Lineare Algebra und Geometrie

Andreas Stahel

12. November 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlen und Beweise

Ziel dieses Kapitel ist es Sie mit einigen mathematischen Begriffen vertraut zu machen und die Idee eines Beweises zu vermitteln. Sie werden (hoffentlich) keine neuen Resultate finden und können sich somit auf neue Begriffe und Beweisstrukturen konzentrieren. Für dieses Kapitel sollten Ihnen die Begriffe Element, Menge, leere Menge, Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung und Komplement bereits bekannt sein. Ebenso sollten Sie mit Venn–Diagrammen umgehen können.

1.1 Definition, Voraussetzung, Resultat, Beweis

In diesem Abschnitt werden wir versuchen einige grundlegende Begriffe festzulegen und mit Beispielen zu erläutern. Einige der Beschreibungen sind aus [Solo90] und [Schw75] übernommen.

1–1 Definition : Eine **Definition** in der Mathematik ist eine Abmachung über die Bedeutung eines speziellen Terms. Definitionen werden nicht zufällig gemacht. Üblicherweise sind sie durch immer wieder vorkommende Strukturen oder Ausdrücke motiviert. Eine Definition kann auch als Abkürzung für eine längere Beschreibung dienen.

Hier sind einige einfache Beispiele von Definitionen.

1–2 Beispiel :

1. Eine ganze Zahl n ist ein **Teiler** einer ganzen Zahl m, falls es eine ganze Zahl k gibt mit $m = n \cdot k$.
2. Eine positive ganze Zahl $p > 1$ heisst **Primzahl**, falls die einzigen Teiler 1 und p sind.
3. Ein Dreieck heisst **gleichschenklig**, falls zwei seiner Seiten die gleiche Länge haben.
4. Eine ganze Zahl heisst **gerade**, falls nach einer Division durch 2 ein Rest von 0 bleibt.
5. Eine Zahl q heisst **rational**, falls sie in der Form $q = \frac{a}{b}$ geschrieben werden kann, wobei a und b ganze Zahlen sind mit $b \neq 0$.
6. Wir sagen, dass die Aussage A die Aussage B **impliziert** ($A \Longrightarrow B$), falls B wahr ist, wennimmer A wahr ist. Der Fall B falsch und A wahr darf also nie eintreten.
7. Wir sagen, dass die Aussagen A und B **äquivalent** sind ($A \Longleftrightarrow B$), falls A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist. Man kann auch verlangen, dass $A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$.
8. Die Aussage A **und** B ($A \wedge B$) ist wahr, genau dann wenn beide Aussagen, A und B, wahr sind.
9. Die Aussage A **oder** B ($A \vee B$) ist wahr, genau dann wenn eine oder beide Ausssagen wahr sind.

$\diamondsuit$

1–3 Definition : Ein mathematischer **Satz** oder auch eine **Proposition** ist eine richtige mathematische Aussage. Wir werden oft zeigen (verifizieren, **beweisen**), dass eine gegebene Aussage richtig ist. Ein besonders wichtiger Satz wird auch **Theorem** genannt. Da Beweise von Theoremen lang und kompliziert sein können, stellt man oft nützliche Zwischenresultate auf, um das grosse Problem in mehrere kleine zu zerlegen. Solche Hilfsaussagen werden auch **Lemmas** genannt. Es gibt auch Aussagen deren Korrektheit nicht bewiesen werden kann, sondern sie bilden das Fundament auf dem andere Aussagen gebaut werden. Solche Resultate werden **Axiome** genannt.

1–4 Beispiel : Die folgende „offensichtliche“ Aussage ist ein Axiom.

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine nächst grössere Zahl, typischerweise mit $n + 1$ bezeichnet. $\diamondsuit$

Von Euklid stammt ein **Beweisführungsschema**, dass früher im Schulunterricht oftmal bis zum Exzess strapaziert wurde und sich deshalb verständlicherweise nur beschränkter Beliebtheit erfreute. Tatsächlich ist aber das Euklidsche Schema ein gutes Mittel, um Ordnung in die Gedankenführung zu bringen. Es sollte deshalb als tragendes Mauerwerk immer ein wenig durchschimmern, selbst wenn man sich nachher grössere Freiheiten erlaubt.

Euklid gliederte seine Beweise in drei Teile:

(a) **Voraussetzung**

(b) **Behauptung**

(c) **Beweis**

Einen Beweis werden wir mit dem Symbol $\Box$ abschliessen. Die eigentliche „Arbeit“ ist nur im dritten Teil zu leisten. Somit könnte man auf die ersten beiden Teile auch verzichten, schliesslich stehen sie auch schon im zu beweisenden Satz. Die Erfahrung zeigt aber, dass eine genau Formulierung, eventuell auch Umformulierung, von Voraussetzung und Aussage sehr oft helfen, das Problem richtig zu verstehen.

Wir illustrieren dies mit wenigen Beispielen.

1–5 Satz : *Für jede gerade Zahl n ist auch n^2 gerade.*

Beweis :

(a) **Voraussetzung**: n ist eine gerade Zahl.

(b) **Behauptung**: n^2 st eine gerade Zahl.

(c) **Beweis**: Aufgrund der Voraussetzung ist n von der Form $n = 2 \cdot m$ für eine ganze Zahl m. Somit gilt

$$n^2 = n \cdot n = (2 \cdot m) \cdot (2 \cdot m) = 4 \cdot m^2$$

Da $2 \cdot m^2 = M$ eine ganze Zahl ist haben wir n^2 in der Form $2 \cdot M$ geschrieben und gezeigt, dass eine gerade Zahl vorliegt. $\Box$

1–6 Theorem : *(Satz von Pythagoras)*

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt $a^2 + b^2 = c^2$, wobei c die Länge der Hypothenuse ist.

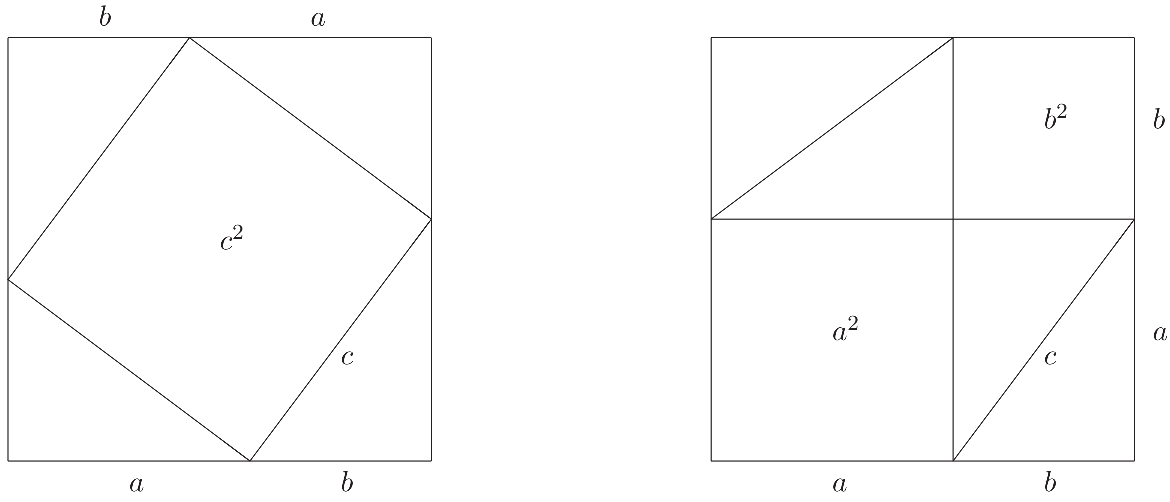


Abbildung 1.1: Geometrischer Beweis des Satzes von Pythagoras

Beweis :

(a) **Voraussetzungen**: Elementargeometrie und ein rechtwinkliges Dreieck ABC, wobei der rechte Winkel der Seite c gegenüberliegt.

(b) **Behauptung**: $a^2 + b^2 = c^2$

(c) **Beweis**: Dazu betrachten wir die Figuren 1.1. Die vier Dreiecke können deckungsgleich vom linken zum rechten Quadrat verschoben werden. Somit müssen die im Quadrat übrigbleibenden Flächenstücke geich gross sein, was genau der Behauptung entspricht.

□

Es gibt verschiedene Beweistechniken die wir regelmässig einsetzen werden.

- **Direkter Beweis** oder **konstruktiver Beweis**
  Aus den Voraussetzungen wird durch korrekte Argumente die Behauptung „konstruiert". Diese Art von Beweis ist bei weitem die am häufigsten verwendete. Graphisch kann der Aufbau durch die Zeile

$$\text{Voraussetzung} \quad \Longrightarrow A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P \Longrightarrow R \Longrightarrow \ \text{Behauptung}$$

  veranschaulicht werden. Manchmal ist es günstiger von „beiden Seiten" zu arbeiten, d.h. von rechts und von links. Zum Schluss muss aber immer verifiziert werden, dass die Implikationskette vollständig ist. Die beiden obigen Beispiele sind direkte Beweise. Der Satz von Euklid (Seite 8: Es gibt unendlich viele Primzahlen) kann auch konstruktiv bewiesen werden.

- **Indirekter Beweis** oder **Beweis durch Widerspruch**
  Unter der Voraussetzung A ist die Behauptung B zu beweisen. Es geht also darum die Implikation

$$A \Longrightarrow B$$

  zu verifizieren. Stattdessen zeigen wir aber

$$\text{nicht } B \Longrightarrow \text{nicht } A$$

  was zur urprünglichen Behauptung äquivalent ist. Dies sei an einem (zu) trivialen Beispiel illustriert.

  1. Annahme A: Es regnet.

2. Behauptung B: Die Strasse ist nass.
3. Die Implikation
$$A \Longrightarrow B$$
entspricht also der Aussage:

Wenn es regnet, ist die Strasse nass.

Die zweite Aussage
$$\text{nicht } B \Longrightarrow \text{nicht } A$$
entspricht dem Satz:

Wenn die Strasse nicht nass ist, so regnet es nicht.

Es ist „klar“, dass diese beiden Sätze äquivalent sind. Auf genau diesem Zusammenhang bauen Beweise durch Widerspruch auf.

Der Satz von Euklid (Seite 8) wird durch einen indirekten Beweis verifiziert. Wir gehen von Gegenteil der Behauptung aus, d.h. es gibt nur endlich viele Primzahlen. Durch logisch korrekte Argumente und Rechnungen erhalten wir eine offensichtlich falsche Aussage, d.h. einen Widerspruch. Somit muss die Annnahme falsch gewesen sein, d.h die ursprüngliche Behauptung richtig. Auch der Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, kann duch Widerspruch geführt werden.

- **Beweis durch Induktion**
Dieser Beweismethode widmen wir einen eigenen Abschnitt 1.4. Dieses Verfahren ist **nicht** wichtiger als die beiden obigen, aber für Studenten oft sehr ungewohnt und die Probleme scheinen schwieriger zu sein als sie tatsächlich sind.

- **Eindeutigkeitsbeweis**
Die ist keine eigenständige Beweismethode, sondern eine typisch Art von Aussage die zu beweisen ist. Bei vielen mathematischen Problemen sucht man Lösungen von Gleichungen oder Faktorisierungen von Objekten. Manchmal ist ein erheblicher Aufwand damit verbunden und man neigt dazu sich mit der einmal gefundenen Lösung zufrieden zu geben. Die Frage ob es noch andere Objekte oder Lösungen gibt rückt in den Hintergrund. Als Beispiel hierzu verweisen wir auf den untenstehenden Euklidschen Algorithmus.

1–7 Satz : *(Euklidscher Algorithmus)*
Seien a und b zwei ganze, strikt positive Zahlen. Dann liefert das folgende Verfahren den eindeutig bestimmten grössten gemeinsamen Teiler t.

$$\begin{aligned}
a &= q_1\, b + r_1 && \text{mit } r_1 \neq 0 \text{ und } r_1 < b \\
b &= q_2\, r_1 + r_2 && \text{mit } r_2 \neq 0 \text{ und } r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3\, r_2 + r_3 && \text{mit } r_3 \neq 0 \text{ und } r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4\, r_3 + r_4 && \text{mit } r_4 \neq 0 \text{ und } r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n\, r_{n-1} + r_n && \text{mit } r_n \neq 0 \text{ und } r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1}\, r_n + 0
\end{aligned}$$

Dann ist $t = r_n$ der grösste gemeinsame Teiler von a und b. Hierbei sind alle Zahlen positiv und ganz.

Versteckt in der Notation haben wir ein Resultat über Division von zwei ganzen Zahlen mit Rest verwendet. Auf einen Beweis dieses Lemmas verzichten wir.

1–8 Lemma : *Seien a und b zwei ganze, strikt positive Zahlen. Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze, positive Zahlen q und r mit*

$$a = b \cdot q + r \quad \textit{mit} \quad 0 \leq r < b$$

Beweis : (des Euklidschen Algorithmus)
Wegen den Ungleichungen $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0$ bricht der Algorithmus nach endlich vielen Schritten ab. Nun führen wir den Beweis in mehreren Schritten.

1. Wir zeigen zuerst, dass t ein Teiler von a und b ist.
   Dazu beginnen wir in der untersten Zeile. Dort können wir ablesen, dass t ein Teiler von r_{n-1} ist. Wegen der zweituntersten Zeile teilt t auch r_{n-2}. Indem wir uns nach oben durcharbeiten erhalten wir aus der zweiten (b.z.w. ersten) Zeile, dass t ein Teiler von b (b.z.w. a) ist.

2. Nun zeigen wir, dass es keinen grösseren Teiler geben kann.
   Sei $s \geq t$ ein weiterer Teiler von a und b. Somit ist aufgrund der ersten Zeile s auch ein Teiler von r_1. Wegen der zweiten Zeile ist nun s aber auch ein Teiler von r_2. So können wir uns durch das Schema nach unten arbeiten und finden in der zweitletzten Zeile, dass s ein Teiler von $r_n = t$ ist. Somit muss $s \leq t$ sein.

3. Eindeutigkeitsbeweis
   Nun nehmen wir an, dass u ein weiterer grösster, gemeinsamer Teiler sei. Dann muss einer der drei folgenden Fälle eintreten

   (a) $u < t$, dann ist u nicht der **grösste** gemeinsame Teiler.
   (b) $u > t$, dann kann u kein gemeinsamer Teiler sein, aufgrund des zweiten Beweisschrittes.
   (c) $u = t$ ist somit der einzig mögliche Fall.

   Somit ist t der ggT und es gibt nur einen ggT (**g**rösste **g**emeinsame **T**eiler).

□

1–9 Beispiel : Der grösste gemeinsame Teiler von 693 und 147 soll bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
147 &= 0 \cdot 693 + 147 \\
693 &= 4 \cdot 147 + 105 \\
147 &= 1 \cdot 105 + 42 \\
105 &= 2 \cdot 42 + 21 \\
42 &= 2 \cdot 21 + 0
\end{aligned}$$

Der ggT von 693 und 147 ist also 21. ♢

1.2 Zahlsysteme

Die Mathematik beschäftigt sich oft mit verschiedenen Typen von Zahlen und deshalb werden die folgenden Notation eingeführt. Alle diese Typen von Zahlen (ausser $\mathbb{C}$) können als Teilmengen der **Zahlengerade** veranschaulicht werden.

