) + (s^2-6s+9)}{(s^2-9)^2} = \frac{2s^2+18}{(s^2-9)^2} \\ A(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[2 \cosh(3t)](s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{2s}{s^2-9} \right) = -\frac{2 \cdot (s^2-9) - 2s \cdot (2s)}{(s^2-9)^2} = \frac{2s^2+18}{(s^2-9)^2} \\ B(s) &= \mathcal{L}[e^{2t}t^4](s) = \mathcal{L}[t^4](s-2) = \frac{24}{(s-2)^5} \\ C(s) &= \mathcal{L}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)U(t-1)\right](s) = \mathcal{L}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right)U(t-1)\right](s) = e^{-s} \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{4}} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s-3}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3) + B(s-2)}{(s+1)(s-4)}$$

führt mittels $s = +2$ zu $A = \frac{-1}{5}$ und mit $s = -3$ zu $B = \frac{-6}{-5}$.

$$\begin{aligned} d(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)(s+3)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/5}{s-2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6/5}{s+3}\right](t) = \frac{-1}{5}e^{+2t} + \frac{6}{5}e^{-3t} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s}{(s+2)^2+16}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+2)-8}{(s+2)^2+25}\right](t) = 4e^{-2t}\cos(4t) - \frac{8}{4}e^{-2t}\sin(4t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2-10 :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(s) &= \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \\ \text{(b)} \quad G(s) &= \frac{s+3}{(s+3)^2+\pi^2} \\ \text{(c)} \quad H(s) &= \frac{s+3}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} \text{ mit } A = -\frac{3}{2} \text{ und } B = \frac{5}{2} \text{ und somit} \end{aligned}$$

$$h(t) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2t}$$

(d) Entweder mit standard Partialbruchzerlegung

$$K(s) = \frac{s}{(s+3)^3} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{(s+3)^3}$$

und einigen Rechnungen oder einfacher

$$K(s) = \frac{s}{(s+3)^3} = \frac{s+3-3}{(s+3)^3} = \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{3}{(s+3)^3}$$

erhält man

$$k(t) = \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) e^{-3t}$$

(e)

$$L(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+4} = \frac{(s+1)-4}{(s+1)^2+3} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3} - \frac{4}{(s+1)^2+3}$$

$$l(t) = e^{-t} \left(\cos(\sqrt{3}t) - \frac{4}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right)$$

Lösung zu Aufgabe 2–11 :

(a) Verschiebungssatz

$$y(t) = e^{3t} \sin(4t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{(s-3)^2+4^2}$$

(b)

$$y(t) = e^{-4t} U(t-3) = e^{-12} e^{-4(t-3)} U(t-3)$$

$$Y(s) = e^{-12} e^{-3s} \mathcal{L}[e^{-4t}](s) = e^{-12} e^{-3s} \frac{1}{s+4}$$

oder auch mit

$$\mathcal{L}[e^{-4t} U(t-3)](s) = \mathcal{L}[U(t-3)](s-4) = e^{-3(s+4)} \frac{1}{s+4}$$

(c)

$$y(t) = (t+2)^3 = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{6}{s^4} + \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{8}{s}$$

(d) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

$$= \frac{A(s+3)(s+4) + B s(s+4) + C s(s+3)}{s(s+3)(s+4)}$$

$$s+1 = A(s+3)(s+4) + B s(s+4) + C s(s+3)$$

Nun die Nullstellen des Nenners als Werte von s einsetzen

$$s = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{12}$$

$$s = -3 \quad \Rightarrow \quad -2 = -B \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2}{3}$$

$$s = -4 \quad \Rightarrow \quad -3 = C \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{4}$$

Somit ist

$$y(t) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} e^{-3t} - \frac{3}{4} e^{-4t}$$

(e)

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2+4} = \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} + \frac{1}{(s-1)^2+2^2}$$

$$y(t) = e^t \cos(2t) + \frac{1}{2} e^t \sin(2t)$$

Lösung zu Aufgabe 2–12 :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} \frac{1}{s+4}\right] = e^t * e^{-4t} = \int_0^t e^\tau e^{-4(t-\tau)} d\tau = e^{-4t} \int_0^t e^{5\tau} d\tau = \frac{1}{5} (e^t - e^{-4t})$$

Lösung zu Aufgabe 2–13 :

(a)

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 4}$$

(b)

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} U(t-1) = e^2 e^{2(t-1)} U(t-1) \\ Y(s) &= e^2 e^{-s} \mathcal{L}[e^{2t}](s) = e^2 e^{-s} \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

oder auch mit

$$\mathcal{L}[e^{2t} U(t-1)](s) = \mathcal{L}[U(t-1)](s-2) = e^{-(s-2)} \frac{1}{s-2}$$

(c)

$$y(t) = e^{2t} (\cos t + 2 \sin t)$$

(d)

$$\begin{aligned} y(t) &= (t-2)^3 = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 \\ Y(s) &= \frac{6}{s^4} - \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} - \frac{8}{s} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B+Cs}{(s^2+4)} \\ y(t) &= \frac{1}{5} \left(e^t - \cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–14 :

(a)

$$\mathcal{L}[t \cos(2t) - e^{3t}](s) = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s-3} = -\frac{(s^2+4) - 2s^2}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s-3} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s-3}$$

(b) Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{3s^2}{(s+1)(s-2)(s+3)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{A(s-2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s-2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} \end{aligned}$$

$$3s^2 = A(s-2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s-2)$$

$$\text{mit } s = -1 \text{ folgt } 3 = A(-3)2$$

$$\text{mit } s = 2 \text{ folgt } 12 = B3 \cdot 5$$

$$\text{mit } s = -3 \text{ folgt } 27 = C(-2)(-5)$$

Daraus liest man ab, dass $A = -1/2$, $B = 4/5$ und $C = 27/10$ und somit

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^2}{(s+1)(s-2)(s+3)}\right] = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{4}{5} e^{2t} + \frac{27}{10} e^{-3t}$$

(c)

$$\begin{aligned}(t-1)U(t-3) &= (t-3+2)U(t-3) = (t-3)U(t-3) + 2U(t-3) \\ \mathcal{L}[(t-1)U(t-3)] &= e^{-3s}\frac{1}{s^2} + e^{-3s}\frac{2}{s}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\cos(at)\cos(bt) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)t + \cos(a+b)t) \\ F(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+(a-b)^2} + \frac{s}{s^2+(a+b)^2}\right)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+6s+13}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right] = e^{-3t}\sin(2t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{2}{s^2+6s+13}\right] &= e^{-3(t-2)}\sin(2(t-2))U(t-2)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–15 :

(a)

$$\begin{aligned}F(s) = \frac{s+3}{s(s-2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + Bs}{s(s-2)} \\ &\quad \text{mit } s=0 \quad \text{und } s=2 \\ &= \frac{-\frac{3}{2}}{s} + \frac{\frac{5}{2}}{s-2} \\ f(t) &= -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2t}\end{aligned}$$

(b)

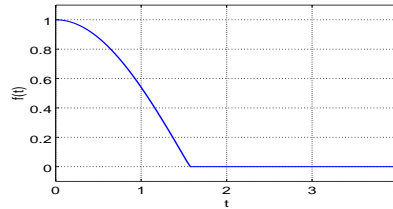
$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{s}{(s+3)^3} = \frac{s+3-3}{(s+3)^3} = \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{3}{(s+3)^3} \\ g(t) &= te^{-3t} - \frac{3}{2}t^2e^{-3t} = e^{-3t}\left(t - \frac{3t^2}{2}\right)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{s-3}{(s+2)(s^2+2s+4)} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+3} = \frac{A(s^2+2s+4) + (Bs+C)(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+4)} \\ s=-2 &\implies -5 = A \cdot 4 \\ s=-1+i\sqrt{3} &\implies -4+i\sqrt{3} = (-B+iB\sqrt{3}+C)(1+i\sqrt{3}) \\ &\implies \begin{aligned} -4 &= -4B+C \\ \sqrt{3} &= C\sqrt{3} \end{aligned} \implies \begin{aligned} B &= \frac{5}{4} \\ C &= 1 \end{aligned} \\ H(s) &= \frac{-5}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{5}{4}\frac{s}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{1}\frac{1}{(s+1)^2+3} \\ &= \frac{-5}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{5}{4}\frac{s+1}{(s+1)^2+3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2+3} \\ h(t) &= \frac{-5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–16 :

- (a) Für den Spezialfall $a = 1$ ergibt sich die untenstehende Figur. Im allgemeinen wird die Funktion $\cos(ax)$ bei der ersten Nullstelle abgeschnitten.



(b)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} e^{-st} \cos(at) dt \\ &= \frac{e^{-st}}{a^2 + s^2} (a \sin(at) - s \cos(at)) \Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{1}{s^2 + a^2} \left(s + a e^{-\frac{\pi s}{2a}} \right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(at) + U\left(t - \frac{\pi}{2a}\right) \sin\left(a\left(t - \frac{\pi}{2a}\right)\right) \\ F(s) &= \frac{s}{s^2 + a^2} + e^{-\frac{\pi s}{2a}} \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–17 :

- (a) Ein Ähnlichkeitssatz und die gegebene Laplacetransformierte ergeben

$$F(s) = \frac{1}{5} \frac{(1 + e^{-\frac{\pi s}{5}})}{(1 - e^{-\pi s/5})} \frac{1}{(\frac{s}{5})^2 + 1} = \frac{(1 + e^{-\pi s/5})}{(1 - e^{-\pi s/5})} \frac{5}{s^2 + 25}$$

- (b) Die Funktion ist $\frac{\pi}{5}$ -periodisch und deshalb

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s/5}} \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin(5t) \cdot e^{-st} dt$$

- (c) Sei $h(t)$ die Funktion, die nur aus dem ersten Bogen der obigen Funktion besteht. Dann ist

$$H(s) = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin(5t) \cdot e^{-st} dt = \frac{5(1 + e^{-\pi s/5})}{s^2 + 25}$$

Die Funktion $g(t)$ besteht aus drei solcher Bögen und kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} g(t) &= h(t) + h\left(t - \frac{\pi}{5}\right) U\left(t - \frac{\pi}{5}\right) + h\left(t - \frac{2\pi}{5}\right) U\left(t - \frac{2\pi}{5}\right) \\ G(s) &= H(s) + e^{-\frac{\pi}{5}s} H(s) + e^{-\frac{2\pi}{5}s} H(s) \\ &= \left(1 + e^{-\frac{\pi}{5}s} + e^{-\frac{2\pi}{5}s}\right) \frac{5(1 + e^{-\pi s/5})}{s^2 + 25} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–18 : Es gilt

$$F(s) = \frac{s}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{(s+3) - 3}{(s+3)^2 + 2^2}$$

und somit

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s+3) - 3}{(s+3)^2 + 2^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+3)^2 + 2^2} \right] \\ &= e^{-3t} \cos(2t) - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin(2t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–19 :

(a)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \frac{-1}{2} e^{-st} \frac{1+st}{s^2} \Big|_{t=0}^\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - e^{-s^2} \frac{1+2s}{s^2} \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{2} - \frac{t}{2} U(t-2) = \frac{t}{2} - \frac{t-2}{2} U(t-2) - U(t-2) \\ F(s) &= \frac{1}{2s^2} - e^{-2s} \frac{1}{2s^2} - e^{-2s} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-2s} - 2s e^{-2s}}{2s^2} \end{aligned}$$

Die Resultate der ersten beiden Teilaufgaben stimmen überein.

(c) Da das „neue“ Signal 10-periodisch ist, gilt

$$G(s) = \frac{1}{1 - e^{-10s}} F(s)$$

Lösung zu Aufgabe 2–20 : Dazu verwendet man wieder eine Partialbruchzerlegung. Die Funktion $F(s)$ kann umgeschrieben werden zu

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_3}{(s+2)^3}$$

für geeignete reelle Konstanten A_1, A_2, B_1, B_2 und B_3 . Die zu lösende Gleichung ist

$$s+1 = A_1 s(s+2)^3 + A_2 (s+2)^3 + B_1 s^2 (s+2)^2 + B_2 s^2 (s+2) + B_3 s^2$$

Dann kann man folgendermassen vorgehen:

1. setze $s = 0$ und $s = -2$ um A_2 und B_3 zu bestimmen.
2. Leite beide Seiten der Gleichung ab, setze $s = 0$ und $s = -2$ um A_1 und B_2 zu bestimmen.
3. nun stehen (mindestens) zwei Rechenwege zur Verfügung:
 - wähle einen beliebigen Wert für s (ausser 0 und -2), um die letzte Konstante B_1 zu erhalten.
 - statt des obigen Schritts kann auch die zweite Ableitung der obigen Gleichung bei $s = -2$ verwendet werden, um B_1 zu berechnen.

Man erhält

$$A_1 = \frac{-1}{16}, \quad A_2 = \frac{1}{8}, \quad B_1 = \frac{1}{16}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{-1}{4}$$

Das Resultat der Rechnung kann auch mit *Octave* kontrolliert werden.

Octave

```
[R,P,K,E] = residue([1 1],[1 6 12 8 0 0])
-->
R =    6.2500e-02    1.1102e-16   -2.5000e-01   -6.2500e-02    1.2500e-01

P =   -2.00000    -2.00000    -2.00000         0.00000         0.00000
K = [] (0x0)
E =      1          2          3          1          2
```

Somit ist die Originalfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_3}{(s+2)^3}\right] \\
 &= A_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + A_2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + B_1 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + B_2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] + \frac{B_3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^3}\right] \\
 &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} + 0te^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–21 : Dazu verwendet man eine Partialbruchzerlegung. Man weiss, dass die Funktion $F(s)$ umgeschrieben werden kann zu

$$F(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + 12s} = \frac{s+1}{s((s+2)^2 + 8)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+2)^2 + 8}$$

für geeignete reelle Konstanten A , B und C . Die zu lösende Gleichung ist

$$s^2 + 2 = A((s+2)^2 + 8) + (Bs+C)s$$

Setzt man $s = 0$, so folgt sofort $A = 1/6$. Um die beiden anderen Konstanten zu bestimmen, verwenden wir die **komplexe Nullstelle** $s = -2 + i\sqrt{8}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 (-2 + i\sqrt{8})^2 + 2 &= 0 + (B(-2 + i\sqrt{8}) + C)(-2 + i\sqrt{8}) \\
 4 - i4\sqrt{8} - 8 + 2 &= B(4 - i4\sqrt{8} - 8) + C(-2 + i\sqrt{8}) \\
 -2 - i4\sqrt{8} &= -4B - 2C + i(-4\sqrt{8}B + \sqrt{8}C)
 \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick ist dies nur eine Gleichung für die beiden Unbekannten B und C . Verwendet man nun die Tatsache, dass die beiden Konstanten reell sind, so kann diese komplexe Gleichung in Real- und Imaginär-Teil aufgespalten werden. Man erhält so zwei reelle Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 -2 &= -4B - 2C \\
 -4\sqrt{8} &= -4\sqrt{8}B + \sqrt{8}C
 \end{aligned}$$

Eine leichte Vereinfachung liefert

$$\begin{aligned}
 1 &= 2B + C \\
 4 &= 4B - C
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist gegeben durch $B = 5/6$ und $C = -2/3$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+2)^2 + 8} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{1}{s} + \frac{5}{6} \frac{s}{(s+2)^2 + 8} - \frac{2}{3} \frac{1}{(s+2)^2 + 8} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{1}{s} + \frac{5}{6} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 8} - \left(\frac{2}{3} + \frac{10}{6}\right) \frac{1}{(s+2)^2 + 8} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{1}{s} + \frac{5}{6} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 8} - \frac{7}{3} \frac{1}{(s+2)^2 + 8}
 \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $f(t)$ gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} e^{-2t} \cos(\sqrt{8}t) - \frac{7}{3\sqrt{8}} e^{-2t} \sin(\sqrt{8}t)$$

Dies stimmt mit dem Resultat von *Octave* überein.

Octave			
[R,P,K,E] = residue([1 0 2],[1 4 12 0])			
-->			
R =	0.41667 + 0.41248i	0.41667 - 0.41248i	0.16667 + 0.00000i
P =	-2.00000 + 2.82843i	-2.00000 - 2.82843i	0.00000 + 0.00000i
K =	[] (0x0)		
E =	1	1	1

Die Rechnungen bei der Rücktransformation sind etwas einfacher, falls man den äquivalenten Ansatz

$$F(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + 12s} = \frac{s + 1}{s((s + 2)^2 + 8)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s + 2) + C}{(s + 2)^2 + 8}$$

verwendet.

Lösung zu Aufgabe 2-22 :

$$f(t) = e^t \left(t + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{24} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 2-23 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \right](t) &= U(t - \pi) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right](t - \pi) \\ &= U(t - \pi) \sin(t - \pi) \\ &= -U(t - \pi) \sin(t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2-24 :

(a) Die charakteristische Gleichung ist $2\lambda^2 - 8 = 0$ mit den beiden reellen Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm 2$ und somit

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

(b) Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ mit den beiden reellen Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Somit ist

$$y(t) = y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

Die beiden Anfangsbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $c_1 = -1$ und $c_2 = 1$. Somit ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = -e^{2t} + e^{3t}$$

- (c) Die charakteristische Gleichung stimmt mit der vorangehenden Teilaufgabe überein. Somit ist die Lösung des homogenen Problems bereits berechnet. Der Ansatz für eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = ax + b$. Die Koeffizienten a und b werden bestimmt durch einsetzen in die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= x \\ 0 - 5a + 6(ax + b) &= 1x + 0 \\ \text{Somit gilt} \quad a &= \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad b = \frac{5}{6}a = \frac{5}{36} \\ y_p(x) &= \frac{1}{6}x + \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$$

Da nur eine Anfangsbedingung vorliegt können nicht beide Konstanten bestimmt werden, aber eine der beiden kann eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = c_1 + c_2 + \frac{5}{36} \\ c_2 &= -c_1 - \frac{5}{36} \end{aligned}$$

und somit

$$y(x) = c_1 e^{2t} - (c_1 + \frac{5}{36}) e^{3t} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}$$

Lösung zu Aufgabe 2–25 : Quelle: [Zill89, §7.4]

(a)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) - y(t) &= 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \\ sY(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1 + \frac{1}{s}}{s - 1} = \frac{s + 1}{s(s - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 1} \\ s + 1 &= A(s - 1) + Bs \\ s = 1 &\implies B = 2 \\ s = 0 &\implies A = -1 \\ Y(s) &= \frac{-1}{s} + \frac{2}{s - 1} \\ y(t) &= -1 + 2e^t \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + 4y(t) &= e^{-4t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2 \\ sY(s) - 2 + 4Y(s) &= \frac{1}{s + 4} \\ Y(s) &= \frac{2 + \frac{1}{s+4}}{s + 4} = \frac{2(s + 4) + 1}{(s + 4)^2} = \frac{2}{s + 4} + \frac{1}{(s + 4)^2} \\ y(t) &= 2e^{-4t} + te^{-4t} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) &= 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \\
s^2 Y(s) - s + 5sY(s) - 5 + 4Y(s) &= 0 \\
Y(s) &= \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{2s+10}{(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1} \\
s+5 &= A(s+1) + B(s+4) \\
s=-1 &\implies 4 = B \cdot 3 \\
s=-4 &\implies 1 = A(-3) \\
Y(s) &= \frac{-1}{3} \frac{1}{s+4} + \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} \\
y(t) &= \frac{-1}{3} e^{-4t} + \frac{4}{3} e^{-t}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + y(t) &= \cos(2t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1 \\
s^2 Y(s) - s + 1 + Y(s) &= \frac{s}{s^2+4} \\
Y(s) &= \frac{s-1}{(s^2+1)} + \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}
\end{aligned}$$

Die Laplace-Rücktransformation des ersten Bruches ist einfach, für den zweiten kann eine Tabelle oder Partialbruchzerlegung verwendet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \\
s &= (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) \\
s = +i &\implies i = (iA+B)3 \implies A = \frac{1}{3}, \quad B = 0 \\
s = +i2 &\implies i2 = (i2C+D)(-3) \implies C = \frac{-1}{3}, \quad D = 0 \\
\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun sofort

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+4} \\
y(t) &= \cos(t) - \sin(t) + \frac{1}{3} \cos(t) - \frac{1}{3} \cos(2t) \\
y(t) &= \frac{4}{3} \cos(t) - \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
y^{(4)}(t) - y(t) &= 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = -1 \text{ und } y^{(3)}(0) = 0 \\
s^4 Y(s) - s^3 + s - Y(s) &= 0 \\
Y(s) &= \frac{s^3-s}{s^4-1} = \frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{s}{s^2+1} \\
y(t) &= \cos(t)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–26 : Die Laplacetransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} s^2 Y - 2sY - 3Y &= (s+2) - 2 + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+9} \\ (s-3)(s+1)Y &= s + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+9} \\ (s-3)(s+1)Y &= \frac{(s^2+1)(s^2+9) + s^2}{s(s^2+9)} \\ Y &= \frac{(s^2+1)(s^2+9) + s^2}{(s-3)(s+1)s(s^2+9)} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir Partialbruchzerlegungen um die Rücktransformation auszuführen

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(s^2+1)(s^2+9) + s^2}{(s-3)(s+1)s(s^2+9)} \\ &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+9} \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} s=3 \quad 189 &= A \cdot 216 & A &= \frac{7}{8} \\ s=-1 \quad 21 &= B \cdot 40 & B &= \frac{21}{40} \\ s=0 \quad 9 &= C \cdot (-27) & C &= \frac{-1}{3} \\ s=i3 \quad -9 &= (3iD+E)(18-36i) & D &= \frac{-1}{15} \quad E = \frac{-1}{10} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{7}{8(s-3)} + \frac{21}{40(s+1)} + \frac{-1}{3s} + \frac{-s}{15(s^2+9)} + \frac{-1}{10(s^2+9)} \\ x(t) &= \frac{7}{8}e^{3t} + \frac{21}{40}e^{-t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15}\cos(3t) - \frac{1}{30}\sin(3t) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–27 : Quelle:[Zill89, §7.4 Problem 15]

Mit Hilfe der Rechenregeln für Laplacetransformationen und der Beziehung

$$2s^3 + 3s^2 - 3s - 2 = (s+2)(2s+1)(s-1)$$

sieht man, dass

$$\begin{aligned} 2s^3 Y(s) - 2 + 3s^2 Y^2(s) - 3sY(s) - 2Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{2s^3 + 3s^2 - 3s - 2} \left(2 + \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{1/2}{(s+2)(s+1/2)(s-1)} \frac{2s+3}{s+1} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir eine Partialbruchzerlegung, zu lösen ist die Gleichung

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1/2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$$

oder auch

$$\begin{aligned} s + 3/2 &= A(s+1/2)(s-1)(s+1) + B(s+2)(s-1)(s+1) \\ &\quad + C(s+2)(s+1/2)(s+1) + D(s+2)(s+1/2)(s-1) \end{aligned}$$

In dieser Gleichung setzt man nun der Reihe nach $s = -2$, $s = -1/2$, $s = 1$ und $s = -1$ und erhält

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2} &= A \frac{-9}{2} \\ 1 &= B \frac{-9}{8} \\ \frac{5}{2} &= C \cdot 9 \\ \frac{1}{2} &= D \cdot 1\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1/2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} = \frac{1/9}{s+2} - \frac{8/9}{s+1/2} + \frac{5/18}{s-1} + \frac{1/2}{s+1} \\ y(t) &= \frac{1}{9} e^{-2t} - \frac{8}{9} e^{-t/2} + \frac{5}{18} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–28 : Die Laplacetransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}s^3 X - 2 - 2s^2 X - sX + 2X &= \frac{1}{s+2} \\ X(s^3 - 2s^2 - s + 2) &= \frac{1}{s+2} + 2 = \frac{2s+5}{s+2} \\ X &= \frac{2s+5}{(s+2)(s^3 - 2s^2 - s + 2)}\end{aligned}$$

Nun verwenden wir eine Partialbruchzerlegung um die Rücktransformation auszuführen.

$$\begin{aligned}\frac{2s+5}{(s+2)(s^3 - 2s^2 - s + 2)} &= \frac{2s+5}{(s+2)(s+1)(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2} \\ s = -2 \quad -4 + 5 &= A(-1)(-3)(-4) \quad A = \frac{-1}{12} \\ s = -1 \quad -2 + 5 &= B(1)(-2)(-3) \quad B = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ s = 1 \quad 2 + 5 &= C(3)(2)(-1) \quad C = \frac{-7}{6} \\ s = 2 \quad 4 + 5 &= D(4)(3)(1) \quad D = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{-1}{12} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{7}{6} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2} \\ x(t) &= -\frac{1}{12} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{7}{6} e^t + \frac{3}{4} e^{2t}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–29 : Der Anfangswert $y''(0) = a$ ist nicht bekannt. Mit Hilfe der Rechenregeln für Laplacetransformationen führt das zu

$$\begin{aligned}(s^3 - 3s^2 - 4s + 12) Y(s) &= \frac{1}{s^2} + a \\ (s-2)(s+2)(s-3) Y(s) &= \frac{1 + a s^2}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1 + a s^2}{(s-2)(s+2)(s-3) s^2}\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung dieses Ausdrucks ist

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2}$$

Das führt auf die beiden Zähler

$$1 + a s^2 = A(s+2)(s-3)s^2 + B(s-2)(s-3)s^2 + C(s-2)(s+2)s^2 + D(s-2)(s+2)(s-3)s + E(s-2)(s+2)(s-3)$$

- (a) Der Term zu e^{3t} entspricht der Konstanten C . Um diese zu bestimmen kann oben $s = +3$ gesetzt werden und man erhält

$$1 + 9a = C(3-2)(3+2)3^2 = 45C$$

und somit den Lösungsanteil $\frac{1+9a}{45} e^{3t}$.

- (b) D und E bestimmen mittels $s = 0$ setzen, Ableiten und anschliessend wieder $s = 0$ setzen. Das führt auf

$$\begin{aligned} 1 + a s^2 &= \dots + D(s-2)(s+2)(s-3)s + E(s-2)(s+2)(s-3) \\ 1 &= \dots + E(-2)(+2)(-3) \\ 0 &= \dots + D(-2)(+2)(-3) + E(-4+6-6) \end{aligned}$$

mit den Lösungen $E = \frac{1}{12}$ und $D = \frac{4}{144} = \frac{1}{36}$. Somit ist die partikuläre Lösung gegeben durch

$$y_p(t) = \frac{1}{12}t + \frac{1}{36}$$

Lösung zu Aufgabe 2–30 :

- (a) Die Laplacetransformation der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) - 16Y(s) = \frac{3}{s-2}$$

Dies kann sehr leicht aufgelöst werden und anschliessend kann man den Ansatz für die Partialbruchzerlegung abgelesen.

$$\begin{aligned} s^4 Y(s) - s^3 7 - 16Y(s) &= \frac{3}{s-2} \\ (s^4 - 16) Y(s) &= \frac{3}{s-2} + s^3 7 = \frac{3 + (s-2)s^3 7}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{3 + (s-2)s^3 7}{(s-2)(s^4 - 16)} = \frac{3 + (s-2)s^3 7}{(s-2)(s^2 - 4)(s^2 + 4)} \\ &= \frac{3 + (s-2)s^3 7}{(s-2)(s-2)(s+2)(s^2 + 4)} \\ &= \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D + sE}{(s^2 + 2^2)} \end{aligned}$$

- (b) Elementare Transformationen führen auf

$$y(t) = A e^{2t} + B t e^{2t} + C e^{-2t} + D \frac{1}{2} \sin(2t) + E \cos(2t)$$

- (c) Der am schnellsten wachsende Term ist $t e^{2t}$ und somit ist der Wert der Konstanten B zu bestimmen. Verwende Partialbruchzerlegung und setze $s = +2$ und sofort folgt $3 = B(+4)(4+4)$ und somit $B = \frac{3}{32}$. Somit ist der entsprechende Anteil der Lösung $\frac{3}{32} t e^{2t}$.

- (d) Der am schnellsten gegen 0 konvergierende Term ist e^{-2t} und somit ist der Wert der Konstanten C zu bestimmen. Setze $s = -2$ und es folgt $3 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = C(-2 - 2)^2(2^2 + 4)$ und somit $C = \frac{227}{128}$ und der entsprechende Lösungsanteil ist $\frac{227}{128} e^{-2t}$.

Lösung zu Aufgabe 2–31 :

(a)

$$F(s) = - \int_1^3 \sin(\pi t) e^{-st} dt$$

(b) Die Funktion

$$g(t) = \sin(\pi t) - \sin(\pi(t-2)) \cdot U(t-2)$$

entspricht einer vollständigen Periode, startend bei $t = 0$. Wird diese Funktion um 1 nach rechts verschoben und für $t < 1$ die Funktion durch Null gesetzt, so entsteht die gesuchte Funktion $f(t)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t-1) \cdot U(t-1)](s) \\ &= e^{-s} \cdot \mathcal{L}[g(t)](s) = e^{-s} \cdot \left(\frac{\pi}{s^2 + \pi^2} + e^{-2s} \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \right) \\ &= (e^{-s} - e^{-3s}) \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–32 :

(a)

$$F(s) = \int_0^1 t e^{-st} dt + \int_1^3 \frac{3-t}{2} e^{-st} dt$$

(b)

$$\begin{aligned} f(t) &= t(1 - U(t-1)) + \frac{3-t}{2} (U(t-1) - U(t-3)) \\ &= t + \frac{3-3t}{2} U(t-1) - \frac{3-t}{2} U(t-3) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(t) &= t - \frac{3}{2} (t-1) U(t-1) + \frac{1}{2} (t-3) U(t-3) \\ F(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2s^2} e^{-s} + \frac{1}{2s^2} e^{-3s} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–33 : Man erhält

$$\begin{aligned} f(t) &= t - t U(t-1) = t - (t-1) U(t-1) - U(t-1) \\ F(s) &= \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s} \\ sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+2} \left(\frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s^2} - e^{-s} \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegungen ergeben mit $s = 0$ und $s = -2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+2)s} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} = \frac{As + B(s+2)}{(s+2)s} \\ 1 &= As + B(s+2) \\ \frac{1}{(s+2)s} &= \frac{-1}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)s}\right] &= \frac{-1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+2)s^2} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \frac{As^2 + B(s+2)s + C(s+2)}{(s+2)s^2} \\ 1 &= As^2 + B(s+2)s + C(s+2) \\ 1 &= C \cdot 2 \quad \text{aus } s=0 \\ 1 &= A \cdot 4 \quad \text{aus } s=-2 \\ 0 &= B \cdot 2s + C = B \cdot 2 + \frac{1}{2} \quad \text{Ableiten, dann } s=0 \\ \frac{1}{(s+2)s^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)s^2}\right] &= \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t\end{aligned}$$

Nun können die obigen Rechnungen zusammengesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)s^2} - e^{-s} \frac{1}{(s+2)s^2} - e^{-s} \frac{1}{(s+2)s}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s} \frac{1}{(s+2)s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s} \frac{1}{(s+2)s}\right] \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t\right) - \left(\frac{1}{4} e^{-2(t-1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (t-1)\right) U(t-1) \\ &\quad - \left(\frac{-1}{2} e^{-2(t-1)} + \frac{1}{2}\right) U(t-1) \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t\right) + \left(\frac{1}{4} e^{-2(t-1)} + \frac{1}{4} - \frac{t}{2}\right) U(t-1) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1+e^2}{4} e^{-2t} & \text{für } t > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–34 : Der leichtere Lösungsweg ist mittels Laplacetransformation.

$$\begin{aligned}s^2 Y - s y(0) - \dot{y}(0) + 5(sY - y(0)) + 6Y &= 0 \\ (s+2)(s+3)Y &= (s+5)y(0) \\ Y(s) &= \frac{s+5}{s^2+5s+6} y(0) = \left(\frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+3}\right) y(0) \\ &= \frac{3(s+3) - 2(s+2)}{(s+2)(s+3)} y(0) \\ y(t) &= (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) y(0)\end{aligned}$$

Nun kann die Bedingung $y(2) = 3$ nach $y(0)$ aufgelöst werden.

$$3 = y(2) = (3e^{-4} - 2e^{-6}) y(0) \implies y(0) = \frac{3}{3e^{-4} - 2e^{-6}}$$

Die Lösung ist nun leicht anzugeben.

$$y(t) = (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) \quad y(0) = (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) \frac{3}{3e^{-4} - 2e^{-6}}$$

Lösung mit Hilfe der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

$$0 = \dot{y}(0) = -2c_1 - 3c_2 \implies c_2 = -\frac{2}{3}c_1$$

$$y(t) = c_1 \left(e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-3t} \right)$$

$$3 = y(2) = c_1 \left(e^{-4} - \frac{2}{3} e^{-6} \right) \implies c_1 = \frac{3}{e^{-4} - \frac{2}{3} e^{-6}} = \frac{9}{3e^{-4} - 2e^{-6}}$$

$$y(t) = \frac{9}{3e^{-4} - 2e^{-6}} \left(e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-3t} \right) = \frac{3}{3e^{-4} - 2e^{-6}} (3e^{-2t} - 2e^{-3t})$$

Lösung zu Aufgabe 2–35 :

$$s^2 Y - s y(0) - \dot{y}(0) + 2(sY - y(0)) + Y = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1) Y = (s + 2) y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1} y(0) = \frac{s + 1 + 1}{(s + 1)^2} y(0)$$

$$= \left(\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2} \right) y(0)$$

$$y(t) = (e^{-t} + t e^{-t}) y(0)$$

Nun kann die Bedingung $y(1) = 2$ nach $y(0)$ aufgelöst werden.

$$2 = y(1) = (e^{-1} + e^{-1}) y(0) \implies y(0) = e$$

Die Lösung ist nun leicht anzugeben.

$$y(t) = (e^{-t} + t e^{-t}) e = (1 + t) e^{1-t}$$

Lösung zu Aufgabe 2–36 : Laplacetransformation des Differentialgleichungssystems

$$sX - a = 2X - Y$$

$$sY = X + 2Y$$

Als lineares Gleichungssystem für X und Y schreiben

$$(s - 2)X + Y = a$$

$$-X + (s - 2)Y = 0$$

X und Y isolieren durch geeignete Zeilenaddition oder Subtraktion

$$((s - 2)^2 + 1)X = a(s - 2)$$

$$((s - 2)^2 + 1)Y = a$$

Nach X und Y auflösen

$$\begin{aligned} X &= \frac{a(s-2)}{(s-2)^2 + 1} \\ Y &= \frac{a}{(s-2)^2 + 1} \end{aligned}$$

Rücktransformieren

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{2t} \cos t \\ y(t) &= a e^{2t} \sin t \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–37 :

(a) Bestimmen der Laplacetransformierten führt auf

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= Y(s) \\ sY(s) - y_0 &= -aX(s) - bY(s) + \frac{C}{s+1} \end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann in der zweiten eingesetzt werden und man erhält sofort.

$$\begin{aligned} s^2 X(s) - s x_0 - y_0 &= -aX(s) - b s X(s) + b x_0 + \frac{C}{s+1} \\ X(s) &= \frac{\frac{C}{s+1} + s x_0 + b x_0 + y_0}{s^2 + b s + a} = \frac{C + (s+1)(s x_0 + b x_0 + y_0)}{(s+1)(s^2 + b s + a)} \end{aligned}$$

(b) Damit der Term $e^{-3t} \cos(2t)$ in der Lösung vorkommt muss $\lambda = -3 + i2$ eine Nullstelle des Nenners von $X(s)$ sein und somit

$$s^2 + b s + a = (s+3)^2 + 2^2 = s^2 + 6s + 13$$

Das führt auf die Werte $a = 13$ und $b = 6$.

(c) Die Laplacetransformierten $X(s)$ und $X_p(s)$ müssen übereinstimmen.

$$\begin{aligned} X_p(s) &= \frac{A(s+3) + B2}{(s+3)^2 + 2^2} + \frac{1}{s+1} = \frac{(A(s+3) + B2)(s+1) + (s+3)^2 + 2^2}{(s+1)((s+3)^2 + 2^2)} \\ X(s) &= \frac{C + (s+1)(s x_0 + b x_0 + y_0)}{(s+1)(s^2 + b s + a)} \end{aligned}$$

Da die Nenner bereits identisch sind müssen auch die Zähler übereinstimmen, d.h.

$$(A(s+3) + B2)(s+1) + (s+3)^2 + 2^2 = C + (s+1)(s x_0 + b x_0 + y_0)$$

$$\text{Mit } s = -1 \text{ erhält man } C = 8$$

Lösung zu Aufgabe 2–38 :

(a)

$$\begin{aligned} s^2 Y + 2sY + 5Y &= F(s) \approx 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots \\ Y(s) &\approx (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots) \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] &= \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \end{aligned}$$

Verschiebungssatz verwenden

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \frac{1}{2} \left(e^{-t} \sin(2t) + e^{-(t-T)} \sin(2(t-T)) U(t-T) \right. \\ &\quad + e^{-(t-2T)} \sin(2(t-2T)) U(t-2T) + \\ &\quad \left. + e^{-(t-3T)} \sin(2(t-3T)) U(t-3T) + \dots \right) \end{aligned}$$

(b)

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(t-kT)} \sin(2(t-kT)) U(t-kT) \right)$$

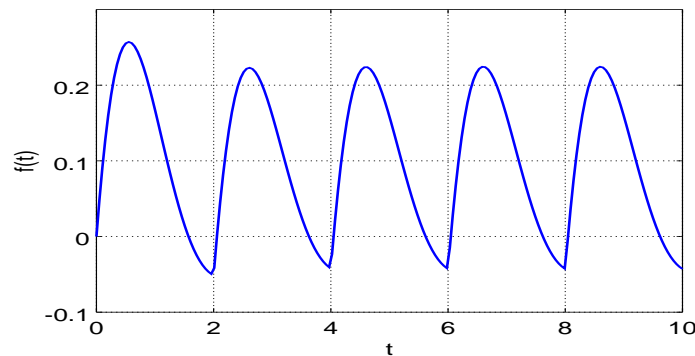
(c)

$$\begin{aligned} y(nT) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(n-k)T} \sin(2(n-k)T) U((n-k)T) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(e^{-(n-k)T} \sin(2(n-k)T) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^n \left(e^{-lT} \sin(2lT) \right) \end{aligned}$$

Man kann mit dieser Formel nun leicht den Wert von $y(nT)$, wenn n gegen unendlich geht, bestimmen. Dazu lässt man in der obigen Formel n immer grösser werden und erhält die Reihe

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(e^{-lT} \sin(2lT) \right)$$

Diese Reihe ist konvergent, da sie eine konvergente geometrische Reihe als Majorante hat. Die Figur illustriert das Verhalten des Pendels für den Fall $T = 2$.



Lösung zu Aufgabe 2–39 :

(a)

$$\begin{aligned} g(t) &= 3U(t-2) \\ G(s) &= \mathcal{L}[g(t)](s) = 3e^{-2s} \frac{1}{s} \\ sRCY(s) + Y(s) - RC &= e^{-2s} \frac{3}{s} \\ Y(s) &= \frac{RC}{RCs+1} + e^{-2s} \frac{3}{s(RCs+1)} \\ &= \frac{1}{s+1/RC} + e^{-2s} \frac{3}{RC} \frac{1}{s(s+1/RC)} \\ &= \frac{1}{s+1/RC} + e^{-2s} \frac{3}{RC} \left(\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s+1/RC} \right) \\ &= \frac{1}{s+1/RC} + e^{-2s} \left(\frac{3}{s} - \frac{3}{s+1/RC} \right) \\ y(t) &= e^{-t/RC} + 3(1 - e^{-(t-2)/RC}) U(t-2) \end{aligned}$$

Die verwendete Partialbruchzerlegung ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1/RC)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/RC} = \frac{A(s+1/RC) + B s}{s(s+1/RC)} \\ A &= RC = -B \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3$$

Lösung zu Aufgabe 2–40 :

(a)

$$\begin{aligned} s RC Y(s) + Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} \frac{1}{RC s + 1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{RC s + 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{RC}{RC s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC} \\ y(t) &= 1 - e^{-t/RC} \end{aligned}$$

Nun kann man sofort ablesen, dass $y(t) \rightarrow 1 = y_\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Für die Zeit t_a muss gelten

$$\begin{aligned} 0.9 &= 1 - e^{-t_a/RC} \\ e^{-t_a/RC} &= 0.1 \\ t_a &= -RC \ln 0.1 = RC \ln 10 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t}{T} - \frac{t}{T} U(t-T) + U(t-T) = \frac{t}{T} - \frac{t-T}{T} U(t-T) \\ \mathcal{L}[u(t)](s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) \\ s RC Y(s) + Y(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) \\ Y(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} \frac{1}{RC s + 1} (1 - e^{-sT}) \\ \frac{1}{s^2} \frac{1}{RC s + 1} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{D}{RC s + 1} \\ &= \frac{A s (RC s + 1) + B (RC s + 1) + D s^2}{s^2 (RC s + 1)} \\ &= \frac{-RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{(RC)^2}{RC s + 1} = \frac{-RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{RC}{s + 1/RC} \\ y(t) &= \frac{1}{T} \left(-RC + t + RC e^{-t/RC} \right) \\ &\quad - \frac{U(t-T)}{T} \left(-RC + t - T + RC e^{-(t-T)/RC} \right) \\ y(t) &\rightarrow 1 = y_\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Wir gehen davon aus, dass T sehr klein ist, im Vergleich zur Zeitkonstante $1/RC$. Dann ist $t_b > T$ und somit $U(t - T) = 1$ und somit ist für t_b die folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{aligned} 0.9 T &= -RC + t_b + RC e^{-t_b/RC} - \left(-RC + t_b - T + RC e^{-(t_b-T)/RC} \right) \\ &= +RC e^{-t_b/RC} + T - RC e^{-(t_b-T)/RC} \\ 0.1 T &= RC \left(e^{-(t_b-T)/RC} - e^{-t_b/RC} \right) \\ &= RC e^{-t_b/RC} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach t_b auflösen.

$$\begin{aligned} e^{t_b/RC} &= 10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \\ t_b &= RC \ln \left(10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

(c) Für $T/RC \ll 1$ verwenden wir die Taylorapproximation $e^z \approx 1 + z$ für $|z| \ll 1$ und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{t_b/RC} &= 10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \approx 10 \frac{RC}{T} \frac{T}{RC} = 10 \\ t_b &\approx RC \ln 10 = t_a \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–41 :

(a)

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t}{T} - \frac{t}{T} U(t - T) + U(t - T) = \frac{t}{T} - \frac{t - T}{T} U(t - T) \\ \mathcal{L}[u(t)](s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) \\ s RC Y(s) + Y(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) \\ Y(s) &= \frac{1}{T} \frac{1}{s^2} \frac{1}{RC s + 1} (1 - e^{-sT}) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \frac{1}{RC s + 1} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{D}{RC s + 1} \\ &= \frac{A s (RC s + 1) + B (RC s + 1) + D s^2}{s^2 (RC s + 1)} \\ &= \frac{-RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{(RC)^2}{RC s + 1} = \frac{-RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{RC}{s + 1/RC} \\ y(t) &= \frac{1}{T} \left(-RC + t + RC e^{-t/RC} \right) \\ &\quad - \frac{U(t - T)}{T} \left(-RC + t - T + RC e^{-(t-T)/RC} \right) \end{aligned}$$

(c) Alle Exponentialanteile konvergieren gegen 0 und für $t > T$ gilt somit

$$y(t) = \frac{-RC + t}{T} - \frac{-RC + t - T}{T} + e^{-t/RC} (\dots) \rightarrow 1 = y_\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Die Aufgabe kann auch mit dem Grenzwertsatz gelöst werden

$$y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{RC s + 1} = 1$$

Mit Hilfe von de l'Hospital wurde der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = +T$ bestimmt.

- (d) Wir gehen davon aus, dass T sehr klein ist, im Vergleich zur Zeitkonstante $1/RC$. Dann ist $t_a > T$ und somit $U(t - T) = 1$ und somit ist für t_a die folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{aligned} 0.9 \quad T &= -RC + t_a + RC e^{-t_a/RC} - \left(-RC + t_a - T + RC e^{-(t_a-T)/RC} \right) \\ &= +RC e^{-t_a/RC} + T - RC e^{-(t_a-T)/RC} \\ 0.1 \quad T &= RC \left(e^{-(t_a-T)/RC} - e^{-t_a/RC} \right) = RC e^{-t_a/RC} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach t_a auflösen.

$$\begin{aligned} e^{t_a/RC} &= 10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \\ t_a &= RC \ln \left(10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach t_a auflösen.

Mittels der Taylorapproximationen $e^x \approx 1 + x$ und $x = \frac{T}{RC} \ll 1$ erhalten wir

$$t_a = RC \ln \left(10 \frac{RC}{T} \left(e^{T/RC} - 1 \right) \right) \approx RC \ln 10 \approx 2.3026 RC$$

Lösung zu Aufgabe 2–42 : Quelle: [JordSmit94, p. 383]

- (a) Zuerst den inhomogenen Term als Schrittfunktion untersuchen

$$f(t) = 1 - U(t - 2) \quad \implies \quad F(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-2s})$$

Dann das System der Gleichungen aufstellen.

$$\begin{aligned} s X(s) &= X(s) - Y(s) \\ s Y(s) - 1 &= X(s) + Y(s) + \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}) \end{aligned}$$

- (b) Strukturieren als System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} (s - 1) X(s) + Y(s) &= 0 \\ -X(s) + (s - 1) Y(s) &= 1 + \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}) \end{aligned}$$

Erste Gleichung mit $(s - 1)$ multiplizieren, dann subtrahieren.

$$\begin{aligned} ((s - 1)^2 + 1) X(s) &= -1 - \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}) \\ X(s) &= -\frac{1}{((s - 1)^2 + 1)} - \frac{1}{s ((s - 1)^2 + 1)} (1 - e^{-2s}) \end{aligned}$$

(c) Partialbruchzerlegung des wichtigen Bruches

$$\frac{1}{s((s-1)^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s-1)+C}{(s-1)^2+1}$$

$$1 = A((s-1)^2+1) + s(B(s-1)+C)$$

Setze $s = 0$ und dann $s = 1 + i$

$$1 = A((0-1)^2+1) = 2A$$

$$1 = (1+i)(Bi+C) = -B+C+i(B+C)$$

Somit ist $A = 1/2$, $1 = -B+C$ und $B+C = 0$. Daraus ergibt sich $B = -C = -1/2$. Es gilt

$$\frac{1}{s((s-1)^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s((s-1)^2+1)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \sin t$$

Damit kann das Resultat angegeben werden

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = -e^t \sin t - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \sin t \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{t-2} \cos(t-2) + \frac{1}{2} e^{t-2} \sin(t-2) \right) U(t-2)$$

Lösung zu Aufgabe 2–43 :

(a) Die Kraft ist proportional zum Abstand $x(t) - u(t)$

$$m \ddot{x}(t) = -k(x(t) - u(t))$$

$$2 \ddot{x}(t) = -50(x(t) - u(t))$$

$$\ddot{x}(t) = -25x(t) + 25u(t)$$

(b) Da die Anfangswerte Null sind liefert die Laplacetransformation

$$s^2 X(s) = -25 X(s) + 25 U(s)$$

$$X(s) = \frac{25}{s^2 + 25} U(s) = \mathcal{L}[5 \sin(5t)](s) \cdot U(s)$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes folgt daraus

$$x(t) = 5 (\sin(5t) * u(t))(t) = 5 \int_0^t \sin(5(t-\tau)) \cdot u(\tau) d\tau$$

(c) Da $u(t) = 1$ für $0 \leq t \leq 2$ und $u(t) = 0$ für $t > 2$ kann das Integral von 0 bis t durch ein Integral von 0 bis 2 ersetzt werden und die Funktion $u(t)$ durch 1. Das Integral kann durch (mindestens) zwei Verfahren bestimmt werden:

- Direkte Integration

$$x(t) = 5 (u(t) * \sin(5t))(t) = 5 \int_0^2 1 \cdot \sin(5(t-\tau)) d\tau$$

$$= \cos(5(t-\tau)) \Big|_{\tau=0}^2 = \cos(5(t-2)) - \cos(5t)$$

- Mit einer trigonometrischer Identität

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 5 (\sin(5t) * u(t))(t) = 5 \int_0^2 \sin(5(t-\tau)) \cdot 1 \, d\tau \\
 &= 5 \int_0^2 \sin(5t) \cos(5\tau) - 5 \cos(5t) \sin(5\tau) \, d\tau \\
 &= 5 \sin(5t) \int_0^2 \cos(5\tau) \, d\tau - 5 \cos(5t) \int_0^2 \sin(5\tau) \, d\tau \\
 &= \sin(5t) \sin(10) - \cos(5t) (1 - \cos(10))
 \end{aligned}$$

- Durch Vertauschen der Faktoren in der Faltung.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 5 (\sin(5t) * u(t))(t) = 5 \int_0^\infty \sin(5(\tau)) \cdot u(t-\tau) \, d\tau \\
 &= 5 \int_{t-2}^t \sin(5\tau) \cdot 1 \, d\tau = -\cos(5\tau) \Big|_{t-2}^t = -\cos(5t) + \cos(5(t-2))
 \end{aligned}$$

2.7 Rechenregeln

Die folgenden Rechenregeln für Laplacetransformationen sind nützlich. Die präzisen Voraussetzungen an die Funktionen sind im Kapitel zu finden.

- Linearität

$$\mathcal{L}[c f] = c \mathcal{L}[f] \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$$

- Transformation von Ableitungen bezüglich der Zeit t

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= s \mathcal{L}[f](s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''](s) &= s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0) - f'(0) \\ \mathcal{L}[f'''](s) &= s^3 \mathcal{L}[f](s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) \end{aligned}$$

- Ableitungen bezüglich der Variablen s

$$\frac{d}{ds} F(s) = -\mathcal{L}[t f(t)](s) \quad \text{und} \quad \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

- Ähnlichkeitssatz

Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{oder auch} \quad a f(at) = \mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right]$$

- Verschiebungssätze

Mit $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= F(s - a) \\ e^{at} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s - a)] \end{aligned}$$

Für $a \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a) U(t - a)](s) &= e^{-as} \mathcal{L}[f](s) = e^{-as} F(s) \\ f(t - a) U(t - a) &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)](t) \end{aligned}$$

- Laplace-Transformation von periodischen Funktionen

Ist die Funktion $f(t)$ **periodisch** mit Periode T , so gilt

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

- Faltungssatz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](s) &= F(s) G(s) \\ (f * g)(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) G(s)](t) \end{aligned}$$

wobei

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

- Grenzwertsätze

Für Funktionen exponentieller Ordnung gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (s F(s)) = f(0+)$$

Falls $\int_0^\infty |f'(t)| dt < \infty$ dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0+} s F(s) = f(\infty) = \lim_{M \rightarrow \infty} f(M)$$

2.8 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Laplacetransformation einfacher Funktionen mit Hilfe des uneigentlichen Integrals bestimmen können.
- die Laplacetransformation von Funktionen mit Hilfe von Tabellen und Rechenregeln bestimmen können.
- einfache Differentialgleichungen mittels Laplacetransformation lösen können.
- technische Hilfsmittel einsetzen können um mit Laplacetransformationen zu rechnen, Taschenrechner oder *Octave*/MATLAB.

Kapitel 3

Anwendungen der Laplace Transformation

3.1 Lineare Differentialgleichungen und Stabilität

3.1.1 Homogene Gleichungen

Für reelle Konstanten a , b und c betrachten wir die Differentialgleichung

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0 \quad , \quad \dot{y}(0) = y_1 \quad .$$

durch Laplacetransformation wird daraus die Gleichung

$$a (s^2 Y(s) - s y_0 - y_1) + b (s Y(s) - y_0) + c Y(s) = 0$$

mit der Lösung

$$Y(s) = \frac{s a y_0 + a y_1 + b y_0}{a s^2 + b s + c}$$

um daraus $y(t)$ zu bestimmen sind die Nullstellen des Nennerpolynoms zu untersuchen, d.h. die **charakteristische Gleichung**

$$a s^2 + b s + c = 0$$

muss nach s aufgelöst werden. Abhängig von den Konstanten a , b und c sind drei qualitativ verschiedene Lösungen zu betrachten.

Diskriminante	Nullstellen	Partialbruchzerlegung	Form der Lösung
$b^2 - 4ac > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2}$	$A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$
$b^2 - 4ac = 0$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{s - \lambda} + \frac{B}{(s - \lambda)^2}$	$A e^{\lambda t} + B t e^{\lambda t}$
$b^2 - 4ac < 0$	$\lambda = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$	$\frac{A(s - \alpha) + B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \frac{1}{\beta} \sin(\beta t))$ $= C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$

Tabelle 3.1: Form der Lösungen Gleichungen zweiter Ordnung

Das Langzeitverhalten dieser Lösungen lässt sich alleine aufgrund der Lage der Nullstellen ablesen. Das ist in Tabelle 3.1 illustriert. Die Nullstellen sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \quad \text{oder} \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2a} \left(-b \pm i\sqrt{4ac - b^2} \right) = \alpha \pm i\beta$$

- $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ oder $\lambda < 0$ oder $\alpha < 0$.

Die Exponentialfunktionen konvergieren exponentiell gegen 0, falls t gegen unendlich konvergiert. Somit ist die Nulllösung **exponentiell stabil**. Sind die Realteile der Lösungen der charakteristischen Gleichung alle strikt negativ, so ist die Nulllösung exponentiell stabil.

- $\lambda_2 > 0$ oder $\lambda > 0$ oder $\alpha > 0$.

Die Lösungen wachsen exponentiell an. Ist der Realteil einer Lösung der charakteristischen Gleichung strikt positiv, so konvergiert die „typische“ Lösung exponentiell gegen unendlich.

Dieses Verhalten von Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen ist nicht auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränkt, sondern gilt allgemein. Für Lösungen von Gleichungen der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

untersucht werden. Um die Rechnungen zu vereinfachen können wir annehmen, dass $a_n = 1$. Ist dies nicht der Fall, so kann die Gleichung durch a_n dividiert werden. Anschliessend kann dieses Polynom faktorisiert werden

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k = \prod_{k=1}^{m_1} (s - \lambda_k) \prod_{k=1}^{m_2} ((s - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)$$

wobei die Nullstellen des Polynoms gegeben sind durch $\lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\alpha_k \pm i \beta_k$. Da ein Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen hat, gilt $n = m_1 + 2m_2$. Jede dieser Nullstellen liefert einen entsprechenden Lösungsbeitrag

$$c_k e^{\lambda_k t} \quad \text{oder} \quad c_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \phi_k)$$

Damit alle Beiträge gegen Null konvergieren muss $\lambda_k < 0$ und $\alpha_k < 0$ sein.

3–1 Theorem : Die Nulllösung einer homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist genau dann exponentiell stabil, wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms strikt in der linken Hälfte der komplexen Ebene liegen, d.h. die Realteile sind strikt negativ.

Die Tabelle 3.2 zeigt die typischen Verhalten von Lösungen von linearen Differentialgleichungen, abhängig von der Lage der Polstellen der Laplacetransformierten. Die Verifikation beruht auf Partialbruchzerlegungen.

3.1.2 Lokalisieren von Nullstellen von Polynomen, Kriterium von Routh

Um also zu entscheiden, ob die Nulllösung exponentiell stabil ist, braucht man „nur“ ein zuverlässiges Verfahren, um festzustellen ob alle Realteile der Nullstellen des charakteristischen Polynoms strikt negativ sind.

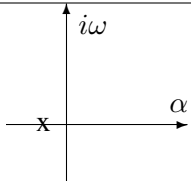
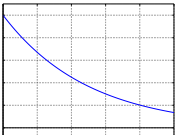
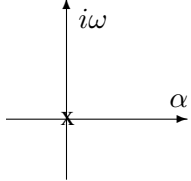
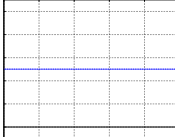
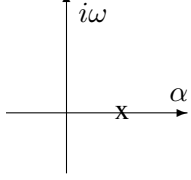
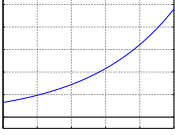
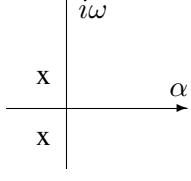
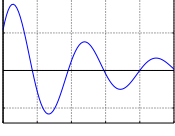
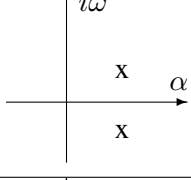
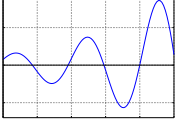
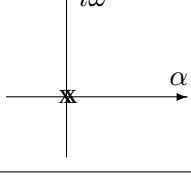
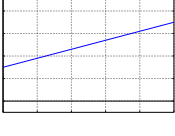
Nullstellen	$s = \alpha + i\omega$	Typischer Graph	Bemerkung
reell, negativ			exponentiell stabil
Null			bedingt stabil
reell, positiv			instabil
konjugiert komplex negativer Realteil			exponentiell stabil
konjugiert komplex positiver Realteil			instabil
doppelte Nullstelle bei Null			instabil

Tabelle 3.2: Stabilitätsverhalten von Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

3–2 Beispiel : Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$$

ist

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s + 1)^3.$$

somit ist $s = -1$ die einzige (dreifache) Nullstelle und die Nulllösung ist exponentiell stabil. Die Lösungen sind von der Form

$$y(t) = e^{-t} (a + bt + ct^2).$$

◇

Hat ein Polynom $p(s)$ eine Nullstelle λ , so enthält $p(s)$ den Faktor $(s - \lambda)$, d.h.

$$p(s) = (s - \lambda) g(s)$$

für ein geeignetes Polynom $g(s)$. Hat ein reelles Polynom $p(s)$ eine Nullstelle $\lambda = \alpha + i\beta$, so ist auch $\alpha - i\beta$ eine Nullstelle und das Polynom ist von der Form

$$p(s) = (s - \alpha - i\beta) (s - \alpha + i\beta) g(s) = ((s - \alpha)^2 + \beta^2) g(s)$$

für ein geeignetes Polynom $g(s)$. Ist $g(s)$ vom Grad n und hat n reelle Nullstellen $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, so ist

$$p(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k = \prod_{k=1}^n (s - \lambda_k) = (s - \lambda_1) (s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)$$

Sind in dieser Darstellung alle $\lambda_k < 0$, so treten im Ausdruck rechts nur positive Zahlen, Additionen und Multiplikationen auf. Diese Operationen führen alle zu positiven Koeffizienten, d.h. $a_k > 0$ für alle k . Bei dieser Überlegung wurde $a_n = 1$ verwendet. Eine ähnliche Rechnung kann auch für komplexe Nullstellen mit negativem Realteil durchgeführt werden und wir erhalten eine notwendige Bedingung für exponentielle Stabilität. Es ist unbedingt zu beachten, dass diese Bedingung **nicht hinreichend** ist. Nur für Polynome vom Grad 1 und zwei ist dieser Test notwendig und hinreichend (Verifikation mittels der Formeln von Vieta).

3–3 Satz : (Notwendige Bedingung für Stabilität)

Ist die Nulllösung der Differentialgleichung (mit $a_n = 1$)

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0$$

exponentiell stabil, so müssen alle a_k für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ strikt positiv sein.

Ist $n = 1$ oder 2 , so ist die Bedingung auch hinreichend.

3–4 Beispiel : Die Nulllösung der Gleichung

$$y^{(4)} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

kann nicht exponentiell stabil sein, da $a_3 = 0$ ist. Es ist zu beachten, dass für diese Folgerung keinerlei Rechnungen nötig waren.

Das charakteristische Polynom ist

$$p(s) = s^4 + 3s^2 + 2s + 1$$

und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} \approx -0.349746 \pm i 0.43899 \quad , \quad \lambda_{3,4} \approx 0.349746 \pm i 1.74698$$

Die „typische“ Lösung wird also einen Term

$$y(t) = c e^{0.35t} \sin(1.75t + \delta)$$

enthalten und somit nicht gegen 0 konvergieren. \diamond

3–5 Beispiel : Die Nulllösung der Gleichung

$$y^{(4)} + 0.000001 y^{(3)} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

wird ebenfalls nicht exponentiell stabil sein, da die Koeffizienten nur sehr wenig vom vorangehenden Beispiel abweichen. Die Lösungen werden sich somit auch fast gleich verhalten. Auf dieses Beispiel ist das obige Theorem nicht anwendbar. \diamond

Glücklicherweise gibt es ein Verfahren um festzustellen, ob alle Nullstellen eines Polynoms negativen Realteil haben, die Methode von **Routh**. Eine Darstellung finden Sie in [Stef67, p.86–88].

Für ein Polynom der Form

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

baut man die folgende Tabelle auf

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
\cdot	b_1	b_2	b_3	\dots
\cdot	c_1	c_2	c_3	\dots
\cdot	\vdots	\vdots	\vdots	

Hierbei sind die Koeffizienten b_k und c_k gegeben durch

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad , \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad , \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \quad , \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1} \quad , \quad \dots$$

Diese Tabelle wird nach rechts und nach unten fortgesetzt, bis nur noch Nullen entstehen. Alle Nullstellen des Polynoms haben negativen Realteil genau dann, wenn alle Zahlen in der ersten Spalte das selbe Vorzeichen haben. Die Anzahl der Vorzeichenwechsel ergibt die Zahl der Nullstellen mit positivem Realteil.

3–6 Beispiel : Um die Lösungen der Gleichung

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

zu untersuchen, erzeugt man die Tabelle

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s	$\frac{64}{6}$	0	
1	8	0	

Da alle Zahlen in der ersten Spalte positiv sind, wissen wir, dass alle Nullstellen des Polynoms in der linken Hälfte der komplexen Ebene liegen. \diamond

3–7 Beispiel : Es ist zu untersuchen, für welche Werte von K alle Nullstellen des Polynoms

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K$$

negativen Realteil haben. Dazu erstellt man die Tabelle

s^3	1	3	0
s^2	3	$1 + K$	0
s	$\frac{8-K}{3}$	0	
1	$1 + K$	0	

Damit das Vorzeichen in der ersten Spalte nicht ändert, müssen die beiden Bedingungen $8 - K > 0$ und $1 + K > 0$ erfüllt sein. Somit sind alle Realteile von Nullstellen negativ für den Bereich $-1 < K < 8$. \diamond

Das Kriterium von Routh kann mit dem grossen Horner Schema kombiniert werden, um zu entscheiden, ob alle Realteile der Nullstellen eines Polynoms kleiner als ein vorgegebener Wert sind.

3–8 Beispiel : Wir betrachten als Beispiel das Polynom

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12.$$

Das Verfahren von Routh mit den Koeffizienten 3, -2 , 5, -7 und -12 bestimmt die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ mit positivem Realteil.

s^4	3	5	-12
s^3	-2	-7	0
s^2	$\frac{+11}{-2}$	-12	
s	-2.09	0	
1	-12	0	

Das genau ein Vorzeichenwechsel auftritt in der ersten Spalte hat das Polynom eine Nullstelle mit positivem Realteil.

Nun wird untersucht wie viele Nullstellen das Polynom hat mit Realteil grösser als -2 . Das grosse Horner Schema ergibt

	3	-2	5	-7	-12
$x_0 = -2$		-6	16	-42	98
	3	-8	21	-49	86
$x_0 = -2$		-6	28	-98	
	3	-14	49	-147	
$x_0 = -2$		-6	40		
	3	-20	89		
$x_0 = -2$		-6			
	3	-26			
$x_0 = -2$					
	3				

Aus dem obersten Block des Schemas kann man das Resultat der Polynomdivision von $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x + 2)$ ablesen

$$f(x) = 86 + (x + 2)(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$$

Durch Repetition der Division durch $(x + 2)$ erhält man schliesslich¹

$$f(x) = 86 - 147(x + 2) + 89(x + 2)^2 - 26(x + 2)^3 + 3(x + 2)^4$$

Nun setzen wir $z = x + 2$ und betrachten

$$86 - 147z + 89z^2 - 26z^3 + 3z^4$$

Das Verfahren von Routh mit den Koeffizienten 3, -26, 89, -147 und 86 bestimmt die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$, deren Realteil grösser als -2 ist.

s^4	3	89	86
s^3	-26	-147	0
s^2	$\frac{1873}{26}$	86	0
s	-115.96		
1	86	0	

Somit besagt das Kriterium von Routh, dass 4 Nullstellen des ursprünglichen Polynoms einen Realteil grösser als -2 haben. Eine kurze Rechnung mit *Octave* bestätigt dies.

```
roots([3, -2, +5, -7, -12])
-->
    1.57439 + 0.00000i
   -0.03550 + 1.74216i
   -0.03550 - 1.74216i
   -0.83674 + 0.00000i
```

◇

3.1.3 Inhomogene Gleichungen

3–9 Beispiel : Wir untersuchen die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Durch Laplacetransformation wird daraus die Gleichung

$$s^2 Y(s) + 4s Y(s) + 3Y(s) = F(s)$$

und somit

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} F(s) = \frac{1}{(s + 3)(s + 1)} F(s)$$

Nun untersuchen wir die Lösung für verschiedene Typen von Funktionen $f(t)$ resp. $F(s)$.

¹Man kann auch im Polynom x durch $z - 2$ ersetzen und ausmultiplizieren

$$f(z - 2) = 3z^4 - 26z^3 + 89z^2 - 147z + 86$$

- Falls $f(t) = t$ so ist $F(s) = \frac{1}{s^2}$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \cdot F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)s^2} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s^2} \\ y(t) &= A e^{-3t} + B e^{-t} + C_0 + C_1 t \end{aligned}$$

Für grosse Werte von t sind die beiden Exponentialfunktionen sehr klein und wir erhalten

$$y(t) \approx C_0 + C_1 t$$

d.h. ein Polynom vom Grad 1.

- Falls $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ so ist $F(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2/2}{s^3}$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \cdot F(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2/2}{(s+3)(s+1)s^3} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s^2} + \frac{C_2}{s^3} \\ y(t) &= A e^{-3t} + B e^{-t} + C_0 + C_1 t + C_2 \frac{1}{2} t^2 \end{aligned}$$

Für grosse Werte von t sind die beiden Exponentialfunktionen sehr klein und wir erhalten

$$y(t) \approx C_0 + C_1 t + C_2 \frac{1}{2} t^2$$

d.h. ein Polynom vom Grad 2.

- Falls $f(t) = e^{2t}$ so ist $F(s) = \frac{1}{s-2}$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \cdot F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} \\ y(t) &= A e^{-3t} + B e^{-t} + C e^{2t} \end{aligned}$$

Für grosse Werte von t sind die ersten beiden Exponentialfunktionen sehr klein und wir erhalten

$$y(t) \approx C e^{2t}$$

- Falls $f(t) = \cos(\omega t)$ so ist $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \cdot F(s) = \frac{s}{(s+3)(s+1)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C_0 + C_1 s}{s^2 + \omega^2} \\ y(t) &= A e^{-3t} + B e^{-t} + C_0 \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Für grosse Werte von t sind die beiden Exponentialfunktionen sehr klein und wir erhalten

$$y(t) \approx C_0 \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + C_1 \cos(\omega t)$$

Man stellt fest, dass das Vorgehen für verschiedene Typen von Funktionen $f(t)$ gleich bleibt. Die folgenden Erläuterungen sollen aufzeigen unter welchen Voraussetzungen welche Vereinfachungen möglich sind. \diamond

Für reelle Konstanten a , b und c und eine gegebene Funktion $f(t)$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = f(t)$$

mit den sehr speziellen Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$.

Wir gehen davon aus, dass die Nulllösung der homogenen Gleichung exponentiell stabil ist und wir interessieren uns nur für das Langzeitverhalten der Lösung.

Unter diesen Annahmen spielen die Anfangswerte keine Rolle und wir dürfen mit der für Laplacetransformationen speziell einfachen Wahl rechnen. Wir werden allerdings nur eine partikuläre Lösung finden.

Durch Laplacetransformation wird daraus die Gleichung

$$a s^2 Y(s) + b s Y(s) + c Y(s) = F(s)$$

mit der Lösung

$$Y(s) = \frac{1}{a s^2 + b s + c} F(s)$$

Sind a , b , $c > 0$ so ist das System stabil. Nun geht es darum, für verschiedenen Typen von Funktion $f(t)$ die Struktur der entsprechenden partikulären Lösung $y_p(t)$ zu finden.

1. Fall: $b^2 - 4ac > 0$ oder $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

In diesem Fall gilt

$$Y(s) = \frac{1}{a s^2 + b s + c} F(s) = \frac{1}{a (s - \lambda_1) (s - \lambda_2)} F(s)$$

Ist $f(t)$ von der Form

$$f(t) = c t^n$$

so ist

$$F(s) = c \frac{n!}{s^{n+1}}$$

und somit ist

$$Y(s) = \frac{c n!}{a (s - \lambda_1) (s - \lambda_2) s^{n+1}}.$$

Die Partialbruchzerlegung hiervon ist von der Form

$$Y(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots + \frac{a_n}{s^n} + \frac{a_{n+1}}{s^{n+1}}.$$

Bestimmt man daraus die Lösung $y(t)$, so fallen die ersten beiden Terme exponentiell ab, falls t gegen unendlich geht. Für unsere Zwecke ist also nur der Term

$$Y_p(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots + \frac{a_n}{s^n} + \frac{a_{n+1}}{s^{n+1}} = \sum_{k=0}^n c_{k+1} \frac{k!}{s^{k+1}}$$

wichtig. Die Laplace-Rücktransformation hiervon ergibt ein Polynom $y_p(t)$ vom Grad n , dessen Koeffizienten durch c_k bestimmt sind. Diese Rechnungen führen zur ersten Zeile in Tabelle 3.3. Die weiteren Zeilen können durch vergleichbare Überlegungen erzeugt werden. In den Tabellen ist

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$

$f(t)$	$F(s)$	$Y_p(s)$	$y_p(t)$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$\sum_{k=0}^n \frac{c_{k+1}}{s^{k+1}}$	$p_n(t)$
$e^{\alpha t}$ $\alpha \neq \lambda_{1,2}$	$1/(s - \alpha)$	$\frac{c}{s - \alpha}$	$c e^{\alpha t}$
$e^{\alpha t}$ $\alpha = \lambda_1$	$1/(s - \alpha)$	$c_1/(s - \alpha) + c_2/(s - \alpha)^2$	$e^{\alpha t} p_1(t)$
$t^n e^{\alpha t}$ $\alpha \neq \lambda_{1,2}$	$n!/(s - \alpha)^{n+1}$	$\sum_{k=0}^n \frac{c_{k+1}}{(s - \alpha)^{k+1}}$	$e^{\alpha t} p_n(t)$
$t^n e^{\alpha t}$ $\alpha = \lambda_1$	$n!/(s - \alpha)^{n+1}$	$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{c_{k+1}}{(s - \alpha)^{k+1}}$	$e^{\alpha t} p_{n+1}(t)$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b s}{s^2 + \beta^2}$	$a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)$ $= c \sin(\beta t + \delta)$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b s}{s^2 + \beta^2}$	$a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)$ $= c \sin(\beta t + \delta)$
$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t))$ $= c e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t))$ $= c e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$

Tabelle 3.3: Laplaceterme von Inhomogenitäten ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$)

ein beliebiges Polynom vom Grad n . Selbstverständlich könnte die Tabelle noch erweitert werden. Sie zeigt, dass nicht alle Terme einer Lösung bestimmt werden müssen, um das Langzeitverhalten (Stabilität) der Lösung einer Differentialgleichung zu untersuchen. Die Lage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und der inhomogene Term $f(t)$ entscheiden über die Form der Lösung.

2. Fall: $b^2 - 4ac = 0$ oder $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0$

In diesem Fall gilt

$$Y(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} F(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2} F(s)$$

und wir können völlig analoge Überlegungen anstellen um die entsprechende Tabelle 3.4 zu erstellen. Nur wenige Einträge in der Tabelle ändern.

$f(t)$	$F(s)$	$Y_p(s)$	$y_p(t)$
t^n	$n!/s^{n+1}$	$\sum_{k=0}^n \frac{c_{k+1}}{s^{k+1}}$	$p_n(t)$
$e^{\alpha t}$ $\alpha \neq \lambda$	$1/(s - \alpha)$	$c/(s - \alpha)$	$c e^{\alpha t}$
$e^{\alpha t}$ $\alpha = \lambda$	$1/(s - \alpha)$	$\sum_{k=0}^3 \frac{c_{k+1}}{(s - \alpha)^{k+1}}$	$e^{\alpha t} p_3(t)$
$t^n e^{\alpha t}$ $\alpha \neq \lambda$	$n!/(s - \alpha)^{n+1}$	$\sum_{k=0}^n \frac{c_{k+1}}{(s - \alpha)^{k+1}}$	$e^{\alpha t} p_n(t)$
$t^n e^{\alpha t}$ $\alpha = \lambda$	$n!/(s - \alpha)^{n+1}$	$\sum_{k=0}^{n+2} \frac{c_{k+1}}{(s - \alpha)^{k+1}}$	$e^{\alpha t} p_{n+2}(t)$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b s}{s^2 + \beta^2}$	$a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)$ $= c \sin(\beta t + \delta)$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b s}{s^2 + \beta^2}$	$a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)$ $= c \sin(\beta t + \delta)$
$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t))$ $= c e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{s}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{a\beta + b(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t))$ $= c e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$

Tabelle 3.4: Laplaceterme von Inhomogenitäten ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)

3. Fall: $b^2 - 4ac < 0$ oder $\lambda = \mu \pm i\nu, \mu < 0$

In diesem Fall gilt

$$Y(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} F(s) = \frac{1}{(s - \mu)^2 + \nu^2} F(s)$$

Das Erstellen der entsprechenden Tabelle ist dem Leser überlassen (Übungsaufgabe).

3.2 Transferfunktionen

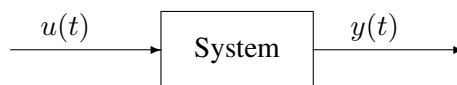
Transferfunktionen werden in der Regelungstechnik eingesetzt, um Systeme mathematisch zu beschreiben. Diese Technik basiert auf Laplacetransformationen. Eine ausführliche Darstellung ist in [Foe194] gegeben. Teile dieser Darstellung wurden aus [BurgGrah80, p. 39] übernommen.

3.2.1 Definition einer Transferfunktion

Sei $u(t)$ eine gegebene Funktion, die genügend oft differenzierbar ist. Nun betrachten wir eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $y(t)$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Dieses **System** kann auch schematisch dargestellt werden



Meistens ist $n > m$ und in vielen Fällen ist sogar $m = 0$, wodurch sich die rechte Seite zu $b_0 u$ vereinfacht.

Wir gehen davon aus, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der linken Seite dieser Gleichung alle negativen Realteil haben. Dann können wir, um das Verhalten für grosse Zeiten zu untersuchen, alle Anfangswerte 0 setzen und erhalten nach einer Laplacetransformation

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) U(s) .$$

mit den Definitionen

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

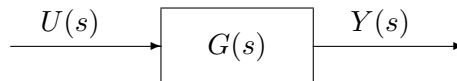
$$H(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$$

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)}$$

Es ergibt sich

$$Y(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} U(s) = G(s) U(s)$$

Die **Transferfunktion** $G(s)$ ist eine echt ($n > m$) gebrochene rationale Funktion. Das obige Diagramm kann nun auch für die Laplacetransformierten betrachtet werden. Das Verhalten des Systems ist durch $G(s)$ beschrieben.



3-10 Beispiel : Aus der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t)$$

wird durch Laplacetransformation

$$(s + 3) Y(s) = 2 U(s)$$

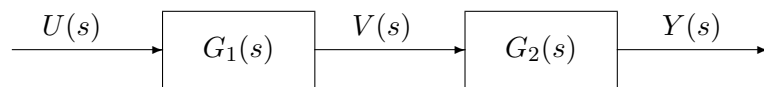
oder

$$Y(s) = \frac{2}{s + 3} U(s) = G(s) U(s)$$



3.2.2 Kombination von Transferfunktionen

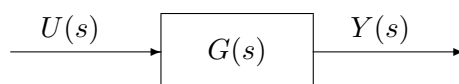
3–11 Beispiel : Zwei Systeme mit Transferfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ können in Serie geschaltet werden, d.h. der Ausgang des ersten Systems wird zum Eingang des zweiten Systems



Es gilt

$$V(s) = G_1(s) U(s) \quad Y(s) = G_2(s) V(s) = G_2(s) G_1(s) U(s)$$

Somit kann das obige Diagramm ersetzt werden durch

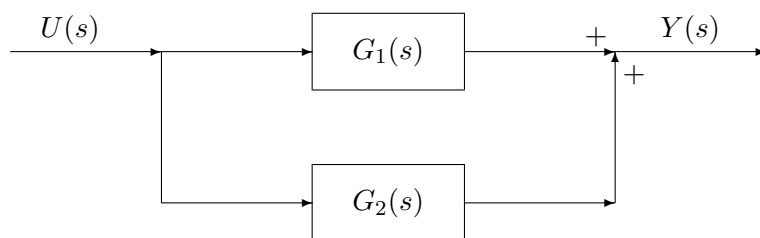


wobei

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

◇

3–12 Beispiel : Zwei Systeme mit Transferfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ können auch parallel geschaltet werden.



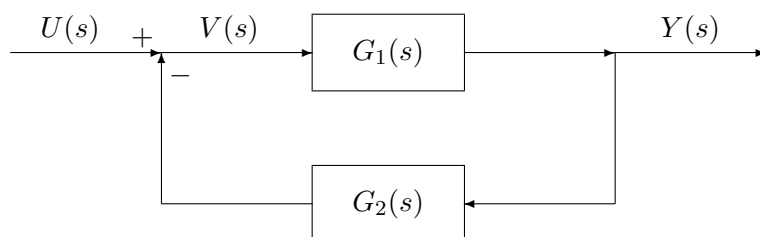
Es gilt also

$$Y(s) = G_1(s) U(s) + G_2(s) U(s) = (G_1(s) + G_2(s)) U(s)$$

d.h. die Transferfunktionen werden addiert.

◇

3–13 Beispiel : Die beiden Systeme können auch anders zusammengehängt werden. Man erhält ein System mit Feedback.



In diesem Diagramm gilt

$$V = U - G_2 Y \quad , \quad Y = G_1 V$$

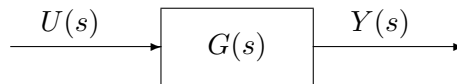
eliminiert man in diesen beiden Gleichungen v , so ergibt sich

$$Y = G_1 V = G_1 (U - G_2 Y) = G_1 U - G_1 G_2 Y$$

und somit

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} U$$

Somit kann das obige Diagramm ersetzt werden durch

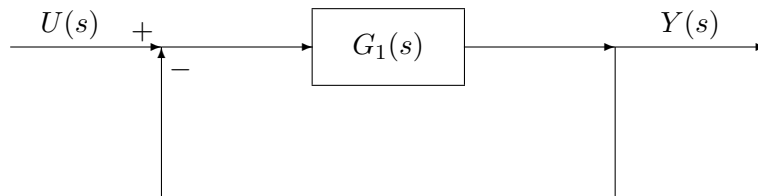


wobei die neue Transferfunktion $G(s)$ gegeben ist durch

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1 G_2(s)}.$$

◇

3–14 Beispiel : Als Spezialfall des obigen Beispiel tritt die folgende Situation auf.



Der Ausgang wird negativ rückgekoppelt zum Eingang. Um die Stabilität dies **Closed-Loop-Systems** zu untersuchen, muss man untersuchen, ob die Transferfunktion

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{G_1(s)}}$$

Polstellen mit positivem Realteil hat. Dazu kann das **Nyquist-Theorem** verwendet werden (siehe Seite 181). Man „misst“ die Transferfunktion des **Open-Loop-Systems** indem man Signale der Form $\sin(\omega t)$ für $0 < \omega < \infty$ eingibt und Amplitude und Phasenverschiebung festhält. Daraus ist der Nyquist-Plot zu erstellen. Dann kann das Stabilitätsverhalten des Closed-Loop-Systems abgelesen werden. ◇

3.2.3 Sprungantwort und Impulsantwort

Oft werden Systeme beschrieben durch ihre Reaktion auf bestimmte Eingangssignale. Bei realen Systemen kann die Reaktion auf bestimmte Eingangssignale auch ausgemessen werden.

Sprungantwort (français: réponse transitoire)

Als erstes Beispiel untersuchen wir die Schrittfunktion

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

Die Laplacetransformation dieser Sprungfunktion ist $\frac{1}{s}$. Bei einer Übertragungsfunktion $G(s)$ und einem Ausgangssignal $y(t)$ gilt

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Sei $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t)$. Wegen

$$G(s) = s Y(s) = \mathcal{L}[\dot{y}(t)] + y(0)$$

ist die Transferfunktion $G(s)$ die Laplacetransformation der Zeitableitung der Sprungantwort $y(t)$.

Oft können Sprungantworten $y(t)$ gemessen werden. Dann kann durch Ableiten und Laplacetransformieren die Transferfunktion des Systems gefunden werden. Man kann auch die Laplacetransformation von $Y(s)$ durch s dividieren.

Impulsantwort

Die Laplacetransformation der Delta-Funktion $\delta(t)$ ist gegeben durch $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Somit deuten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau &= U(t) \\ s \cdot \mathcal{L}[U(t)] &= 1 = \mathcal{L}[\delta(t)] \\ \mathcal{L}[f'](s) &= s \mathcal{L}[f](s) - f(0) \end{aligned}$$

auf die (formale) Beziehung

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} U(t) \quad \text{oder} \quad \delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} U(t - t_0)$$

d.h. die Delta-Funktion ist die Ableitung der Sprungfunktion. Diese Beziehung ist aber mit etlicher Vorsicht zu verwenden, da die Sprungfunktion **nicht differenzierbar** ist.

Verwendet man bei einem System die Delta-Funktion als Eingang, so erhält man als Ausgangssignal $y(t)$ mit

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot \mathcal{L}[\delta](s) = G(s) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t) = g(t) \end{aligned}$$

d.h. die Laplacetransformation der Impulsantwort ergibt die Transferfunktion $G(s)$ des Systems.

3.3 Nyquist Plots

3.3.1 Lokalisieren von Nullstellen, Kriterium von Nyquist

Das folgende Kriterium zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms durch das Verhalten von gewissen Kurven gegeben ist. Ziel der folgenden Überlegungen ist eine Version des *Prinzips vom Argument* (siehe Seite 180), um Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen in einem Gebiet der komplexen Ebene zu zählen. Mit Hilfes dieses Resultates kann anschliessend ein Nyquist-Plot (siehe Seite 181) eines offenen Regelkreises untersucht werden, um das Stabilitätsverhalten des geschlossenen Kreises zu untersuchen.

3–15 Satz : (Prinzip vom Argument)

Sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω in der komplexen Ebene umschlossen durch die Kurve C . Die Kurve wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

ein komplexes Polynom. Keine der Nullstellen liege auf der Kurve C . Dann ist die Anzahl der Nullstellen im Gebiet Ω gegeben durch die Anzahl der vollen Umrundungen (im Uhrzeigersinn) von 0 durch die Kurve $f(z)$ wenn z entlang der Kurve C variiert.

Beweis : Das Polynom kann zerlegt werden in Linearfaktoren der Form

$$f(z) = a_n (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

wobei z_k die (unbekannten) Nullstellen sind. Also gilt für das Argument (Winkel)

$$\arg f(z) = \arg a_n + \arg(z - z_1) + \arg(z - z_2) + \dots + \arg(z - z_n)$$

Durchläuft z die Kurve C , so ist die Änderung $\Delta \arg f(z)$ des Arguments gleich dem 2π -fachen der Anzahl der vollen Umläufe um 0.

$$\Delta \arg f(z) = \Delta \arg a_n + \Delta \arg(z - z_1) + \Delta \arg(z - z_2) + \dots + \Delta \arg(z - z_n)$$

Da a_0 eine Konstante ist, gilt $\Delta a_0 = 0$. Eine Zeichnung zeigt, dass

$$\Delta \arg(z - z_k) = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } z_k \text{ im Inneren von } C \\ 0 & \text{falls } z_k \text{ ausserhalb von } C \end{cases}$$

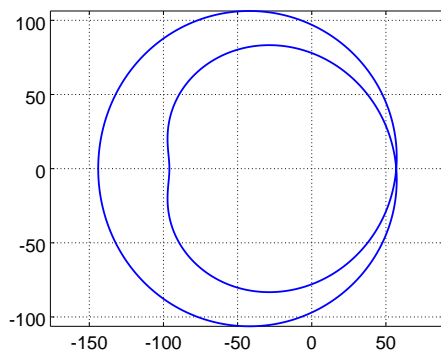
□

3–16 Beispiel : Als Kurve C betrachten wir den Kreis mit Radius 2 um den Ursprung und untersuchen die beiden Polynome

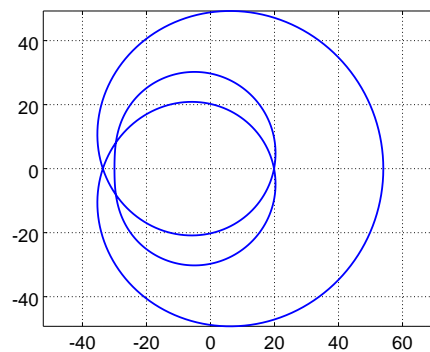
$$f_1(z) = (z^2 + 2)(z - 6)(z + 4) \quad \text{und} \quad f_2(z) = (z^2 + 2)(z - 0.5)(z + 4)$$

somit hat f_1 zwei Nullstellen innerhalb des Kreises und f_2 deren drei. Dies wird durch die beiden Graphen in Abbildung 3.1 illustriert. Diese wurden erzeugt mit *Octave*.

```
t = linspace(0,2*pi,500);    z = 2*exp(i*t);
f1 = (z.^2+2).*(z-6).*(z+4);
plot(f1);    axis equal
```



(a) $f_1(z) = (z^2 + 2)(z - 6)(z + 4)$



(b) $f_2(z) = (z^2 + 2)(z - 0.5)(z + 4)$

Abbildung 3.1: Zählen der Nullstellen zweier Funktionen innerhalb eines Kreises mit Radius 2

◇

3–17 Satz : (Prinzip vom Argument, Nullstellen und Pole)

Sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω in der komplexen Ebene umschlossen durch die Kurve C . Die Kurve wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Polynome $f_1(z)$ und $f_2(z)$ werden dividiert und man betrachtet die gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

Keine der Nullstellen oder Pole von $f(z)$ dürfen auf der Kurve C liegen. Sei

N = Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ innerhalb des Gebietes

P = Anzahl der Pole von $f(z)$ innerhalb des Gebietes

dann gilt

$$N - P = \text{Anzahl der vollen Umrundungen von } 0 \text{ durch die Kurve } f(z)$$

Beweis : Eine Nullstelle führt zu einem Umlauf im Uhrzeigersinn, eine Polstelle zu einem Umlauf im Gegenuhrzeigersinn. \square

3.3.2 Der Nyquist-Plot eines Systems

In Beispiel 3–14 sehen Sie wie die obige Idee verwendet werden kann, um spezielle (wichtige) Regelsysteme zu messen. Sei $G(s)$ eine Transferfunktion eines Open-Loop-Systems und G **habe keine Polstelle in der rechten Halbebene**. Dann hat auch $G(s) + 1$ keine Polstelle mit positivem Realteil. Die Transfer-Funktion des Closed-Loop-Systems ist gegeben durch

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + 1/G(s)}$$

Das Open-Loop-System kann oft ausgemessen werden, aber es ist manchmal schwierig (oder zu gefährlich) das Closed-Loop-System direkt auszumessen. Die Rückkopplung könnte das System überlasten. Aus diesem Grund möchte man von der Lage der Polstellen von $G(s)$ auf die Lage der Polstellen von $T(s)$ schliessen. Nun läuft man mit dem Argument $s \in \mathbb{C}$ entlang einer Kurve C und umrundet somit ein Gebiet Ω .

$$\begin{aligned} K &= \{\text{Anzahl der Umrundungen von } -1 \text{ durch } G(s)\} \\ &= \{\text{Anzahl der Umrundungen von } 0 \text{ durch } G(s) + 1\} \\ &= \{\text{Anzahl der } 0\text{-Stellen}\} - \{\text{Anzahl der Pol-Stellen von } G(s) + 1 \text{ im Gebiet } G\} \\ &= \{\text{Anzahl der } 0\text{-Stellen von } G(s) + 1\} - 0 \\ &= \{\text{Anzahl der Pol-Stellen von } \frac{G(s)}{G(s) + 1}\} \\ &= \{\text{Anzahl der Pol-Stellen von } T(s) \text{ im Gebiet } \Omega\} \end{aligned}$$

In der obigen Rechnung wird verwendet, dass $G(s)$ keine Polstelle hat im Gebiet Ω . Nun betrachten wir eine Kurve C und eine echt gebrochen rationale Funktion $G(z)$. Die Kurve C laufe entlang der imaginären Achse von $-iR$ zu iR , dann mittels eines Halbkreises in der rechten Halbebene zurück zu $-iR$. Hierbei ist R ein sehr grosser Radius. Eine solche Kurve heisst auch **Nyquist-Kontour**. Der Wert von R ist so gross zu wählen, dass alle (-1) -Stellen von $G(z)$ in der rechten Halbebene umschlossen werden. Da $G(s)$ eine **echt** gebrochen rationale Funktion ist gilt für $|z| = R \gg 1$ die Approximation $G(z) \approx 0$ und somit reduziert sich der durch den Halbkreis entstehende Teil der Kurve (fast) auf den Nullpunkt. Für die Zählung

der (-1) -Stellen ist nur der Weg entlang der imaginären Achse relevant. Diese Überlegungen führen auf das Stabilitätskriterium von **Nyquist**.

3–18 Theorem : (Nyquist–Plot)

Sei $G(z)$ eine echt gebrochen rationale Funktion, die keine rein imaginären Nullstellen und Polstellen hat. $G(s)$ habe auch keine Polstellen mit positivem Realteil. In der komplexen Ebene ist die durch die Funktion $G(is)$ für $-\infty < s < \infty$ entstehende Kurve aufzuzeichnen. Das ergibt den **Nyquist–Plot**. Die Anzahl der Umrundungen von -1 entspricht der Anzahl der Polstellen der Funktion

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + 1/G(s)}$$

mit positivem Realteil.

Für Simulationen oder Rechnungen ist das Nyquistkriterium von geringem Nutzen, da man auch direkt die Nullstellen der entsprechenden Polynome bestimmen kann. Dies ist sogar einfacher. Das Nyquist–Diagramm kann aber auch **gemessen** werden (Stichworte: Open/closed loop, offener/geschlossener Regelkreis).

3–19 Beispiel : Das Polynom $f(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 5$ hat nur Nullstellen mit negativem Realteil. Deshalb hat die echt gebrochen rationale Funktion $G(s) = 1/f(s)$ keine Polstelle mit positivem Realteil. Die Nullstellen von $f(s) + 1$ sind gegeben durch $x_{1,2} \approx -0.14 \pm i 1.87$ und $x_3 \approx -1.71$. Somit hat die Funktion

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1/f(s)}{1/f(s) + 1} = \frac{1}{1 + f(s)}$$

keine Polstelle mit positiven Realteil. Der Nyquist-Plot umläuft die Zahl -1 nicht (siehe Abbildung 3.2). Die Abbildung wurde erzeugt durch den untenstehenden Octave/MATLAB–Code.

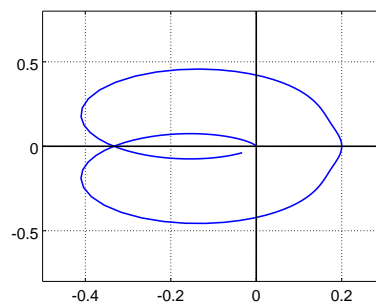


Abbildung 3.2: Nyquist-Plot von $1/(s^3 + 2s^2 + 4s + 5)$

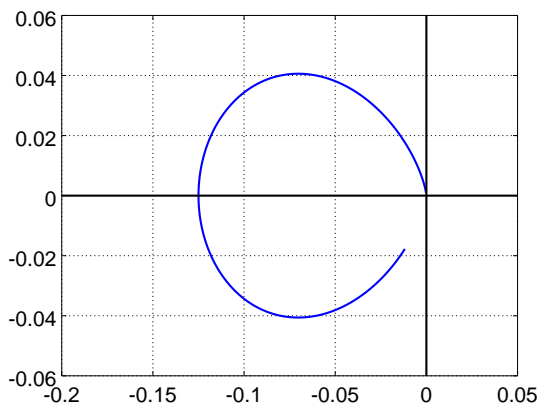
```
iomega = i*linspace(-3,10,500);
G = 1./(iomega.^3 + 2*iomega.^2 + 4*iomega+5);
plot(real(G),imag(G),'b', [-0.5 0.3], [0 0], 'k', [0 0], [-0.8 0.8], 'k')
axis([-0.5 0.3 -0.8 0.8])
```



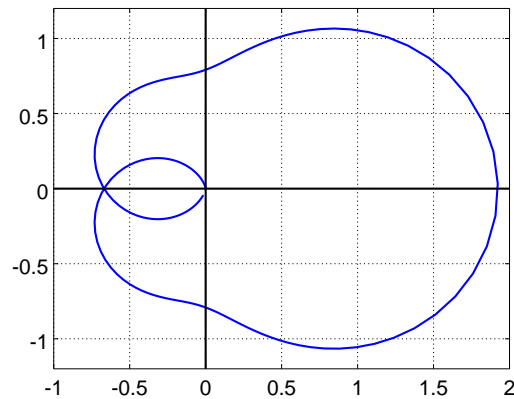
3–20 Beispiel : Das Polynom $f(s) = (s + 2)^2 (s - 2)$ hat eine Nullstelle mit positivem Realteil. Das Theorem 3–18 lässt sich eigentlich nicht anwenden, da die Funktion $G(s) = 1/f(s)$ eine Polstelle bei $s = 2$ hat. Die Anzahl der Umrundungen ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $G(s) + 1$ minus der Anzahl der Polstellen von $G(s) + 1$. Da wir wissen, dass die Funktion $G(s)$ eine Polstelle mit positivem Realteil hat und der Nyquistplot in Abbildung 3.3(a) die Zahl -1 nicht umrundet, muss die Funktion

$$T(s) = \frac{G(s)}{G(s) + 1} = \frac{1}{1 + f(s)}$$

eine Polstelle mit positivem Realteil haben.



(a) $1/((s + 2)^2 (s - 2))$



(b) $1/(s^3 + 0.9s^2 + 2.24s + 0.52)$

Abbildung 3.3: Nyquist Plots von zwei Funktionen

Die Nullstellen von $f(s) + 1$ sind gegeben durch $x_1 \approx -2.47$, $x_2 \approx -1.46$ und $x_3 \approx 1.93$. Dies bestätigt das obige Resultat. \diamond

3–21 Beispiel : Das Polynom $f(s) = s^3 + 0.9s^2 + 2.24s + 0.52$ hat keine Nullstelle mit positivem Realteil. Den Nyquist-Plot von $G(s) = 1/f(s)$ finden Sie in Abbildung 3.3(b).

Die Zahl -1 wird nicht umrundet. Somit hat die Funktion

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1/f(s)}{1/f(s) + 1}$$

keine Polstelle mit positiven Realteil.

Die Nullstellen von $f(s) + 1$ sind gegeben durch $x_1 \approx -0.72$ und $x_{2,3} \approx -0.09 \pm i 1.45$. \diamond

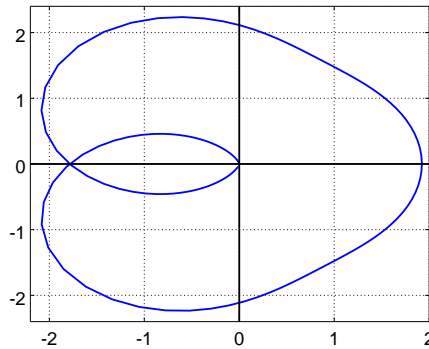
3–22 Beispiel : Das Polynom $f(s) = s^3 + 0.9s^2 + 1.24s + 0.52$ hat keine Nullstelle mit positivem Realteil. Die Transferfunktion $G(s) = 1/f(s)$ hat somit keine Polstelle mit positivem Realteil. Den Nyquist-Plot von $G(s)$ finden Sie in Abbildung 3.4.

Die Zahl -1 wird zweimal umrundet. Somit hat die Funktion

$$T(s) = \frac{G(s)}{G(s) + 1} = \frac{1}{1 + f(s)}$$

zwei Polstellen mit positivem Realteil.

Die Nullstellen von $f(s) + 1$ sind gegeben durch $x_1 \approx -1.07$ und $x_{2,3} \approx 0.085 \pm i 1.19$. \diamond

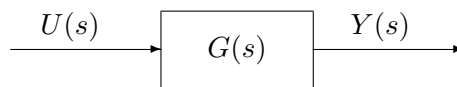
Abbildung 3.4: Nyquist-Plot von $1/(s^3 + 0.9s^2 + 1.24s + 0.52)$

3.4 Frequenzgang, Bode Plots

In vielen Anwendungen werden Frequenzgang und Bode Plots von Systemen untersucht².

3.4.1 Grundlage und Berechnung

Wir betrachten ein System



wobei die gebrochen rationale Transferfunktion

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)}$$

gegeben ist. Wir gehen davon aus, dass alle Nullstellen des Polynoms $Q(s)$ negativen Realteil haben. Nun betrachten wir die spezielle Funktion

$$u(t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) = e^{i\omega t}$$

deren Laplacetransformierte als

$$U(s) = \frac{1}{s - i\omega}$$

berechnet werden kann. Somit ist $Y(s)$ die Reaktion des Systems auf ein periodisches Signal mit Amplitude 1 und Kreisfrequenz ω . Das Verhalten von Systemen auf Signale dieser Art ist in vielen Anwendungen wichtig. Deshalb wurden spezielle Methoden (und Notationen) entwickelt für deren Behandlung.

Es gilt

$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} \frac{1}{s - i\omega}$$

Wir gehen davon aus, dass $Q(i\omega) \neq 0$. Die Nullstellen von $Q(s)$ sind q_j , d.h. $Q(s) = \prod_j (s - q_j)$. Nun hat die Partialbruchzerlegung die Gestalt

$$\frac{H(s)}{Q(s) (s - i\omega)} = \frac{a}{s - i\omega} + \sum_j \frac{c_j}{s - q_j} = \frac{a}{s - i\omega} + \text{Rest} = \frac{a Q(s) + (s - i\omega) R(s)}{Q(s) (s - i\omega)}$$

²réponse harmonique, courbe des fréquences

Durch die Rücktransformation werden alle Terme im Rest zu exponentiell abfallenden Ausdrücken und tragen somit nur zum Einschwingverhalten des Systems bei. Die Konstante a kann bestimmt werden, indem man in der resultierenden Gleichung der Nenner

$$H(s) = a Q(s) + (s - i\omega) R(s)$$

den speziellen Wert $s = i\omega$ einsetzt. Man erhält

$$H(i\omega) = a Q(i\omega)$$

oder auch

$$a = G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

Die entsprechende partikuläre Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist

$$y(t) = G(i\omega) e^{i\omega t} = |G(i\omega)| e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Deshalb spricht man zurecht von

$$\text{Verstärkungsfaktor} = |G(i\omega)|$$

$$\text{Phasenverschiebung} = \varphi(\omega) = \arg G(i\omega)$$

Zeichnet man die Graphen von $20 \log_{10} |G(i\omega)|$ (Dezibelskala) und von $\arg G(i\omega)$ als Funktion von ω mit einer logarithmischen Skala für die Winkelgeschwindigkeit ω , so erhält man die **Bode-Plots** des Systems. Eine logarithmische Skala für ω erlaubt es sehr grosse Frequenzbereiche abzudecken.

Hier ist ein Octave-Programm um die Daten für Bode-Plots zu berechnen.

mybode.m

```
function [amp,phase] = mybode(num,den,w)
% [amp,phase] = mybode(num,den,w)
%
%   compute data for Bode plots of the rational function num/den
%   num and den are vectors with the coefficients of the numerator
%   and denominator polynomials.
%   w is a vector of frequencies for which amplitude and phase of the
%   transfer function are computed

points = length(w);
amp = zeros(1,points);
phase = zeros(1,points);
for k = [1:points]
    tmp = polyval(num,i*w(k)) / polyval(den,i*w(k));
    amp(k) = abs(tmp);
    phase(k) = angle(tmp);
end%for
```

Es gibt für Octave ein spezielles Paket `control`, zu finden auf Auf SourceForge mit dem Link <http://octave.sourceforge.net/>. Für weitere Beispiele wird dieses Paket verwendet.

In Anwendungen hat man manchmal mehrere Systeme hintereinander geschaltet, der Output des ersten Systems wird zum Input des zweiten.



Mit dem Signal zwischen den beiden Systemen als Hilfsgrösse erhält man die Gesamtübertragungsfunktion

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

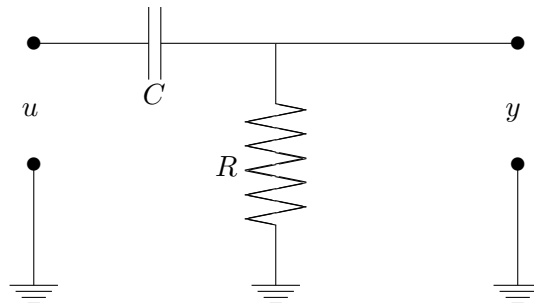
und somit

$$\begin{aligned} |G(s)| &= |G_1(s)| |G_2(s)| \\ \log_{10} G(s) &= \log_{10} G_1(s) + \log_{10} G_2(s) \\ \arg G(s) &= \arg G_1(s) + \arg G_2(s) \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Bode-Plots des Gesamtsystems als punktweise Summe der Bode-Plots der beiden Einzelsysteme.

3.4.2 Ein Hochpass Filter

Betrachte den elementaren Schaltkreis



Für den Strom I durch die Kapazität C gilt:

$$C \frac{d}{dt} (u - y) = \frac{y}{R}$$

Dies führt zur linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung für die Ausgangsspannung $y(t)$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \dot{u}(t)$$

mit der gegebenen Eingangsspannung $u(t)$. Dies führt zu

$$Y(s) = \frac{s RC}{s RC + 1} U(s)$$

Die Übertragungsfunktion ist somit

$$G(s) = \frac{s RC}{s RC + 1}$$

Für die Elemente

$$R = 10 \text{ k}\Omega \quad \text{und} \quad C = 22 \mu\text{F}$$

können wir nun die Bode-Plots für den Verstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung erstellen. Man erhält die Abbildungen 3.5.

Octave Die Funktionen `tf()` (**T**ransfer **F**unktion) und `bode()` sind im Package `control` enthalten. Somit muss dieses zuerst geladen werden durch den Befehl `pkg load control`.

MATLAB Die Funktionen `tf()` und `bode()` sind in der Control Toolbox enthalten. Somit muss Ihre Installation diese beinhalten, damit der Beispiel Code das gewünschte Resultat erzeugt.

Hochpass.m

```
%pkg load control % nur in Octave notwendig
R = 10^4; C = 22*10^(-6);
w = logspace(-2,4.5,100);
sys = tf([R*C,0],[R*C,1]);
[amp,phase] = bode(sys,w);
amp = squeeze(amp); phase = squeeze(phase); % only for Matlab
ampDB = 20*log10(amp);
figure(1);
semilogx(w,ampDB)
grid on
title('Einfacher Hochpass-Filter, Amplitude')
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Magnitude [dB]')
axis([1e-2 1e5 -60 10])
figure(2);
semilogx(w,phase)
grid on
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Phase [deg]')
axis([1e-2 1e5 -10 100])
title('Einfacher Hochpass-Filter, Phasenverschiebung')

figure(3)
bode(sys)
```

Mit der Funktion `bode()` in *Octave/MATLAB* können auch direkt beide Bode-Plots erzeugt werden. Der Befehl `bode()` wählt den zu zeichnenden Frequenzbereich automatisch aus. Durch Angabe von zusätzlichen Argumenten kann der Frequenzbereich auch selbst gewählt werden, verwende `help bode`.

```
bode(sys)
```

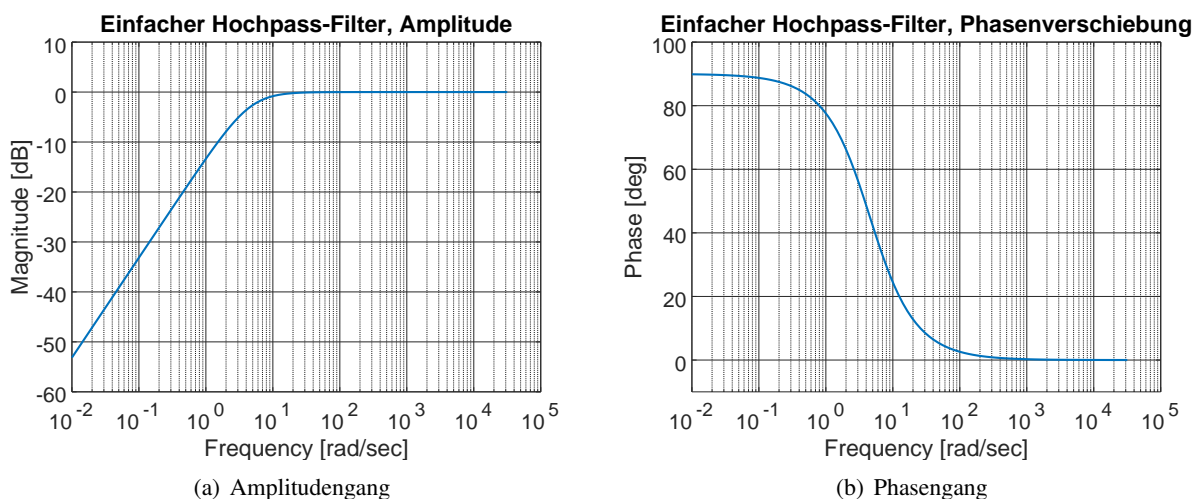


Abbildung 3.5: Bode Plots eines Hochpassfilters

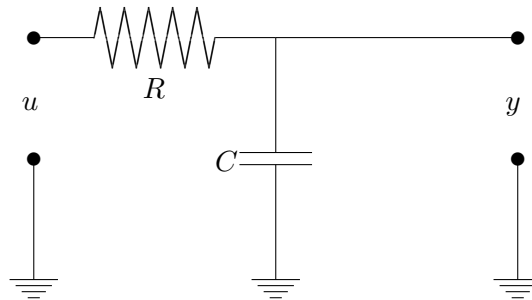
Bei Bode Plots muss beachtet werden ob auf der horizontalen Achse die Winkelgeschwindigkeit ω (Einheit $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$) oder die Frequenz ν (Einheit $\frac{1}{\text{sec}}$) verwendet wird. Es gilt

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi \nu$$

Wegen $\log \omega = \log(2\pi) + \log \nu$ entspricht dies einer horizontalen Verschiebung der Achsen in den Bode-Plots.

3.4.3 Ein Tiefpass Filter

Betrachte den Schaltkreis



Für den Strom I durch die Kapazität C gilt:

$$C \frac{d}{dt} y = \frac{u - y}{R}$$

Dies führt zur linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung für die Ausgangsspannung $y(t)$

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

mit der gegebenen Eingangsspannung $u(t)$. Dies führt zu

$$Y(s) = \frac{1}{sRC + 1} U(s)$$

Die Übertragungsfunktion ist somit

$$G(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

Für die Elemente

$$R = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{und} \quad C = 10 \text{ nF}$$

können wir nun die Bode-Plots für den Verstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung erstellen. Man erhält die Abbildungen 3.6.

Tiefpass.m

```
R = 10^3; C = 10^(-8);
w = logspace(0.5, 7, 100);
sys = tf([1], [R*C, 1]);
[amp, phase] = bode(sys, w);
amp = amp(:); phase = phase(:); % necessary for Matlab only
ampDB = 20*log10(amp);
figure(1);
semilogx(w, ampDB)
grid on; axis([1 1e7 -50 10]); title('Einfacher Tiefpass-Filter, Amplitude')
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Magnitude [dB]')

figure(2);
semilogx(w, phase)
title('Einfacher Tiefpass-Filter, Phasenverschiebung')
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Phase [grad]')
grid on; axis([1 1e7 -100 10]);
```

Aufgabe 3–37 auf Seite 218 ergänzt die beiden vorangehenden Beispiele und untersucht einen einfachen, passiven Bandpassfilter.

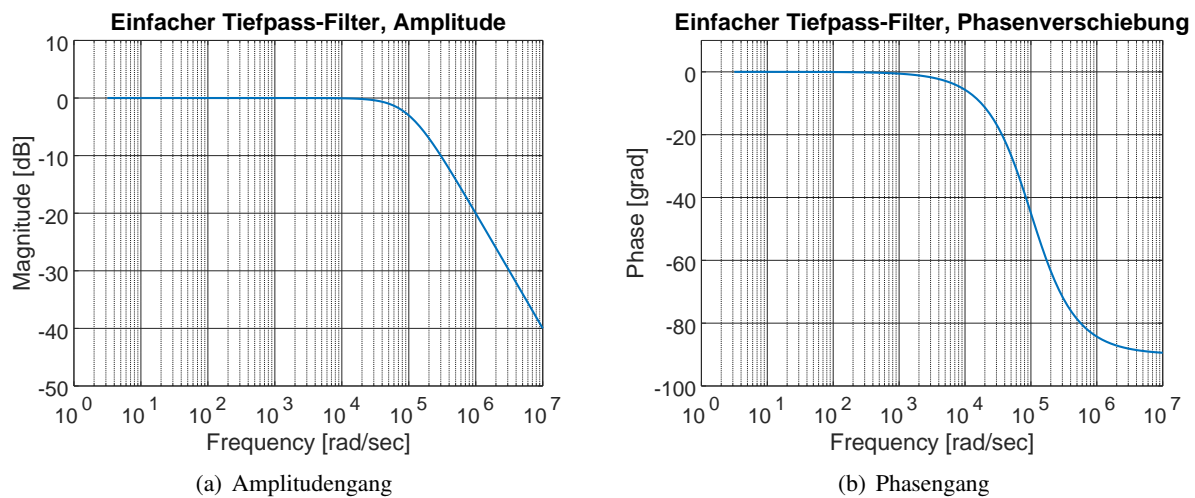


Abbildung 3.6: Bode Plots eines Tiefpassfilters

3.4.4 Von Bode-Plots zu einem Nyquist-Plot

Sind von einem System die Bodeplots für Amplitude und Phase bekannt, so kann der Nyquist-Plot daraus konstruiert werden. Das folgende Beispiel illustriert das Vorgehen.

3-23 Beispiel : Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch

$$G(s) = \frac{-10s}{10s^2 + 4s + 10}$$

(a) Untersuchen Sie den Bode-Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\omega$

um den Bode-Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 100$.

(b) Mit Hilfe der Bode-Plots soll der Nyquist-Plot des Systems skizziert werden.

Lösung:

(a) Es sind nur die jeweils grossen Terme in $G(i\omega)$ zu berücksichtigen

- ω gross: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den grössten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{-10i\omega}{10(i\omega)^2 + 4i\omega + 10} \right| \approx \left| \frac{-i10\omega}{-10\omega^2} \right| = \frac{1}{\omega}$$

$$20 \log |G(i\omega)| \approx -20 \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung -20 und Achsenabschnitt 0 bei $\log(\omega) = 0$.

- ω klein: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den kleinsten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{-10i\omega}{10(i\omega)^2 + 4i\omega + 10} \right| \approx \left| \frac{-i10\omega}{10} \right| = \omega$$

$$20 \log |G(i\omega)| \approx +20 \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung +20 und Achsenabschnitt 0.

- Bei $\omega = 1$ erhalten wir

$$G(i1) = \frac{-10i}{-10 + 4i + 10} = -\frac{5}{2}$$

Diese beiden Geraden können nun eingezeichnet werden. Wegen $0.01 < \omega < 100$ ist der zu zeichnende Bereich $-2 < \log \omega < 2$. Da $\log \frac{5}{2} > 0$ ist, wird der Punkt bei $\omega = 1$ nach oben verschoben.

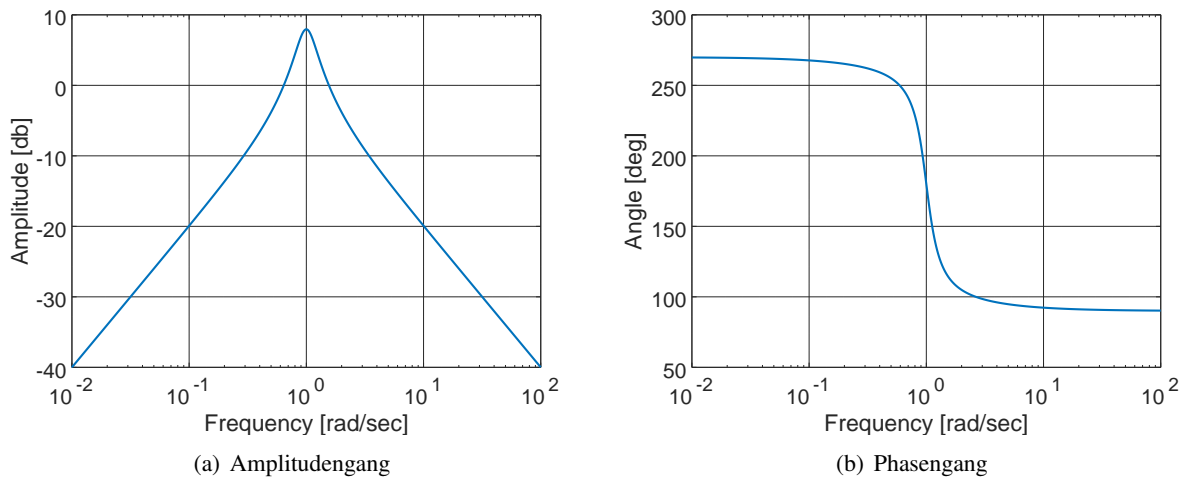


Abbildung 3.7: Bode Plots eines Systems

- (b) Um den Nyquist-Plot in Abbildung 3.8 zu erzeugen, müssen die beiden Bode-Plots in Abbildung 3.7 zu Rate gezogen werden. Für jeden Wert von ω kann die Amplitude und das Argument der komplexen Zahl $G(i\omega)$ in den Graphiken abgelesen werden. Diese Zahl erzeugt dann einen Punkt des Nyquist-Plots. Die untenstehende Tabelle (mit geschätzten Werten) zeigt, dass für $0 < \omega < 100$ fast eine kreisähnliche Figur in der komplexen abgefahren wird, mit Start- und End-Punkt im Ursprung. Für einen vollständigen Plot ist noch die an der reellen Achse gespiegelte Kurve zu zeichnen. In diesem Beispiel unterscheiden sie sich nicht vom ersten Teil der Kurve. Das Resultat ist in Abbildung 3.8 gezeigt.

Werte von ω	Argument ϕ	Betrag b
$\omega = 0.01$	$\phi = 270^\circ$	$b = \frac{1}{100}$
$0.01 < \omega < 0.1$	$270^\circ > \phi > 265^\circ$	$\frac{1}{100} < b < \frac{1}{10}$
$0.1 < \omega < 1$	$265^\circ > \phi > 180^\circ$	$\frac{1}{10} < b < 2.5$
$1 < \omega < 10$	$180^\circ > \phi > 95^\circ$	$2.5 > b > \frac{1}{10}$
$10 < \omega < 100$	$95^\circ > \phi > 90^\circ$	$\frac{1}{10} > b > \frac{1}{100}$

Mit Hilfe von Octave/MATLAB können die Bode und Nyquist Plots auch erzeugt werden.

Bode2Nyquist.m

```
iomega = i*logspace(-2,2,500);
G = -10*iomega./(10*iomega.^2 + 4*iomega+10);

figure(1); semilogx(abs(iomega),20*log10(abs(G)))
xlabel('Frequency'); ylabel('Amplitude [dB]')

figure(2); semilogx(abs(iomega),mod(angle(G),2*pi)*180/pi)
xlabel('Frequency'); ylabel('Angle')
```

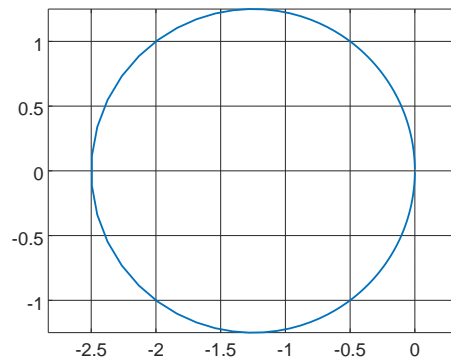


Abbildung 3.8: Nyquist-Plot eines Systems

```
figure(3); plot(real(G), imag(G))
axis equal
```



Aufgaben 3–29, 3–30, 3–32 und 3–33 (ab Seite 212) sind sehr ähnlich zum obigen Beispiel.

3.4.5 Ein praktisch eingesetzter Tiefpass Filter

Die folgende Schaltung wird in der Zeitschrift MC (Ausgabe April 94, p. 164) als Tiefpassfilter vorgeschlagen um hohe Frequenzen zu eliminieren. Sie ist Teil eines Projektes um auf einem PC über den Drucker-Port einen Lautsprecher anzusteuern und Musik von brauchbarer Qualität zu erzeugen. Schwingungen mit Frequenzen grösser als 16 kHz können von den meisten Menschen nicht wahrgenommen werden und werden höchstens als störend empfunden. Betrachten Sie die Spannung u_0 als gegeben und u_4 als gesuchte Grösse.

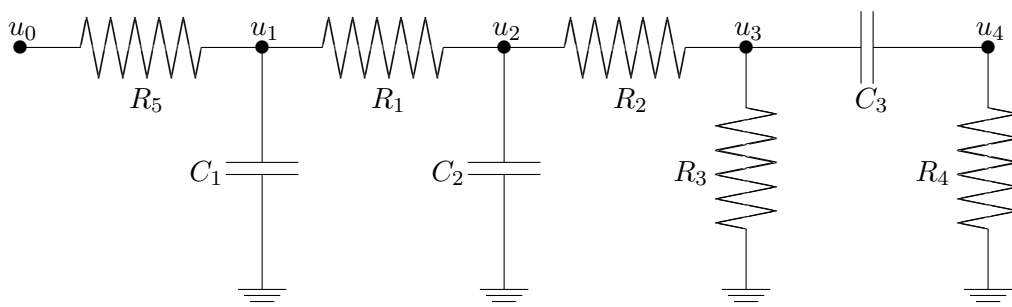


Abbildung 3.9: Ein verbesserter Tiefpass-Filter

Die Daten für die Elemente sind

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 1 \text{ k}\Omega & C_1 &= 10 \text{ nF} \\
 R_2 &= 1 \text{ k}\Omega & C_2 &= 6.8 \text{ nF} \\
 R_3 &= 470 \text{ }\Omega & C_3 &= 22 \text{ }\mu\text{F} \\
 R_4 &= 10 \text{ k}\Omega & & \\
 R_5 &= 20 \text{ k}\Omega & &
 \end{aligned}$$

Herleitung der Gleichungen

Nun können mit den Regeln von Kirchhoff die Gleichungen für die Ströme in den mit u_1, u_2, u_3 und u_4 beschrifteten Knoten aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_5}(u_0 - u_1) &= \frac{1}{R_1}(u_1 - u_2) + C_1 \dot{u}_1 \\ \frac{1}{R_1}(u_1 - u_2) &= \frac{1}{R_2}(u_2 - u_3) + C_2 \dot{u}_2 \\ \frac{1}{R_2}(u_2 - u_3) &= \frac{1}{R_3}u_3 + C_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_4) \\ C_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_4) &= \frac{1}{R_4}u_4\end{aligned}$$

Durch elementare Umformungen erhält man

$$\begin{aligned}C_1 R_5 R_1 \dot{u}_1 + u_1(R_5 + R_1) - R_1 u_0 &= R_5 u_2 \\ C_2 R_2 R_1 \dot{u}_2 + u_2(R_2 + R_1) - R_2 u_1 &= R_1 u_3 \\ R_3 R_4 u_2 - (R_3 + R_2) R_4 u_3 &= R_2 R_3 u_4 \\ R_4 C_3 \dot{u}_3 &= u_4 + R_4 C_3 \dot{u}_4\end{aligned}$$

Geht man nun zu den Laplacetransformierten $U_k(s) = \mathcal{L}[u_k](s)$ über und setzt alle Anfangswerte $u_k(0) = 0$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}(s C_1 R_5 R_1 + R_5 + R_1) U_1 - R_1 U_0 &= R_5 U_2 \\ (s C_2 R_2 R_1 + R_2 + R_1) U_2 - R_2 U_1 &= R_1 U_3 \\ R_3 R_4 U_2 - (R_3 + R_2) R_4 U_3 &= R_2 R_3 U_4 \\ s R_4 C_3 U_3 &= (1 + s R_4 C_3) U_4\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares inhomogenes System von vier Gleichungen für die Unbekannten U_1, U_2, U_3 und U_4 , wobei wir uns schlussendlich nur für U_4 , abhängig von U_0 interessieren. In der Matrixschreibweise lautet dieses System

$$M \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 U_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei

$$M = \begin{bmatrix} (s C_1 R_5 R_1 + R_5 + R_1) & -R_5 & 0 & 0 \\ -R_2 & (s C_2 R_2 R_1 + R_2 + R_1) & -R_1 & 0 \\ 0 & R_3 R_4 & -(R_3 + R_2) R_4 & -R_2 R_3 \\ 0 & 0 & s R_4 C_3 & -(1 + s R_4 C_3) \end{bmatrix}$$

Lösung mit Octave/MATLAB

Setzt man im obigen Gleichungssystem $U_0 = 1$, so ist der Wert der Transferfunktion $T(s)$ gegeben durch die vierte Komponente U_4 der Lösung. Wegen der tridiagonalen Struktur dieser Matrix lässt sich dieses System

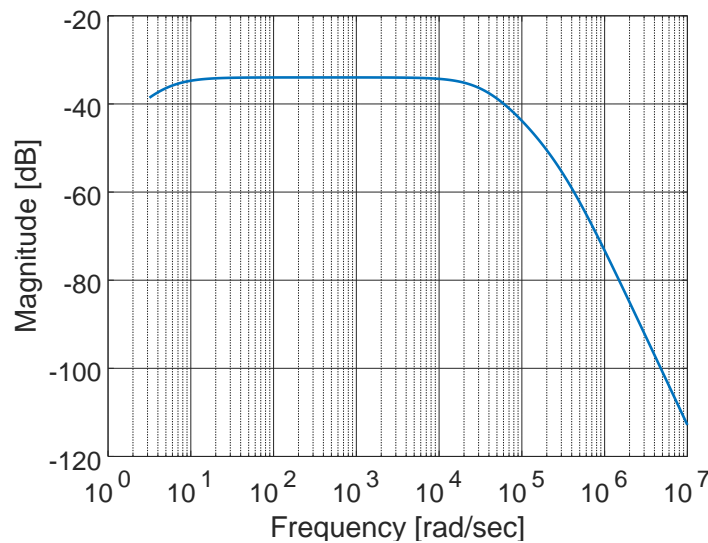


Abbildung 3.10: Bode Plot eines Tiefpass Filters

relativ leicht lösen. Allerdings ist zu beachten, dass mit Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen gerechnet werden muss. In Tabelle 3.5 finden Sie ein Stück Code in Octave um diese Gleichungen zu lösen. Da *Octave* (und *MATLAB*) nicht direkt mit Polynomen rechnen kann, muss das Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe der Verfahrens von Gauss programmiert werden. Es ist leicht möglich, den Bode-Plot des Filters für verschiedene Werte der Widerstände und Kapazitäten durchzurechnen und ihn so den Bedürfnissen anzupassen.

Um das Verfahren von Gauss auf Systeme von Gleichungen von Polynomen anwenden zu können, muss man Polynome addieren und multiplizieren können.

- Polynome werden in *Octave*/*MATLAB* durch ihre Koeffizienten dargestellt.

$$\begin{aligned} s^2 + 7s - 13 &\longrightarrow [1, 7, -13] \\ s^4 + 7s &\longrightarrow [1, 0, 0, 7, 0] \end{aligned}$$

- Um zwei Polynome zu addieren kann der Code `polyadd.m` verwendet werden.

```

polyadd.m
function r = polyadd (p,q)
% r = polyadd (p,q)
%   add two polynomials
if (nargin == 2)
    l = max(length(p),length(q));
%   r = prepad(p(:),l)+prepad(q(:),l);   % Octave only
    r = zeros(1,l);
    r(l-length(p)+1:end) = p;
    r(l-length(q)+1:end) = r(l-length(q)+1:end) + q;
else
    usage ('polyadd (p,q)');
end%if

```

- Um zwei Polynome zu multiplizieren kann der Faltungsbefehl `conv()` verwendet werden.

$$(s^2 + 7s - 13) \cdot (s^4 + 7s) \longrightarrow \text{conv}([1,7,-13],[1,0,0,7,0])$$

Filter.m

```

% data for the low pass filter in mc April 94, p. 164
% resistors
r1 = 10^3; r2 = 10^3; r3 = 470; r4 = 10^4; r5 = 2*10^4;
% capacitance
c1 = 10*10^(-9); c2 = 6.8*10^(-9); c3 = 22*(10^(-6));

% the different components of the matrix, written as polynomials
m11 = [r1*r5*c1, r1+r5]; m12 = [-r5];
m21 = [-r2]; m22 = [r1*r2*c2, r1+r2]; m23 = [-r1];
m32 = [r3*r4]; m33 = [-(r3+r2)*r4]; m34 = [-r2*r3];
m43 = [r4*c3, 0];
m44 = [-r4*c3, -1];
b1 = [r1]; b2 = [0]; b3 = [0]; b4 = [0];

% now use the Gauss algorithm to solve this system of equations
m12 = conv(m21,m12); %multiply first row by m21
b1 = conv(m21,b1);
m22 = conv(m11,m22); %multiply second row by m11
m23 = conv(m11,m23);
m22 = polyadd(m22,-m12); %subtract first row from second row
b2 = polyadd(b2,-b1);

m23 = conv(m32,m23); %multiply second row by m32
b2 = conv(m32,b2);
m33 = conv(m22,m33); %multiply third row by m22
m34 = conv(m22,m34);
m33 = polyadd(m33,-m23); %subtract second row from third row
b3 = polyadd(b3,-b2);

m34 = conv(m43,m34);
b3 = conv(m43,b3);
m44 = conv(m33,m44);
m44 = polyadd(m44,-m34);
b4 = polyadd(b4,-b3);

% the transfer function is now given by b4/m44 (both polynomials in s)
w = logspace(0.5,7.0,200);
[amp,phase] = bode(tf(b4,m44),w);
% amp = squeeze(amp); phase = squeeze(phase); % patch for Matlab only
figure(1)
semilogx(w,20*log10(amp));
grid on
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Magnitude [dB]')

figure(2)
semilogx(w,phase)
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('phase [deg]')

```

Tabelle 3.5: Octave-Code um Transferfunktion eines Filters zu bestimmen

Dieses Programm wird abgespeichert und liefert dann den Bode-Plot in Abbildung 3.10. Aus dem Graphen lässt sich ablesen, dass für grosse Werte von s die Approximation

$$G(s) \approx c \cdot s^{-2}$$

gilt. Dies ist qualitativ auch erklärbar durch die zwei in der Schaltung enthaltenen elementaren Tiefpassfilter.

3.4.6 Operationsverstärker

Es werden wenige elementare Schaltungen mit Operationsverstärkern vorgestellt und das Verhalten mit Hilfe von Transferfunktion und Bodeplots untersucht. Insbesondere werden ein einfacher analoger **Integrator** und **Differentiator** analysiert. Die Beispiele dieses Abschnittes wurden aus dem Buch [Ebel91] übernommen.

Wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, dass die Eingangssignale von der Form $\cos(\omega t)$ sind und arbeiten mit Kapazitäten $i\omega C$.

3–24 Beispiel : Sei u_- die Spannung am Negativ-Eingang des Operationsverstärkers. Für einen idealen Verstärker gilt $u_{out} = -K u_-$ für eine sehr grosse Konstante K ($K \approx 10^6$) und es fliesst kein Strom in den Operationsverstärker hinein. Aufgrund der Stromregel von Kirchhoff (am invertierenden Eingang des OP) gilt

$$\frac{u_{in} - u_-}{R} = (u_- - u_{out}) \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

und wir erhalten

$$\frac{u_{in} + \frac{1}{K} u_{out}}{R} = \left(-\frac{1}{K} u_{out} - u_{out} \right) \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

Mit $K \approx \infty$ wird daraus

$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out} \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

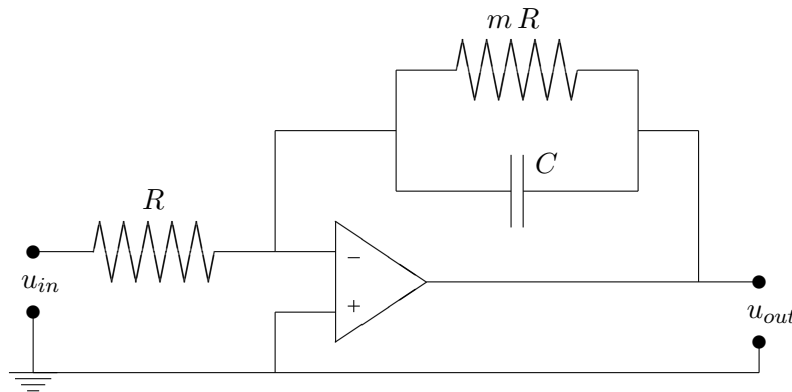


Abbildung 3.11: Einfache Operationsverstärker-Schaltung

Mittels Laplacetransformation und $s = i\omega$ wird daraus

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{-\frac{1}{R}}{\frac{1}{mR} + sC} = \frac{-m}{1 + smRC}$$

Also ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{-m}{1 + smRC}$$

Die Beschaltung entspricht einem invertierenden Verstärker mit Verstärkungsfaktor m , zumindest für kleine Frequenzen. In Abbildung 3.12 sehen Sie die Bodeplots dieser Schaltung, wobei $m = 100$ und $RC = 10^{-9}$ gewählt wurden. In Abbildung 3.13 sehen Sie den entsprechenden Nyquistplot. Man erkennt, dass das System mit Rückkopplung nicht stabil wäre.

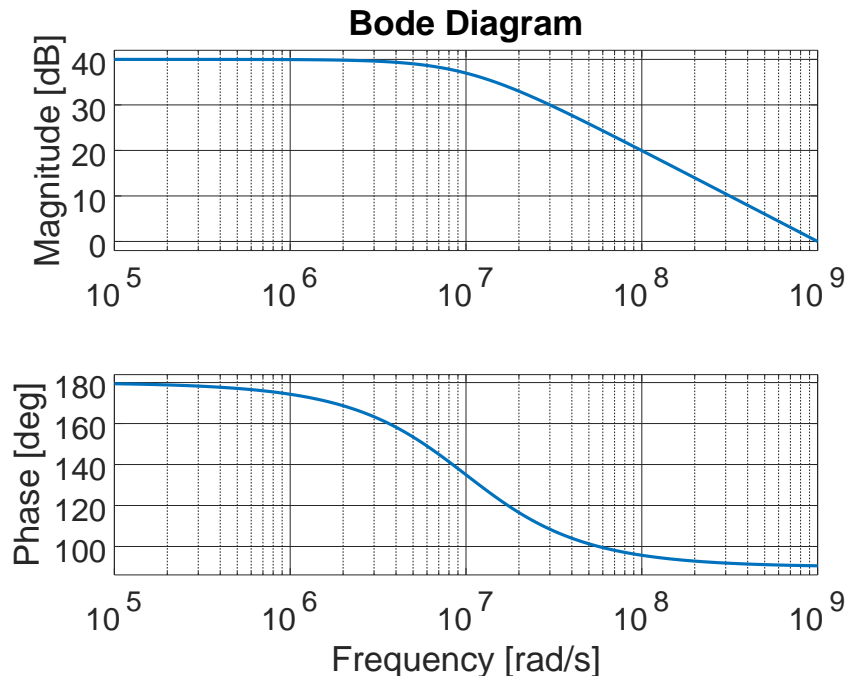


Abbildung 3.12: Bodeplot einer Operationsverstärkerschaltung

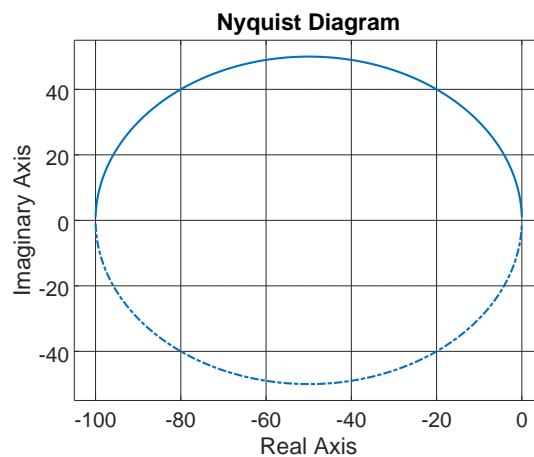


Abbildung 3.13: Nyquistplot einer Operationsverstärkerschaltung

Aus der Transferfunktion kann man auch ablesen, dass die Differentialgleichung

$$mRC \dot{u}_{out} + u_{out} = -m u_{in}$$

diese Schaltung beschreibt. Für einen konstanten Wert von u_{in} ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u_{out}(t) = -m u_{in} + c e^{-\frac{1}{mRC} t}$$

Die Lösung konvergiert also exponentiell gegen den Wert $-m u_{in}$ mit der **Zeitkonstante** mRC .

Die Graphiken wurden erzeugt durch Octave.

Octave

```
m = 100; RC = 1e-9;
sys = tf([-m], [m*RC, 1])
figure(1); bode(sys)
figure(2); nyquist(sys)
```



3–25 Beispiel : Sei u_- die Spannung am Negativ-Eingang des Operationsverstärkers. Für einen idealen Verstärker gilt $u_{out} = -K u_-$ für eine sehr grosse Konstante K ($K \approx 10^6$) und es fliesst kein Strom in den Operationsverstärker hinein. Aufgrund der Stromregel von Kirchhoff gilt

$$i \omega C (u_{in} - u_-) = (u_- - u_{out}) \left(\frac{1}{R} + i \omega m C \right)$$

und wir erhalten

$$i \omega C (u_{in} + \frac{1}{K} u_{out}) = \left(-\frac{1}{K} u_{out} - u_{out} \right) \left(\frac{1}{R} + i \omega m C \right)$$

Mit $K \approx \infty$ wird daraus

$$i \omega C u_{in} = -u_{out} \left(\frac{1}{R} + i \omega m C \right)$$

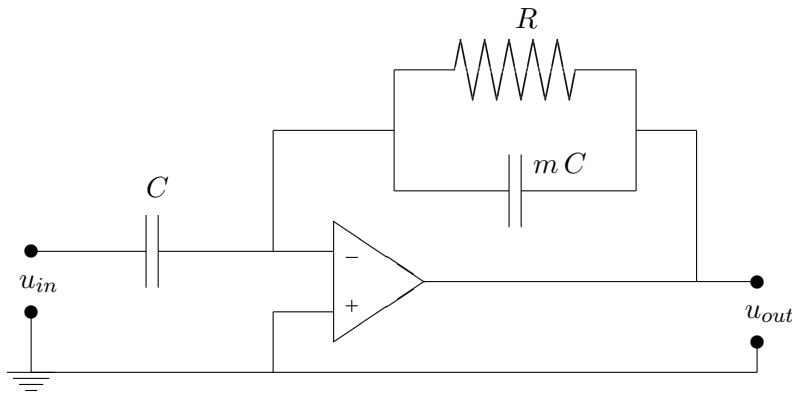


Abbildung 3.14: Operationsverstärker-Schaltung, Ableitung

Mittels Laplacetransformation und $s = i \omega$ wird daraus

$$s C U_{in} = -U_{out} \left(\frac{1}{R} + s m C \right)$$

Also ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{-s C}{\frac{1}{R} + s m C} = \frac{-s R C}{1 + s m R C}$$

Aus der Transferfunktion kann man auch ablesen, dass zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung (bzw. deren Laplacetransformationen) die Beziehung

$$m R C s U_{out} + U_{out} = -R C s U_{in}$$

gilt. Also beschreibt die Differentialgleichung

$$m R C \dot{u}_{out} + u_{out} = -RC \dot{u}_{in}$$

diese Schaltung. Für einen konstanten Wert von \dot{u}_{in} ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u_{out}(t) = -RC \dot{u}_{in} + c e^{-t/(m R C)}$$

Die Lösung konvergiert also exponentiell gegen den Wert $-RC \dot{u}_{in}$ mit der **Zeitkonstante** $m R C$. Für langsam variierende Signale $u_{in}(t)$ „berechnet“ diese Schaltung die Ableitung des Eingangssignals. Dies ist auch in der Approximation

$$G(s) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{-s R C}{1 + s m R C} \approx -s R C \quad \text{für } s \text{ klein}$$

ersichtlich. In Abbildung 3.15 sehen Sie die Bodeplots dieser Schaltung, wobei $m = 10$ und $R C = 10^{-9}$ gewählt wurden.

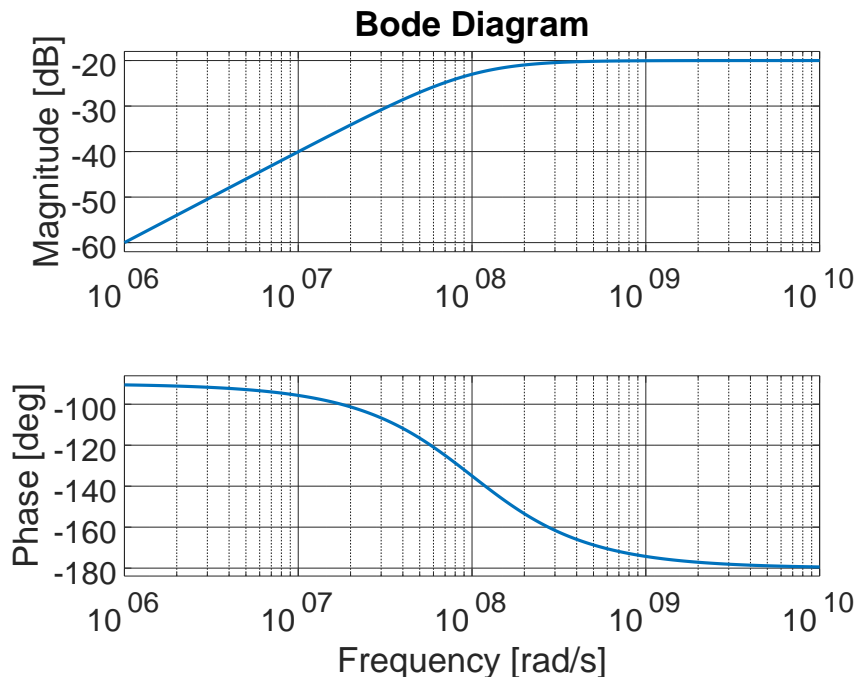


Abbildung 3.15: Bodeplot eines analogen Differenzierers

◇

3–26 Beispiel : Mit den selben Argumenten wie in den vorangehenden Beispielen zeigt man, dass die Transferfunktion der Schaltung in Abbildung 3.16 gegeben ist durch

$$G(s) = -\frac{1 + s n m R C + s m R C}{s R C (1 + s n m R C)} = -\frac{m(n+1) + \frac{1}{s R C}}{1 + s n m R C}$$

Aus der Transferfunktion kann man auch ablesen, dass

$$s n m R C U_{out} + U_{out} = -m(n+1) U_{in} - \frac{1}{R C} \frac{1}{s} U_{in}$$

und somit ist die passende lineare, inhomogene Differentialgleichung gegeben durch

$$n m R C \dot{u}_{out} + u_{out} = -m(n+1) u_{in} - \frac{1}{R C} \int^t u_{in}(\tau) d\tau$$

Somit „berechnet“ diese Schaltung das Integral des Eingangssignals.

◇

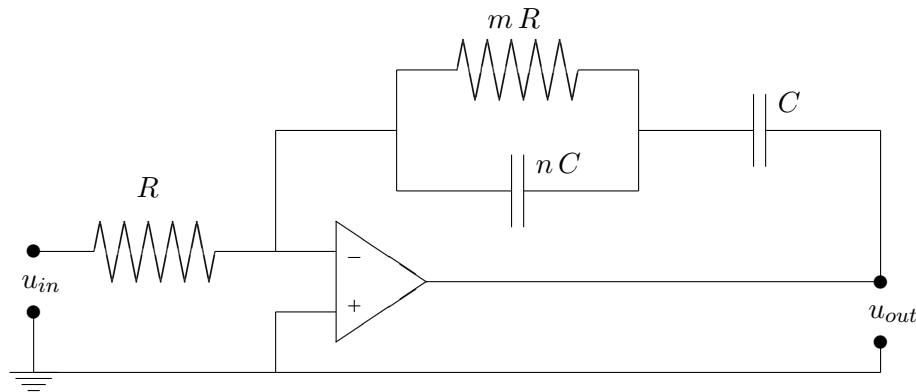


Abbildung 3.16: Operationsverstärker-Schaltung, Integrieren und Multiplizieren

3.4.7 Ein mechanisches System, Masse, Feder und Dämpfer

Die Gleichung eines Federsystems mit Masse m , Federkonstante k und Dämpfungsfaktor μ ist gegeben durch

$$m \ddot{y} + \mu \dot{y} + k y = f(t)$$

und führt auf das Transferverhalten

$$Y(s) = G(s) F(s) = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k} F(s)$$

Um die Bode-Plots zu erhalten, müssen wir somit die Funktion

$$G(i\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + i\mu\omega}$$

untersuchen. Durch erweitern ergibt sich sofort

$$G(i\omega) = \frac{(k - m\omega^2) - i\mu\omega}{(k - m\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2} = r(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

mit

$$\begin{aligned} r(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}} \\ \tan(\varphi(\omega)) &= \frac{\mu\omega}{m\omega^2 - k} \end{aligned}$$

Für sehr grosse ω gilt

$$r(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2 m}$$

und somit

$$\log r(\omega) \approx -2 \log \omega - \log m$$

d.h. mit den logarithmischen Skalen in den Bode-Plots müsste dies eine Gerade mit negativer Steigung ergeben. Die Rechnung an einem Beispiel bestätigt dieses Resultat.

Octave

```
m = 1 ; nu = 2.5 ; k = 10 ;
w = logspace(-1, 1, 100) ;
sys = tf([1], [m, nu, k]) ;

[amp, phase] = bode(sys, w) ;
% amp = squeeze(amp) ; phase = squeeze(phase) ; % patch for Matlab only
```

```

figure(1)
semilogx(w, 20*log10(squeeze(amp)));
xlabel('Frequenz [rad/sec]')
title('Ein Federsystem, Amplitude'); grid on

figure(2)
semilogx(w, squeeze(phase))
title('Ein Federsystem, Phase'); grid on
xlabel('Frequenz [rad/sec]')

```

In Abbildung 3.17 kann eine Resonanzfrequenz $\omega_0 \approx 3$ abgelesen werden.

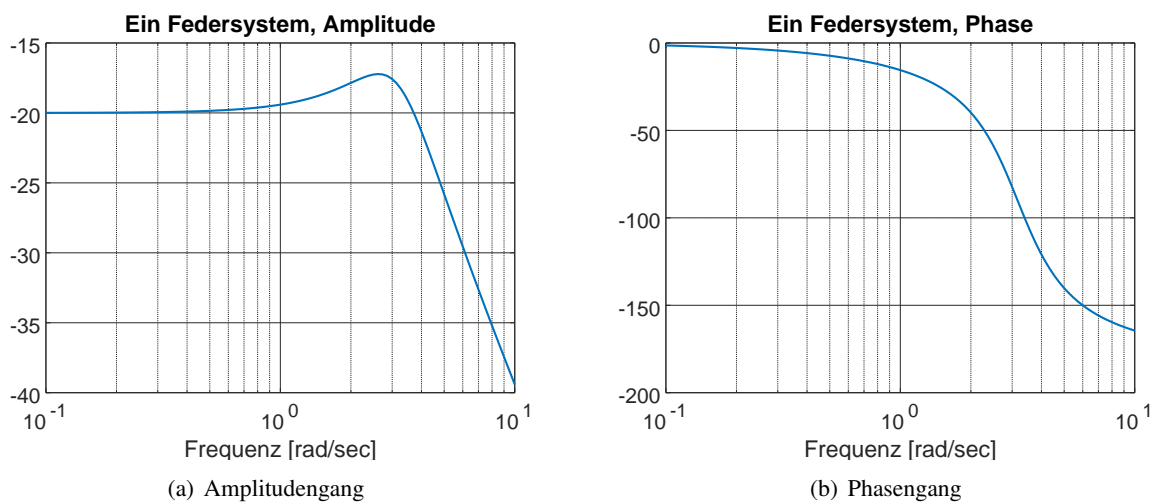
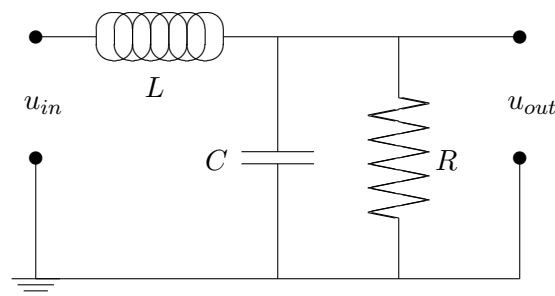


Abbildung 3.17: Bode Plots eines Feder-Masse Systems

3.4.8 Ein elektrisches System, LRC Schwingkreis

Untersuche den Schaltkreis³



Für den Strom $I(t)$ durch die Spule gilt

$$L \frac{d}{dt} I(t) = (u_{in} - u_{out}) \quad \text{oder} \quad s L I(s) = U_{in}(s) - U_{out}(s)$$

Der Strom in die Kapazität ist $C \frac{d}{dt} u_{out}$ und der Strom durch den Widerstand ist $\frac{1}{R} u_{out}$. Somit ist die Summe der beiden Ströme

$$I(t) = C \frac{d}{dt} u_{out} + \frac{1}{R} u_{out} \quad \text{oder} \quad I(s) = s C U_{out}(s) + \frac{1}{R} U_{out}(s)$$

³Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

Mit der Kirchhoffschen Knotenregel und einer Ableitung oder einem Faktor s folgt daraus

$$\frac{1}{L}(u_{in} - u_{out}) = C \ddot{u}_{out} + \frac{1}{R} \dot{u}_{out} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{L}(U_{in}(s) - U_{out}(s)) = s^2 C U_{out}(s) + s \frac{1}{R} U_{out}(s)$$

Diese Gleichung kann mit LR multipliziert werden

$$R(u_{in} - u_{out}) = LRC \ddot{u}_{out} + L \dot{u}_{out} \quad \text{oder} \quad R(U_{in}(s) - U_{out}(s)) = s^2 LRC U_{out}(s) + s L U_{out}(s)$$

Das führt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung 2

$$LRC \ddot{u}_{out} + L \dot{u}_{out} + R u_{out} = R u_{in}$$

oder zu einer quadratischen Gleichung für die Laplacetransformation $U_{out}(s)$.

$$s^2 LRC U_{out}(s) + s L U_{out}(s) + R U_{out}(s) = R U_{in}(s)$$

Um die Transferfunktion zu untersuchen verwendet man

$$\begin{aligned} U_{out}(s) &= \frac{R}{LRC s^2 + Ls + R} U_{in}(s) \\ G(s) &= \frac{R}{LRC s^2 + Ls + R} \\ G(i\omega) &= \frac{R}{R(1 - LC\omega^2) + i\omega L} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + i\omega L/R} \end{aligned}$$

- Für $0 < \omega$ sehr klein erhält man

$$|G(i\omega)| \approx 1 \quad \Rightarrow \quad 20 \log |G(i\omega)| \approx 0$$

Für den Bodeplot erhält man somit links eine horizontale Gerade auf der Höhe 0.

- Für $0 < \omega$ sehr gross erhält man

$$|G(i\omega)| \approx \frac{1}{LC\omega^2} \quad \Rightarrow \quad 20 \log |G(i\omega)| \approx -20 \log(LC) - 40 \log \omega$$

Für den Bodeplot erhält man somit rechts eine Gerade mit Steigung -40 .

- Die (mögliche) Resonanzfrequenz ω_0 ist bestimmt durch den maximalen Werte des Verstärkungsfaktors. Verwende $z = \omega^2$ und untersuche

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\omega} \left((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2} \right) \\ 0 &= \frac{d}{dz} \left((1 - LCz)^2 + z \frac{L^2}{R^2} \right) = -2LC(1 - LCz) + \frac{L^2}{R^2} \\ 2L^2C^2z &= 2LC - \frac{L^2}{R^2} = L \frac{2R^2C - L}{R^2} \\ \omega_0^2 &= z = \frac{2CR^2 - L^2}{2LC^2R^2} = \frac{1}{LC} - \frac{L}{2C^2R^2} = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{L^2}{2CR^2} \right) \end{aligned}$$

- Ist der Widerstand R sehr gross, so ist die Resonanzfrequenz $\omega_0^2 \approx \frac{1}{LC}$ und somit beim Schnittpunkt der obigen beiden Geraden.
- Ist der Widerstand R zu klein ($R^2 < \frac{L^2}{2C}$), so gibt es keine Lösung für ω_0 und somit keine Resonanzfrequenz.

LRC_res.m

```
pkg load control % Octave only
R = 3e4; C = 1e-7; L = 10;
sys = tf([R], [L*R*C, L, R])
figure(1)
bode(sys)
legend off % remove the legend, bug in Octave
```

3.5 Aufgaben

• Aufgabe 3-1:

Décider pour les équations suivantes si la solution triviale $y(t) = 0$ est stable (exponentielle).

Für die folgenden Differentialgleichungen ist zu entscheiden, ob die triviale Lösung exponentiell stabil ist oder nicht.

$$(a) \quad y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' + y'' + 10y' + y = 0$$

$$(b) \quad y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

$$(c) \quad y''' + y'' + 5y' + 4y = 0$$

• Aufgabe 3-2:

Für die folgenden linearen Differentialgleichungen ist zu entscheiden ob die Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren. Falls "JA", so ist der Exponent zu bestimmen, mit dem die Lösung gegen Null konvergiert. Die Antworten sind zu begründen.

Pour les équations différentielles suivantes décider si les solutions tendent vers zéro d'une façon exponentielle. Si "OUI", trouver l'exposant avec lequel la solution tend vers zéro.

$$(a) \quad 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

$$(b) \quad y^{(4)} + 20y''' + 10y'' + y' + y = 0$$

$$(c) \quad 4y^{(4)} + 24y''' + 45y'' + 29y' + 5y = 0$$

$$(d) \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 4y + e^{-t} = 0$$

• Aufgabe 3-3:

Für die folgenden linearen Differentialgleichungen ist zu entscheiden ob die Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren. Die Antworten sind zu begründen.

(a)

$$7\ddot{y} + 4\dot{y} + \frac{1}{2}y = 0$$

(d)

$$3\ddot{y} + 2\dot{y} + y + 1 = 0$$

(b)

$$y''' - 3y'' + y' + 17y = 0$$

(e) Für welche Werte von k konvergieren die Lösungen gegen Null?

$$(k-3)\ddot{y} + 7\dot{y} + (7-k)y = 0$$

(c)

$$y^{(4)} + 9y''' + y'' + 16y' + y = 0$$

• Aufgabe 3-4:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y'''(x) + 2y''(x) - 5y'(x) - 6y(x) = 1 \quad \text{mit/avec} \quad y''(0) = K, \quad y'(0) = y(0) = 0$$

(a) Finden Sie die exakte Lösung dieser Gleichung.

(a) Trouver la solution exacte de cette équation.

(b) Es gibt genau einen Wert der Konstanten K , so dass die Lösung beschränkt bleibt für $t \rightarrow \infty$. Bestimmen Sie diesen Wert von K .

(b) Il y a une seule valeur de la constante K tel que la solution reste bornée pour $t \rightarrow \infty$. Trouver cette valeur de K .

• Aufgabe 3-5:

Examiner l'équation différentielle

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 12y(t) = f(t)$$

 (a) Utiliser $f(t) = 3 \cos(3t)$. Trouver la solution générale.

 (a) Setzen Sie $f(t) = 3 \cos(3t)$. Finden Sie die allgemeine Lösung.

 (b) Déterminer la fonction de transfert $T(s)$ du système avec input $f(t)$ et output $u(t) = \alpha y(t) + \beta \dot{y}(t)$.

 (b) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$ des Systems mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $u(t) = \alpha y(t) + \beta \dot{y}(t)$.

• Aufgabe 3–6:

 Für die folgenden Systeme (Input $f(t)$, Output $y(t)$) ist zu entscheiden, ob sie stabil sind. Ein System kann durch eine Differentialgleichung oder eine Transferfunktion $T(s)$ gegeben sein.

 Décider pour les systèmes suivantes (input $f(t)$, output $y(t)$) s'ils sont stables ou pas. Un système est donné par une équation différentielle ou une fonction de transfert $T(s)$.