1–10 Definition :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ irrationale Zahlen
- $\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

1–11 Satz : *Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und alles sind strikte Teilmengen. Es gibt zum Beispiel eine rationale Zahl die keine ganze Zahl ist.*

Beispiele zu diesem Resultat sind sehr leicht zu finden.

1–12 Definition : Eine Zahlenmenge A ist **abgeschlossen** unter einer Operation, falls das Ausführen der Operation immer Zahlen in derselben Menge A ergibt.

1–13 Beispiel :

- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind abgeschlossen unter Additionen.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind nicht abgeschlossen unter Subtraktionen.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind abgeschlossen unter Multiplikationen.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind nicht abgeschlossen unter Divisionen.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind abgeschlossen unter Addition, Subtraktion und Multiplikation.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind nicht abgeschlossen unter Divisionen.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abgeschlossen unter Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht abgeschlossen unter der Operation Wurzelziehen. So ist zum Beispiel $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen unter den Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen aus positiven Zahlen.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind nicht abgeschlossen unter Operation „Lösen von polynomialen Gleichungen“. So gibt es zum Beispiel keine reelle Zahl x mit $x^2 + 1 = 0$. Diese Einschränkung hat zur Einführung der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ geführt.
- Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind abgeschlossen unter den Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen. Zudem ist jede polynomiale Gleichung in $\mathbb{C}$ lösbar (**Fundamentalsatz der Algebra**).

$\diamondsuit$

Einige dieser Aussagen werden in der Stunde bewiesen.

1.2.1 Rationale Zahlen und Dezimalbruchentwicklungen

1–14 Theorem : *Jeder rationalen Zahl entspricht eine Dezimalbruchentwicklung die entweder abbricht oder periodisch wird. Ebenso entspricht jeder Dezimalbruchentwicklung die entweder abbricht oder periodisch wird eine rationale Zahl.*

Beweis : Man kann zwei Rechentricks verwenden, um die obige Charakterisierung der rationalen Zahlen einzusehen

Primarschuldivision

```
214 : 7  = 30.571428571428571428571428571428...
  40
   50
    10
     30
      20
       60
        40
         50
          ..
           ..
```

Nach jedem Schritt in der Primarschuldivision bleibt ein Rest bestehen, aber es sind nur die Reste 0,1,2,3,4,5,6 möglich. Somit muss nach spätestens 6 Schritten entweder der Rest 0 auftreten oder ein vorangehender Rest tritt zum zweiten Mal auf. Damit wird die Dezimalbruchdarstellung periodisch.

Eine ähnliche Argumentation zeigt, dass die rationale Zahl a/b ($a, b \in \mathbb{N}$) zu einem Dezimalbruch führt der entweder abbricht (Rest 0) oder periodisch wird, wobei die Periodenlänge strikt kleiner als b ist. Somit kann jede rationale Zahl als periodischer Dezimalbruch geschrieben werden. Die Periodenlänge muss kleiner als $b - 1$ sein.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass jeder periodische Dezimalbruch einer rationalen Zahl entspricht. Dies sei wieder durch ein Beispiel illustriert. Sei die Zahl x gegeben durch $x = 27.12\overline{123}$, dann kann der folgende Trick verwendet werden.

```
1000 x = 27121.23123123123123123...       |+
     x =    27.12123123123123123123...    |-
-------------------------------------------
 999 x = 27094.11
```

Deshalb gilt $x = 2709411/99900$ und somit ist x eine rationale Zahl. Derselbe Trick lässt sich offensichtlich auf beliebige **periodische** Dezimalbrüche anwenden. □

1–15 Beispiel : Wegen der obigen Charakterisierung können wir ein Beispiel einer Dezimalbruchentwicklung einer irrationalen Zahl angeben, nämlich

$$0.10110111011110111110111111011111110\ldots$$

♢

1–16 Theorem :

(a) *Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es immer eine irrationale Zahl.*

(b) *Zwischen zwei verschiedenen irrationalen Zahlen gibt es immer eine rationale Zahl.*

Beweis : Die obige Charakterisierung der rationalen Zahlen durch ihre Dezimalbruchdarstellung ergibt leicht einen konstruktiven Beweis dieser Aussage. Siehe dazu Aufgaben 1–16 und 1–17. □

1.2.2 Primzahlen

1–17 Definition : Man sagt dass die natürliche Zahl p eine **Primzahl** ist falls $p > 1$ und p ist nur durch sich selbst und 1 teilbar.

1–18 Beispiel : Hier sind einige Primzahlen : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, \ldots$ ♢

1–19 Lemma : *Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.*

1–20 Beispiel : $99 = 3 * 3 * 11$ oder $99'999 = 3 * 3 * 41 * 271$ ♢

> **1–21 Theorem :** *(Euklid)*
> *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis : Durch Widerspruch.
Annahme: Das Resultat ist falsch. Somit gibt es endlich viele Primzahlen.

Somit können wir **alle** n Primzahlen ihrer Grösse entsprechend nummerieren mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ und dann die neue Zahl

$$P = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

bilden. Nun zerlegen wir die Zahl $Q = P + 1$ in ein Produkt von Primzahlen q_j

$$Q = P + 1 = \prod_{j=1}^{m} q_j$$

und betrachten die Primzahl q_1. Da die Division von Q durch ein p_k immer den Rest 1 ergibt, kann q_1 unter den „alten" Primzahlen nicht vorkommen. Damit haben wir eine neue Primzahl gefunden. Dies ist ein ein Widerspruch zur Annahme dass wir bereits alle Primzahlen hatten.

Somit muss die Annahme falsch sein. □

Der obige Beweis enthält auch einen Algorithmus, um viele Primzahlen zu erzeugen. Er ist allerdings sehr ineffizient. Bei konkreten Anwendungen verwendet man besser das Sieb des Eratosthenes oder andere effiziente Algorithmen. Zur Illustration werden trotzdem einige Primzahlen mittels dieses Algorithmus konstruiert.

$$\begin{array}{llll}
p_1{=}2 & a_1{=}2 & +1 = 3 & \\
p_2{=}3 & a_2{=}2 \cdot 3 & +1 = 7 & \\
p_3{=}7 & a_3{=}2 \cdot 3 \cdot 7 & +1 = 43 & \\
p_4{=}43 & a_4{=}2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 & +1 = 1807 & = 13 \cdot 139 \\
p_5{=}13 & a_5{=}2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 & +1 = 23479 & = 53 \cdot 443 \\
p_6{=}53 & a_6{=}2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 53 & +1 = 1244335 & = 5 \cdot 248861 \\
p_7{=}5 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

1–22 Beispiel : Es genügt nicht Behauptungen über Primzahlen an einigen Beispielen zu verifizieren. So liefert zum Beispiel die Formel

$$n^2 + n + 41$$

für $n = 1, 2, \ldots, 39$ immer eine Primzahl, troztdem sind nicht alle Zahlen der obigen Form Primzahlen. $\diamondsuit$

1–23 Theorem : *$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.*

Beweis : Wir führen einen Beweis durch Widerspruch.
Annahme: Sei $x = a/b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ und $x \cdot x = 2$.
Nun zerlegen wir a und b in Primfaktoren

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

Wegen $x^2 = 2$ gilt nun $a^2 = 2b^2$ und somit

$$p_1 p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 \ldots p_n p_n = 2 q_1 q_1 q_2 q_2 q_3 q_3 \ldots q_m q_m \qquad .$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung gibt es eine gerade Anzahl von Faktoren 2, aber auf der rechten Seite eine ungerade Anzahl. Somit haben wir zwei verschiedene Zerlegungen in Primfaktoren einer Zahl. Dies kann aber wegen dem obigen Lemma nicht sein. Somit muss die Annahme zu Beginn dieses Beweises falsch sein, d.h. $\sqrt{2}$ kann kein Bruch sein. $\square$

Die Idee des obigen Beweises kann auch verwendet werden, um zu untersuchen ob Wurzeln anderer Zahlen rational oder irrational sind. Siehe dazu Aufgaben 1–8, 1–11, 1–9, 1–12, 1–13 und 1–14.

1.2.3 Reelle Zahlen

1–24 Definition :

- Eine Menge A von Zahlen heisst **nach oben beschränkt** falls es eine Zahl z gibt mit $x \leq z$ für alle $x \in A$.
- Die Zahl z heisst **Majorante** oder auch **obere Schranke** von A.
- Eine Majorante z_0 von A heisst **Supremum**, falls z_0 die kleinste obere Schranke ist.
- Eine Menge A von Zahlen heisst **nach unten beschränkt** falls es eine Zahl y gibt mit $x \geq y$ für alle $x \in A$.
- Die Zahl y heisst **Minorante** oder auch **untere Schranke** von A.
- Eine Minorante z_0 von A heisst **Infimum**, falls z_0 die grösste untere Schranke ist.
- Eine Menge A heisst **beschränkt** falls es eine Majorante und eine Minorante gibt.
- $A = [a, b]$ heisst **abgeschlossenes Intervall** und es gilt $x \in [a, b]$ genau dann wenn $a \leq x \leq b$.
- $A = (a, b)$ heisst **offenes Intervall** und es gilt $x \in (a, b)$ genau dann wenn $a < x < b$.

1–25 Satz : *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Rechenregeln*

$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	*Kommutativgesetz*
$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*Assoziativgesetz*
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*Distributivgesetz*

Der Unterschied zwischen rationalen Zahlen (Brüchen von ganzen Zahlen) und reellen Zahlen ist auf der Zahlengeraden schwierig zu illustrieren. Aber es gibt Unterschiede, die für die Analysis grundlegend sind.

1–26 Theorem : *(Supremumseigenschaft)*
Jede nach oben beschränkte (nichtleere) Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$. Jede nach unten beschränkte (nichtleere) Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Beweis : Diese Eigenschaft kann **nicht** bewiesen werden, denn sie ist ein **Axiom**. Sie ist äquivalent zum **Prinzip der Intervallschachtelung** das wir uns im Kapitel über Folgen und Reihen ansehen werden. □

1–27 Beispiel : Die Supremumseigenschaft ist falsch, falls man nur rationale Zahlen zulässt. Zur Illustration sei ein Beispiel angegeben, um zu zeigen, dass dieses Resultat falsch ist für die rationalen Zahlen. Sei M hierzu die Menge aller positiven, rationalen Zahlen q mit $q^2 < 2$. Diese Menge ist nach oben beschränkt. Der Kandidat für das Supremum von M ist $\sqrt{2}$. Das ist aber keine rationale Zahl. Somit hat M keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$. ♢

1–28 Definition : Die **Norm** (auch **Absolutbetrag**) einer reellen Zahl gibt den Abstand der Zahl von 0 auf der Zahlengeraden an.

$$|a| = \begin{cases} a & : \quad a > 0 \\ -a & : \quad a < 0 \end{cases}$$

1–29 Satz : *Es gilt die* ***Dreiecksungleichung***

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1–30 Satz : *(Rechenregeln für Ungleichungen)*

$$\begin{array}{ccc} a < b & \Longrightarrow & a + c < b + c \\ a < b\ ,\ c > 0 & \Longrightarrow & ac < bc \\ a < b\ ,\ c < 0 & \Longrightarrow & ac > bc \\ 0 < a < b & \Longrightarrow & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0 \\ a < b < 0 & \Longrightarrow & 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ ab = 0 & \Longrightarrow & a = 0 \text{ oder } b = 0 \end{array}$$

1.3 Summen- und Produktsymbol

Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ reelle Zahlen, so schreibt man die aus ihnen gebildete Summe als

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad .$$

Allgemein setzt man für $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad .$$

Ist $m > n$, so definiert man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad .$$

Ist zum Beispiel $a_k = 1/k$, so gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad .$$

Zur Kontrolle können Sie nachrechnen, dass

$$s_5 = 137/60 \qquad s_{10} = 2.928968\ldots \qquad .$$

Auf dem HP–48 Taschenrechner kann s_{10} durch den Befehl

$$'\sum(K = 1, 10, 1/K)\,'$$

berechnet werden. Somit könnte auch $s_{1000} = 7.485447\ldots$ bestimmt werden mittels Rechner. Ohne technische Hilsmittel wäre dies sehr zeitraubend und fehleranfällig.

Im obigen Beispiel $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist der Name k der Hilfsvariable absolut unwichtig und kann auch geändert werden, es handelt sich um eine temporär benutzte Variable. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad .$$

Auf den HP Taschenrechnern übersetzt sich das zu (falls $a_k = 1/k$ und $n = 7$)

$$\sum(k = 1, 7, 1/k) = \sum(j = 1, 7, 1/j) = \sum(k = 0, 6, 1/(k+1)) \qquad .$$

Es ist leicht einzusehen, dass für Summen die folgenden Rechenregeln gelten.

1–31 Satz : *Seien für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ausdrücke a_k und b_k reelle Zahlen, c eine Konstante und n, m, l, i, j ganze Zahlen mit $m \leq n \leq l$*

(a)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

(b)

$$\sum_{k=m}^{n} (c a_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

(c)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{l} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k$$

(d)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}$$

(e)

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$$

Für die Multiplikation von zwei Summen gilt im Allgemeinen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k \neq \sum_{k=m}^{n} (a_k b_k) \qquad ,$$

wovon man sich am Beispiel

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \neq (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9})$$

leicht überzeugt.

1–32 Satz : *Für die Multiplikaton von zwei Summen gilt*

$$(\sum_{k=m}^{n} a_k) \cdot (\sum_{k=m}^{n} b_k) = \sum_{k=m}^{n} (a_k \sum_{j=m}^{n} b_j) = \sum_{k=m}^{n} (b_k \sum_{j=m}^{n} a_j) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{j=m}^{n} (a_k b_j) \qquad .$$

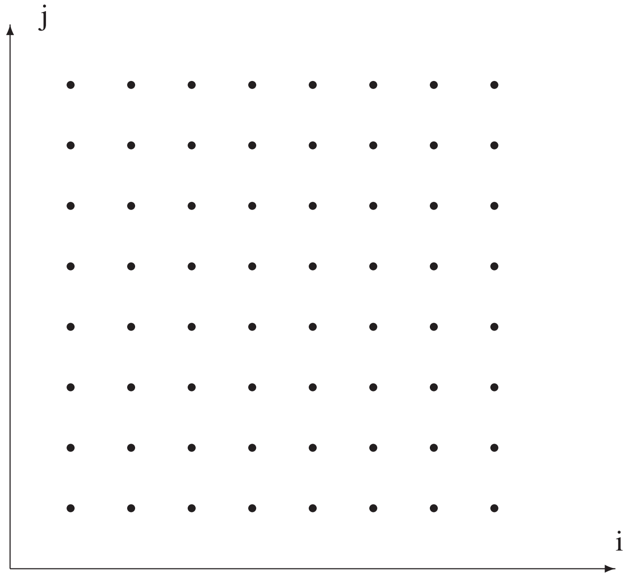


Abbildung 1.2: Illustration zur Multiplikation von Summen

Beweis : Dieses Ergebniss kann für $m = 1$ und $n = 8$ an einem quadratischen Gitter von Punkten (Figur 1.2) **illustriert** werden. Hierbei entspricht der Punkt in der i–ten Spalte und j–ten Zeile (von unten gezählt) der Zahl $a_i \cdot b_j$.