(a) $y^{(3)}(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$

(b) $y^{(3)}(t) + y''(t) - y'(t) + 2y(t) = f(t)$

(c) $y^{(3)}(t) + y''(t) + y'(t) + 2y(t) = f(t)$

(d) $T(s) = \frac{s-2}{s^3 + s^2 + s^2 + s + 1}$

(e) $T(s) = \frac{s^2 + 2}{s^4 + s^2 + s^2 + s + 1}$

• Aufgabe 3–7:

 Für die folgenden Systeme (Input $f(t)$, Output $y(t)$) ist zu entscheiden, ob sie stabil sind. Ein System kann durch eine Differentialgleichung oder eine Transferfunktion $T(s)$ gegeben sein.

 Décider pour les systèmes suivantes (input $f(t)$, output $y(t)$) s'il sont stables ou pas. Un système est donné par une équation différentielle ou une fonction de transfert $T(s)$.

(a) $y^{(3)}(t) + 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = f(t)$

(b) $y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t)$

(c) $y^{(3)}(t) + 0.9y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t)$

(d) $T(s) = \frac{s^2 - 17s - 2}{s^3 + 0.9s^2 + s + 1}$

(e) $T(s) = \frac{s^2 + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 0.5}$

• Aufgabe 3–8:

 Für die folgenden Systeme (Input $f(t)$, Output $y(t)$) ist zu entscheiden, ob sie stabil sind. Ein System kann durch eine Differentialgleichung oder eine Transferfunktion $T(s)$ gegeben sein.

(a) $y^{(3)}(t) + y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f'(t)$

(b) $y^{(4)}(t) + 2y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) + y(t) = f(t)$

(c) $y''(t) + 10^{-8}y'(t) + y(t) = f(t)$

(d) $T(s) = \frac{-s^2 + 17s + 2}{4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$

(e) $T(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
stabil					
instabil					

• Aufgabe 3–9:

Examiner le système avec input $f(t)$ et output $y(t)$ (resp. $F(s)$ et $Y(s)$).

Untersuchen Sie das folgende System mit Input $f(t)$ und Output $y(t)$ (resp. $F(s)$ und $Y(s)$).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x(t) + y(t) + f(t) \\ \dot{y}(t) &= +x(t) - 4y(t)\end{aligned}$$

- (a) Montrer que toutes les solutions du système homogène tendent vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver la valeur de l'exposant α .
- (b) Trouver la fonction de transfert $T(s)$.
- (c) Esquisser les deux plots de Bode à l'aide de deux droites et de la valeur de la fonction de transfert pour $\omega = 3$.

- (a) Zeigen Sie, dass alle Lösungen des homogenen Systems gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie den Exponenten α .
- (b) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$.
- (c) Skizzieren Sie die beiden Bode Plots mit Hilfe von je zwei Geraden und dem Wert der Transferfunktion bei $\omega = 3$.

• Aufgabe 3–10:

Zu untersuchen sind die exakten Lösungen des Differentialgleichungssystems. Verwenden Sie Laplacetransformationen.

Examiner les solutions exactes du système des équations différentielles ci-dessous. Utiliser des transformations de Laplace.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x &= -x - 2y + f(t) \\ \frac{d}{dt} y &= 2x - y\end{aligned}$$

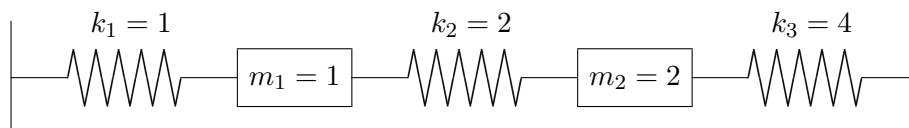
- (a) Setzen Sie $f(t) = 0$ und die Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und $y(0) = 0$. Zu bestimmen sind die exakten Lösungen $x(t)$ und $y(t)$.
- (b) Setzen Sie $x(0) = y(0) = 0$ und betrachten Sie die Gleichungen als System mit Eingang $F(s)$ und Ausgang $X(s)$. Zu bestimmen ist die Transferfunktion $T(s)$.

- (a) Mettre $f(t) = 0$ et les conditions initiales $x(0) = a$ et $y(0) = 0$. Trouver les solutions exactes $x(t)$ et $y(t)$.
- (b) Mettre $x(0) = y(0) = 0$ et examiner les équations différentielles comme système avec input $F(s)$ et output $X(s)$. Trouver la fonction de transfert $T(s)$.

• Aufgabe 3–11:

Das untenstehende Feder-Masse-System kann beschrieben werden durch ein System von Differentialgleichungen.

Le système des masses et ressort ci-dessous peut être représenté par un système des équations différentielles.



- (a) (Ohne Reibung) Schreiben Sie diese Gleichungen in der Form $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x}$.
- (b) (Ohne Reibung) Bestimmen Sie die zwei in den Lösungen vorkommenden Frequenzen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Maximalamplituden der beiden Massen für die langsamere Eigenschwingung.

- (a) (Sans frottement) Écrire ce système dans la forme $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x}$.
- (b) (Sans frottement) Trouver les deux fréquences dans les solutions. Trouver le rapport des deux amplitudes maximales pour l'oscillation la plus lente.

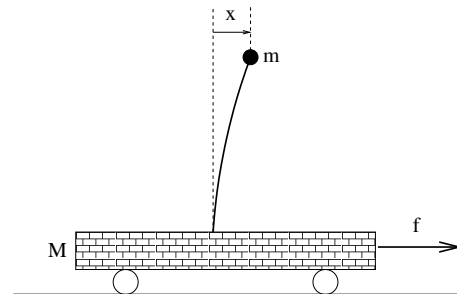
(c) (Mit Reibung) Nun wird die Bewegung beider Massen gedämpft durch Kräfte der Form $-1 \dot{x}_i$. Schreiben Sie das neue System in der Form $\dot{y} = \mathbf{B} \vec{y}$ mit einer geeigneten 4×4 -Matrix \mathbf{B} .

(d) (Mit Reibung) Mit welchem Exponenten α in $e^{-\alpha t}$ konvergiert eine typische Lösung gegen Null?

• Aufgabe 3-12:

Sei $y(t)$ die Position des Wagens und $x(t)$ die horizontale Auslenkung der an einer Blattfeder befestigten Masse m . $f(t)$ ist eine externe Kraft. Dann beschreiben die folgenden Differentialgleichungen das Verhalten des Systems.

$$\begin{aligned} M \ddot{y} &= f + c \cdot x \\ m \ddot{x} &= -c x - m \ddot{y} \end{aligned}$$



(a) Finden Sie die Lösung $x(t)$ falls $\ddot{y}(t) = a$ konstant ist und $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ mit Hilfe von Laplacetransformationen.

(b) Fassen Sie das Obige als System auf mit Eingang $f(t)$ (resp. $F(s)$) und Ausgang $x(t)$, resp. $X(s)$. Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$.

(c) Ist die externe Kraft Null ($f(t) = 0$), so schwingt das System mit einer Winkelgeschwindigkeit ω . Bestimmen Sie ω als Funktion von M und untersuchen Sie die drei Spezialfälle der Masse M .

- $M \gg m$, oder auch $M \rightarrow \infty$
- $M = m$
- $M \ll m$, oder auch $M \rightarrow 0+$

• Aufgabe 3-13:

Considérer le système de deux ressorts et deux masses oscillantes.

(c) (Avec frottement) Le mouvement des deux masses est freiné par des forces $-1 \dot{x}_i$. Écrire le nouveau système dans la forme $\dot{y} = \mathbf{B} \vec{y}$ avec une matrice \mathbf{B} de dimension 4×4 .

(d) (Avec frottement) Avec quel exposant α en $e^{-\alpha t}$ converge une solution typique vers zéro?

Soit $y(t)$ la position du chariot et $x(t)$ le déplacement vertical de la masse m , attachée à un ressort-lame. $f(t)$ est une force externe. Les équations différentielles ci-dessous fournissent une description du comportement de ce système.

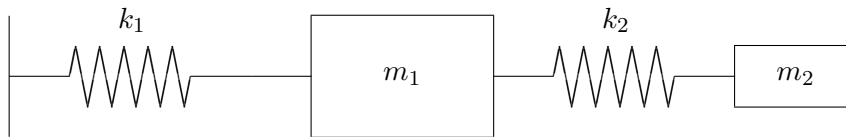
(a) À l'aide d'une transformation de Laplace, trouver la solution $x(t)$, si $\ddot{y}(t) = a$ est constant et $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

(b) Prenez $f(t)$ (resp. $F(s)$) comme entrée et $x(t)$, resp. $X(s)$, comme sortie du système ci-dessus. Trouver la fonction de transfert $T(s)$.

(c) Si la force externe est zéro ($f(t) = 0$) le système va osciller avec une vitesse angulaire ω . Écrire ω comme fonction de M , puis examiner les trois cas spéciaux pour la masse M .

- $M \gg m$, ou $M \rightarrow \infty$
- $M = m$
- $M \ll m$, ou $M \rightarrow 0+$

Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn.



Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspond à la situation des deux masses au repos. On applique une force horizontale $f(t)$ sur la première masse.

Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Kraft f der Form

$$f(t) = A \cos(\omega t).$$

- (a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- (b) Trouver le système d'équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Vous pouvez choisir les valeurs initiales.
- (c) Trouver la fonction de transfert de ce système. Considérer la force $f(t)$ comme l'entrée et $x_1(t)$ comme la sortie du système.
- (d) Les données m_1, k_1, k_2 et ω sont fixes. Il existe une valeur de m_2 , tel que l'amplitude de $x_1(t)$ soit la plus petite possible. Trouver cette valeur de m_2 .

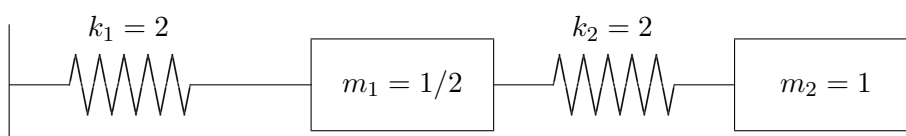
- (a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Größen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.
- (b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.
- (c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1(t)$ als Ausgang betrachtet wird.
- (d) Seien m_1, k_1, k_2 und ω fest gegeben. Dann gibt es eine Wahl von m_2 , welche die Auslenkung (Amplitude) von $x_1(t)$ so klein wie möglich macht. Finden Sie diesen Wert von m_2 .

• Aufgabe 3–14:

Considérer le système de deux ressorts et deux masses oscillantes. Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspondent à la situation de deux masses au repos. Pour la deuxième masse il y a une force de frottement de largeur $-\dot{x}_2$ et aussi une force horizontale externe $f_2(t)$ donnée par

Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ den Ruhelagen der beiden Massen entsprechen. Auf die zweite Masse wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_2$ und zusätzlich eine externe, horizontale Kraft $f_2(t)$ der Form

$$f_2(t) = A \cos(\omega t).$$



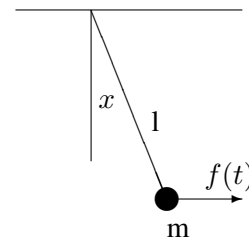
- (a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- (a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Größen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.
- (b) Trouver le système d'équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Vous pouvez choisir les valeurs initiales.
- (b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.
- (c) Trouver la fonction de transfert de ce système. Considérer la force $f_2(t)$ comme l'entrée et la vitesse $\dot{x}_2(t)$ comme la sortie du système.
- (c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f_2(t)$ als Eingang und die Geschwindigkeit $\dot{x}_2(t)$ als Ausgang betrachtet wird.
- (d) Si l'on ignore la force externe (ceci veut dire $A = 0$) on trouve un système d'équations différentielles linéaire homogène. Montrer que les solutions tendent vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver α .
- (d) Ignoriert man die externe Kraft f (d.h. $A = 0$), so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie, dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie α .
- Tip: réfléchir, mais peu de calculs.
- Tipp: Denken und nur wenig rechnen.

• Aufgabe 3–15:

Für das Pendel in der Skizze rechts mit Masse $m = 1$ gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + f(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

Die Kraft $f(t)$ ist konstant $f(t) = 7$ für ersten zwei Sekunden und dann ist sie Null.

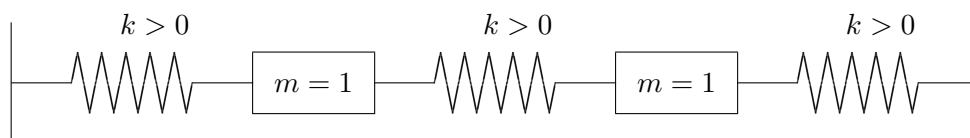


- (a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe von Laplacetransformationen.
- (b) Geben sie explizite Formel für $x(t)$ falls $t > 2$.
- (c) Wie lange (statt 2 Sekunden) müsste die Kraft wirken, damit das Pendel nachher wieder exakt in die Ruheposition zurückkehrt und dort bleibt?

• Aufgabe 3–16:

Die folgende Figur zeigt ein einfaches System von Massen, gekoppelt durch zwei Federn.

La figure ci-dessous montre un système simple de ressorts et de masses.



Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Dann liefern die Newtonschen Gleichungen das folgende System

Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspond à la situation stationnaire des deux masses. Les équations de Newton donnent le système suivant des équations différentielles.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned}$$

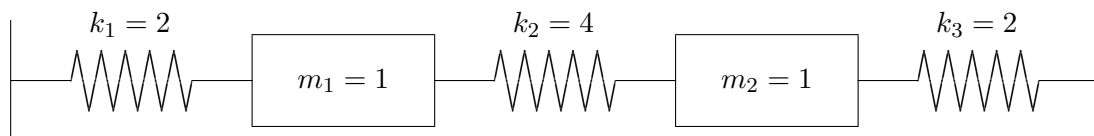
- (a) Finden Sie die Gleichungen für die Laplace-transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$. Stellen Sie diese Gleichungen als System von linearen Gleichungen dar.
- (b) Eliminiert man X_2 aus diesen beiden Gleichungen, so entsteht eine gebrochen rationale Funktion für $X_1(s)$. Bestimmen Sie nur den **Nenner**.
- (c) Die allgemeine Lösung für $x_1(t)$ enthält Terme der Form $c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t)$. Bestimmen Sie ω_1 und ω_2 als Funktion von k .

• **Aufgabe 3-17:**

Considérez le système de deux ressorts et deux masses oscillantes. Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspondent à la situation des deux masses au repos. Pour les deux masses il y a des forces de frottement de largeur $-\dot{x}_1$ resp. $-\dot{x}_2$. On applique une force horizontale externe $f(t)$ sur la deuxième masse.

- (a) Trouver les équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Écrire comme système d'équations linéaires.
- (b) Éliminer X_2 de ces deux équations et chercher $X_1(s)$ comme fonction rationnelle. Trouver le **dénominateur** seulement.
- (c) La solution générale pour $x_1(t)$ contient deux termes de la forme $c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t)$. Calculer ω_1 et ω_2 comme fonction de k .

Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die beiden Massen wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_1$, resp. $-\dot{x}_2$. Auf die zweite Masse wirke eine externe, horizontale Kraft $f(t)$.



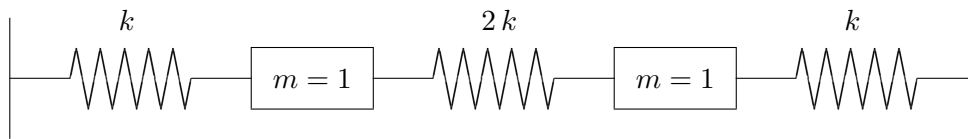
- (a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- (b) Trouver le système d'équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Vous pouvez choisir les valeurs initiales.
- (c) Trouver la fonction de transfert de ce système. Regarder la force $f(t)$ comme l'entrée et $x_1(t)$ comme la sortie du système.
- (d) Si l'on ignore la force externe (veut dire $f(t) = 0$) on trouve un système d'équations différentielles linéaire homogène. Montrer que les solutions tendent vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver α .

• **Aufgabe 3-18:**

Die folgende Figur zeigt ein einfaches System von Massen, gekoppelt durch zwei Federn. Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ den Ruhelagen der beiden Massen entsprechen.

- (a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Größen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.
- (b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.
- (c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1(t)$ als Ausgang betrachtet wird.
- (d) Setzt man die externe Kraft $f(t) = 0$, so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie, dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie α .

La figure ci-dessous montre un système simple de ressorts et de masses. Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspondent à la situation stationnaire des deux masses.



(a) Finden Sie das System von Differentialgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$. Stellen Sie diese Gleichungen als System von linearen Gleichungen dar.

(c) Eliminiert man X_2 aus diesen beiden Gleichungen, so entsteht eine gebrochen rationale Funktion für $X_1(s)$. Bestimmen Sie nur den **Nenner**.

(d) Die allgemeine Lösung für $x_1(t)$ enthält Terme der Form $c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t)$. Bestimmen Sie ω_1 und ω_2 als Funktion von k .

(a) Trouver les équations différentielles pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

(b) Trouver les équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Écrire comme système d'équations linéaires.

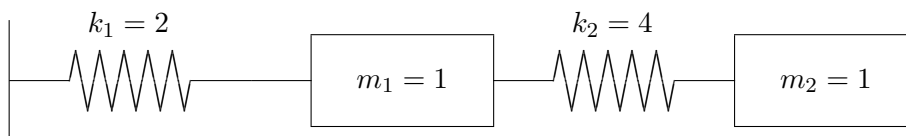
(c) Éliminer X_2 de ces deux équations et chercher $X_1(s)$ comme fonction rationnelle. Trouver le **dénominateur** seulement.

(d) La solution générale pour $x_1(t)$ contient deux termes de la forme $c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t)$. Calculer ω_1 et ω_2 comme fonction de k .

• Aufgabe 3–19:

Considérer le système de deux ressorts et deux masses oscillantes.

Betrachten Sie das folgende System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn.



Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspondent à la situation des deux masses au repos. Pour la première masse il y a une force de frottement de largeur $-\dot{x}_1$. On applique une force horizontale externe $f(t)$ sur la deuxième masse donnée par

Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Reibungskraft der Stärke $-\dot{x}_1$. Auf die zweite Masse wirke eine externe, horizontale Kraft $f(t)$ der Form

$$f(t) = A \cos(\omega t).$$

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.</p> <p>(b) Trouver le système d'équations pour les transformations de Laplace $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Vous pouvez choisir les valeurs initiales.</p> <p>(c) Trouver la fonction de transfert de ce système. Regarder la force $f(t)$ comme l'entrée et $x_1(t)$ comme la sortie du système.</p> <p>(d) Si l'on ignore la force externe (veut dire $A = 0$) on trouve un système d'équations différentielles linéaire homogène. Montrer que les solutions tendent vers zéro comme $e^{-\alpha t}$ et trouver α.
Tip: réfléchir, mais peu de calculs.</p> | <p>(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Größen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.</p> <p>(b) Finden Sie die Gleichungen für die Laplacetransformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ dieses Systems, wobei Sie die Anfangsbedingungen beliebig wählen dürfen.</p> <p>(c) Finden Sie die Transferfunktion des Systems, wobei die Kraft $f(t)$ als Eingang und die Auslenkung $x_1(t)$ als Ausgang betrachtet wird.</p> <p>(d) Ignoriert man die externe Kraft f (d.h. $A = 0$), so liegt ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem vor. Zeigen Sie, dass dessen Lösungen exponentiell gegen Null konvergieren wie $e^{-\alpha t}$ und bestimmen Sie α.
Tipp: Denken und nur wenig rechnen.</p> |
|--|--|

• **Aufgabe 3–20:**

Für welchen Bereich der Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergieren die Lösungen des folgenden Systems exponentiell gegen Null?

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x &= \alpha x - y \\ \frac{d}{dt} y &= x + \alpha y\end{aligned}$$

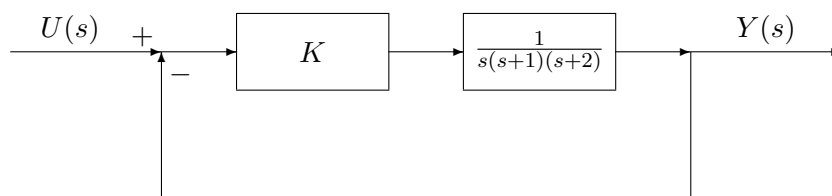
Verwenden Sie Laplacetransformationen um diese Aufgabe zu lösen.

• **Aufgabe 3–21:**

Eine Servosteuerung kann durch das untenstehende Blockdiagramm beschrieben werden.

Un système est donné par le diagramme des blocs ci-dessous.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion des Gesamtsystems als gebrochen rationale Funktion.</p> <p>(b) Für welche Werte von K ist das System stabil. (Tip: Routh–Hurwitz)</p> | <p>(a) Trouver la fonction de transfert, écrite comme fonction rationnelle.</p> <p>(b) Pour quelles valeurs de K le système est-il stable. (Tip: Routh–Hurwitz)</p> |
|--|--|



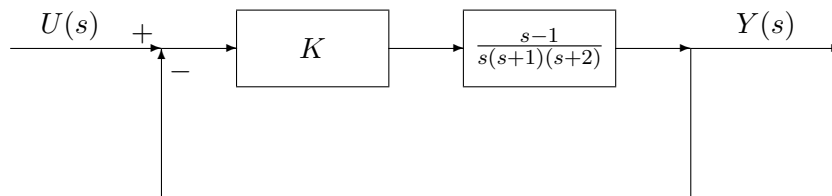
• **Aufgabe 3–22:**

Eine Servosteuerung kann durch das untenstehende Blockdiagramm beschrieben werden.

Un système est donné par le diagramme des blocs ci-dessous.

- (a) Bestimmen Sie die Transferfunktion des Gesamtsystems als gebrochen rationale Funktion.
- (b) Für welche Werte von K ist das System stabil. (Tip: Routh–Hurwitz)

- (a) Trouver la fonction de transfert, écrite comme fonction rationnelle.
- (b) Pour quelles valeurs de K le système est-il stable. (Tip: Routh–Hurwitz)



• **Aufgabe 3–23:**

Eine Transferfunktion ist gegeben durch

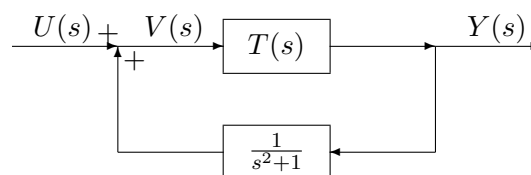
Une fonction de transfert est donnée par

$$T(s) = \frac{3 - 37s^2}{s^4 + 3s^3 + Ks^2 + 2s + 1}$$

- (a) Verwenden Sie das Kriterium von Routh um zu entscheiden, für welchen Bereich der Konstanten $K \in \mathbb{R}$ das System stabil ist.
- (b) Setzen Sie $K = 2$ und untersuchen Sie das untenstehende System mit U als Input und Y als Output. Die neue Transferfunktion $G(s)$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Bestimmen Sie den Nenner.

- (a) Utiliser le critère de Routh pour trouver le domaine des valeurs de $K \in \mathbb{R}$ tel que le système est stable.

- (b) Mettre $K = 2$ et examiner le système ci-dessous avec input U et output Y . La nouvelle fonction de transfert $G(s)$ est une fonction rationnelle propre, trouver le dénominateur.



• **Aufgabe 3–24:**

Eine Transferfunktion ist gegeben durch

Une fonction de transfert est donnée par

$$T(s) = \frac{s^2 - 3s + 15}{s^3 + s^2 + 2s + K}$$

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Untersuchen Sie $K = 1$ und zeigen Sie, dass dieses System stabil ist. Mit welchem Exponenten konvergiert eine typische Lösung gegen 0 ?</p> <p>(b) Untersuchen Sie $K = 5$ und zeigen Sie, dass dieses System instabil ist. Mit welchem Exponenten konvergiert eine typische Lösung gegen ∞ ?</p> <p>(c) Verwenden Sie das Kriterium von Routh um zu entscheiden für welchen Bereich der Konstanten $K \in \mathbb{R}$ das System stabil ist.</p> <p>(d) Die Antwort zu (c) ergibt einen maximalen Wert K_m für den das System "zwischen" stabil und instabil ist. Die Lösung wird mit einer Frequenz schwingen. Bestimmen Sie diese Frequenz.</p> | <p>(a) Poser $K = 1$ et montrer ensuite que le système est stable. Une solution typique converge vers zéro d'une façon exponentielle. Avec quel exposant?</p> <p>(b) Poser $K = 5$ et montrer ensuite que le système est instable. Une solution typique converge vers ∞. Avec quel exposant?</p> <p>(c) Utiliser le critère de Routh pour trouver le domaine des valeurs de $K \in \mathbb{R}$ tel que le système est stable.</p> <p>(d) La réponse de (c) rend une valeur maximale K_m pour lequel le système est "entre" stable et instable. Le système va osciller avec une certaine fréquence. Trouver cette fréquence.</p> |
|--|---|

• **Aufgabe 3–25:**

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

Considérer le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - 5y &= f(t) \\ \dot{y} + x + ky &= 0 \end{aligned}$$

als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$.

comme système avec fonction d'entrée $f(t)$ et fonction de sortie $y(t)$.

- (a) Zu bestimmen ist die Transferfunktion $G(s)$.
- (b) Für welchen Bereich von k ist dieses System stabil?

- (a) Trouver la fonction de transfert $G(s)$.
- (b) Pour quel domaine de k ce système est-il stable?

• **Aufgabe 3–26:**

Für eine der beiden Differentialgleichungen

Pour une des deux équations différentielles

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 1y = -f(t) \quad \text{oder/ou} \quad -\ddot{y} - 5\dot{y} - 4y = f(t)$$

kann eine Transferfunktion $T(s)$ bestimmt werden. Untersuchen Sie nur diese Gleichung.

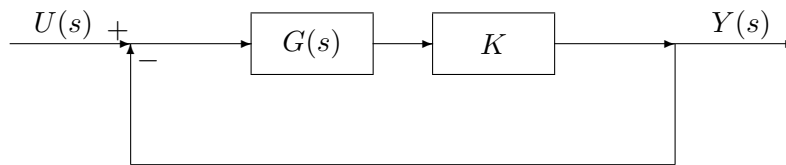
on peut donner une fonction de transfert $T(s)$. Examiner seulement cette équation.

- | | |
|---|--|
| <p>(a) Finden Sie die allgemeine Lösung für $f(t) = e^{2t}$.</p> <p>(b) Finden Sie die Transferfunktion $T(s)$.</p> <p>(c) Skizzieren Sie den Bode-Plot der Amplitude für die obige Transferfunktion (ohne Taschenrechner).</p> | <p>(a) Trouver la solution générale si $f(t) = e^{2t}$.</p> <p>(b) Trouver la fonction de transfert $T(s)$.</p> <p>(c) Esquisser le plot de Bode pour l'amplitude de la fonction de transfert ci-dessus (sans calculatrice).</p> |
|---|--|

• **Aufgabe 3–27:**

Diese Aufgabe ist ohne Taschenrechner leichter lösbar als mit Taschenrechner.

Die Transferfunktion des untenstehenden Systems wird ausgemessen, indem Signale der Form $\cos(\omega t)$ für $0 < \omega < \infty$ eingegeben werden, wobei die Rückkopplung „abgehängt“ wird. Die Messung wird für $K = 1$ durchgeführt und ergibt den untenstehenden Nyquist-Plot.

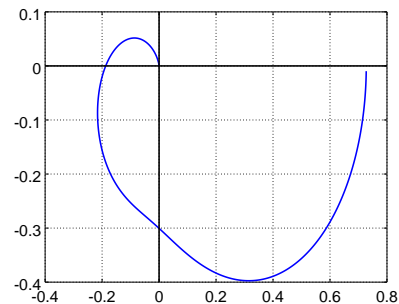


(a) Schätzen Sie mit Hilfe des Nyquist-Plots für welche Werte von $K > 0$ das rückgekoppelte System stabil sein wird. Tipp: Effekt von K auf Nyquistplot untersuchen.

(b) Bestimmen Sie die Steigung des Bode-Plot der Amplitude der Transferfunktion

$$G(s) = \frac{4 + 4.8s}{5.5 + 17.5s + 14.5s^2 + 3.5s^3 + s^4}$$

für sehr grosse Frequenzen. Skizzieren Sie diesen Bereich. (Achtung Skalen!)



• Aufgabe 3–28:

Ein System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $x(t)$ ist gegeben als Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 40 \dot{x}(t) + 1300 x(t) = 300 \frac{d}{dt} f(t)$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $G(s)$.

(b) Untersuchen Sie den Bode-Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\omega$

um den Bode-Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 10000$.

(c) Der Wert ω_0 ist bestimmt durch den Schnittpunkt der beiden obigen Geraden. Bestimmen Sie ω_0 und den Wert der Transferfunktion $|G(i\omega_0)|$ für diese Winkelgeschwindigkeit.

• Aufgabe 3–29:

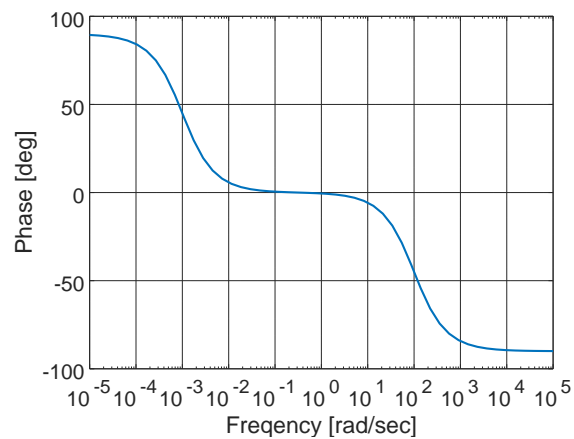
Ein System mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$ ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 100.001 \dot{y}(t) + \frac{1}{10} y(t) = 1000 \dot{u}(t)$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$. Der Nenner ist in exakte Faktoren zu zerlegen.

(b) Untersuchen Sie die Transferfunktion $T(i\omega)$ auf den drei angegebenen Teilbereichen. Für den Bode Plot der Amplituden wird auf jedem der Segmente eine (approximative) Gerade entstehen.

- $0 < \omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll 100$
- $100 \ll \omega$



(c) Skizzieren Sie den Bode-Plot der Amplituden unter Verwendung der vorangehenden Teilaufgabe.

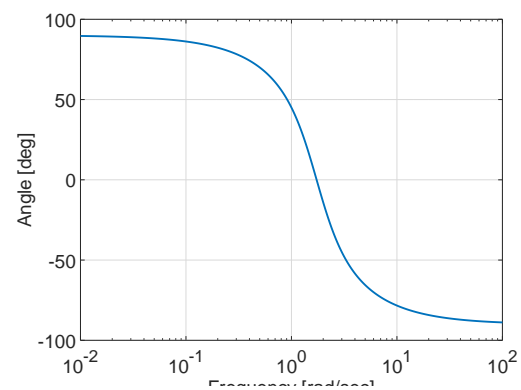
(d) Verwenden Sie Ihren Bode Plot und den obigen Phasenplot mit den Werten der Transferfunktion bei $\omega = \frac{1}{1000}$ und $\omega = 100$ um den Nyquist Plot zu skizzieren.

• **Aufgabe 3–30:**

Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch

La fonction de transfert d'un système est donnée par

$$G(s) = \frac{3s}{s^2 + 2s + 3}$$



(a) Untersuchen Sie den Bode-Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\omega$

um den Bode-Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 100$.

(b) Der Wert ω_0 ist bestimmt durch den Schnittpunkt der beiden obigen Geraden. Bestimmen Sie den Wert der Transferfunktion $|G(i\omega_0)|$ für diese Frequenz.

(c) Der Bode-Plot der Phasenverschiebung ist oben gezeigt. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe um den entsprechenden Nyquist-Plot zu erstellen.

• Aufgabe 3–31:

Ein Masse–Feder System mit Dämpfung ist beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 25y(t) = f(t)$$

Untersuchen Sie dieses System mit Input $f(t)$ und Output $y(t)$.

(a) Untersuchen Sie den Bode-Plot des Amplitudenfaktors für

- sehr grosse Werte von $s = i\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\omega$

um den Bode-Plot zu erstellen. Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.1 < \omega < 100$.

(b) Der Wert ω_0 ist bestimmt durch den Schnittpunkt der beiden obigen Geraden. Bestimmen Sie den Wert der Transferfunktion $|G(i\omega_0)|$ für diese Frequenz und passen Sie den Bodeplot an.

(c) Der Bode-Plot der Phasenverschiebung ist unten rechts gezeigt. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe, um den entsprechenden Nyquist-Plot zu erstellen.

(a) Examiner le plot de Bode des amplitudes pour

- des valeurs très grandes de $s = i\omega$
- des valeurs très petites de $s = i\omega$

pour esquisser le plot de Bode. On doit obtenir deux droites comme bonne approximation du plot. Esquisser ces droites pour le domaine $0.01 < \omega < 100$.

(b) La valeur ω_0 est donnée par le point d'intersection des deux droites. Déterminer la valeur de la fonction de transfert $|G(i\omega_0)|$ pour cette fréquence.

(c) Le plot de Bode de déphasages est montré ci-dessus. Utiliser ce plot et le résultat de (a) pour trouver le plot de Nyquist.

Un système masse–ressort est donné par l'équation différentielle

Examiner ce système avec input $f(t)$ et output $y(t)$.

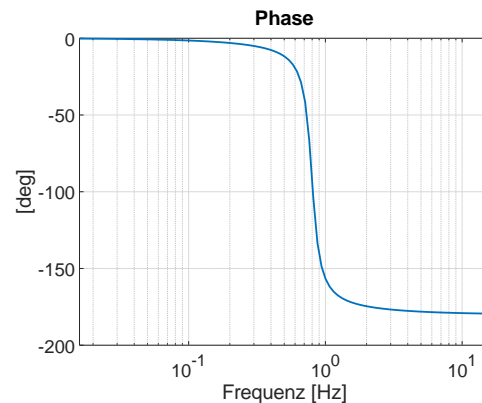
(a) Examiner le plot de Bode des amplitudes pour

- de très grandes valeurs de $s = i\omega$
- de très petites valeurs de $s = i\omega$

pour esquisser le plot de Bode. On doit obtenir deux droites qui donnant une bonne approximation du plot. Esquisser ces droites pour le domaine $0.1 < \omega < 100$.

(b) La valeur ω_0 est donnée par le point d'intersection des deux droites. Déterminer la valeur de la fonction de transfert $|G(i\omega_0)|$ pour cette fréquence et modifier ensuite le plot de Bode.

(c) Le plot de Bode du déphasage est montré ci-dessous. Utiliser ce plot et les résultats ci-dessus pour esquisser le plot de Nyquist.



• **Aufgabe 3–32:**

Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch

$$G(s) = \frac{10s}{s^3 + 10s^2 + 4s + 10}$$

(a) Untersuchen Sie den Bode–Plot des Amplitudenfaktors für

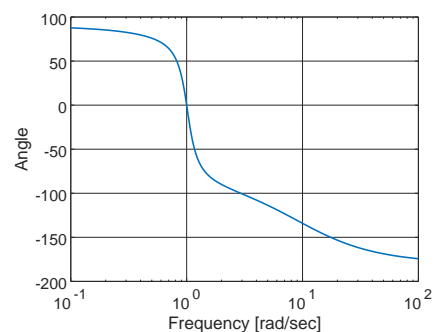
- sehr grosse Werte von $s = i\omega$
- sehr kleine Werte von $s = i\omega$ um den Bode–Plot zu erstellen.

Es sollten sich zwei Geraden ergeben, die den Plot gut approximieren werden. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für den Bereich $0.01 < \omega < 100$.

(b) Der Bode–Plot der Phasenverschiebung ist unten rechts gezeigt. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe, um den entsprechenden Nyquist–Plot zu erstellen.

(c)

Finden Sie den Bode–Plot der Phasenverschiebung rechts. Verwenden Sie ihn und Ihr Resultat der obigen Teilaufgabe, um den entsprechenden Nyquist–Plot zu erstellen.

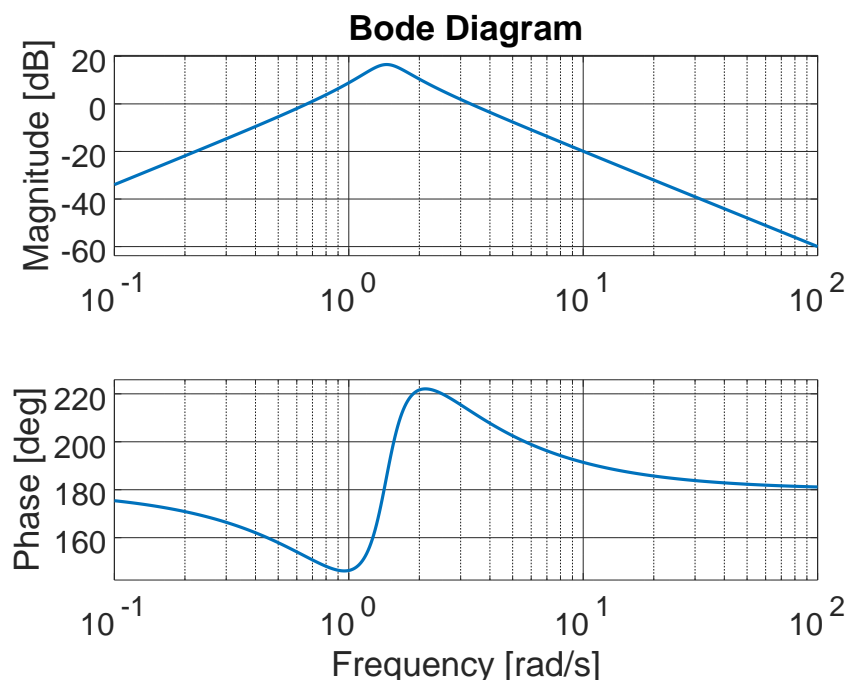


• **Aufgabe 3–33:**

Die Transferfunktion eines Systems ist unten gegeben. Ebenso sind die beiden Bode–Plots gegeben.

La fonction de transfert d'un système est donnée ci-dessous. Trouver aussi les deux plots de Bode.

$$G(s) = \frac{A s^n}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$



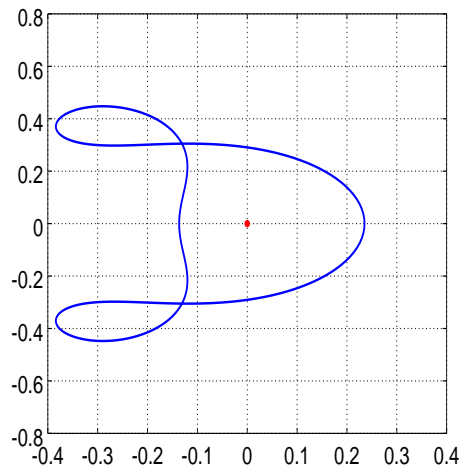
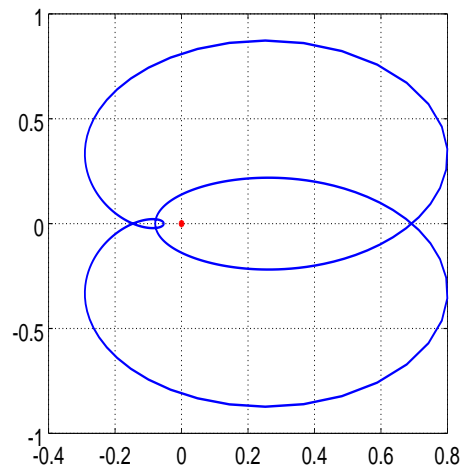
- (a) Untersuchen Sie den Bode-Plot des Amplitudenfaktors um die Werte von A und n zu bestimmen.
- (b) Erstellen Sie den Nyquist-Plot. Der höchste Punkt im Bode-Plot der Amplituden ist auf der Höhe 16.6. Entscheiden Sie ob das Closed-Loop-System stabil ist.
- (c) Im obigen System wird A ersetzt durch $k \cdot A$ mit einem positiven Faktor k . Für welche Werte von k ist das Closed-Loop-System stabil?
- (a) Examiner le plot de Bode des amplitudes pour déterminer les valeurs de A et n .
- (b) Esquisser le plot de Nyquist. Le point le plus haut dans le plot de Bode des amplitudes se trouve à une hauteur de 16.6. Décider si le système closed loop est stable.
- (c) Dans le système ci-dessus remplacer la constante A par $k \cdot A$ avec un facteur k positif. Pour quelles valeurs de k le système closed loop est-il stable?

• **Aufgabe 3–34:**

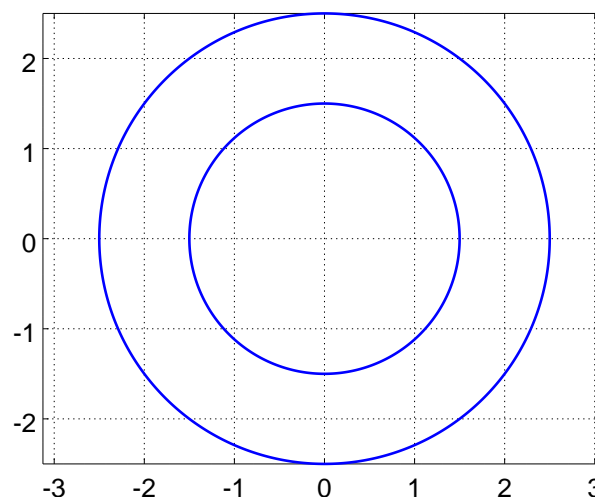
Von einer gebrochen rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

weiss man, dass der Zähler $g(z)$ genau eine Nullstelle (bei $z = 2$) hat. Durchläuft $z(t) = r_k e^{it}$ zwei Kreise ($k = 1, 2$) um den Ursprung (mit Radien $r_1 = 1.5$ und $r_2 = 2.5$) so ergeben sich die beiden untenstehenden Figuren für $f(z(t)) \in \mathbb{C}$.

Kreis mit Radius $r_1 = 1.5$ Kreis mit Radius $r_2 = 2.5$

Finden Sie soviel wie möglich über Anzahl und Lage der Nullstellen des Nenners heraus. Skizzieren Sie eine mögliche Lage der Nullstellen des Nenners in der untenstehenden Graphik.



• Aufgabe 3–35:

Untersuchen Sie die unten gezeigte Operationsverstärkerschaltung.

- Stellen Sie die Differentialgleichung für die Eingangs- und Ausgangsspannung. Verwenden Sie den Verstärkungsfaktor K für den OpAmp. Setzen Sie $u_{in}(0) = 0$.
- Setzen Sie nun $K \approx \infty$ und drücken Sie $U_{out}(s)$ aus mittels $U_{in}(s)$.
- Geben Sie die Transferfunktion $G(s)$ des Systems an.
- Erstellen Sie die beiden Bode Plots für dieses System.

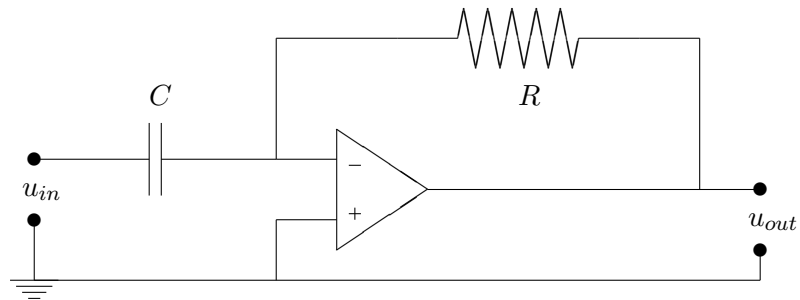
Examiner le circuit ci-dessous avec un amplificateur opérationnel.

- Trouver l'équation différentielle pour les tensions d'entrée u_{in} et de sortie u_{out} . Utiliser le facteur d'amplification K pour le OpAmp et choisir $u_{in}(0) = 0$.
- Mettre $K \approx \infty$ et exprimer $U_{out}(s)$ comme fonction de $U_{in}(s)$.
- Trouver la fonction de transfert $G(s)$ de ce système.
- Trouver les deux plots de Bode pour ce système.

Verwende/Utiliser

$$u = RI$$

$$I = C \dot{u}$$



• Aufgabe 3–36:

Examiner un système avec fonction de transfert

Untersuchen Sie ein System mit der Transferfunktion

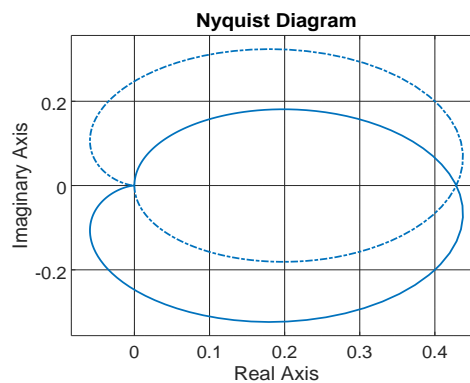
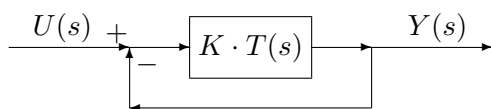
$$T(s) = \frac{s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$$

(a) Esquisser le plot de Bode des amplitudes le plus exact possible, en utilisant deux droites. Vérifier que les pentes et intersections des droites avec les axes sont correctes.

(a) Skizzieren Sie den Bode Plot des Amplitudengangs möglichst genau, mit Hilfe zweier geeigneter Geraden. Steigungen und Achsenabschnitte der Geraden sollten korrekt sein.

(b) Trouver le plot de Nyquist de $T(s)$ ci-dessous. Estimer pour quelles valeurs de $K \in \mathbb{R}$ le système closed-loop avec $K \cdot T(s)$ est stable. Attention: tenir compte des valeurs positives et négatives de K .

(b) Der Nyquist Plot von $T(s)$ ist unten gegeben. Schätzen Sie für welche Werte der Konstanten $K \in \mathbb{R}$ das Closed-Loop System mit $K \cdot T(s)$ stabil ist. Achtung: K kann positiv oder negativ sein.



• Aufgabe 3–37:

Untersuchen sie das System mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$.

Examiner le système avec entrée $u(t)$ et sortie $y(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \frac{1}{10}x(t) &= \dot{u}(t) \\ 1000\dot{y}(t) + y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Transferfunktion $T(s)$. Der Nenner ist in Faktoren zu zerlegen.

(b) Untersuchen Sie die Transferfunktion $T(i\omega)$ auf den drei angegebenen Teilbereichen. Für den Bode Plot der Amplituden wird auf jedem der Segmente eine (approximative) Gerade entstehen.

- $\omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll \frac{1}{10}$
- $\frac{1}{10} \ll \omega$

(c) Skizzieren Sie den Bode-Plot der Amplituden auf dem Bereich $10^{-5} \leq \omega \leq 10$ unter Verwendung der vorangehenden Teilaufgabe.

(a) Trouver la fonction de transfert $T(s)$. Factoriser le dénominateur.

(b) Examiner la fonction de transfert $T(i\omega)$ dans les trois domaines

- $\omega \ll \frac{1}{1000}$
- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll \frac{1}{10}$
- $\frac{1}{10} \ll \omega$

Pour chaque domaine le plot de Bode pour les amplitudes sera une droite.

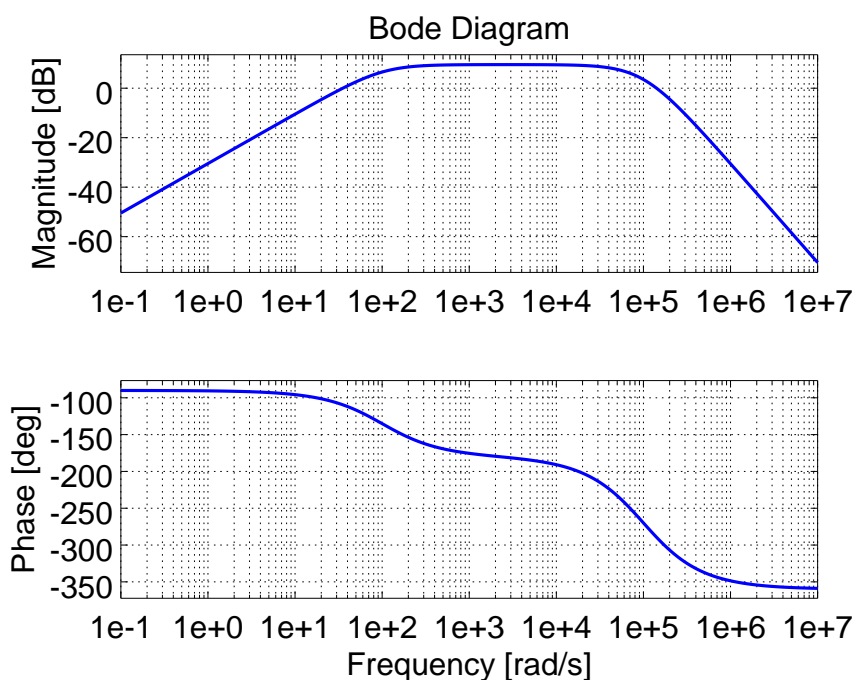
(c) Esquisser le plot de Bode pour les amplitudes pour le domaine $10^{-5} \leq \omega \leq 10$ en utilisant vos résultats précédents.

• Aufgabe 3–38:

Untersuchen Sie die Transferfunktion $G(s)$ eines Systems und den Bode Plot.

Examiner la fonction de transfert $G(s)$ et le plot de Bode ci-dessous.

$$G(s) = \frac{A s}{B s^n + 20 s^2 + 10^6 s + 10^8}$$



(a) Bestimmen Sie den numerischen Wert von A mit Hilfe der Geraden links im Bode Plot.

(b) Bestimmen Sie die numerischen Werte von n und B mit Hilfe der Geraden rechts im Bode Plot.

(c) Skizzieren Sie den Nyquist Plot.

(a) Trouver la valeur numérique de A à l'aide de la droite à gauche dans le plot de Bode.

(b) Trouver les valeurs numériques de n et B à l'aide de la droite à droite dans le plot de Bode.

(c) Esquisser le plot de Nyquist.

3.5.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 3–1 :

- (a) Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0$$

Da einer der Koeffizienten (-3) negativ ist muss eine der Nullstellen positiven Realteil haben. Damit ist die Nulllösung sicher instabil.

- (b) Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^4 + 0\lambda^3 + \lambda^2 + 0\lambda + 4 = 0$$

Da zwei Koeffizienten nicht positiv sind kann die Nulllösung nicht exponentiell stabil sein.

- (c) Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

Das Kriterium von Routh oder eine Rechnung mit dem Taschenrechner zeigen, dass alle Nullstellen negativen Realteil haben und somit die Nulllösung stabil ist.

Lösung zu Aufgabe 3–2 : Es sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu überprüfen. Es müssen alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben. Für Probleme vom Grad 1 und zwei ist dieses Kriterium auch hinreichend. Falls alle Realteile negativ sind, so gibt die grösste Nullstelle den Exponenten an.

- (a) JA, die Nullstellen sind $-1/3 \pm i 0.471405$ und somit konvergieren die Lösungen wie $e^{-t/3}$ gegen Null.
- (b) NEIN, zwei der Nullstellen sind $0.0344 \pm i 0.296$.
- (c) JA, der grösste Realteil ist -0.269934 und somit konvergieren die Lösungen wie $e^{-t 0.27}$ gegen Null.
- (d) JA. Es handelt sich um eine inhomogene Gleichung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $s^2 + 3s + 4$ sind $-\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$. Die partikuläre Lösung hat die Form $c e^{-t}$. Somit konvergiert die Lösung wie e^{-t} gegen Null.

Lösung zu Aufgabe 3–3 : Es sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu überprüfen. Es müssen alle Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben. Für Probleme vom Grad 1 und zwei ist dieses Kriterium auch hinreichend.

- (a) JA
- (b) NEIN
- (c) NEIN, da eine der Nullstellen des charakteristischen Polynoms positiven Realteil hat.
- (d) NEIN, die Gleichung ist nicht homogen, der Term 1 garantiert, dass die Lösung nicht gegen Null konvergieren kann.
- (e) JA, falls

$$k - 3 > 0 \quad \text{und} \quad 7 - k > 0 \quad \text{führt auf} \quad 3 < k < 7$$

Lösung zu Aufgabe 3–4 :

(a) Dieses Problem kann mittels einer Partialbruchzerlegung gelöst werden.

$$\begin{aligned}
 Y(s^3 + 2s^2 - 5s - 6) &= \frac{1}{s} + K = \frac{1 + sK}{s} \\
 Y &= \frac{1}{s} + K = \frac{1 + sK}{s(s^3 + 2s^2 - 5s - 6)} \\
 &= \frac{1 + sK}{s(s-2)(s+3)(s+1)} \\
 &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+1}
 \end{aligned}$$

Somit ist die zu lösende Gleichung

$$1 + Ks = A(s-2)(s+3)(s+1) + Bs(s+3)(s+1) + Cs(s-2)(s+1) + Ds(s-2)(s+3)$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen können nacheinander verschiedene Werte von s eingesetzt werden

$$\begin{aligned}
 s = 0 \quad \text{ergibt} \quad 1 &= -6A \\
 s = 2 \quad \text{ergibt} \quad 1 + 2K &= 30B \\
 s = -3 \quad \text{ergibt} \quad 1 - 3K &= -30C \\
 s = -1 \quad \text{ergibt} \quad 1 - K &= 6D
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+1} \\
 &= \frac{-1}{6} \frac{1}{s} + \frac{1+2K}{30} \frac{1}{s-2} + \frac{3K-1}{30} \frac{1}{s+3} + \frac{1-K}{6} \frac{1}{s+1} \\
 y(t) &= \frac{-1}{6} + \frac{1+2K}{30} e^{2t} + \frac{3K-1}{30} e^{-3t} + \frac{1-K}{6} e^{-t}
 \end{aligned}$$

(b) In der obigen Formel konvergiert der Anteil e^{2t} gegen unendlich. Damit die Lösung beschränkt bleibt, muss der entsprechende Koeffizient verschwinden. Somit ist der gesuchte Wert $K = -1/2$.

Lösung zu Aufgabe 3-5 :

(a)

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 + 7\lambda + 12 &= (\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0 \\
 y_h(t) &= c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} \\
 y_p(t) &= A \cos(3t) + B \sin(3t) \\
 \ddot{y}_p(t) + 7\dot{y}_p(t) + 12y_p(t) &= -9(A \cos(3t) + B \sin(3t)) + 3 \cdot 7(-A \sin(3t) + B \cos(3t)) \\
 &\quad + 12(A \cos(3t) + B \sin(3t)) = 3 \cos(3t) + 0 \sin(3t)
 \end{aligned}$$

Nun sind die Koeffizienten von $\cos(3t)$ und $\sin(3t)$ zu vergleichen.

$$\begin{aligned}
 3 \cos(3t) + 0 \sin(3t) &= \cos(3t) (3A + 21B) + \sin(3t) (-21A + 3B) \\
 1 \cos(3t) + 0 \sin(3t) &= \cos(3t) (A + 7B) + \sin(3t) (-3A + B) \\
 \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{1+7^2} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} +1 \\ +7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{50} \cos(3t) + \frac{7}{50} \sin(3t)$$

(b) System ist stabil, wähle $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} (s^2 + 7s + 12) Y(s) &= F(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 7s + 12} F(s) \\ s Y(s) &= \frac{s}{s^2 + 7s + 12} F(s) \\ U(s) &= \mathcal{L}[\alpha y(t) + \beta \dot{y}(t)](s) = \alpha Y(s) + \beta s Y(s) \\ &= \frac{\alpha + \beta s}{s^2 + 7s + 12} F(s) \\ T(s) &= \frac{\alpha + \beta s}{s^2 + 7s + 12} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3–6 : Es sind jeweils die Nullstellen der Nenner der Transferfunktionen zu untersuchen. Keine Nullstelle darf positiven Realteil haben.

(a)

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= f(t) \\ (s^3 + 3s^2 + 2s + 1) Y(s) &= F(s) + \text{Anfangswerte} \\ T(s) &= \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \end{aligned}$$

Die drei Nullstellen sind $s_1 = -2.32472$ und $s_{2,3} = -0.337641 \pm i 0.56228$ und somit ist das System stabil.

(b) Da einer der Koeffizienten negativ ist, kann das System nicht stabil sein.

(c) Das zu untersuchende Polynom $s^3 + s^2 + s + 2$ hat die Nullstellen $s_1 = -1.35321$ und $s_{2,3} = 0.176605 \pm i 1.20282$ und das System ist somit instabil.

(d) Stabil, da die Nullstellen von $s^3 + 2s^2 + s + 1$ alle negativen Realteil haben.

(e) Instabil, da der Term s^3 im Polynom $s^4 + 2s^2 + s + 1$ fehlt.

Lösung zu Aufgabe 3–7 : Es sind jeweils die Nullstellen der Nenner der Transferfunktionen zu untersuchen. Keine Nullstelle darf positiven Realteil haben.

(a) Zuerst zu einer Transferfunktion übersetzen.

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) + 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) &= f(t) \\ (s^3 + 4s^2 + 4s + 1) Y(s) &= F(s) + \text{Anfangswerte} \\ T(s) &= \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s + 1} \end{aligned}$$

Die drei Nullstellen sind $s_1 = -2.62$, $s_2 = -1$ und $s_3 = -0.38$ und somit ist das System stabil.

(b) Die dritte Ableitung fehlt, der entsprechende Koeffizient ist 0. Somit kann das System nicht stabil sein. Zwei der Nullstellen von $s^4 + 0s^3 + 2s^2 + s + 1$ sind $0.343815 \pm i 1.35843$.

(c) Die Nullstellen von $s^3 + 0.9s^2 + s + 1$ sind $s_1 = -0.952435$ und $s_{2,3} = 0.0262174 + i 1.02433$. Somit ist das System nicht stabil.

- (d) Das zu untersuchende Polynom ist identisch zur vorangehenden Teilaufgabe. Somit ist auch dieses System nicht stabil.
- (e) Die Nullstellen von $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 0.5$ sind $s_1 = -1.40921$, $s_2 = -0.32814$ und $s_{3,4} = -0.131324 - i 1.03152$. Somit ist das System stabil.

Lösung zu Aufgabe 3–8 :

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
stabil	x		x	x	x
instabil		x			

Es sind jeweils die Nullstellen der Nenner der Transferfunktionen zu untersuchen. Das System ist stabil, falls keine Nullstelle positiven Realteil hat.

- (a) Zuerst zu einer Transferfunktion übersetzen.

$$\begin{aligned}
 y^{(3)}(t) + y''(t) + 2y'(t) + y(t) &= f'(t) \\
 (s^3 + s^2 + 2s + 1) Y(s) &= s F(s) + \text{Anfangswerte} \\
 T(s) &= \frac{s}{s^3 + s^2 + 2s + 1}
 \end{aligned}$$

Die drei Nullstellen sind $s_{1,2} \approx -0.21 \pm i 1.3$ und $s_3 = -0.57$ und somit ist das System stabil.

- (b)

$$T(S) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Eine der Nulstellen des Nenners ist $s_1 \approx +0.07$ und somit ist das System instabil.

- (c) Beim Nenner zweiter Ordnung sind alle Koeffizienten positiv und somit ist das System stabil.
- (d) Die Nullstellen von $4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$ sind $s_1 \approx -0.61$ und $s_{2,3} \approx -0.072 \pm i 0.64$. Somit ist das System stabil.
- (e) Die selbe Transferfunktion wie in Teilaufgabe (a) und somit stabil.

Lösung zu Aufgabe 3–9 : Bilde ein System von Gleichungen für die transformierten Funktionen.

$$\begin{aligned}
 (s+3)X(s) - Y(s) &= F(s) + x(0) \\
 -X(s) + (s+4)Y(s) &= y(0)
 \end{aligned}$$

Mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
 ((s+3)(s+4) - 1) X(s) &= (s+4)(F(s) + x(0)) + y(0) \\
 X(s) &= \frac{(s+4)(F(s) + x(0)) + y(0)}{(s+3)(s+4) - 1} \\
 &= \frac{(s+4)(F(s) + x(0)) + y(0)}{s^2 + 7s + 11} \\
 Y(s) &= \frac{(s+3)y(0) + F(s) + x(0)}{s^2 + 7s + 11}
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners sind

$$\alpha_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 44}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -4.61803 \\ -2.38197 \end{cases}$$

(a) Für das homogene Problem gilt für $X(s)$

$$X(s) = \frac{(s+4)x(0) + y(0)}{s^2 + 7s + 11} = \frac{A}{s - \alpha_1} + \frac{B}{s - \alpha_2}$$

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}$$

Somit konvergiert $x(t)$ wie $e^{\alpha_2 t} = e^{-2.38t}$ gegen Null. Das selbe Resultat gilt auch für $y(t)$.

(b) Anfangsbedingungen können gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicherlich $x(0) = y(0) = 0$.

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 11} F(s) = T(s) \cdot F(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 11}$$

(c) Zu untersuchen ist $T(i\omega)$ für sehr kleine und sehr grosse Werte von $\omega \in \mathbb{R}$. Der Bodeplot entsteht als Graph von $20 \log |T(i\omega)|$ als Funktion von $\log \omega$, resp. als Graph von $\arg(T(i\omega))$.

- Bei $\omega = 3$ gilt

$$T(i3) = \frac{1}{-9 + 7i3 + 11} = \frac{1}{2 + i21} \approx 0.0045 - i0.0472 = 0.04740 e^{i-1.48}$$

Somit gilt $20 \log |T(i3)| \approx -26.484$ und $\arg T(i3) \approx -1.48 \approx -85^\circ$.

- Für kleine Werte von $\omega > 0$ entsteht für die Amplitude eine horizontale Gerade auf der Höhe -20 . Die Phase ist 0 .

$$T(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 7i\omega + 11} \approx \frac{1}{11}$$

$$20 \log |T(i\omega)| \approx 20 \log \frac{1}{11} \approx -20.8$$

$$\arg T(i\omega) \approx 0$$

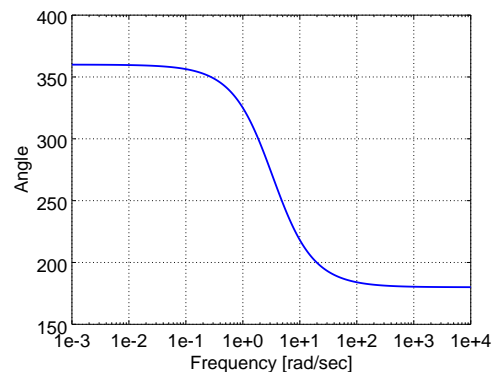
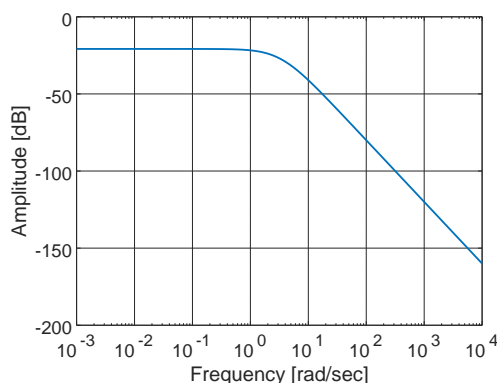
- Für grosse Werte von $\omega > 0$ gilt

$$T(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 7i\omega + 11} \approx \frac{1}{-\omega^2} = \frac{-1}{\omega^2}$$

$$20 \log |T(i\omega)| \approx -40 \log \omega$$

$$\arg T(i\omega) \approx -\pi = -180^\circ$$

und somit für die Amplitude eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung -40 . Die Phase ist $-\pi$ oder -180° . Da die Phase bei $\omega = 3$ ca. -85° ist, sollte -180° gewählt werden.



Lösung zu Aufgabe 3–10 :

(a) Laplacetransformation des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} s X - a &= -X - 2Y + 0 \\ s Y &= 2X - Y \end{aligned}$$

Als lineares Gleichungssystem für X und Y schreiben

$$\begin{aligned} (s+1) X + 2Y &= a \\ -2X + (s+1) Y &= 0 \end{aligned}$$

 X und Y isolieren durch geeignete Zeilenaddition oder Subtraktion

$$\begin{aligned} ((s+1)^2 + 4) X &= a(s+1) \\ ((s+1)^2 + 4) Y &= 2a \end{aligned}$$

Nach X und Y auflösen

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{a(s+1)}{(s+1)^2 + 4} \\ Y(s) &= \frac{2a}{(s+1)^2 + 4} \end{aligned}$$

Rücktransformieren

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{-t} \cos(2t) \\ y(t) &= a e^{-t} \sin(2t) \end{aligned}$$

(b) Anfangswerte Null setzen und $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ verwenden.

$$\begin{aligned} (s+1) X + 2Y &= F \\ -2X + (s+1) Y &= 0 \end{aligned}$$

 $Y = \frac{2}{s+1} X$ eliminieren

$$\begin{aligned} (s+1) X + 2 \frac{2}{s+1} X &= F \\ (s+1)^2 X + 4 X &= (s+1) F \\ X &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} F \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$T(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}$$

Lösung zu Aufgabe 3–11 :

(a) Das Gesetz von Newton ergibt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= +k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 \end{aligned}$$

oder numerisch

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ 2\ddot{x}_1 &= +2x_1 - 6x_2\end{aligned}$$

Das führt auf die Matrixnotation

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- (b) Die Eigenschwingungen sind bestimmt durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. Man erhält

Eigenwert	$\lambda_1 = -1.58579$	$\lambda_2 = -4.41421$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} +0.81650 \\ +0.57735 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +0.81650 \\ -0.57735 \end{pmatrix}$

Die Kreisfrequenzen sind die Wurzeln aus den Eigenwerten (bzw. deren Absolutbetrag) und somit

$$\omega_1 = \sqrt{|\lambda_1|} = 1.25928 \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{|\lambda_2|} = 2.10100$$

Die Frequenzen ν_i sind nun gegeben durch $\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ und somit

$$\nu_1 \approx 0.20 \quad \text{und} \quad \nu_2 \approx 0.33$$

Für die Amplituden der langsameren Schwingungen gilt $x_1 \approx +0.81650$ und $x_2 \approx 0.57735$ oder auch $x_1/x_2 \approx 1.41$. Somit schwingen die beiden Massen in Phase, die erste mit der 1.4-fachen Amplitude.

- (c) Nun gilt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 - \dot{x}_1 \\ 2\ddot{x}_1 &= +2x_1 - 6x_2 - \dot{x}_2\end{aligned}$$

oder mit einer Matrizennotation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

- (d) Die Eigenwerte der obigen Matrix sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -0.3663 \pm i 2.0449 \quad \text{und} \quad \lambda_{3,4} = -0.3837 \pm i 1.2144$$

Somit konvergieren die Lösungen wie $e^{-0.3663t}$ gegen Null.

Lösung zu Aufgabe 3–12 : Diese Aufgabe wurde aus [PapuIII01, p. 679] übernommen.

- (a) Es genügt die zweite Gleichung zu lösen. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{c}{m}x - a \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \\ s^2 X &= -\frac{c}{m}X - \frac{a}{s} \\ X(s) &= \frac{-a}{s(s^2 + c/m)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + c/m} = \frac{A(s^2 + c/m) + s(Bs + C)}{s(s^2 + c/m)} \\ -a &= A(s^2 + c/m) + s(Bs + C)\end{aligned}$$

Mit $s = 0$ folgt sofort $A = -\frac{a m}{c}$ und $s = i \sqrt{c/m}$ führt auf $-a = -B c/m + i C \sqrt{c/m}$ und somit $B = \frac{a m}{c}$ und $C = 0$. Somit erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{a m}{c} \frac{1}{s} + \frac{a m}{c} \frac{s}{s^2 + c/m} \\ x(t) &= -\frac{a m}{c} + \frac{a m}{c} \cos(\sqrt{c/m} t) \end{aligned}$$

(b) Die erste Differentialgleichung kann in der zweiten eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -c x - m \ddot{y} = -c x - \frac{m}{M} (f + c x) \\ s^2 X &= -\frac{c}{m} X - \frac{1}{M} (F + c X) \\ \left(s^2 + \frac{c}{m} + \frac{c}{M}\right) X &= -\frac{1}{M} F \\ X(s) &= \frac{-1}{M \left(s^2 + \frac{c}{m} + \frac{c}{M}\right)} F \\ &= \frac{-1}{M s^2 + \frac{M c}{m} + c} F(s) \\ T(s) &= \frac{-1}{M s^2 + \frac{M c}{m} + c} \end{aligned}$$

(c) Die obigen Rechnungen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \left(s^2 + \frac{c}{m} + \frac{c}{M}\right) X &= A s + B \\ \omega^2 &= \frac{c}{m} + \frac{c}{M} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{c}{m} + \frac{c}{M} \\ \omega(M) &= \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{c}{M}} \\ \omega(\infty) &= \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{natürliche Frequenz der Blattfeder auf festem Grund} \\ \omega(M) &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Frequenz um Faktor } \sqrt{2} \text{ erhöht} \\ \omega(m) &\approx \sqrt{\frac{c}{M}} \quad \text{falls } M \ll m \\ &\quad \text{somit schwingt das System mit kleinem } M \text{ immer schneller} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3–13 :

(a)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

(b) Wir wählen alle Anfangswerte 0, um die Formeln zu vereinfachen.

$$\begin{aligned} m_1 s^2 X_1 &= -k_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_1) + F(s) \\ m_2 s^2 X_2 &= -k_2 (X_2 - X_1) \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{array}{rcl} (m_1 s^2 + k_1 + k_2) X_1 & -k_2 X_2 & = \frac{A s}{\omega^2 + s^2} \\ -k_2 X_1 & + (m_2 s^2 + k_2) X_2 & = 0 \end{array}$$

(c) Dieses System muss nach X_1 aufgelöst werden, wobei X_2 eliminiert werden kann. Das führt zu

$$((m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2) - k_2^2) X_1 = (m_2 s^2 + k_2) \frac{A s}{\omega^2 + s^2}$$

oder auch

$$X_1 = \frac{(m_2 s^2 + k_2)}{(m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2) - k_2^2} F(s)$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$T(s) = \frac{(m_2 s^2 + k_2)}{(m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_2) - k_2^2}$$

(d) Da ω fest vorgegeben ist, sollte der Absolutbetrag von $T(i\omega)$ minimal gemacht werden. Der Zähler $(-m_2 \omega^2 + k_2)$ wird sogar 0 falls wir

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \text{oder} \quad m_2 = \frac{k_2}{\omega^2}$$

wählen.

Das Resultat kann zur dynamischen Vibrationsabsorption verwendet werden und wurde von Frahm (1909) vorgeschlagen (Quelle: [Hart84, p.87]).

Lösung zu Aufgabe 3–14 :

(a) Das Gesetz von Newton führt auf

$$\begin{array}{lcl} m_1 \ddot{x}_1 & = & -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 & = & -k_2 (x_2 - x_1) - \dot{x}_2 + f_2(t) \end{array}$$

(b) Wir wählen alle Anfangswerte 0, um die Formeln zu vereinfachen.

$$\begin{array}{lcl} m_1 s^2 X_1 & = & -k_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_1) \\ m_2 s^2 X_2 & = & -k_2 (X_2 - X_1) - s X_2 + F_2(s) \end{array}$$

oder auch (mit den gegebenen Zahlen)

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2} s^2 X_1 & = & -2 X_1 + 2 (X_2 - X_1) \\ s^2 X_2 & = & -2 (X_2 - X_1) - s X_2 + F_2(s) \end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} (s^2 + 8) X_1 & -4 X_2 & = 0 \\ -2 X_1 & + (s^2 + s + 2) X_2 & = \frac{A s}{\omega^2 + s^2} \end{array}$$

- (c) Dieses System muss nach X_2 aufgelöst werden, wobei X_1 eliminiert werden kann. Das führt zu

$$-8 X_2 + (s^2 + 8) (s^2 + s + 2) X_2 = (s^2 + 8) \frac{A s}{\omega^2 + s^2}$$

oder auch

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{s^2 + 8}{-8 + (s^2 + 8) (s^2 + s + 2)} \frac{A s}{\omega^2 + s^2} \\ &= \frac{s^2 + 8}{s^4 + s^3 + 10 s^2 + 8 s + 8} F(s) \end{aligned}$$

Die Laplacetransformation von \dot{x}_2 ist $s X_2$ und somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$T(s) = \frac{s (s^2 + 8)}{s^4 + s^3 + 10 s^2 + 8 s + 8}$$

- (d) Damit das System stabil ist müssen alle Nullstellen des Nenners der Transferfunktion negativen Realteil haben. Der grösste Wert ergibt den Exponenten der Konvergenz gegen Null. Die Rechnungen können mit einem Rechenwerkzeug (hier *Octave* oder *MATLAB*) ausgeführt werden.

Octave

```
roots([1 1 10 8 8])
-->
-0.06181 + 2.99988i
-0.06181 - 2.99988i
-0.43819 + 0.83461i
-0.43819 - 0.83461i
```

Somit konvergiert die Lösung wie $e^{-0.06 t}$ gegen Null.

Lösung zu Aufgabe 3–15 :

- (a) Die Kraftfunktion kann durch Schrittfunktionen beschrieben werden und dann kann die Laplacetransformation durch einen Verschiebungssatz bestimmt werden.

$$f(t) = 7 - 7 U(t - 2) \quad \implies \quad F(s) = \frac{7}{s} - e^{-2s} \frac{7}{s}$$

Die Differentialgleichung kann nun gelöst werden.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{g}{l} x &= f(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \\ s^2 X(s) + \frac{g}{l} X(s) &= \frac{7}{s} - e^{-2s} \frac{7}{s} \\ X(s) &= \frac{7}{s (s^2 + \frac{g}{l})} - e^{-2s} \frac{7}{s (s^2 + \frac{g}{l})} \end{aligned}$$

Eine Partialbruchzerlegung führt auf

$$\begin{aligned} \frac{7}{s (s^2 + \frac{g}{l})} &= \frac{A}{s} + \frac{B s + C}{s^2 + \frac{g}{l}} \\ 7 &= A (s^2 + \frac{g}{l}) + (B s + C) s \\ A &= \frac{7l}{g} \quad \text{folgt mit} \quad s = 0 \\ 7 &= -\frac{g}{l} B + i \sqrt{\frac{g}{l}} C \quad \text{folgt mit} \quad s = i \sqrt{\frac{g}{l}} \\ B &= \frac{-7l}{g} \quad \text{und} \quad C = 0 \\ \frac{7}{s (s^2 + \frac{g}{l})} &= \frac{7l}{g} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}} \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{7}{s(s^2 + \frac{g}{l})} - e^{-2s} \frac{7}{s(s^2 + \frac{g}{l})} \\ x(t) &= \frac{7l}{g} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) - \frac{7l}{g} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{l}} (t-2) \right) U(t-2) \end{aligned}$$

(b) Für $t > 2$ gilt $U(t-2) = 1$ und die beiden konstanten Terme fallen weg. Es gilt

$$x(t) = \frac{7l}{g} \left(-\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \cos \sqrt{\frac{g}{l}} (t-2) \right)$$

(c) Damit das Pendel für $t > T$ in Ruhe ist muss gelten

$$\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t = \cos \sqrt{\frac{g}{l}} (t-T)$$

Dies ist der Fall für

$$T = n 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{wobei} \quad n \in \mathbb{N}$$

d.h. für alle Vielfachen der natürlichen Periode des Pendels.

Lösung zu Aufgabe 3–16 :

(a)

$$\begin{aligned} m(s^2 X_1 - s x_1(0) - \dot{x}_1(0)) &= -k X_1 + k(X_2 - X_1) \\ m(s^2 X_2 - s x_2(0) - \dot{x}_2(0)) &= -k(X_2 - X_1) - k X_2 \end{aligned}$$

Nun setzen wir $m = 1$ ein.

$$\begin{aligned} (s^2 + 2k) X_1 - k X_2 &= s x_1(0) + \dot{x}_1(0) \\ -k X_1 + (s^2 + 2k) X_2 &= s x_2(0) + \dot{x}_2(0) \end{aligned}$$

(b) Die erste Gleichung mit $(s^2 + 2k)$ multiplizieren und das k -fache der zweiten addieren. Dadurch wird X_2 eliminiert.

$$X_1(s) = \frac{\text{Zähler}}{(s^2 + 2k)^2 - k^2}$$

(c) Zu bestimmen sind die Nullstellen des Nenners, d.h.

$$(s^2 + 2k)^2 - k^2 = s^4 + 4k s^2 + 3k^2 = 0$$

Diese biquadratische Gleichung (Gleichung für s^2) wird gelöst durch

$$s_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(-4k \pm \sqrt{16k^2 - 12k^2} \right) = -2k \pm k$$

Somit sind die Nullstellen des Nenners $\pm i\sqrt{3k}$ und $\pm i\sqrt{k}$. Also sind die beiden gesuchten Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = \sqrt{k}$ und $\omega_2 = \sqrt{3k}$.

Lösung zu Aufgabe 3–17 :

(a) Das Gesetz von Newton führt auf

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 - \dot{x}_2 + f(t) \end{aligned}$$

(b) Wir wählen alle Anfangswerte 0, um die Formeln zu vereinfachen.

$$\begin{aligned} m_1 s^2 X_1 &= -k_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_1) - s X_1 \\ m_2 s^2 X_2 &= -k_2 (X_2 - X_1) - k_3 X_2 - s X_2 + F(s) \end{aligned}$$

oder auch (mit den gegebenen Zahlen)

$$\begin{aligned} s^2 X_1 &= -2 X_1 + 4 (X_2 - X_1) - s X_1 \\ s^2 X_2 &= -4 (X_2 - X_1) - 2 X_2 - s X_2 + F(s) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (s^2 + s + 6) X_1 - 4 X_2 &= 0 \\ -4 X_1 + (s^2 + s + 6) X_2 &= F(s) \end{aligned}$$

(c) Dieses System muss nach X_1 aufgelöst werden, wobei X_2 eliminiert werden kann. Das führt zu

$$(s^2 + s + 6)^2 X_1 - 16 X_1 = 4 F(s)$$

oder auch

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4}{(s^2 + s + 6)^2 - 16} F(s) \\ &= \frac{4}{s^4 + 2 s^3 + 13 s^2 + 12 s + 20} F(s) \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$T(s) = \frac{4}{s^4 + 2 s^3 + 13 s^2 + 12 s + 20}$$

(d) Damit das System stabil ist müssen alle Nullstellen des Nenners der Transferfunktion negativen Realteil haben. Der grösste Wert ergibt den Exponenten der Konvergenz gegen Null. Die Rechnungen können mit einem Rechenwerkzeug ausgeführt werden. Es ergeben sich die Nullstellen $s_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ und $s_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2}$. Somit konvergieren die Lösungen wie $e^{-t/2}$ gegen Null.

Lösung zu Aufgabe 3–18 :

(a)

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -k x_1 + 2 k (x_2 - x_1) \\ m \ddot{x}_2 &= -2 k (x_2 - x_1) - k x_2 \end{aligned}$$

(b) Die Anfangswerte können **nicht** ignoriert werden.

$$\begin{aligned} m (s^2 X_1 - s x_1(0) - \dot{x}_1(0)) &= -k X_1 + 2 k (X_2 - X_1) \\ m (s^2 X_2 - s x_2(0) - \dot{x}_2(0)) &= -2 k (X_2 - X_1) - k X_2 \end{aligned}$$

Nun setzen wir $m = 1$ ein.

$$\begin{aligned} (s^2 + 3 k) X_1 - 2 k X_2 &= s x_1(0) + \dot{x}_1(0) \\ -2 k X_1 + (s^2 + 3 k) X_2 &= s x_2(0) + \dot{x}_2(0) \end{aligned}$$

- (c) Die erste Gleichung mit $(s^2 + 3k)$ multiplizieren und das $(2k)$ -fache der zweiten addieren. Dadurch wird X_2 eliminiert.

$$X_1(s) = \frac{\text{Zähler}}{(s^2 + 3k)^2 - 4k^2}$$

- (d) Zu bestimmen sind die Nullstellen des Nenners, d.h.

$$(s^2 + 3k)^2 - 4k^2 = s^4 + 6ks^2 + 5k^2 = 0$$

Diese biquadratische Gleichung (Gleichung für s^2) wird gelöst durch

$$s_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(-6k \pm \sqrt{36k^2 - 20k^2} \right) = -3k \pm 2k$$

Somit sind die Nullstellen des Nenners $\pm i\sqrt{5k}$ und $\pm i\sqrt{k}$. Also sind die beiden gesuchten Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = \sqrt{k}$ und $\omega_2 = \sqrt{5k}$.

Lösung zu Aufgabe 3–19 :

- (a) Das Gesetz von Newton führt auf

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) + f(t) \end{aligned}$$

- (b) Wir wählen alle Anfangswerte 0, um die Formeln zu vereinfachen.

$$\begin{aligned} m_1 s^2 X_1 &= -k_1 X_1 + k_2 (X_2 - X_1) - s X_1 \\ m_2 s^2 X_2 &= -k_2 (X_2 - X_1) + F(s) \end{aligned}$$

oder auch (mit den gegebenen Zahlen)

$$\begin{aligned} s^2 X_1 &= -2 X_1 + 4 (X_2 - X_1) - s X_1 \\ s^2 X_2 &= -4 (X_2 - X_1) + F(s) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (s^2 + s + 6) X_1 - 4 X_2 &= 0 \\ -4 X_1 + (s^2 + 4) X_2 &= \frac{A s}{\omega^2 + s^2} \end{aligned}$$

- (c) Dieses System muss nach X_1 aufgelöst werden, wobei X_2 eliminiert werden kann. Das führt zu

$$(s^2 + s + 6) (s^2 + 4) X_1 - 16 X_1 = 4 \frac{A s}{\omega^2 + s^2}$$

oder auch

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4}{(s^2 + s + 6) (s^2 + 4) - 16} \frac{A s}{\omega^2 + s^2} \\ &= \frac{4}{s^4 + s^3 + 10 s^2 + 4 s + 8} F(s) \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$T(s) = \frac{4}{s^4 + s^3 + 10 s^2 + 4 s + 8}$$

- (d) Damit das System stabil ist, müssen alle Nullstellen des Nenners der Transferfunktion negativen Realteil haben. Der grösste Wert ergibt den Exponenten der Konvergenz gegen Null. Die Rechnungen können mit einem Rechenwerkzeug (hier *Octave*/*MATLAB*) ausgeführt werden.

```

roots([1 1 10 4 8])
-->
-0.30537 + 2.96074i
-0.30537 - 2.96074i
-0.19463 + 0.93012i
-0.19463 - 0.93012i

```

Somit konvergiert die Lösung wie $e^{-0.19t}$ gegen Null.

Lösung zu Aufgabe 3–20 : Notation: Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und $y(0) = b$
Lapacetransformation des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} sX - a &= \alpha X - Y \\ sY - b &= X + \alpha Y \end{aligned}$$

Als lineares Gleichungssystem für X und Y schreiben

$$\begin{aligned} (s - \alpha)X + Y &= a \\ -X + (s - \alpha)Y &= b \end{aligned}$$

X und Y isolieren durch geeignete Zeilenaddition oder Subtraktion

$$\begin{aligned} ((s - \alpha)^2 + 1)X &= a(s - \alpha) - b \\ ((s - \alpha)^2 + 1)Y &= b(s - \alpha) + a \end{aligned}$$

Folglich enthalten die Nenner der Lapacetransformationen den Ausdruck $(s - \alpha)^2 + 1$. Damit die Lösungen gegen Null konvergieren müssen die Realteile der Nullstellen dieses Nenners strikt negativ sein.

$$s_{1,2} = (\alpha \pm i)$$

Somit konvergieren die Lösungen genau dann gegen Null, wenn $\alpha < 0$.

Lösung zu Aufgabe 3–21 :

(a) Sei $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$, dann gilt

$$K G(s) (U(s) - Y(s)) = Y(s)$$

und somit

$$Y(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} U(s)$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$\frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

(b) Damit das System stabil ist, darf das Polynom

$$f(s) = s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

keine Nullstellen mit positivem Realteil haben. Damit in der Tabelle von Routh–Hurwitz

s^3	1	2	0
s^2	3	K	0
s	$\frac{6-K}{3}$	0	
1	K	0	

das Vorzeichen in der ersten Spalte nicht ändert, muss $0 < K < 6$ gelten. Für diesen Bereich von K ist das System stabil.

Lösung zu Aufgabe 3–22 :

(a) Sei $G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+2)}$, dann gilt

$$K G(s) (U(s) - Y(s)) = Y(s)$$

und somit

$$Y(s) = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} U(s)$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$\frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{K (s-1)}{s(s+1)(s+2) + (s-1)K}$$

(b) Damit das System stabil ist, darf das Polynom

$$f(s) = s(s+1)(s+2) + (s-1)K = s^3 + 3s^2 + (2+K)s - K$$

keine Nullstellen mit positivem Realteil haben. Damit in der Tabelle von Routh–Hurwitz

s^3	1	$2+K$	0
s^2	3	$-K$	0
s	$\frac{6+4K}{3}$	0	
1	$-K$	0	

das Vorzeichen in der ersten Spalte nicht ändert, muss $6+4K > 0$ und $-K > 0$ gelten. Das führt auf $-\frac{3}{2} < K < 0$. Für diesen Bereich von K ist das System stabil.

Lösung zu Aufgabe 3–23 :

(a) Quelle [Sara97, p.205]

Das Schema von Routh ist rechts gezeigt. Damit das System stabil ist, darf dieses Diagramm in der ersten Spalte nur positive Zahlen enthalten. Wegen

$$\frac{3(2\frac{3K-2}{3}-3)}{3K-2} = \frac{6K-13}{3K-2}$$

ist dies richtig, falls $3K > 2$ und $6K > 13$. Somit ist die relevante Bedingung $K > \frac{13}{6}$.

s^4	1	K	1
s^3	3	2	
s^2	$\frac{3K-2}{3}$	1	
s	$\frac{3(2\frac{3K-2}{3}-3)}{3K-2}$		
1	1		

(b) In diesem Diagramm gilt

$$V = U + \frac{1}{s^2+1} Y, \quad Y = T V$$

eliminiert man in diesen beiden Gleichungen V , so ergibt sich

$$\begin{aligned} Y &= T V = T \left(U + \frac{1}{s^2+1} Y \right) = T U + T \frac{1}{s^2+1} Y \\ Y &= \frac{T}{1 - T \frac{1}{s^2+1}} U = \frac{\frac{3-37s^2}{s^4+3s^3+2s^2+2s+1}}{1 - \frac{3-37s^2}{s^4+3s^3+2s^2+2s+1} \frac{1}{s^2+1}} U \\ &= \frac{(s^2+1)(3-37s^2)}{(s^2+1)(s^4+3s^3+2s^2+2s+1) - (3-37s^2)} U \end{aligned}$$

Somit ist der Nenner gegeben durch

$$(s^2+1)(s^4+3s^3+2s^2+2s+1) - (3-37s^2) = -2 + 2s + 40s^2 + 5s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$$

Da $K = 2 < \frac{13}{6}$ ist müsste dieses System instabil sein. Das wird bestätigt durch drei Nullstellen des Nenners mit positivem Realteil.

Lösung zu Aufgabe 3–24 :

- (a) Die Nullstellen des Polynoms $s^3 + s^2 + 2s + 1$ sind zu bestimmen, mittels Taschenrechner oder anderer Hilfsmittel. Man erhält $s_1 = -0.56984$ und $s_{2,3} = -0.21508 \pm i 1.30714$. Somit sind alle Realteile negativ und das System stabil. Die Nullstellen mit grösstem Realteil sind $s_{2,3}$ und somit dominiert der Lösungsanteil $e^{-0.22t} \cos(1.31t + \varphi)$. Der gesuchte Exponent ist -0.22 .
- (b) Die Nullstellen des Polynoms $s^3 + s^2 + 2s + 5$ sind zu bestimmen. Man erhält $s_1 = -1.64$ und $s_{2,3} = 0.31990 \pm i 1.71663$. Somit sind die Realteile von $s_{2,3}$ positiv und die Lösungen werden mit dem Exponenten $\alpha = +0.32$ divergieren. Der dominierende Lösungsanteil ist $e^{+0.32t} \cos(1.72t + \varphi)$.
- (c)

Das Schema von Routh ist rechts gezeigt. Damit das System stabil ist, darf dieses Diagramm in der ersten Spalte nur positive Zahlen enthalten. Somit muss $2 - K > 0$ und $K > 0$ gelten, d.h.

$$0 < K < 2$$

s^3	1	2	0
s^2	1	K	0
s^1	$2 - K$	0	
1	K		

- (d) Der kritische Wert ist $K_m = 2$ und somit sind die Nullstellen des Polynoms $s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s^2 + 2)(s + 1)$ relevant. Sie sind gegeben durch $s_1 = -1$ und $s_{2,3} = \pm i \sqrt{2}$. Somit ist der dominierende Lösungsanteil $\cos(\sqrt{2}t + \varphi)$ und die gesuchte Frequenz ist $\nu = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \approx 0.225$.

Lösung zu Aufgabe 3–25 : Die Anfangswerte können 0 gewählt werden, dadurch werden die Rechnungen vereinfacht.

$$\begin{aligned} (s-1)X - 5Y &= F \\ X + (s+k)Y &= 0 \end{aligned}$$

- (a) In diesem System kann X eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} ((s+k)(s-1) + 5)Y &= -F \\ Y &= \frac{-1}{s^2 + (k-1)s - k + 5} F \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{-1}{s^2 + (k-1)s - k + 5}$$

- (b) Damit das System stabil ist müssen alle Nullstellen des Nenners negativen Realteil haben. Das ist erfüllt falls $(k-1) > 0$ und $(-k+5) > 0$. Somit ist die Bedingung

$$1 < k < 5$$

notwendig und hinreichend.

Lösung zu Aufgabe 3–26 : Damit eine Transferfunktion bestimmt ist, müssen alle Lösungen der homogenen Gleichung gegen Null konvergieren. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass alle Koeffizienten das selbe Vorzeichen haben. Somit ist die rechte Gleichung zu untersuchen. Als charakteristische Gleichung erhalten wir

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (-5 \pm \sqrt{25 - 16}) = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

- (a) Eine partikuläre Lösung ist von der Form $y_p(t) = c e^{2t}$. Durch einsetzen ergibt sich die Bedingung

$$-c 4 e^{2t} - c 10 e^{2t} - c 4 e^{2t} = e^{2t} \quad \implies \quad c = -\frac{1}{18}$$

und wir haben die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} - \frac{1}{18} e^{2t}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y &= -f(t) \\ s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 4Y(s) &= -F(s) \\ Y(s) &= \frac{-1}{s^2 + 5s + 4} F(s) = T(s) \cdot F(s) \\ T(s) &= \frac{-1}{s^2 + 5s + 4} \end{aligned}$$

- (c) Für den Bode-Plot sind zwei Bereiche von ω anzusehen ($s = i\omega$). Der Graph von $f(\omega) = 20 \cdot \log |G(i\omega)|$ ist zu skizzieren mit einer logarithmischen Skala für ω .

- $\omega \ll 1$ und somit $T(i\omega) \approx \frac{-1}{4}$
horizontale Gerade auf Höhe $20 \log \frac{1}{4} \approx -12.04$
- $\omega \gg 1$ und somit $T(i\omega) \approx \frac{\pm 1}{\omega^2}$
Gerade gegeben durch $20 \log 1 - 40 \log \omega = -40 \log \omega$, d.h. Steigung -40 und durch den Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 3–27 :

- (a) In der Figur ist nur die Hälfte des Plots sichtbar. Durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht der vollständige Plot. Setzt man $K \neq 1$ so ist die Transferfunktion $G(s)$ des Systems mit K zu multiplizieren. Dadurch wird der Nyquistplot um den Faktor K gestreckt. Da bei $K = 1$ der Nyquist-Plot die reelle Achse knapp rechts von -0.2 schneidet, kann der Plot um den Faktor $K \leq 5$ gestreckt werden, ohne dass -1 umrundet wird.

- (b) Für grosse Werte von $s = i\omega$ gilt

$$|G(i\omega)| \approx \frac{c}{\omega^3}$$

In einem doppelt logarithmischen Plot ergibt sich eine Gerade mit Steigung -3 . Wegen der Dezibelskala finden Sie in einem Bodeplot somit approximativ eine Gerade mit Steigung -60 .

Die Figur zur Aufgabe wurde mit dem folgenden Octave-Code erzeugt.

Octave

```
t = linspace(-5,5,5000); z = i*exp(t);
f = 4*(1.2*z+1)./( (z+0.5).*(z+1).*(z+1).^2+10));
plot(real(f),imag(f),'b',[-0.4 0.8],[0 0],'k',[0 0],[-0.4 0.1],'k')
```

Lösung zu Aufgabe 3–28 :

(a)

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) + 40 \dot{x}(t) + 1300 x(t) &= 300 \frac{d}{dt} f(t) \\
 s^2 X(s) + 40 s X(s) + 1300 X(s) &= 300 s F(s) \\
 X(s) &= \frac{300 s}{s^2 + 40 s + 1300} F(s) \\
 T(s) &= \frac{300 s}{s^2 + 40 s + 1300} = \frac{300 s}{(s + 20)^2 + 30^2}
 \end{aligned}$$

(b) Es sind nur die jeweils grossen Terme in $G(i\omega)$ zu berücksichtigen

- ω gross: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den grössten Exponenten relevant.

$$\begin{aligned}
 |G(i\omega)| &= \left| \frac{300 i\omega}{(i\omega)^2 + 40 i\omega + 1300} \right| \approx \left| \frac{i 300 \omega}{-\omega^2} \right| = \frac{300}{\omega} \\
 20 \log |G(i\omega)| &\approx 20 \log(300) - 20 \log \omega \approx 50 - 20 \log(\omega)
 \end{aligned}$$

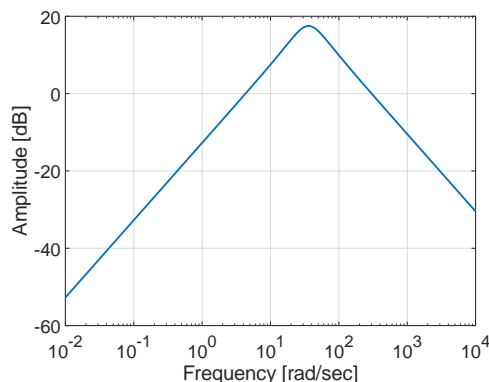
Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung -20 und Achsenabschnitt 50 bei $\log(\omega) = 0$.

- ω klein: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den kleinsten Exponenten relevant.

$$\begin{aligned}
 |G(i\omega)| &= \left| \frac{300 i\omega}{(i\omega)^2 + 40 i\omega + 1300} \right| \approx \left| \frac{i 300 \omega}{1300} \right| = \frac{3}{13} \omega \\
 20 \log |G(i\omega)| &\approx \log \frac{3}{13} + 20 \log \omega \approx -12.7 + 20 \log \omega
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung +20 und Achsenabschnitt -12.7.

Diese beiden Geraden können nun eingezeichnet werden. Wegen $0.01 < \omega < 10000$ ist der zu zeichnende Bereich $-2 < \log \omega < 4$.



(c) Für den Schnittpunkt der beiden Geraden ist die folgende Gleichung zu lösen.

$$\begin{aligned}
 \log 300 - \log \omega &= \log \frac{3}{13} + \log \omega \\
 2 \log \omega &= \log 300 - \log \frac{3}{13} = \log \frac{3900}{3} \\
 \log \omega &= \frac{1}{2} \log \frac{3900}{3} \approx 1.56 \\
 \omega_0 &\approx 36
 \end{aligned}$$

Für diesen Wert von ω_0 erhalten wir

$$\begin{aligned} G(i 36) &= \frac{i 300 \cdot 36}{-36^2 + i 40 \cdot 36 + 1300} \\ |G(i 36)| &\approx 7.5 \\ 20 \log |G(i 36)| &\approx 17.5 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3–29 :

- (a) Für ein stabiles System werden die Anfangsbedingungen ignoriert, d.h. Null angenommen. Mittels Laplacetransformation erhält man

$$\begin{aligned} s^2 X(s) + 100.001 s X(s) + \frac{1}{10} X(s) &= 1000 s U(s) \\ X(s) &= \frac{1000 s}{s^2 + 100.001 s + \frac{1}{10}} U(s) \\ T(s) &= \frac{1000 s}{s^2 + 100.001 s + \frac{1}{10}} = \frac{1000 s}{(s + 100) (s + \frac{1}{1000})} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners haben negativen Realteil und somit ist das System stabil.

- (b) In drei Bereiche von $s = i\omega$ aufteilen und jeweils die richtigen Terme vernachlässigen.

$$T(i\omega) = \frac{1000 i\omega}{(i\omega + 100) (i\omega + \frac{1}{1000})}$$

- $0 < \omega \ll \frac{1}{1000}$

$$\begin{aligned} T(i\omega) &\approx \frac{1000 i\omega}{(+100) (+\frac{1}{1000})} = 10'000 i\omega \\ 20 \log |T(i\omega)| &\approx 20 \log 10'000 + 20 \log \omega = 80 + 20 \log \omega \end{aligned}$$

Gerade mit Steigung +20 und Achsenabschnitt bei $\log(\omega) = 0$ auf der Höhe +80.

- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll 100$

$$\begin{aligned} T(i\omega) &\approx \frac{1000 i\omega}{(+100) (i\omega)} = 10 \\ 20 \log |T(i\omega)| &\approx 20 \log 10 = 20 \end{aligned}$$

Horizontale Gerade auf der Höhe +20.

- $100 \ll \omega$

$$\begin{aligned} T(i\omega) &\approx \frac{1000 i\omega}{(i\omega) (i\omega)} = 1000 \frac{-i}{\omega} \\ 20 \log |T(i\omega)| &\approx 20 \log 1000 - 20 \log \omega = 20 \cdot 3 - 20 \log \omega \end{aligned}$$

Gerade mit Steigung –20 und Achsenabschnitt bei $\log(\omega) = 0$ auf der Höhe +60.

- (c) Mittels *Octave* oder den obigen Überlegungen erhalten wir den unten stehenden Bode-Plot der Amplitude. Die drei Geradensegmente sind klar erkennbar. Die Graphik wurde erzeugt durch

Octave

```

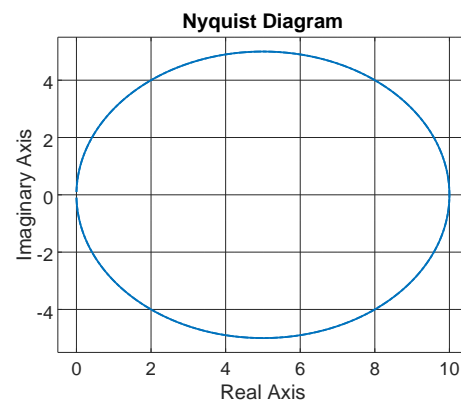
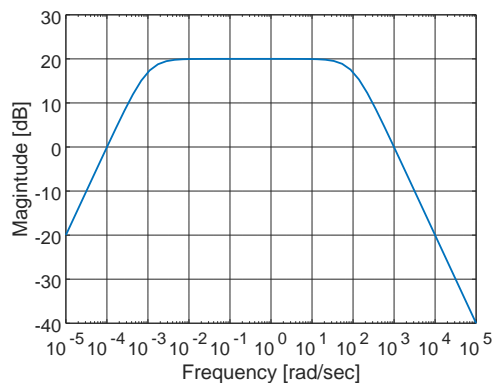
sys = tf([1000 0],[1 100.001 0.1]);
[mag,phase,w] = bode(sys,logspace(-5,5)); legend hide
% amp = squeeze(amp); phase = squeeze(phase); % patch for Matlab only
figure(1)
semilogx(w,20*log10(mag))
ylim([-40 30])
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Magintude [dB]')
% print -dpdfwrite TF_16_Mag.pdf
figure(2)
semilogx(w,phase)
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Phase [deg]')
% print -dpdfwrite TF_16_Phase.pdf

abs([sys(1/1000),sys(100)])

figure(3)
nyquist(sys); legend off
% print -dpdfwrite TF_16_Nyquist.pdf

```

(d) Für $\omega = \frac{1}{1000}$ und $\omega = 100$ gilt $|T(i\omega)| \approx 7.01 \approx 5\sqrt{2}$ und $\arg(T(i\omega)) \approx \pm 45^\circ$.



Man könnte nachrechnen, dass der Nyquist Plot auf einem (doppelt durchfahrenen) Kreis mit Radius 5 und Mittelpunkt bei $5 + 0 \cdot i$ besteht.

Lösung zu Aufgabe 3–30 :

(a) Es sind nur die jeweils grossen Terme in $G(i\omega)$ zu berücksichtigen

- ω gross: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den grössten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{3i\omega}{(i\omega)^2 + 2i\omega + 3} \right| \approx \left| \frac{i3\omega}{-\omega^2} \right| = \frac{3}{\omega}$$

$$20 \log |G(i\omega)| \approx 20 \log(3) - 20 \log \omega \approx 10 - 20 \log(\omega)$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung -20 und Achsenabschnitt 0 bei $\log(\omega) = 0$.

- ω klein: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den kleinsten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{3i\omega}{(i\omega)^2 + 2i\omega + 3} \right| \approx \left| \frac{i3\omega}{3} \right| = \omega$$

$$20 \log |G(i\omega)| \approx +20 \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung +20 und Achsenabschnitt 0.

Diese beiden Geraden können nun eingezeichnet werden. Wegen $0.01 < \omega < 100$ ist der zu zeichnende Bereich $-2 < \log \omega < 2$.

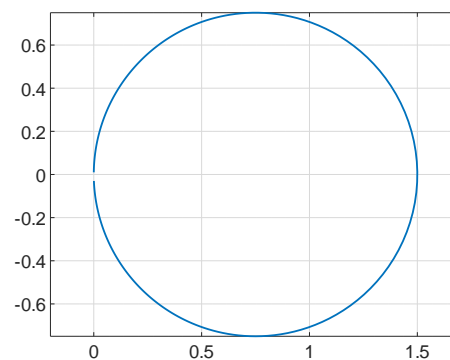
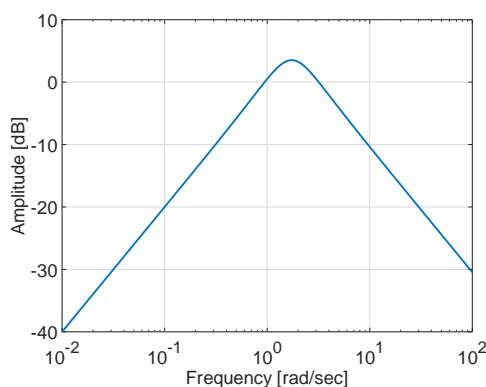
- (b) Diese beiden Geraden schneiden sich approximativ im Punkt $\log(\omega) = 1/4$ auf der Höhe 5. Der Wert von ω_0 ist gegeben durch $\omega_0 = \sqrt[4]{10} \approx 1.8$ und wegen $|G(i\omega_0)| \approx 1.5$ gilt

$$20 \log |G(i\omega_0)| \approx 20 \cdot 0.175 \approx 3.5$$

und der effektive Wert liegt etwas unter dem Schnittpunkt der Geraden bei ω_0 . Die exakte Lage kann auch durch die Bedingung $\frac{3}{\omega_0} = \omega_0$ bestimmt werden, mit dem Resultat $\omega_0 = \sqrt{3}$.

- (c) Um den Nyquist-Plot zu erzeugen, müssen die beiden Bode-Plots zu Rate gezogen werden. Die untenstehende Tabelle (mit geschätzten Werten) zeigt, dass für $0 < \omega < 100$ fast eine kreisähnliche Figur abgefahren wird, mit Start- und End-Punkt im Ursprung. Für einen vollständigen Plot ist noch die an der reellen Achse gespiegelte Kurve zu zeichnen. In diesem Beispiel unterscheiden sie sich nicht vom ersten Teil der Kurve.

Werte von ω	Argument ϕ	Betrag b
0.01	89°	$\frac{1}{100}$
0.1	86°	$\frac{1}{10}$
$1/3$	77°	$\frac{1}{3}$
1	45°	1
1.5	15°	1.45
3	-45°	1
10	-78°	$\frac{3}{10}$
100	-88°	$\frac{3}{100}$



Lösung zu Aufgabe 3–31 : Die Transferfunktion dieses System ist gegeben durch

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 25} \quad \Rightarrow \quad T(i\omega) = \frac{1}{25 - \omega^2 + i\omega}$$

- (a) Für $\omega \ll 1$ erhalten wir somit

$$T(i\omega) \approx \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad 20 \log(|T(i\omega)|) \approx -20 \log(25) \approx -28$$

und für $\omega \gg 1$ gilt

$$T(i\omega) \approx \frac{1}{-\omega^2} \quad \Rightarrow \quad 20 \log(|T(i\omega)|) \approx -40 \log(\omega)$$

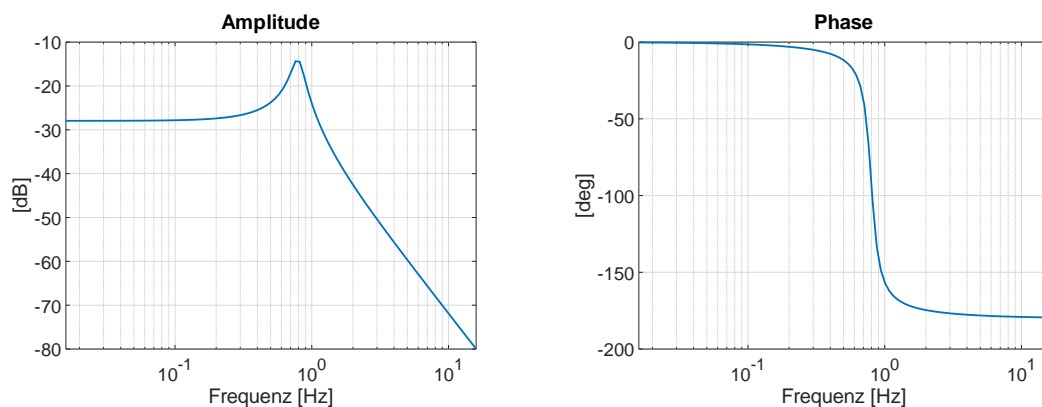
(b) Der Wert von ω_0 ist gegeben als Lösung der Gleichung

$$-28 = -40 \log(\omega_0) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 10^{0.7} \approx 5$$

und wir erhalten

$$|T(i\omega_0)| \approx |T(i5)| = \frac{1}{|-25 + i5 + 25|} = 0.2$$

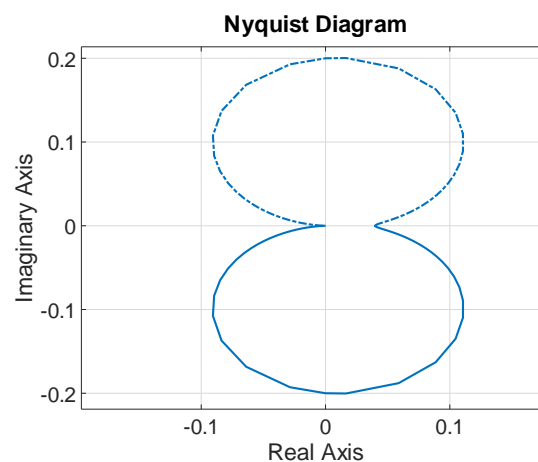
Somit muss der Bodeplot bei $\omega_0 \approx$ eine Höhe von $20 \log(0.2) \approx -14$ haben. Dies entspricht der Resonanzfrequenz dieses Feder–Masses Systems. Das Resultat kann kontrolliert werden, da das ungedämpfte System $\ddot{y} + 25y = 0$ mit $\omega = 5$ schwingt.



(c) Die maximale Amplitude ist 0.2 und die Argumente variieren von 0° zu -180° .

ω	angle	amplitude
$\omega \ll 1$	0°	$\frac{1}{25} = 0.04$
$\omega_0 = 5$	-90°	0.2
$\omega \gg 1$	-180°	0

Das führt zu einer kreisähnlichen Kurve in der unteren Halbebene. Die obere Hälfte entsteht durch Spiegelung.



Die Graphiken für die obige Aufgabe wurden mit *Octave* erzeugt.

Octave

```

mysys = tf(1,[1 1 25]);
w = logspace(-1,2,101);
[amp,phase,w] = bode(mysys,w);
% amp = squeeze(amp); phase = squeeze(phase); % patch for Matlab only
figure(1)
semilogx(w/(2*pi),20*log(amp)/log(10)); % use frequency in Hz
grid('on'); title('Amplitude');
xlabel('Frequenz [Hz]'); xlim([min(w),max(w)]/(2*pi))
figure(2)
semilogx(w/(2*pi),phase);
grid('on'); title('Phase');
xlabel('Frequenz [Hz]'); xlim([min(w),max(w)]/(2*pi))
figure(3)
nyquist(mysys);

```

Lösung zu Aufgabe 3–32 :

(a) Es sind nur die jeweils grossen Terme in $G(i\omega)$ zu berücksichtigen

- ω gross: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den grössten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{10 i\omega}{(i\omega)^3 + 10(i\omega)^2 + 4 i\omega + 10} \right| \approx \left| \frac{i 10 \omega}{-i\omega^3} \right| = \frac{10}{\omega^2}$$

$$20 \log |G(i\omega)| \approx 20 (\log 10 - 2 \log \omega) = 20 - 40 \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung -40 und Achsenabschnitt 20 .

- ω klein: in Zähler und Nenner sind nur die Terme mit den kleinsten Exponenten relevant.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{10 i\omega}{(i\omega)^3 + 10(i\omega)^2 + 4 i\omega + 10} \right| \approx \left| \frac{i 10 \omega}{10} \right| = \omega$$

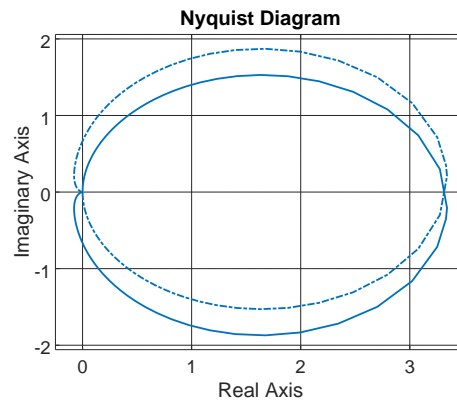
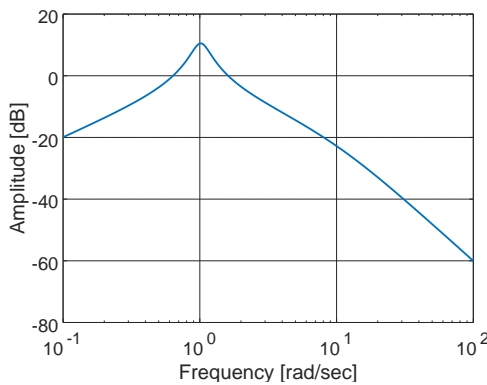
$$20 \log |G(i\omega)| \approx 20 \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Gerade mit Steigung 20 und Achsenabschnitt 0 .

Diese beiden Geraden können nun eingezeichnet werden.

- (b) Um den Nyquist-Plot zu erzeugen, müssen die beiden Bode-Plots zu Rate gezogen werden. Die untenstehende Tabelle (mit geschätzten Werten) zeigt, dass für $0 < \omega < 100$ fast eine kreisähnliche Figur abgefahren wird, mit Start- und End-Punkt im Ursprung. Für einen vollständigen Plot ist noch die an der reellen Achse gespiegelte Kurve zu zeichnen.

Werte von ω	Argument ϕ	Betrag b
$\omega = 0.01$	$\phi = 90^\circ$	$b = \frac{1}{100}$
$0.01 < \omega < 0.1$	$90^\circ > \phi > 85^\circ$	$\frac{1}{100} < b < \frac{1}{10}$
$0.1 < \omega < 1$	$85^\circ > \phi > 0^\circ$	$\frac{1}{10} < b < \sqrt{10}$
$1 < \omega < 10$	$0^\circ > \phi > -135^\circ$	$\sqrt{10} > b > \frac{1}{10}$
$10 < \omega < 100$	$-135^\circ > \phi > -175^\circ$	$\frac{1}{10} > b > \frac{1}{10^5}$



Lösung zu Aufgabe 3–33 : Bei dieser Aufgabe muss beachtet werden, dass mit Winkelgeschwindigkeiten ω und Frequenzen f gearbeitet wird. Es gilt

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned}$$

Wegen $\log \omega = \log(2\pi) + \log f$ entspricht dies einer horizontalen Verschiebung der Achsen in den Bode-Plots.

- (a) Diese Teilaufgabe kann mit Hilfe der linken ($\omega \ll 1$) oder rechten ($\omega \gg 1$) Geraden im Amplitudenplot gelöst werden.

- Für $\omega \ll 1$ gilt

$$G(i\omega) \approx \frac{A}{5} (i\omega)^n \quad \Rightarrow \quad 20 \log(|G(i\omega)|) \approx 20 \log\left(\frac{|A|}{5}\right) + 20n \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Steigung von $20n$ und ein Achsenabschnitt von $20 \log(\frac{|A|}{5})$ bei $\omega = 1$. In der Graphik findet man für die links liegende Geraden eine Steigung von $+40$ und einen Achsenabschnitt von ≈ 7 . Das führt auf $n = 2$ und $20 \log(\frac{|A|}{5}) \approx 7$ und somit $|A| \approx 5 \cdot 10^{7/20} \approx 11$. Für sehr kleine Werte von ω ist die Phasenverschiebung 180° . Wegen

$$\arg G(i\omega) \approx \arg\left(\frac{-A\omega^2}{5}\right) = \arg(-A) \approx 180^\circ$$

muss A positiv sein. Somit ist $A \approx +11$.

- Für $1 \gg \omega$ gilt

$$G(i\omega) \approx A (i\omega)^{n-4} \quad \Rightarrow \quad 20 \log(|G(i\omega)|) \approx 20 \log |A| + 20(n-4) \log \omega$$

Somit ergibt sich eine Steigung von $20(n-4)$ und ein Achsenabschnitt von $20 \log |A|$ bei $\log \omega = 0$, d.h. $\omega = 1$. Aus der Graphik findet man für die **rechts** liegende Geraden eine Steigung von -20 und einen Achsenabschnitt von ≈ 20 . Das führt auf $n = 2$ und $20 \log |A| = 20$ und somit $|A| \approx 10$. Für sehr grosse Werte von ω ist die Phasenverschiebung 180° . Wegen

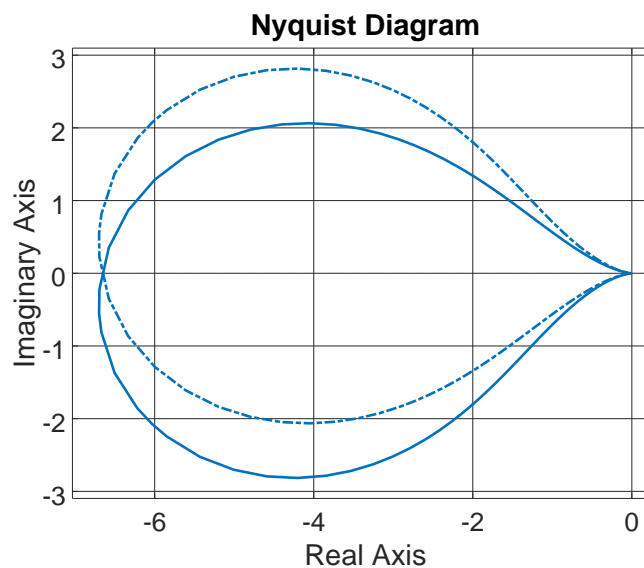
$$\arg G(i\omega) \approx \arg\left(\frac{A}{-\omega^2}\right) = \arg(-A) \approx 180^\circ$$

muss A positiv sein. Somit ist $A \approx +10$.

Der exakte Wert ist $A = 10$.

- (b) Die Information in den Bodeplots muss korrekt ausgewertet werden. Es gilt $10^{16.6/20} \approx 6.8$. Die untenstehende Tabelle hilft eine Hälfte des Nyquist-Plots zu skizzieren.

Werte von ω	Argument ϕ	Betrag b
$\omega = 0.1$	$\phi \approx 175^\circ$	$b \approx 0.02$
$0.1 < \omega < 1$	$175^\circ > \phi > 147^\circ$	$0.02 < b < \sqrt{10} \approx 3.2$
$1 < \omega < 1.5$	$147^\circ < \phi < 222^\circ$	$3.2 < b < 6.8$
$1.5 < \omega < 100$	$222^\circ > \phi > 180^\circ$	$6.8 > b > 0.001$



Die Zahl -1 wird umrundet. Somit ist das System **instabil**.

- (c) Wird die Zahl A mit einem Faktor k multipliziert, so wird der Nyquistplot um den selben Faktor gestreckt. Damit -1 nicht umrundet wird muss $k \cdot 6.7 < 1$ (Schnittpunkt auf Achse) gelten. Somit ist die Bedingung $0 < k < \frac{1}{6.7} \approx 0.15$.

Die Bode-Plots dieser Transferfunktion $G(s)$ können **nicht** gemessen werden, da es Nullstellen des Zählers gibt mit positivem Realteil. Die Graphiken wurden erzeugt mit dem untenstehenden Octave-Code.

Octave

```
% pkg load control % Octave only
num = [10 0 0];
denum = [1 2 3 4 5];
sys = tf(num,denum);
figure(1);
bode(sys); legend off
figure(2)
nyquist(sys); legend off
```

Lösung zu Aufgabe 3–34 : Die erste Kurve umrundet den Ursprung einmal, die zweite zweimal. Eine Nullstelle des Nenners liegt zwischen den beiden Kreisen. Somit müssen **zwei** Polstellen dazukommen. Über die weitere Lage der Polstellen kann man nichts sagen. In der Graphik sollten zwei Polstellen zwischen den beiden Kreisen liegen.

Octave


```

z = exp(i*linspace(0,2*pi,500)); r1 = 1.5; r2 = 2.5;
f1 = (2-r1*z)./(r1*z-1).*(r1*z-1).^2 + 4);
figure(1)
plot(f1); hold('on'); plot(0,0,'*r'); hold off
f2 = (2-r2*z)./(r2*z-1).*(r2*z-1).^2 + 4);
figure(2)
plot(f2); hold('on'); plot(0,0,'*r'); hold off
    
```

Lösung zu Aufgabe 3–35 :

- (a) Sei u_- die Spannung am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers. Für einen idealen Verstärker gilt $u_{out} = -K u_-$ für eine sehr grosse Konstante K ($K \approx 10^6$) und es fliesst kein Strom in den Operationsverstärker hinein. Aufgrund der Stromregel von Kirchhoff gilt

$$\begin{aligned}
 C(\dot{u}_{in} - \dot{u}_-) &= \frac{1}{R}(u_- - u_{out}) \\
 C(\dot{u}_{in} + \frac{1}{K}\dot{u}_{out}) &= \frac{1}{R}\left(-\frac{1}{K}u_{out} - u_{out}\right)
 \end{aligned}$$

- (b) Setze $K = \infty$ und man erhält

$$\begin{aligned}
 C\dot{u}_{in} &= -\frac{1}{R}u_{out} \\
 -RC\dot{u}_{in} &= u_{out} \\
 -sRCU_{in} &= U_{out}
 \end{aligned}$$

- (c) Die Transferfunktion ist $G(s) = -sRC$.

- (d) Es gilt

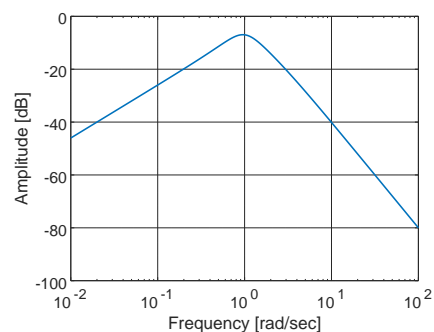
$$\begin{aligned}
 G(i\omega) &= -i\omega RC \\
 |G(i\omega)| &= \omega RC \\
 20 \log |G(i\omega)| &= 20 \log \omega + 20 \log(RC) \\
 \arg G(i\omega) &= -\frac{\pi}{2} = -90^\circ
 \end{aligned}$$

- Der Bode-Plot des Amplitudenfaktors ist eine Gerade mit Steigung 20 und Achsenabschnitt $20 \log(RC)$.
- Der Bode-Plot der Phasenverschiebung ist eine horizontale Gerade auf der Höhe $-\frac{\pi}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 3–36 :

- (a) Es entstehen zwei Geraden für sehr grosse und sehr kleine Werte von $s = i\omega$.

- Falls $\omega \ll 1$ so ist $T(i\omega) \approx i\omega/2$ und somit $\log |T(i\omega)| \approx -\log 2 + \log \omega$. Im Bodeplot führt das zu einer Geraden mit Steigung 20 und Achsenabschnitt bei $-20 \log 2 \approx -6$.
- Falls $\omega \gg 1$ so ist $T(i\omega) \approx -1/\omega^2$ und somit $\log |T(i\omega)| \approx -2 \log \omega$. Im Bodeplot führt das zu einer Geraden mit Steigung -40 und Achsenabschnitt bei 0.



Der Bodeplot verbindet die beiden Geraden geeignet. Das Resultat ist rechts gegeben.

- (b) Durch Multiplikation mit $K \in \mathbb{R}$ wird der Nyquistplot gestreckt um den Faktor K . Es ist also zu untersuchen, für welche Werte von K der gestreckte Plot die Zahl -1 nicht umrundet. Dies ist für $K > 0$ der Fall. Da der gezeichnete Plot ($K = 1$) die reelle Achse bei 0.435 schneidet, führen Werte von $K < \frac{-1}{0.435} = -2.3$ zu instabilem Verhalten. Somit ist das System stabil für $K > -2.3$. Eine exakte Rechnung zeigt, dass der kritische Wert bei $-\frac{7}{3}$ ist.

Im Prinzip kann die Antwort auch mittels des Verfahrens von Routh gegeben werden. Die Transferfunktion der rückgekoppelten Systems ist gegeben durch

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K \cdot T(s)}{1 + K \cdot T(s)} = \frac{K \frac{s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}}{1 + K \frac{s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}} \\ &= \frac{K s}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2 + K s} = \frac{K s}{s^3 + 3s^2 + (3 + K)s + 2} \end{aligned}$$

und somit liefert das Schema von Routh

s^3	1	3+K
s^2	3	2
s	$\frac{3K+7}{3}$	0
1	2	0

Das System ist stabil, falls $3K + 7 > 0$, d.h. für $-\frac{7}{3} < K$. Dieser Lösungsweg ist deutlich aufwendiger als die graphische Lösung.

Die Graphiken wurden mit *Octave* erzeugt.

Octave

```
% pkg load control % Octave only
sys = tf([1 0],[1 3 3 2]);
figure(1)
nyquist(sys); legend off

[amp,phase,w] = bode(sys);
% amp = squeeze(amp); phase = squeeze(phase); % patch for Matlab only
figure(2)
semilogx(w, 20*log10(amp))
xlabel('Frequency [rad/sec]'); ylabel('Amplitude [dB]')
```

Lösung zu Aufgabe 3-37 : Für ein stabiles System werden die Anfangsbedingungen ignoriert, d.h. Null angenommen. Mittels Laplacetransformation erhält man

$$\begin{aligned} sX(s) + \frac{1}{10}X(s) &= sU(s) \\ 1000sY(s) + Y(s) &= X(s) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s}{s + 1/10} U(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{1000s + 1} X(s) = \frac{1}{1000s + 1} \frac{s}{s + 1/10} U(s) \end{aligned}$$

(a)

$$T(s) = \frac{1}{1000s + 1} \frac{s}{s + 1/10} = \frac{10s}{(1000s + 1)(10s + 1)}$$

Die Nullstellen des Nenners haben negativen Realteil und somit ist das System stabil.

(b) In drei Bereiche von $s = i\omega$ aufteilen und jeweils die richtigen Terme vernachlässigen.

- $\omega \ll \frac{1}{1000}$

$$T(i\omega) = \frac{1}{i1000\omega + 1} \frac{i\omega}{i\omega + 1/10} \approx \frac{1}{1} \frac{i\omega}{1/10} = i10\omega$$

$$\arg(T(i\omega)) \approx \frac{\pi}{2}$$

$$20 \log |T(i\omega)| \approx 20 (\log(10) + \log(\omega)) = 20 + 20 \log(\omega)$$

Gerade mit Steigung +20 und Achsenabschnitt bei $\log(\omega) = 0$ auf der Höhe 20.

- $\frac{1}{1000} \ll \omega \ll \frac{1}{10}$

$$T(i\omega) = \frac{1}{i1000\omega + 1} \frac{i\omega}{i\omega + 1/10} \approx \frac{1}{i1000\omega} \frac{i\omega}{1/10} = \frac{1}{100}$$

$$\arg(T(i\omega)) \approx 0$$

$$20 \log |T(i\omega)| \approx 20 (\log(\frac{1}{100})) = -40$$

Horizontale Gerade auf der Höhe -40.

- $\frac{1}{10} \ll \omega$

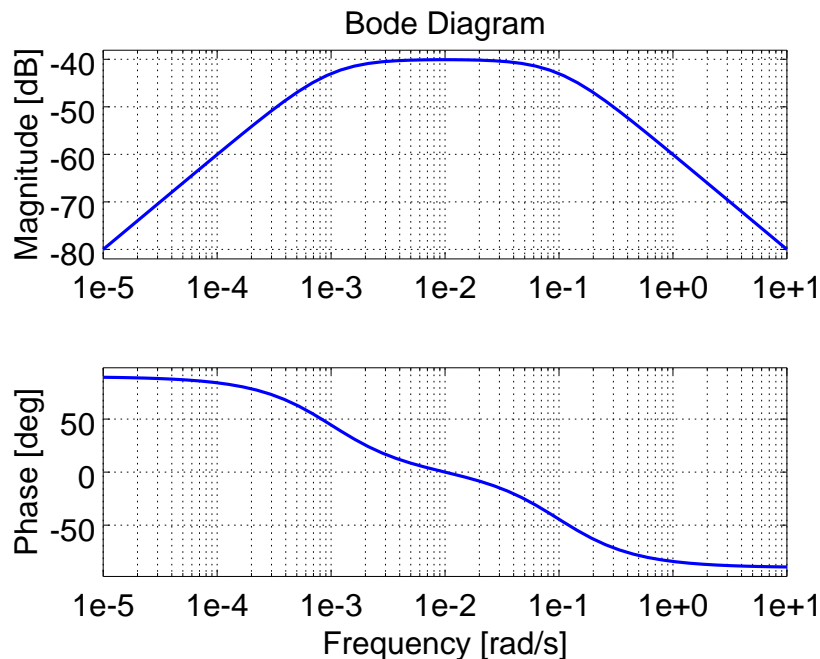
$$T(i\omega) = \frac{1}{i1000\omega + 1} \frac{i\omega}{i\omega + 1/10} \approx \frac{1}{i1000\omega} \frac{i\omega}{i\omega} = \frac{-i}{1000} \frac{1}{\omega}$$

$$\arg(T(i\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}$$

$$20 \log |T(i\omega)| \approx 20 (\log(\frac{1}{1000}) + \log(\frac{1}{\omega})) = -60 - 20 \log(\omega)$$

Gerade mit Steigung -20 und Achsenabschnitt bei $\log(\omega) = 0$ auf der Höhe -60.

(c) Mittels Octave oder den obigen Überlegungen erhalten wir die unten stehenden Bode-Plots von Amplitude und Phase. Die drei Geradensegmente sind klar erkennbar.



Die Graphik wurde erzeugt durch

Octave

```
sys = tf([1 0],[1000 101 0.1]);
bode(sys,logspace(-5,1)); legend hide
```

Lösung zu Aufgabe 3–38 :**Octave**

```
A = -3e-6;
B = 1e-4;
sys = tf([A 0],[B 20 1e6 1e8]);
```

- (a) Untersuche $0 < \omega \ll 10^2$ und setze $s = i\omega$. Die Gerade links im Bode Plot geht durch den Punkt $\omega = 1 = 10^0$ und Gain = -30 dB und hat eine Steigung von +20. Somit lesen wir ab

$$\begin{aligned} 20 \log |G(i\omega)| &\approx -30 + 20 \log(\omega) \\ \arg(G(i\omega)) &\approx -90^\circ = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Aus der Formel für $G(i\omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{i A \omega}{B i^n \omega^n - 20 \omega^2 + i 10^6 \omega + 10^8} \approx \frac{i A \omega}{10^8} \\ 20 \log |G(i\omega)| &\approx 20 (\log |A| - 8 + \log(\omega)) \approx -30 + 20 \log(\omega) \\ \arg(G(i\omega)) &\approx \arg(i) + \arg(A) + \arg(\omega) = \frac{\pi}{2} + \arg(A) + 0 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\log |A| - 8 \approx \frac{-30}{20} \quad \text{und} \quad \arg(A) \approx -\pi \quad \implies \quad A \approx -10^{8-1.5} \approx -3 \cdot 10^6$$

- (b) Untersuche $10^5 \ll \omega$ und setze $s = i\omega$. Die Gerade rechts im Bode Plot geht durch den Punkt $\omega = 10^6$ und Gain = -30 dB und hat eine Steigung von -40. Somit lesen wir ab

$$\begin{aligned} 20 \log |G(i\omega)| &\approx -30 - 40 (\log(\omega) - 6) \\ \arg(G(i\omega)) &\approx 0^\circ = 0 \end{aligned}$$

Aus der Formel für $G(i\omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{i A \omega}{B i^n \omega^n - 20 \omega^2 + i 10^6 \omega + 10^8} \approx \frac{i A \omega}{i^n B \omega^n} = \frac{i^{1-n} A}{B} \omega^{1-n} \\ 20 \log |G(i\omega)| &\approx 20 (\log A - \log B + (1-n) \log(\omega)) \approx -30 - 40 (\log(\omega) - 6) \\ \arg(G(i\omega)) &\approx (1-n) \arg(i) + \arg(A) - \arg(B) + (n-1) \arg(\omega) \\ &= (1-n) \frac{\pi}{2} - \pi - \arg(B) \end{aligned}$$

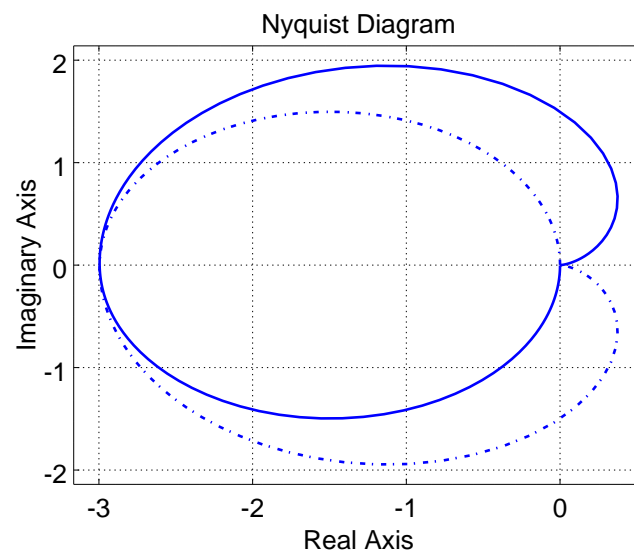
Aus der Steigung erhalten wir $n = 3$ und wegen $\arg(G(i\omega)) = 0$ gilt

$$0 = (1-3) \frac{\pi}{2} - \pi - \arg(B) \quad \implies \quad \arg(B) = 2\pi$$

oder auch $\arg(B) = 0$. Mit $\omega = 10^6$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \log |A| - \log |B| - 12 &\approx \frac{-30}{20} \quad \implies \quad \log |B| \approx \log |A| + \frac{30}{20} - 12 \approx 8 - 12 \\ &\implies \quad B \approx +10^{-4} \end{aligned}$$

(c)



3.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- für einige Typen von Anwendungen die linearen Differentialgleichungen aufstellen können.
- das qualitative Verhalten von Lösungen bestimmen können, ohne die explizite Formel der Lösung bestimmen zu müssen.
- Transferfunktionen von einfachen Systemen bestimmen können.
- die Lage von Nullstellen von Polynomen diskutieren können (Routh, Nyquist).
- Für einfache Schaltkreise Differentialgleichungen und Transferfunktionen aufstellen können.

Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen, zweiter Teil

4.1 Repetition

Aus dem früheren Kapitel über Differentialgleichungen sollten Ihnen die folgenden Begriffe noch bekannt sein: Differentialgleichung (DGL), Lösung, Ordnung, gewöhnliche DGL, partielle DGL, Anfangswertproblem, Existenz- und Eindeigkeitssatz, Vektorfeld.

4.1.1 Elementar lösbare Probleme

Wir haben bereits Lösungsmethoden für einige einfache Typen von Gleichungen kennengelernt. Hier eine extrem kurze Zusammenfassung. Für weitere Erklärungen und Beispiele sollten Sie die Notizen des letzten Jahres konsultieren.

Separierbare Gleichungen

Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x) g(t)$$

können durch die formale Umformung

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t) dt$$

und anschließende Integration

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt$$

auf das Bestimmen von zwei Integralen zurückgeführt werden. Die Integrationskonstante kann mittels der Anfangsbedingung bestimmt werden.

Bei diesem Lösungsverfahren können Probleme auftreten, indem die Integrale nicht leicht zu bestimmen sind oder indem die entstehende implizite Gleichung für x und t nicht explizit nach x auflösbar ist. *Mathematica* ist gut einsetzbar um diese Probleme, falls möglich, zu überwinden.

Lineare homogene Gleichungen

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = a(t) x(t)$$

wobei $a(t)$ eine stetige Funktion von t ist. Diese Gleichung ist separabel. Die Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = c \exp \left(\int^t a(\tau) d\tau \right) .$$

Die Konstante c ist mittels der Anfangsbedingung zu bestimmen. Im einfachsten Fall einer Konstanten $a(t) = a$ ergibt sich

$$x(t) = c e^{at}$$

Lineare inhomogene Gleichungen

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) - a(t) x(t) = f(t)$$

wobei $a(t)$ und $f(t)$ stetige Funktionen von t sind. Diese Gleichungen können mittels eines *integrierenden Faktors* gelöst werden.

Für die Lösung des zugehörigen homogenen Problems $\dot{x}(t) = a(t) x(t)$ wird auch mit die Notation $x_h(t)$ verwendet. Diese **Lösung des homogenen Problems** ist gegeben durch

$$x_h(t) = \exp \left(\int^t a(\tau) d\tau \right) .$$

Eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (ohne auf Anfangsbedingungen Rücksicht zu nehmen) wird auch **partikuläre Lösung** genannt und oft mit $x_p(t)$ bezeichnet.

4–1 Theorem : Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) - a(t) x(t) = f(t)$$

ist gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

wobei die in x_h versteckte Konstante c mittels der Anfangsbedingung zu bestimmen wäre.

Dieses Theorem führt zum folgenden Vorgehen um lineare, inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

1. Sind die Funktionen $a(t)$ und $f(t)$ stetig?
2. Finde die allgemeine Lösung $x_h(t)$ des homogenen Problems.
3. Finde irgendeine partikuläre Lösung $x_p(t)$.
4. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

5. Bestimme die in x_h versteckte Konstante durch eine Anfangsbedingung, falls vorhanden.

Ist $a(t) = a$ so kann auch die **Variation der Konstanten** verwendet werden. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= a y(t) + f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

wird durch das Parameterintegral

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

gelöst. Diese Integraldarstellung kann durch Laplace-Transformation erzeugt werden und durch direktes Ableiten des Parameterintegrals kann sie auch verifiziert werden.

Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$a \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + c x(t) = f(t)$$

wobei $a \neq 0$, b und c Konstanten sind und $f(t)$ eine stetige Funktion von t ist.

Um die Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung zu finden, muss man die **charakteristische Gleichung**

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

lösen. Je nach Lage der Lösungen $\lambda_{1,2}$ ergeben sich verschiedene Lösungen. Eine partikuläre Lösung kann oft mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten gefunden werden. Solche Probleme lassen sich auch mittels Laplace-Transformation lösen.

Elektrische LRC-Schwingkreise und gedämpfte Federsysteme sind Beispiele, die zu Gleichungen vom obigen Typ führen.

4.2 Approximation durch Potenzreihen

Um die Rechnungen einfacher zu gestalten, untersuchen wir in diesem Abschnitt nur autonome Differentialgleichungen, d.h. die Funktion $f(x)$ hängt nicht explizit von t ab.

Oft ist es nicht möglich eine Lösung in geschlossener Form zu finden. Ein möglicher Ausweg ist mit Potenzreihen zu arbeiten und „nur“ eine Taylorapproximation zu suchen. Dieses Resultat basiert auf dem folgenden Theorem.

4–2 Theorem : Ist die Funktion $f(t, x)$ in der Nähe bei $x = x_0$ in eine Taylorreihe entwickelbar (d.h. die Funktion ist analytisch), so ist auch die Lösung des (AWP)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

analytisch. Somit sucht man eine Lösung in der Form

$$x(t_0 + t) = x_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

Diese Reihe für $x(t_0 + t)$ konvergiert sicher für kleine Werte von $|t|$.

Praktisch wird man nicht alle Koeffizienten a_n suchen, sondern nur die ersten paar. Das liefert für kleine Werte von t meistens gute Approximationen.

Es ist wichtig zu wissen, dass diese Methode ungeeignet ist Lösungen von Differentialgleichungen über grosse Zeitintervalle zu berechnen. Sie wird aber verwendet, um für die lokalen (kleine Zeitabschnitte) numerischen Lösungsverfahren die Konvergenzordnung zu bestimmen.

4–3 Beispiel : Wir betrachten ein sehr einfaches Beispiel um das Rechenverfahren zu erläutern.

$$\dot{x} = 3x \quad x(0) = 2$$

1. Reihenansatz für die Lösung und deren Ableitung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \\ \dot{x}(t) &= 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots \end{aligned}$$

2. Einsetzen in Funktion $f(x(t))$

$$f(x(t)) = 3x(t) = 6 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 3a_4 t^4 + \dots$$

und anschliessend Gleichung aufstellen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) \\ a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots &= 6 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 3a_4 t^4 + \dots \end{aligned}$$

3. Terme mit gleichem Exponenten in t gleichsetzen und das Gleichungssystem für die Koeffizienten a_n erstellen

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ 2a_2 &= 3a_1 \\ 3a_3 &= 3a_2 \\ 4a_4 &= 3a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

4. Dieses System lässt sich von oben nach unten leicht lösen und man erhält

$$a_1 = 6 \quad a_2 = \frac{3a_1}{2} = 9 \quad a_3 = \frac{3a_2}{3} = 9 \quad a_4 = \frac{3a_3}{4} = \frac{27}{4} \dots$$

5. Einsetzen

$$x(t) = 2 + 6t + 9t^2 + 9t^3 + \frac{27}{4}t^4 + \dots$$

Die exakte Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$x(t) = 2 \exp(3t)$$

Somit kann das Resultat für diese sehr einfache Aufgabe kontrolliert werden. ◇

4–4 Beispiel : Wir wollen dasselbe Beispiele noch einmal vollständig mit Hilfe von *Mathematica* lösen. Zuerst wird ein Ansatz für die Funktion gemacht, dann die Ableitung und $f(x(t))$ bestimmt.

Mathematica
<pre> x[t_] := 2 + a1 t + a2 t^2 + a3 t^3 + a4 t^4 + a5 t^5; { xdot = D[x[t],t] , f = Series[3x[t],{t,0,5}] } . {a1 + 2 a2 t + 3 a3 t^2 + 4 a4 t^3 + 5 a5 t^4 , . . . 6 + 3 a1 t + 3 a2 t^2 + 3 a3 t^3 + 3 a4 t^4 + 3 a5 t^5 + O[t] }</pre>

Jetzt muss das System von Gleichungen aufgestellt werden.

Mathematica

```
coef = CoefficientList[Normal[Series[xdot - f, {t, 0, 4}]], t]
{ -6 + a1, -3 a1 + 2 a2, -3 a2 + 3 a3, -3 a3 + 4 a4, -3 a4 + 5 a5 }
```

Nun bleibt nur noch das Lösen des entsprechenden Gleichungssystems

Mathematica

```
sol = Flatten[Solve[coef == {0, 0, 0, 0, 0}, {a1, a2, a3, a4, a5}]]
{ a5 -> --, a1 -> 6, a2 -> 9, a3 -> 9, a4 -> -- }
```

und Einsetzen in den ursprünglichen Ansatz

Mathematica

```
x[t] /. sol
2 + 6 t + 9 t^2 + 9 t^3 + 27 t^4 / 4 + 81 t^5 / 20
```



4-5 Beispiel : Der *Mathematica*-Code für das vorangehende Beispiel kann noch besser zusammengefasst werden. Man erhält kompakteren Code, der aber meist schwieriger zu lesen ist. Versuchen Sie zu verstehen, was die einzelnen *Mathematica* Befehle bewirken. Diese Routine ist offensichtlich auch zur Lösung von viel allgemeineren Problemen geeignet.

Mathematica

```
Clear[n, x, a, xinit];
n=7;
xinit = 2;
f[x_] := 3 x;
x[t_] := a[0] + Sum[a[i] t^i, {i, 1, n}];
x[t] /. Solve[{LogicalExpand[
    Series[f[x[t]], {t, 0, n}] == Series[D[x[t], t], {t, 0, n-1}],
    x[0] == xinit],
    CoefficientList[Series[x[t], {t, 0, n}], t]
}]
{ 2 + 6 t + 9 t^2 + 9 t^3 + 27 t^4 / 4 + 81 t^5 / 20 + 81 t^6 / 40 + 243 t^7 / 280 }
```

Das Resultat kann auch in einer anderen Form angegeben werden.

Mathematica

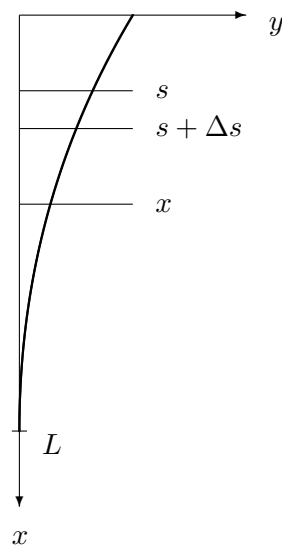
```
N[%]
{ 2. + 6. t + 9. t^2 + 9. t^3 + 6.75 t^4 + 4.05 t^5 + 2.025 t^6 + 0.867857 t^7 }
```



4-6 Beispiel : Biegung eines vertikalen Stabes

In der Figur rechts sehen Sie einen dünnen Stab. Zu seiner Beschreibung werden die folgenden Grössen verwendet:

Abkürzung	Bedeutung	Einheiten
x	Abstand vom höchsten Punkt	m
y	horizontale Auslenkung	m
L	Länge des Stabes	m
I	Flächenträgheitsmoment	m^4
E	Elastizitätsmodul des Materials	$\frac{N}{m^2}$
f_g	Gewichtskraft pro Länge	$\frac{N}{m}$
M	Biegemoment	$N\,m$



Die grundlegende physikalische Beziehung ist

$$y''(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

Nun gilt es das durch den oberen Teil des Stabes verursachte Biegemoment zu bestimmen. Das Balkenstück zwischen s und $s + \Delta s$ hat etwa die Länge $\Delta l = \Delta s$ und führt somit zu einer vertikalen Gewichtskraft der Stärke $f_g \Delta s$. Der horizontale Abstand vom Punkt $x = a$ ist gegeben durch $y(s) - y(a)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta M &= f_g \Delta s (y(s) - y(x)) \\ M(x) &= \int_0^x f_g (y(s) - y(x)) ds \\ \frac{d}{dx} M(x) &= f_g (y(x) - y(x)) - \int_0^x f_g y'(x) ds \\ &= -f_g x y'(x) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus der obigen Momentengleichung

$$y'''(x) = \frac{M'(x)}{E \cdot I} = -\frac{f_g}{E \cdot I} x y'(x)$$

Da am oberen Ende ($x = 0$) das Biegemoment Null sein muss gilt die Anfangsbedingung $y''(0) = 0$. Mit der Abkürzung $k = \frac{f_g}{E \cdot I}$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$y'''(x) = -k x y'(x)$$

Durch die einfache Substitution $u = y'$ erhalten wir daraus die Gleichung zweiter Ordnung

$$u''(x) = -k x u(x) \quad \text{und} \quad u'(0) = 0$$

Es ist zu beachten, dass die Lösung **nicht eindeutig bestimmt** ist, da eine zweite Anfangsbedingung fehlt. Wir werden folglich $u(0) = u_0$ als Parameter beibehalten. *Mathematica* liefert eine Lösung mit Hilfe von speziellen Funktionen

Mathematica

```
sol = DSolve[{D[u[x], {x, 2}] == -k x u[x], u'[0] == 0}, u[x], x]
```

```
.
```

```
Solve::svars: Warning: Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

```

1/3
1/3      AiryBi[(-k) x] C[2]
{{u[x] -> AiryAi[(-k) x] C[2] + -----}}
Sqrt[3]

```

Nun kann auch eine Graphik mit einem konkreten Beispiel erstellt werden.

Mathematica

```

f[x_] = (u[x] /. sol) /. {C[2]->1, k-> 1}
Plot[f[x], {x, 0, 6}]

```

Nun werden wir die Reihenentwicklung dieser Lösung suchen. Sei dazu

$$\begin{aligned}
 u(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 + \dots \\
 u'(x) &= u_1 + 2 u_2 x + 3 u_3 x^2 + 4 u_4 x^3 + 5 u_5 x^4 + \dots \\
 u''(x) &= 2 u_2 + 2 \cdot 3 u_3 x + 3 \cdot 4 u_4 x^2 + 4 \cdot 5 u_5 x^3 + 5 \cdot 6 u_6 x^4 + \dots \\
 k x u(x) &= \quad + k u_0 x + k u_1 x^2 + k u_2 x^3 + k u_3 x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Die Summe der beiden letzten Zeilen in der obigen Formeln muss Null ergeben. Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 2 u_2 &= 0 \\
 2 \cdot 3 u_3 &= -k u_0 \\
 3 \cdot 4 u_4 &= -k u_1 \\
 4 \cdot 5 u_5 &= -k u_2 \\
 5 \cdot 6 u_6 &= -k u_3 \\
 (n+2) \cdot (n+3) u_{n+3} &= -k u_n
 \end{aligned}$$

Dieses Schema kann von oben nach unten aufgelöst werden. Weil $u_1 = u_2 = 0$ sind zwei Drittel aller Koeffizienten Null und für die verbleibenden erhalten wir

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{-k}{2 \cdot 3} u_0 \\
 u_6 &= \frac{-k}{5 \cdot 6} u_3 = \frac{(-k)^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} u_0 \\
 u_9 &= \frac{-k}{8 \cdot 9} u_6 = \frac{(-k)^3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} u_0 \\
 u_{3n} &= \frac{(-k)^n (4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (3n-2))}{(3n)!} u_0
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$u(x) = u_0 \left(1 - \frac{k}{6} x^3 + \frac{k^2}{180} x^6 - \frac{k^3}{12960} x^9 + \dots \right)$$

Mathematica erzeugt ein identisches Resultat.

Mathematica