Die Summe

$$a_i \sum_{j=1}^{8} b_j$$

wird also entlang der i–ten Spalte gebildet und

$$b_j \sum_{i=1}^{8} a_i$$

entlang der j–ten Zeile. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} (a_i b_j)$$

entspricht der Summe über alle Punkte in diesem Gitter. Diese kann selbstverständlich zeilen– oder spaltenweise bestimmt werden. Das entspricht genau den obigen Formeln. □

Für die Division von zwei Summen gibt es **keine** einfache Formel

$$\sum_{k=m}^{n} a_k / \sum_{k=m}^{n} b_k = ?$$

1–33 Beispiel : Als Übung können Sie die folgenden Summen nachrechnen:

$$\sum_{n=1}^{3} n^2 = 14 \qquad \sum_{n=1}^{k} 2 = 2k$$

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 55 \qquad \sum_{n=1}^{k} k = k^2$$

$$\sum_{n=1}^{5} 2 = 10 \qquad \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

♢

1–34 Beispiel : Verwenden Sie die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

um die folgenden Aussagen zu verifizieren.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(c)

$$\sum_{k=3}^{n+2} (k-2) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

♢

1–35 Satz : *Für die **geometrische Summe** gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

falls $q \neq 1$.

Beweis : Multiplikation der Summe mit $(1-q)$ ergibt

$$(1-q)\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

woraus die Behauptung folgt. □

1–36 Beispiel : Ein Lotto–Wettbewerb verspricht einen Gewinn von \$1'000'000 . Die Auszahlung erfolgt durch 20 Tranchen von \$50'000, jeweils am Ende eines Jahres.

(a) Wieviel Geld muss die Gesellschaft heute bereitstellen damit alle künftigen Auszahlungen gedeckt sind, bei einem Zinssatz von 5% ?

(b) Wieviel Geld hat der Gewinner nach 20 Jahren, falls sein Gewinn ebenfalls zu 5% verzinst wird?

$\diamondsuit$

Lösung : Wir setzen $a = \$50'000$ und $q = 1.05$.

(a) In jedem Jahr wird der Betrag der Gesellschaft verzinst, d.h. mit dem Faktor q multipliziert. Somit muss die Bank deutlich weniger als \$1'000'000 bereitstellen.

- Für die erste Auszahlung nach einem Jahr muss die Bank $\frac{a}{q}$ bereitstellen.
- Für die zweite Auszahlung nach zwei Jahren muss die Bank $\frac{a}{q^2}$ bereitstellen.
- Für die dritte Auszahlung nach drei Jahren muss die Bank $\frac{a}{q^3}$ bereitstellen.
- Für die Auszahlung nach n Jahren muss die Bank $\frac{a}{q^n}$ bereitstellen.

Durch Summation erhält man den Gesamtbetrag s als

$$s = \sum_{n=1}^{20} \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q} \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{q^n} = \frac{a}{q} \frac{1-(1/q)^{20}}{1-1/q} = \frac{a\,(1-(1/q)^{20})}{q-1} \approx \$623'110.52$$

(b) Durch analoge Überlegungen erhält man

$$\sum_{n=0}^{19} a\, q^n = a\, \frac{1-q^{20}}{1-q} \approx \$1'653'298$$

Müsste die Gesellschaft den Gesamtbetrag sofort auszahlen und der Gewinner könnte auch von allen Zinsen profitieren, so ergibt sich nach 20 Jahren ein Vermögen von

$$20 \cdot a\, q^{20} \approx \$2'653'298$$

$\square$

1–37 Beispiel : Die irrationale Zahl

$$x = 0.1011011101111011111011111101111111 0\ldots$$

kann mittels der Definition

$$a_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} (1+k)$$

für grosse Werte von m durch die Summe

$$x \approx \sum_{n=1}^{m} \left(10^{-a_n} \sum_{j=1}^{n} 10^{j-1} \right)$$

approximiert werden. $\diamondsuit$

Beweis : Mittels *Mathematica* lässt sich die obige Behauptung für die ersten paar Terme testen.

Mathematica

```
a[n_] := Sum[1+k,{k,1,n}]-1 ;
b[n_] := Sum[10^(j-1) ,{j,1,n}];
x[m_] := Sum[(10^(-a[n])) b[n] ,{n,1,m}];
N[x[5],80]
.
0.1011011101111011111
```

□

Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ reelle Zahlen, so schreibt man das aus ihnen gebildete Produkt als

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad .$$

Allgemein setzt man für $m \leq n$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \qquad .$$

Ist $m > n$, so definiert man

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \qquad .$$

Als Beispiel kann man **Fakultäten** betrachten. Es gilt

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad .$$

1–38 Beispiel : Für ganze Zahlen $0 < k < n$ sind die **Binomialkoeffizienten** gegeben durch die Formeln

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$

Damit einige Rechenregeln einfach zu formulieren sind definiert man

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = 1 \quad \text{und} \qquad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) := 0 \quad \text{für} \quad k > n$$

Als Beispiel bestimmen wir

$$\left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array}\right) = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \prod_{j=1}^{2} \frac{7+1-j}{j} = 21$$

Sie spielen eine wichtige Rolle in der Kombinatorik und wir werden sie später auch bei Binomialentwicklungen wieder finden (Pascal'sches Dreieck). ♢

1.4 Vollständige Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei (A_n) eine Aussage. Als Beispiel kann

$$A_n: \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

betrachtet werden. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Aussagen A_1, A_2 und sogar A_{10} richtig sind. Da es aber unendlich viele natürliche Zahlen gibt, ist es unmöglich **alle** zu überprüfen. Um aber dennoch zu zeigen, dass A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, verwenden wir das **Prinzip der vollständigen Induktion**.

1–39 Theorem : *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage A_n gegeben mit*

1. *A_1 ist richtig.*
2. *Falls A_n für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, so muss auch A_{n+1} richtig sein.*

Der erste Punkt heisst auch ***Induktionsverankerung*** *und der zweite* ***Induktionsschritt****. Sind beide Punkte erfüllt, so ist die Aussage A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.*

Die Aussage kann mit einer Kette von Dominosteinen illustriert werden.

1–40 Beispiel : Für das obige Beispiel lautet die Verankerung

$$A_1 : \qquad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

und ist somit richtig.

Um den Induktionsschritt auszuführen können wir die Voraussetzung

$$A_n : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

verwenden und müssen nun die entsprechende Formel für $n+1$ herleiten.

$$A_{n+1} : \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+1+1)}{2}$$

Verwenden Sie die Rechenregln für Summen um das folgende nachzuvollziehen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= n+1+\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Dies ist eine Formulierung der Aussage A_{n+1}, die also richtig ist.

Somit ist aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion die Aussage richtig für alle $n \in \mathbb{N}$. ♢

1–41 Beispiel : Um zu zeigen, dass

$$n < 2^n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

verwenden wir die Verankerung $1 < 2^1 = 2$. Nun rechnet man leicht nach, dass

$$n+1 < 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad ,$$

wobei bei der ersten Abschätzung $n < 2^n$ verwendet wurde. Somit kann man das Prinzip der vollständigen Induktion anwenden und weiss, dass die obige Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. ♢

Es ist nicht nötig die Verankerung bei $n = 1$ zu machen, man kann auch eine Modifikation der vollständigen Induktion einsetzen.

1–42 Theorem : *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage A_n gegeben mit*

1. *A_j ist richtig.*
2. *Falls A_n für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq j$ richtig ist, so muss auch A_{n+1} richtig sein.*

Sind beide Punkte erfüllt, so ist die Aussage A_n für alle $n \geq j$ richtig.

1–43 Beispiel : Die Behauptung $2^n > n^3$ ist falsch für alle $n = 1, \ldots, 9$. Sie ist aber richtig für $n = 10$, weil $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$. Nun versuchen wir für $n \geq 10$ den Induktionsschritt. Wir gehen also davon aus, dass

$$n^3 < 2^n$$

und untersuchen den Ausdruck

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 < 2^n + 3\,n^2 + 3\,n + 1$$

Mit einer kleinen Nebenrechnung zeigen wir, dass für $n \geq 10$

$$3\,n^2 + 3\,n + 1 < 3\,n^2 + 3\,n^2 + n^2 = 7\,n^2 < n^3 < 2^n$$

richtig ist. Die beiden obigen Ungleichungen zusammen ergeben

$$(n+1)^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ♢

1–44 Beispiel : Es gibt Aussagen die für sehr grosse Zahlen noch richtig sind, aber nicht für alle. Als Beispiel können Pseudoprimzahlen angeführt werden:

$$A_n \quad : \quad \text{Falls } 2^{n-1} = 1 \bmod n\text{, dann ist } n \text{ eine Primzahl}$$

Zuerst untersuchen wir die Aussage für einige kleine Werte von n.

n	2^{n-1}	$2^{n-1} \bmod n$	n Primzahl	A_n
2	2	0	ja	richtig
3	4	1	ja	richtig
4	8	0	nein	richtig
5	16	1	ja	richtig
7	64	1	ja	richtig
9	256	4	nein	richtig
340	gross	8	nein	richtig
341	gross	1	nein	falsch

Aber für $n = 341 = 11 \cdot 31$ gilt $2^{340} = 1 \bmod 341$. Somit ist die Aussage A_{341} falsch. Somit muss ein Beweis dieser Aussage mittels vollständiger Induktion scheitern. ♢

1–45 Satz : *(Binomialentwicklung)*
Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^k$$

Beweis : Für $n = 1$ ist offensichtlich

$$(1+x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = \binom{1}{0} 1 + \binom{1}{1} x = 1 + x$$

richtig und somit die Induktionsverankerung richtig.

Zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\
&= (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1}
\end{aligned}$$

In Aufgabe 1–26 zeigt man (mittels Induktion), dass

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

und somit

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$\square$

Hier ist eine weitere Modifikation der vollständigen Induktion.

1–46 Theorem : *Sei für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage A_n gegeben.*

1. *A_1 ist richtig.*
2. *Falls A_k für alle Zahlen $k \leq n$ richtig ist, so muss auch A_{n+1} richtig sein.*

Sind beide Punkte erfüllt, so ist die Aussage A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Unter den gestellten Aufgaben befinden sich viele Übungsbeispiele zur vollständigen Induktion.

1.5 Aufgaben

1.5.1 Aufgaben zu Zahlen

• Aufgabe 1–1:
In den folgenden Ausdrücken sind alle Klammern aufzulösen

(a) $(a+2)\,(7-b)$

(b) $(a+b)^3$

(c) $20x-((4x+2y)+(6x-y))$

(d) $45a-(50a-(10a-(3b+4c)+(6b-5c)))$

(e) $(a+b)\,(c+d-e)$

(f) $(a+b)\,(a-b)$

(g) $(a^2+ab+b^2)\,(a-b)$

(h) $(x^4+b^4)^3$

• Aufgabe 1–2:
Die folgenden Brüche sind so weit als möglich zu vereinfachen. Das Resultat darf höchstens noch einen Bruch enthalten.

(a) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

(b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

(c) $a \div \frac{c}{d}$

(d) $\frac{c}{d} \div a$

(e) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

(f) $\dfrac{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

(g) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2$

(h) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}$

• Aufgabe 1–3:
Man finde die Dezimalbruchentwicklung von $7/13$ und $1212/19$.

• Aufgabe 1–4:
Zeigen Sie, dass $x = 321.012\overline{012}$ eine rationale Zahl ist und finden Sie die entsprechende Darstellung.

• Aufgabe 1–5:
Untersuchen Sie ob die folgenden Zahlen rational oder irrational sind

$$13.13 \qquad 27.12\overline{123} \qquad 1.12112111211112111112\ldots$$

• Aufgabe 1–6:
Zeige, dass aus $x \in \mathbb{Q}$ und $s \in \mathbb{Q}$ folgt, dass $x \cdot s \in \mathbb{Q}$.

• Aufgabe 1–7:
Zeige, dass aus $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und $s \in \mathbb{Q}$ mit $s \neq 0$ folgt, dass $x \cdot s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

• Aufgabe 1–8:
Zeige, dass x keine rationale Zahl sein kann falls $x \cdot x = 3$.

• Aufgabe 1–9:

Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{13} \notin \mathbb{Q}$

Prouver que $\sqrt[3]{13} \notin \mathbb{Q}$

• **Aufgabe 1–10:**
Beweisen sie, dass $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}$.

• **Aufgabe 1–11:**
Zeige dass x keine rationale Zahl sein kann falls $x \cdot x \cdot x = 2$.

• **Aufgabe 1–12:**
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p die Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

• **Aufgabe 1–13:**
Untersuchen Sie zwei Primzahlen p_1 und p_2. Beweisen Sie, dass die Zahl $\sqrt{p_1\, p_2}$ genau dann rational ist, wenn sie ganz ist.

• **Aufgabe 1–14:**
Untersuche die folgende Aussage auf ihre Richtigkeit.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist entweder $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Entweder müssen Sie die Aussage beweisen oder ein Gegenbeispiel finden.

• **Aufgabe 1–15:**
Man finde die Darstellung der folgenden Zahlen als Brüche.

(a) $0.37\overline{37}$

(b) $0.143456456\overline{456}$

(c) $1.\overline{5379}$

• **Aufgabe 1–16:**
Die Dezimalbruchdarstellung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ beginnt mit den Ziffern

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480 7\ldots$$

(a) Finden Sie eine möglichst einfache rationale Zahl x_1 die kleiner ist als $\sqrt{2}$ aber um höchstens 10^{-8} von $\sqrt{2}$ abweicht.

(b) Finden Sie eine möglichst einfache rationale Zahl x_2 die grösser ist als $\sqrt{2}$ aber um höchstens 10^{-8} von $\sqrt{2}$ abweicht.

• **Aufgabe 1–17:**
Gegeben seien die beiden rationalen Zahlen $x_1 = 10.12345432$ und $x_2 = 10.12345433$.

(a) Finden Sie zwei verschiedene (möglichst einfache) irrationale Zahlen y_1 und y_2, die zwischen x_1 und x_2 liegen.

(b) Finden Sie eine rationale Zahl z, die zwischen den von Ihnen gefundenen irrationalen Zahlen y_1 und y_2 liegt.

• **Aufgabe 1–18:**
Die Dezimalbruchdarstellung einer Zahl z ist gegeben durch $z = 1.a_1a_2a_3a_4\ldots$, d.h.

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 10^{-k}$$

Es gilt

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{1}{1.a_1a_2a_3a_4\ldots}$$

(a) Finden Sie den exakten Wert von z.

(b) Beweisen Sie, dass $z \notin \mathbb{Q}$.