```

Series[f[x]/f[0], {x, 0, 15}]
.
      3      6      9      12      15
      x      x      x      x      x
{1 - --- + --- - ----- + ----- - ----- + O[x] }
      6     180    12960   1710720   359251200

```

Da in Verlaufe der Rechnung die Substitution $u = y'$ gemacht wurde muss jetzt noch einmal integriert werden um die Auslenkung $y(x)$ als Funktion von x zu erhalten.

$$y(x) = y(0) + y'(0) \left(x - \frac{k}{4 \cdot 6} x^4 + \frac{k^2}{7 \cdot 180} x^7 - \frac{k^3}{10 \cdot 12960} x^{10} + \dots \right)$$

Für kleine Werte von $k x^3$ erhalten wir eine gute Approximation der exakten Lösung. Das führt auf die Bedingung

$$\sqrt[3]{k} x = \sqrt[3]{\frac{f_g}{E \cdot I}} x \quad \text{klein im Vergleich zu } 1$$

◇

4-7 Beispiel : (Der Eulersche Knickstab)

Mit Hilfe des vorangehenden Beispiels kann bestimmt werden, wie hoch ein Stab sein kann, bis er garantiert unter seinem Eigengewicht zusammenbricht. Wir verwenden die einfachste Approximation¹

$$u(x) = y'(x) = y'(0) \left(1 - \frac{f_g}{6 E I} x^3 \right)$$

Damit der Balken bei $x = L$ vertikal ist, muss $u(L) = 0$ sein und ebenso $u(0) \neq 0$. Sonst erhalten wir nur die triviale Lösung $y(x) = 0$. Somit haben wir die Bedingung

$$1 - \frac{f_g}{6 E I} L^3 = 0 \quad \implies \quad L_k = \sqrt[3]{\frac{6 E I}{f_g}}$$

Ist die Länge L grösser als diese kritische Länge L_k , so wird der Stab unter seinem Eigengewicht knicken. Die auf den Stab wirkende Gesamtkraft F ist gegeben durch $F = f_g L = \rho A L$. Somit kann die obige Bedingung umgeschrieben werden zu

$$L_k = \sqrt[3]{\frac{6 E I L_k}{F}} \quad \implies \quad L_k = \sqrt[2]{\frac{6 E I}{F}} \quad \implies \quad L_k = \sqrt{6} \sqrt{\frac{E I}{F}}$$

Für die Eulersche Knicklast eines beidseitig gelagerten Stabes gilt

$$F_E = \frac{E I \pi^2}{L^2} \quad \implies \quad L = \pi \sqrt{\frac{E I}{F_E}}$$

und diese Rechnung zeigt, dass die beiden Situationen vergleichbar sind.

◇

¹Die Bedingung $k x^3 \ll 1$ ist wegen $k L^3 = 6$ **nicht** erfüllt. Eine genauere Berechnung verwendet einen zusätzlichen Term der Approximation. Dann sind die weiteren Terme vernachlässigbar. Die Rechnung wird mühsamer und ist hier gezeigt.

$$u(L) = y'(L) = y'(0) \left(1 - \frac{k}{6} L^3 + \frac{k^2}{180} L^6 \right) = 0$$

Diese Gleichung kann als quadratische Gleichung für die neue Unbekannte $z = L^3$ aufgefasst werden mit den Lösungen

$$L_{1,2}^3 = z_{1,2} = \frac{180}{2 k^2} \left(\frac{k}{6} \pm \sqrt{\frac{k^2}{36} - \frac{4 k^2}{180}} \right) = \frac{180}{12 k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{36}{45}} \right) = \frac{180}{12 k} \left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{45}} \right)$$

Die kleinere der beiden Lösungen ist gegeben durch

$$L_2^3 = z_2 = \frac{180}{12 k} \frac{\sqrt{45} - 3}{\sqrt{45}} \approx \frac{8.3 E I}{f_g}$$

Somit weicht das Schlussresultat nicht erheblich von der viel einfacheren Rechnung ab.

4.3 Numerische Methoden

Für sehr viele Gleichungen gibt es keine Lösungen in geschlossener Form, oder diese sind zu schwierig zu berechnen. In vielen praktischen Anwendungen von Differentialgleichungen braucht man die Werte der Lösung des Anfangswertproblems

$$(AWP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

für Werte von t nahe bei t_0 , z.B. bei $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, t_0 + 3h, t_0 + 4h \dots$

Ziel dieses Abschnittes ist es verschiedene Verfahren kennen zu lernen, um solche approximativen Lösungen zu berechnen.

4.3.1 Das Euler Verfahren

Hier lernen wir das einfachste numerische Verfahren kennen, um gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Es ist **nicht** von sehr grossem Nutzen in Anwendungen, aber die grundlegenden Ideen um Verfahren zu finden lassen sich leichter illustrieren.

Als Beispiel betrachten wir das (AWP)

$$\dot{x} = x^2 - 2t \quad x(0) = 0.75$$

Somit eine Kurve zu finden, welche sich an das entsprechende Vektorfeld „anschmiegt“. In Abbildung 4.1 finden sie eine mit Octave erzeugte Graphik des Vektorfeldes.

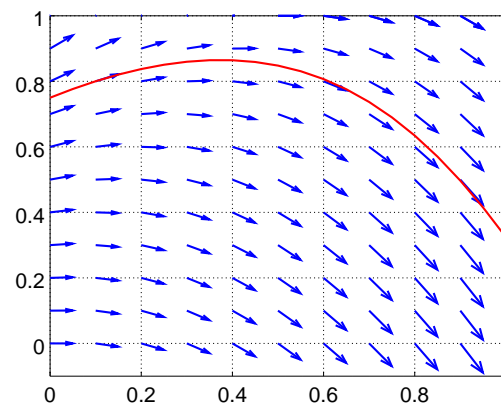


Abbildung 4.1: Vektorfeld der Gleichung $\dot{x} = x^2 - 2t$

Da klassische Programmiersprachen die Ableitung einer gegebenen Funktion nicht exakt bestimmen können, ist die Ableitung aus dem (AWP) zu „entfernen“. Die Grundidee für die Approximation verwendet die Definition der Ableitung

$$\dot{x}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(h) - x(0)}{h} .$$

Wir betrachten die Gleichung bei $t = 0$. Statt des Grenzwertes verwendet man ein „kleines“ h . Also wird aus der obigen Differentialgleichung die approximative algebraische Gleichung

$$\frac{x(h) - x(0)}{h} = f(0, x(0)) .$$

Diese lässt sich leicht nach $x(h)$ auflösen und wir erhalten

$$x(h) = x(0) + h f(0, x(0)) \quad .$$

Oder allgemein: um von der Zeit t zur Zeit $t + h$ zu gelangen bestimmt man

$$x(t + h) = x(t) + h f(t, x(t)) \quad .$$

Dies ist ein sogenanntes **Einschrittverfahren**.

Um ein Beispiel zu haben, setzen wir im obigen (AWP) $h = 1$. Somit wird die Steigung der Lösung im Punkt $(t_0, x_0) = (0, 0.75)$ ausgerechnet, dann eine Gerade durch den Punkt (t_0, x_0) mit der berechneten Steigung gezeichnet. Der x -Wert dieser Geraden bei $t = h = 1$ ergibt den approximativen Wert von $x(1)$. In Abbildung 4.2 sehen Sie eine graphische Illustration zum Euler-Verfahren.

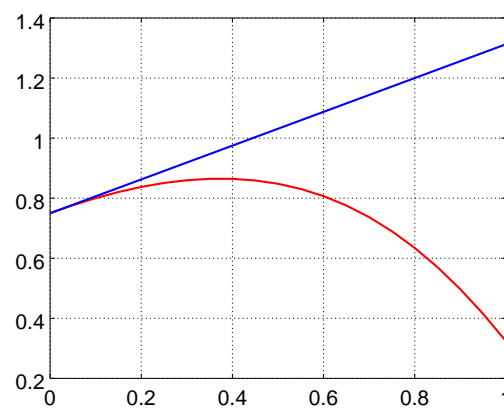


Abbildung 4.2: Ein Schritt des Euler-Verfahrens

4–8 Beispiel : Wir wollen für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + x^2 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

den Wert von $x(1)$ berechnen mit

- (a) einem Schritt des Euler-Verfahrens.
- (b) zwei Schritten des Euler-Verfahrens.
- (c) vier Schritten des Euler-Verfahrens.

Diese Lösung muss später mit dem Resultat von Beispiel 4–9 verglichen werden.

Lösung:

- (a) Hier ist $t_0 = 0$, $x(0) = 0$ und $h = 1$ und man erhält sofort

$$x(1) \approx x(0) + h f(x(0)) = 0 + 1 (1 + 0^2) = 1$$

- (b) Auch hier ist $t_0 = 0$, $x(0) = 0$, aber da wir in zwei Schritten zu $t = 1$ kommen wollen, ist $h = 0.5$ zu wählen und man erhält

$$\begin{aligned} x(0.5) &\approx x(0) + h f(x(0)) = 0 + 0.5 (1 + 0^2) = 0.5 \\ x(1.0) &\approx x(0.5) + h f(x(0.5)) = 0.5 + 0.5 (1 + 0.5^2) = 1.125 \end{aligned}$$

- (c) Auch hier ist $t_0 = 0$, $x(0) = 0$, aber da wir in vier Schritten zu $t = 1$ kommen wollen, ist $h = 0.25$ zu wählen und man erhält

$$\begin{aligned}x(0.25) &\approx 0 + 0.25 (1 + 0^2) = 0.25 \\x(0.50) &\approx 0.25 + 0.25 (1 + 0.25^2) = 0.515625 \\x(0.75) &\approx 0.515625 + 0.25 (1 + 0.515625^2) \approx 0.83209 \\x(1.00) &\approx 0.83209 + 0.25 (1 + 0.83209^2) \approx 1.2552\end{aligned}$$

Die exakte Lösung dieser Differentialgleichung ist $x(t) = \tan t$. Somit ist $x(1) = \tan 1 = 1.5574$. Erhöht man die Anzahl der Schritte, so wird die Approximation immer besser. Für $h = 0.1$ ergibt sich $x(1) \approx 1.40$. \diamond

4.3.2 Die Verfahren von Runge–Kutta (RK4) und Heun (RK2)

Das Verfahren von Runge–Kutta, vierter Ordnung

Um für das (AWP)

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

einen Zeitschritt der Länge h von t_i zu $t_{i+1} = t_i + h$ wird statt der einfachen Methode von Euler das folgende, wichtige Rechenschema verwendet:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_i, x_i) \\k_2 &= f(t_i + h/2, x_i + k_1 h/2) \\k_3 &= f(t_i + h/2, x_i + k_2 h/2) \\k_4 &= f(t_i + h, x_i + k_3 h) \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\t_{i+1} &= t_i + h\end{aligned}$$

Es werden an vier verschiedenen Stellen die Funktion $f(t, x)$ bestimmt, dann wird ein Zeitschritt ausgeführt, indem ein gewichtetes Mittel der Ableitungen verwendet wird. Die Graphik 4.3 illustriert dieses **Mehrschrittverfahren** etwas besser. Illustriert ist ein Schritt des Verfahrens für die Differentialgleichung $\frac{d}{dt} x(t) = -x^2(t) + 2t$ mit dem Anfangswert $x(0) = 0.75$ und der Schrittweite $h = 1.0$.

Es ist eine gute Programmierübung einen einfachen Runge–Kutta Code zu implementieren. Eine etwas ausgereifere Version finden Sie in Abschnitt 4.3.8 ab Seite 272.

4–9 Beispiel : Wir wollen für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + x^2 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

den Wert von $x(1)$ berechnen mit einem Schritt des Runge–Kutta–Verfahrens. Diese Lösung muss mit dem Resultat von Beispiel 4–8 verglichen werden.

Lösung: Hier ist $f(x) = 1 + x^2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_0) &&= f(0) &&= 1 \\k_2 &= f(x_0 + \frac{h}{2} k_1) &&= f(\frac{1}{2} \cdot 1) &&= \frac{5}{4} \\k_3 &= f(x_0 + \frac{h}{2} k_2) &&= f(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}) &&= 1 + \frac{25}{64} = \frac{89}{64} \\k_4 &= f(x_0 + h k_3) &&= f(\frac{89}{64}) &&= 1 + (\frac{89}{64})^2 \\k &= \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) &&\approx 1.5358 \\x(1) &\approx x(0) + h k &&= 0 + 1 \cdot k &&= 1.5358\end{aligned}$$

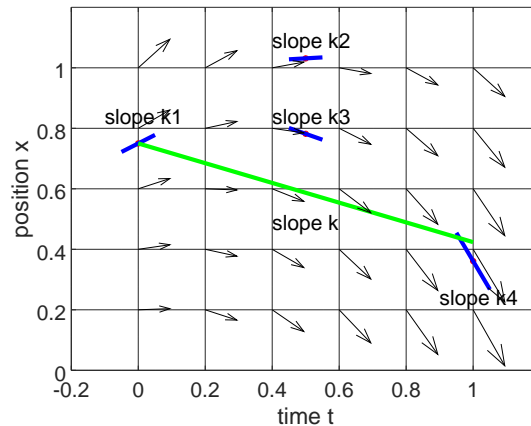


Abbildung 4.3: Ein Schritt des Runge–Kutta–Verfahrens vierter Ordnung für die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -x^2(t) - 2t$ mit $x(0) = 0.75$ und Schrittweite $h = 1$

Die exakte Lösung ist für dieses Beispiel gegeben durch $x(t) = \tan(t)$ und wir haben $x(1) = \tan 1 = 1.5574$. Dieser Fehler ist um Größenordnungen kleiner als der Fehler in Beispiel 4–8. Somit ist das Verfahren von Runge–Kutta effizienter. \diamond

Die obigen Rechnungen können auch mit MATLAB oder Octave ausgeführt werden:

```
x0 = 0; h = 1; % set initial value and step size
F = @(x) (1+x^2); % define the function F(x) = 1+x^2

k1 = F(x0)
k2 = F(x0+h/2*k1)
k3 = F(x0+h/2*k2)
k4 = F(x0+h*k3)
k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6

x1 = x0+h*k
```

Das Verfahren von Heun, Runge-Kutta zweiter Ordnung

Um für das (AWP)

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

einen Zeitschritt der Länge h von t_i zu $t_{i+1} = t_i + h$ wird statt der einfachen Methode von Euler oder des effizienten Verfahren von Runge-Kutta das folgende Rechenschema verwendet:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + h, x_i + k_1 h) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

Es werden an zwei verschiedenen Stellen die Funktion $f(t, x)$ bestimmt, dann wird ein Zeitschritt ausgeführt indem der Mittelwert Steigungen verwendet wird.

4–10 Beispiel : Wir wollen das für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + x^2 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

den Wert von $x(1)$ berechnen mit zwei Schritten des Verfahrens von Heun. Diese Lösung muss mit den Resultaten von Beispiel 4–8 und 4–9 verglichen werden.

Lösung: Hier ist $f(x) = 1 + x^2$ und mit $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0) &&= f(0) &&= 1 \\ k_2 &= f(x_0 + h k_1) &&= f\left(\frac{1}{2}\right) &&= \frac{5}{4} \\ x\left(\frac{1}{2}\right) \approx x_1 &= x(0) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) &&= 0 + \frac{1}{4} \frac{4+5}{4} &&= \frac{9}{16} \\ k_1 &= f(x_1) &&= f\left(\frac{9}{16}\right) &&= 1 + \frac{9^2}{16^2} \\ k_2 &= f(x_1 + h k_1) &&= f\left(\frac{9}{16} + \frac{9^2}{2 \cdot 16^2}\right) &&\approx 2.4901 \\ x(1) \approx x_1 &= x_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) &&\approx \frac{9}{16} + 0.95163 &&\approx 1.5141 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist für dieses Beispiel gegeben durch $x(t) = \tan(t)$ und wir haben $x(1) = \tan 1 = 1.5574$. Dieser Fehler ist kleiner als der Fehler in Beispiel 4–8, aber grösser als der Fehler bei Runge–Kutta im Beispiel 4–9. Somit liegt Heun zwischen den Verfahren von Euler und Runge–Kutta. \diamond

4.3.3 Verfahrens- und Rundungsfehler

Bei numerischen Approximationsverfahren treten zwei Arten von Fehlern auf. Beide sind nicht zu vermeiden und es wird nur darum gehen, diese Fehler möglichst klein zu halten oder zu kontrollieren.

1. Diskretisationsfehler / Verfahrensfehler:

Die Differentialgleichung wird ersetzt durch eine einfacher zu lösende Gleichung. Somit wird nicht mehr die „richtige“ Gleichung gelöst. Dies wird zu einem anderen Resultat führen.

2. Rundungsfehler:

Die Zahlendarstellung in Digitalrechnern mit endlicher Genauigkeit führt unweigerlich zu Rundungsfehlern, die sich im Verlaufe von Rechnungen akkumulieren können. Leider ist der Aufwand diese Art Fehler zu kontrollieren gross, sodass in diesem Rahmen darauf verzichtet wird. Trotzdem ist immer im Auge zu behalten, dass sie auftreten.

Der Gesamtfehler besteht aus der Summe dieser beiden Einzelfehler und selbstverständlich sollte der Gesamtfehler möglichst klein gehalten werden mit möglichst wenig Rechenaufwand.

Das typische Verhalten dieser Fehler bezüglich des Diskretisationsparameters h ist in Abbildung 4.4 gezeigt. Je näher bei 0 der Parameter h liegt, desto kleiner wird der Diskretisationsfehler. Unglücklicherweise wird in der selben Situation der Rundungsfehler immer grösser.

Exemplarisch untersuchen wir die **Konvergenzordnung** des Euler–Verfahrens zur numerischen Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$. Dazu untersuchen wir wie schnell die Approximationsfehler klein werden, wenn wir die Schrittweite h kleiner und kleiner wählen.

Mit der Voraussetzung, dass die gesuchte Funktion $y(t)$ beliebig oft differenzierbar ist², schreiben wir zuerst die Taylor–Entwicklung von $y(t)$ an der Stelle t_0 :

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{y''(t_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(t_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!}h^k + \dots \quad (4.1)$$

²Diese theoretische Bedingung kann abgeschwächt werden.

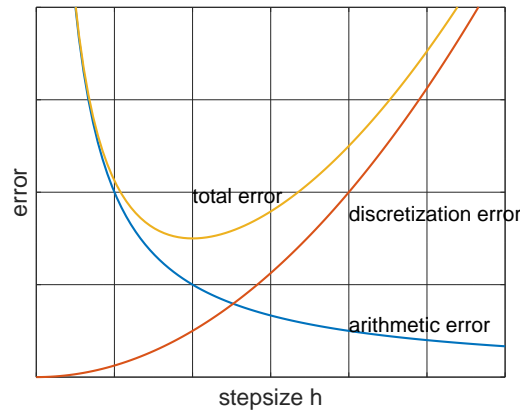


Abbildung 4.4: Verfahrens- und Rundungsfehler

Die obige Reihe (4.1) kann auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot h + h^2 \cdot \left[\frac{y''(t_0)}{2!} + \frac{y'''(t_0)}{3!}h + \dots + \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!}h^{k-2} + \dots \right] \quad (4.2)$$

In diesem Ausdruck kann der Term $y(t_0)$ wegen der Anfangsbedingung durch y_0 ersetzt werden. Auch den Term $y'(t_0)$ können wir durch $f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$ substituieren, weil die Funktion $y(t)$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist. Es kann ausserdem gezeigt werden, dass die Summe aller Terme in den eckigen Klammern beschränkt ist für h klein genug, d.h.: diese "Summe" (das ist effektiv eine Reihe) ist kleiner als eine gewisse positive Konstante C , die von h unabhängig ist. Daraus folgt:

$$y(t_0 + h) = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h + C \cdot h^2 \quad (4.3)$$

Der Funktionswert $y(t_0 + h)$ beschreibt den exakten Wert der gesuchten Funktion an der Stelle $t_0 + h$ (hier ist h die Länge des Diskretisationsschritts). Mit der numerischen Methode berechnen wir aber nicht diesen exakten Wert³, sondern seine Approximation y_1 . In unseren Notationen haben wir nun das Problem, den Approximationsfehler $E = |y(t_0 + h) - y_1|$ zwischen dem exakten und dem approximativen Wert an der Stelle $t_0 + h$ zu schätzen, siehe Figur 4.5.

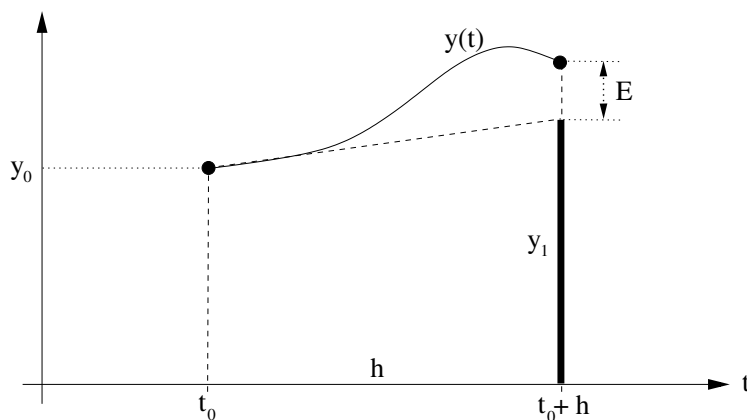


Abbildung 4.5: Der Diskretisationsfehler.

Dazu können wir die zwei Terme der Differenz $E = |y(t_0 + h) - y_1|$ folgendermassen transformieren:

³Wäre dies möglich, so brauchten wir keine numerische Methode!

1. Den exakten Wert $y(t_0 + h)$ können wir durch die vereinfachte Taylor-Entwicklung (4.3) ersetzen.
2. Den approximativen Wert y_1 können wir wegen dem Euler-Verfahren durch $y_0 + h \cdot f(t_0, y_0)$ ersetzen.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 E &= |y(t_0 + h) - y_1| = \\
 &= |(y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h + C \cdot h^2) - (y_0 + h \cdot f(t_0, y_0))| \\
 &= C \cdot h^2
 \end{aligned}$$

Dieser Fehler E heisst **Diskretisationsfehler** des Euler-Verfahrens. In der Numerik ist es üblich, den Fehler in der Form $O(h^2)$ auszudrücken, was bedeutet, er ist kleiner als eine festgelegte positive Konstante C multipliziert mit h^2 . Hier muss betont werden, dass die Konstante C von h nicht abhängt, das heisst, sie bleibt immer gleich, auch wenn der Schritt h klein und kleiner wird. Wenn dieser **lokale** Diskretisationsfehler (d.h.: nach einem Schritt) die Form $O(h^2)$ hat, sagt man, dass die Methode die **lokale Konvergenzordnung** $O(h^2)$ hat. Das ist für das Euler-Verfahren der Fall.

Wenn wir die gleiche Iteration n -mal in den folgenden Schritten durchführen, erhalten wir jeweils einen Diskretisationsfehler der Form $O(h^2)$. Weil sich alle Fehler addieren können, erhalten wir schliesslich einen **globalen Diskretisationsfehler** E_g der Form $n \cdot O(h^2)$, was bedeutet:

$$E_g = n \cdot O(h^2) = n \cdot (C \cdot h^2) = n \cdot \frac{T}{n} \cdot (C \cdot h) = C \cdot T \cdot h = \tilde{C} \cdot h = O(h)$$

Also hat das Euler-Verfahren die globale Konvergenzordnung $O(h)$, es ist von erster Ordnung.

Für das Runge-Kutta-Verfahren kann eine ähnliche Fehleranalyse durchgeführt werden, was einiges mühsamer ist. Man kann aber zeigen, dass diese Methode die lokale Konvergenzordnung $O(h^5)$ und die globale Konvergenzordnung $O(h^4)$ hat. Als Konsequenz dividiert sich z.B. der globale Fehler durch den Faktor 10^4 wenn der Schritt h 10-mal kleiner wird. Die Tabelle 4.1 fasst diese Fehleranalysen zusammen:

Verfahren	Interval-länge	Anzahl Schritte	Schrittlänge	lokaler Diskretisationsfehler	globaler Diskretisationsfehler
Euler	T	n	$h = \frac{T}{n}$	$C_E \cdot h^2$	$C_E \cdot n \cdot h^2 = \tilde{C}_E h$
Heun	T	n	$h = \frac{T}{n}$	$C_H \cdot h^3$	$C_H \cdot n \cdot h^3 = \tilde{C}_H h^2$
Runge-Kutta	T	n	$h = \frac{T}{n}$	$C_{RK} \cdot h^5$	$C_{RK} \cdot n \cdot h^5 = \tilde{C}_{RK} h^4$

Tabelle 4.1: Diskretisationsfehler der Verfahren von Euler, Heun und Runge-Kutta.

4.3.4 Vergleich von verschiedenen numerischen Verfahren

Um zu illustrieren, warum in Anwendungen fast immer das Runge-Kutta Verfahren der Euler Methode vorzuziehen ist, vergleichen wir die beiden Verfahren betreffend verschiedener Kriterien.

1. Rechenaufwand pro Schritt

Der Rechenaufwand ist in den meisten Anwendungen durch die Anzahl der Funktionsaufrufe bestimmt. Diese Annahme geht davon aus, dass es wesentlich länger dauert, ein $f(t, x)$ zu bestimmen als wenige Multiplikationen auszuführen. Bei Euler ist eine Auswertung der Funktion notwendig, bei Runge-Kutta hingegen deren vier.

VORTEIL: Euler.

2. Differenzierbarkeitsvoraussetzung an $f(t, x)$

Damit die obigen formalen Rechnungen richtig sind, sollte bei Euler die Funktion f zwei mal differenzierbar sein. Bei Runge–Kutta sollte die Funktion fünf mal differenzierbar sein.

VORTEIL: Euler.

3. Konvergenzordnung

Der globale Diskretisationsfehler bei Euler ist von der Ordnung h , bei Runge–Kutta hingegen h^4 .

VORTEIL: Runge–Kutta.

4. Anzahl Zeitschritte

Da Runge–Kutta eine höhere Konvergenzordnung hat, kann bei vorgegebenem Gesamtfehler eine grössere Schrittweite h gewählt werden. Je kleiner h , desto besser sieht Runge–Kutta aus. Ein grösseres h ist auch wesentlich, um die eingangs erwähnten Rundungsfehler klein zu halten.

VORTEIL: Runge–Kutta.

4–11 Beispiel : Der letzte Punkt ist bei weitem der wichtigste, wie die folgende Tabelle aus [MeybVach91] verdeutlicht. Das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = 1 + (y - t)^2, \quad y(0) = 0.5$$

wird gelöst durch

$$y(t) = t + \frac{1}{2 - t}.$$

Somit ergibt sich für die exakte Lösung $y(1.8) = 6.8$. Nun wird versucht, diesen Wert durch n Zeitschritte der Länge h numerisch zu finden. \diamond

Verfahren	h	n	Funktionsaufrufe	Gesamtfehler
Euler	0.1	18	18	$2.23 \cdot 10^{-0}$
Runge–Kutta	0.1	18	72	$3.40 \cdot 10^{-3}$
Euler	0.01	180	180	$4.91 \cdot 10^{-1}$
Runge–Kutta	0.01	180	720	$4.20 \cdot 10^{-7}$
Euler	0.001	1800	1800	$5.66 \cdot 10^{-2}$
Runge–Kutta	0.001	1800	7200	$4.32 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 4.2: Vergleich von Euler und Runge–Kutta

Die Differentialgleichung

$$u'(x) = f(u(x)) \quad \text{mit} \quad u(x_0) = u_0$$

ist äquivalent⁴ zur Integralgleichung

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(u(s)) \, ds$$

daher ist es nicht überraschend, dass numerische Integrationsverfahren und Lösungsmethoden für Differentialgleichungen viel gemeinsam haben. Dies wird durch Tabelle 4.3 illustriert. Vergleichen Sie die Ordnungen der Fehler der entsprechenden Verfahren. Es fällt auf, dass die Konvergenzordnung des Runge–Kutta Verfahrens um eins „zu hoch“ ist.

4

$$\frac{d}{dx} \left(u_0 + \int_{x_0}^x f(u(s)) \, ds \right) = f(u(x)) \quad \text{und} \quad u(x_0) = u_0$$

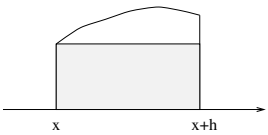
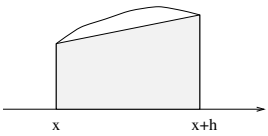
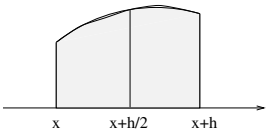
Integral	Differentialgleichung
exakte Lösungen	
$I = \int_x^{x+h} f(t) dt$	$u'(x) = f(u(x))$ $u(x+h) = u(x) + \int_x^{x+h} f(u(t)) dt$
approximative Lösungen	
Rechteck-Regel  $I \approx h f(x)$ Fehler = $O(h^2)$	Verfahren von Euler $k_1 = f(u(x))$ $u(x+h) \approx u(x) + h k_1$ lokaler Fehler = $O(h^2)$
Trapez-Regel  $I \approx \frac{h}{2} (f(x) + f(x+h))$ Fehler = $O(h^3)$	Verfahren von Heun $k_1 = f(u(x))$ $k_2 = f(u(x) + k_1 h)$ $u(x+h) \approx u(x) + \frac{h}{2} (k_1 + k_2)$ lokaler Fehler = $O(h^3)$
Simpson-Regel  $I \approx \frac{h}{6} (f(x) + 4 f(x+h/2) + f(x+h))$ Fehler = $O(h^4)$	Verfahren von Runge-Kutta (RK4) $k_1 = f(u(x))$ $k_2 = f(u(x) + k_1 h/2)$ $k_3 = f(u(x) + k_2 h/2)$ $k_4 = f(u(x) + k_3 h)$ $u(x+h) \approx u(x) + \frac{h}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4)$ lokaler Fehler = $O(h^5)$

Tabelle 4.3: Vergleich von numerischer Integration und Lösen von Differentialgleichungen

4.3.5 Schrittweitenkontrolle

Von zentraler Bedeutung bei der numerischen Lösung eines Anfangswertproblems (AWP) ist eine gute Wahl der Schrittweite h . Ein Algorithmus sollte stets eine automatische Schrittweitenkontrolle enthalten, die abhängig von den errechneten Näherungswerten die Schrittweite h so anpasst, dass entweder eine Kenngrösse oder der geschätzte Diskretisationsfehler in vorgegebenen Schranken bleibt. Eine häufig verwendete Methode ist die *Schrittweithalbierung*.

Man rechnet zwei mal von der Zeit t zur Zeit $t + h$ mit dem gleichen Verfahren, einmal mit Ergebnis r_1 mit einem Schritt der Länge h , dann noch einmal in zwei Schritten der Länge $h/2$ mit Ergebnis r_2 . Ist der globale Diskretisationsfehler von der Ordnung $O(h^p)$, so ist der lokale Diskretisationsfehler von der Ordnung $O(h^{p+1})$ und es gilt

$$\begin{aligned} y(t+h) - r_1 &\approx C h^{p+1} \\ y\left(t+2 \cdot \frac{h}{2}\right) - r_2 &\approx 2 C \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

In diesem System kann das Approximationszeichen \approx ersetzt werden durch ein Gleichheitszeichen und dann kann aufgelöst werden nach $y(t+h)$ und C . Durch Subtraktion erhält man

$$r_2 - r_1 = C \left(h^{p+1} - 2 \left(\frac{h}{2} \right)^{p+1} \right) = C \frac{2^p - 1}{2^p} h^{p+1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} C h^{p+1} &= \frac{2^p}{2^p - 1} (r_2 - r_1) \\ y(t+h) &= r_1 + \frac{2^p}{2^p - 1} (r_2 - r_1) = \frac{2^p r_2 - r_1}{2^p - 1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aus der Gleichung (4.4) können zwei wesentliche Informationen extrahiert werden:

1. Die **Schrittweitenkontrolle**: Mit der Gleichung (4.4) erhalten wir eine (typischerweise gute) Schätzung des lokalen Diskretisationsfehlers an der Stelle t :

$$y(t+h) - r_1 \approx \frac{2^p}{2^p - 1} (r_2 - r_1).$$

In der Regel soll dieser Schätzwert eine vorgegebene Genauigkeitsschranke ε nicht überschreiten. Es gibt zwei mögliche Fälle:

- Falls

$$\frac{2^p}{2^p - 1} |r_2 - r_1| \geq \varepsilon$$

ist der Fehler grösser als die Genauigkeitsschranke ε , so ist die Schrittweite h zu verkleinern.

- Falls der Fehler "viel zu klein" ist, so kann die Schrittweite h wieder vergrössert werden, damit der Rechenaufwand sinkt.

Für konkrete Algorithmen muss der Wert von ε sorgfältig gewählt werden. Basierend auf dem Runge-Kutta Algorithmus wird ein konkreter Code entwickelt in den Abbildungen 4.8 (Seite 275) und 4.9.

2. Die **lokale Extrapolation**: Mit Hilfe der Resultate r_1 und r_2 kann ein neuer Wert der Lösung geschätzt werden durch

$$y(t+h) = \frac{2^p r_2 - r_1}{2^p - 1}$$

Dies ergibt ein "neues" Verfahren, dessen lokaler Fehler meist proportional zu h^{p+2} ist. Somit wird als Nebenprodukt die Konvergenzordnung erhöht.

Für Runge–Kutta ist $p = 4$ und somit

$$\begin{aligned} y(t+h) - r_1 &\approx \frac{16}{15} (r_2 - r_1) \approx r_2 - r_1 \\ y(t+h) &\approx \frac{16r_2 - r_1}{15} \end{aligned}$$

Der lokale Fehler ist von der Ordnung $O(h^{p+1}) = O(h^5)$. Deshalb wird beim klassischen Runge–Kutta Verfahren bei halbieren der Schrittweite h der Fehler ca. um den Faktor $2^5 = 32$ verkleinert. Deshalb wird h typischerweise nicht halbiert und verdoppelt, sondern mit klug gewählten Faktoren multipliziert.

Gute Programmpakete (in C, C++, Java usw.) zeichnen sich vor allem durch diese sogenannten *Treiber-routinen* aus.

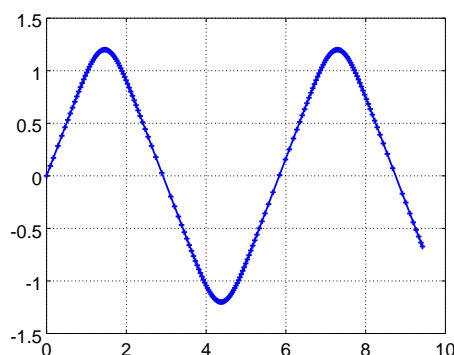
4–12 Beispiel : Als einfaches Beispiel untersuchen wir die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = -y^3(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

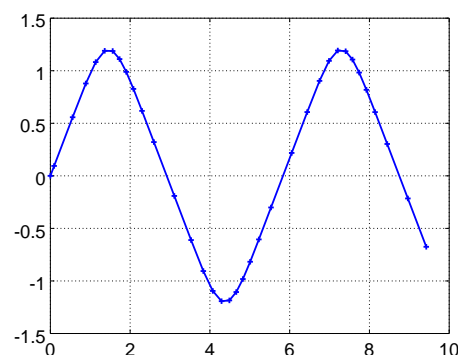
auf dem Intervall $[0, 3\pi]$. Wir verlangen die selbe relative Toleranz (10^{-2}) mit einem adaptiven Verfahren zweiter Ordnung und einem Verfahren vierter Ordnung. Die Resultate sind in Tabelle 4.4 und Abbildungen 4.6 zusammengestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass das Runge–Kutta weniger Rechenschritte benötigt. Die Abbildungen zeigen auch, dass die Schrittweite h kleiner wird, falls sich die Lösungskurve krümmt. Verwendet werden die Codes `rk23.m` und `rk45.m`. In der rechten Hälfte der Tabelle 4.4 ist klar ersichtlich, dass der Unterschied deutlicher wird falls wir eine höhere Genauigkeit verlangen.

	Heun	Runge–Kutta	Heun	Runge–Kutta
absolute und relative Toleranz	10^{-2}		10^{-6}	
globale Ordnung	h^2	h^4	h^2	h^4
Anzahl Zeitschritte	214	35	10236	275
Anzahl Funktionsaufrufe	1160	440	51400	3487

Tabelle 4.4: Vergleich von Heun und Runge–Kutta



(a) Heun



(b) Runge–Kutta

Abbildung 4.6: Vergleich von Heun und Runge–Kutta



4.3.6 Globale Extrapolation und Rechenzeitabschätzungen

Die approximativen Formeln für die Fehler der numerischen Approximationen können verwendet werden um die Genauigkeit zu verbessern. Dazu sind die Rechnungen mit zwei verschiedenen Schrittweiten h auszuführen. Dann kann durch Kombination der beiden Resultate die Genauigkeit erheblich verbessert werden. Es sind zwei verschiedene Situationen zu unterscheiden:

- **Globale Rechnung:** man löst die Differentialgleichung zwei mal über ein grosses Intervall mit verschiedenen Schrittlängen h . Man will ein genaueres Resultat und eine Schätzung wie klein h gewählt werden muss, damit eine vorgegebene Genauigkeit erreicht werden kann. Dieser Fall wird in diesem Abschnitt behandelt.
- **Lokale Rechnung:** man löst die Differentialgleichung für ein kurzes Intervall der Länge h , dann mit zwei Schritten der Länge $h/2$. Man will ein genaueres Resultat und eine Schätzung der Fehler. Mit Hilfe dieser Schätzung wird man entscheiden, ob die Schrittweite verkleinert werden soll oder nicht. Dieser Fall wurde im vorangehenden Abschnitt behandelt.

Man rechnet zwei mal von der Zeit 0 zur Zeit T mit dem gleichen Verfahren, einmal mit Ergebnis r_1 mit Schritten der Länge h , dann noch einmal mit doppelt so vielen Schritten der Länge $h/2$ und Ergebnis r_2 . Ist der **globale** Diskretisationsfehler von der Ordnung $O(h^p)$, so gilt

$$\begin{aligned} y(T) - r_1 &\approx C h^p \\ y(T) - r_2 &\approx C \left(\frac{h}{2}\right)^p \end{aligned}$$

Wegen den numerischen Rechnungen kennt man r_1, r_2 und h und kann somit mittels der beiden (approximativen) Gleichungen C und $y(T)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} y(T) - C h^p &= r_1 \\ y(T) - C \frac{h^p}{2^p} &= r_2 \end{aligned}$$

Durch Elimination von $y(T)$ bzw. h^p erhält man

$$\begin{aligned} C \frac{2^p - 1}{2^p} h^p &= r_2 - r_1 \\ y(T) (2^p - 1) &= 2^p r_2 - r_1 \end{aligned}$$

Für das Runge–Kutta Verfahren ($p = 4$) ergibt sich also

$$\begin{aligned} C &= \frac{16}{15} \frac{r_2 - r_1}{h^4} \\ y(T) &= \frac{16 r_2 - r_1}{15} \end{aligned}$$

Diese Schätzung für den Wert von C erlaubt mittels der Formel

$$\text{Fehler} = y(T) - r \approx C h^p$$

den Fehler abzuschätzen und auch herauszufinden, wie gross h sein muss, damit der Fehler eine vorgegebene Grössenordnung hat. Als Nebenresultat kann auch die benötigte Rechenzeit abgeschätzt werden, da man nun weiss, wie viele Rechenschritte (wahrscheinlich) notwendig sein werden.

Das folgende Beispiel illustriert diese Techniken.

4–13 Beispiel : Für eine einfache Differentialgleichung mit Startwerten zur Zeit $t_0 = 0$ erhält man mit dem Verfahren von Runge–Kutta die folgenden Resultate:

Anzahl der Rechenschritte	Resultat zur Zeit $t_{end} = 10 \pi$
80	0.70568
160	0.70706

Die Rechnung für 160 Schritte benötigt ca. 0.05 Sekunden Rechenzeit. Verwenden Sie diese Angaben, um die folgenden Werte abzuschätzen

- Die maximale Schrittlänge h für welche der Fehler kleiner als 10^{-5} wird.
- Die benötigte Rechenzeit für die obige Genauigkeit.
- Verwenden Sie die beiden obigen Werte zur Zeit t_{end} um einen besseren Wert zu schätzen.

Lösung: Die globale Konvergenzordnung des Verfahrens von Runge–Kutta ist 4 und mit $h = 10\pi/80$ können die obigen Formeln angewandt werden.

- Man erhält

$$C = \frac{16}{15} \frac{r_2 - r_1}{h^4} \approx 0.061897$$

Da der Fehler kleiner als 10^{-5} sein soll, erhalten wir die Bedingung

$$h^4 \leq \frac{10^{-5}}{|C|}$$

und somit

$$h \leq 0.11274$$

- Somit sind ca. $10\pi/h \approx 279$ Schritte erforderlich, d.h. fast das Doppelte der bereits berechneten 160 Schritte. Die Rechenzeit wird somit ca. 0.1 Sekunden sein.
- Das richtige Stichwort ist hier Extrapolation. Aus den obigen Gleichungen kann $y(t_{end})$ bestimmt werden durch

$$y(t_{end}) = \frac{16 r_2 - r_1}{15} \approx 0.70715$$

Dies ist bereits sehr nahe am "exakten" Wert $1/\sqrt{2} \approx 0.70711$.

◇

4.3.7 Systeme von Differentialgleichungen und Gleichungen höherer Ordnung

Alle in diesem Abschnitt vorgestellten numerische Verfahren lassen sich problemlos auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen. Die Konvergenzordnungen, Vor- und Nachteile der Verfahren sind dieselben.

4–14 Beispiel : Wir illustrieren das hier an einem einfachen Beispiel.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= x_0 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin(x_1) & x_2(0) &= v_0\end{aligned}$$

Setzt man

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin(x_1) \end{pmatrix}$$

So kann man das als

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Das Verfahren von Euler ergibt

$$\vec{x}(t+h) = \vec{x}(t) + h \vec{F}(\vec{x}(t))$$

oder

$$\begin{aligned}x_1(t+h) &= x_1(t) + h x_2(t) \\ x_2(t+h) &= x_2(t) - h k \sin(x_1(t))\end{aligned}$$

◇

Differentialgleichungen höherer Ordnung können zu einem System erster Ordnung übersetzt werden, wie das folgende Beispiel illustriert. Die Idee wird im nächsten Abschnitt genauer erklärt.

4–15 Beispiel : Für die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = -k \sin(y(t))$$

werden die neuen abhängigen Variablen $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = \dot{y}(t)$ eingeführt. Das führt auf

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{und} \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -k \sin(y(t)) = -k \sin(x_1(t))$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -k \sin(y(t)) = -k \sin(x_1(t))\end{aligned}$$

oder als System geschrieben

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -k \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

◇

Mit Hilfe der obigen zwei Beispiele wird veranschaulicht, dass mit Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung (fast) alle Probleme angegangen werden können.

4.3.8 Zwei konkrete Algorithmen

In diesem Abschnitt finden Sie MATLAB-Code für zwei brauchbare Implementationen des Verfahrens von Runge–Kutta. Der erste Versuch arbeitet mit einer festen Schrittweite, siehe `ode_Runge.m`. Der zweite Code verwendet ein adaptives Verfahren, siehe `rk45.m`.

```

                                ode_Runge.m
function [tout, yout] = ode_Runge(FunFcn, t, y0, steps)
%ode_Runge
%       ode_Runge(FunFcn, t, y0, steps)
%
%       Integrate a system of ordinary differential equations using
%       4th order Runge-Kutta formula.
%
% INPUT:
% F       - String containing name of user-supplied problem description.
%          Call: yprime = fun(t,y) where F = 'fun'.
% T       - Vector of times (scalar).
% y       - Solution column-vector.
% yprime  - Returned derivative column-vector; yprime(i) = dy(i)/dt.
% t(1)    - Initial value of t.
% y0      - Initial value column-vector.
% steps   - steps to take between given output times
%
% OUTPUT:
% T       - Returned integration time points (column-vector).
% Y       - Returned solution, one solution column-vector per tout-value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, yout).

% Initialization
h = (t(2)-t(1)) /steps;
y = y0(:);
yout = y'; tout = t(:);

% The main loop
for i = 2:length(t)
    h = (t(i)-t(i-1))/steps;
    tau = t(i-1);
    for j=1:steps
        % Compute the slopes
        s1 = feval(FunFcn, tau, y); s1 = s1(:);
        s2 = feval(FunFcn, tau+h/2, y+h*s1/2); s2 = s2(:);
        s3 = feval(FunFcn, tau+h/2, y+h*s2/2); s3 = s3(:);
        s4 = feval(FunFcn, tau+h, y+h*s3); s4 = s4(:);
        tau = tau + h;
        y = y + h*(s1 + 2*s2+ 2*s3 + s4)/6;
    end
    yout = [yout; y.'];
end

```

Abbildung 4.7: Elementarer MATLAB-Code für das Verfahren von Runge-Kutta

Runge–Kutta mit fester Schrittweite

Eine Differentialgleichung wird auf einem gegebenen Zeitintervall gelöst. Hierbei wird die Lösung zu verschiedenen gegebenen Zeiten \vec{t} berechnet. Zwischen diesen Zeiten wird eine feste Zahl von einfachen Runge–Kutta–Schritten ausgeführt. Der Code in den Abbildung 4.7 folgt dem folgenden Schema:

1. Funktionsname, Deklaration von Parametern
2. Dokumentation
3. Initialisierung
4. Hauptschleife
 - (a) berechnet Schrittweite h
 - (b) führe die richtige Anzahl Runge–Kutta Schritte aus
 - (c) speichere das Resultat

Übung 4–18 verlang eine Anpassung des Codes an das Verfahren von Euler, mit anschliessendem Vergleich von Euler und Runge–Kutta.

Runge–Kutta mit Schrittweitenkontrolle

Eine Differentialgleichung wird auf einem gegebenen Zeitintervall gelöst. Hierbei wird die Länge der Zeitschritte automatisch bestimmt. Als Resultat erhält man einen Vektor von Zeiten, bei denen die Lösung bestimmt wurde und die zugehörigen Werte der Lösung. Der Code in den beiden Abbildungen 4.8 und 4.9 folgt dem folgenden Schema.

1. Funktionsname, Deklaration von Parametern
2. Dokumentation
3. Initialisierung, es müssen mindestens 5, höchstens 10000 Zeitschritte gemacht werden. Als Toleranz tol wird das Maximum der gewünschten absoluten und relativen Toleranz gewählt. Als Startwert für den Zeitschritt ist ein Hundertstel der Intervalllänge gewählt.
4. Hauptschleife, teste ob die Schlusszeit t_{final} bereits erreicht ist.
 - (a) falls der nächste Zeitschritt über die Schlusszeit hinausführen würde, ist der Zeitschritt zu verkleinern.
 - (b) führe einen Runge–Kutta–Schritt der Länge h aus.
 - (c) führe zwei Runge–Kutta–Schritte der Länge $h/2$ aus.
 - (d) vergleiche die beiden obigen Resultate um den Fehler abzuschätzen
 - (e) falls der Fehler $yerr$ zu gross ist, verkleinere den Zeitschritt h um den Faktor 0.8, wobei h nie kleiner als $hmin$ wird. Das oben berechnete Resultat wird nicht verwendet.
 - (f) falls der Fehler klein genug ist, kann noch Extrapolationsschritt ausgeführt werden um die Konvergenzordnung zu erhöhen.
 - (g) speichere das Resultat
 - (h) falls der Fehler „zu klein“ ist, kann der Zeitschritt mit 1.2 multipliziert werden, wobei h nie grösser als $hmin$ wird.

Die Struktur des Algorithmus ist einfach. Der einzige kritische Punkt ist die Wahl der Schrittweite und der Faktoren beim Verlängern oder Verkürzen. Es sind bessere Verfahren als das hier präsentierte möglich.

rk45.m

```

function [tout, yout] = rk45(FunFcn, t0, tfinal, y0, tolrel, tolabs)
%RK45   Integrate a system of ordinary differential equations using
%       the classical 4th order Runge-Kutta formula.
%
%       [T,Y] = RK45('yprime', T0, Tfinal, Y0)
%       integrates the system of ordinary differential equations
%       described by the M-file YPRIME.M over the interval T0 to Tfinal
%       and using initial conditions Y0.
%       [T, Y] = RK45(F, T0, Tfinal, Y0, TOLREL,TOLABS) uses relative and
%       tolerances TOLREL and TOLABS. The relative tolerance is measured with
%       respect to the norm of the initial value Y0
%
% INPUT:
% F      - String containing name of user-supplied problem description.
%         Call: yprime = fun(t,y) where F = 'fun'.
%         t      - Time (scalar).
%         y      - Solution column-vector.
%         yprime - Returned derivative column-vector; yprime(i) = dy(i)/dt.
% t0     - Initial value of t.
% tfinal - Final value of t.
% y0     - Initial value column-vector.
% tolrel - The desired relative accuracy. (Default: tolrel = 1.e-3).
% tolabs - The desired absolute accuracy. (Default: tolabs = 1.e-3).
%
% OUTPUT:
% T      - Returned integration time points (column-vector).
% Y      - Returned solution, one solution column-vector per tout-value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, yout).

% Initialization

% default tolerance
% at t=tfinal the norm of the error should be smaller than tolabs
% thus for a step of size h the error should be of the order
%      tolabs * h / (tfinal-t0)
if nargin < 5, tolrel = 0.001; end
if nargin < 6, tolabs = 0.001; end
tol = max([tolabs,tolrel*norm(y0)]) / (tfinal-t0);

% at least 5 steps, at most 10000 steps
t = t0;
hmax = (tfinal - t)/5;
hmin = (tfinal - t)/10000;
h = (tfinal - t)/100;
y = y0(:);
tout = t;
yout = y.';

```

Abbildung 4.8: Octave/MATLAB-Code für ein adaptives Runge-Kutta-Verfahren (Kommentar und Initialisierung)

rk45.m

```

%function [tout, yout] = rk45(FunFcn, t0, tfinal, y0, tolrel,tolabs)

% The main loop
while (t < tfinal)
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end

    % Compute the slopes
    % one Runge-Kutta step of size h
    k1 = feval(FunFcn, t, y);
    k2 = feval(FunFcn, t+h/2, y+h*k1/2);
    k3 = feval(FunFcn, t+h/2, y+h*k2/2);
    k4 = feval(FunFcn, t+h, y+h*k3);
    res1 = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h/6;

    % two Runge-Kutta steps of size h/2
    h=h/2;
    % use k1 from above
    k2 = feval(FunFcn, t+h/2, y+h*k1/2);
    k3 = feval(FunFcn, t+h/2, y+h*k2/2);
    k4 = feval(FunFcn, t+h, y+h*k3);
    res2 = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h/6;
    k1 = feval(FunFcn, t+h, res2);
    k2 = feval(FunFcn, t+3*h/2, res2+h*k1/2);
    k3 = feval(FunFcn, t+3*h/2, res2+h*k2/2);
    k4 = feval(FunFcn, t+2*h, res2+h*k3);
    res2 = res2 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h/6;
    h = h*2;

    % Estimate the error
    yerr = norm(res1 - res2);

    % stepsize too large
    if ( yerr > (h*tol) && (h > hmin) )
        h = 0.8*h;
    else
        % accept values, do extrapolation
        % use the LOCAL error estimates
        t = t+h;
        y = (16*res2-res1)/15;
        tout = [tout; t];
        yout = [yout; y'];
        % make h larger if possible
        if ( yerr< 0.5*h*tol)
            h = min(hmax, 1.2*h);
        end
    end
end;

if (t < tfinal)
    disp('SINGULARITY LIKELY.')
    t
end

```

Abbildung 4.9: Octave/MATLAB-Code für ein adaptives Runge-Kutta-Verfahren (Code)

4.3.9 Bemerkungen und Literaturhinweise

Die im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Algorithmen sind nur als Beispiele zu betrachten und mit Sicherheit nicht der Weisheit letzter Schluss. **Es gibt keinen Algorithmus um alle Typen von Differentialgleichungen numerisch zuverlässig zu lösen.**

- In [Pres86], [Pres92] sind einige der einfacheren Algorithmen erläutert und implementiert.
- In Octave und MATLAB sind die Befehle `ode45()` und `ode23()` verfügbar. Die Grundidee ist Runge–Kutta und die effiziente Implementierung basiert auf Information aus dem Buch von E. Hairer und G. Wanner, siehe [HairNorsWann08].
- Für Octave und MATLAB gibt es eine ganze Serie von gut dokumentierten Routinen [ReicSham95]. Es wird eine grosse Klasse von Problemen abgedeckt, so zum Beispiel auch steife Differentialgleichungssysteme.
- Das FORTRAN–Paket ODEPACK ist ausführlich getestet. Der Code ist erhältlich mittels `ftp` auf `netlib.att.com` oder via WWW auf `http://www.netlib.org`. Unter `http://elib.zib-berlin.de/netlib/master/readme.html` ist ein Spiegel in Deutschland vorhanden..
- Im Bericht [Hind93] ist das Paket LSODE ausführlich dokumentiert. Der FORTRAN–Code ist ebenfalls via `netlib` erhältlich.
- Jedes gute Buch über Numerik oder numerische Analysis enthält ein Kapitel über Differentialgleichungen, [Schw86], [YounGreg72], [YounGreg72a], [Hild74], [Acto90].

4.3.10 Beispiele

4–16 Beispiel : Für Zeiten $0 \leq t \leq 10$ suchen wir Lösungen der Differentialgleichung

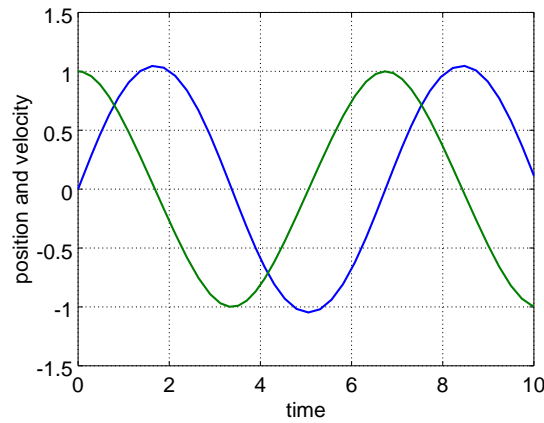
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\sin(x_1(t))\end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 0$. Die verwendeten Codes sind `rk45.m` und ein entsprechend angepasster Code `rk23.m` der das Verfahren von Heun adaptiv implementiert. Bei beiden Verfahren (Heun und Runge–Kutta) verlangen wir einen Fehler kleiner als 10^{-3} und 10^{-6} . Nach kurzer Rechenzeit entsteht bei beiden Verfahren der Graph in Abbildung 4.10. Die Unterschiede zeigen sich in Tabelle 4.5 und den notwendigen Rechenzeiten.

	Heun <code>rk23.m</code> (h^2)	Runge–Kutta <code>rk45.m</code> (h^4)
Toleranz	10^{-3}	10^{-3}
Anzahl Zeitschritte	345	34
Anzahl Funktionsaufrufe	1770	418
Toleranz	10^{-6}	10^{-6}
Anzahl Zeitschritte	10456	165
Anzahl Funktionsaufrufe	52395	2101

Tabelle 4.5: Vergleich von Heun und Runge–Kutta



Abbildung 4.10: Lösung von $\ddot{x} = -\sin x$

4–17 Beispiel : Das Ohm'sche Gesetz für eine Kapazität C ist $i = C\dot{u}$ und für die Spannung u über eine Diode gilt $i = D(u)$, wobei

$$i = D(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u \geq -u_s \\ \frac{1}{R_D}(u + u_s) & \text{falls } u < -u_s \end{cases}$$

Wegen der Kirchhoff'schen Knotenregel gelten also im Schaltkreis in Abbildung 4.11 die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_1 \dot{u}_h + D(u_h - u_{in}) - D(u_{out} - u_h) &= 0 \\ C_2 (\dot{u}_{in} - \dot{u}_{out}) - D(u_{out} - u_h) &= 0 \end{aligned}$$

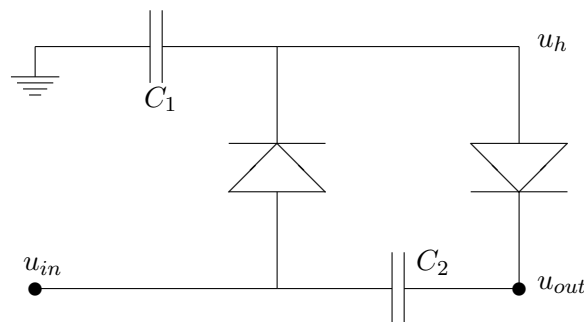


Abbildung 4.11: Ein Spannungsverdoppler

Diese Differentialgleichungen kann man umformen zu

$$\begin{aligned} C_1 \dot{u}_h &= -D(u_h - u_{in}) + D(u_{out} - u_h) \\ C_2 \dot{u}_{out} &= C_2 \dot{u}_{in} - D(u_{out} - u_h) \end{aligned}$$

und dann auflösen nach den Größen \dot{u}_h und \dot{u}_{out}

$$\begin{aligned} \dot{u}_h &= \frac{-1}{C_1} (D(u_h - u_{in}) - D(u_{out} - u_h)) \\ \dot{u}_{out} &= \dot{u}_{in} - \frac{1}{C_2} D(u_{out} - u_h) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir ein nichtlineares System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für das Eingangssignal

$$u_{in}(t) = 10 \sin t$$

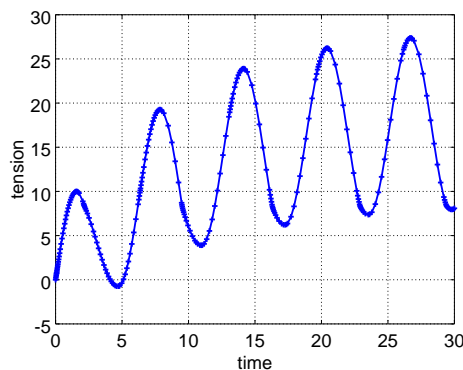
und die Werte $C_1 = C_2 = 1$, $u_s = 0.7$ und $R_D = \frac{1}{10}$ und Anfangswerte $u_h(0) = u_{out}(0) = 0$ können wir nun verschiedene Verfahren testen. Dazu untersuchen wir Zeiten $0 \leq t \leq 30$.

1. Adaptive Verfahren

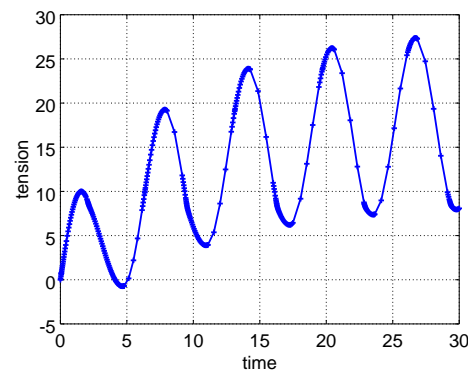
Die Kontrolle der Schrittweite beruht auf einer Taylor-Approximation der Lösung. Damit diese gültig ist, müsste die Lösung oft differenzierbar sein. Da die Strom-Spannungs-Funktion der Diode aber einen Knick hat, ist die Lösung nur ein mal differenzierbar. Die Schrittweitenkontrolle wird dadurch irregeleitet und versucht bei jedem Übergang über die Spannung $-u_s$ (über eine der Dioden) die Schrittweiten **sehr** klein zu machen. Verfahren höherer Ordnung verwenden höhere Ableitungen der Lösung und sind deshalb noch viel empfindlicher auf solche Probleme. Deshalb ist für dieses Beispiel Runge-Kutta wesentlich ineffizienter als eine Modifikation des Verfahrens von Heun.

	Heun	Runge-Kutta
Anzahl Zeitschritte	261	373
Anzahl Funktionsaufrufe	1071	2946

Tabelle 4.6: Vergleich von Heun und Runge-Kutta für nichtdifferenzierbare Funktionen



(a) Heun



(b) Runge-Kutta

Abbildung 4.12: Vergleich von Heun und Runge-Kutta für nichtdifferenzierbare Funktionen

Dieser Effekt wird noch deutlicher illustriert, wenn man auch den Graphen der Hilfsgrösse $u_h(t)$ in Abbildung 4.13 ansieht. Links sind die Funktionen u_{out} und u_h gezeigt. Abbildung 4.13(b) zeigt ein Histogramm der gewählten Schrittgrößen für ein adaptives Runge-Kutta Verfahren. Es werden nur sehr wenige grosse Schritte gemacht, dafür aber sehr viele kurze Schritte. Für dieses Problem mit einer nichtdifferenzierbaren Funktion ist ein nichtadaptives Verfahren besser geeignet.

2. Elementares Runge-Kutta-Verfahren

Wir teilen das Zeitintervall $[0, 30]$ in 200 Teilintervalle gleicher Länge und mit 796 Funktionsauswertungen erhalten wir den Graphen in Abbildung 4.14. Die konstante Schrittweite ist klar ersichtlich.



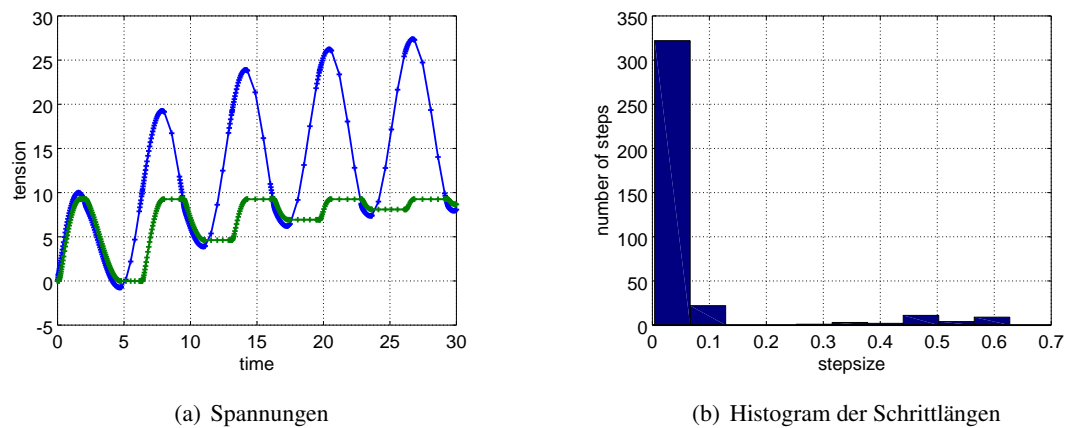


Abbildung 4.13: Lösung und Schrittweiten eines adaptiven Runge–Kutta–Verfahren für nichtdifferenzierbare Funktionen

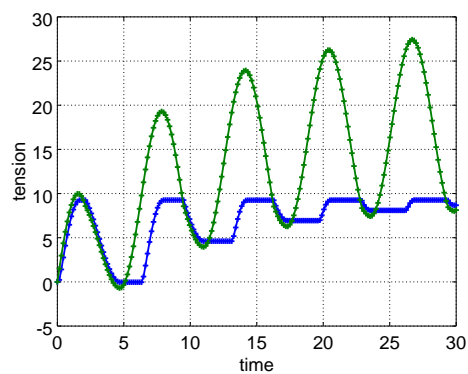


Abbildung 4.14: Elementares Runge–Kutta Verfahren für nichtdifferenzierbare Funktion

4.4 Gleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen

4.4.1 Vektorfelder für Systeme von zwei Differentialgleichungen

4–18 Beispiel : Eine Lösungskurve $x(t), y(t)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

ist in jedem Punkt tangential zum Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Die Abbildung 4.15 stellt dieses Vektorfeld dar. Die Figur deutet auf Kreise als mögliche Lösungen hin, was

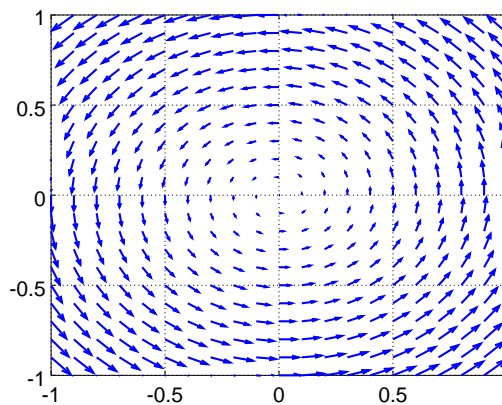


Abbildung 4.15: Ein einfaches Vektorfeld

durch eine einfache Rechnung bestätigt werden kann.

Die Abbildung 4.15 wurde erzeugt durch den folgenden *Octave*/MATLAB code.

Octave

```
x = -1:0.1:1; y = -1:0.1:1;
[xx,yy] = meshgrid(x,y); xx = xx(:); yy = yy(:);
Vx = -yy; Vy = xx;
quiver(xx,yy,Vx,Vy,1)
axis([-1,1,-1,1])
```



4–19 Beispiel : (Räuber–Beute–Gleichungen)

Sei

$x(t)$ die Population der Beutespezies zur Zeit t

$y(t)$ die Population der Räuberspezies zur Zeit t

und c_i seien positive Konstanten. Wir gehen davon aus, dass sich der Räuber von der Beute ernährt, die Beute aber einen praktisch unbeschränkten Nahrungsvorrat hat. Dann beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (c_1 - c_2 y) x \\ \dot{y} &= (c_3 x - c_4) y\end{aligned}$$

das Verhalten der Populationen.

Das entsprechende Vektorfeld kann für eine Wahl der Konstanten erzeugt werden durch

Octave

```
x = 0:0.2:3; y = 0:0.1:1.5;
[xx,yy] = meshgrid(x,y); xx = xx(:); yy = yy(:);
Vx = (1-2*yy).*xx;
Vy = (xx-1).*yy;
quiver(xx,yy,Vx,Vy,2)
axis([0,3,0,1.5])
xlabel('Beute'); ylabel('Räuber')
```

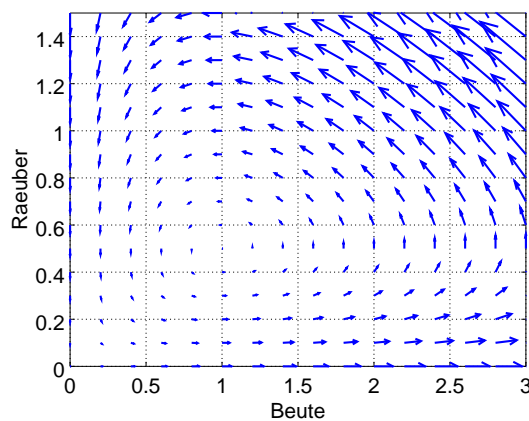


Abbildung 4.16: Volterra–Lotka Vektorfeld

Eine (allerdings nicht einfache) Rechnung zeigt, dass die Lösungen alle periodisch sind. Dieses Modell stammt von den beiden Italienern Volterra und Lotka und dient als Beispiel in vielen Büchern über Differentialgleichungen, z.B. [Aman83a, p. 7]. \diamond

4.4.2 Umwandlung von Gleichungen höherer Ordnung in Systeme

Hier geht es darum zu lernen jedes System von Gleichungen höherer Ordnung in ein größeres System von Gleichungen erster Ordnung umzuwandeln. Es gibt einen einfachen **Trick** dies zu bewerkstelligen.

Ein einfaches Beispiel

Die Gleichung eines Fadenpendels ist gegeben durch

$$\ddot{x} = -k \sin x, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

wobei k eine positive Konstante ist und x dem Auslenkungswinkel entspricht. Nun wählen wir neue abhängige Koordinaten

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

Somit lautet die obige Differentialgleichung nun

$$\dot{x}_2 = -k \sin x_1.$$

Das ergibt das gekoppelte System von Anfangswertproblemen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= x_0 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin(x_1) & x_2(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Setzt man

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin(x_1) \end{pmatrix}$$

So kann man das als

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Ein weiteres Beispiel

Sei $0 \leq x \leq L$ eine horizontale Koordinate und $y(x)$ die vertikale Auslenkung eines Balkens der Länge L aus der horizontalen Ruhelage infolge einer vertikalen Kraft. Die entsprechende Differentialgleichung hat die Form

$$y^{(4)}(x) = f(x),$$

wobei die Kraft in die Funktion $f(x)$ eingeht. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung. Dies wollen wir in ein System von vier Gleichungen erster Ordnung umwandeln. Nun wählen wir neue abhängige Koordinaten

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= \frac{d}{dx} y = y'_1 \\ y_3 &= \frac{d^2}{dx^2} y = y'_2 \\ y_4 &= \frac{d^3}{dx^3} y = y'_3 \end{aligned}$$

Somit lautet die obige Differentialgleichung nun

$$y'_4 = f(x)$$

und wir können das gekoppelte System von Differentialgleichungen aufstellen.

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= f(x) \end{aligned}$$

Hier für kann man sehr gut die Notation einer Matrix und Operationen mit Matrizen und Vektoren einsetzen. Man kann erkennen, dass die obige Gleichung auch folgendermassen geschrieben werden kann.

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Mit den offensichtlichen Notationen kann man das auch als

$$\frac{d}{dx} \vec{y}(x) = \mathbf{A} \vec{y}(x) + \vec{F}(x)$$

schreiben. Wir haben ein System von vier linearen inhomogenen Gleichungen.

4.4.3 Phasenporträts für eine Gleichung zweiter Ordnung

Eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y})$$

kann mit den neuen abhängigen Variablen $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$ umgeschrieben werden als

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Für dieses System von Gleichungen kann nun das entsprechende Vektorfeld gezeichnet werden. Es wird auch **Phasenporträt** genannt. In der horizontalen Richtung wird die Variable y aufgetragen und in der vertikalen Richtung deren Ableitung \dot{y} .

4-20 Beispiel : Die Gleichung des physikalischen Pendels ist (nach Normierung)

$$\ddot{\phi} = -\sin \phi$$

und führt zum System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1)\end{aligned}$$

mit dem Phasenporträt für einen kleinen Bereich um den Ursprung (siehe Abbildung 4.17(a)). Das Phasen-

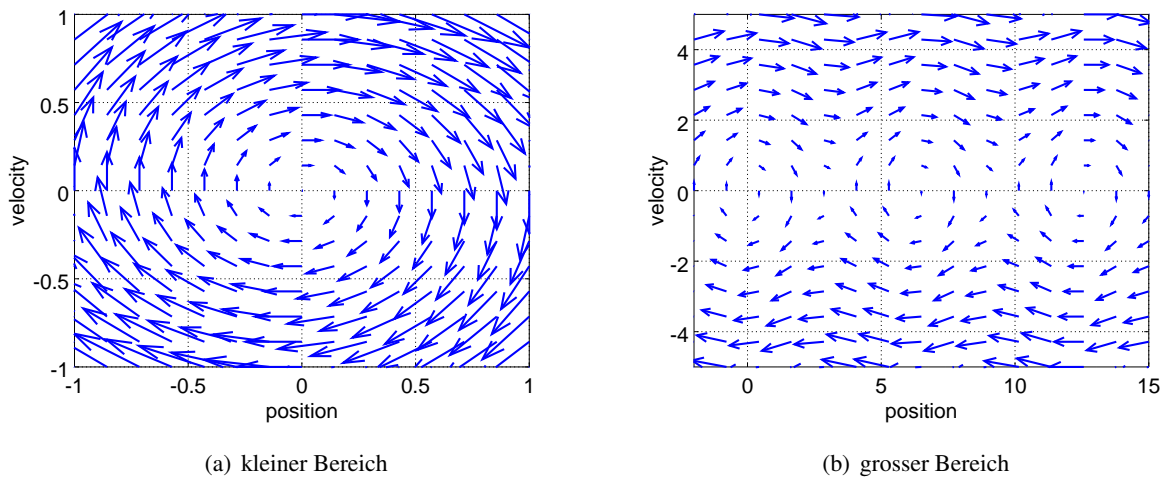


Abbildung 4.17: Phasenporträts der Pendelgleichung

porträt für einen grösseren Bereich ist gegeben durch die Abbildung 4.17(b). Aus Abbildung 4.17(b) kann das qualitative Verhalten des Pendel für grosse Auslenkungen abgelesen werden. \diamond

4.4.4 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden einige Resultate über lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zusammengestellt. Kenntnisse aus linearen Algebra über Matrizen sind unbedingt erforderlich um die hier vorgestellten Resultate verstehen zu können. Deshalb sollten Sie bei Bedarf auch den Abschnitt über Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren konsultieren (Seite 309).

Um Schreibarbeit zu sparen verwenden wir für eine $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}(t)$ und n -Vektoren $\vec{x}(t)$, $\vec{F}(t)$ die Notationen

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Mit diesen Notation können wir nun die grundlegenden Problemstellungen formulieren.

4-21 Definition : Ein **lineares, homogenes System von Differentialgleichungen** ist von der Form

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}(t)$$

Ein **lineares, inhomogenes System von Differentialgleichungen** ist von der Form

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

Die Theorie der Lösungen solcher Systeme ist völlig analog zur Theorie der Lösungen von linearen Gleichungssystemen. Ist $\mathbf{A}(t)$ keine Matrix, sondern eine Zahl (d.h. $n = 1$) so erhält man wieder die Resultate über eine lineare Differentialgleichung.

4-22 Theorem : (*Superposition von Lösungen*)

Sind $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}(t) \quad ,$$

so ist für beliebige Konstanten c_1, c_2 auch

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t)$$

eine Lösung der Gleichung.

Man kann diese Resultat auch mit Worten statt Formeln angeben: Lösungen von linearen, homogenen Differentialgleichungen können addiert und mit Konstanten multipliziert werden und man erhält immer wieder Lösungen. Das selbe Verhalten zeigen auch Lösungen von linearen Gleichungssystemen (nicht nur Differentialgleichungen). Es muss aber beachtet werden, dass dieses Resultat **nicht** gilt für inhomogene Gleichungen.

Als Konsequenz des Superpositionsprinzips kann man nun alle Lösungen von Systemen von linearen, homogenen Differentialgleichungen beschreiben.

4-23 Theorem :

1. Jedes homogene System von n linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}(t)$$

hat n verschiedene linear unabhängige Lösungen $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$.

2. Die allgemeine Lösung $\vec{x}_h(t)$ des obigen Systems ist von der Form

$$\vec{x}_h(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{x}_j(t).$$

3. n verschiedene Lösungen $\vec{x}_j(t)$ $j = 1, 2, \dots, n$ sind als Funktionen von t genau dann linear unabhängig, wenn für irgend eine feste Zeit t_0 die n Vektoren $\vec{x}_j(t_0)$ $j = 1, 2, \dots, n$ linear unabhängig sind.

Dieses Theorem besagt, dass die allgemeine Lösung gefunden werden kann, falls man n linear unabhängige Lösungen finden kann. Somit werden wir versuchen, dieses reduzierte Problem zu lösen. Die letzte Aussage impliziert, dass wir n linear unabhängige Startvektoren wählen könnten und die zugehörigen Anfangswertprobleme lösen, um solche Lösungen zu finden. Falls die Koeffizienten der Matrix A nicht von der Zeit t abhängen, so werden Resultate über Eigenwerte und Eigenvektoren zu solchen Lösungen führen. Zum Glück ist das bei vielen Anwendungen der Fall.

4-24 Theorem : Kennt man von einem inhomogenen, linearen System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

eine partikuläre Lösung, d.h. eine Vektorfunktion $\vec{x}_p(t)$ mit

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_p(t) = \mathbf{A}(t) \vec{x}_p(t) + \vec{F}(t)$$

so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \vec{x}_h(t) \quad ,$$

wobei $\vec{x}_h(t)$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems ist.

Somit muss man „nur“ eine einzige Lösung des inhomogenen Problems und n linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems finden, um alle Lösungen des inhomogenen Problems zu kennen.

4-25 Beispiel : Die obigen Resultate können illustriert werden am Beispiel eines horizontalen Balkens der Länge L der an beiden Enden eingespannt ist und sich unter dem eigenen Gewicht durchbiegt. Die zu lösende Gleichung ist

$$y^{(4)}(x) = -k, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y'(L) = 0$$

wobei die Konstante k die physikalischen Daten beinhaltet. Schreibt man diese Gleichung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, so lassen sich die obigen Resultate anwenden.

Das zu lösende Gleichungssystem

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

hat die partikuläre Lösung (durch raten gefunden)

$$\vec{y}_p(x) = -k \begin{pmatrix} \frac{x^4}{24} \\ \frac{x^3}{6} \\ \frac{x^2}{2} \\ x \end{pmatrix}$$

und die vier linear unabhängigen Lösungen

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_4(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \\ 6x \\ 6 \end{pmatrix}$$

des zugehörigen homogenen Systems.

Somit weiss man, dass die Lösung von der Form

$$y(x) = -k \frac{x^4}{24} + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

ist. Die Werte für die Konstanten c_j sind durch die vier Randbedingungen zu bestimmen. Das führt auf die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 + c_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ y'(0) &= 0 + 0 + c_2 + 0 + 0 = 0 \\ y(L) &= -k \frac{L^4}{24} + c_1 + c_2 L + c_3 L^2 + c_4 L^3 = 0 \\ y'(L) &= -k \frac{L^3}{6} + 0 + c_2 + 2c_3 L + 3c_4 L^2 = 0 \end{aligned}$$

Daraus kann man sofort ablesen, dass $c_1 = c_2 = 0$ und es ergibt sich das einfachere Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 L &= k \frac{L^2}{24} \\ 2c_3 + 3c_4 L &= k \frac{L^2}{6} \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung

$$c_3 = \frac{-k L^2}{24} \quad c_4 = \frac{k L}{12}.$$

Somit haben wir die Lösung

$$y(x) = -\frac{k}{24} x^4 - \frac{k L^2}{24} x^2 + \frac{k L}{12} x^3.$$

Der Graph dieser Lösung für $L = k = 1$ ist in Abbildung 4.18 gezeigt.

◇

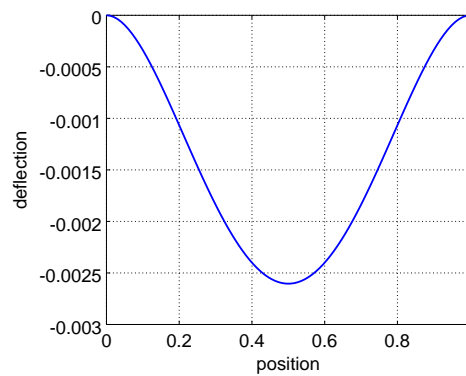


Abbildung 4.18: Biegung eines Balkens

Alle folgenden Resultate in diesem Abschnitt behandeln den speziell wichtigen Fall von homogenen Gleichungen mit einer konstanten, reellen Matrix A , d.h. die Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ hängen nicht von der „Zeit“ t ab.

Die beiden folgenden Resultate zeigen wie man von Eigenwerten und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix auf Lösungen des zugehörigen Systems von homogenen Differentialgleichungen schließen kann.

4-26 Theorem : (Ein reeller Eigenwert)

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Eigenwert der Matrix A mit Eigenvektor \vec{e} , d.h. $A \vec{e} = \lambda \vec{e}$ so ist

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{e}$$

eine Lösung von

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t)$$

Das Resultat kann sehr leicht überprüft werden durch einsetzen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \vec{e} = \lambda e^{\lambda t} \vec{e} = \lambda \vec{x}(t) \\ A \vec{x}(t) &= e^{\lambda t} A \vec{e} = \lambda e^{\lambda t} \vec{e} = \lambda \vec{x}(t) \end{aligned}$$

4-27 Beispiel : Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 3y(t) \\ \dot{y}(t) &= 4x(t) + y(t) \end{aligned}$$

Mit der Matrixnotation ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir Eigenwerte als Lösungen der Gleichung

$$(1 - \lambda)^2 - 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 11 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{4 + 44}) \approx 4.4641 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{4 + 44}) \approx -2.4641$$

und den approximativen Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1547 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -1.1547 \end{pmatrix}$$

Somit ist die allgemeine Lösung von der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \approx c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1547 \end{pmatrix} e^{4.4641 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1.1547 \end{pmatrix} e^{-2.4641 t}$$

Das Vektorfeld dieses Systems von Gleichungen mit den Eigenrichtungen findet man in Abbildung 4.19 \diamond

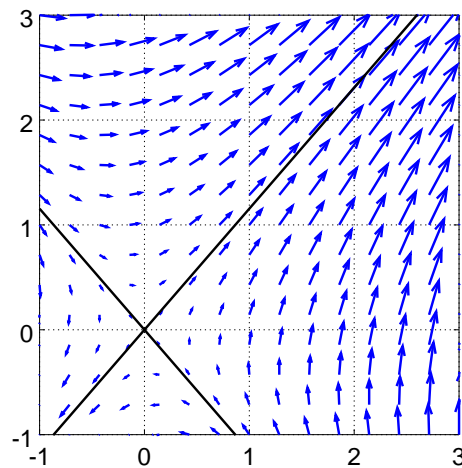


Abbildung 4.19: Ein lineares Vektorfeld mit Eigenvektoren

4-28 Beispiel : Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -2x(t) + 3y(t) \end{aligned}$$

Mit der Matrixnotation ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

erhalten wir Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die allgemeine Lösung von der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

oder auch

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y(t) &= c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

wobei die Konstanten c_1, c_2 aus Anfangsbedingungen zu bestimmen wären. Das Vektorfeld dieses Systems von Gleichungen mit den Eigenrichtungen findet man in Abbildung 4.20 \diamond

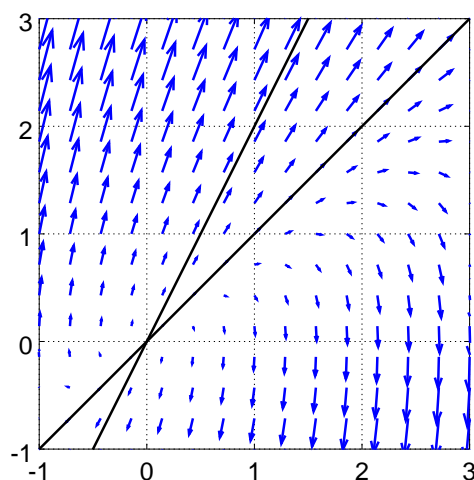


Abbildung 4.20: Ein lineares Vektorfeld mit Eigenvektoren

4–29 Beispiel : Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 25x - 12y \\ \dot{y} &= 9x - 14y \end{aligned}$$

- Finden sie die allgemeine Form der Lösung dieses Systems.
- Untersuchen Sie die Lösung mit den Anfangswerten $x(0) = y(0) = -1$ etwas genauer. Bestimmen Sie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Tip: Denken, nicht rechnen.

- Zeichnen Sie das Vektorfeld und skizzieren Sie einige Lösungen.

Lösung: Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & -12 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}$$

sind

$$\lambda_1 = -11, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 22, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{e}_2 = c_1 e^{-11t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{22t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Der gesuchte Vektor hat Länge 1, es wird die Richtung gesucht in der die Lösung nach langer Zeit „wandert“. Der Anfangsvektor $(-1, -1)^T$ liegt nicht auf der von \vec{e}_1 aufgespannten Geraden. Deshalb fließt die Lösung entweder in die Richtung \vec{e}_2 oder $-\vec{e}_2$. Die Figur der nächsten Teilaufgabe zeigt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{-1}{\|\vec{e}_2\|} \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Mit dem folgende Code kann das Vektorfeld erzeugt werden. Anschliessend werden einige Lösungen numerisch berechnet und dargestellt. Das Resultat ist in Abbildung 4.21 gezeigt.

```

VektorFeld.m

A = [25, -12; 9, -14]; % give the matrix
% eigenvalues and eigen vectors
[EV, EW] = eig(A);
plot(20*EV(1,1)*[-1 1], 20*EV(2,1)*[-1 1], 'g', ...
      20*EV(1,2)*[-1 1], 20*EV(2,2)*[-1 1], 'g', ...
      axis([-10 10, -10 10])
% the vector field
[x,y] = meshgrid([-10 :1:10], [-10 :1:10]);
Vx = A(1,1)*x+A(1,2)*y;
Vy = A(2,1)*x+A(2,2)*y;

hold on
quiver(x,y,Vx,Vy,2)
% solutions of the differential equations
t = linspace(0,1);
[t1,x1] = ode45(@(t,x)A*x,t,[3; 10]);
[t2,x2] = ode45(@(t,x)A*x,t,[3.5; 10]);
[t3,x3] = ode45(@(t,x)A*x,t,[-3.5; -10]);
[t4,x4] = ode45(@(t,x)A*x,t,[-3; -10]);
plot(x1(:,1),x1(:,2),'r',x2(:,1),x2(:,2),'r',...
      x3(:,1),x3(:,2),'r',x4(:,1),x4(:,2),'r')
hold off
```

◇

4-30 Theorem : (Ein komplexer Eigenwert)

Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ ein komplexer Eigenwert der Matrix \mathbf{A} mit Eigenvektor $\vec{u} + i\vec{v}$, so sind

$$\vec{x}_1(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{u} - \sin(\beta t) \vec{v}) \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \vec{v} + \sin(\beta t) \vec{u})$$

linear unabhängige Lösungen von

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t)$$

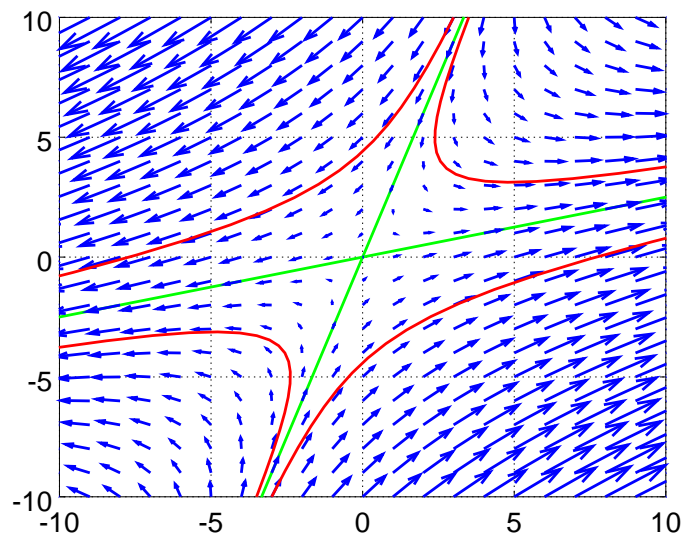


Abbildung 4.21: Vektorfeld, Eigenrichtungen und vier Lösungen eines linearen Systems von Differentialgleichungen

Da die Matrix \mathbf{A} reell ist, erhält man zum Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ auch den zugehörigen konjugiert komplexen Eigenwert $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Dessen zugehörige Lösung ist aber in der obigen Form bereits berücksichtigt. Die obige Formel kann man leicht rekonstruieren, indem man die **komplexe Lösung**

$$e^{(\alpha+i\beta)t} (\vec{u} + i\vec{v}) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (\vec{u} + i\vec{v})$$

der Gleichung betrachtet und dann Real- und Imaginärteil dieser Lösung bestimmt.

4-31 Beispiel : Die einfache (lineare) Version der Gleichung eines schwingenden Pendels ist von der Form

$$\ddot{x}(t) = -k^2 x(t)$$

Mittels des neuen Vektors

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

ergibt sich daraus das System

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

mit den komplexen Lösungen (d.h. Eigenwerten)

$$\lambda_1 = i k \quad , \quad \lambda_2 = -i k$$

Um den ersten Eigenvektor zu finden, muss somit das komplexe Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -ik u + v &= 0 \\ -k^2 u - ik v &= 0 \end{aligned}$$

für die Unbekannten u, v gelöst werden. Die zweite Gleichung ist das $(-ik)$ -fache der ersten. Somit können wir u oder v beliebig wählen. Mit $u = 1$ ergibt sich $v = ik$ und wir haben den ersten Eigenvektor

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich die beiden Lösungen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(kt) \\ -k \sin(kt) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(kt) \\ +k \cos(kt) \end{pmatrix}$$

Das führt auf die bekannte Lösung

$$x(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$$

der ursprünglichen Gleichung. ◇

4-32 Theorem : (Einfache reelle Eigenwerte)

Sind $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ einfache reelle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix \mathbf{A} mit Eigenvektoren \vec{e}_j , so sind

$$\vec{x}_j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{e}_j$$

linear unabhängige Lösungen von

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t)$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit gegeben durch

$$\vec{x}_h(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \vec{e}_j$$

4-33 Theorem : (Einfache reelle und komplexe Eigenwerte)

Seien $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n_1$ einfache reelle Eigenwerte der $n \times n$ Matrix \mathbf{A} mit Eigenvektoren \vec{e}_j . Ebenso seien $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\beta_k > 0$ für $k = 1, \dots, n_2$ einfache komplexe Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} mit Eigenvektoren $\vec{u}_k + i\vec{v}_k$. Weiter sei $n_1 + 2n_2 = n$, d.h. alle Eigenwerte sind oben berücksichtigt. Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{x}_h(t) = & \sum_{j=1}^{n_1} c_j e^{\lambda_j t} \vec{e}_j + \\ & + \sum_{k=1}^{n_2} e^{\alpha_k t} (r_k (\cos(\beta_k t) \vec{u}_k - \sin(\beta_k t) \vec{v}_k) + s_k (\cos(\beta_k t) \vec{v}_k + \sin(\beta_k t) \vec{u}_k)) \end{aligned}$$

wobei c_j, r_k, s_k reelle Konstanten sind.

Das obige Resultat gibt explizite Formeln für die Lösungen von Systemen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Bei einem konkreten Beispiel müssen die Eigenwerte und Eigenvektoren mit Hilfe von numerischen Verfahren bestimmt werden. Das kann ein erheblicher Rechenaufwand sein. Das Langzeitverhalten kann aber alleine aus der Lage der Eigenwerte abgelesen werden.

4-34 Beispiel : Für das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.39 & 0.51 & 1.26 \\ -0.68 & 0 & -0.44 \\ -1.47 & -0.05 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

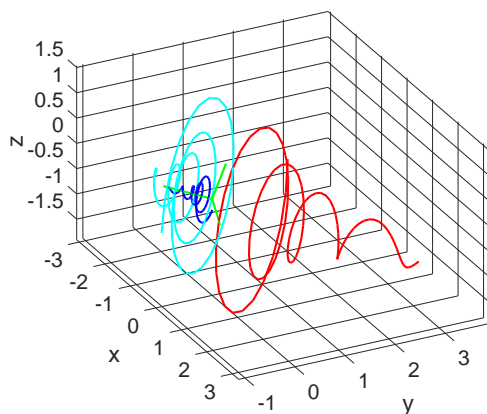
erhalten wir gemäss dem unten stehende Code die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_{1,2} \approx -0.10 \pm i 1.41 \quad \text{mit} \quad \vec{e}_{1,2} = \vec{u} \pm i \vec{v} \approx \begin{pmatrix} 0.67 \\ -0.18 \\ -0.19 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 0.28 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

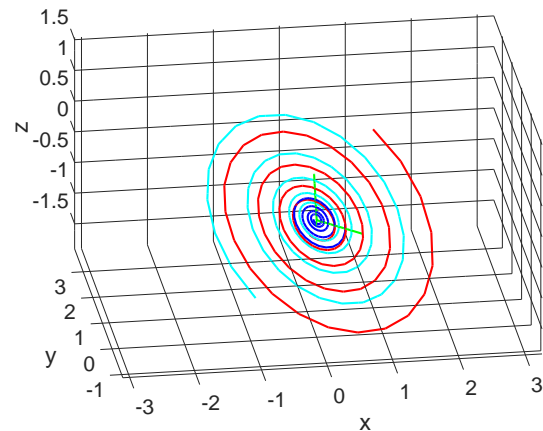
und

$$\lambda_3 \approx +0.095 \quad \text{mit} \quad \vec{e}_3 \approx \begin{pmatrix} -0.13 \\ -0.91 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich in der durch \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Ebene Spiralen deren Radius exponentiell abnimmt, wie $e^{-0.1t}$. In der durch \vec{e}_3 gegebenen Richtung entfernt sich eine typische Lösung mit Abstand $e^{+0.095t}$. Dies wird durch drei Lösungen in Abbildung 4.22 bestätigt.



(a) Sicht auf die \vec{e}_3 Richtung



(b) Sicht auf die \vec{u}, \vec{v} Ebene

Abbildung 4.22: Spiralförmige Lösungen eines Systems von drei Differentialgleichungen

StabilityExample.m

```
A = [0.39 0.51 1.26;
      -0.68 0 -0.44;
      -1.47 -0.05 -0.5]
[EV,EW] = eig(A)

t = linspace(0,20);

[t1,x1] = ode45(@(t,x)A*x,t,[1;1;1]);
[t2,x2] = ode45(@(t,x)A*x,t,[0.4,-0.2,0]);
[t3,x3] = ode45(@(t,x)A*x,t,[-1,-0.5,-1]);

figure(1) % draw the eigen vectors in green
```

```

plot3([0,real(EV(1,1))],[0,real(EV(2,1))],[0,real(EV(3,1))],'g',...
      [0,imag(EV(1,1))],[0,imag(EV(2,1))],[0,imag(EV(3,1))],'g',...
      [0,real(EV(1,3))],[0,real(EV(2,3))],[0,real(EV(3,3))],'g')
hold on % draw thre solutions in different colors
plot3(x1(:,1),x1(:,2),x1(:,3),'r',x2(:,1),x2(:,2),x2(:,3),'b',...
      x3(:,1),x3(:,2),x3(:,3),'c')
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
axis equal
hold off
-->
EV =
    0.66972 + 0.00000i    0.66972 - 0.00000i   -0.13030 + 0.00000i
   -0.17882 + 0.27667i   -0.17882 - 0.27667i   -0.90807 + 0.00000i
   -0.18947 + 0.63801i   -0.18947 - 0.63801i    0.39803 + 0.00000i

EW = Diagonal Matrix
   -0.10264 + 1.41104i          0          0
              0   -0.10264 - 1.41104i          0
              0          0    0.09529 + 0.00000i

```



4–35 Theorem : *Unter den Voraussetzungen des vorangehenden Theorems gilt:*

1. *Haben alle Eigenwerte strikt negativen Realteil, so konvergiert die Lösung exponentiell gegen 0. Der Abfallexponent ist gegeben durch den grössten Realteil der Eigenwerte.*
2. *Gibt es einen rein imaginären Eigenwert $i\beta$, so gibt es eine periodische Lösung mit Kreisfrequenz β .*
3. *Gibt es einen Eigenwert mit strikt positiven Realteil, so gibt es eine Lösung die exponentiell anwächst. Der Realteil des Eigenwertes bestimmt den Wachstumskoeffizienten.*

Um die Eigenwerte zu bestimmen müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt werden.

4-36 Satz : Viele physikalische Systeme lassen sich in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t)$$

schreiben. Durch den neuen Vektor

$$\vec{y} = \frac{d}{dt} \vec{x}$$

kann man die selbe Gleichung auch als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{pmatrix}$$

schreiben. Ist \mathbf{A} eine $n \times n$ Matrix, so wird \mathbf{M} zu einer $(2n) \times (2n)$ Matrix. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von \mathbf{A} mit Eigenvektor \vec{e} , d.h.

$$\mathbf{A} \vec{e} = \lambda \vec{e}$$

- Ist $\lambda > 0$, so sind $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ zwei Eigenwerte von \mathbf{M} mit den Eigenvektoren

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \quad , \quad \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \pm\sqrt{\lambda} \vec{e} \end{pmatrix}$$

- Ist $\lambda < 0$, so sind $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda} = \pm i\omega$ zwei Eigenwerte von \mathbf{M} mit den Eigenvektoren

$$\mu_{1,2} = \pm i\omega \quad , \quad \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \pm i\omega \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{e} \end{pmatrix}$$

- Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert von \mathbf{A} , so sind die beiden Lösungen $\mu_{1,2}$ der Gleichung $\lambda = \mu^2$ Eigenwerte von \mathbf{M} .

Somit hat immer einer der Eigenwerte von \mathbf{M} nichtnegativen Realteil und die Nulllösung des Systems kann nicht exponentiell stabil sein.

Beweis : Die Matrizennotation

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

entspricht den Systemen

$$\vec{y} = \mu \vec{x} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \vec{x} = \mu \vec{y}$$

Also ist

$$\mathbf{A} \vec{x} = \mu^2 \vec{x}$$

Somit muss μ^2 ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} sein, mit Eigenvektor $\vec{x} = \vec{e}$, also ist $\mu^2 = \lambda$.

1. Ist $\lambda > 0$ so haben wir die Eigenwerte $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ und wegen $\vec{y} = \mu\vec{x}$ haben wir auch die Form des Eigenvektors.
2. Ist $\lambda < 0$ so haben wir die Eigenwerte $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ und für die Komponenten des einen Eigenvektors gilt $\vec{y} = i\sqrt{-\lambda} \vec{x}$.
3. Das ist eine direkte Konsequenz der obigen Überlegung.

□

4-37 Satz : Ist für ein System

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t)$$

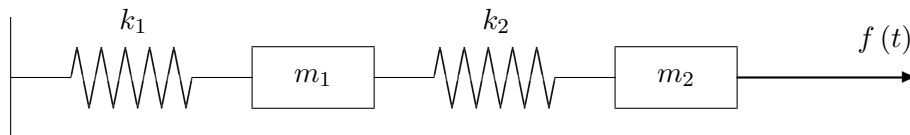
$-\omega^2 < 0$ ein negativer Eigenwert von \mathbf{A} mit Eigenvektor \vec{e} , so sind

$$\vec{x}_1(t) = \cos(\omega t) \vec{e}, \quad \vec{x}_2(t) = \sin(\omega t) \vec{e}$$

zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichungen.

Beweis : Diese Aussage kann man als Konsequenz der vorangehenden Resultate erhalten oder auch durch direkte Rechnung verifizieren. \square

4-38 Beispiel : Die folgende Figur zeigt ein einfaches System von Massen, gekoppelt durch zwei Federn.



Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Die positive x -Richtung sei nach rechts orientiert. Dann liefern die Newtonschen Gleichungen das folgende System

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) + f(t) \end{aligned}$$

Durch einfache Umformungen wird daraus

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} f(t) \end{pmatrix}$$

Dieses System ist von der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t) + \vec{F}(t)$$

Als numerisches Beispiel wählen wir

$$k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1 \quad \text{und} \quad f(t) = 0$$

und erhalten

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} entsprechen den Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1$$

also ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{9-4}) = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Da beide Werte negativ sind, ergeben sich die Eigenwerte der erweiterten Matrix

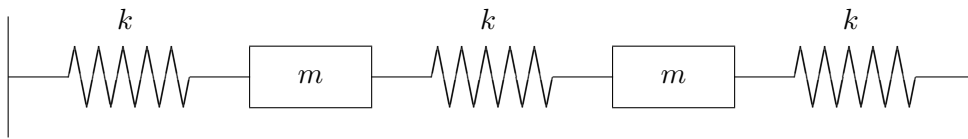
$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}$$

als

$$\begin{aligned} i\omega_{1,2} &= \pm i\sqrt{-\lambda_1} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ i\omega_{3,4} &= \pm i\sqrt{-\lambda_2} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

Die Zahlen $\omega_{1,3}$ entsprechen den **natürlichen Winkelgeschwindigkeiten** dieses Systems, ohne externe Kräfte wird das System mit diesen Winkelgeschwindigkeiten oszillieren. \diamond

4-39 Beispiel : Die folgende Figur zeigt ein einfaches System von Massen, gekoppelt durch zwei Federn.



Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_i = 0$ den Ruhelagen der Massen entspricht, numeriert von rechts nach links. Die positive x -Richtung sei nach rechts orientiert. Dann liefern die Newtonschen Gleichungen das folgende System

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k x_2 \end{aligned}$$

Durch einfache Umformungen wird daraus

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dieses System ist von der Form

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = \mathbf{A} \vec{x}(t)$$

Setzen wir $\alpha = k/m$ so sind die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(-2\alpha - \lambda)(-2\alpha - \lambda) - \alpha^2 = \lambda^2 + 4\lambda\alpha + 3\alpha^2$$

also ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} (-4 \pm \sqrt{16 - 12}) = \alpha (-2 \pm 1)$$

mit den Eigenvektoren

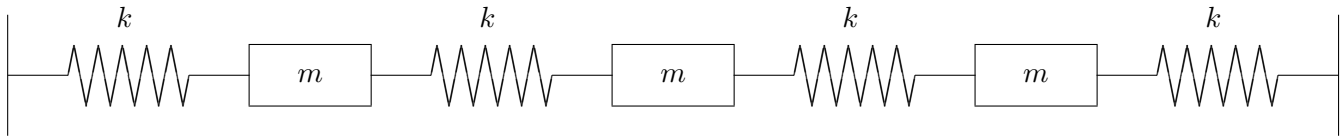
$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -3\alpha, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit sind vier unabhängige Lösungen des Systems gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{x}_2(t) &= \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_3(t) &= \cos(\sqrt{3\frac{k}{m}}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{x}_4(t) &= \sin(\sqrt{3\frac{k}{m}}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Zahlen $\sqrt{\frac{k}{m}}$ und $\sqrt{3\frac{k}{m}}$ entsprechen den **natürlichen Winkelgeschwindigkeiten** dieses Systems. Bei x_1 und x_2 schwingen die beiden Massen parallel, Bei x_1 und x_2 schwingen sie „gegeneinander“, ◇

4-40 Beispiel : Die selbe Rechnung kann auch mit mehreren Massen durchgeführt werden.



Die entsprechende Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Der folgende Octave-Code bestimmt Eigenwerte und Vektoren der entsprechenden Matrix.

```
Octave
A = [-2, 1, 0;
     1, -2, 1;
     0, 1, -2]
[V, lambda] = eig(A)
```

mit den Resultaten

Eigenwert	-2	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Bei der Lösung der ersten Kolonne schwingen die beiden äusseren Massen gegengleich und die mittlere ist in Ruhe, die Winkelgeschwindigkeit ist $\sqrt{2\frac{k}{m}}$. Bei der zweiten und dritten Lösung schwingen die äusseren Massen parallel und die mittlere schwingt mit einer grösseren Amplitude parallel oder gegengleich. ◇

4.4.5 Linearisierungen von Differentialgleichungen

Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

in der Nähe des festen Punktes \vec{x}_0 . Da nichtlineare Gleichungen im Allgemeinen nicht in geschlossener Form lösbar sind, versuchen wir das qualitative Verhalten der Lösungen zu beschreiben, indem wir eine einfachere Gleichung untersuchen. Hierbei sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

$$\vec{F}(\vec{x}_0) \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

1.Fall: $\vec{F}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$

Die Lösungskurven in der Nähe von x_0 zeigen in die Richtung von $\vec{F}(x_0)$ und somit ist das qualitative Verhalten der Lösungen sehr leicht zu beschreiben: Die Lösungen fliessen mit der Geschwindigkeit $\vec{F}(x_0)$. Kleine Modifikationen im Vektorfeld \vec{F} werden dieses Verhalten nicht wesentlich ändern.

2.Fall: $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$

Hier ist die Situation nicht mehr so einfach. Dies sei mit einem Beispiel illustriert.

4-41 Beispiel : Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

hat Kreise um den Ursprung als Lösungen, d.h.

$$x(t) = r \cos t \quad \text{und} \quad y(t) = r \sin t$$

Sind x und y nahe bei 0, so ist

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \alpha(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= x + \alpha(x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

eine nur minimal modifizierte Differentialgleichungssystem.

Multipliziert man die erste Gleichung mit x , die zweite mit y und addiert die beiden, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d r^2}{dt} = \alpha r^4$$

Für $\alpha > 0$ ergeben sich vom Ursprung wegdrehende Spiralen als Lösungen. Für $\alpha < 0$ drehen sich die Spiralen in den Ursprung hinein.

Eine minimale Änderung von α erzeugt also qualitativ völlig verschiedene Lösungen. \diamond

Wir betrachten nun das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

wobei $f(0, 0) = 0$ und $g(0, 0) = 0$.

Nun werden wir die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ durch approximierende Taylorpolynome ersetzen. Wir verwenden die Notation

$$f_x = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$$

Somit gilt für kleine Werte von $|x|$ und $|y|$

$$f(x, y) \approx f_x x + f_y y + \frac{1}{2}(f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2)$$

Eine entsprechende Approximation kann auch für $g(x, y)$ bestimmt werden. Nun lassen wir in diesen Approximationen auch die quadratischen Terme weg und betrachten nur die in x und y linearen Ausdrücke. Damit wird aus dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen das **linearisierte System**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x x + f_y y \\ \dot{y} &= g_x x + g_y y\end{aligned}$$

In der Matrixnotation ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) & \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(0, 0) & \frac{\partial}{\partial y} g(0, 0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4-42 Beispiel : Das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin(x + 2y) \\ \dot{y} &= -3x + y/(1 + x^2)\end{aligned}$$

passt in den obigen Rahmen und wir haben

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \sin(x + 2y) & \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \cos(x + 2y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 2 \cos(x + 2y) \\ f(0, 0) &= 0 & \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= 1 & \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= 2\end{aligned}$$

Die selbe Rechnung für die Funktion $g(x, y)$ ergibt

$$\begin{aligned}g(x, y) &= -3x + \frac{y}{1 + x^2} & \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) &= -3 - \frac{2xy}{(1 + x^2)^2} & \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) &= \frac{1}{1 + x^2} \\ g(x, y) &= 0 & \frac{\partial}{\partial x} g(0, 0) &= -3 & \frac{\partial}{\partial y} g(0, 0) &= 1\end{aligned}$$

Somit lautet das entsprechende linearisierte System von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1x + 2y \\ \dot{y} &= -3x + 1y\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildung 4.23 zeigt das ursprüngliche und das linearisierte Vektorfeld.

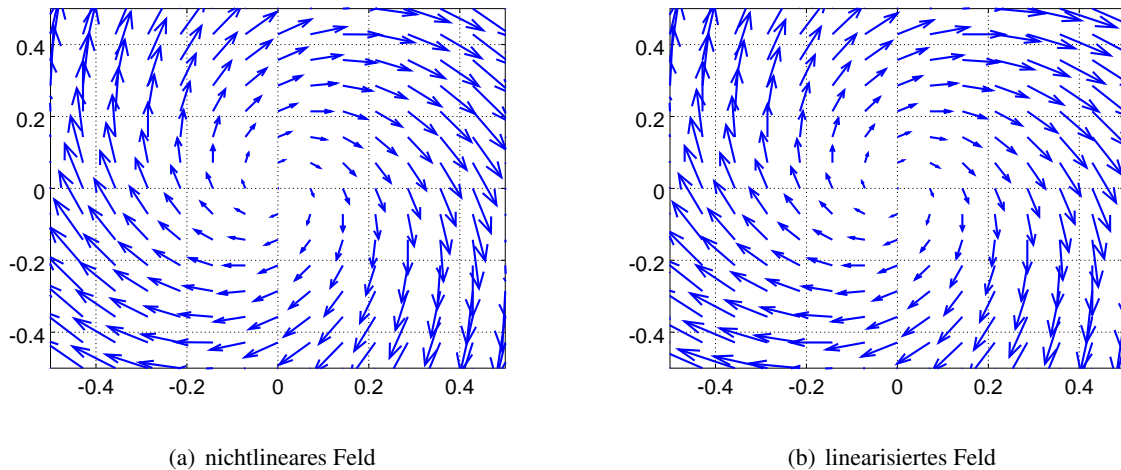


Abbildung 4.23: Vektorfelder in kleinem Bereich

Die Eigenwerte der Matrix sind gegeben durch die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(1 - \lambda)^2 + 6 = 0$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{6}$$

Eine numerische Rechnung ergibt die komplexen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.77460 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0.63246 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u} \pm i\vec{v}.$$

Somit sind zwei linear unabhängige Lösungen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^t (\cos(\sqrt{6}t) \vec{u} - \sin(\sqrt{6}t) \vec{v}) \approx e^t \begin{pmatrix} +0.63 \sin \sqrt{6}t \\ +0.77 \cos \sqrt{6}t \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^t (\cos(\sqrt{6}t) \vec{v} + \sin(\sqrt{6}t) \vec{u}) \approx e^t \begin{pmatrix} -0.63 \cos \sqrt{6}t \\ +0.77 \sin \sqrt{6}t \end{pmatrix}$$

Das sind sich vom Ursprung entfernende Spiralen. Die Nulllösung ist nicht stabil. Für das qualitative Verhalten der Lösungen sind alleine die Eigenwerte der Matrix ausschlaggebend.

Da für kleine Werte von $|x|$ und $|y|$ die linearisierte Gleichung eine sehr gute Approximation der ursprünglichen Gleichung ist, hoffen wir, dass sich auch die Lösungen des nichtlinearen Systems fast so verhalten wie die soeben gefundenen Lösungen der Linearisierung.

Die Abbildung 4.24 zeigt das ursprüngliche und das linearisierte Vektorfeld für einen grösseren Bereich. Es ist zu beachten, dass die Flusslinien qualitativ anders verlaufen. Die Graphiken wurden erzeugt mit Octave/MATLAB.

Linearisiertes Vektorfeld.m

```
dom_u = -0.5; dom_o = 0.5; %% small
dom_u = -1;   dom_o = 3;   %% large
dom = linspace(dom_u, dom_o, 15); [x, y] = meshgrid(dom, dom); x = x(:); y = y(:);

Vx = sin(x+2*y);
Vy = -3*x + y./(1+x.^2);
figure(1)
quiver(x, y, Vx, Vy, 2)
axis([dom_u dom_o dom_u dom_o])
xlabel('x'); ylabel('y');
title('nichtlineares Feld')

Vx = x+2*y;
Vy = -3*x + y;
figure(2)
quiver(x, y, Vx, Vy, 2)
axis([dom_u dom_o dom_u dom_o])
xlabel('x'); ylabel('y');
title('linearisiertes Feld')
```



Die folgende Aussage ist die Grundlage für die Methode der Linearisierung:

4–43 Theorem : *Haben alle Eigenwerte der durch Linearisierung entstandenen Matrix von Null verschiedene Realteile, so verhalten sich die Lösungen des nichtlinearen Systems von Differentialgleichungen in der Nähe des Ursprungs qualitativ gleich wie die Lösungen des linearen Systems.*

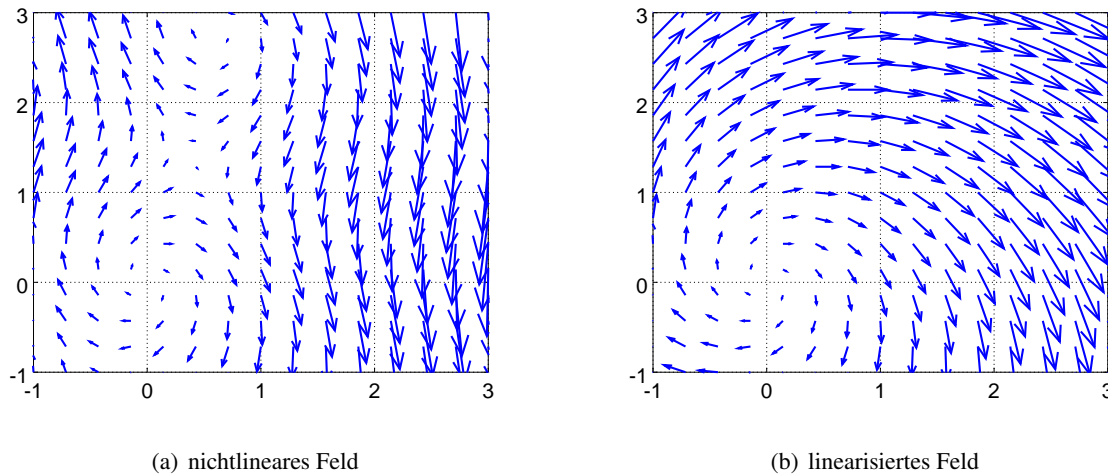


Abbildung 4.24: Vektorfelder in grossem Bereich

4-44 Beispiel : Die Linearisierung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \alpha(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= +x + \alpha(x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

ist unabhängig von α und gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm i$ und somit lässt sich das Theorem **nicht** anwenden. Je nach dem Vorzeichen von α ist das Verhalten der Lösungen qualitativ verschieden⁵, siehe Beispiel 41 auf Seite 300. \diamond

Die Resultate bleiben richtig, auch für Systeme von mehr als zwei Gleichungen. Als Konsequenz der obigen Überlegungen erhält man das folgende Theorem.

⁵Dazu betrachtet man

$$\begin{aligned}h(t) &= x^2(t) + y^2(t) \\ \frac{d}{dt} h(t) &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) \\ &= 2x(t)(-y(t) + \alpha(x^2(t) + y^2(t))x(t)) + 2y(t)(+x(t) + \alpha(x^2(t) + y^2(t))y(t)) \\ &= 2x(t)\alpha h(t)x(t) + 2y(t)\alpha h(t)y(t) = 2\alpha h^2(t) \\ \frac{-1}{h(t)} &= \alpha t - \frac{1}{h(0)} \quad \text{durch Separation der Variablen} \\ h(t) &= \frac{-1}{\alpha t - \frac{1}{h(0)}} = \frac{h(0)}{1 - \alpha t h(0)}\end{aligned}$$

4-45 Theorem : Die Nulllösung eines Differentialgleichungssystems (mit $\vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$)

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$$

ist genau dann exponentiell stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

strikt negativen Realteil haben. Hierbei ist

$$a_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\vec{0})$$

4-46 Beispiel : Die Gleichung eines schwach gedämpften Pendels ist

$$\ddot{\phi} = -k \sin \phi - \alpha \dot{\phi}$$

mit $k = g/l$. Als System geschrieben führt dies auf ($x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \sin(x_1) - \alpha x_2 \end{aligned}$$

(a) Der kritische Punkt $(0, 0)$ ist auf Stabilität zu untersuchen.

(b) Der kritische Punkt $(\pi, 0)$ ist auf Stabilität zu untersuchen.

Lösung:

(a) Die Ableitung von $\sin x$ bei $x = 0$ ist 1 und somit ist das bei $(0, 0)$ linearisierte System gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Zu untersuchen sind somit die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \alpha \lambda + k = 0$$

Die Lösungen sind für kleine Werte von α ($\alpha^2 < 4k$) gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k} \right) = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm i \sqrt{4k - \alpha^2} \right)$$

Für $\alpha > 0$ sind also die Realteile der Eigenwerte negativ, so ist das System in der Nähe von $(0, 0)$ stabil.

- (b) Die Ableitung von $\sin x$ bei $x = \pi$ ist -1 und somit ist das bei $(0, 0)$ linearisierte System gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die „neuen“ Variablen bezeichnen die Abweichung vom kritischen Punkt ($x_1 = \pi + y_1$, $y_2 = x_2$). Zu untersuchen sind somit die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ k & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \alpha \lambda - k = 0$$

Die Lösungen sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4k} \right)$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist also der Realteil des grösseren Eigenwertes sicher positiv und das System in der Nähe von $(\pi, 0)$ instabil. Dies stimmt mit der physikalischen Erfahrung überein.

◇

4–47 Beispiel : Für positive Konstanten c_i beschreiben die Gleichungen von Volterra–Lotka ein Räuber–Beute System. Das entsprechende Vektorfeld ist in Abbildung 4.16 auf Seite 282 skizziert.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (c_1 - c_2 y) x \\ \dot{y} &= (c_3 x - c_4) y \end{aligned}$$

Mit $\vec{x} = (x, y)$ kann man dieses System auch durch

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (c_1 - c_2 y) x \\ (c_3 x - c_4) y \end{pmatrix}$$

darstellen. Dieses Vektorfeld hat einen kritischen Punkt ($\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$) bei $x_0 = c_4/c_3$ und $y_0 = c_1/c_2$. Statt um den Nullpunkt $\vec{0}$ zu linearisieren, betrachten wir dieses System in der Nähe des kritischen Punktes. Die Matrix \mathbf{A} für dieses Vektorfeld \vec{F} ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 y_0 & -c_2 x_0 \\ c_3 y_0 & c_3 x_0 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 c_4 / c_3 \\ c_3 c_1 / c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Lösungen der Gleichung

$$\lambda^2 = -c_1 c_4$$

Mit den neuen Variablen $\Delta x = x - x_0$ und $\Delta y = y - y_0$ können wir nun statt des ursprünglichen System die lineare Approximation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_2 c_4 / c_3 \\ c_3 c_1 / c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

betrachten. Da die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ rein imaginär sind, hat das linearisierte System Kreise (oder Ellipsen) als Lösungen und wir können das Theorem über Linearisierungen nicht anwenden. Das folgende Beispiel wird zeigen, dass kleine Störungen zu qualitativ verschiedenem Verhalten führen können. In diesem speziellen Beispiel sind die Lösungen des ursprünglichen Systems periodisch und sehen aus wie deformierte Kreise um den kritischen Punkt. Auf den Beweis dieser Tatsache verzichten wir hier. Dieses Verhalten wird durch das Vektorfeld in der Nähe des kritischen Punktes illustriert, siehe Abbildung 4.25.

◇

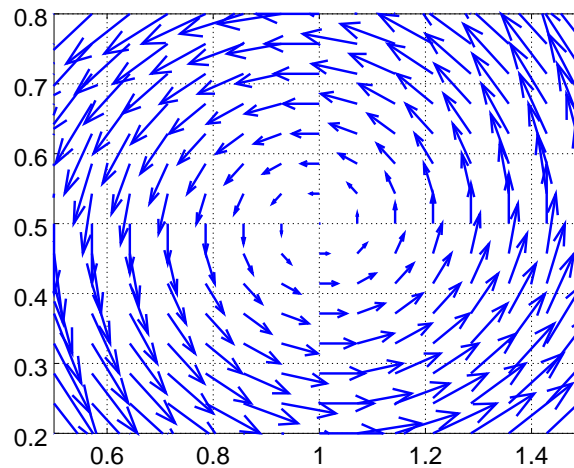


Abbildung 4.25: Linearisierung des Volterra–Lotka Vektorfeldes

4–48 Beispiel : Für das vorangehende Beispiel der Volterra–Lotka Gleichungen untersuchen wir Störungen des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - 2y)x \\ \dot{y} &= (x - 1)y\end{aligned}$$

Der kritische Punkt ist bei $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$ und die Lösungen umkreisen diesen Punkt.

- Als erste Störung addieren wir ein Vektorfeld, dass zu diesem kritischen Punkt hin zeigt.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - 2y)x - 0.1xy(x - 1) \\ \dot{y} &= (x - 1)y - 0.1xy(y - 0.5)\end{aligned}$$

Der kritische Punkt bleibt bei $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$ und die Linearisierung an diesem kritischen Punkt ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} F_1 &= 1 - 2y - 0.1(y(x - 1) + xy) = 0 - 0.05 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 &= -2x - 0.1x(x - 1) = -2 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 &= -y - 0.1y(y - 0.5) = 0.5 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_2 &= (x - 1) - 0.1(x(y - 0.5) + xy) = 0 - 0.05\end{aligned}$$

Somit sind die beiden Eigenwerte bestimmt durch

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -0.05 - \lambda & -2 \\ 0.5 & -0.05 - \lambda \end{bmatrix} = (-0.05 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

und haben einen Realteil von -0.05 . Folglich ist der kritische Punkt stabil, was durch die Lösung mit Anfangswert $(1, 0.05)$ in Abbildung 4.26(a) illustriert wird.

- Als zweite Störung untersuchen wir ein Vektorfeld, dass von diesem kritischen Punkt weg zeigt, für grosse Abweichungen aber wieder zum Punkt hin zeigt.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - 2y)x + 0.1xy(x - 1)(2 - x) \\ \dot{y} &= (x - 1)y + 0.1xy(y - 0.5)(0.75 - y)\end{aligned}$$

Der kritische Punkt bleibt bei $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$ und die Linearisierung an diesem Punkt führt zu (nach mühsamer Rechnerei)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} +0.05 - \lambda & -2 \\ 0.5 & +0.0125 - \lambda \end{bmatrix} = (-0.05 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

Das führt zu $\lambda_{1,2} \approx +0.03125 \pm i 0.9998$ und somit ist der kritische Punkt instabil. Abbildung 4.26(b) zeigt die beiden Lösungen mit Anfangswerten $(1, 0.45)$ und $(1, 0.025)$. Man erkennt, dass sich die Lösungen einem periodischen Grenzzyklus nähern.

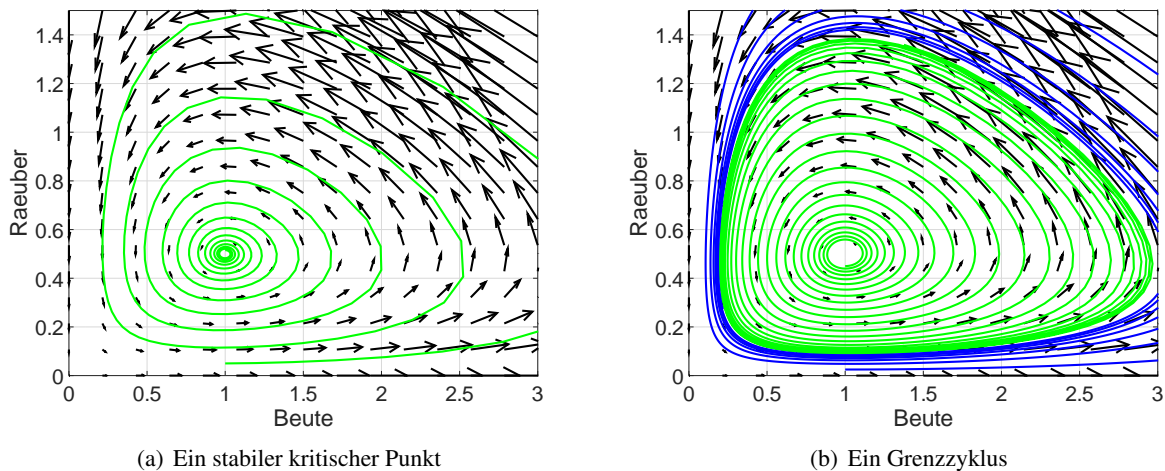


Abbildung 4.26: Volterra–Lotka Gleichungen, mit kleinen Störungen



4-49 Beispiel : Ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen hat genau zwei kritische Punkte und ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 6y - (x - y)^2 \\ \dot{y} &= -6x + 2y + (x - y)^2\end{aligned}$$

- Untersuchen Sie das Verhalten der Lösungen des Systems in der Nähe des kritischen Punktes $(0, 0)$ mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren.
- Der zweite kritische Punkt liegt auf der Geraden $y = -x$, finden Sie ihn und untersuchen Sie das Verhalten der Lösungen in der Nähe.
- Verwenden Sie die beiden obigen Teilresultate, um das Verhalten der Lösung, die durch den Punkt $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ geht, zu skizzieren (nicht rechnen).

Lösung: Das Schlüsselwort ist selbsterstündlich Linearisierung. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = 2x - 6y - (x - y)^2 \\ \dot{y} &= g(x, y) = -6x + 2y + (x - y)^2\end{aligned}$$

Zu bestimmen sind die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 2 - 2(x - y) \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -6 + 2(x - y) \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} &= -6 + 2(x - y) \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= 2 - 2(x - y)\end{aligned}$$

(a) In der Nähe des Ursprungs haben wir somit das linearisierte Problem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -6 \\ -6 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 6^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $\lambda_{1,2} = 2 \pm 6$. Die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren sind also

$$\lambda_1 = 8, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -4, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit wachsen die Lösungen exponentiell an (Faktor e^{8t}) in die $(-45)^\circ$ -Richtung. In die orthogonale $+45^\circ$ -Richtung konvergieren die Lösungen exponentiell gegen Null mit dem Faktor e^{-4t} .

(b) Der zweite kritische Punkt liegt auf der Geraden $y = -x$, deshalb suchen wir Nullstellen der Funktion

$$f(x, -x) = 2x + 6x - (x + x)^2 = 8x - 4x^2$$

Die zweite Nullstelle (neben $x = 0$) ist $x = 2$ und somit befindet sich der zweite kritische Punkt bei $(x_0, y_0) = (2, -2)$. Die partiellen Ableitungen an dieser Stelle sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(2, -2)}{\partial x} &= 2 - 2(2 + 2) = -6, & \frac{\partial f(2, -2)}{\partial y} &= -6 + 2(2 + 2) = 2 \\ \frac{\partial g(2, -2)}{\partial x} &= -6 + 2(2 + 2) = 2 \quad \text{und} & \frac{\partial g(2, -2)}{\partial y} &= 2 - 2(2 + 2) = -6\end{aligned}$$

Um den Punkt $(2, -2)$ (d.h. $u = x - 2$ und $v = y + 2$) erhalten wir das linearisierte System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen Eigenwerten und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = -4, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -8, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit konvergieren die Lösungen exponentiell gegen den Punkt $(2, -2)$. Die Faktoren sind e^{-4t} in der $+45^\circ$ -Richtung und e^{-8t} in der $(-45)^\circ$ -Richtung.

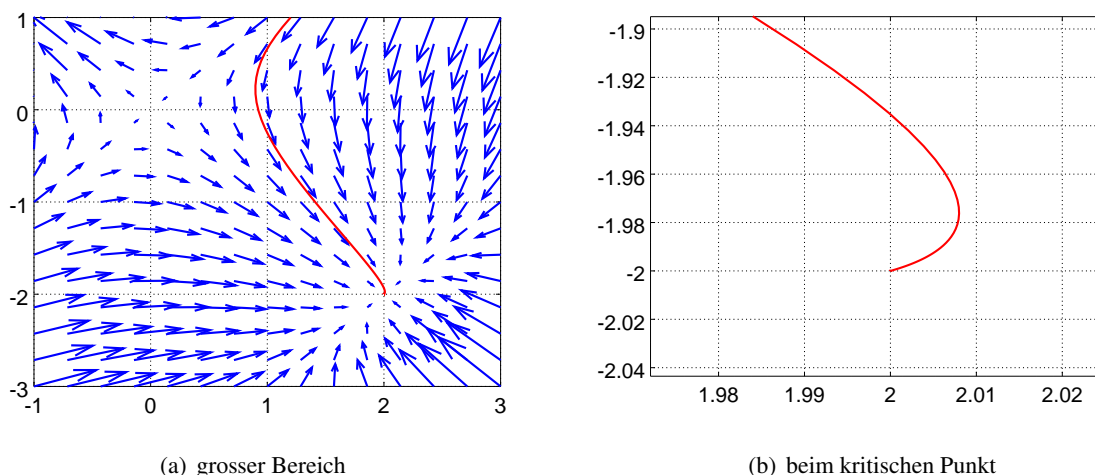


Abbildung 4.27: Vektorfeld mit zwei kritischen Punkten, Verhalten beim kritischen Punkt

- (c) Der Anfangspunkt liegt in der Nähe des Ursprungs, deshalb wird die Lösung in der $(-45)^\circ$ -Richtung vom Ursprung abgestossen, aber er bewegt sich zur Geraden $y = -x$ hin. Aufgrund der obigen Rechnungen konvergiert die Lösung exponentiell gegen den kritischen Punkt $(2, -2)$. Nahe beim kritischen Punkt wird er sich aus der 45° -Richtung annähern (langsamere Konvergenz). Dies ist in Abbildung 4.27 als kleiner „Schlenker“ beim kritischen Punkt sichtbar. Eine Vergrößerung des kritischen Bereichs bestätigt die Rechnung, siehe Abbildung 4.27.

◇

4.4.6 Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Abschnitt betrachten wir Zahlen λ , Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und reelle $n \times n$ -Matrizen.

4-50 Definition : Die Vektoren \vec{v}_i für $i = 1, \dots, m$ heissen **linear unabhängig** falls

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

nur durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ erreicht werden kann.

Die Vektoren \vec{v}_i für $i = 1, \dots, m$ heissen **linear abhängig** falls es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad ,$$

wobei mindestens eines der λ_i von Null verschieden ist.

4-51 Beispiel : Die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, da

$$2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$$

◇

4-52 Satz : Drei Vektoren in \mathbb{R}^3 sind genau dann linear unabhängig, falls sie nicht in einer Ebene liegen.

Der Begriff der linearen Abhängigkeit hat eine enge Beziehung zur Lösbarkeit von homogenen linearen Gleichungssystemen. Wir betrachten die Matrix \mathbf{A} und den Vektor $\vec{\lambda}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Die Vektoren \vec{v}_i für $i = 1, \dots, m$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{v}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix},$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem (n Gleichungen für m Unbekannte)

$$\mathbf{A} \vec{\lambda} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung hat. Es ist ein reines Notationsproblem zu sehen, dass

$$\mathbf{A} \vec{\lambda} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

4-53 Beispiel : Es ist nun leicht einzusehen, dass vier Vektoren in \mathbb{R}^3 linear abhängig sein müssen, da drei lineare homogene Gleichungen für vier Unbekannte immer eine nichttriviale Lösung haben. \diamond

4-54 Definition : Die n Vektoren \vec{v}_i für $i = 1, \dots, n$ in \mathbb{R}^n bilden eine **Basis von \mathbb{R}^n** , falls sich jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als **Linearkombination** der \vec{v}_i schreiben lässt, d.h. für geeignete Zahlen c_i gilt

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i$$

4-55 Satz : Man kann zeigen, dass n Vektoren in \mathbb{R}^n genau dann eine Basis bilden, wenn sie linear unabhängig sind.

4-56 Beispiel : Die n Vektoren \vec{v}_i für $i = 1, \dots, n$ in \mathbb{R}^n sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante der Matrix \mathbf{A} nicht Null ist. Die Vektoren \vec{v}_i bilden die Spalten der Matrix \mathbf{A} . \diamond

4-57 Definition : Sei \mathbf{A} eine (reelle) $n \times n$ -Matrix. Die Zahl λ heisst **Eigenwert** von \mathbf{A} mit **Eigenvektor** $\vec{e} \neq \vec{0}$, falls

$$\mathbf{A} \vec{e} = \lambda \vec{e}$$

Mit den Notationen

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

ist die obige Bedingung äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \vec{e} = \vec{0}$$

Dieses System hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn das **charakteristische Polynom**

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_n)$$

eine Nullstelle hat. $p(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n und hat somit genau n Nullstellen, reell oder komplex, inklusive Multiplizität (Fundamentalsatz der Algebra).

4-58 Satz : Um die Eigenwerte einer Matrix zu finden, muss man die Nullstellen des entsprechenden charakteristischen Polynoms berechnen. Eine $n \times n$ Matrix hat somit genau n Eigenwerte (inklusive Multiplizität).

Es ist zu beachten, dass die Eigenwerte einer reellen Matrix nicht reell sein müssen. So hat z.B. die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

keine reellen Eigenwerte, sondern die beiden komplexen Nullstellen $\pm i$ des entsprechenden Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$

4-59 Satz : Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ ein komplexer $\beta \neq 0$ Eigenwert der reellen Matrix \mathbf{A} mit dem komplexen Eigenvektor $\vec{e} = \vec{u} + i\vec{v}$. Dann ist $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ auch ein Eigenwert von \mathbf{A} mit dem Eigenvektor $\vec{u} - i\vec{v}$.

Es gilt das folgende Resultat

4-60 Theorem : Hat eine reelle $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} n verschiedene reelle Eigenwerte λ_i für $i = 1, \dots, n$, so sind die zugehörigen Eigenvektoren \vec{e}_i linear unabhängig. Die Eigenvektoren bilden eine Basis von \mathbb{R}^n , d.h. jeder Vektor \vec{x} kann in der Form

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{e}_i$$

geschrieben werden für geeignete Zahlen c_i .

Um die Koeffizienten c_i zu berechnen kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden. Dazu sind die Eigenvektoren \vec{e}_i in die Spalten einer Matrix \mathbf{E} zu schreiben. Dann muss das folgende System von linearen Gleichungen gelöst werden.

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \cdot \vec{c} = \mathbf{E} \vec{c} = \vec{x}$$

4–61 Theorem : (Einfache reelle und komplexe Eigenwerte)

Das charakteristische Polynom der reellen Matrix \mathbf{A} habe die einfachen reellen Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n_1$ mit den entsprechenden Eigenvektoren \vec{e}_j . Ebenso seien $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\beta_k > 0$ für $k = 1, \dots, n_2$ einfache komplexe Nullstellen mit Eigenvektoren $\vec{u}_k + i\vec{v}_k$. Weiter sei $n_1 + 2n_2 = n$, d.h. alle Eigenwerte sind oben berücksichtigt. Dann bilden die Vektoren \vec{e}_j , \vec{u}_k und \vec{v}_k eine Basis von \mathbb{R}^n , d.h. jeder reelle Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kann in der Form

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n_1} c_j \vec{e}_j + \sum_{k=1}^{n_2} (r_k \vec{u}_k + s_k \vec{v}_k)$$

geschrieben werden, wobei c_j, r_k, s_k reelle Konstanten sind.

4–62 Beispiel : Die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

entsprechen den Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = \det \begin{bmatrix} (9-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (9-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (9-\lambda) \end{bmatrix} \\ &= (9-\lambda) ((9-\lambda)^2 - 1) - ((9-\lambda) - 1) + (1 - (9-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 240\lambda + 704 \\ &= (11-\lambda)(\lambda-8)^2 \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda_1 = 11$ ein einfacher Eigenwert und $\lambda_2 = 8$ ein doppelter Eigenwert.

Um den zu λ_1 gehörenden Eigenvektor \vec{e} zu finden, muss das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}_3) \vec{e} = \vec{0}$$

gelöst werden. Mit der Notation $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ gibt es eine nichttriviale Lösung von

$$\begin{aligned} -2e_1 + 1e_2 + 1e_3 &= 0 \\ 1e_1 - 2e_2 + 1e_3 &= 0 \\ 1e_1 + 1e_2 - 2e_3 &= 0 \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Gauss–Jordan Verfahren erhält man durch Zeilenoperationen die erweiterten Matrizen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Daraus liest man ab, dass $e_2 = e_3$ und $e_1 = e_3$. Eine der Komponenten von \vec{e} kann frei gewählt werden. Setzen wir $e_3 = 1$, so ergibt sich $\vec{e} = (1, 1, 1)$. \diamond

4.5 Anwendungen

4.5.1 Ein Temperaturmessproblem

Eine metallene Hohlkugel mit Aussendurchmesser 1 m und einer Wanddicke von 10 cm ist vollständig gefüllt mit einer heißen Flüssigkeit, die gut gerührt ist. An der Kugeloberfläche wird eine Temperatur von 40°C gemessen und in einer Tiefe von 5 cm finden Sie mittels einer Sonde eine Temperatur von 80°C . Wie heiß ist die Flüssigkeit?

Tipp: Betrachten Sie den Energiefluss durch Kugelschalen mit verschiedenem Radius.

Lösung : Die Temperatur T wird von Radius r abhängig sein. Es gilt:

- Die Energieflussdichte ist proportional zur Ableitung der Temperatur (Gesetz von Fourier).
- Der Gesamte Energiefluss durch eine Sphäre Radius r muss unabhängig von r sein (Energieerhaltung).

Somit gilt

$$4 \pi r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} = c$$

oder einfacher

$$\frac{\partial}{\partial r} T(r) = \frac{c_1}{r^2}$$

Diese Bedingung kann nun integriert werden und führt zu

$$T(r) = T(1) + \int_1^r \frac{\partial T(s)}{\partial s} ds = 40 - \frac{c_1}{r} + c_1 = 40 - \frac{c_1(1-r)}{r}$$

Wegen $T(0.95) = 40$ gilt

$$80 = 40 - \frac{c_1(1-0.95)}{0.95} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -760$$

Somit ist

$$T(0.9) = 40 - \frac{c_1(1-0.9)}{0.9} = 40 + \frac{76}{0.9} \approx 124$$

Somit ist die Temperatur bei Radius $r = 0.9 \text{ m}$ ca. 124° .

4.5.2 Von einem Tisch fallende Kette

4-63 Beispiel :

Eine Kette der Länge L und Masse M gleitet reibungsfrei über eine Tischkante hinab. Zur Zeit $t = 0$ sei die Kette in Ruhe und über den Tisch ausgestreckt. Ein Stück der Länge l_0 hängt bereits über die Tischkante. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie sie mit Hilfe von MATLAB/Octave.



Lösung : Die Masse pro Länge ist gegeben durch $\rho = \frac{M}{L}$. Die zu beschleunigende (träge) Masse ist immer M , die beschleunigende (schwere) Masse ist $\rho x(t)$, wobei $x(t)$ die Länge des über die Tischkante hängenden Stücks ist. Das Gesetz von Newton ergibt also

$$M \ddot{x}(t) = \begin{cases} g \rho x(t) & \text{falls } x(t) \leq L \\ g \rho L = g M & \text{falls } x(t) \geq L \end{cases}$$

Im Prinzip kann diese Differentialgleichung exakt gelöst werden, indem die Fallunterscheidung explizit gemacht wird.

1. Falls $x(t) \leq L$ so ist die Gleichung $\ddot{x}(t) = \frac{\rho g}{M} x(t)$ zu untersuchen. Die exakte Lösung ist

$$x(t) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\rho g}{M}} t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho g}{M}} t\right)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Anschliessend ist zu berechnen zu welchem Zeitpunkt t_{end} die Bedingung $x(t_{end}) = L$ erfüllt ist. Die Endwerte zu diesem Zeitpunkt sind als Startwerte für den zweiten Teil zu verwenden.

2. Falls $x(t) \geq L$ so ist die Gleichung $\ddot{x}(t) = g$ zu untersuchen. Dies ist die Situation des freien Falls und kann leicht gelöst werden.

Das Verfahren ist klar in der Kategorie mühsam und wir versuchen ein numerisches Verfahren zu verwenden. Der Code unten verwendet den Algorithmus `ode45()` von Octave/MATLAB.

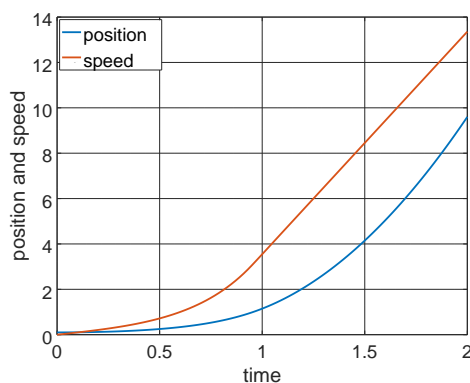
Octave

```
1; % assure script file
function res = ODE(t,x)
    M = 1; L = 1; g = 9.81;
    if x(1) <= L    res = [x(2); g*M/L*x(1)];
    else           res = [x(2); g];
end%if
end%function

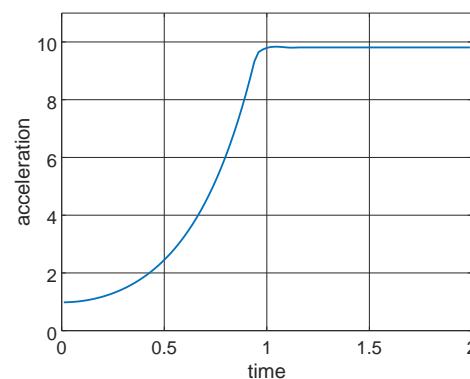
t = linspace(0,2,100);
[t,x] = ode45(@ODE,t,[0.1;0]);

figure(1)
plot(t,x)
xlabel('time'); ylabel('position and speed')
legend('position','speed','location','northwest')

figure(2)
a = diff(x(:,2))./diff(t);
plot(t(1:end-1)+diff(t)/2,a)
axis([0 2 0 11])
xlabel('time'); ylabel('acceleration')
```



(a) Position und Geschwindigkeit



(b) Beschleunigung

Abbildung 4.28: Vom Tisch fallende Kette



4–64 Beispiel : Eine Kette der Länge L und Masse M gleitet reibungsfrei über eine Tischkante hinab. Zu Zeit $t = 0$ sei die Kette in Ruhe und auf dem Rand der Tisches gelagert. Betrachten Sie nur den Fall einer noch nicht vollständig abgewickelten Kette und beginnen Sie mit der Länge 0. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und versuchen Sie die Lösung zu finden.

Lösung : Die Aufgabe ist sehr ähnlich zur vorangehenden Aufgabe, aber die zu beschleunigende Masse $m(t)$ hängt jetzt auch von der Zeit t ab. Das Newton'sche Gesetz $F = m a$ ist zu ersetzen durch die Beziehung zwischen Kraft und Impulsänderung pro Zeit. Es gilt

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} p(t) \\ F(t) &= g m(t) = g \rho x(t) \\ p(t) &= m(t) v(t) = m(t) \dot{x}(t) = \rho x(t) \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$g \rho x(t) = \frac{d}{dt} (\rho x(t) \dot{x}(t)) = \rho (\dot{x}(t) \dot{x}(t) + x(t) \ddot{x}(t))$$

Nach Division durch ρ erhalten wir eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Länge $x(t)$

$$x(t) \ddot{x}(t) + (\dot{x}(t))^2 - g x(t) = 0$$

oder auch

$$\ddot{x}(t) + \frac{(\dot{x}(t))^2}{x(t)} - g = 0$$

Nun versuchen wir verschiedene Lösungsansätze:

1. Lösung erraten. (Viel Glück)
2. *Mathematica* kann keine exakte Lösung finden.

Mathematica
<pre>DSolve[x''[t] + x'[t]*x'[t]/x[t] - g==0,x[t],t] . DSolve::dnim: Built-in procedures cannot solve this differential equation. . 2 x'[t] DSolve[-g + ----- + x''[t] == 0, x[t], t] x[t]</pre>

3. Reihenansatz

Wir versuchen den Ansatz

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

Wegen den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ gilt $a_0 = a_1 = 0$ und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \\ \dot{x}(t) &= 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 + \dots \\ \ddot{x}(t) &= 2 a_2 + 6 a_3 t + 12 a_4 t^2 + \dots \\ x(t) \ddot{x}(t) &= (a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) (2 a_2 + 6 a_3 t + 12 a_4 t^2 + \dots) \\ &= 2 a_2^2 t^2 + 8 a_2 a_3 t^3 + (14 a_2 a_4 + 6 a_3^2) t^4 + \dots \\ (\dot{x}(t))^2 &= (2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 + \dots)^2 \\ &= 4 a_2^2 t^2 + 12 a_2 a_3 t^3 + (16 a_2 a_4 + 9 a_3^2) t^4 + \dots \\ -g x(t) &= -g a_2 t^2 - g a_3 t^3 - g a_4 t^4 - \dots \end{aligned}$$

Damit die Differentialgleichung gelöst ist, muss die Summe der drei letzten obigen Terme 0 ergeben, d.h.

$$(2a_2^2 + 4a_2^2 - g a_2) t^2 + (8a_2 a_3 + 12a_2 a_3 - g a_3) t^3 + (14a_2 a_4 + 16a_2 a_4 + 6a_3^2 - g a_4) t^4 + \dots = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_2 (2a_2 + 4a_2 - g) &= 0 \\ a_3 (8a_2 + 12a_2 - g) &= 0 \\ 14a_2 a_4 + 16a_2 a_4 + 6a_3^2 - g a_4 &= 0 \\ \dots &= 0 \end{aligned}$$

Diese System hat offensichtlich die triviale Lösung $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$. Die erste Gleichung wird aber auch gelöst durch $a_2 = g/6$. Dann **muss** aber wegen der zweiten Gleichung $a_3 = 0$ sein. Wegen der dritten Gleichung muss auch $a_4 = 0$ sein. Diese Rechnung könnte fortgesetzt werden. Man kommt auf die Lösung

$$x(t) = \frac{g}{6} t^2$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung kann man leicht überprüfen, dass eine exakte Lösung vorliegt.

4. Numerische Lösung mit *Octave*. Genau wie im vorangehenden Beispiel kann die Differentialgleichung numerisch gelöst werden. Wegen der Division durch 0 kann nicht mit $x(0) = 0$ gestartet werden, sondern wir verwenden $x(0) = 0.01$.

Octave

```
1; %assure script file

function res = ODE(t,x)
    M = 1; L = 1; g = 9.81;
    res = [x(2); g-x(2)^2/x(1)];
end%function

t = linspace(0,2,100);
[t,x] = ode45(@ODE,t,[0.01;0]);

figure(1)
plot(t,x)
xlabel('time'); ylabel('position and speed')
legend('position','speed','location','northwest')
```

Die Lösung in Abbildung 4.29 bestätigt die obige, exakte Lösung.



4.5.3 Elektrische Schaltkreise, Kirchhoff'sche Regeln

Die passiven Schaltungselemente Widerstand, Induktivität und Kapazität sind üblicherweise durch die Strom-Spannungsbeziehung definiert, die in dem entsprechenden Element gilt.

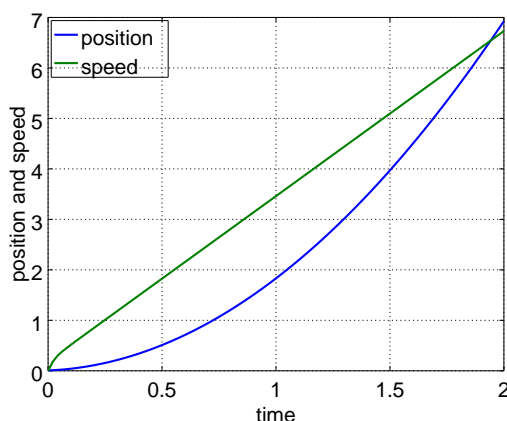

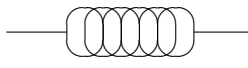
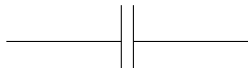


Abbildung 4.29: Vom Tisch fallende Kette, mit Octave

Netzwerkelement		Spannung v	Strom i	Leistung p
	Einheit	Volt	Ampère	Watt
	Ohm (Ω)	$v = iR$	$i = \frac{v}{R}$	$p = iv = i^2 R$
	Henry (H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt$	$p = iv = L i \frac{di}{dt}$
	Farad (F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = iv = C v \frac{dv}{dt}$

Zusätzlich betrachten wir noch Spannungsquellen und Stromquellen bei denen Spannung (resp. Strom) gegeben sind.



Diese Grundelemente können nun kombiniert werden zu Schaltkreisen. Wir werden wenige Beispiele kennen lernen. Viele wichtige Schaltkreise sind beschrieben in [\[HoroHill80\]](#). Für das Aufstellen der Gleichungen sind die **Regeln von Kirchhoff** ausserordentlich nützlich.

Erste Regel von Kirchhoff:

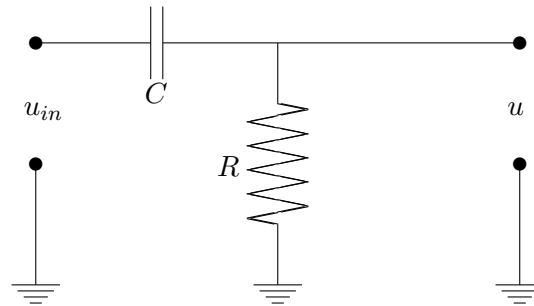
Die Summe (mit Vorzeichen) aller Ströme in einen Knotenpunkt hinein ist Null.

Zweite Regel von Kirchhoff:

Die Summe aller Spannungen über eine geschlossene Kurve ist Null.

Analoge Integration und Differentiation

Betrachte den Schaltkreis



Für den Strom i durch die Kapazität C gilt:

$$i = C \frac{d}{dt} (u_{in} - u) = \frac{u}{R}$$

Dies führt zur linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung für $u(t)$

$$\dot{u}(t) = \frac{-1}{RC} u(t) + \dot{u}_{in}(t) \quad u(0) = u_0$$

mit der gegebenen Eingangsspannung $u_{in}(t)$. Die Lösung ist gegeben durch

$$u(t) = u_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \int_0^t \exp\left(\frac{\tau-t}{RC}\right) \dot{u}_{in}(\tau) d\tau = u_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \int_0^t \exp\left(\frac{-s}{RC}\right) \dot{u}_{in}(t-s) ds$$

Für die letzte Umformung wurde die Substitution $s = t - \tau$ verwendet. Diese Gleichung leiten wir ab bezüglich t und erhalten

$$\dot{u}(t) = \frac{-1}{RC} u_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \dot{u}_{in}(t) - \int_0^t \exp\left(\frac{-s}{RC}\right) \ddot{u}_{in}(t-s) ds$$

Nun betrachten wir nur Eingangssignale bei denen $|\dot{u}_{in}(t)|$ und $|\ddot{u}_{in}(t)|$ beschränkt sind durch eine Konstante M . Wegen

$$\int_0^t \exp\left(\frac{-s}{RC}\right) ds = RC (1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)) \leq RC \quad \text{für } t \geq 0$$

gilt dann für $t \gg RC$

$$|\dot{u}(t)| \approx \left| \int_0^t \exp\left(\frac{-s}{RC}\right) \ddot{u}_{in}(t-s) ds \right| \leq RC \int_0^t \exp\left(\frac{-s}{RC}\right) M ds \leq RCM$$

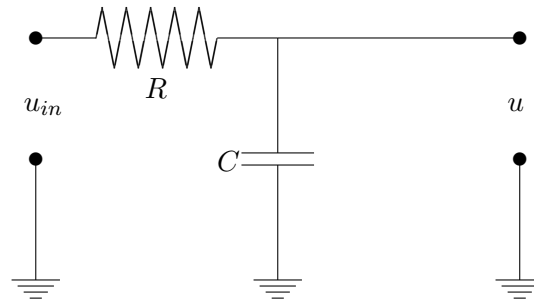
Da die ersten beiden Terme sehr klein werden. Ist das Produkt RCM sehr klein, so können wir in der Differentialgleichung ablesen, dass

$$u(t) \approx RC \dot{u}_{in}(t).$$

d.h. das Ausgangssignal $u(t)$ entspricht der Ableitung der Eingangsspannung. Wir haben einen **analogen Differentierer** gefunden.

Die Bedingung RCM klein zeigt, dass dieser Differentierer für Signale mit hohen Frequenzen ($\cos(\omega t)$ mit $\omega \gg 1$) nicht funktioniert und auch erst nach einer Einschwingzeit ($t \gg RC$) stabil ist.

Analoge Überlegungen können für den untenstehenden Schaltkreis durchgeführt werden.



Für die Spannung $u_{in} - u$ über dem Widerstand R und den Strom i durch R gilt:

$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{u_{in} - u}{R}$$

Dies führt auch zu einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung für $u(t)$

$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{RC} u(t) + \frac{1}{RC} u_{in}(t) \quad u(0) = u_0$$

mit der Lösung

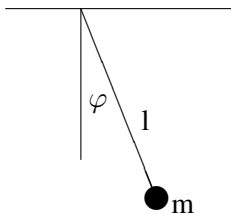
$$u(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{RC}\right) u_{in}(\tau) d\tau.$$

Unter der Annahme $RC \gg t$, können die Exponentialfunktionen approximativ durch 1 ersetzt werden und wir erhalten

$$u(t) \approx u_0 + \int_0^t u_{in}(\tau) d\tau,$$

d.h. das Ausgangssignal $u(t)$ entspricht dem Integral der Eingangsspannung. Wir haben einen **analogen Integrator** gefunden.

4.5.4 Pendel



Das skizzierte Fadenpendel mit der Länge l und der Masse m schwingt, d.h. der Auslenkwinkel φ wird eine Funktion von der Zeit t sein. Die Gravitationskraft \vec{F} wirkt senkrecht nach unten mit einer Stärke von $m g$. Somit ist die Tangentialkomponente entlang der durch das Pendel beschriebenen Kreisbahn $-m g \sin \varphi$. Das muss nach dem Newton'schen Gesetz gleich der Tangentialbeschleunigung sein und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin \varphi.$$

Das ist eine **nichtlineare** gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, wir schreiben sie um zu

$$\ddot{x} = -k \sin x \quad \text{mit} \quad x = \varphi, \quad k = \frac{g}{l}.$$

Lineares Modell

Für $|x| \ll 1$ gilt $\sin x \approx x$ und somit kann die obige Gleichung approximativ ersetzt werden durch

$$\ddot{x}(t) = -k x(t)$$

mit einer positiven Konstanten k . Diese Gleichung hat die bekannte allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(t \sqrt{k} + \psi) \quad .$$

Die Periode dieser Lösung ist $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Nichtlineares Modell

Hier stellen sich einige interessante Fragen.

1. Die nichtlineare Gleichung ist nicht in geschlossener Form lösbar. Verwende eine geeignete numerische Methode um Lösungen für spezielle Anfangswerte zu finden. Die Anfangsgeschwindigkeit sei 0.

- Wähle eine „kleine“ Anfangsauslenkung.
- Wähle eine „mässige“ Anfangsauslenkung.
- Wähle eine „grosse“ Anfangsauslenkung.
- Wähle eine „sehr grosse“ Anfangsauslenkung.

Vergleiche die Resultate mit dem linearisierten Problem.

2. Finde die ersten paar Terme der Reihenentwicklung der Lösung mittels *Mathematica*.
3. Finde eine Formel für die exakte Pendeldauer, abhängig vom maximalen Auslenkungswinkel. Das Resultat wird ein elliptisches Integral sein, welches nicht in geschlossener Form lösbar ist.
 - Finde einige Werte numerisch.
 - Finde die Reihenentwicklung dieses Integrales.
 - Finde die Pendeldauer, indem eine numerische Lösung der Differentialgleichung untersucht wird.

Periode bestimmen mittels numerischer Lösung der Differentialgleichung:

Um die Periodendauer der Pendels als Funktion der Anfangsauslenkung φ_0 zu bestimmen kann man folgendermassen vorgehen:

1. Wähle die numerischen Werte für die Länge L und die Gravitationskonstante g . Mit der akademischen Wahl von 1 ist die Periode für kleine Anfangswinkel sehr nahe bei 2π .
2. Wähle einen kleinen Startwinkel φ_0 .
3. Verwende den Befehl `ode45()` um die Lösung numerisch zu bestimmen. Die Lösung kann auch in einer Graphik dargestellt werden.
4. Nun ist die Gleichung $\varphi(t) = 0$ nach t aufzulösen und die Lösung ist ein Viertel der Periode.
5. Sind die obigen Schritte erfolgreich ausgeführt, so kann in einer Schleife die Rechnung für verschiedene Startwinkel ausgeführt werden und das Resultat graphisch dargestellt werden.

PendelPeriodODE.m

```
L = 1; g = 1;
ODE = @(t,x) [x(2); -sin(x(1))];
t = linspace(0,3,100);
phi0 = 0.1;
[t,x] = ode45(ODE,t,[phi0,0]);

figure(1)
plot(t,x)
```

```

xlabel('time t')

4*fzero(@(ti)interp1(t,x(:,1),ti),[0,3])

phi_list = linspace(0,1,20)+1e-3;
T = zeros(size(phi_list));
for ii = 1:length(phi_list)
    t = linspace(0,3,1000);
    phi0 = phi_list(ii);
    [t,x] = ode45(ODE,t,[phi0,0]);
    T(ii) = 4*fzero(@(ti)interp1(t,x(:,1),ti),[0,3]);
end%for

figure(2)
plot(phi_list*180/pi,T)
xlabel('initial angle [deg]'); ylabel('period T [sec]')

```

Periode bestimmen mittels Energieerhaltung:

Die potentielle und kinetische Energie des Pendels sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 U_{pot}(\varphi) &= m g l (1 - \cos(\varphi)) \\
 U_{kin}(\dot{\varphi}) &= \frac{m}{2} (l \dot{\varphi})^2 = \frac{m l^2}{2} (\dot{\varphi})^2
 \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir eine Bewegung mit $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$. Aufgrund der Energieerhaltung gilt

$$\begin{aligned}
 U_{pot}(\varphi_0) &= U_{pot}(\varphi(t)) + U_{kin}(\dot{\varphi}(t)) \\
 m g l (1 - \cos(\varphi_0)) &= m g l (1 - \cos(\varphi(t))) + \frac{m l^2}{2} (\dot{\varphi}(t))^2 \\
 -g \cos(\varphi_0) &= -g \cos(\varphi(t)) + \frac{l}{2} (\dot{\varphi}(t))^2 \\
 (\dot{\varphi}(t))^2 &= \frac{2g}{l} (\cos(\varphi(t)) - \cos(\varphi_0)) \geq 0
 \end{aligned}$$

Da die Ableitung $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ die Änderungsrate des Winkels bezüglich der Zeit ist, können wir daraus herleiten, dass $\frac{\Delta t}{\Delta\varphi} \approx \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}}$. Somit erhalten wir ein Integral um die Periode T zu bestimmen.

$$\frac{1}{4} T = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)}} d\varphi$$

Das ist ein elliptische Integral⁶. Beachte, dass es ein uneigentliches Integral ist, da bei $\varphi = \varphi_0$ durch 0 dividiert wird.

Das obige Integral kann nun mit *Octave*/MATLAB numerisch berechnet werden und eine Graphik mit der Periodendauer als Funktion des Anfangswinkel φ_0 erstellt werden.

PendelPeriod.m

```

% script to evaluate the period of a pendulum, by elliptic integrals
ff = @(phi,phi0) 1./sqrt(cos(phi)-cos(phi0));

% for one small value of phi0
phi0 = 0.1;
%quad(@(phi) ff(phi,phi0),0,phi0)
4/sqrt(2)*integral(@(phi) ff(phi,phi0),0,phi0)

```

⁶Numerische Berechnung mit *Octave* in PendelPeriod.m