• Aufgabe 1–19:

(a) Die Zahl $x = 2.116161\overline{61}\overline{6}$ kann als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden. Finden Sie diesen Bruch.

(b) Berechnen Sie a und b.

$$\sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) = a + b\,x$$

(c) Berechnen Sie exakt

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)}$$

• Aufgabe 1–20:

(a) Bestimmen Sie die Länge der Periode der Dezimalbruchdarstellung von $\frac{7}{13}$.

(b) Schreiben Sie die untenstehende Zahl x als Bruch zweier ganzer Zahlen.

(c) Markieren Sie (mit $\times$) in der untenstehenden Tabelle welche der Zahlen z in den entsprechenden Zahlbereichen sind.

$$x = 43.1246824682468\overline{2468}$$

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$					
$1.31\overline{31}$					
$\sqrt{361}$					
π					
$\sqrt{20}$					
$\sqrt{-16}$					

1.5.2 Aufgaben zu Summen und Produkten

• Aufgabe 1–21:
Schreiben Sie die Summe der ersten 17 Quadratzahlen mit dem Summensymbol und, falls Sie einen programierbaren Rechner haben, berechnen Sie diese.

• Aufgabe 1–22:
Berechnen Sie

$$a = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n^2} \qquad e = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=5}^{k} 1$$

$$b = \sum_{h=1}^{5} (h-1) \qquad f = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} 1$$

$$c = \sum_{s=0}^{4} (s+2) \qquad g = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} k$$

$$d = \sum_{s=-4}^{4} (s+2) \qquad h = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} j$$

• Aufgabe 1–23:
Schreiben Sie das Produkt aller geraden Zahlen bis und mit 48 mittels dem Produktsymbol.

• Aufgabe 1–24:
Schreiben Sie das Produkt aller ungeraden Zahlen bis und mit 47 mittels dem Produktsymbol.

• Aufgabe 1–25:
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 \qquad b = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} k \right)$$

$$c = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j \right) \qquad d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k$$

• Aufgabe 1–26:
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten, dass für $1 \leq k \leq n$ die Beziehung

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

richtig ist.

• Aufgabe 1–27:
Schreiben Sie die beiden Ausdrücke a und b mit Hilfe von Summen und Produktsymbol. Die Ausdrücke c und d sind exakt zu berechen, ohne Einsatz des Taschenrechners.

$$a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} \qquad b = 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 45$$

$$c = \sum_{k=1}^{9} (10-k) \cdot 10^{k-1} \qquad d = \prod_{k=1}^{3} \sum_{j=-k}^{k} |j|$$

• Aufgabe 1–28:
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von nur einem Summen- oder Produktsymbol ($\sum$, $\prod$).

$$a = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 33$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 \\
c &= \frac{17!}{6!} \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} \\
e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+37)
\end{aligned}$$

Doppelsumme

1.5.3 Vollständige Induktion

• Aufgabe 1–29:
Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die **geometrische Summe** gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

falls $q \neq 1$.

In den folgenden Aufgaben sind die Formeln zuerst mittels des Summensymbols umzuschreiben und dann zu beweisen. Die meisten dieser Aufgaben wurden aus [Swok92] übernommen.

• Aufgabe 1–30:
Beweisen Sie die Identität

$$2+4+6+\ldots+2n = n\,(n+1)$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–31:
Beweisen Sie die Identität

$$1+4+7+10+\ldots+(3n-2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–32:
Beweisen Sie die Identität

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–33:
Beweisen Sie die Identität

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n-1} = 1+(n-1)\,2^n$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–34:
Beweisen Sie die Identität

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

• Aufgabe 1–35:
Beweisen Sie die Identität

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

• Aufgabe 1–36:
Beweisen Sie die Identität

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\,(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

• Aufgabe 1–37:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2n \leq 3^n$.

• Aufgabe 1–38:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n + 3$ teilbar durch 3.

• Aufgabe 1–39:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ teilbar durch 2.

• Aufgabe 1–40:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5^n - 1$ teilbar durch 4.

• Aufgabe 1–41:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $10^{n+1} + 3\cdot 10^n + 5$ teilbar durch 9.

• Aufgabe 1–42:
Der Ausdruck $a^n - b^n$ ist immer durch $(a-b)$ teilbar.
Tip: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k\,(a-b) + (a^k - b^k)b$.

• Aufgabe 1–43:
Der Ausdruck $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ist immer durch $(a+b)$ teilbar.

• Aufgabe 1–44:
Man stelle für die n–gliedrige Summe eine Formel auf und beweise sie:

(a)

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

(b)

$$y_n = \frac{1}{a\cdot(a+b)} + \frac{1}{(a+b)\cdot(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+n\cdot b-b)\cdot(a+n\cdot b)}$$

• Aufgabe 1–45:
Man beweise für die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4\cdot a_n + 4^n$$

die Formel $a_n = n\cdot 4^{n-1}$.

• Aufgabe 1–46:
Man suche eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen und beweise sie.

Für die folgenden Aufgaben ist zuerst die kleinste Zahl n zu finden für welche die Aussage richtig ist. Dann ist mittels Induktion nachzuweisen, dass für alle grösseren die Behauptung richtig ist.

• Aufgabe 1–47:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$n + 12 < n^2$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–48:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$n^2 + 18 < n^3$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–49:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$5 + \log_2 n < n$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–50:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$10^n \leq n^n$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–51:
Beweisen Sie die Ungleichung

$$2^n \leq n!$$

mittels Induktion.

• Aufgabe 1–52:
Behauptung: Alle Frauen der Welt haben dieselbe Augenfarbe.
Beweis : Numeriere alle Frauen und benutze vollständige Induktion.

- Verankerung: Eine Frau hat dieselbe Augenfarbe. Klar!
- Induktionsschritt $n \to n+1$:
  Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n Frauen dieselbe Augenfarbe, ebenso die zweite bis (n+1)–ste Frau. Somit haben die erste und (n+1)–ste Frau dieselbe Augenfarbe.

□

Das Resultat ist offensichtlich falsch. Was ist falsch am Beweis?

• Aufgabe 1–53:
Beweise die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \quad \text{für alle} \quad x \geq -1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Erkläre weshalb $x > -1$ sein muss.

• Aufgabe 1–54:
Soit / Setzen Sie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$$

(a) Réécrire s_4 sans le symbole $\sum$.
Schreiben Sie s_4 ohne das Symbol $\sum$.

(b) Prouver par récurrence / Beweisen Sie mittels Induktion $s_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

1.5.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1–5 : Rational, rational, irrational.

Lösung zu Aufgabe 1–9 : Démonstration par contradiction.
Supposition: $x = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $x \cdot x \cdot x = 13$
Chercher la factorisation de a et b

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

A cause de $x \cdot x \cdot x = 13$ on sait que $a^3 = 13\, b^3$ et donc

$$p_1 p_1 p_1\; p_2 p_2 p_2\; p_3 p_3 p_3 \ldots p_n p_n p_n = 13\; q_1 q_1 q_1\; q_2 q_2 q_2\; q_3 q_3 q_3 \ldots q_m q_m q_m \qquad .$$

A gauche de cette signe d'égalité on trouve un multiple de 3 de facteurs 13, mais à droite le nombre des facteurs 13 est un multiple de 3 plus 1. Donc on a deux factorisations différentes du même nombre. Donc la supposition doit être fausse et on sait que $\sqrt[3]{13}$ ne peut pas être écrit comme fraction de deux nombres entiers.

Lösung zu Aufgabe 1–18 :

(a)

$$z - 1 = \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad z^2 - z - 1 = 0$$

und somit

$$z = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right)$$

Da offensichtlich $1 \leq z \leq 2$ gilt

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(b)

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow 1 + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Lösung zu Aufgabe 1–19 :

(a)

$$\begin{array}{rcr} 100\,x & = & 211.6161\overline{16} \\ x & = & 2.116161\overline{16} \\ \hline 99\,x & = & 209.500\overline{0} \end{array}$$

Somit gilt

$$x = \frac{209.5}{99} = \frac{2095}{990} = \frac{419}{198}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) &= (n+3) + x \sum_{k=-2}^{n} k \\ &= (n+3) + x\,\frac{(n+3)\,(n-2)}{2} \\ &= a + b\,x \end{aligned}$$

und somit $a = n + 3$ und $b = \dfrac{(n+3)\,(n-2)}{2}$.

(c)

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5} = 64$$

Lösung zu Aufgabe 1–20 :

(a) Wegen $\frac{7}{13} = 0.\overline{538461}$ ist die Länge der Periode 6.

(b) Wegen

$$10000\cdot x - x = 431246.8246824682\overline{2468} - 43.12468246824682\overline{2468} = 431203.7 = \frac{4312037}{10}$$

gilt

$$x = \frac{4312037}{99990}$$

(c)

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$			$\times$	$\times$	$\times$
$1.31\overline{31}$			$\times$	$\times$	$\times$
$\sqrt{361}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
π				$\times$	$\times$
$\sqrt{20}$				$\times$	$\times$
$\sqrt{-16}$					$\times$

Lösung zu Aufgabe 1–21 : 1785

Lösung zu Aufgabe 1–22 : $a = 49/36$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 18$, $e = 6$, $f = 28$, $g = 140$, $h = 84$.

Lösung zu Aufgabe 1–23 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2\,k) = 2^{24}\prod_{k=1}^{24} k = 2^{24}24!$$

Lösung zu Aufgabe 1–24 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2k-1) = \frac{48!}{2^k 24!}$$

Lösung zu Aufgabe 1–25 :

(a) Alle Terme ausser dem Letzten heben sich weg.

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 = 2\cdot 20^3 = 16000$$

(b)

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} k\right) \\ &= (1) + (2) + (6) = 9 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} c &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} 2\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} 4\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} 6\right) \\ &= (2) + \left(4^2\right) + \left(6^3\right) = 2 + 16 + 216 = 234 \end{aligned}$$

(d) Arithmetische Summe

$$d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k = 2\sum_{k=0}^{n} k = 2\,\frac{n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$$

Lösung zu Aufgabe 1–26 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\left(\frac{(n-k+1)+k}{k\,(n-k+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–27 :

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} = \sum_{k=0}^{15}\frac{1}{2k+1} \\ b &= 12\cdot 15\cdot 18\cdot 21\cdot\ldots\cdot 45 = \prod_{k=4}^{15}(3\,k) \\ c &= \sum_{k=1}^{9}(10-k)\cdot 10^{k-1} = 123456789 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= \prod_{k=1}^{3} \sum_{j=-k}^{k} |j| \\
&= \left(\sum_{j=-1}^{1} |j|\right) \cdot \left(\sum_{j=-2}^{2} |j|\right) \cdot \left(\sum_{j=-3}^{3} |j|\right) \\
&= (1+0+1)\cdot(2+1+0+1+2)\cdot(3+2+1+0+1+2+3) \\
&= 2\cdot 6\cdot 12 = 144
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–28 :

$$\begin{aligned}
a &= 3+6+9+12+15+\ldots+33 = \sum_{k=1}^{11} 3\,k \\
b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 = \sum_{k=-1}^{6} 2^k \\
c &= \frac{17!}{6!} = \frac{\prod_{k=1}^{17} k}{\prod_{j=1}^{6} j} = \prod_{k=7}^{17} k \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 24}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 24} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 23 = \prod_{k=0}^{11}(2\,k+1) \\
d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1}{2^{12}} \prod_{k=13}^{24} k = \prod_{k=13}^{24} \frac{k}{2} \\
e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+37) = \sum_{j=1}^{37}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right) = \sum_{j=1}^{37} \frac{k\,(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–29 :

- Verankerung bei $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = 1+q = \frac{(1+q)\,(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q}$$

- Induktionsschritt von n zu $n+1$

  – Verwende :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  – Zu zeigen :

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

  – Rechnung :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Lösung zu Aufgabe 1–42 :

- Induktionsverankerung, $n = 1$:
  $a^1 - b^1$ ist offensichtlich durch $(a - b)$ teilbar.
- Induktionsschritt von n zu $n + 1$:
  Wir dürfen verwenden, dass $a^n - b^n$ durch $(a - b)$ teilbar ist, d.h.

  $$a^n - b^n = K\,(a-b)$$

  Zu zeigen ist, dass $a^{n+1} - b^{n+1}$ durch $(a - b)$ teilbar ist.

  $$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n\,(a-b) + (a^n - b^n)b \\ &= a^n\,(a-b) + K\,(a-b)\,b \\ &= (a-b)\,(a^n\ + K\,b) \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Lösung zu Aufgabe 1–44 : (a) $\frac{n}{n+1}$, (b) $\frac{n}{a(a+nb)}$

Lösung zu Aufgabe 1–52 : Der Induktionsschritt von n=1 zu zu $n + 1 = 2$ ist falsch.

Lösung zu Aufgabe 1–53 :

- Verankerung: für $n = 1$ ist $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ richtig
- Induktionsschritt $n \to n + 1$:
  - Verwende : $(1 + x)^n \geq 1 + n\,x$
  - Zu zeigen : $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\,x$
  - Rechnung :

    $$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\ &\geq (1+x)\,(1+n\,x) \quad \text{verwende Induktionsannahme und } 1-x>0 \\ &= 1+(n+1)\,x+x^2 \geq 1+(n+1)\,x \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Lösung zu Aufgabe 1–54 :

(a)

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{13}{8}$$

(b) Verankerung bei $n = 1 : s_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$. OK.
Induktionsschritt

$$s_{n+1} = s_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n^2}{2+n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

und mittles dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Beweis erbracht.

1.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die verschiedenen Typen von Zahlen unterscheiden können.
- die Beziehung zwischen rationalen Zahlen und Dezimalbruchentwicklungen verstehen.
- wissen warum $\sqrt{13}$ keine rationale Zahl ist.
- mit dem Summen– und Produktsymbolen umgehen können.
- arithmetische und geometrische Summen berechnen können.
- die allgemeine Struktur eines Beweises kennen.

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

Es gibt einfache Gleichungen die keine reelle Lösung haben. Um die Gleichung

$$z^2 - z + 4 = 0$$

zu lösen verwendet man die quadratische Lösungsformel.

$$z_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\,\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right) = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1-16}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1}$$

Somit hat diese Gleichung keine reelle Lösung und wir benötigen einen neuen Typ Zahlen. Für die neue Zahl i gelte $i^2 = -1$ und somit

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,i = x + i\,y \quad \text{avec} \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$$

2–1 Definition : Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist der Ausruck $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ eine **komplexe Zahl**. x heisst **Realteil** und y heisst **Imaginärteil** von z. Somit kann jede komplexe Zahl z repräsentiert werden durch ein paar (x, y) von reellen Zahlen. Man schreibt

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(a + i\,b) = a \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(a + i\,b) = b$$

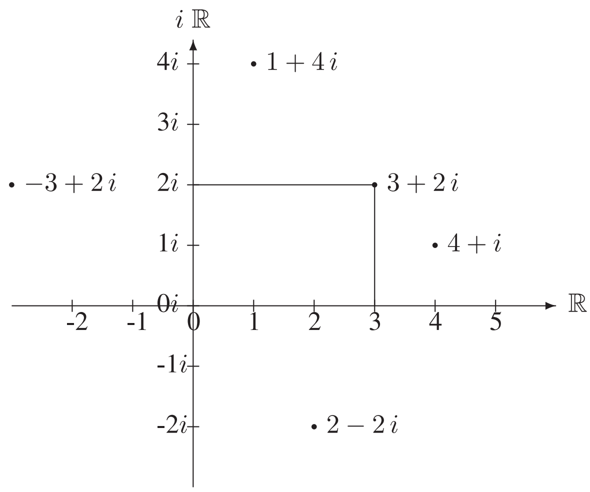


Abbildung 2.1: Die Ebene der komplexen Zahlen, dargestellt durch Punkte

In der Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem mit rechtwinkligen Achsen werden die reellen Zahlen aud der x–Achse aufgetragen. In die vertikale Richtung kann man den Imaginärteil $i\,y$ auftragen, mit i als Einheit. Die komplexe Zahl $z = x + i\,y$ wird somit durch den Punkt z mit den Koordinaten $(x\,,\,y)$ dargestellt, oder durch den Vektor $\vec{z}$, der den Ursprung mit diesem Punkt verbindet. Untersuchen Sie Abbildung 2.1 und 2.2.

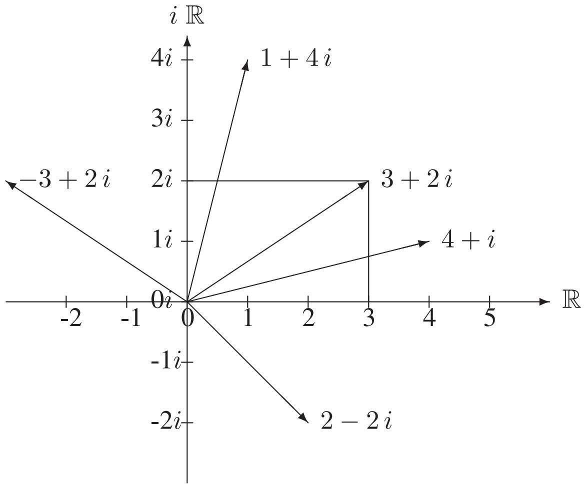


Abbildung 2.2: Die Ebene der komplexen Zahlen, dargestellt durch Vektoren

2.1 Definition der Grundoperationen

2–2 Definition : Seien $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 \in \mathbb{C}$ zwei kompleze Zahlen mit

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{und} \quad z_2 = x_2 + i\,y_2$$

Dann ist die **Addition** gegeben durch

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i\ (y_1 + y_2)$$

In Abbildung 2.3 kann verifiziert werden, dass die Addition zweier komplexen Zahlen der Addition der Vektoren mit den Real– und Imaginärteilen als Komponeneten entspricht.

2–3 Definition : Seien $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 \in \mathbb{C}$ zwei kompleze Zahlen mit

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{und} \quad z_2 = x_2 + i\,y_2$$

Dann ist die **Multiplikation** gegeben durch

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1) \cdot (x_2 + i\,y_2) = (x_1\,x_2 - y_1 y_2) + i\ (x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$$

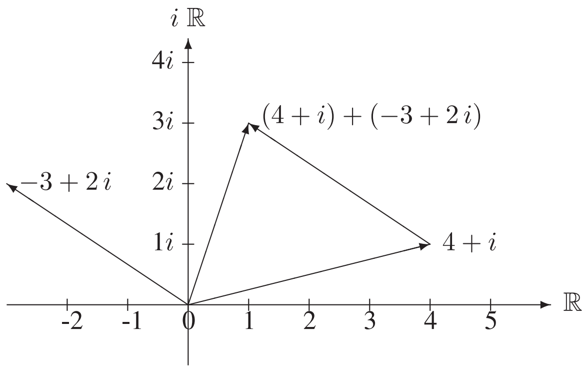


Abbildung 2.3: Addition von zwei komplexen Zahlen

2–4 Beispiel :

(a)

$$(1-i\,4)+(3+7\,i)=4+i\,3$$

(b)

$$(1-i\,4)\cdot(3+7\,i)=(3+28)+i\,(7-12)=31-i\,5$$

(c) Mit *Octave* erhält man

Octave

```
(1-i)+(3+7*i)

ans =  4 + 6i
```

Octave

```
(1-i)*(3+7*i)

ans =  10 +  4i
```

(d) Für $x\in\mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= (x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}\,i)\,(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\,i) \\
&= \left(x^2-2\,\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-i^2\,\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2\right) \\
&\quad +i\,\left((x-\frac{1}{2})\,\frac{\sqrt{15}}{2}-(x-\frac{1}{2})\,\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \\
&= \left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)+0=x^2-x+4
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Funktion aus dem einführenden Beispiel dieses Kapitel wiedergefunden.

(e) Die vorangehende Rechnung kann vereinfacht werden: $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned} f\,(x) &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}\,i)\,(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\,i) \\ &= \left((x-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right)\,\left((x-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\,i\right)^2 \\ &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{15}{4} = x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–5 Satz : *Seien $z_i \in \mathbb{C}$. Dann gelten die Rechenregeln*

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$	*Kommutativgesetz*
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$	*Assoziativgesetz*
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	*Distributivgesetz*

2–6 Beispiel : Für $a, b \in \mathbb{R}$ suchen Sie eine komplexe Zahl $z = x + i\,y$, sodass $z \cdot (a + i\,b) = 1$.

Lösung: Version 1:
Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 + i\,0 &= z \cdot (a + i\,b) = (x + i\,y) \cdot (a + i\,b) \\ &= (x\,a - y\,b) + i\,(x\,b + y\,a) \end{aligned}$$

auch bezüglich $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann vergleicht man die Real– und Imaginärteile

$$\begin{array}{rrl} x\,a & -y\,b & = 1 \\ x\,b & +y\,a & = 0 \end{array}$$

und kommt zur Lösung

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Version 2:
Falls $z \cdot (a + i\,b) = 1$ so weiss man, dass

$$z = x + i\,y = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{1}{(a + i\,b)}\,\frac{(a - i\,b)}{(a - i\,b)} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Wir haben soeben die Division von komplexen Zahlen gefunden. Die Zahl 1 wurde durch $a + i\,b$ dividiert.

$\diamondsuit$

2–7 Satz : *Für $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

2–8 Definition : Sei $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$. Dann heisst die komplexe Zahl

$$\overline{z} = \overline{a + i\,b} = a - i\,b$$

die **konjugiert komplexe Zahl** und

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

heisst **Norm** oder **Betrag** der Zahl $z \in \mathbb{C}$.

2–9 Beispiel : Für $z = 1 - i\,3$ erhält man $\overline{z} = \overline{1 - i\,3} = 1 + i\,3$ und $|z|^2 = 1^2 + 3^2$ und somit $|z| = \sqrt{10}$. ♢

2–10 Satz : *In Abbildung 2.4 sieht man, dass die Norm $|z|$ einer komplexen Zahl dem Betrag (Länge) des entsprechenden Vektors entspricht. Verwenden Sie das Theorem von Pythagoras um dies zu verifizieren.*

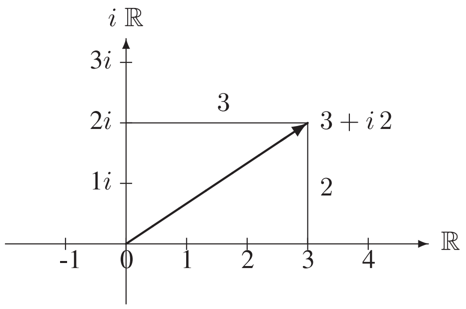


Abbildung 2.4: Norm einer komplexen Zahl

2–11 Satz : *Seien $z_i \in \mathbb{C}$. Dann gelten die einfachen und wichtigen Rechengesetze*

$$\begin{aligned}
\overline{z}_1 + \overline{z}_2 &= \overline{z_1 + z_2} \\
\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 &= \overline{z_1 \cdot z_2} \\
\frac{1}{\overline{z}} &= \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \\
z + \overline{z} &= 2\ \mathrm{Re}\, z \\
z - \overline{z} &= i\,2\ \mathrm{Im}\, z \\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2
\end{aligned}$$

Beweis : Einfache Rechnungen. □

2–12 Lemma : *Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

Beweis : Mit Hilfe von

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2$$

folgt sofort

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

□

2–13 Satz : *Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen.*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Beweis : Analytischer Beweis:
Untersuchen Sie die Quadrate der beiden Seiten der Ungleichung. Sei $z_1 = a_1 + i\, b_1$ und $z_2 = a_2 + i\, b_2$ und folglich

$$\begin{aligned} |z_1|^2 &= a_1^2 + b_1^2 \\ |z_2|^2 &= a_2^2 + b_2^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\,|z_1| + |z_2|\,)^2 &= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\ &= a_1^2 + b_1^2 + 2\,\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2} + a_2^2 + b_2^2 \end{aligned}$$

Für die Summe $z_1 + z_2$ findet man

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |\,(a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)\,|^2 \\ &= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \\ &= (a_1^2 + 2\,a_1 a_2 + a_2^2) + (b_1^2 + 2\,b_1 b_2 + b_2^2) \end{aligned}$$

Somit kann die ursprüngliche Ungleichung

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (\,|z_1| + |z_2|\,)^2$$

ersetzt werden durch die äquivalente Ungleichung

$$2\,a_1 a_2 + 2\,b_1 b_2 \leq 2\,\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

oder

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Diese Ungleichung ist korrekt, falls

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq \left(a_1^2 + b_1^2\right)\,\left(a_2^2 + b_2^2\right)$$

Durch die folgenden Umformungen vereinfacht sich das Problem.

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 &\leq \left(a_1^2 + b_1^2\right)\,\left(a_2^2 + b_2^2\right) \\ a_1^2 a_2^2 + 2\,a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 &\leq a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \\ 2\,a_1 a_2 b_1 b_2 &\leq a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 \end{aligned}$$

Nun kann das vorangehende Lemma verwendet werden mit $x = a_1 b_2$ und $y = a_2 b_1$ um die gewünschte Ungleichung zu verifizieren. □

Beweis : Geometrische Version:
Für Dreiecke mit den Seiten a, b und c gilt $a + b \leq c$ und somit zeigt Abbildung 2.5, dass $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$. □

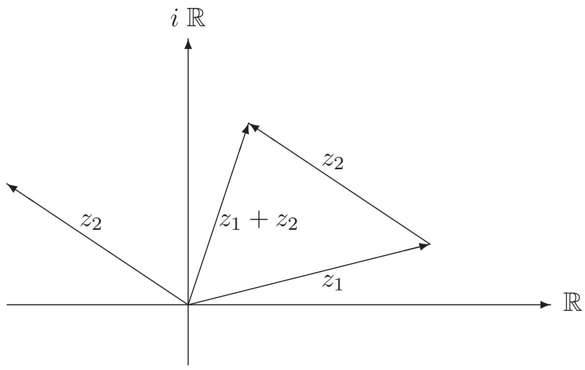


Abbildung 2.5: Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

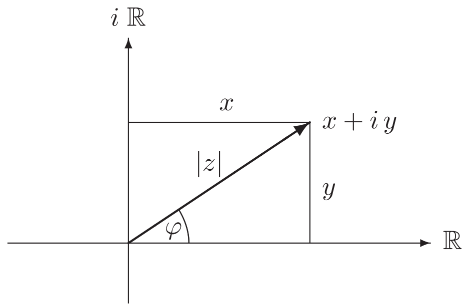


Abbildung 2.6: Norm und Argument einer komplexen Zahl

2.2 Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl $x = x + i\,y$ kann auch gegeben werden durch ihre Norm $|z|$ und ihr **Argument** $\varphi = \arg z$, beschrieben durch

$$\tan\varphi = \tan\arg z = \tan(\arg(x + i\,y)) = \frac{y}{x}$$

Somit ist z geggeben durch

$$z = x + i\,y = |z|\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

Leider ist die einfache Formel $\arg z = \arctan y/x$ für $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ nicht immer richtig. Das Problem entsteht durch die Gleichung $\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Man muss zuerst den Bereich des zu bestimmenden Winkels φ wählen und dann die passende Formel für $\arg z$ in jedem Quadranten der komplexen Ebene verwenden. Gemäss Definition liefert die $\arctan$–Funktion Winkel zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$. Für die Funktion $\arg z$ wird oft die beiden folgenden Konventionen verwendet : $0 \leq \arctan z < 2\,\pi$ oder $-\pi < \arctan z \leq \pi$ (siehe Tabelle 2.1).

2–14 Bemerkung : In vielen Programmiersprachen gibt es spezielle Modifikationen der Funktion $\arctan$ um den Winkel zwischen der x–Achse und einem Vektor (x, y). Die Modifikationen für die Programmiersprachen *Mathematica* und *Octave* sind in Tabelle 2.2 gezeigt. Diese Modifikationen verlangen zwei Argumente, statt eies einzigen. ♢

$z = x + i\,y$	$0 \leq \arg z < 2\,\pi$	$-\pi < \arg z \leq \pi$
$x > 0$ und $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$
$x = 0$ und $y > 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$
$x < 0$ und $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$
$x < 0$ und $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} - \pi$
$x = 0$ und $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{3\,\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = -\frac{\pi}{2}$
$x > 0$ und $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + 2\,\pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$

Tabelle 2.1: Zwei Definitionen der Funktion $\arg z$

Octave

```
octave:1> help  atan2
atan2 is a builtin function

atan2 (Y, X): atan (Y / X) in range -pi to pi
```

Mathematica

```
?ArcTan
.
ArcTan[z] gives the inverse tangent of z. ArcTan[x, y] gives the inverse
   tangent of y/x where x and y are real, taking into account which
   quadrant the point (x, y) is in.
```

Tabelle 2.2: Modifikationen der Funktion $\arctan$

2.3 Multiplikation von komplexen Zahlen

2–15 Satz : *Sei*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + i\,y_1 = |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \\ z_2 &= x_2 + i\,y_2 = |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Somit ist die Norm eines Produktes gegeben durch das Produkt der Normen und das Argument des Produktes als Summe der Argumente.

Beweis : Der Beweis basiert auf Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \cdot\ (\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i\ (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Das obige Resultat lässt sich übertragen auf Produkte mehrerer Zahlen

$$\left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |\,z_j\,|$$

$$\arg\left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \arg\ z_j$$

und man kommt zur folgenden Interpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen.