```
% for a list of values
phi0 = linspace(0,pi-2,40)+0.001;
T = zeros(size(phi0));
for ii = 1:length(phi0)
    T(ii) = 4/sqrt(2)*integral(@(phi) ff(phi,phi0(ii)),0,phi0(ii));
end%for

figure(1)
plot(phi0/pi*180,T)
xlabel('initial angle [deg]'); ylabel('period T [sec]')
```

Für die Approximation der kleinen Winkel kann die potentielle Energie durch

$$U_{\text{pot}}(\varphi) = m g l \frac{1}{2} \varphi^2$$

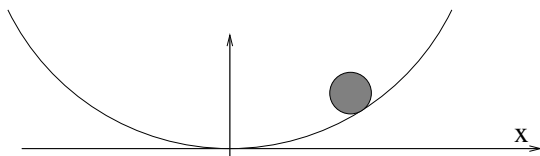
approximiert werden. Das entspricht auch der Taylorapproximation der trigonometrischen Funktion $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$. Das führt auf die Periode T mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi_0^2}} d\varphi = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi \\ &\quad \text{Substitution } \varphi = \varphi_0 \sin(\alpha), \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \varphi_0 \cos \alpha \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_0^2 \sin^2 \alpha}} \varphi_0 \cos \alpha d\alpha = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} 1 d\alpha = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{unabhängig von } \varphi_0 \end{aligned}$$

In [TenePoll85, p.334] wir ein Pendel mit exakt harmonischer Schwingung untersucht, was zu einer Zykloide führt.

4.5.5 Abrollen von Zylindern und Kugeln

4–65 Beispiel : Ein Zylinder mit gegebenen Daten werde in einer grossen Röhre so abgerollt, dass seine Achse auf einer Kurve $y = k x^2$ liegt. Hierbei ist $k > 0$ gegeben. Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes ist die Differentialgleichung für die horizontale Koordinate x der Zylinderachse zu finden.



L = Länge des Zylinders
 R = Radius des Zylinders
 M = Masse des Zylinders

Lösung: Die potentielle Energie V ist gegeben durch

$$V = g M y = g k M x^2$$

Die kinetische Energie besteht aus zwei Beiträgen: Translations- und Rotationsenergie. Wegen $y(t) = k x^2(t)$ gilt $\dot{y}(t) = 2 x(t) \dot{x}(t)$ und somit ist die Geschwindigkeit v der Achse gegeben durch

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + (2 k x \dot{x})^2 = (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2$$

und somit die Translationsenergie durch

$$E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{M}{2} (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2$$

Das Massenträgheitsmoment des Zylinder bezüglich der Hauptachse ist⁷ $J = \frac{1}{2} M R^2$ und wegen der Rollbedingung gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω $\omega R = v$. Also ist die Rotationsenergie gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} M (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2$$

Die kinetische Energie ist somit

$$E = E_{trans} + E_{rot} = \frac{3}{4} M (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2$$

Da im Gesamtsystem die Energie erhalten bleibt (keine Reibung) gilt

$$\frac{d}{dt} \left(g k M x^2 + \frac{3}{4} M (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2 \right) = 0$$

Differenziert man diesen Ausdruck und dividiert durch $2 M \dot{x}$ so ergibt sich

$$g k x(t) + \frac{3}{4} ((1 + 4 k^2 x^2) \ddot{x}(t) + 4 k^2 x(t) (\dot{x}(t))^2) = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie kann umgeschrieben werden zu

$$\ddot{x}(t) = \frac{-4}{3 (1 + 4 k^2 x(t)^2)} (g k x(t) + 3 k^2 x(t) (\dot{x}(t))^2)$$

Für kleine Werte der Auslenkung und Geschwindigkeit ($4 k^2 x^2 \ll 1$ und $3 k^2 \dot{x}^2 \ll k g$) finden wir die **Approximation** (Stichwort: Linearisierung)

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{-4}{3} g k x(t)$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{4 k g}{3}} t + \delta\right)$$

Diese Lösung ist periodisch mit Periode

$$T = \pi \sqrt{\frac{3}{k g}}$$

Die Periode T ist also unabhängig von M und R , kann aber durch geeignete Wahl von k (Krümmung der Kurve) beeinflusst werden.

Die Periode kann auch mit Hilfe eines Integrals bestimmt werden. Startet der Zylinder bei $x = x_0$ in Ruhe so kann die Energie bestimmt werden und man erhält

$$g k M x^2 + \frac{3}{4} M (1 + 4 k^2 x^2) \dot{x}^2 = g k M x_0^2$$

und somit für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}^2 = \frac{4 g k}{3} \frac{x_0^2 - x^2}{1 + 4 k^2 x^2}$$

7

$$J = \iiint_D \rho r^2 dV = \int_0^R \rho L 2 \pi r r^2 dr = \rho L 2 \pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} (\rho \pi L R^2) R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

Das führt zu einem Integral für die Periode T .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T &= \int_0^{x_0} \frac{1}{\dot{x}} dx = \sqrt{\frac{3}{4 g k}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + 4 k^2 x^2}{x_0^2 - x^2}} dx \\ &\quad \text{Substitution } x = x_0 \sin z \\ &= \sqrt{\frac{3}{4 g k}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + 4 k^2 x_0^2 \sin^2(z)}{x_0^2 - x_0^2 \sin^2(z)}} x_0 \cos(z) dz \\ &= \sqrt{\frac{3}{4 g k}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4 k^2 x_0^2 \sin^2(z)} dz \end{aligned}$$

Man beachte, dass das erste Integral bezüglich x ein singuläres Integral ist, da bei $x = x_0$ durch 0 dividiert wird. Mit der Substitution $x = x_0 \sin(z)$ verschwindet diese Division durch 0. Das resultierende Integral kann nicht exakt berechnet werden, es ist ein elliptisches Integral.

Falls man a-priori weiss, dass $k^2 x_0^2 \ll 1$ so erhält man

$$\frac{1}{4} T \approx \sqrt{\frac{3}{4 g k}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1} dz = \sqrt{\frac{3}{4 g k}} \frac{\pi}{2} \implies T \approx \pi \sqrt{\frac{3}{g k}}$$

Das stimmt mit dem durch Linearisierung der Differentialgleichung erhaltenen Resultat überein. Falls die Approximation $k^2 x^2 \ll 1$ nicht gültig ist, so kann das Integral numerisch bestimmt werden.

ZylinderRollPeriod.m

```
% script to evaluate the period of a cylinder rolling by an integral
g = 9.81; k = 1;

ff = @(x,x0) sqrt(1+4*k^2.*x.^2)./sqrt(x0^2-x.^2);
ff2 = @(z,x0) sqrt(1+4*k^2.*x0^2*sin(z).^2);

% for one small value of x0
x0 = 0.01;
%quad(@(phi) ff(phi,phi0), 0, phi0)
Period_Integral = sqrt(12/(k*g))*integral(@(x) ff(x,x0), 0, x0)
Period_Integral2 = sqrt(12/(k*g))*integral(@(z) ff2(z,x0), 0, pi/2)
Period_Approx = pi*sqrt(3/(k*g))

% for a set of values
x0 = linspace(0, 0.5, 40)+0.001;
T = zeros(size(x0));
for ii = 1:length(x0)
% T(ii) = sqrt(12/(k*g))*integral(@(x) ff(x,x0(ii)), 0, x0(ii));
T(ii) = sqrt(12/(k*g))*integral(@(z) ff2(z,x0(ii)), 0, pi/2);
end%for

figure(1)
plot(x0,T)
xlabel('amplitude x_0 [m]'); ylabel('period T [sec]')
xlim([0,max(x0)])
```



Die obige Fragestellung kann auch für das Rollen einer Kugel untersucht werden. Die einzige Änderung ist der Wert für das Massenträgheitsmoment J^8 der Kugel.

⁸

$$J = \iiint_D \rho r^2 dV = \rho \int_0^R 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2}{15} R^5 = \frac{4\pi \rho}{3} R^3 \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

4.5.6 Populationsmodelle

Aufstellen der Gleichung

Sei $P(t)$ die Anzahl einer Tierart auf einer Insel zur Zeit t . Wir untersuchen ob, und wie, sich die Anzahl der Tiere mit der Zeit ändert. Einer der Gründe ist Fortpflanzung. Es ist nicht unvernünftig anzunehmen, dass die Anzahl der Individuen die pro Zeiteinheit geboren werden proportional ist zu $P(t)$. Somit ergibt sich für die Änderungsrate

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

für eine positive Konstante α (Geburtsrate). Selbstverständlich werden auch Tiere sterben (Sterberate β). Das führt zu

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t) - \beta P(t)$$

Die beiden obigen Gleichungen gehen davon aus, dass ein unbeschränkter Vorrat an Nahrung vorhanden ist. Gehen wir davon aus, dass die Insel eine Maximalbevölkerung von $P = M$ verkraften kann, so wird die Geburtsrate α nicht mehr konstant sein, sondern von P abhängig sein. Ist P nahe bei M , so muss α immer kleiner werden. Eine einfache Formel mit diesem Verhalten ist

$$\alpha = k (M - P) .$$

Das führt auf die Gleichung

$$\dot{P}(t) = k (M - P(t)) P(t) - \beta P(t) = k_1 P(t) - k_2 P(t)^2$$

mit

$$k_2 = k \quad \text{und} \quad k_1 = k M - \beta .$$

Dies ist das sogenannte **logistische Modell**.

Lösen der Gleichungen

Das Verhalten der Lösungen der obigen Gleichungen kann mit verschiedenen Methoden untersucht werden.

1. Zeichnen Sie die entsprechenden Vektorfelder und skizzieren Sie einige Lösungen.
2. Versuchen Sie analytische Lösungen für die Gleichungen zu finden, wobei $P(0) = P_0$ die ursprüngliche Bevölkerung sei.
3. Verwenden Sie eine geeignete numerische Methode und versuchen Sie Graphen von Lösungen zu zeichnen (mit Taschenrechner oder Computer).

Entspricht das Verhalten der Lösungen dem tatsächlichen Verhalten der Population unter den gegebenen Annahmen?

Volterra–Lotka: Räuber Beute Modelle.

4.5.7 Hängende Kabel

4–66 Beispiel : (Maximale Länge einer Hängebrücke)

Ein Seil soll aus einem gegebenen Material so gebildet werden, dass eine möglichst grosse Distanz damit überbrückt werden kann. Das Seil reisst, sobald die Spannung (Kraft pro Fläche) den kritischen Wert σ_{max} überschreitet. Für diese theoretische Untersuchung wird nur das Eigengewicht des Seiles berücksichtigt. Es ist erlaubt (erwünscht), das Seil in der Mitte dünner zu machen, da dort weniger Last zu tragen ist. Welche Strecke kann maximal überbrückt werden?

Lösung: Viele Überlegungen sind identisch zum Beispiel 24 der Kettenlinie auf Seite 18.

Die Funktion $y = f(x)$ soll die Höhe eines Kabels über Boden angeben. Sei $r(x)$ der Radius des Seiles. Die Massendichte des Materials sei ρ . Das Kabel ist ideal flexibel, d.h es lässt sich beliebig leicht biegen

und knicken. Entlang des Kabels wird eine Kraft $\vec{T}(x)$ wirken, die immer tangential zum Kabel sein muss, da sich das Kabel sonst bewegen würde. Bei der optimalen Lösung wird entlang des ganzen Seiles exakt die maximale Spannung σ_{max} feststellbar sein. Also gilt

$$T(x) = \|\vec{T}(x)\| = \pi r^2(x) \sigma_{max}$$

In Abbildung 4.30 ist der Kabelabschnitt zwischen x und $x + h$ gezeichnet, zusammen mit den auf dieses Kabelstück wirkenden Kräften. Einzig die Gewichtskraft ist nicht eingezeichnet. Wir verwenden die Notation

$$\vec{T}(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{T}(x+h) = \begin{pmatrix} T_1(x+h) \\ T_2(x+h) \end{pmatrix}$$

für die Komponenten der Kraftvektoren.

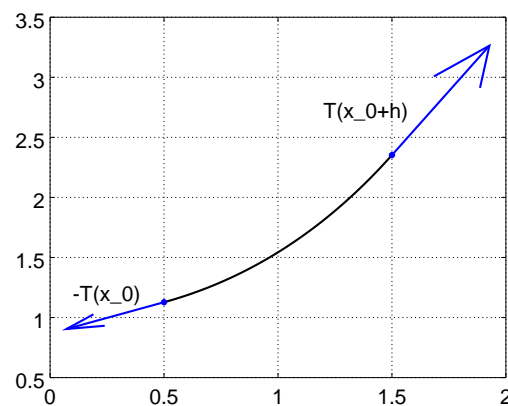


Abbildung 4.30: Herleitung der Gleichung der Kettenlinie

Die Masse des Kabelstückes zwischen x und $x + h$ ist gegeben durch

$$\Delta m = \int_x^{x+h} \pi \rho r^2(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz = \pi \rho r^2(\xi) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h$$

für ein geeignetes ξ zwischen x und $x + h$. Somit wirkt eine vertikale Gewichtskraft der Stärke

$$\Delta F_G = -\pi g \rho r^2(\xi) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h$$

Nun können wir die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen und vertikalen Komponenten aufstellen und erhalten

$$\begin{aligned} T_1(x+h) - T_1(x) &= 0 \\ T_2(x+h) - T_2(x) &= +\pi g \rho r^2(\xi) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} h \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass die Horizontalkomponente konstant sein muss, d.h. $T_1(x) = T_1$. In der zweiten Gleichung dividiert man durch h und bildet anschliessend den Grenzwert $h \rightarrow 0$ und erhält so die Bedingung

$$\frac{d}{dx} T_2(x) = \pi g \rho r^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Da die Kraft in die Richtung des Kabel zeigen muss, gilt auch

$$f'(x) T_1 = T_2(x) \quad \text{und somit} \quad T(x) = T_1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Dies kann nun kombiniert werden mit

$$T(x) = \pi r^2(x) \sigma_{max}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} T_1 f''(x) &= \frac{d}{dx} T_2(x) = \pi g \rho r^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \\ &= g \rho \frac{T(x)}{\sigma_{max}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} = g \rho \frac{T_1}{\sigma_{max}} \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann offensichtlich vereinfacht werden zu

$$f''(x) = \frac{\rho g}{\sigma_{max}} \left(1 + (f'(x))^2 \right)$$

Nun verwenden wir die Substitution $u(x) = f'(x)$ und die Abkürzung $\alpha = \rho g / \sigma_{max}$ um auf die separable Gleichung

$$\frac{d u}{d x} = \alpha \left(1 + u^2(x) \right)$$

zu kommen. Somit sind die Integrale

$$\int \frac{1}{1 + u^2} du = \int \alpha dx$$

aufzulösen. Das führt auf

$$\arctan u = \alpha x + c$$

Mit der Anfangsbedingung $f'(0) = u(0) = 0$ (tiefster Punkt bei $x = 0$) erhalten wir

$$f'(x) = u(x) = \tan(\alpha x) = \tan \left(\frac{\rho g}{\sigma_{max}} x \right)$$

Setzt man $f(0) = 0$ so kann man mit einer einfachen Integration feststellen, dass

$$f(x) = \frac{-1}{\alpha} \ln \cos(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\cos(\alpha x)} = \frac{\sigma_{max}}{\rho g} \ln \frac{1}{\cos\left(\frac{\rho g}{\sigma_{max}} x\right)}$$

Da die Cosinus-Funktion bei $\pi/2$ eine Nullstelle hat, kann man in der obigen Formel ablesen, dass die Steigung des Seiles bei

$$x \approx \frac{\pi \sigma_{max}}{2 \rho g}$$

unendlich sein müsste. Somit kann höchstens eine Wegstrecke von

$$L_{max} = \frac{\pi \sigma_{max}}{\rho g}$$

überbrückt werden. In Tabelle 4.7 sehen Sie Zahlenwerte für einige Materialien. Alle Einträge in der Tabelle berücksichtigen keine Sicherheitsmargen und sind folglich theoretische Resultate. Der letzte Eintrag kommt der Realität wesentlich näher. Er entspricht der zulässigen Spannung für eine im Brückenbau verwendete Stahlsorte. Für Tragseile werden spezielle Materialien eingesetzt.

◇

4.5.8 Flug auf eine Lichtquelle unter konstantem Winkel

Material	Dichte $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Maximalspannung $10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Länge km
Federstahl	7	1700	78
Kupfer	9	400	14
Glas	2.5	50	6.4
Gold	19	270	4.5
Stahl (DIN 1050/1051)	7	150	7

Tabelle 4.7: Maximale Länge von Seilbrücken

4–67 Beispiel : Eine Motte fliege auf die im Koordinatenursprung stehende Kerze los, wobei die Flugbahn und die Richtung zum Ursprung hin einen konstanten Winkel α einschliessen. Die Fluggeschwindigkeit ist normiert auf 1. Wann trifft die Motte die Kerze?

Lösung: Sei $(x(t), y(t))$ eine Parametrisierung der Lösungskurve. Dann ist der Geschwindigkeitsvektor gegeben durch

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

und es muss $\|\vec{v}\| = 1$ gelten. Der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{v} muss konstant gleich α sein.

Rechnung in kartesischen Koordinaten:

Es gilt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = -\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos \alpha$$

und mit der Normalisierung $\|\vec{v}\| = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x} x + \dot{y} y &= -\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos \alpha \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben ein **implizites** System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Es ist nicht offensichtlich, wie dieses System direkt gelöst werden kann. Deshalb versuchen wir auch einen anderen Ansatz.

Rechnung in Polarkoordinaten:

Für Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(\varphi(t)) \\ y(t) &= r(t) \sin(\varphi(t)) \end{aligned}$$

und somit (Kettenregel)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung ergibt die Normalisierung

$$\|\vec{v}\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Die Winkelbedingung führt auf

$$r \dot{r} \cos^2 \varphi - r^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} + r \dot{r} \sin^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} = -\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} r \cos \alpha$$

Durch vereinfachen und einsetzen erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{r} = -1 \cos \alpha$$

Somit gilt

$$r(t) = r(0) - t \cos \alpha$$

Man kann sofort ablesen, dass die Motte die Kerze nach der Zeit

$$t_{\text{end}} = \frac{r(0)}{\cos \alpha}$$

erreicht. Aus der Gleichung

$$1 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

folgt sofort

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1 - \dot{r}^2}{r^2} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{r^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{r^2}$$

und somit

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\pm \sin \alpha}{r(0) - t \cos \alpha}$$

Diese Funktion ist bezüglich t integrierbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \\ &= \varphi(0) + \int_0^t \frac{\pm \sin \alpha}{r(0) - \tau \cos \alpha} d\tau \\ &= \varphi(0) + \left(\frac{\mp \sin \alpha}{\cos \alpha} \ln(r(0) - \tau \cos \alpha) \right) \Big|_{\tau=0}^t \\ &= \varphi(0) \pm \tan \alpha \ln r(0) \mp \tan \alpha \ln(r(0) - t \cos \alpha) \\ &= \text{const} \pm \tan \alpha \ln(r(0) - t \cos \alpha) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich bezüglich der Zeit t das folgende Verhalten

Der Radius $r(t)$ nimmt linear ab

Der Winkel $\varphi(t)$ nimmt logarithmisch zu oder ab.

Die beiden leicht zu behandelnden Spezialfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$ wurden selbstverständlich auch gelöst durch die obigen Rechnungen. Sie können als Kontrolle dienen. \diamond

4.6 Aufgaben

• Aufgabe 4-1:

Finden Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes.

- (a) $\dot{x}(t) = x^2(t)$ mit/avec $x(0) = 1$
- (b) $\ddot{x}(t) = 2x(t)$ mit/avec $x(0) = 1$
- (c) $\ddot{x}(t) = 2x(t) + t$ mit/avec $\dot{x}(0) = 1$

Tipp: verwende $\cosh()$ und $\sinh()$.

Tip: utiliser $\cosh()$ et $\sinh()$.

• **Aufgabe 4–2:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung.

$$\ddot{y}(t) + t^2 \dot{y}(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

Finden Sie die Terme bis und mit t^5 der Reihenentwicklung der Lösung $y(t)$.

Considérer l'équation différentielle suivante.

Calculer les premiers termes de la série de la solution (y inclus le terme t^5).• **Aufgabe 4–3:**

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -x y^2(x) \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 2$$

Examiner l'équation différentielle

(a) Zu bestimmen sind die ersten Terme (bis und mit x^5) der Reihenentwicklung der Lösung $y(x)$.(a) Trouver les premiers termes (y inclus le terme x^5) de la série de Taylor de la solution $y(x)$.(b) Bestimmen Sie $y(1/2)$ mit Hilfe der approximativen Lösung.(b) Calculer $y(1/2)$ à l'aide de l'approximation ci-dessus.• **Aufgabe 4–4:**

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{dy(x)}{dx} = x \cdot y(x) + 1 \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 3$$

Examiner l'équation différentielle

(a) Zu bestimmen sind die ersten Terme (bis und mit x^5) der Reihenentwicklung der Lösung $y(x)$.(a) Trouver les premiers termes (y inclus le terme x^5) de la série de Taylor de la solution $y(x)$.(b) Bestimmen Sie $y(1)$ mit Hilfe der approximativen Lösung.(b) Calculer $y(1)$ à l'aide de l'approximation ci-dessus.Tipp zur Kontrolle $y(1) \approx 6.36$.Tip pour contrôler $y(1) \approx 6.36$.• **Aufgabe 4–5:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$$

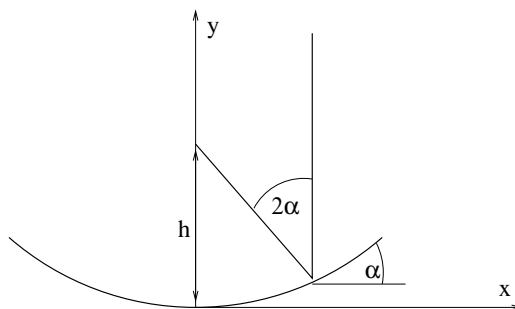
approximativ durch die ersten paar Terme des Taylorpolynoms. Bestimmen Sie $x(0.5)$. Kontrollieren Sie Ihre Antwort mittels *Mathematica* und der leicht zu findenden exakten Lösung $x(t) = \tan t$.• **Aufgabe 4–6:**

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + t^2 x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = a_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

Zu bestimmen sind die **ersten drei von Null verschiedenen Terme**. Die Rechnungen sind exakt auszuführen.• **Aufgabe 4–7:**

In der Figur rechts sehen Sie den Strahlengang eines aus der y -Richtung kommenden Lichtstrahls, der an einem Spiegel reflektiert wird. Alle Lichtstrahlen aus dieser Richtung sollen in einem Punkt fokussiert werden. Der Abstand dieses Punktes liege um h über dem tiefsten Punkt des Spiegels der durch Rotation der Kurve $y = y(x)$ um die y -Achse entsteht.



- (a) Verwenden Sie die Bedingung „Ausfallswinkel=Einfallswinkel“ um eine (implizite) Differentialgleichung für die Funktion $y(x)$ aufzustellen.
- (b) Zeigen Sie, dass diese Gleichung gelöst wird durch $y(x) = p x^2$ für einen geeigneten Wert von p .
- (c) Versuchen Sie die Gleichung in eine explizite Form zu bringen. Verifizieren Sie, dass die Gleichung bei $x = 0$ nicht definiert ist.
- (d) Verwenden Sie die Taylorapproximation von $\sqrt{1+z^2}$ für kleine Werte von z , um die Gleichungen in eine einfachere, approximative Form zu bringen.

•Aufgabe 4–8:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 1 + (t - x)^2, \quad x(0) = 0.5$$

approximativ durch die ersten paar Terme des Taylorpolynoms. Bestimmen Sie $x(1.0)$ approximativ.

•Aufgabe 4–9:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} x(t) = x \cdot (1 - x) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0$$

- (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 2$.
- (b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ und $x_0 = 2$.
- (c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.5$ **graphisch**.
- (d) Verwenden Sie 2 Schritte des numerischen Verfahrens von Euler um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 3$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen.

•Aufgabe 4–10:

(Verfahren von Heun / Verbessertes Euler–Verfahren)

Für ein Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

ist die numerische Approximationsformel von Heun gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + h, x_i + k_1 h) \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

Für den einfacheren autonomen Fall

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

ergibt dies

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} (f(x(t)) + f(x(t) + h f(x(t))))$$

Zeigen Sie, dass der lokale Fehler dieses Verfahrens von der Ordnung h^3 ist. Der globale Approximationsfehler ist somit von der Ordnung h^2 .

• **Aufgabe 4–11:**

Untersuchen Sie die Gleichung

Examiner l'équation

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) \quad \text{avec/mit} \quad x(0) = 2$$

- | | |
|--|---|
| (a) Verwenden Sie 2 Schritte des Verfahrens von Heun um $x(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (a) Utiliser 2 pas de la méthode de Heun pour trouver une approximation pour $x(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |
| (b) Bestimmen Sie die exakte Lösung. | (b) Trouver la solution exacte. |

• **Aufgabe 4–12:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x(t) = x \cdot (1 - x) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

- | | |
|--|--|
| (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $0 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 2$. | (a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $0 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 2$. |
| (b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ und $x_0 = 2$. | (b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = -0.1$, $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.5$ et $x_0 = 2$. |
| (c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 0.5$ graphisch . | (c) Déterminer la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 0.5$ en utilisant un argument graphique . |
| (d) Verwenden Sie 2 Schritte des numerischen Verfahrens von Heun um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 3$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen. | (d) Appliquer 2 pas de la méthode numérique de Heun pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 0.5$ au temps $t = 3$. Il suffit de calculer avec 4 chiffres significatifs. |

• **Aufgabe 4–13:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) \cdot (1 - x(t)) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

- | | |
|---|--|
| (a) Finden Sie die exakte Lösung der Differentialgleichung, ohne Anfangsbedingung. Die Rechnungen sind zu zeigen. Verwenden Sie $0 < x < 1$. | (a) Trouver les solutions exactes de cette équation différentielle, sans condition initiale. Montrer les calculs. Utiliser $0 < x < 1$. |
| (b) Verwenden Sie einen Schritt des numerischen Verfahrens von Runge–Kutta um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 0.5$ bei $t = 1$ zu bestimmen. Es genügt, mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen. | (b) Appliquer un pas de la méthode numérique de Runge–Kutta pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 0.5$ au temps $t = 1$. Il suffit de calculer avec 4 chiffres significatifs. |

• **Aufgabe 4–14:**

Untersuchen Sie das folgende Anfangswertproblem

Examiner le problème initial suivant.

$$\frac{d}{dt}x(t) = t \cdot x(t) \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = 2$$

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Lösung. Die ersten drei von Null verschiedenen Terme sind zu bestimmen. Bestimmen Sie anschliessend $x(1)$.</p> <p>(b) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Heun um den Wert von $x(1)$ approximativ zu bestimmen.</p> | <p>(a) Déterminer la série entière de la solution de l'équation ci-dessus. Trouver les trois premiers termes qui ne sont pas égaux à zéro. Puis calculer $x(1)$.</p> <p>(b) Utiliser deux pas de la méthode de Heun pour trouver une approximation de $x(1)$.</p> |
|--|--|

• **Aufgabe 4–15:**

Vergleichen Sie die Verfahren von Euler, Heun und Runge–Kutta bezüglich

1. Rechenaufwand pro Zeitschritt.
2. Differenzierbarkeitsvoraussetzung an $f(x)$.
3. Konvergenzordnung
4. Anzahl Zeitschritte

Stellen Sie die Resultate in einer Tabelle dar.

• **Aufgabe 4–16:**

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

Examiner l'équation différentielle

$$y'(x) = -x y^2(x) \quad \text{mit/avec } y(0) = 2$$

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Bestimmen Sie $y(1)$ mit Hilfe von 4 Schritten des numerischen Verfahrens von Euler.</p> <p>(b) Bestimmen Sie $y(1)$ mit Hilfe von 2 Schritten des numerischen Verfahrens von Heun.</p> <p>(c) Vergleichen Sie die beiden obigen Resultate mit der exakten Lösung $y = \frac{2}{1+x^2}$ bei $x = 1$. Kommentieren Sie das Resultat.</p> | <p>(a) Trouver $y(1)$ à l'aide de 4 pas de la méthode numérique de Euler.</p> <p>(b) Trouver $y(1)$ à l'aide de 2 pas de la méthode numérique de Heun.</p> <p>(c) Comparer les deux résultats précédents avec la solution exacte $y = \frac{2}{1+x^2}$ pour $x = 1$. Commenter le résultat.</p> |
|--|---|

• **Aufgabe 4–17:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$y''(x) = -k^2 \sin(y(x)) \quad \text{mit/avec } y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- | | |
|---|--|
| <p>(a) Für kleine Werte von y kann die Gleichung vereinfacht werden durch $\sin y \approx y$. Bestimmen Sie die exakte Lösung der vereinfachten Gleichung.</p> <p>(b) Schreiben Sie die ursprüngliche Gleichung als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.</p> <p>(c) Setzen Sie im Resultat von (b) $k = 1/2$ und verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge–Kutta um $y(1)$ zu berechnen.</p> <p>(d) Vergleichen Sie die Resultate von (a) und (c).</p> | <p>(a) Pour de petites valeurs de y on peut simplifier l'équation à l'aide de $\sin y \approx y$. Trouver la solution exacte de l'équation simplifiée.</p> <p>(b) Récrire l'équation originale comme système d'équations différentielles de l'ordre 1.</p> <p>(c) Mettre $k = 1/2$ en (b) et appliquer un pas de la méthode de Runge–Kutta pour trouver $y(1)$.</p> <p>(d) Comparer les résultats de (a) et (c).</p> |
|---|--|

• **Aufgabe 4–18:**

Im Kurs auf Seite 273 in Abbildung 4.7 finden Sie den MATLAB-Code für `ode_Runge.m`. Passen Sie diesen Code an um eine neue Funktion `ode_Euler.m` zu schreiben, die das einfache Euler Verfahren implementiert. Vergleichen Sie anschliessend die beiden Verfahren indem Sie Lösungen des Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) = -x(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

untersuchen. Die exakte Lösung ist offensichtlich $x(t) = \cos(t)$.

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung mit einem numerischen Verfahren und plotten Sie die Lösung.
- (b) Untersuchen Sie die Lösung zum Zeitpunkt 2π mit dem Verfahren von Euler und Runge–Kutta mit konstanter Schrittweite.
1. Verfahren von Euler mit 10, 100 und 1000 Schritten.
 2. Verfahren von Runge–Kutta mit 10, 100 und 1000 Schritten.

Erstellen Sie eine Tabelle mit den Werten und den Fehlern.

- (c) Berechnen Sie die Lösung $y(20\pi)$ (d.h. 10 volle Perioden) mit je 1000 Schritten des Verfahrens von Euler und Runge–Kutta.
- (d) Der MATLAB-Befehl `ode45` verwendet ein adaptives Runge–Kutta Verfahren um die Gleichung zu lösen. Der folgende Code zeigt, dass mit nur 323 Schritten eine Genauigkeit von 10^{-6} erreicht werden kann.

Matlab

```
[t,y] = ode45('pend',0,20*pi,[1,0]);
length(t)
y(length(t),1)
-->
323
1.0000161
```

• **Aufgabe 4–19:**

Volterra Lotka

Untersuchen Sie das Räuber–Beute Modell (siehe Seite 281).

- (a) Schreiben Sie ein Matlab File `VolterraLotka.m` um die Gleichung numerisch lösen zu können. Es sollen die selben Konstanten wie im Kurs verwendet werden, d.h.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (c_1 - c_2 y) x \\ \dot{y} &= (c_3 x - c_4) y\end{aligned}$$

mit $c_1 = c_3 = c_4 = 1$ und $c_2 = 2$.

Eine Graphik der Lösung sollte durch den untenstehenden Code erzeugt werden können.

Matlab

```
[t,y] = ode45('VolterraLotka',0,10,[1,0.2]) ;
figure(1); plot(y(:,1),y(:,2))
figure(2); plot(t,y)
```

- (b) Schätzen Sie die Periode der obigen Lösung.
- (c) Untersuchen Sie andere Startwerte für dieses Räuber–Beute Modell.

(d) Berücksichtigt man auch den beschränkten Nahrungsvorrat der Beutespezies x , so kann das Modell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (c_1 - c_2 y - c_5 x) x \\ \dot{y} &= (c_3 x - c_4) y\end{aligned}$$

verwendet werden. Setzen Sie $c_5 = 0.1$. Beschreiben Sie den Effekt dieses zusätzlichen Terms.

• **Aufgabe 4–20:**

Das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = 1 + (y - t)^2, \quad y(0) = 0.5$$

wird gelöst durch

$$y(t) = t + \frac{1}{2-t}.$$

Somit ergibt sich $y(1.0) = 2.0$.

Bestimmen Sie $y(1.0)$ mittels 1 und 2 Zeitschritten der

1. Methode von Euler
2. Methode von Heun
3. Methode von Runge–Kutta.

Stellen Sie die Resultate in einer Tabelle zusammen, inklusive Kommentar.

• **Aufgabe 4–21:**

Untersuchen Sie die Gleichung

Examiner l'équation

$$\frac{d}{dx} y(x) = -x y^2(x) + x \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 2$$

- | | |
|--|---|
| (a) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Euler um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (a) Utiliser deux pas de la méthode de Euler pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |
| (b) Verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge–Kutta um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (b) Utiliser un pas de la méthode de Runge–Kutta pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |

• **Aufgabe 4–22:**

Untersuchen Sie die Gleichung

Examiner l'équation

$$\frac{d}{dx} y(x) = x^2 y(x) - x \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 1$$

- | | |
|--|---|
| (a) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Euler um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (a) Utiliser deux pas de la méthode de Euler pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |
| (b) Verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge–Kutta um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (b) Utiliser un pas de la méthode de Runge–Kutta pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |

• Aufgabe 4–23:

Untersuchen Sie die Gleichung

Examiner l'équation

$$\frac{d}{dx} y(x) = -x y^2(x) + x \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = 2$$

- | | |
|--|---|
| (a) Verwenden Sie zwei Schritte des Verfahrens von Euler um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (a) Utiliser deux pas de la méthode de Euler pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |
| (b) Verwenden Sie einen Schritt des Verfahrens von Runge-Kutta um $y(1)$ approximativ zu bestimmen. Zwischenschritte sind zu zeigen. | (b) Utiliser un pas de la méthode de Runge-Kutta pour trouver une approximation pour $y(1)$. Montrer les calculs intermédiaires. |

• Aufgabe 4–24:

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = 2 \quad \text{mit/avec} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

- | | |
|--|---|
| (a) Schreiben Sie diese Gleichung um zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung. | (a) Réécrire cette équation comme système d'équations différentielles de l'ordre 1. |
| (b) Berechnen Sie $y(0.5)$ mit Hilfe von zwei Schritten des Verfahrens von Euler. | (b) Calculer $y(0.5)$ à l'aide de deux pas de la méthode de Euler. |
| (c) Berechnen Sie $y(0.5)$ mit Hilfe von einem Schritt des Verfahrens von Heun. | (c) Calculer $y(0.5)$ à l'aide d'un pas de la méthode de Heun. |

• Aufgabe 4–25:

Ein Differentialgleichungssystem wurde mit numerischen Verfahren gelöst mit den folgenden Resultaten. Die Rechnung mit den Verfahren von Euler und 2000 Schritten benötigte 0.5 sec Rechenzeit.

Un système d'équations différentielles est a résoudre avec des méthodes numériques. Les calculs donnent les résultats ci-dessus. Les calculs avec la méthode de Euler à 2000 pas prennent 0.5 sec de temps de calcul.

Verfahren méthode	Anzahl Schritte nombre de pas	Resultat résultat
Euler	1000	$y(10) = -0.6243496719$
Euler	2000	$y(10) = -0.5674257006$
Runge-Kutta	100	$y(10) = -0.5122669759$
Runge-Kutta	200	$y(10) = -0.5122887623$

Der Approximationsfehler muss kleiner als 10^{-8} sein.

L'erreur d'approximation doit être plus petite que 10^{-8} .

- | | |
|---|---|
| (a) Wie viele Schritte sind mit dem Verfahren von Euler notwendig? | (a) Combien de pas sont nécessaires avec la méthode de Euler? |
| (b) Wie viele Schritte sind mit dem Verfahren von Runge-Kutta notwendig? | (b) Combien de pas sont nécessaires avec la méthode de Runge-Kutta? |
| (c) Wie lange wird die Rechnung mit dem Verfahren von Runge-Kutta dauern? | (c) Déterminer le temps de calcul pour la méthode de Runge-Kutta. |

• **Aufgabe 4–26:**

Ein Differentialgleichungssystem wurde mit numerischen Verfahren von Runge–Kutta (RK) gelöst mit den folgenden Resultaten. Die Rechnung mit 400 Schritten benötigte 0.5 sec Rechenzeit.

Un système d'équations différentielles est à résoudre avec la méthode numérique de Runge–Kutta (RK). Les calculs donnent les résultats ci-dessus. Le calcul à 400 pas prend 0.5 sec de temps de calcul.

Anzahl Schritte nombre de pas	Resultat résultat
200	$y(30) = -0.241034$
400	$y(30) = -0.243027$

- (a) Wie viele Schritte sind notwendig, damit der Approximationsfehler kleiner als 10^{-8} wird. (a) Combien de pas sont nécessaires pour que l'erreur d'approximation soit plus petite que 10^{-8} .
- (b) Wie lange wird diese Rechnung dauern, um die obige Genauigkeit zu erreichen? (b) Déterminer le temps de calcul pour arriver à cette précision.

• **Aufgabe 4–27:**

Das (AWP)

$$y'(x) = -y(x) + \sin x + \cos x, \quad y(0) = 0$$

hat die exakte Lösung $y(x) = \sin x$. Eine numerische Berechnung von $y(30\pi)$ auf einem PC (486–33MHz) hat die folgenden Resultate geliefert.

Runge Kutta

Solution:	h	y (x)	Steps
for a step size of:	0.9424778	0.006102000	100
for a step size of:	0.4712389	0.000237048	200
for a step size of:	0.2356194	0.000011374	400
for a step size of:	0.1178097	0.000000618	800
for a step size of:	0.0589049	0.000000036	1600
for a step size of:	0.0294524	0.000000002	3200

Euler

Solution:	h	y (x)	Steps
for a step size of:	0.9424778	-0.280776898	100
for a step size of:	0.4712389	-0.128165186	200
for a step size of:	0.2356194	-0.061355907	400
for a step size of:	0.1178097	-0.030047879	800
for a step size of:	0.0589049	-0.014872927	1600
for a step size of:	0.0294524	-0.007399518	3200

TIMING:

For 400000 Runge–Kutta steps	41 seconds
For 400000 Euler steps	11 seconds

Verwenden Sie dieses Resultat um abzuschätzen, wie lange es dauert die Lösung mit einem Fehler der kleiner als 10^{-10} zu berechnen

1. mit dem Runge–Kutta Verfahren.
2. mit dem Euler Verfahren.

• Aufgabe 4–28:

Untersuchen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = -t x^2(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 2$$

Zu bestimmen ist ein approximativer Wert von $x(1)$ mit Hilfe von zwei Schritten des Verfahrens von Heun. Das Resultat muss aus einer Tabelle mit allen Werten von t_i , $x(t_i)$, k_1 und k_2 bestehen. Die Rechnungen können mit vier Nachkommastellen ausgeführt werden.

• Aufgabe 4–29:

Examiner l'équation différentielle

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = 1 + y^2(x) \quad \text{avec/mit} \quad y(0) = -1$$

 Trouver une approximation pour $y(0.5)$ avec trois méthodes différentes.

 Finden Sie Approximationen von $y(0.5)$ mit drei verschiedenen Verfahren.

(a) Avec deux pas de la méthode numérique de Euler.

(a) Mit zwei Schritten des Verfahrens von Euler.

(b) Avec un pas de la méthode de Runge–Kutta.

(b) Mit einem Schritt des numerischen Verfahrens von Runge–Kutta.

 (c) Avec une approximation par une série. Utiliser tous les termes jusqu'à x^4 (inclus).

 (c) Mit Hilfe einer Reihenentwicklung, wobei Terme bis (und mit) x^4 berücksichtigt werden müssen.

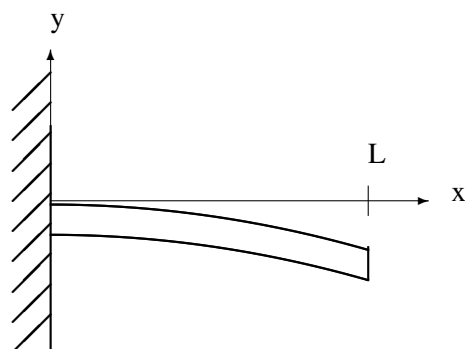
• Aufgabe 4–30:

Ein an einem Ende fest eingespannter Balken biegt sich unter seinem Eigengewicht. Die entsprechende Gleichung ist unten gegeben. Hierbei sind E , I , g und ρ physikalische Konstanten.

$$E I y''(x) = -\frac{g \rho A}{2} (L - x)^2, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Cette équation correspond à une poutre emboîtée à une extrémité. Cette poutre va se déformer à cause de son poids. E , I , g et ρ sont des constantes.

Rechnen Sie mit / Utiliser l'abréviation $k = \frac{g \rho A}{2 E I}$.



(a) Lösen Sie die Gleichung mittels Laplace–Transformation.

Résoudre cette équation avec une transformation de Laplace.

(b) Schreiben Sie diese Gleichung als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Réécrire cette équation comme système d'équations différentielles de première ordre.

 (c) Wählen Sie Punkte $x_i = i L/3$ für $i = 0, 1, 2, 3$ und verwenden Sie drei Schritte des numerischen Verfahrens von Euler, um die maximale Auslenkung $y(L)$ zu bestimmen.

 Considérer les points $x_i = i L/3$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et utiliser trois pas de la méthode numérique de Euler pour calculer la déflexion maximale $y(L)$.

(d) Vergleichen Sie die Resultate von (a) und (c).

Comparer les résultats de (a) et (c).

• Aufgabe 4–31:

Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1$$

ist leicht analytisch lösbar. Verwenden Sie n Schritte des Verfahrens von Euler um $x(3)$ zu bestimmen. Wie gross ist der Limes dieses Ausdrucks, falls $n \rightarrow \infty$?

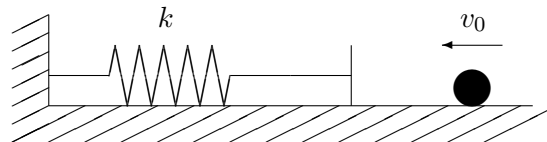
• Aufgabe 4–32:

Eine Masse m wird mit einer Geschwindigkeit v_0 in eine Feder bewegt (Federkonstante k). Die Masse wird die Feder zusammendrücken, dann aber von der Feder nach rechts wegbeschleunigt. Zu untersuchen ist der Zeitbereich während dem die Feder die Masse berührt. Reibung ist zu vernachlässigen.

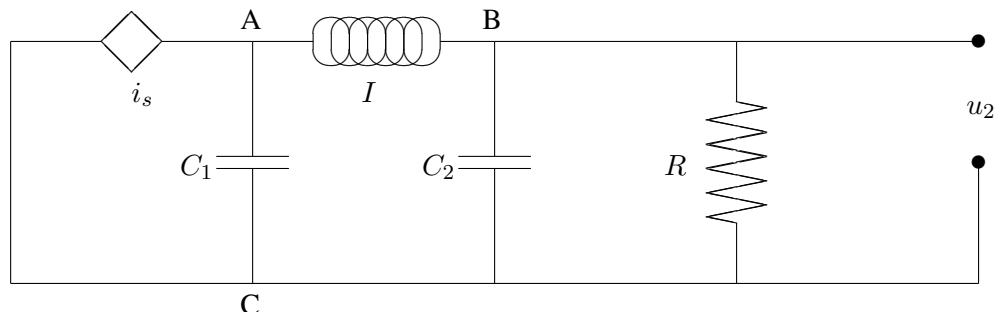
- Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Koordinate x des Kontaktpunktes Feder–Kugel als Funktion der Zeit t .
- Finden Sie die Lösung dieser Differentialgleichung.
- Wie gross ist die Federkonstante k zu wählen, damit die Kontaktzeit Feder–Kugel genau 1 Sekunde ist?

Une masse m bouge vers un ressort (constante de ressort k) avec une vitesse v_0 . La masse va compresser le ressort, mais finalement le ressort va relancer la masse vers la droite. Examiner l'intervalle de temps durant lequel la masse et le ressort se touchent. Ignorer le frottement.

- Trouver une équation différentielle pour la coordonnée x du point de contact comme fonction du temps t .
- Trouver la solution de cette équation différentielle.
- Choisir la constante du ressort k , telle que le temps de contact boule–ressort est exactement 1 seconde.


• Aufgabe 4–33:

Betrachte das elektrische Netzwerk mit den Kapazitäten $C_1 = 5/3$ Farad, $C_2 = 1/6$ Farad, dem Widerstand $R = 1$ Ohm, der Induktivität $L = 3/5$ Henry und einer Stromquelle mit Strom $i_s(t)$.



Sei u_1 die Spannung zwischen den Punkten C und A und i_1 der Strom von A zu B.

- Verwenden Sie die Regeln von Kirchhoff um zu zeigen, dass der Schaltkreis durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \frac{d}{dt} u_1 &= -i_1 + i_s \\ \frac{1}{6} \frac{d}{dt} u_2 &= -u_2 + i_1 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{5} \frac{d}{dt} i_1 = +u_1 - u_2$$

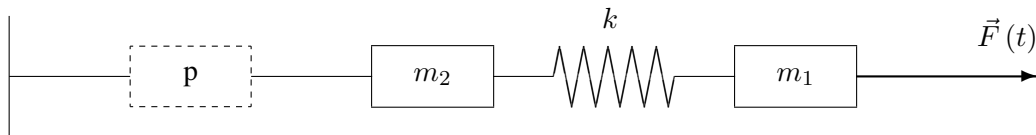
beschrieben wird.

(b) Stellen Sie das obige System mittels Matrizen dar.

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung der Gleichung. Verwende *Octave* oder *MATLAB*.

• **Aufgabe 4–34:**

Betrachten Sie das folgende System von zwei Massen $m_1 = \frac{5}{3}$, $m_2 = \frac{1}{6}$, einer Feder mit Federkonstanten $k = \frac{5}{3}$, einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante $p = 1$ und einer externen Kraft $F(t)$.



Seien y_1 und y_2 die Positionen von m_1 und m_2 und v_i die Ableitungen bezüglich der Zeit von y_i (Geschwindigkeiten). Setze $z = \frac{5}{3}(y_1 - y_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Verhalten dieses mechanischen Systems beschrieben wird durch

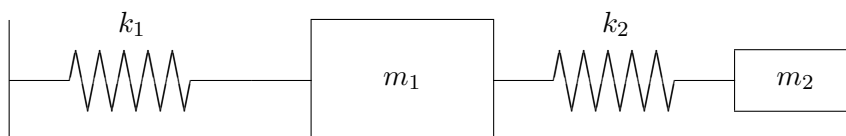
$$\begin{aligned} m_1 \dot{v}_1 &= -k \frac{3}{5} z + F(t) \\ m_2 \dot{v}_2 &= -p v_2 + k \frac{3}{5} z \\ \frac{3}{5} \dot{z} &= +v_1 - v_2 \end{aligned}$$

(b) Setzen Sie die obigen Werte ein und vergleichen Sie mit der vorangehenden Netzwerkaufgabe.

• **Aufgabe 4–35:**

Considérer le système de deux ressorts et deux masses oscillantes.

Betrachten Sie das folgende einfache System von zwei schwingenden Massen gekoppelt durch zwei Federn.



Choisir les variables (coordonnées horizontales) telles que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ correspond à la situation des deux masses au repos. On applique une force horizontale $f(t)$ sur la première masse.

Seien die Variablen (horizontale Koordinaten) so gewählt, dass $x_1 = 0$ der Ruhelage der ersten Masse und $x_2 = 0$ der Ruhelage der zweiten Masse entspricht. Auf die erste Masse wirke eine horizontale Kraft f der Form

$$f(t) = A \cos(\omega t).$$

(a) Trouver le système d'équations différentielles pour les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

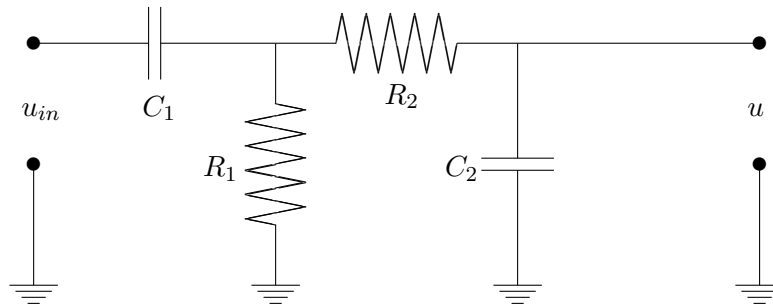
(a) Stellen Sie das System von Differentialgleichungen für die Größen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

(b) Réécrire comme système d'équations de l'ordre 1. Utiliser la notation des matrices.

(b) Schreiben Sie die Gleichungen um zu einem System der Ordnung 1. Verwenden Sie die Matrixnotation.

• **Aufgabe 4–36:**

Betrachte das elektrische Netzwerk



Die Spannung $u_{in}(t)$ sei gegeben. Stellen Sie die Gleichungen für die Spannungen auf, mittels der Kirchhoffschen Regeln.

• **Aufgabe 4–37:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung.

Considérer l'équation différentielle suivant.

$$\ddot{y} + \dot{y} + 16y = 0$$

(a) Schreiben Sie diese Gleichung als System von Gleichungen erster Ordnung.

(a) Réécrire cette équation comme système d'équations de l'ordre un.

(b) Skizzieren Sie das Phasenporträt dieser Gleichung und einige Lösungen. Verwenden Sie eine ganze A4-Seite.

(b) Dessiner le portrait de phase de cette équation et quelques solutions. Utiliser une page A4 complète.

• **Aufgabe 4–38:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung.

Considérer l'équation différentielle suivante.

$$\ddot{y}(t) + t^2 \dot{y}(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

(a) Berechnen Sie $y(1)$ mit Hilfe von zwei Schritten des Verfahrens von Euler.

(a) Calculer $y(1)$ à l'aide de deux pas de la méthode de Euler.

(b) Berechnen Sie $y(1)$ mit Hilfe eines Schrittes des Verfahrens von Runge–Kutta.

(b) Calculer $y(1)$ à l'aide de un pas de la méthode de Runge–Kutta.

• **Aufgabe 4–39:**

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

Examiner l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} x(t) = x \cdot (x - 2)^2 \quad \text{mit/avec} \quad x(0) = x_0$$

- | | |
|---|---|
| (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-0.5 \leq t \leq 3$ und $-1 \leq x \leq 4$. | (a) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $-0.5 \leq t \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 4$. |
| (b) Skizzieren Sie die vier Lösungen mit den Anfangswerten $x_0 = 2.2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0.1$ und $x_0 = -0.1$. | (b) Esquisser les quatre solutions avec les valeurs initiales $x_0 = 2.2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0.1$ et $x_0 = -0.1$. |
| (c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ der Lösung mit Anfangswert $x(0) = 1$ graphisch . | (c) Trouver la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ de la solution avec valeur initiale $x(0) = 1$ en utilisant un argument graphique . |
| (d) Verwenden Sie 3 Schritte des numerischen Verfahrens von Euler um die Lösung der Gleichung mit Anfangswert $x_0 = 1$ bei $t = 1$ zu bestimmen. Es genügt mit 4 signifikanten Stellen zu rechnen. | (d) Appliquer 3 pas de la méthode numérique de Euler pour trouver la valeur de la solution avec valeur initiale $x_0 = 1$ au temps $t = 1$. Il suffit de calculer avec 4 chiffres significatifs. |

• **Aufgabe 4–40:**

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

Examiner le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + \alpha y(t)\end{aligned}$$

- | | |
|---|--|
| (a) Beschreiben Sie alle Lösungen dieses Systems. | (a) Trouver toutes les solutions de ce système. |
| (b) Finden Sie die exakte Lösung mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$. | (b) Trouver la solution exacte avec les valeurs initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. |
| (c) Abhängig vom Wert des Parameters α können drei verschiedene qualitative Verhalten auftreten (Stabilität). Beschreiben Sie diese. | (c) Dépendant du paramètre α on obtient trois comportements différents des solutions (stabilité). Donner une description. |
| (d) Zeichnen Sie zwei Lösungen für $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. | (d) Dessiner deux solutions pour $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. |

• **Aufgabe 4–41:**

Untersuchen Sie das folgende Differentialgleichungssystem mit Hilfe von Eigenvektoren

Examiner le système d'équations différentielles suivantes à l'aide des vecteurs propres.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -3x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ \dot{y}(t) &= +1x(t) - 4y(t) + 1z(t) \\ \dot{z}(t) &= +3x(t) + 2y(t) - 3z(t)\end{aligned}$$

Für die Teilaufgaben (b)–(d) sind die folgenden Anfangsbedingungen zu verwenden.

Pour les parties (b)–(d) utiliser les conditions initiales

$$x(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad \text{und/et} \quad z(0) = 1$$

- (a) Schreiben Sie die allgemeine Lösung an. Verwenden Sie den Taschenrechner. Die Zwischenresultate sind anzugeben. Die Lösung wird drei unbekannte Konstanten enthalten.
- (a) Donner la solution générale du système. Utiliser la calculatrice, mais montrer les résultats intermédiaires. La solution va contenir trois constantes inconnues.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems, d.h. Differentialgleichungen und Anfangswerte.
- (b) Trouver la solution du problème initiale, c'est-à-dire équations différentielles et conditions initiales.
- (c) Berechnen Sie $z(3)$.
- (c) Calculer $z(3)$.
- (d) Bestimmen Sie die Vektoren \vec{a} und \vec{b}
- (d) Déterminer les vecteurs \vec{a} et \vec{b}

$$\vec{a} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{d}(t) \quad \text{und/et} \quad \vec{b} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{d}(t)$$

wobei/avec

$$\vec{d}(t) = \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 4–42:

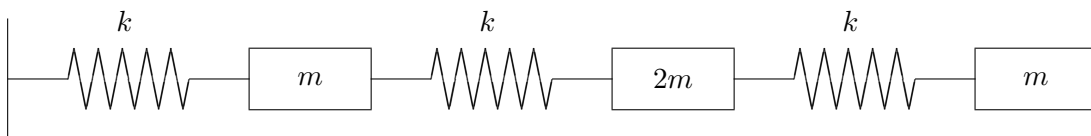
Das Differentialgleichungssystem

Le système des équations différentielles

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= k (-2x_1 + x_2) \\ 2m \ddot{x}_2 &= k (-2x_2 + x_1 + x_3) \\ m \ddot{x}_3 &= k (-x_3 + x_2) \end{aligned}$$

beschreibt das folgende Masse–Feder–System (Achtung: in der Mitte doppelte Masse)

donne une description du système suivant (attention: double masse au centre)



- (a) Schreiben Sie diese Differentialgleichungen um in Matrizennotation.
- (a) Réécrire ce système avec la notation des matrices.
- (b) Bestimmen Sie die drei in den Lösungen vorkommenden Frequenzen.
- (b) Trouver les trois fréquences présentes dans les solutions.
- (c) Beschreiben Sie die Maximalamplituden der drei Massen für die schnellste der drei Eigenschwingungen.
- (c) Donner une description des trois amplitudes maximales pour l'oscillation la plus rapide.

• Aufgabe 4–43:

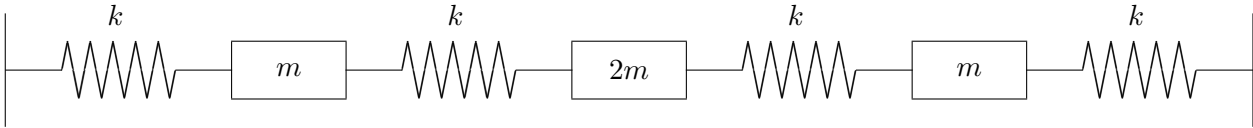
Das Differentialgleichungssystem

Le système des équations différentielles

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1(t) &= k (-2x_1(t) + x_2(t)) \\ 2m \ddot{x}_2(t) &= k (-2x_2(t) + x_1(t) + x_3(t)) \\ m \ddot{x}_3(t) &= k (-2x_3(t) + x_2(t)) \end{aligned}$$

beschreibt das folgende Masse–Feder–System
(Achtung: in der Mitte doppelte Masse)

donne une description du système suivant (attention: double masse au centre)



(a) Schreiben Sie diese Differentialgleichungen um in Matrizennotation.

(a) Réécrire ce système avec la notation des matrices.

(b) Bestimmen Sie die drei in den Lösungen vorkommenden Frequenzen.

(b) Trouver les trois fréquences présentes dans les solutions.

(c) Bestimmen Sie die Maximalamplituden der drei Massen für die schnellste der drei Eigenschwingungen.

(c) Trouver les trois amplitudes maximales pour l'oscillation la plus rapide.

• Aufgabe 4–44:

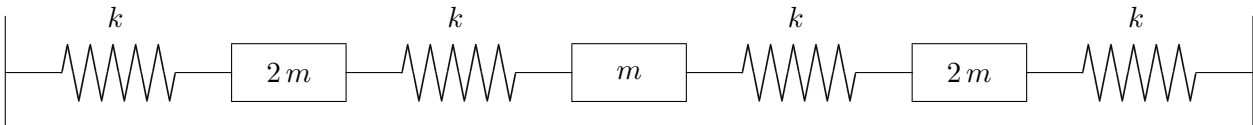
Das Differentialgleichungssystem

Le système des équations différentielles

$$\begin{aligned} 2m \ddot{x}_1(t) &= k(-2x_1(t) + x_2(t)) \\ m \ddot{x}_2(t) &= k(-2x_2(t) + x_1 + x_3(t)) \\ 2m \ddot{x}_3(t) &= k(-2x_3(t) + x_2(t)) \end{aligned}$$

beschreibt das folgende Masse–Feder–System

donne une description du système suivant



(a) Schreiben Sie diese Differentialgleichungen um in Matrizennotation.

(a) Réécrire ce système avec la notation des matrices.

(b) Bestimmen Sie die drei in den Lösungen vorkommenden Frequenzen.

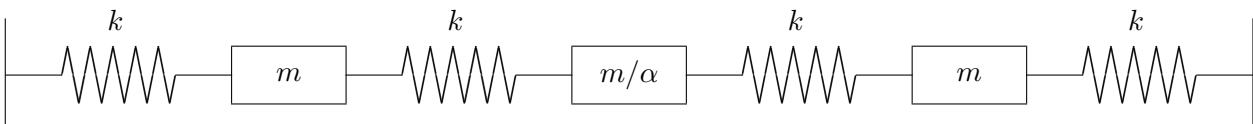
(b) Trouver les trois fréquences présentes dans les solutions.

(c) Bestimmen Sie die Maximalamplituden der drei Massen für die schnellste der drei Eigenschwingungen.

(c) Trouver les trois amplitudes maximales pour l'oscillation la plus rapide.

• Aufgabe 4–45:

Untersuchen Sie das folgende System von Federn und Massen:



- (a) Stellen Sie die Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf für die Auslenkungen der drei Massen aus der Ruhelage. Verwenden Sie die Matrizennotation.
- (b) Man beobachtet eine periodische Schwingung des Systems bei der alle drei Massen parallel schwingen, die mittlere Masse aber mit der 1.5-fachen Amplitude der beiden äusseren Massen. Welche Form muss einer der Eigenvektoren der Matrix in der ersten Teilaufgabe somit haben?
- (c) Untersuchen Sie die Situation der zweiten Teilaufgabe etwas genauer. Berechnen Sie den Wert von α und die Frequenz der oben untersuchten Schwingung.

Tip: ohne Taschenrechner ist es leichter!

• **Aufgabe 4–46:**

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem Considérer le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{x} + 6x + 2y &= f(t) \\ \dot{y} - 4x + 15y &= 0\end{aligned}$$

als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$.

comme système avec fonction d'entrée $f(t)$ et fonction de sortie $y(t)$.

- | | |
|---|--|
| <p>(a) Zu bestimmen ist die Transferfunktion $G(s)$ des Systems.</p> <p>(b) Setzen Sie $f(t) = 0$ und skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren. Die Rechnungen sind exakt auszuführen.</p> <p>(c) Skizzieren Sie einige Lösungen.</p> <p>(d) Bestimmen Sie den untenstehenden Grenzwert L für eine „typische“ Lösung.</p> | <p>(a) Trouver la fonction de transfert $G(s)$ de ce système.</p> <p>(b) Mettre $f(t) = 0$ et esquisser le champ vectoriel de ce système d'équations à l'aide des vecteurs propres. Calculer d'une façon exacte.</p> <p>(c) Esquisser quelques solutions.</p> <p>(d) Chercher la limite L ci-dessous pour une solution „typique“.</p> |
|---|--|

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$$

• **Aufgabe 4–47:**

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= +2.5x(t) + 0.9y(t) \\ \dot{y}(t) &= -1.7x(t) - 1.4y(t)\end{aligned}$$

- (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten
- (b) Skizzieren Sie einige Lösungen.
- (c) Bestimmen Sie den Grenzwert $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ für eine „typische“ Lösung.
- (d) Für welche Anfangswerte $(x(0), y(0))$ konvergiert die Lösung gegen den Koordinatenursprung?

•Aufgabe 4–48:

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} - 2x - 4y &= f(t) \\ \dot{y} - 24x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

als System mit Eingang $f(t)$ und Ausgang $y(t)$.

- (a) Zu bestimmen ist die Transferfunktion $G(s)$ des Systems.
- (b) Setzen Sie $f(t) = 0$ und skizzieren Sie das Vektorfeld des Systems quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren.
- (c) Skizzieren Sie einige Lösungen.
- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ für eine „typische“ Lösung.

•Aufgabe 4–49:

Untersuchen Sie das System von Differentialgleichungen

Examiner le système des équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- (a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieses Systems.
- (b) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den Bereich $-2 \leq x, y \leq 2$.
- (c) Sei $(x(t), y(t))$ eine typische Lösung. Bestimmen Sie A und B .

(a) Trouver la solution générale de ce système.

(b) Esquisser le champ vectoriel pour le domaine $-2 \leq x, y \leq 2$.

(c) Soit $(x(t), y(t))$ une solution typique. Trouver les valeurs de A et B .

Tip: vecteurs propres.

Tipp: Eigenvektoren

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{und/et} \quad B = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

•Aufgabe 4–50:

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= x + 4y \\ \frac{d}{dt} y &= x - 2y \end{aligned}$$

- (a) Zu bestimmen sind die exakten Lösungen mit den Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und $y(0) = 0$. Verwenden Sie Laplacetransformationen.
- (b) Beschreiben Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe von exakt berechneten Eigenwerten und Eigenvektoren.
- (c) Skizzieren Sie das Verhalten der Lösungen in der Nähe des Ursprungs mit Hilfe der vorangehenden Teilaufgabe.

•Aufgabe 4–51:

Untersuchen Sie das System

Examiner le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{3x+y} - 1 \\ \dot{y} &= \sin(x+y) - 3y\end{aligned}$$

- | | |
|---|--|
| (a) Finden Sie die Linearisierung beim kritischen Punkt $(0, 0)$ | (a) Trouver la linéarisation pour le point $(0, 0)$. |
| (b) Skizzieren Sie einige Lösungen der Linearisierung qualitativ und quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren. | (b) Dessiner quelques solutions de la linéarisation à l'aide des vecteurs propres. |

•Aufgabe 4–52:

Untersuchen Sie das System

Examiner le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin(x + 2y) \\ \dot{y} &= e^{x+y} - 1\end{aligned}$$

- | | |
|--|---|
| (a) Finden Sie die Linearisierung beim kritischen Punkt $(0, 0)$ | (a) Trouver la linéarisation pour le point critique $(0, 0)$. |
| (b) Skizzieren Sie das Vektorfeld der linearisierten Differentialgleichung quantitativ korrekt mit Hilfe von Eigenvektoren. Die Rechnungen sind exakt auszuführen. | (b) Esquisser le champ vectoriel de l'équation linéarisée à l'aide des vecteurs propres. Calculer d'une façon exacte. |
| (c) Skizzieren Sie einige Lösungen der Linearisierung. | (c) Esquisser quelques solutions de la linéarisation à l'aide des vecteurs propres. |

•Aufgabe 4–53:

Untersuchen Sie das System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= -\sin(1.4x(t) + 2.4y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \exp(-0.6x(t) + 0.4y(t)) - 1\end{aligned}$$

- (a) Approximieren Sie dieses System in der Nähe der Ursprungs $(0, 0)$ durch ein lineares System.
- (b) Beschreiben Sie die allgemeine Lösung des linearisierten Systems mit Hilfe von exakt berechneten Eigenwerten und Eigenvektoren.
- (c) Skizzieren Sie das Verhalten der Lösungen des linearisierten Systems in der Nähe des Ursprungs.

•Aufgabe 4–54:

Stefan's Gesetz besagt, dass die Änderungsrate der Temperatur T eines Körpers aufgrund von Abstrahlung gegeben ist durch

$$\frac{dT}{dt} = -k (T^4 - T_0^4)$$

Hierbei ist T die Temperatur des Körpers, T_0 die Umgebungstemperatur, beide gemessen in Kelvin. k ist eine positive Konstante.

Die drei Teilaufgaben sind unabhängig.

- (a) Zeigen Sie, dass eine implizite Lösung dieser Differentialgleichung gegeben ist durch

$$2 \arctan \frac{T}{T_0} + \ln \frac{T + T_0}{T - T_0} = 4 T_0^3 (k t + C)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser impliziten Lösung den Grenzwert

$$T_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$$

Tip: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

- (b) Skizzieren Sie für den Spezialfall $T_0 = 10$ und $k = 1$ das durch das Gesetz von Stefan gegebene Vektorfeld und einige Lösungen. Es ist nur der Bereich $T > 0$ zu untersuchen.
- (c) Für T nahe bei T_0 kann Stefan's Gesetz approximiert werden durch Newton's Gesetz der Abkühlung

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha (T - T_0)$$

Bestimmen Sie die Konstante α , als Funktion von k und T_0 . Anschliessend ist die allgemeine Lösung dieser vereinfachten Differentialgleichung anzugeben.

• Aufgabe 4–55:

Examiner les solutions de l'équation différentielle ci-dessous

Untersuchen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 5y''(x) + 5y'(x) + y(x) = 0$$

- | | |
|--|---|
| (a) Réécrire l'équation comme système d'équations différentielles de l'ordre 1. | (a) Schreiben Sie diese Gleichung als System von Gleichungen erster Ordnung. |
| (b) Une des valeurs propres de la matrice est $\lambda_1 = -1$. Calculer toutes les valeurs propres d'une façon exacte . | (b) Einer der Eigenwerte der entstehenden Matrix ist $\lambda_1 = -1$. Bestimmen Sie die anderen Eigenwerte exakt . |
| (c) Trouver la limite ci-dessous pour une solution „typique“ de l'équation. | (c) Bestimmen Sie den untenstehenden Grenzwert für eine „typische“ Lösung der Gleichung. |

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{y'(x)}$$

4.6.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 4–1 :

- (a) Dies ist eine separierbare, **nicht**lineare Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \int \frac{1}{x^2} dx &= \int 1 dt \\ \frac{-1}{x} &= t + c \\ x(t) &= \frac{-1}{t + c} \\ 1 &= \frac{-1}{0 + c} \implies c = -1 \\ x(t) &= \frac{-1}{t - 1} \end{aligned}$$

(b) Linear, homogen, zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_1 \cosh(\sqrt{2}t) + c_2 \sinh(\sqrt{2}t) \\
 1 &= c_1 \cosh(\sqrt{2}0) + c_2 \sinh(\sqrt{2}0) \quad \implies \quad c_1 = 1 \\
 x(t) &= \cosh(\sqrt{2}t) + c_2 \sinh(\sqrt{2}t)
 \end{aligned}$$

(c) Linear, inhomogen, zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= at + b \quad \text{einsetzen in Differentialgleichung} \\
 0 &= 2at + 2b + t \quad \implies \quad a = \frac{-1}{2} \quad \text{and} \quad b = 0 \\
 x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cosh(\sqrt{2}t) + c_2 \sinh(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2} \\
 1 &= c_1 \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}0) + c_2 \sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}0) - \frac{1}{2} = +c_2 \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\
 &\implies \quad c_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\
 x(t) &= c_1 \cosh(\sqrt{2}t) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

Es ist möglich den Tipp zu ignorieren, führt aber zu komplizierteren Formeln. Als Beispiel zu Teilaufgabe (b):

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 + 2 &= 0 \quad \implies \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \\
 x(t) &= c_1 e^{+\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\
 0 &= c_1 + c_2 \quad \implies \quad c_2 = 1 - c_1 \\
 x(t) &= c_1 e^{+\sqrt{2}t} + (1 - c_1) e^{-\sqrt{2}t} = e^{-\sqrt{2}t} + c_1 (e^{+\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t})
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4-2 : Ansatz:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots \\
 \dot{y}(t) &= 0 + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \dots \\
 \ddot{y}(t) &= 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Diese Terme können nun in der Differentialgleichung eingesetzt werden. Anschliessend werden Terme gleicher Ordnung (bezüglich t) gesammelt.

$$\begin{aligned}
 0 &= \ddot{y}(t) + t^2 \dot{y}(t) + y(t) \\
 &= (2a_2 + a_0) + t(6a_3 + a_1) + t^2(12a_4 + a_1 + a_2) + t^3(20a_5 + 2a_2 + a_3) + \dots
 \end{aligned}$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen $y(0) = a_0 = 1$ und $\dot{y}(0) = a_1 = 0$ ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 1 &= a_0 \\
 0 &= a_1 \\
 0 &= 2a_2 + a_0 \\
 0 &= 6a_3 + a_1 \\
 0 &= 12a_4 + a_1 + a_2 \\
 0 &= 20a_5 + 2a_2 + a_3
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich von oben nach unten auflösen

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{-a_1 - a_2}{12} = \frac{1}{24}, \quad a_5 = \frac{-2a_2 - a_3}{20} = \frac{1}{20}$$

Also sind die ersten Terme der Taylorreihe

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{20} t^5 + \dots$$

Lösung zu Aufgabe 4–3 : Zuerst sind die entstehenden Ausdrücke anzuschreiben.

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \\ y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 \end{aligned}$$

Der Term $y(x)^2$ ist sorgfältig zu bestimmen.

$$\begin{aligned} y^2(x) &= a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2) x^2 + \\ &\quad + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + \dots \\ x y^2(x) &= a_0^2 x + 2a_0 a_1 x^2 + (a_1^2 + 2a_0 a_2) x^3 + \\ &\quad + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^4 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) x^5 + \dots \end{aligned}$$

(a) Nun kann die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ verwendet werden und man muss die Koeffizienten von $y'(x)$ und $-x y^2(x)$ vergleichen.

$$\begin{aligned} a_0 &= y(0) = 2 \\ a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= -a_0^2 \\ 3a_3 &= -2a_0 a_1 \\ 4a_4 &= -a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ 5a_5 &= -2a_0 a_3 - 2a_1 a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können von oben nach unten aufgelöst werden und man erhält $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = 0$, $a_4 = +2$, $a_5 = 0$. Das führt auf die Reihenentwicklung der Lösung

$$y(x) = 2 - 2x^2 + 2x^4 - \dots$$

(b) Für $x = 1/2$ erhält man

$$y(1/2) \approx 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} = 1.625$$

Lösung zu Aufgabe 4–4 :

(a) Zuerst sind die entstehenden Ausdrücke anzuschreiben.

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \\ 1 + x \cdot y(x) &= 1 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \dots \\ \frac{d}{dx} y(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Da die beiden letzten Zeilen übereinstimmen müssen, erhalten wir das folgende System von Gleichungen. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = a_0 = 3$ kann das System von oben nach unten aufgelöst werden.

$$\begin{array}{rclcl}
 a_1 & = & 1 & & a_0 & = & 3 \\
 2a_2 & = & a_0 & & a_1 & = & 1 \\
 3a_3 & = & a_1 & \implies & a_2 & = & \frac{1}{2}a_0 = \frac{3}{2} \\
 4a_4 & = & a_2 & & a_3 & = & \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3} \\
 5a_5 & = & a_3 & & a_4 & = & \frac{1}{4}a_2 = \frac{3}{8} \\
 \vdots & & & & a_5 & = & \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{15} \\
 & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

Das führt auf die Reihenentwicklung der Lösung

$$y(x) = 3 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \dots$$

(b) Für $x = 1$ erhält man

$$y(1) \approx 3 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{1}{15} = 6.275$$

Lösung zu Aufgabe 4–6 :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + \dots \\
 \ddot{x}(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + 30a_6 t^4 + 42a_7 t^5 + 56a_8 t^6 + \dots \\
 t^2 x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+2} = 0 + 0t + a_0 t^2 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 + a_4 t^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Die Summe der beiden letzten Ausdrücke muss Null ergeben. Ein Koeffizientenvergleich und die beiden Anfangsbedingungen führen auf das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a_0 &= x(0) \\
 a_1 &= \dot{x}(0) = 0 \\
 2a_2 &= 0 \\
 6a_3 &= 0 \\
 a_0 + 12a_4 &= 0 \\
 a_1 + 20a_5 &= 0 \\
 a_2 + 30a_6 &= 0 \\
 a_3 + 42a_7 &= 0 \\
 a_4 + 56a_8 &= 0 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Dieses System kann von oben nach unten aufgelöst werden und man erhält

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_0}{12}, \quad a_5 = a_6 = a_7 = 0, \quad a_8 = -\frac{a_4}{56} = \frac{a_0}{12 \cdot 56}, \quad \dots$$

Somit haben wir die approximative Lösung

$$x(t) = a_0 \left(1 - \frac{t^4}{12} + \frac{t^8}{672} + O(t^{12}) \right)$$

Lösung zu Aufgabe 4–7 :

(a) Durch einfache Geometrie erhält man die Bedingung

$$h = y + \frac{x}{\tan(2\alpha)}$$

Daraus wird mit Hilfe einer Doppelwinkelformel⁹ und $\tan \alpha = y'(x)$ die Gleichung

$$h = y + x \frac{1 - (y')^2}{2y'}$$

(b) Setzen wir in der obigen (impliziten) Gleichung $y = p x^2$, so ergibt sich die Bedingung

$$h = y + x \frac{1 - (y')^2}{2y'} = p x^2 + x \frac{1 - 4p^2 x^2}{4p x} = p x^2 + \frac{1}{4p} - p x^2 = \frac{1}{4p}$$

Die Differentialgleichung ist also gelöst durch $y(x) = \frac{1}{4h} x^2$.

(c) Die Differentialgleichung ist nach y' aufzulösen

$$\begin{aligned} y' \frac{2(h-y)}{x} &= 1 - (y')^2 \\ (y')^2 + y' \frac{2(h-y)}{x} - 1 &= 0 \\ y'_{1,2} &= -\frac{h-y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{h-y}{x}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Da für $x > 0$ die Ableitung auch positiv ist, gilt also die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{h-y}{x} + \sqrt{\left(\frac{h-y}{x}\right)^2 + 1} = \frac{h-y}{x} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{h-y}\right)^2} - 1 \right)$$

Bei $x = 0$ erhalten wir eine Division durch 0 und somit ein Problem. Numerische Lösungsverfahren sind nicht direkt einsetzbar.

(d) Aus einer Tabelle oder mittels mehrfachem Ableiten erhält man

$$\sqrt{1+z^2} - 1 = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^8 + \dots$$

und somit

$$\frac{1}{z} (\sqrt{1+z^2} - 1) = \frac{1}{2} z - \frac{1}{4} z^3 + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^5 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^7 + \dots$$

Nun können wir die obige Differentialgleichung ersetzen durch die Approximation

$$\begin{aligned} y' &= \frac{h-y}{x} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{h-y}\right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{h-y} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{h-y} \right)^3 + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{h-y} \right)^5 - \frac{5}{128} \left(\frac{x}{h-y} \right)^7 + \dots \end{aligned}$$

Mit der Bedingung $y(0) = 0$ gilt also für kleine Werte von x die Approximation $y \ll h$ und somit die Gleichung

$$y' \approx \frac{1}{2h} x$$

9

$$\frac{1}{\tan(2\alpha)} = \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - 2 \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$$

mit der approximativen Lösung

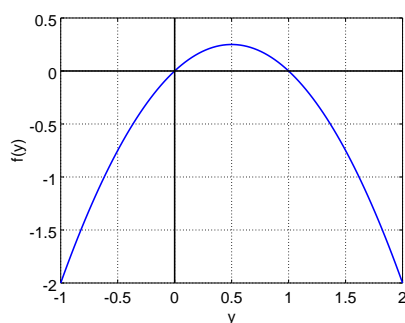
$$y(x) \approx \frac{1}{4h} x^2$$

Es ist Zufall (oder Glück), dass diese approximative Lösung mit der exakten übereinstimmt.

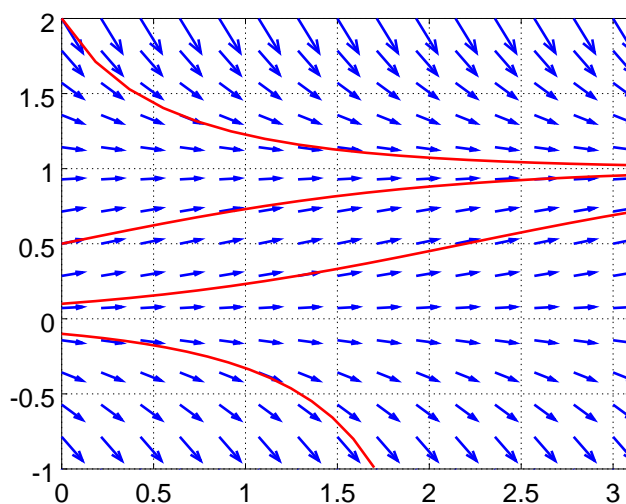
Nun kann man für kleine Werte von x die „Approximation“ verwenden und dann bei einem strikt positiven x_0 mit einem numerischen Verfahren starten.

Lösung zu Aufgabe 4–9 :

- (a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x)$ gegeben durch



Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.



- (b) Siehe oben
 (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$
 (d) Mit der Funktion $f(t, x) = x \cdot (1 - x)$ und $h = \frac{3}{2} = 1.5$ erhalten wir

t_0	x_0	$k = f(t_0, x_0)$	$x_1 = x_0 + h k$
0	0.5	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$
t_1	x_1	$k = f(t_1, x_1)$	$x_2 = x_1 + h k$
1.5	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{7}{8} + \frac{3}{2} \frac{7}{64} = \frac{133}{128} \approx 1.0391$

Somit erhalten wir nach zwei Euler-Schritten die approximative Lösung $x(3) \approx x_2 = 1.0391$. Die exakte Lösung ist $x(3) \approx 0.952574$

Lösung zu Aufgabe 4–11 :

(a) Mit der Funktion $f(t, x) = -\frac{1}{2}x$ und $h = 0.5$ erhalten wir

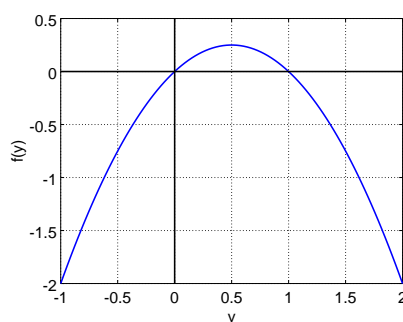
t_0	x_0	$k_1 = f(t_0, x_0)$	$k_2 = f(t_0 + h, x_0 + hk_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_1 = x_0 + hk$
0	2	-1	$-\frac{3}{4} = -0.75$	$-\frac{7}{8} = -0.875$	$\frac{25}{16} = 1.5625$
t_1	x_1	$k_1 = f(t_1, x_1)$	$k_2 = f(t_1 + h, x_1 + hk_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_2 = x_1 + hk$
0.5	$\frac{25}{16}$	$-\frac{25}{32} = 0.78125$	$-\frac{75}{128} = 0.5859375$	$-\frac{175}{256} = -0.68359375$	$\frac{625}{512} \approx 1.2207$

Somit erhalten wir nach zwei Heun-Schritten die approximative Lösung $x(1) \approx x_2 = 1.2207$. Das ist recht nahe der exakten Lösung $x(1) \approx 1.2131$.

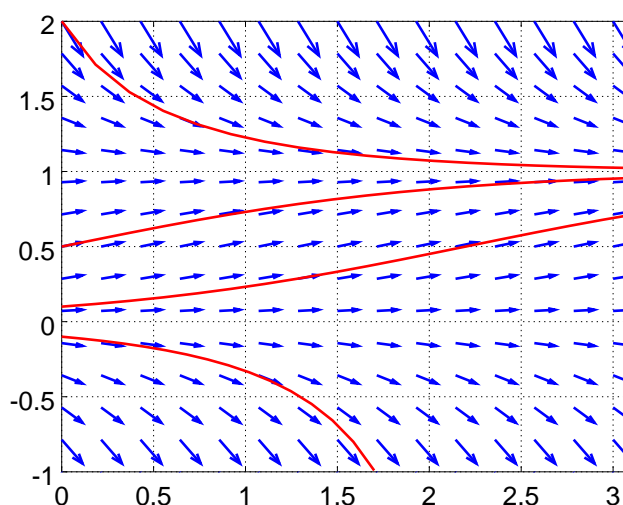
(b) Die exakte Lösung ist $x(t) = 2e^{-0.5t}$ und somit $x(1) \approx 1.2131$

Lösung zu Aufgabe 4–12 :

(a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x)$ gegeben durch



Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.



(b) Siehe oben

(c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$

(d) Mit der Funktion $f(t, x) = x \cdot (1 - x)$ und $h = 1.5$ erhalten wir

t_0	x_0	$k_1 = f(t_0, x_0)$	$k_2 = f(t_0 + h, x_0 + h k_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_1 = x_0 + h k$
0	0.5	0.25	0.10938	0.17969	0.76953
t_1	x_1	$k_1 = f(t_1, x_1)$	$k_2 = f(t_1 + h, x_1 + h k_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_2 = x_1 + h k$
1.5	0.76953	0.17735	-0.03683	0.07026	0.87493

Somit erhalten wir nach zwei Heun-Schritten die approximative Lösung $x(3) \approx x_2 = 0.8749$. Die exakte Lösung ist $x(3) \approx 0.952574$

Lösung zu Aufgabe 4–13 :

(a) Die Differentialgleichung ist separabel

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (1 - x)$$

$$\int \frac{1}{x \cdot (1 - x)} dx = \int 1 dt$$

Eine Partialbruchzerlegung zeigt, dass

$$\frac{1}{x \cdot (1 - x)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(1 - x)}{x \cdot (1 - x)} = \frac{(A - B)x + B}{x \cdot (1 - x)}$$

und somit $A = B = 1$. Es gilt also

$$\int \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x} dx = \int 1 dt$$

$$-\ln|1 - x| + \ln|x| = t + c$$

$$\ln \left| \frac{x}{1 - x} \right| = t + c$$

$$\left| \frac{x}{1 - x} \right| = e^{t+c}$$

$$\frac{x}{1 - x} = k e^t$$

$$x(t) = (1 - x(t)) k e^t$$

$$x(t) = \frac{k e^t}{1 + k e^t}$$

Der Wert der Konstanten k könnte durch eine Anfangsbedingung bestimmt werden.(b) Mit der Funktion $f(t, x) = x \cdot (1 - x)$, dem Anfangswert $x_0 = 0.5$ und $h = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0) &= 0.5 \cdot (1 - 0.5) &= 0.25 \\ k_2 &= f(t_0 + h/2, x_0 + h/2 k_1) &= (0.5 + \frac{0.25}{2}) \cdot (1 - 0.5 - \frac{0.25}{2}) &\approx 0.23438 \\ k_3 &= f(t_0 + h/2, x_0 + h/2 k_2) &\approx (0.5 + \frac{0.23438}{2}) \cdot (1 - 0.5 - \frac{0.23438}{2}) &\approx 0.23627 \\ k_4 &= f(t_0 + h, x_0 + h k_3) &\approx (0.5 + 0.23627) \cdot (1 - 0.5 - 0.23627) &\approx 0.19418 \\ k &= \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) &&\approx 0.23091 \\ x(1) &\approx x(0) + h k &= 0.5 + k &\approx 0.73091 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach einem Runge–Kutta Schritt die approximative Lösung $x(1) \approx 0.73091$. Die exakte Lösung ist $x(1) \approx 0.73106$. Somit ist die Lösung mit nur einem Runge–Kutta schon recht genau.

Lösung zu Aufgabe 4–14 :

(a) Der Potenzreihenansatz ergibt

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots \\
 \dot{x}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + \dots \\
 t \cdot x(t) &= 0 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots
 \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 2$ impliziert $a_0 = 2$ und ein Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 \\
 2a_2 &= a_0 \\
 3a_3 &= a_1 \\
 4a_4 &= a_2 \\
 5a_5 &= a_3 \\
 6a_6 &= a_4 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich von oben nach unten auflösen und wir erhalten $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 0$ und $a_6 = 1/24$. Somit sind die ersten Terme der Lösung gegeben durch

$$x(t) = 2 + t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{24}t^6 + \dots$$

Das führt auf $x(1) \approx 3.29167$.(b) Mit der Funktion $f(t, x) = t \cdot x$ und $h = 1/2$ erhalten wir

t_0	x_0	$k_1 = f(t_0, x_0)$	$k_2 = f(t_0 + h, x_0 + hk_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_1 = x_0 + hk$
0	2	0	$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$	1/2	$2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$
0	2	0	1	0.5	2.25
t_1	x_1	$k_1 = f(t_1, x_1)$	$k_2 = f(t_1 + h, x_1 + hk_1)$	$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$x_2 = x_1 + hk$
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4} + \frac{9}{16} = \frac{45}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{4} + \frac{63}{64} = \frac{207}{64}$
0.5	2.25	1.125	2.8125	0.21875	3.234

Somit erhalten wir nach zwei Heun–Schritten die approximative Lösung $x(1) \approx x_2 = 3.234$.Für dieses Problem ist die exakte Lösung bekannt. Es gilt $x(t) = 2e^{t^2/2}$ und somit $x(1) \approx 3.297$.**Lösung zu Aufgabe 4–16 :** In diesem Beispiel ist $f(x, y) = -xy^2$.(a) Euler: $h = 0.25$

x	$y(x)$	$f(x, y(x))$	$y(x + h)$
0	2	0	2
0.25	2	-1.	1.75
0.5	1.75	-1.53125	1.36719
0.75	1.36719	-1.4019	1.01671
1.	1.01671		

(b) Heun: $h = 0.5$

x	$y(x)$	k_1	k_2	$y(x+h)$
0	2	0	-2.	1.5
0.5	1.5	-1.125	-0.87890	0.9990
1	0.9990			

(c) Vergleich

	Euler	Heun	Exakt
$y(1) =$	1.01671	0.999023	1.000000
Fehler	0.016	0.001	

Das Verfahren von Heun ergibt eine wesentlich bessere Approximation. Der Grund hierfür ist die höhere Konvergenzordnung. Der Rechenaufwand der beiden Methoden ist vergleichbar.

Lösung zu Aufgabe 4–17 :

(a)

$$y''(x) = -k^2 y(x)$$

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) = \frac{1}{k} \sin(kx)$$

(b) Die Differentialgleichung

$$y''(x) = -\frac{1}{4} \sin(y(x))$$

muss als System geschrieben werden als

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ -\frac{1}{4} \sin(y_1(x)) \end{pmatrix}$$

(c) Mit der Funktion $\vec{F}(\vec{y}) = (y_2, -\frac{1}{4} \sin y_1)^T$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \vec{y}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t))$$

Das Verfahren von Runge-Kutta mit $\vec{y}_0 = (0, 1)^T$ und $h = 1$ ergibt nun

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 = \vec{F}(\vec{y}_0) &= F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{k}_2 = \vec{F}(\vec{y}_0 + \frac{h}{2} \vec{k}_1) &= F\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \sin(1/2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.11986 \end{pmatrix} \\ \vec{k}_3 = \vec{F}(\vec{y}_0 + \frac{h}{2} \vec{k}_2) &= F\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - 0.11986/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - 0.11986/2 \\ -\frac{1}{4} \sin(1/2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.94007 \\ -0.11986 \end{pmatrix} \\ \vec{k}_4 = \vec{F}(\vec{y}_0 + h \vec{k}_3) &= F\left(\begin{pmatrix} 0.94007 \\ 1 - 0.11986 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - 0.11986 \\ -\frac{1}{4} \sin(0.94007) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.88014 \\ -0.20190 \end{pmatrix} \\ \vec{k} &= \frac{1}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \approx \begin{pmatrix} 0.96005 \\ -0.11355 \end{pmatrix} \\ \vec{y}(h) = \vec{y}_0 + h \vec{k} &= \begin{pmatrix} 0.96005 \\ 0.88645 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit gilt $y(1) \approx 0.96005$.

- (d) Setzt man die numerischen Werte $t = 1$ und $k = \frac{1}{2}$ in (a) so erhält man $y(1) = 2 \sin(\frac{1}{2}) \approx 0.95885$ und diese Zahl stimmt recht gut mit der Approximation in (c) überein.

Lösung zu Aufgabe 4–18 :

- (a) Erstellen Sie ein File `pend.m` mit folgendem Inhalt