2–16 Satz : *Interpretieren Sie die komplexe Zahl $a + i\,b \in \mathbb{C}$ als Vektor und multiplizieren Sie die Zahl mit $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$. Der Effekt auf die Zahl $a + i\,b$ ist:*

1. *der „Vektor“ (a, b) wird um der Faktor $|z|$ gestreckt.*

2. *das Resultat der vorangehenden Operation wird um den Winkel $\arg z$ rotiert.*

2–17 Beispiel : Untersuchen Sie das „Dreieck“ mit den Ecken in $3+i$, $5+4\,i$ und $1+i3$. Eine Multiplikation dieses Dreiecks mit $z = (1 + i)/2$ ergibt das zweite Dreieck in Abbildung 2.7. Es gilt $\arg z = \pi/4$ und $|z| = 1/\sqrt{2}$, somit ergibt sich eine Rotation um den Winkel $45°$ und eine Komprimierung um den Faktor $1/\sqrt{2}$. ♢

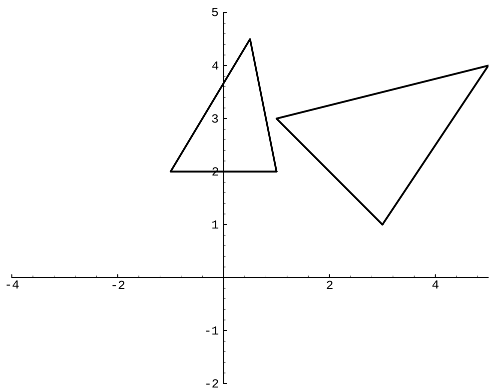


Abbildung 2.7: Rotation eines Dreiecks

2.4 Eulersche Formel und Exponentialdarstellung

Die Formel für das Argument eines Produktes von zwei komplexen Zahlen hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Eigenschaft der Exponentialfunktion.

$$\begin{aligned} \exp\,(x_1 + x_2) &= \exp x_1 \cdot \exp x_2 \\ \exp\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) &= \prod_{j=1}^{n} \exp\ x_j \end{aligned}$$

und somit sollten Verbindungen zwischen komplexen Zahlen und der Exponetialfunktion keine Überraschung sein.

2–18 Definition : (Eulersche Formel)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzt men

$$e^{i\,\alpha} = \cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha$$

Das Theorem von Pythagoras zeigt, dass

$$\begin{aligned} \left|e^{i\,\alpha}\right| &= \left|\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha\right| \\ &= \sqrt{\cos^2\,\alpha + \sin^2\,\alpha} = 1 \end{aligned}$$

2–19 Beispiel : Verifizieren Sie, dass

$$\begin{aligned} e^{i\,\pi} &= \cos\,\pi + i\,\sin\,\pi = -1 \\ e^{i\,\pi/2} &= \cos\,\frac{\pi}{2} + i\,\sin\,\frac{\pi}{2} = i \\ e^{i} &= \cos\,1 + i\,\sin\,1 \\ e^{i\,(x+2\,\pi)} &= e^{i\,x} \end{aligned}$$

Die Funktion $f\,(x) = e^{i\,x}$ ist 2π–periodisch. ♢

2–20 Satz : *Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann geschrieben werden in der Form*

$$z = |z|\;e^{i\,\arg z}$$

Beweis : Verifizieren Sie, dass

$$\arg\left(|z|\;e^{i\,\arg z}\right) = \arg e^{i\,\arg z} = \arg z$$

und

$$\left|\;|z|\;e^{i\,\arg z}\;\right| = |z|\;\left|e^{i\,\arg z}\right| = |z| \cdot 1$$

Somit sind Argumente und die Normen der beiden Zahlen z und $|z|\exp(i\;\arg z)$ gleich gross und die beiden Zahlen identisch. □

2–21 Bemerkung : Für $a\,,\,b \in \mathbb{R}$ setzt man $z = e^{a+i\,b}$ und es gilt

$$z = e^{a+i\,b} = e^{a} \cdot e^{i\,b} = |z| \cdot e^{i\,\arg z}$$

Somit ist $|z| = e^{a}$ und $\arg z = b + k\,2\,\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. ♢

2–22 Beispiel : Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in verschiedenen Formen dargestellt werden.

1. $z = a + i\,b$
2. als Paar von reellen Zahlen (a, b)
3. durch Norm und Argument
4. in der Exponentialform $z = \exp\left(\ln |z| + i\ \arg z\right)$

$z \in \mathbb{C}$	Paar in $\mathbb{R}$	Norm/Argument	Exponentialform
$z = 1 + i$	$(1, 1)$	$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ und $\arg z = \frac{\pi}{4}$	$z = \exp\left(\ln \sqrt{2} + i\,\frac{\pi}{4}\right)$
$z = 1$	$(1, 0)$	$\lvert z\rvert = 1$ und $\arg z = 0$	$z = \exp\left(0 + i\,0\right) = \exp 0$
$z = -i\,3$	$(0, -3)$	$\lvert z\rvert = 3$ und $\arg z = -\frac{\pi}{2}$	$z = \exp\left(\ln 3 - i\,\frac{\pi}{2}\right)$
$z = 3 - i\,4$	$(3, -4)$	$\lvert z\rvert = 5$ und $\arg z = -\arctan\frac{4}{3}$	$z = \exp\left(\ln 5 - i\ \arctan\frac{4}{3}\right)$

$\diamondsuit$

Die folgenden Resultate zeigen, dass die Identität $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ auch für die komplexe Exponentialfunktion gültig ist.

2–23 Satz : *Für* α , $\beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$e^{i\,(\alpha+\beta)} = e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta}$$

Beweis : Die Berechnungen sind sehr ähnlich zum Beweis für die Multiplikation zweier komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned} e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta} &= (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha) \cdot (\cos\,\beta + i\,\sin\,\beta) \\ &= (\cos\,\alpha \cos\,\beta - \sin\,\alpha \sin\,\beta) + i\,(\cos\,\alpha \sin\,\beta + \cos\,\beta \sin\,\alpha) \\ &= \cos\,(\,\alpha +\,\beta) + i\,\sin\,(\,\alpha +\,\beta) \\ &= e^{i\,(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$\square$

2–24 Satz : *Für komplexe Zahlen*$z_j \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \exp\,(z_1 + z_2) &= \exp z_1 \cdot \exp z_2 \\ \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) &= \prod_{j=1}^{n} \exp\,z_j \end{aligned}$$

Ale einfache Konsequenz erhält man

2–25 Satz : *Für komplexe Zahlen* $z_j \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|\ e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} \\ \prod_{j=1}^{n} z_j &= \left(\prod_{j=1}^{n} |z_j|\right) \cdot \exp\left(i\,\sum_{j=1}^{n} \arg\,z_j\right) \end{aligned}}$$

2–26 Satz : *(Formel von DeMoivre* [1]*)*
Für $n \in \mathbb{N}$ *und* $z = |z|\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ *gilt*

$$z^n = |z|^n\,(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha))$$

Beweis :

$$(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{i\alpha\,n} = \cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha)$$

□

2–27 Beispiel : Verwenden Sie die Formel von DeMoivre mit $n = 3$ um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha + 3\,(i)^2\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + (i)^3\,\sin^3\,\alpha \\
&= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha - i\,\sin^3\,\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + i\,\left(3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha\right) \\
(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos(3\alpha) + i\,\sin(3\alpha)
\end{aligned}$$

Durch Vergleichen der Real– und Imaginärteile erhält man

$$\begin{aligned}
\cos(3\,\alpha) &= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha = \cos\,\alpha\,(\cos^2\alpha - 3\sin^2\,\alpha) \\
\sin(3\,\alpha) &= 3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha = \sin\,\alpha\,(3\,\cos^2\,\alpha - \sin^2\,\alpha)
\end{aligned}$$

♢

2.5 Wurzeln von komplexen Zahlen

2–28 Beispiel : Für $z = 1 + i$ bestimmen Sie z^1, z^3 und z^n für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Um $z^3 = z \cdot z \cdot z$ zu bestimmen müssen die Normen multipliziert werden und das Argument mit 3 multipliziert werden.

$$z^3 = |z|^3\,e^{i\,3\,\arg z} = \sqrt{2}^3\,e^{i\,3\,\frac{\pi}{4}}$$

Ebenso gilt

$$z^n = |z|^n\,e^{i\,n\,\arg z} = \sqrt{2}^n\,e^{i\,n\,\frac{\pi}{4}}$$

♢

2–29 Beispiel : Untersuchen Sie die Gleichung

$$z^5 = 32$$

Insistiert man auf reellen Zahlen $z \in \mathbb{R}$, so existiert eine einzige Lösung $z_1 = 2$. Mit Hilfe komplexer Zahlen erhält man

$$\begin{aligned}
\left|z^5\right| &= |z|^5 = 32 \\
\arg\,z^5 &= 5\,\arg z = 0 + k\,2\,\pi \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Bedingungen

$$\begin{aligned}
|z| &= 2 \\
\arg z &\in \frac{2\,\pi}{5}\,\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

[1] Abraham DeMoivre (1667–1754), französischer Mathematiker. Er hat erhebliche Beiträge geleistet auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Trigonometrie.

und somit erhält man fünf verschiedene Lösungen.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\,e^{i\,0} \\
z_2 &= 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} \\
z_3 &= 2\,e^{i\,2\,\frac{2\pi}{5}} \\
z_4 &= 2\,e^{i\,3\,\frac{2\pi}{5}} \\
z_5 &= 2\,e^{i\,4\,\frac{2\pi}{5}}
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind auf einem Kreis mit Radius 2 und die Differenzen zwischen den Argumenten sind Vielfache von $\frac{2\pi}{5}$, d.h. von $\frac{360°}{5}$. Es gibt aber keine anderen Lösungen, z.B.

$$\begin{aligned}
z_6 &= 2\,e^{i\,5\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,2\pi} = z_1 \\
z_7 &= 2\,e^{i\,7\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} = z_2
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–30 Definition : Sei $z \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\,e^{i\varphi}$$

und $\varphi \geq 0$ ist der kleinste Winkel, sodass

$$n\,\varphi = \arg z + k\,2\pi \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für viele Beispiele gilt somit.

$$\arg \sqrt[n]{z} = \varphi = \frac{\arg z}{n}$$

2–31 Satz : *Sei $Z \in \mathbb{C}$ und $Z \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die n Lösungen der Gleichung*

$$z^n = Z$$

somit gegeben durch

$$z_i = \sqrt[n]{|Z|}\,e^{\frac{i}{n}\,\arg(Z)}\,e^{i\,k\,\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Die Lösungen sind auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|Z|}$ und die Differenzen zwischen den Argumenten sind Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$, d.h. von $\frac{360°}{n}$.

2–32 Beispiel : Lösen Sie die Gleichung $z^3 = i$.

Lösung: Es gilt $\arg i = \pi/2$ und somit

$$(i)^{1/3} = 1\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\
z_2 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{i\,\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\
z_3 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{i\,\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{9\pi}{6} + i\,\sin\frac{9\pi}{6} = 0 - i
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.6 Komplexe Impedanzen

Untersuchen Sie einen Wechselstrom $I\,(t) = I_0\,\sin\,(\omega t)$. Somit ist die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Nun untersuchen wir das Verhalten von Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten. Für die Spannung über diese Elemente gilt

$$\begin{array}{rclll} V\,(t) & = & R\,I_0\,\sin\,(\omega t) & \quad & \text{Widerstand } R \\ V\,(t) & = & \dfrac{-1}{\omega\,C}\,I_0\,\cos\,(\omega t) & \quad & \text{Kapazität } C \\ V\,(t) & = & \omega\,L\,I_0\,\cos\,(\omega t) & \quad & \text{Induktivität } L \end{array}$$

Untersuchen Sie die Abbildungen 2.8, 2.9 und 2.10.

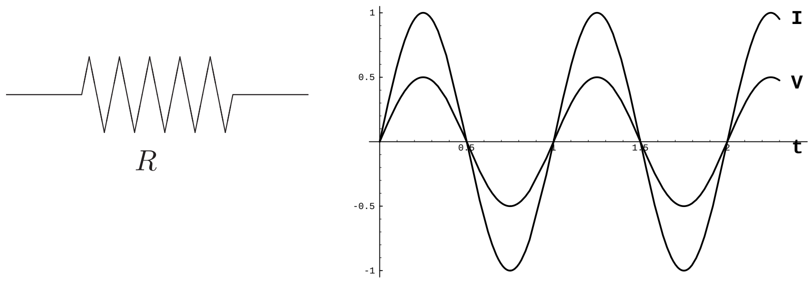


Abbildung 2.8: Spannung und Strom für einen Widerstand R

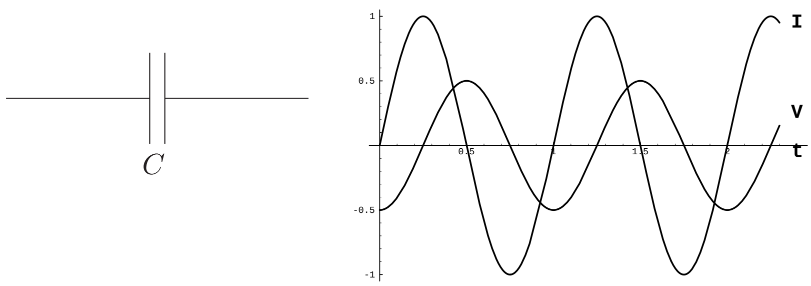


Abbildung 2.9: Spannung und Strom für eine Kapazität C

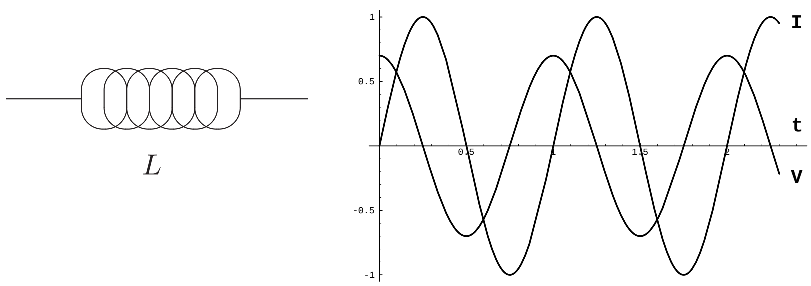


Abbildung 2.10: Spannung und Strom für eine Induktivität L

Mit der komplexen Exponentialfunktion $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ erhält man $\sin\alpha = \operatorname{Im} e^{i\alpha}$. Man sieht, dass

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha+\pi/2)} \quad \text{und} \quad -\cos\alpha = \sin(\alpha - \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha-\pi/2)}$$

und somit

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,\omega t}$$

Das führt auf

$$\begin{array}{rclr} V(t) & = & R\, I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,\omega t} & \text{Widerstand } R \\ V(t) & = & \dfrac{1}{\omega\, C}\, I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,(\omega t - \pi/2)} & \text{Kapazität } C \\ V(t) & = & \omega\, L\, I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,(\omega t + \pi/2)} & \text{Induktivität } L \end{array}$$

Verwenden Sie $e^{-i\,\pi/2} = -i = 1/i$ und $e^{i\,\pi/2} = i$ um zu zeigen, dass die Realteile der untenstehenden Beziehungen mit den obigen übereinstimmen.

$$\begin{array}{rclr} V(t) & = & R\, I(t) & \text{Widerstand } R \\ V(t) & = & \dfrac{1}{i\,\omega\, C}\, I(t) & \text{Kapazität } C \\ V(t) & = & i\,\omega\, L\, I(t) & \text{Induktivität } L \end{array}$$

Mit Hilfe der obigen Formeln ergibt sich eine natüriche Definition der **komplexen Impedanzen**

$$\begin{array}{rclr} Z & = & R & \text{Widerstand } R \\ Z & = & \dfrac{1}{i\,\omega\, C} & \text{Kapazität } C \\ Z & = & i\,\omega\, L & \text{Induktivität } L \end{array}$$

Die Impedanz Z spielt die Rolle des Widerstandes im Ohmschen Gesetz $U = R\, I$ für einen Wechselstrom und Widerstand, Kapazität oder Induktivität, wobei mit komplexen Strömen und Spannungen gerechnet wird.

$$U(t) = Z\, I(t)$$

Die realen Spannungen und Ströme sind gegeben als Real– oder Imaginärteile der komplexen Ausdrücke.

2–33 Beispiel : (LRC–Glied)
Drei Elemente werden in Serie geschaltet (siehe Abbildung 2.11) und man legt einen Strom an.

$$I(t) = I_0 \sin(\omega\, t) = I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,\omega\, t}$$

Die (komplexe) Spannung über die drei Elemente ist gegeben durch

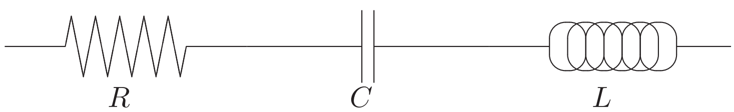


Abbildung 2.11: LRC–Glied

$$V(t) = (R + \frac{1}{i\,\omega\, C} + i\,\omega\, L)\, I(t) = Z\, I(t)$$

Die **Impedanz** ist

$$|Z| = \left|R + \frac{1}{i\,\omega\, C} + i\,\omega\, L\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega\, C} + \omega\, L\right)^2}$$

und die **Phase** ϕ ist gegeben durch

$$\tan\phi = \frac{\omega\,L - 1/(\omega C)}{R}$$

Somit erhält man die reelle Spannung

$$V\,(t) = \mathrm{Im}\,(Z\,I\,(t)) = I_0\,|Z|\,\,\mathrm{Im}\,e^{i\,(\omega\,t+\phi)} = I_0\,|Z|\,\,\sin(\omega\,t+\phi)$$

Untersucht man nun

$$\begin{aligned} I\,(t) &= \;= I_0\,\sin(\omega\,t) \\ V\,(t) &= \;= I_0\,|Z|\,\sin(\omega\,t+\phi) \end{aligned}$$

so ist die Impedanz $|Z|$ ein Verstärkungsfaktor und $\phi = \arg Z$ entspricht der Phasenverschiebung. Die Impedanz häng von ω ab.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega\,C} + \omega\,L\right)^2}$$

Man erhält den minimalen Wert, falls

$$\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} = 0$$

d.h. bei

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

Bei dieser Frequenz ist die Amlitude der Spannung maximal und die Phase ist nicht verschoben. ♢

2–34 Beispiel : Untersuchen Sie die Elemente in Abbildung 2.12. Man rechnet mit komplexen Impedanzen wie mit Widerständen, aber mit komplexen Zahlen. Die komplexe Impedanz ist gegeben durch

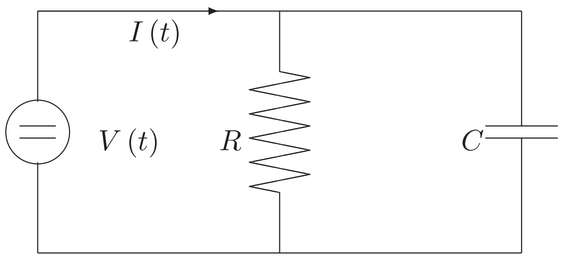


Abbildung 2.12: Widerstand und Kapazität, parallelgeschaltet

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/(i\,\omega\,C)} = \frac{1}{R} + i\,\omega\,C \\ Z &= \frac{R}{1+i\,\omega\,R\,C} = \frac{R}{1+(\omega\,R\,C)^2}\,\,(1-i\,\omega\,R\,C) \end{aligned}$$

und somit

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega\,R\,C)^2}} \quad \text{und} \quad \arg Z = \tan\phi = -\omega\,R\,C$$

♢

2.7 Aufgaben

• Aufgabe 2–1:
Für $a = 3 + i\,2$ und $b = 4 - i$ berechnen Sie $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b , b/a, $|a|$, $|b|$, $|a \cdot b|$ und $|a + b|$.

• Aufgabe 2–2:
Lösen Sie auf nach $z \in \mathbb{C}$

(a) $z + (1 - i) = 3 + 2\,i$

(b) $-5\,z = 5 + 10\,i$

(c) $(i - z) + (2\,z - 3\,i) = -2 + 7\,i$

• Aufgabe 2–3:
Seien $z_1 = 2 + 3\,i$, $z_2 = -2 + 3\,i$, $z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4}$. Bestimmen Sie die folgenden Terme **exakt** und vereinfachen Sie.

(a) $|\,z_1 + z_2\,|$

(b) $z_1 \cdot z_2$

(c) $z_1 \cdot z_3$

(d) $\frac{z_1}{z_2}$

• Aufgabe 2–4:
Für jede Teilaufgabe bestimmen Sie $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 und z_2^2

(a) $z_1 = 3\,i$ und $z_2 = 1 - i$

(b) $z_1 = 4 + 6\,i$ und $z_2 = 2 - 3\,i$

(c) $z_1 = \frac{1}{3}\,(2 + 4\,i)$ und $z_2 = \frac{1-5\,i}{2}$

• Aufgabe 2–5:
Lösen Sie

$$z^2 + 2\,z + 2 = 0$$

und kontrollieren Sie Ihre Lösung.

• Aufgabe 2–6:
Lösen Sie

$$2\,z^2 - 2\,z + 2 = 0$$

und kontrollieren Sie Ihre Lösung.

• Aufgabe 2–7:
Berechnen Sie i^{123443} **ohne** Taschenrechner.

• Aufgabe 2–8:
Lösen Sie auf nach $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} i\,z_1 & - & i\,z_2 & = & -2 \\ 2\,z_1 & + & z_2 & = & i \end{array}$$

• Aufgabe 2–9:
Lösen Sie auf nach $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcl} z_1 & + & z_2 & = & 2 \\ z_1 & - & z_2 & = & i\,2 \end{array}$$

• Aufgabe 2–10:
Zeichnen Sie in der komplexen Ebene alle Zahlen z mit $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$.

• Aufgabe 2–11:
Zeichnen Sie in der komplexen Ebene alle Zahlen z mit $|\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$.

• Aufgabe 2–12:
Finden Sie alle Lösungen von $z^4 = 1$ und zeichnen Sie diese Punkte in der komplexen Ebene.

• Aufgabe 2–13:
Finden Sie alle Lösungen von $z^3 = -8$ und zeichnen Sie diese Punkte in der komplexen Ebene.

• Aufgabe 2–14:

(a) Sei $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Bestimmen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ **exakt**, d.h. ohne Taschenrechner.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ der zweite Quadrant in der komplexen Ebene, d.h. alle Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x < 0$ und $y > 0$. Ziehen Sie die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ aus allen Zahlen in G und skizzieren Sie den entstehenden Bereich.

• Aufgabe 2–15:

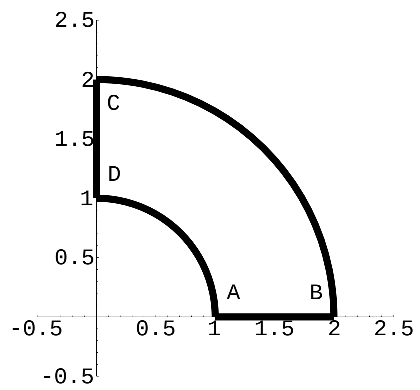
(a) Sei $z_1 = 1 - i\,3$ und $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Bestimmen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\sqrt{z_2}$ **exakt**, d.h. ohne Taschenrechner.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ der dritte Quadrant in der komplexen Ebene mit Betrag kleiner als 2, d.h. alle Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x < 0$ und $y < 0$ und $x^2 + y^2 \leq 2^2$. Ziehen Sie die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ aus allen Zahlen in G und skizzieren Sie den entstehenden Bereich.

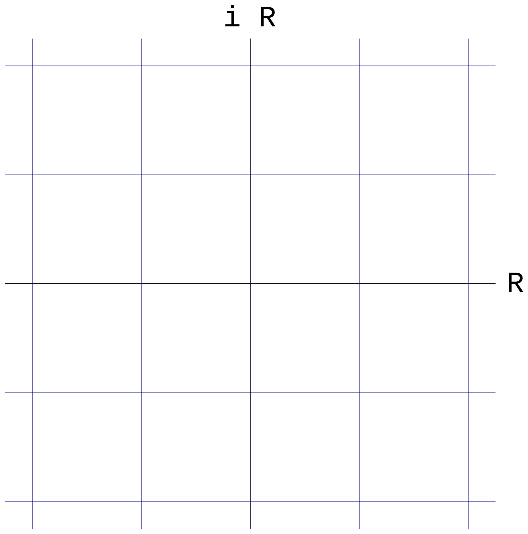
• Aufgabe 2–16:
Untersuchen Sie das untenstehende Ringsegment mit den vier Punkten A, B, C und D in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ wird abgebildet durch eine komplexe Abbildung $z \mapsto f(z)$. Zu skizzieren sind die aus dem Ringsegment entstehenden Figuren. Die Bilder der Punkte A, B, C und D sind zu bezeichnen.

(a) $f(z) = z^2$, d.h. $z \mapsto z^2$

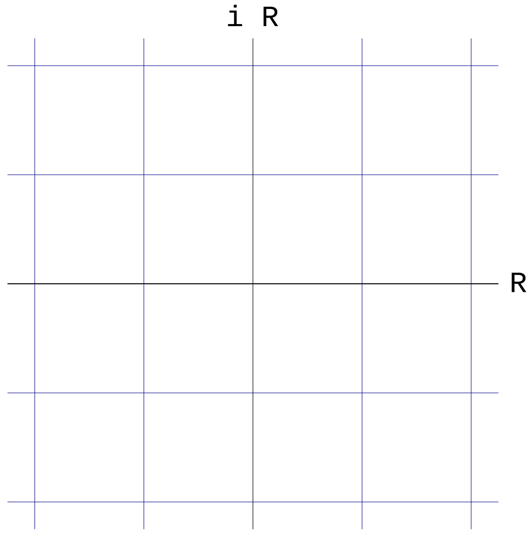
(b) $f(z) = 1/z^2$, d.h. $z \mapsto \frac{1}{z^2}$



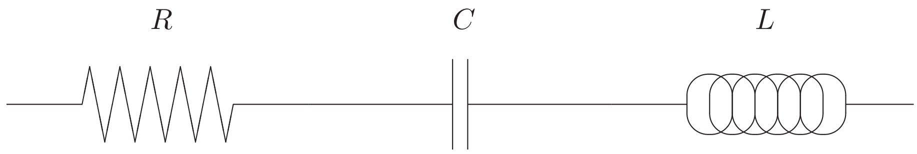
(a)



(b)



• Aufgabe 2–17:
Es werden drei Elemente in Serie geschaltet. Die Werte von R, C und L seien bekannt.

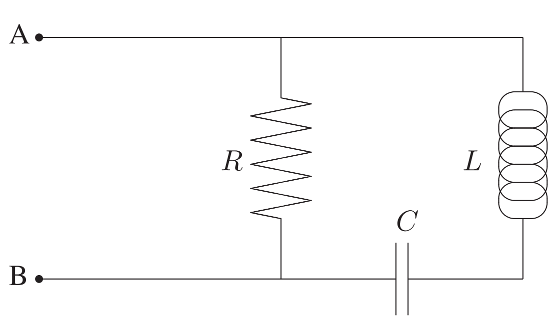


(a) Berechnen Sie die komplexe Gesamtimpedanz Z als Funktion von ω.

(b) Für welchen Wert von ω erzeugt diese Schaltung keine Phasenverschiebung?

(c) Für welchen Wert von ω ist die Impedanz $|Z|$ minimal? Finden Sie den minimalen Wert.

• Aufgabe 2–18:
Untersuchen Sie den untenstehenden Schaltkreis und bestimmen Sie dessen Impedanz Z zwischen den Punkten A und B. Das Resultat muss in der Form $Z = R_{eq} + i\,\omega\,L_{eq}$ gegeben werden. Tip: zuerst $\frac{1}{Z}$ bestimmen.

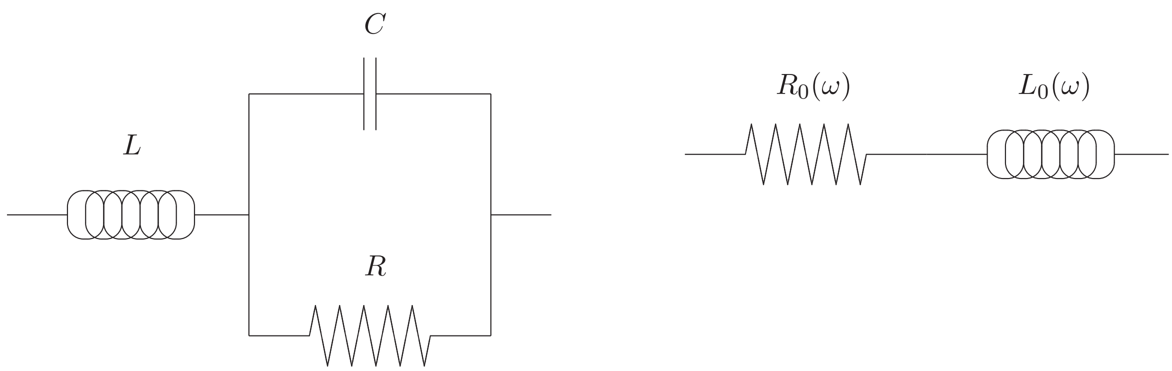


• Aufgabe 2–19:
Untersuchen Sie die untenstehende (links) Schaltung und bestimmen Sie die Impedanz Z. Für ein Wechselstromsignal mit Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ kann die Schaltung durch eine einfache Serienschaltung eines Ersatzwiderstandes $R_0(\omega)$ und eine 'Ersatzspule' $L_0(\omega)$ ersetzt werden.