```
function res = pend(t,x)
    res = [x(2); -x(1)];
```

Dann kann eine Lösung erzeugt werden durch

```
t = linspace(0,2*pi);
[t,y] = ode_Runge('pend',t,[1,0],2);
plot(t,y)
plot(t,y(:,1))
```

- (b) Für 10 Schritte des Runge–Kutta Verfahrens kann das Resultat erzeugt werden durch

```
steps = 10;
[t,y] = ode_Runge('pend',[0,2*pi],[1,0],steps)
```

Die anderen Einträge sind analog zu erstellen. Es sollte die folgende Tabelle resultieren.

Methode	$y(2\pi)$	Fehler
Exakt	$y(2\pi) = 1.0$	0.0
Euler, 10 Schritte	$y(2\pi) \approx 4.12659$	2.12659
Euler, 100 Schritte	$y(2\pi) \approx 1.21771$	0.21771
Euler, 1000 Schritte	$y(2\pi) \approx 1.01993$	0.019935
Runge-Kutta, 10 Schritte	$y(2\pi) \approx 0.99592$	$-4.0801 \cdot 10^{-3}$
Runge-Kutta, 100 Schritte	$y(2\pi) \approx 1.000000$	$-4.2708 \cdot 10^{-8}$
Runge-Kutta, 1000 Schritte	$y(2\pi) \approx 1.000000$	$-4.2522 \cdot 10^{-13}$

- (c) Für das Verfahren von Euler erhalten wir $y(20\pi) \approx 7.14654$ und somit einen enormen Fehler. Die Methode von Runge–Kutta führt auf $y(20\pi) \approx 1.000$ mit einem Fehler von $-4.2711 \cdot 10^{-7}$.
- (d) Das Resultat zeigt, dass die Schrittweitensteuerung hier zu einer genaueren Lösung mit weniger Rechenaufwand führt.

Lösung zu Aufgabe 4–19 :

- (a) **Matlab**

```
function res = VolterraLotka(t,x)
    c1 = 1; c2 = 2; c3 = 1; c4 = 1;
    res = [(c1-c2*x(2))*x(1); ...
           (c3*x(1)-c4)*x(2)];
```

- (b) Die Graphiken deuten auf eine Periode von 2π .

- (c) Leicht, z.B.

Matlab

```
[t,y] = ode45('VolterraLotka',0,8,[2;2]) ;
figure(1); plot(y(:,1),y(:,2))
figure(2); plot(t,y)
```

- (d) Die Lösungen scheinen gegen einen stabilen Zustand zu konvergieren.

Matlab

```
[t,y] = ode45('VolterraLotka2',0,30,[2;2]);
plot(y(:,1),y(:,2))
```

Lösung zu Aufgabe 4–21 :

- (a) Mit der Funktion $f(x, y) = -x y^2 + x$, dem Anfangswert $y_0 = 2$ und $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k &= f(0, y_0) = -0 \cdot 2^2 + 0 = 0 \\ y_1 &= y_0 + h k = 2 + 0 = 2 \\ k &= f(h, y_1) = -0.5 \cdot 2^2 + 0.5 = -\frac{3}{2} \\ y_2 &= y_1 + h k = 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1.25 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach zwei Schritten des Verfahrens von Euler die approximative Lösung $y(1) \approx 1.25$.

- (b) Mit der Funktion $f(x, y) = -x y^2 + x$, dem Anfangswert $y_0 = 2$ und $h = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0, y_0) = -0 \cdot 2^2 + 0 = 0 \\ k_2 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_1) = -\frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ k_3 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_2) = -\frac{1}{2} \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{32} = -0.2815 \\ k_4 &= f(0 + h, y_0 + h k_3) = -1 \left(2 - \frac{9}{32}\right)^2 + 1 = -\left(\frac{55}{32}\right)^2 + 1 \approx -1.9541 \\ k &= \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \approx -0.91943 \\ y(1) &\approx x(0) + h k = 2 + 1 \cdot k \approx 1.08057 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach einem Runge–Kutta Schritt die approximative Lösung $y(1) \approx 1.08057$.

- * Ein genaueres numerisches Verfahren liefert $y(1) \approx 1.2795$. Die Abweichung des Verfahrens von Euler ist überraschenderweise kleiner. Da die Schrittweite **nicht klein** ist, kann dies vorkommen.

Lösung zu Aufgabe 4–22 :

- (a) Mit der Funktion $f(x, y) = x^2 y - x$, dem Anfangswert $y_0 = 1$ und $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k &= f(0, y_0) = 0^2 \cdot 1 - 0 = 0 \\ y_1 &= y_0 + h k = 1 + 0 = 1 \\ k &= f(h, y_1) = 0.5^2 \cdot 1 - 0.5 = -\frac{1}{4} \\ y_2 &= y_1 + h k = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach zwei Schritten des Verfahrens von Euler die approximative Lösung $y(1) \approx 0.875$.

(b) Mit der Funktion $f(x, y) = x^2 y - x$, dem Anfangswert $y_0 = 1$ und $h = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(0, y_0) &= 0^2 \cdot 1 - 0 &= 0 \\
 k_2 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_1) &= \frac{1}{2^2} 1 - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4} \\
 k_3 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_2) &= \frac{1}{2^2} (1 - \frac{1}{8}) - \frac{1}{2} = \frac{-9}{32} &= -0.3125 \\
 k_4 &= f(0 + h, y_0 + h k_3) &= 1^2 (1 - \frac{9}{32}) - 1 = \frac{-9}{32} &= -0.3125 \\
 k &= \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) && \approx -0.22396 \\
 y(1) &\approx x(0) + h k &= 1 + k &\approx 0.77604
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach einem Runge–Kutta Schritt die approximative Lösung $y(1) \approx 0.73091$. Ein genaueres numerisches Verfahren liefert $y(1) \approx 0.78189$.

Lösung zu Aufgabe 4–23 :

(a) Mit der Funktion $f(x, y) = -x y^2 + x$, dem Anfangswert $y_0 = 2$ und $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 k &= f(0, y_0) &= -0 \cdot 2^2 + 0 &= 0 \\
 y_1 &= y_0 + h k &= 2 + 0 &= 2 \\
 k &= f(h, y_1) &= -0.5 \cdot 2^2 + 0.5 &= -\frac{3}{2} \\
 y_2 &= y_1 + h k &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{2} &= \frac{5}{4} = 1.25
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach zwei Schritten des Verfahrens von Euler die approximative Lösung $y(1) \approx 1.25$.

(b) Mit der Funktion $f(x, y) = -x y^2 + x$, dem Anfangswert $y_0 = 2$ und $h = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(0, y_0) &= -0 \cdot 2^2 + 0 &= 0 \\
 k_2 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_1) &= -\frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{2} &= \frac{-3}{2} \\
 k_3 &= f(0 + h/2, y_0 + h/2 k_2) &= -\frac{1}{2} (2 - \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{2} = \frac{-9}{32} &= -0.2815 \\
 k_4 &= f(0 + h, y_0 + h k_3) &= -1 (2 - \frac{9}{32})^2 + 1 = -(\frac{55}{32})^2 + 1 &\approx -1.9541 \\
 k &= \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) && \approx -0.91943 \\
 y(1) &\approx x(0) + h k &= 2 + 1 \cdot k &\approx 1.08057
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nach einem Runge–Kutta Schritt die approximative Lösung $y(1) \approx 1.08057$.

* Ein genaueres numerisches Verfahren liefert $y(1) \approx 1.2795$. Die Abweichung des Verfahrens von Euler ist überraschenderweise kleiner. Da die Schrittweite **nicht klein** ist, kann dies vorkommen.

Lösung zu Aufgabe 4–24 :

(a) Mit den neuen Variablen $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = \dot{y}(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) && \text{mit/avec} && x_1(0) &= 0 \\
 \dot{x}_2(t) &= 4 x_1(t) + 2 && && x_2(0) &= 0
 \end{aligned}$$

(b) Mit $h = 1/4 = 0.25$ erhalten wir für den ersten Schritt

$$\begin{aligned}
 x_1(h) &= x_1(0) + h x_2(0) &= 0 + \frac{1}{4} 0 &= 0 \\
 x_2(h) &= x_2(0) + h (4 x_1(0) + 2) &= 0 + \frac{1}{4} (0 + 2) &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

und für den zweiten Schritt

$$\begin{aligned}x_1(2h) &= x_1(h) + h x_2(h) &= 0 + \frac{1}{4} \frac{1}{2} &= 0.125 \\x_2(2h) &= x_2(h) + h (4x_1(h) + 2) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (0 + 2) &= 1\end{aligned}$$

Somit ist das gesuchte Resultat $y(0.5) = 0.125$.

(c) Die Grundformel des Verfahrens von Heun für eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x(t)) \\k_2 &= f(x(t) + h k_1) \\x(t+h) &= x(t) + h \frac{k_1 + k_2}{2}\end{aligned}$$

Diese Grundformel kann nun auf das System angewandt werden. Mit $h = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} x_2(0) \\ 4x_1(0) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} x_2(0) + h 2 \\ 4(x_1(0) + h 0) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt

$$\frac{h}{2} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x_1(0.5) \\ x_2(0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \frac{h}{2} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist das gesuchte Resultat $y(0.5) = 0.25$.

Die exakte Lösung ist gegeben durch $y(t) = -0.5 + 0.5 \cosh(2t)$ und somit $y(0.5) \approx 0.27154$.

Lösung zu Aufgabe 4–25 : Die relevanten Stichworte sind Konvergenzordnung und Rechenzeitabschätzung. Die zugehörige Theorie ist in Abschnitt 4.3.5 (Seite 268) präsentiert.

(a) Für das Verfahren von Euler gilt

$$y(T) - y_h(T) \approx c h$$

Mit $h_0 = 10/1000$ erhalten wir aus den gegebenen Daten

$$\begin{aligned}y(10) + 0.6243496719 &= c h_0 \\y(10) + 0.5674257006 &= c \frac{h_0}{2}\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad 0.056924 = c \left(1 - \frac{1}{2}\right) h_0 = c \frac{1}{2} h_0$$

Daraus kann man $c h_0 = 0.11$ ablesen. Die verlangte Bedingung ist

$$10^{-8} \geq c h = c h_0 \frac{h}{h_0} = 0.11 \frac{h}{h_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{h_0}{h} \geq \frac{0.11}{10^{-8}} = 1.1 \cdot 10^7$$

Somit sind ca. $1.1 \cdot 10^7$ mal mehr Schritte notwendig, d.h. 10^{10} Schritte.

(b) Für das Verfahren von Runge–Kutta gilt

$$y(T) - y_h(T) \approx c h^4$$

Mit $h_0 = 10/100$ erhalten wir aus den gegebenen Daten

$$\begin{aligned} y(10) + 0.5122669759 &= c h_0^4 \\ y(10) + 0.5122887623 &= c \left(\frac{h_0}{2}\right)^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 2.2 \cdot 10^{-5} = c \left(1 - \frac{1}{16}\right) h_0^4 = c \frac{15}{16} h_0^4$$

Daraus kann man $c h_0^4 = 2.3 \cdot 10^{-5}$ ablesen. Die verlangte Bedingung ist

$$10^{-8} \geq c h^4 = c h_0^4 \left(\frac{h}{h_0}\right)^4 = 2.3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{h}{h_0}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_0}{h} \geq \sqrt[4]{\frac{2.3 \cdot 10^{-5}}{10^{-8}}} \approx 6.9$$

Somit sind ca. 6.9 mal mehr Schritte notwendig, d.h. 700 Schritte.

(c) Aufgrund der gegebenen Information können pro Sekunde ca. 4000 Berechnungen angestellt werden. Für die Berechnung mit Runge–Kutta sind $4 \cdot 700 = 2800$ Berechnungen der Funktion notwendig. Somit sollte das Resultat nach $\frac{2800}{4000} = 0.7$ Sekunden verfügbar sein.

Auf das Ergebnis mit den Verfahren von Euler kann man sehr lange warten. Eine Rechnung mit 10^5 Schritten zeigt noch einen Fehler von ≈ 0.001 . Für die Daten dieses Problems wurde auf dem Intervall $[0, 10]$ das Anfangswertproblem $\ddot{y}(t) = -y(t)^3$ mit $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 0$ gelöst.

Lösung zu Aufgabe 4–26: Die relevanten Stichworte sind Konvergenzordnung und Rechenzeitabschätzung. Die zugehörige Theorie ist in Abschnitt 4.3.5 (Seite 268) präsentiert.

(a) Für das Verfahren von Runge–Kutta gilt

$$y(T) - y_h(T) \approx c h^4$$

Mit $h_0 = 30/200$ erhalten wir aus den gegebenen Daten

$$\begin{aligned} y(30) + 0.241034139 &= c h_0^4 \\ y(30) + 0.243026980 &= c \left(\frac{h_0}{2}\right)^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot 10^{-3} = c \left(1 - \frac{1}{16}\right) h_0^4 = c \frac{15}{16} h_0^4$$

Daraus kann man $c h_0^4 = -2.1 \cdot 10^{-3}$ ablesen. Die verlangte Bedingung ist

$$10^{-8} \geq c h^4 = |c| h_0^4 \left(\frac{h}{h_0}\right)^4 = 2.1 \cdot 10^{-3} \left(\frac{h}{h_0}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_0}{h} \geq \sqrt[4]{\frac{2.1 \cdot 10^{-3}}{10^{-8}}} \approx 21.4$$

Somit sind ca. 22 mal mehr Schritte notwendig, d.h. 4400 Schritte.

(b) Aufgrund der gegebenen Information können pro Sekunde ca. 800 RK–Schritte ausgeführt werden. Somit sollte das Resultat nach $\frac{4400}{800} = 5.5$ Sekunden verfügbar sein.

Für die Daten dieses Problems wurde das folgende Anfangswertproblem gelöst auf dem Intervall $[0, 30]$.

$$\ddot{y}(t) = -y(t) - y(t)^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 0$$

```

T = 30;

function res = ode(t,y)
    res = [y(2), -y(1)-y(1)^3];
endfunction

[t1,y1] = ode_Runge('ode', [0,T], [1,0], 200);
y1(2,1)
[t1,y2] = ode_Runge('ode', [0,T], [1,0], 400);
y2(2,1)
difference = y1(2,1)-y2(2,1)

```

Lösung zu Aufgabe 4–28 : Die grundlegenden Formeln für das Verfahren von Heun (auch verbessertes Verfahren von Euler) sind

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t, x(t)) \\
 k_2 &= f(t+h, x(t) + h k_1) \\
 x(t+h) &= x(t) + h \frac{k_1 + k_2}{2}
 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist $h = 0.5$ und $x(0) = 2$. Man bestimmt Werte zu den Zeiten $t_0 = 0$, $t_1 = 0.5$ und $t_2 = 1$.

i	t_i	k_1	k_2	x_i
0	0.00	0.000	-2.00000	2.00000
1	0.50	-1.125	-0.87891	1.50000
2	1.00			0.99902

Das Resultat wurde erzeugt mit dem *Octave*-Code

```

Octave
function xdot = test(t,x)
    xdot = -t *x(1)^2;
endfunction

tend = 1; x0 = 2;
n = 2; h = tend/n;

t = linspace(0,tend,n+1); x = zeros([1,n+1]); k1= x; k2= x;
x(1) = x0;
for k = 1:n
    k1(k) = test(t(k),x(k));
    k2(k) = test(t(k)+h,x(k)+h*k1(k));
    x(k+1) = x(k) + h* (k1(k)+k2(k))/2;
endfor

[t;k1;k2; x]'

```

Lösung zu Aufgabe 4–29 :

(a) Methode von Euler mit $h = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 y\left(\frac{1}{4}\right) &= y(0) + h \left(1 + y^2(0)\right) = -1 + \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{-1}{2} \\
 y\left(\frac{1}{2}\right) &= y\left(\frac{1}{4}\right) + h \left(1 + y^2\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{16} = -0.1875
 \end{aligned}$$

(b) Methode von Runge–Kutta mit $h = \frac{1}{2}$. Setze $f(y) = 1 + y^2$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(-1) = 1 + (-1)^2 = 2 \\ k_2 &= f\left(-1 + \frac{1}{4} \cdot 2\right) = 1 + \left(-1 + \frac{1}{4} \cdot 2\right)^2 = \frac{5}{4} \\ k_3 &= f\left(-1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) = 1 + \left(-1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{-11}{16}\right)^2 = \frac{377}{256} \\ k_4 &= f\left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{377}{256}\right) = 1 + \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{377}{256}\right)^2 \approx 1.06952 \end{aligned}$$

und somit

$$y\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1 + \frac{1}{2 \cdot 6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx -0.29043$$

(c) Sei

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

Dann gilt

$$y'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

und

$$\begin{aligned} 1 + y^2(x) &= 1 + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)^2 \\ &= 1 + a_0^2 + x(2a_0a_1) + x^2(2a_0a_2 + a_1^2) \\ &\quad + x^3(2a_0a_3 + 2a_1a_2) + x^4(2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2) \end{aligned}$$

Durch gleichsetzen der Terme mit gleichem Exponenten erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + a_0^2 \\ 2a_2 &= 2a_0a_1 \\ 3a_3 &= 2a_0a_2 + a_1^2 \\ 4a_4 &= 2a_0a_3 + 2a_1a_2 \end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ gilt $a_0 = -1$ und man kann das System von oben nach unten auflösen.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + (-1)^2 = 2 \\ a_2 &= \frac{1}{2} (2(-1)2) = -2 \\ a_3 &= \frac{1}{3} (4 + 4) = \frac{8}{3} \\ a_4 &= \frac{1}{4} (-16/3 - 8) = \frac{-4}{3} - 2 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

Somit ist die Reihenentwicklung der Lösung gegeben durch

$$y(x) = -1 + 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^4 + \dots$$

und für $x = 1/2$ ergibt sich

$$y(0.5) \approx -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{10}{3 \cdot 16} = \frac{-3}{8} = -0.375$$

Die exakte Lösung dieser Gleichung ist $y(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ und somit $y(0.5) \approx -0.293408$. Dies ist eine weitere Illustration, dass Runge–Kutta in der Regel viel genauere Resultate liefert.

Lösung zu Aufgabe 4–30 :

(a)

$$\begin{aligned}
y'' &= -k(L-x)^2 = -k(L^2 - 2Lx + x^2) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \\
s^2 Y(s) &= -k \left(\frac{L^2}{s} - \frac{2L}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) \\
Y(s) &= -k \left(\frac{L^2}{s^3} - \frac{2L}{s^4} + \frac{2}{s^5} \right) \\
y(x) &= -k \left(\frac{L^2}{2} x^2 - \frac{2L}{6} x^3 + \frac{2}{24} x^4 \right) \\
y(x) &= -k x^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L}{3} x + \frac{1}{12} x^2 \right)
\end{aligned}$$

(b) Mit $y_1 = y$ und $y_2 = y'$ gilt

$$\frac{d}{dx} \vec{y} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -k(L-x)^2 \end{pmatrix} = \vec{F}(x, \vec{y})$$

(c) Somit gilt für die numerische Approximation

$$\begin{aligned}
\vec{y}(L/3) &= \vec{y}(0) + \frac{L}{3} \vec{F}(0, \vec{y}(0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{L}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -kL^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-kL^3}{3} \end{pmatrix} \\
\vec{y}(2L/3) &= \vec{y}(L/3) + \frac{L}{3} \vec{F}(L/3, \vec{y}(L/3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-kL^3}{3} \end{pmatrix} + \frac{L}{3} \begin{pmatrix} \frac{-kL^3}{3} \\ -k(\frac{2L}{3})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-kL^4}{9} \\ \frac{-13kL^3}{27} \end{pmatrix} \\
\vec{y}(L) &= \vec{y}(2L/3) + \frac{L}{3} \vec{F}(2L/3, \vec{y}(2L/3)) = \begin{pmatrix} \frac{-kL^4}{9} \\ \frac{-13kL^3}{27} \end{pmatrix} + \frac{L}{3} \begin{pmatrix} \frac{-13kL^3}{27} \\ -k(\frac{L}{3})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-kL^4}{9} - \frac{13kL^4}{81} \\ \frac{-13kL^3}{27} - k(\frac{L}{3})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-22kL^4}{81} \\ \frac{-14kL^3}{27} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist die Auslenkung bei $x = L$ gegeben durch

$$y_{\text{num}}(L) = \frac{-22kL^4}{81}$$

(d) Dies ist zu vergleichen mit der exakten Lösung

$$y_{\text{exakt}}(L) = -kL^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L}{3}L + \frac{1}{12}L^2 \right) = -kL^4 \frac{6-4+1}{12} = -kL^4 \frac{1}{4}$$

Man sieht, dass die Differenz nicht sehr gross ist.

Lösung zu Aufgabe 4–32 :

(a) Das Gesetz von Newton führt auf

$$m \ddot{x}(t) = -kx(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = -v_0$$

(b) Diese Gleichung ist elementar lösbar

$$x(t) = -v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

- (c) Die Feder verliert den Kontakt falls die Kraft von der Feder auf die Masse nach links wirken würde, d.h. bei $x(t) = 0$. Somit ist die gesuchte Bedingung

$$\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 1\right) = 0 \quad \Longleftarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} 1 = \pi \quad \Longleftarrow \quad k = m \pi^2$$

Lösung zu Aufgabe 4–33 :

- (a) Wahl der Variablen:

$$\begin{aligned} i_1 &= \text{Strom von } A \text{ zu } B \\ u_1 &= \text{Spannung zwischen } C \text{ und } A \end{aligned}$$

- Kirchhoff's Knotenregel im Knoten A

$$i_s - i_1 - \frac{5}{3} \frac{d u_1}{dt} = 0$$

- Kirchhoff's Knotenregel im Knoten B

$$i_1 - 1 u_2 - \frac{1}{6} \frac{d u_2}{dt} = 0$$

- Kirchhoff's Maschenregel im Kreis mit C_1 , R und I .

$$\frac{3}{5} \frac{d i_1}{dt} - u_1 + u_2 = 0$$

- (b)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-i_1 + i_s) \\ 6(-u_2 + i_1) \\ \frac{5}{3}(u_1 - u_2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{5} \\ 0 & -6 & 6 \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} i_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Eine partikuläre, konstante Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{5} \\ 0 & -6 & 6 \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} i_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese stationäre Lösung kann auch leicht erraten werden, da im ursprünglichen Differentialgleichungssystem nur Differenzen von Komponenten auftauchen. Für die Lösung des homogenen Problems können die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix verwendet werden.

$$\lambda_1 = -1, \vec{e}_1 \approx \begin{pmatrix} 0.35857 \\ 0.71714 \\ 0.59761 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2, \vec{e}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.16415 \\ 0.82076 \\ 0.54718 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -3, \vec{e}_3 \approx \begin{pmatrix} 0.08909 \\ 0.89087 \\ 0.44544 \end{pmatrix}$$

und somit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ i_1(t) \end{pmatrix} = i_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0.35857 \\ 0.71714 \\ 0.59761 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0.16415 \\ 0.82076 \\ 0.54718 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0.08909 \\ 0.89087 \\ 0.44544 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–34 : Das Gesetz von Newton führt zu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) &= -k(y_1 - y_2) + F(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) &= +k(y_1 - y_2) - 1 \dot{y}_2(t) \end{aligned}$$

oder mit den Zahlenwerten und $\dot{y}_1 = v_1$ und $\dot{y}_2 = v_2$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \dot{v}_1(t) &= -\frac{5}{3}(y_1 - y_2) + F(t) \\ \frac{1}{6} \dot{v}_2(t) &= +\frac{5}{3}(y_1 - y_2) - v_2(t) \end{aligned}$$

Mit $z = \frac{5}{3}(y_1 - y_2)$ ergibt sich das System

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \dot{v}_1 &= -z + F(t) \\ \frac{1}{6} \dot{v}_2 &= -v_2 + z \\ \frac{3}{5} \dot{z} &= +v_1 - v_2 \end{aligned}$$

und dies stimmt mit dem System der vorangehenden Aufgabe überein.

Lösung zu Aufgabe 4–35 :

(a)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

(b) Eine mögliche Notation (Substitution) ist

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \dot{x}_1, \quad y_4 = \dot{x}_2$$

Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ m_1 \dot{y}_3 &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) + f(t) \\ m_2 \dot{y}_4 &= -k_2(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

die mit Hilfe einer Matrix geschrieben werden als

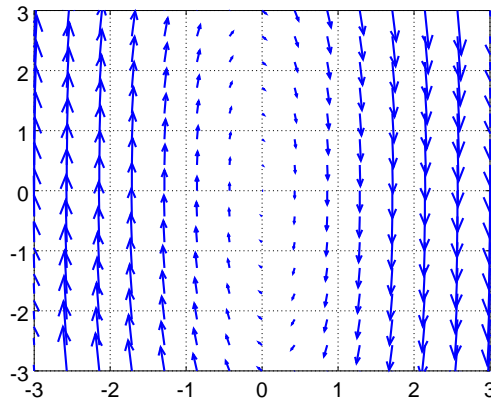
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f(t)}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–37 :

(a) Mit $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$ gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -16x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

(b) Die Graphik wurde mit *Octave* erzeugt.



Lösung zu Aufgabe 4–38 : Zuerst als System umschreiben

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -t^2 y_2(t) - y_1(t) \end{pmatrix} = \vec{F}(t, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bei zwei Schritten der Verfahrens von Euler ist $h = 0.5$ zu wählen. Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(h) \\ y_2(h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_2(0) \\ -0^2 y_2(0) - y_1(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(2h) \\ y_2(2h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1(h) \\ y_2(h) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_2(h) \\ -h^2 y_2(h) - y_1(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{4} \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{16} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $y(1) \approx 0.75$.

(b) Bei einem Schritt der Verfahrens von Runge–Kutta ist $h = 1$ zu wählen. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{F}(0, \vec{y}(0)) = \begin{pmatrix} y_2(0) \\ -0^2 y_2(0) - y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{k}_2 &= \vec{F}\left(\frac{h}{2}, \vec{y}(0) + \frac{h}{2} \vec{k}_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \frac{-1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix} \\ \vec{k}_3 &= \vec{F}\left(\frac{h}{2}, \vec{y}(0) + \frac{h}{2} \vec{k}_2\right) \\ &= \vec{F}\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{1}{4} \frac{-7}{16} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -0.64062 \end{pmatrix} \\
\vec{k}_4 &= \vec{F}(h, \vec{y}(0) + h \vec{k}_3) \\
&= \vec{F}\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -0.64062 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -0.64062 \\ 0.64062 - \frac{9}{16} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun gilt für Runge–Kutta

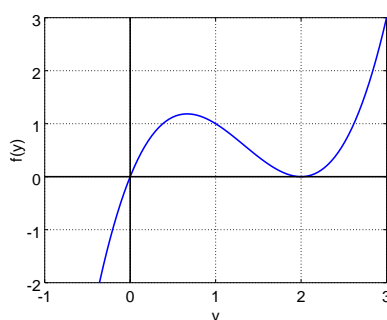
$$\vec{y}(1) = \vec{y}(0) + \frac{h}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \approx \begin{pmatrix} 0.58073 \\ -0.65885 \end{pmatrix}$$

Also gilt hier $y(1) \approx 0.580$

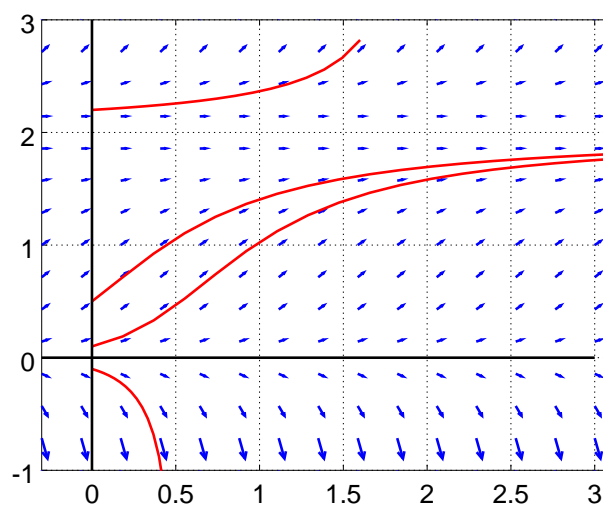
Die Reihenentwicklung ergibt $y(1) \approx 0.59$.

Lösung zu Aufgabe 4–39 :

(a) Die Differentialgleichung ist autonom und der Graph der Funktion $y = f(x)$ gegeben durch



Somit können das Vektorfeld und die Lösungen skizziert werden.



(b) Siehe oben

(c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2$

(d) Die Grundformel ist $x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t, x(t))$ mit $h = 1/3$ und $x(0) = 1.0$.

t	$x(t)$	$f(t, x(t))$	$x(t) + h \cdot f(t, x(t))$
0	1.0	1.0	1.33333
0.33333	1.33333	0.592593	1.53086
0.66667	1.53086	0.336925	1.64317
1.0	1.64317		

Lösung zu Aufgabe 4–40 : Die Aufgabe kann mittels Laplacetransformation oder mit Eigenwerten gelöst werden. Hier ist eine Lösung mit Hilfe von Eigenwerten.

(a) Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $(\alpha - \lambda)^2 + 1 = 0$ und somit gegeben durch $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Um einen zugehörigen Eigenvektor zu bestimmen muss das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \alpha - \lambda_1 & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Eine einfache Lösung ist $(x, y)^T = (i, 1)$. Somit haben wir eine komplexe Lösung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{(\alpha+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \left(\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir (als Real- und Imaginärteil) zwei reelle Lösungen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(b) Die gesuchte Lösung ist offensichtlich

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(c) Die Lösungen sind immer im Gegenuhrzeigersinn drehende Spiralen (bei $\alpha = 0$ Kreise) mit dem folgenden Stabilitätsverhalten

$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
stabil	Kreise	instabil

(d) Exponentiell anwachsende Spiralen, im Gegenuhrzeigersinn drehend. Bei einer Umdrehung wird der Radius um den Faktor e vergrößert.

Lösung zu Aufgabe 4–41 : Zu untersuchen ist das lineare System von Differentialgleichungen mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Die Eigenwerte und Vektoren sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.82843 & , & \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.67860 \\ 0.28108 \\ 0.67860 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= -4.82843 & , & \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.35741 \\ -0.86286 \\ 0.35741 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= -6 & , & \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -0.70711 \\ 0 \\ 0.70711 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \vec{v}_3 \\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{0.83t} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.281 \\ 0.679 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4.8t} \begin{pmatrix} 0.357 \\ -0.863 \\ 0.357 \end{pmatrix} + c_3 e^{-6t} \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Zu lösen ist das System

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.281 \\ 0.679 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0.357 \\ -0.863 \\ 0.357 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{bmatrix} 0.679 & 0.357 & -0.707 \\ 0.281 & -0.863 & 0 \\ 0.679 & 0.357 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $(c_1, c_2, c_3) = (1.15, -0.784, 0.707)$. Die Lösung ist nun

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = 1.15 e^{0.83t} \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.281 \\ 0.679 \end{pmatrix} - 0.784 e^{-4.8t} \begin{pmatrix} 0.357 \\ -0.863 \\ 0.357 \end{pmatrix} + 0.707 e^{-6t} \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

(c) In der obigen Formel kann die dritte Komponente bei $t = 3$ berechnet werden. Man erhält $z(3) \approx 9.3675$. Für den Vektor erhält man

$$\begin{pmatrix} x(3) \\ y(3) \\ z(3) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 9.3675 \\ 3.8801 \\ 9.3675 \end{pmatrix}$$

- (d) Für sehr grosse Werte von t ist nur noch der Beitrag des grössten Eigenwertes ($\lambda_1 = +0.83$) relevant. Da $c_1 > 0$ ist, gilt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = +\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.679 \\ 0.281 \\ 0.679 \end{pmatrix}$$

Für kleine grosse Werte von t ist nur noch der Beitrag des kleinsten Eigenwertes ($\lambda_3 = -6$) relevant. Da $c_3 > 0$ ist, gilt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = +\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–42 :

(a)

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Offensichtlich spielt die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

eine wichtige Rolle. Die Eigenwerte können als Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt werden.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 0.5 = 0$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind approximativ gegeben durch (TI/HP/Octave/MATLAB)

```
A = [-2 1 0; 0.5 -1 0.5; 0 1 -1];
[EV,EV] = eig(A)
Frequenzen = sqrt(-diag(EV)) / (2*pi)
```

Eigenwert	$\lambda_1 = -2.45161$	$\lambda_2 = -1.40303$	$\lambda_3 = -0.14536$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} +0.87681 \\ -0.39597 \\ +0.27278 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +0.53072 \\ +0.31682 \\ -0.78610 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +0.33061 \\ +0.61316 \\ +0.71745 \end{pmatrix}$

Die drei Kreisfrequenzen sind die Wurzeln aus den Eigenwerten (b.z.w. deren Absolutbetrag) und somit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} 2.45161} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} 1.40303} \quad , \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} 0.14536}$$

Die Frequenzen ν_i sind nun gegeben durch $\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ und somit

$$\nu_1 \approx 0.2492 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \nu_2 \approx 0.1885 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \nu_3 \approx 0.060680 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- (c) Der erste Eigenwert führt zur grössten Frequenz. Deshalb ist der erste Eigenvektor zu betrachten. Die beiden äusseren Massen schwingen parallel, die Masse links mit grösserer Amplitude. Die mittlere Masse schwingt gegengleich mit einer mittleren Amplitude.

Lösung zu Aufgabe 4–43 :

(a)

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Offensichtlich spielt die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

eine wichtige Rolle. Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind approximativ gegeben durch

Eigenwert	$\lambda_1 = -0.38197$	$\lambda_2 = -2$	$\lambda_3 = -2.61803$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} 0.46534 \\ 0.75294 \\ 0.46534 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.70711 \\ 0 \\ -0.70711 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.64794 \\ 0.40045 \\ -0.64794 \end{pmatrix}$

Die drei Kreisfrequenzen sind die Wurzeln aus den Eigenwerten (b.z.w. deren Absolutbetrag) und somit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} 0.38197, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} 2, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}} 2.61803$$

Die Frequenzen ν_i sind nun gegeben durch

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

und somit

$$\nu_1 \approx 0.098 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu_2 \approx 0.22 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu_3 \approx 0.26 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- (c) Der dritte Eigenwert führt zur grössten Frequenz. Deshalb ist der dritte Eigenvektor zu betrachten. Die beiden äusseren Massen schwingen parallel mit gleicher Amplitude, die mittlere Masse schwingt gegengleich mit einer um den Faktor $\frac{0.40}{0.65} \approx 0.6$ kleineren Amplitude.

Lösung zu Aufgabe 4–44 :

(a)

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Offensichtlich spielt die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

eine wichtige Rolle. Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind approximativ gegeben durch

Eigenwert	$\lambda_1 = -2.61803$	$\lambda_2 = -1$	$\lambda_3 = -0.38197$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} 0.28316 \\ -0.91632 \\ 0.28316 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.70711 \\ 0 \\ -0.70711 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5324 \\ 0.65809 \\ 0.53241 \end{pmatrix}$

Die drei Kreisfrequenzen sind die Wurzeln aus den Eigenwerten (b.z.w. deren Absolutbetrag) und somit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} 2.61803, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} 1, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}} 0.38197$$

Die Frequenzen ν_i sind nun gegeben durch

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

und somit

$$\nu_1 \approx 0.258 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu_2 \approx 0.159 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu_3 \approx 0.098 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(c) Der erste Eigenwert führt zur grössten Frequenz. Deshalb ist der erste Eigenvektor zu betrachten. Die beiden äusseren Massen schwingen parallel mit gleicher Amplitude, die mittlere Masse schwingt gegengleich mit einer um den Faktor $\frac{0.91}{0.28} \approx 3$ grösseren Amplitude.

Lösung zu Aufgabe 4–45 :

(a) Die entsprechende Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Sei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Es muss einen Eigenvektor geben mit den folgenden Eigenschaften:

- Alle Komponenten positiv (paralleles Schwingen).
- Erste und dritte Komponente gleich gross, die zweite um den Faktor 1.5 grösser (Amplituden).

Eine einfache Form dieses Eigenvektors ist somit $(1, 1.5, 1)^T$ und das Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein.

(c) Somit erhält man das System

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} -0.5 &= \lambda \\ -\alpha &= \lambda 1.5 \\ -0.5 &= \lambda \end{aligned}$$

Dieses System wird gelöst durch

$$\lambda = \frac{-1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{-3\lambda}{2} = \frac{3}{4}$$

Die entsprechenden Lösungen enthalten die Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}|\lambda|} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \text{und somit} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Lösung zu Aufgabe 4–46 : Die Anfangswerte können 0 gewählt werden, dadurch werden die Rechnungen vereinfacht.

$$\begin{aligned} (s+6)X + 2Y &= F \\ -4X + (s+15)Y &= 0 \end{aligned}$$

(a) In diesem System kann X eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} ((s+15)(s+6)+8)Y &= 4F \\ Y &= \frac{4}{s^2+21s+98} F \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{4}{s^2+21s+98}$$

(b) Schreibt man das System als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

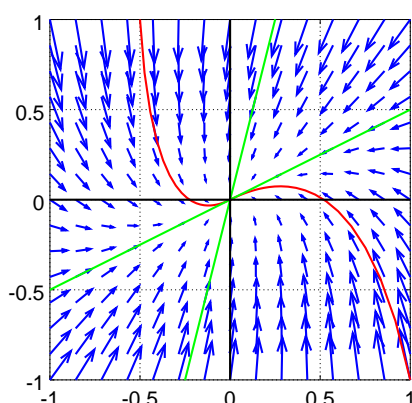
so ist die zu untersuchende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -15 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten und Vektoren

Eigenwert	$\lambda_1 = -14$	$\lambda_2 = -7$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Die graphische Lösung wurde mit *Octave* erzeugt.



(d) Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-14t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für grosse Werte von t wird nur noch der langsamer gegen Null konvergierende Anteil (e^{-7t}) relevant sein und somit

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 2$$

Der „typische“ Fall tritt nicht ein, falls $c_2 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4–47 :

(a) Schreibt man das System als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} +2.5 & +0.9 \\ -1.7 & -1.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

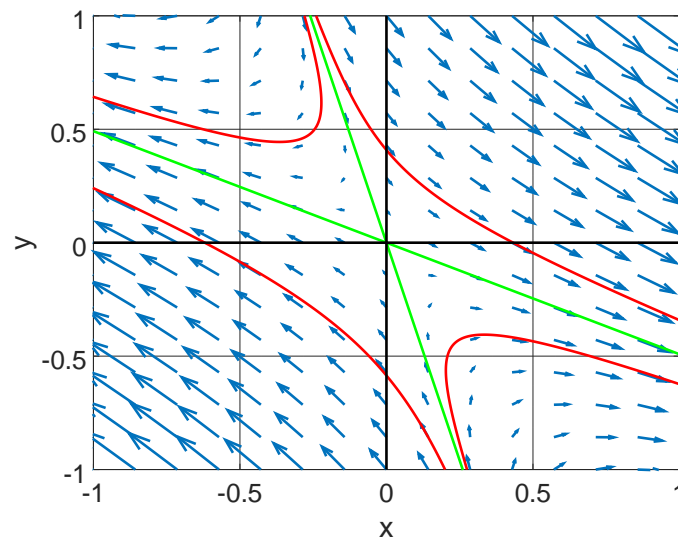
so ist die zu untersuchende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +2.5 & +0.9 \\ -1.7 & -1.4 \end{bmatrix}$$

mit den (approximativen) Eigenwerten und Vektoren

Eigenwert	$\lambda_1 \approx +2.06$	$\lambda_2 \approx -0.96$
Eigenvektor	$\vec{e}_1 \approx \begin{pmatrix} +0.90 \\ -0.44 \end{pmatrix}$	$\vec{e}_2 \approx \begin{pmatrix} -0.25 \\ +0.97 \end{pmatrix}$

(b) Die graphische Lösung wurde mit *Octave* erzeugt.



(c) Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{+2.06t} \begin{pmatrix} +0.90 \\ -0.44 \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.96t} \begin{pmatrix} -0.25 \\ +0.97 \end{pmatrix}$$

Für grosse Werte von t wird nur noch der Anteil ($e^{+2.06t}$) relevant sein und somit

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{+0.90}{-0.44} \approx -2$$

Der „typische“ Fall tritt nicht ein, falls $c_2 = 0$.

(d) Dies tritt ein falls $c_1 = 0$ und somit ist die Bedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \alpha \vec{e}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -0.25 \\ +0.97 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 4–48 : Die Anfangswerte können 0 gewählt werden, dadurch werden die Rechnungen vereinfacht.

$$\begin{aligned} (s-2)X - 4Y &= F \\ -24X + (s+2)Y &= 0 \end{aligned}$$

(a) In diesem System kann X eliminiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned} (-4 \cdot 24 + (s+2)(s-2))Y &= 24F \\ Y &= \frac{24}{s^2 - 4 - 96} F \end{aligned}$$

Somit ist die Transferfunktion gegeben durch

$$G(s) = \frac{24}{s^2 - 4 - 96} = \frac{24}{s^2 - 100}$$

(b) Schreibt man das System als

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} +2 & +4 \\ +24 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

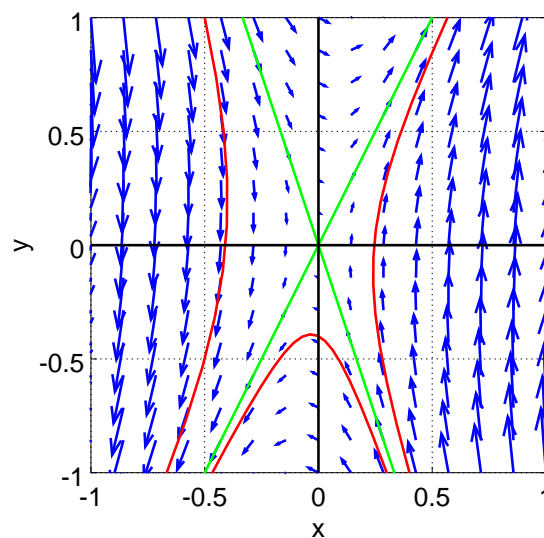
so ist die zu untersuchende Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +2 & +4 \\ +24 & -2 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten und Vektoren

Eigenwert	$\lambda_1 = -10$	$\lambda_2 = +10$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) Die graphische Lösung wurde mit *Octave* erzeugt.



(d) Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-10t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{+10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für grosse Werte von t wird nur noch der Anteil (e^{+10t}) relevant sein und somit

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{1}{2}$$

Der „typische“ Fall tritt nicht ein, falls $c_2 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4–49 : Zuerst die Eigenwerte bestimmen als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -1.5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

Dann die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}) \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 + 1 & -1.5 \\ 0 & 2 + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zu $\lambda_2 = +2$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbb{I}) \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -1-2 & -1.5 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ergibt die einfache Lösung (andere sind möglich)

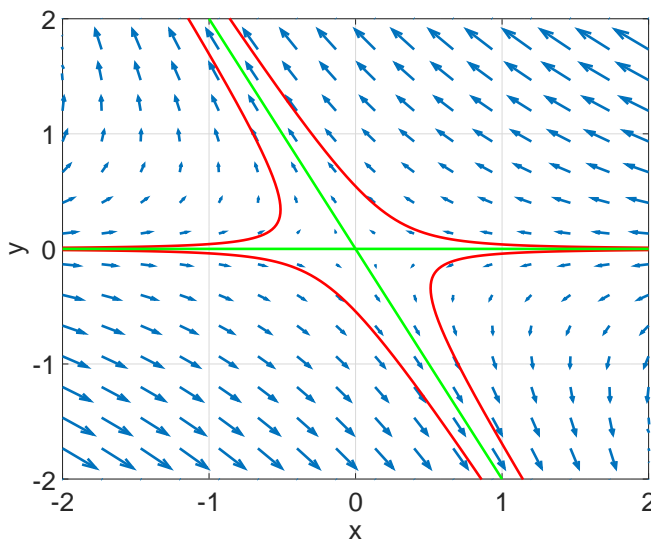
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich die Fragen nun leicht beantworten.

(a)

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{+2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) und (c). Vier typische Lösungen sind zusätzlich eingezeichnet.



Verwende die explizite Formel
oder die Graphik

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -2$$

$$B = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

Die obige Graphik wurde mit Octave oder MATLAB erzeugt.

```
A = [-2 -1; 4 0] / [-1 1; 2 0] % matrix to be examined
[v, la] = eig(A) % eigenvalues and eigenvectors

t = linspace(0, 5); % solve the ODE with 4 initial values
[t1, xy1] = ode45(@(t, x) A*x, t, [2; 0.01]);
[t2, xy2] = ode45(@(t, x) A*x, t, [-2; 0.01]);
[t3, xy3] = ode45(@(t, x) A*x, t, [2; -0.01]);
[t4, xy4] = ode45(@(t, x) A*x, t, [-2; -0.01]);

x = linspace(-2, 2, 16); y = linspace(-2, 2, 16); % compute the vector field
Vx = zeros(length(y), length(x)); Vy = Vx;
for i = 1:length(y)
    for j = 1:length(x)
        v = A*[x(i); y(j)];
```

```

    Vx(j,i) = v(1); Vy(j,i) = v(2);
end%for
end%for

figure(1); clf
quiver(x,y,Vx,Vy)    % display the vector field
grid on
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-2,2,-2,2]);
hold on              % show the 4 solutions too
plot(xy1(:,1),xy1(:,2),'r')
plot(xy2(:,1),xy2(:,2),'r')
plot(xy3(:,1),xy3(:,2),'r')
plot(xy4(:,1),xy4(:,2),'r')
plot([-1 1],[2,-2],'g',[-2,2],[0,0],'g') % plot the eigen directions
hold off
% print -dpdfwrite EigField.pdf

```

Lösung zu Aufgabe 4–50 :

(a) Laplacetransformation des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} sX - a &= X + 4Y \\ sY &= X - 2Y \end{aligned}$$

Als lineares Gleichungssystem für X und Y schreiben

$$\begin{aligned} (s-1)X - 4Y &= a \\ -X + (s+2)Y &= 0 \end{aligned}$$

 X und Y isolieren durch geeignete Zeilenaddition oder Subtraktion

$$\begin{aligned} ((s-1)(s+2)-4)X &= a(s+2) \\ ((s-1)(s+2)-4)Y &= a \end{aligned}$$

Verwende $(s-1)(s+2)-4 = s^2 + s - 6 = (s+3)(s-2)$. Nach X und Y auflösen

$$\begin{aligned} X &= \frac{a(s+2)}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s-2)} \\ Y &= \frac{a}{(s+3)(s-2)} = \frac{C}{(s+3)} + \frac{D}{(s-2)} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung erhalten wir mittels $s = -3$ und $s = 2$ als

$$\begin{aligned} X &= \frac{a/5}{(s+3)} + \frac{a4/5}{(s-2)} \\ Y &= \frac{-a/5}{(s+3)} + \frac{a/5}{(s-2)} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{5} (e^{-3t} + 4e^{2t}) \\ y(t) &= \frac{a}{5} (-e^{-3t} + e^{2t}) \end{aligned}$$

(b) Die zu lösende Gleichung ist

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$. Der erste Eigenvektor ist bestimmt als Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 1 + 3 & 4 \\ 1 & -2 + 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 4x + 4y = 0$$

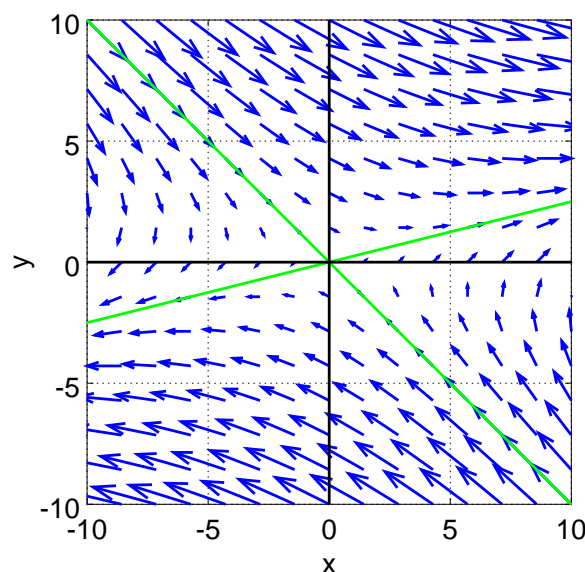
Eine ganzzahlige Lösung ist $\vec{e}_1 = (1, -1)^T$. Der zweite Eigenvektor ist bestimmt als Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 & 4 \\ 1 & -2 - 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -x + 4y = 0$$

Eine ganzzahlige Lösung ist $\vec{e}_2 = (4, 1)^T$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) In den Richtungen der Eigenvektoren ist das Verhalten bereits gegeben.



Lösung zu Aufgabe 4-51 :

(a) Verwenden Sie $e^z \approx z$ und $\sin z \approx z$ für z nahe bei 0.

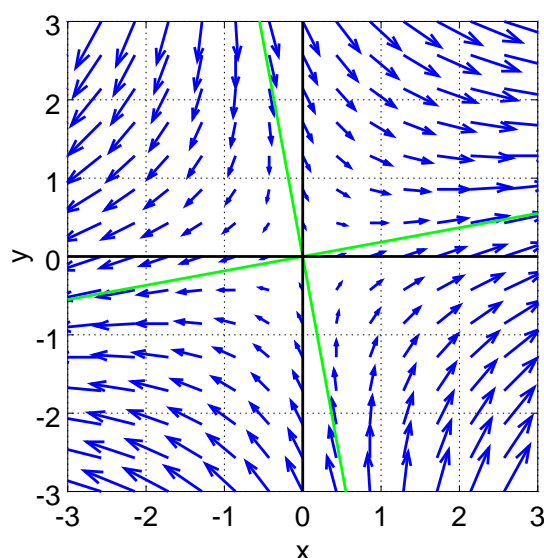
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}$$

(b) Die zu untersuchende Matrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten und Vektoren

Eigenwert	$\lambda_1 = 3.19$	$\lambda_2 = -2.19$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.18 \\ 0.98 \end{pmatrix}$



Lösung zu Aufgabe 4–52 :

(a) Verwenden Sie $e^z \approx 1 + z$ und $\sin z \approx z$ für z nahe bei 0.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

(b) Die zu untersuchende Matrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

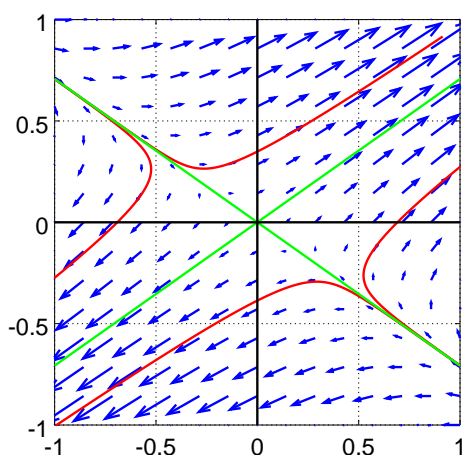
mit den Eigenwerten und Vektoren

Eigenwert	$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$	$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$
Eigenvektor	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

(c) Die graphische Lösung wurde mit *Mathematica* erzeugt.

**Lösung zu Aufgabe 4–53 :**

(a) Die Linearisierung liefert

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4 & -2.4 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} -1.4 - \lambda & -2.4 \\ -0.6 & 0.4 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 0.4 \cdot 1.4 - 0.6 \cdot 2.4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

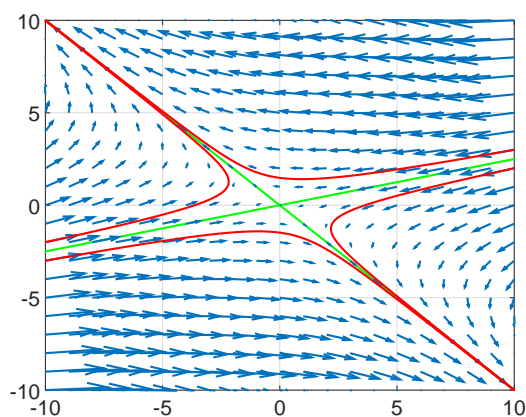
$$\lambda_1 = +1 \quad , \quad -2.4x - 2.4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad , \quad +0.6x - 2.4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Mit den obigen Eigenvektoren



VectorField2017.m

```

A = [-1.4 , -2.4; -0.6, +0.4]; % give the matrix
% eigenvalues and eigen vectors
[EV,EV] = eig(A);
figure(1)
plot(20*EV(1,1)*[-1 1],20*EV(2,1)*[-1 1], 'g', ...
      20*EV(1,2)*[-1 1],20*EV(2,2)*[-1 1], 'g')
axis([-10 10,-10 10])
% the vector field
[x,y] = meshgrid([-10 :1:10],[-10 :1:10]);
Vx = A(1,1)*x+A(1,2)*y;
Vy = A(2,1)*x+A(2,2)*y;

hold on
quiver(x,y,Vx,Vy,2)
% solutions of the differential equations
t = linspace(0,4);
[t1,x1] = ode45(@(t,x)A*x,t,[-10;-3]);
[t2,x2] = ode45(@(t,x)A*x,t,[-10;-2]);
[t3,x3] = ode45(@(t,x)A*x,t,[+10;+2]);
[t4,x4] = ode45(@(t,x)A*x,t,[+10;+3]);
plot(x1(:,1),x1(:,2), 'r', x2(:,1),x2(:,2), 'r', ...
      x3(:,1),x3(:,2), 'r', x4(:,1),x4(:,2), 'r')
hold off
print -dpdfwrite VectorField2017.pdf

```

Lösung zu Aufgabe 4–54 : Die Aufgabe wurde dem Buch [Jame92, p 666] entnommen.

(a) Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
 dT &= -k (T^4 - T_0^4) dt \\
 \frac{1}{T^4 - T_0^4} dT &= -k dt \\
 \int \frac{1}{(T - T_0)(T + T_0)(T^2 + T_0^2)} dT &= -k t + c
 \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{(T - T_0)(T + T_0)(T^2 + T_0^2)} = \frac{A}{T - T_0} + \frac{B}{T + T_0} + \frac{C + DT}{T^2 + T_0^2}$$

Nun setzt man nacheinander $T = T_0$, $T = -T_0$ und $T = iT_0$ und erhält

$$\begin{aligned}
 1 &= A(T + T_0)(T^2 + T_0^2) + B(T - T_0)(T^2 + T_0^2) + (C + DT)(T - T_0)(T + T_0) \\
 1 &= A 4T_0^3 \\
 1 &= -B 4T_0^3 \\
 1 &= -(C + iDT_0) 2T_0^2
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A = \frac{1}{4T_0^3}, \quad B = \frac{-1}{4T_0^3}, \quad C = \frac{-1}{2T_0^2} \quad \text{und} \quad D = 0$$

Somit gilt

$$-k t + c = \int \frac{1}{(T - T_0)(T + T_0)(T^2 + T_0^2)} dT$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4T_0^3} \int \frac{1}{T-T_0} - \frac{1}{T+T_0} dT + \frac{-1}{2T_0^2} \int \frac{1}{T^2+T_0^2} dT \\
&= \frac{1}{4T_0^3} \ln \frac{|T-T_0|}{T+T_0} - \frac{1}{2T_0^3} \arctan \frac{T}{T_0} \\
4T_0^3 (kt - c) &= \ln \frac{|T-T_0|}{T+T_0} + 2 \arctan \frac{T}{T_0}
\end{aligned}$$

Für $t \rightarrow +\infty$ muss gelten $\ln \frac{|T(t)-T_0|}{T+T_0} + 2 \arctan \frac{T(t)}{T_0} \rightarrow +\infty$. Da die Funktion \arctan beschränkt ist muss die Funktion $\ln \frac{|T(t)-T_0|}{T+T_0}$ gegen unendlich konvergieren. Somit muss $T(t) \rightarrow T_0$ gelten.

(b) Figur

(c) Linearisierung bei $T = T_0$

$$\frac{dT}{dt} = -4kT_0^3 (T - T_0)$$

Lösung zu Aufgabe 4-55 :

(a) Mit den neuen Variablen $u_1 = y$, $u_2 = y'$ und $u_3 = y''$ gilt

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= u_2(x) \\
u_2'(x) &= u_3(x) \\
u_3'(x) &= -u_1(x) - 5u_2(x) - 5u_3(x)
\end{aligned}$$

oder mit Hilfe einer Matrix

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Eigenwerte sind Lösung der Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -5 & -5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -5-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Das führt auf

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

Da eine Nullstelle $\lambda_1 = -1$ bereits bekannt ist kann durch $(\lambda + 1)$ dividiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 1 &= 0 \\
(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) &= 0 \\
(\lambda + 1)((\lambda + 2)^2 - 3) &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösungen der noch zu lösenden quadratischen Gleichung sind $\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$.

(c) Der Eigenwert $\lambda = -3 + \sqrt{3}$ hat den grössten Realteil, deshalb wird der entsprechende Lösungsanteil für grosse Zeiten x dominieren. Die entsprechende Lösung hat den Faktor $e^{(-2+\sqrt{3})x}$. Ableiten dieses Terms führt zu einem Faktor $(-2 + \sqrt{3})$. Folglich gilt

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{y'(x)} = \frac{1}{(-2 + \sqrt{3})} \approx -3.73$$

Dieses Resultat tritt auch als Quotient der ersten und zweiten Komponente des entsprechenden Eigenvektors auf.

4.7 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- einige Terme der Potenzreihenentwicklung von Lösungen von Differentialgleichungen bestimmen können.
- wenige Schritte der Verfahren von Euler, Heun und Runge–Kutta an einfachen Beispielen ausführen können.
- mit den Begriffen Konvergenzordnung, Extrapolation und Schrittweitenkontrolle für numerische Verfahren vertraut sein.
- Gleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln können.
- Vektorfelder von Systemen von zwei Gleichungen und Phasenporträts von Gleichungen zweiter Ordnung skizzieren können.
- das Verhalten der Lösungen von Systemen von linearen Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten) beschreiben können.
- die Linearisierung von Differentialgleichungen bei kritischen Punkten zuverlässig bestimmen können und Konsequenzen über das Verhalten der Lösungen ablesen können (Stichwort Eigenwerte).

Literaturverzeichnis

- [Acto90] F. S. Acton. *Numerical Methods that Work; 1990 corrected edition*. Mathematical Association of America, Washington, 1990.
- [Aman83a] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1983.
- [BurgGrah80] D. Burghes and A. Graham. *Introduction to Control Theory, including Optimal Control*. Ellis Horwood, Chichester, 1980.
- [Hart84] J. P. den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Dover, 1984.
- [Stef67] J. J. DiStefano, A. R. Stubberud, and I. J. Williams. *Feedback and Control Systems*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [Ebel91] T. Ebel. *Regelungstechnik*. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [Foel94] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hütig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [Graf96] U. E. Graf. *Mathematica Package Laplace- and z-Transforms*. Ingenieurschule Biel, 1996.
- [HairNorsWann08] E. Hairer, S. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Non-stiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, second edition, 1993. third printing 2008.
- [Hild74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. Dover Publications, New York, second edition, 1974.
- [Hind93] A. C. Hindmarsh and K. Radhakrishnan. *Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*. NASA, 1993.
- [HoroHill80] P. Horowitz and W. Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [Jame92] G. James. *Modern Engineering Mathematics*. Addison-Wesely, Workingham, England, 1992.
- [JordSmit94] D. Jordan and P. Smith. *Mathematical Techniques*. Oxford University Press, Oxford, England, 1994.
- [Kamke] E. Kamke. *Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 6. auflage edition, 1959.
- [MeybVach90] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik I*. Springer, Berlin, 1990.
- [MeybVach91] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik II*. Springer, Berlin, 1991.
- [PapuIII01] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3*. Vieweg, Braunschweig, 4. edition, 2001.

- [Pres86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (in PASCAL)*. Cambridge University Press, 1986.
- [Pres92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [ReicSham95] M. Reichelt and L. Shampine. The MATLAB ODE-suite, 1995. available from <ftp.mathworks.com>.
- [Sara97] P. E. Sarachik. *Principles of Linear Systems*. Cambridge University Press, 1997.
- [Schw86] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner, Braunschweig, 1986.
- [TenePoll85] M. Tenenbaum and H. Pollard. *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York, 1985.
- [YounGreg72] D. M. Young and R. T. Gregory. *A Survey of Numerical Analysis, Volume 1*. Dover Publications, New York, 1972.
- [YounGreg72a] D. M. Young and R. T. Gregory. *A Survey of Numerical Analysis, Volume 2*. Dover Publications, New York, 1972.
- [Zill89] D. G. Zill. *A First Course in Differential Equations with Applications*. PWS-Kent, 1989.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Exponentielle Sättigung des Stromes in einer Spule	5
1.2	Richtungsvektoren für die Gleichung $y' = -y + x$	7
1.3	Richtungsvektoren für die Gleichung $\dot{x} = \sin x$	7
1.4	Der Graph von $f(p)$ für die logistische Gleichung	8
1.5	Vektorfeld und einige Lösungen für die logistische Gleichung	9
1.6	Vektorfeld und Lösungen von $\dot{x} = -x + \cos t$	11
1.7	Vektorfeld der Differentialgleichung eines Fallschirmsprunges	15
1.8	Graph einer Kettenlinie	17
1.9	Herleitung der Gleichung der Kettenlinie	17
1.10	Lösung eines Mischungsproblems	20
1.11	Schwache Dämpfung	37
1.12	Kritische und starke Dämpfung	38
1.13	Exponent der Dämpfung als Funktion der Dämpfungskonstante α	39
1.14	Gütefaktor eines Resonanzsystems	47
2.1	Graph einer linearen Funktion mit Schalter	108
2.2	Graph einer Ein- und Aus-Schaltfunktion	108
2.3	Verhalten einer LRC -Schaltung bei Ein- und Aus-Schaltvorgängen	110
2.4	Graph einer linearen Funktion mit Schalter	111
2.5	Stossübertragung	114
2.6	Graph einer Dreiecksfunktion	116
2.7	Graph einer periodischen Funktion	118
2.8	System von zwei Massen und Federn	124
3.1	Zählen der Nullstellen zweier Funktionen	179
3.2	Nyquist-Plot von $1/(s^3 + 2s^2 + 4s + 5)$	181
3.3	Nyquist Plots von zwei Funktionen	182
3.4	Nyquist-Plot von $1/(s^3 + 0.9s^2 + 1.24s + 0.52)$	183
3.5	Bode Plots eines Hochpassfilters	186
3.6	Bode Plots eines Tiefpassfilters	188
3.7	Bode Plots eines Systems	189
3.8	Nyquist-Plot eines Systems	190
3.9	Ein verbesserter Tiefpass-Filter	190
3.10	Bode Plot eines Tiefpass Filters	192
3.11	Einfache Operationsverstärker-Schaltung	194
3.12	Bodeplot einer Operationsverstärkerschaltung	195
3.13	Nyquistplot einer Operationsverstärkerschaltung	195
3.14	Operationsverstärker-Schaltung, Ableitung	196
3.15	Bodeplot eines analogen Differenzierers	197
3.16	Operationsverstärker-Schaltung, Integrieren und Multiplizieren	198
3.17	Bode Plots eines Feder-Masse Systems	199

4.1	Vektorfeld der Gleichung $\dot{x} = x^2 - 2t$	259
4.2	Ein Schritt des Euler-Verfahrens	260
4.3	Ein Schritt des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung	262
4.4	Verfahrens- und Rundungsfehler	264
4.5	Der Diskretisationsfehler	264
4.6	Vergleich von Heun und Runge-Kutta	269
4.7	Elementarer MATLAB-Code für das Verfahren von Runge-Kutta	273
4.8	Octave/MATLAB-Code für ein adaptives Runge-Kutta-Verfahren (Kommentar und Initialisierung)	275
4.9	Octave/MATLAB-Code für ein adaptives Runge-Kutta-Verfahren (Code)	276
4.10	Lösung von $\ddot{x} = -\sin x$	278
4.11	Ein Spannungsverdoppler	278
4.12	Vergleich von Heun und Runge-Kutta für nichtdifferenzierbare Funktionen	279
4.13	Lösung und Schrittweiten eines adaptives Runge-Kutta-Verfahren	280
4.14	Elementares Runge-Kutta Verfahren für nichtdifferenzierbare Funktion	280
4.15	Ein einfaches Vektorfeld	281
4.16	Volterra-Lotka Vektorfeld	282
4.17	Phasenporträts der Pendelgleichung	284
4.18	Biegung eines Balkens	288
4.19	Ein lineares Vektorfeld mit Eigenvektoren	289
4.20	Ein lineares Vektorfeld mit Eigenvektoren	290
4.21	Vektorfeld, Eigenrichtungen und vier Lösungen	292
4.22	Spiralförmige Lösungen eines Systems von drei Differentialgleichungen	294
4.23	Vektorfelder in kleinem Bereich	301
4.24	Vektorfelder in grossem Bereich	303
4.25	Linearisierung des Volterra-Lotka Vektorfeldes	306
4.26	Volterra-Lotka Gleichungen, mit kleinen Störungen	307
4.27	Vektorfeld mit zwei kritischen Punkten, Verhalten beim kritischen Punkt	309
4.28	Vom Tisch fallende Kette	314
4.29	Vom Tisch fallende Kette, mit Octave	317
4.30	Herleitung der Gleichung der Kettenlinie	326

Tabellenverzeichnis

1.1	Elementare Eigenschaften der drei elektrischen Grundelemente	26
1.2	Gegenüberstellung von mechanischen und elektrischen Schwingkreisen	35
3.1	Form der Lösungen Gleichungen zweiter Ordnung	164
3.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen von linearen Differentialgleichungen	166
3.3	Laplaceterme von Inhomogenitäten ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$)	173
3.4	Laplaceterme von Inhomogenitäten ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)	174
3.5	Octave-Code um Transferfunktion eines Filters zu bestimmen	193
4.1	Diskretisationsfehler der Verfahren von Euler, Heun und Runge-Kutta.	265
4.2	Vergleich von Euler und Runge-Kutta	266
4.3	Vergleich von numerischer Integration und Lösen von Differentialgleichungen	267
4.4	Vergleich von Heun und Runge-Kutta	269
4.5	Vergleich von Heun und Runge-Kutta	277
4.6	Vergleich von Heun und Runge-Kutta für nichtdifferenzierbare Funktionen	279
4.7	Maximale Länge von Seilbrücken	328