(a) Bestimmen Sie $Z(\omega)$

(b) Bestimmen Sie $R_0(\omega)$

(c) Bestimmen Sie $L_0(\omega)$

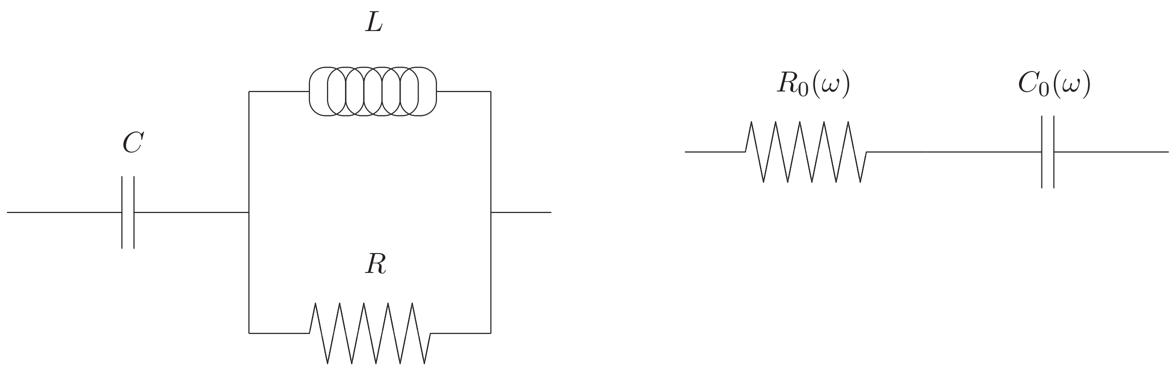


• Aufgabe 2–20:
Untersuchen Sie die untenstehende (links) Schaltung und bestimmen Sie die Impedanz Z. Für ein Wechselstromsignal mit Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ kann die Schaltung durch eine einfache Serienschaltung eines Ersatzwiderstandes $R_0(\omega)$ und eine 'Ersatzkapazität' $C_0(\omega)$ ersetzt werden.

(a) Bestimmen Sie $Z(\omega)$

(b) Bestimmen Sie $R_0(\omega)$

(c) Bestimmen Sie $C_0(\omega)$



• Aufgabe 2–21:
Drücken Sie $\cos(4\,\alpha)$ durch Terme mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ aus. Finden und beweisen Sie die Formel. Tip: Eulersche Formel und

$$(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4$$

• Aufgabe 2–22:

(a) Verwenden Sie die Gleichung

$$1 - e^{i\,k} = e^{i\,\frac{k}{2}}\,\left(e^{-i\,\frac{k}{2}} - e^{i\,\frac{k}{2}}\right) = -2\,i\,e^{i\,\frac{k}{2}}\,\sin\left(\frac{k}{2}\right)$$

zwei mal (mit verschiedenen Werten für k), um die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\alpha}$$

als Bruch von zwei Termen zu schreiben. Der Nenner muss reell sein.

(b) Mit Hilfe des Resultates von (a) ist die folgende Formel herzuleiten.

$$\sin\,\alpha + \sin\,(2\,\alpha) + \sin\,(3\,\alpha) + \ldots + \sin\,(n\,\alpha) = \frac{\sin\,(\frac{n}{2}\alpha)\;\sin\,(\frac{n+1}{2}\,\alpha)}{\sin\,(\frac{\alpha}{2})}$$

2.7.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2–2 : $z = 2 + 3\,i$, $z = -1 - 2\,i$ et $z = -2 + 9\,i$

Lösung zu Aufgabe 2–3 :

$$z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4} = 2\,\sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 2\,(1+i) = 2 + 2\,i$$

(a)

$$|\,z_1 + z_2\,| = |\,6\,i\,| = 6$$

(b)

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3\,i)\,(-2 + 3\,i) = -13$$

(c)

$$z_1 \cdot z_3 = \ldots = -2 + 10\,i$$

(d)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3\,i)\,(-2-3\,i)}{(-2+3\,i)\,(-2-3\,i)} = \frac{5-12\,i}{13}$$

Lösung zu Aufgabe 2–4 :

(a) $z_1 \cdot z_2 = 3 + 3\,i$, $z_1^2 = -9$ und $z_2^2 = -2\,i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 26$, $z_1^2 = -20 + 48\,i$ und $z_2^2 = -5 - 12\,i$

(c) $z_1 \cdot z_2 = \frac{11-33\,i}{3}$, $z_1^2 = \frac{4}{9}\,(-3 + 4\,i)$ und $z_2^2 = -6 - i\,\frac{5}{2}$

Lösung zu Aufgabe 2–5 : $-1 + i$ et $-1 - i$

Lösung zu Aufgabe 2–6 : $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösung zu Aufgabe 2–7 : $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, und somit $i^{4\,k} = 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt

$$i^{123443} = i^{123440} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$$

Lösung zu Aufgabe 2–8 : $z_1 = i$ und $z_2 = -i$

Lösung zu Aufgabe 2–9 : $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$

Lösung zu Aufgabe 2–10 : Die Halbebene unterhalb der $45°$–Geraden durch den Ursprung, Grenze nicht eingeschlossen.

Lösung zu Aufgabe 2–11 : Ein nach rechts und links geöffneter Kegel.

Lösung zu Aufgabe 2–12 : $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ und $z_4 = -i$.

Lösung zu Aufgabe 2–13 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ z_2 &= -2 \\ z_3 &= 2\,(\cos\frac{5\,\pi}{3} + i\sin\frac{5\,\pi}{3}) = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–14 :

(a) Wegen

$$z_2 = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

gilt

$$z_1 + z_2 = 2 + 2\,i$$

und

$$z_1 \cdot z_2 = -i\,(2 + 3\,i) = 3 - 2\,i$$

(b) Der zweite Quadrant besteht aus allen komplexen Zahlen mit beliebigen Beträgen und Argumententen zwischen $\pi/2$ und π. Durch das Bestimmen der Wurzel werden diese Argumente halbiert und man erhält somit Argumente zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$. Als neuer Bereich entsteht somit der Teil des ersten Quadranten oberhalb der $45°$–Geraden.

Lösung zu Aufgabe 2–15 :

(a) Wegen

$$z_2 = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

gilt

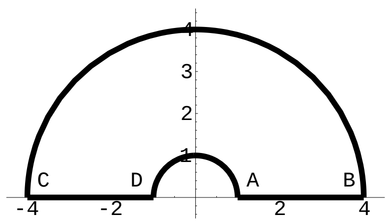
$$z_1 + z_2 = 1 - 4\,i \quad , \quad z_1 \cdot z_2 = -i\,(1 - 3\,i) = -3 - i \quad \text{und} \quad \sqrt{z_2} = \sqrt{-i} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\,3\pi/4}$$

(b) Der dritte Quadrant besteht aus allen komplexen Zahlen mit beliebigen Beträgen und Argumenten zwischen π und $3\,\pi/2$. Durch das Bestimmen der Wurzel werden diese Argumente halbiert und man erhält somit Argumente zwischen $\pi/2$ und $3\,\pi/4$. Als neuer Bereich entsteht somit der Teil des zweiten Quadranten oberhalb der $45°$–Geraden, d.h. Argumente zwischen $\pi/2 = 90°$ und $3\,\pi/4 = 135°$. Aus den Beträgen ist die Würzel zu ziehen, somit liegen die neuen Beträge zwischen 0 und $\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2–16 :

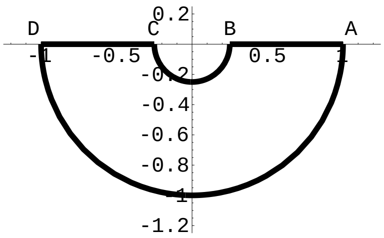
(a) Die Abbildung $z \mapsto z^2$ hat die folgenden Effekte:

- die Beträge werden quadriert, weil $|z^2| = |z|^2$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 4.
- die Argumente werden verdoppelt, weil $\arg z^2 = 2\,\arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $\pi/2$.



(b) Die Abbildung $z \mapsto 1/z^2$ hat die folgenden Effekte:

- die inversen Beträge werden quadriert, weil $|1/z^2| = |z|^{-2}$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 1/4.
- die Argumente wechseln das Vorzeichen und werden verdoppelt, weil $\arg 1/z^2 = -2 \arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $-\pi/2$.



Lösung zu Aufgabe 2–17 :

(a)

$$Z = R + \frac{1}{i\,\omega\,C} + i\,\omega\,L = R + i\,\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)$$

(b) Die Phasenverschiebung ist gegeben durch das Argument von Z

$$\tan\arg Z = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}}{R}$$

Somit ist $\arg Z = 0$ falls

$$\begin{aligned} \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{1}{L\,C} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{L\,C}} \end{aligned}$$

(c) Der erste Term der Impedanz

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2$$

ist unabhängig von ω. Deshalb wird $|Z|$ ist minimal, falls der zweite Term Null ist, d.h. für

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$$

Der minimale Wert ist offensichtlich gegeben durch R .

Lösung zu Aufgabe 2–18 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\,\omega\,L + 1/(i\,\omega\,C)} = \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{-\omega^2\,CL + 1} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL} = a + i\,b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{\omega^2\,C^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2}}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL}\right) \\ &= \frac{R^2\,(1 - \omega^2\,CL)^2}{(1 - \omega^2\,CL)^2 + R^2\omega^2\,C^2}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL}\right) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{R^2\,(1-\omega^2\,CL)^2}{(1-\omega^2\,CL)^2+R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{1}{R} \\ L_{eq} &= -\frac{R^2\,(1-\omega^2\,CL)^2}{(1-\omega^2\,CL)^2+R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{C}{1-\omega^2\,CL} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–19 :

(a) Der Widerstand R und die Kapazität C sind parallel geschaltet. Die Induktivität L ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= i\,\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R}+i\,\omega\,C} = i\,\omega L + \frac{R}{1+i\,\omega\,RC} \\ &= i\,\omega L + \frac{R\,(1-i\,\omega\,RC)}{1+\omega^2\,(RC)^2} = \frac{R}{1+\omega^2\,(RC)^2} + i\,\omega\,\left(L - \frac{R^2C}{1+\omega^2\,(RC)^2}\right) \\ &= R_0(\omega) + i\,\omega\,L_0(\omega) \end{aligned}$$

(b)

$$R_0(\omega) = \frac{R}{1+\omega^2\,(RC)^2}$$

(c)

$$L_0(\omega) = L - \frac{R^2C}{1+\omega^2\,(RC)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 2–20 :

(a) Der Widerstand R und die Induktivität L sind parallel geschaltet. Die Kapazität C ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{i\,\omega\,L}} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R}{i\,\omega\,L+R} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R\,(R-i\,\omega\,L)}{(i\,\omega\,L+R)\,(R-i\,\omega\,L)} \\ &= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R^2+\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2} = \frac{\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2} + \frac{1}{i\,\omega}\left(\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\,L\,R^2}{R^2+\omega^2\,L^2}\right) \\ &= R_0(\omega) + \frac{1}{i\,\omega\,C_0(\omega)} \end{aligned}$$

(b) Bestimmt durch den Realteil von $Z(\omega)$

$$R_0(\omega) = \frac{\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2}$$

(c) Bestimmt durch den Imaginärteil von $Z(\omega)$

$$C_0(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\,L\,R^2}{R^2+\omega^2\,L^2}} = \frac{C\,(R^2+\omega^2\,L^2)}{(R^2+\omega^2\,L^2)-\omega^2\,L\,R^2\,C} = \frac{C\,(R^2+\omega^2\,L^2)}{R^2+\omega^2\,L\,(L-R^2\,C)}$$

Für extreme Werte von ω können der Ersatzwiderstand und die Ersatzkapazität approximiert werden.

ω	$R_0(\omega)$	$\approx 1/C_0(\omega)$
sehr klein	≈ 0	$\frac{1}{C}$
sehr gross	$\approx R$	$\approx \frac{1}{C} - \frac{R^2}{L}$

Lösung zu Aufgabe 2–21 :

$$\begin{aligned}
\cos(4\,\alpha) + i\ \sin(4\,\alpha) &= e^{i\,4\,\alpha} = \left(e^{i\,\alpha}\right)^4 = (\cos(\alpha) + i\ \sin(\alpha))^4 \\
&= \cos^4\ \alpha + i\ 4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha \\
&\quad -i\,4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\
&= \cos^4\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\
&\quad +i\ \left(4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha\right)
\end{aligned}$$

Nun ist nur der Realteil zu berücksichtigen und man erhält.

$$\cos(4\,\alpha) = \cos^4\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha + \sin^4\ \alpha$$

Aus dem Imaginärteil könnte man auch ablesen, dass

$$\sin(4\,\alpha) = 4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha$$

Lösung zu Aufgabe 2–22 :

(a) Es handelt sich um eine geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

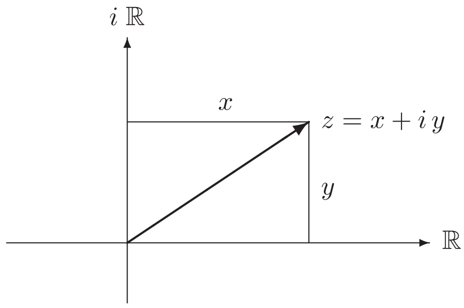
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\,n\,\alpha} = \frac{1-e^{i\,(n+1)\alpha}}{1-e^{i\,\alpha}} = \frac{-2\,i\ e^{i\ \frac{n+1}{2}\ \alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\ \alpha\right)}{-2\,i\ e^{i\ \frac{\alpha}{2}}\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{e^{i\ \frac{n+1}{2}\ \alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\ \alpha\right)}{e^{i\ \frac{\alpha}{2}}\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{i\ \frac{n}{2}\ \alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\ \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(b) Der Imaginärteil der obigen Formel liefert das gewünschte Resultat.

2.8 Formelsammlung für komplexe Zahlen

2.8.1 Definitionen

$z = x + iy = re^{i\varphi}$ wobei $z \in \mathbb{C}$ komplex ist und
die Zahlen $x, y, r, \varphi \in \mathbb{R}$ alle reell sind.
x ist der Realteil von z.
y ist der Imaginärteil von z.
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist die Norm von z.
φ ist das Argument von z falls $\tan\varphi = y/x$.
$i = \sqrt{-1}$ und $i^2 = -1$.



2.8.2 Eigenschaften und Rechenregeln

$z = |z|e^{i\varphi} = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$
$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ für eine reelle Zahl λ.
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$1/z = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
$z_1/z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\bar{z} = z^* = x - iy$ ist die konjugiert komplexe Zahl von z
$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
$z^n = |z|^n e^{in\varphi} \quad , \quad e^{2\Pi i} = 1, \quad e^{Pii} = -1$
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
$e^{iny} = (\cos y + i\sin y)^n = \cos(ny) + i\sin(ny)$
Die Lösungen von $z^n = 1$ sind gegeben durch $z_k = e^{i2\Pi\frac{k}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.9 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Beziehungen zwischen reellen und komplexen Zahlen kennen.
- die Grundoperationen mit den komplexen Zahlen beherrschen, algebraisch und geometrisch.
- den Begriff komplexe Impedanz für Widerstand, Kapazität und Induktivität kennen.

Kapitel 3

Vektoren und Matrizen

3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden Vektoren und Matrizen eingeführt, mit den zugeordneten arithmetischen Operationen. Anwendungen von Vektoren und Matrizen folgen in den anschliessenden Kapiteln. In einem späteren Kapitel werden Vektoren geometrisch aufgebaut, in diesem Kapitel stehen die algebraischen Eigenschaften im Vordergrund.

3.2 Vektoren

Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heisst auch ein **Skalar** oder eine **skalare Grösse**. Alle Operationen in diesem Kapitel können auch mit komplexen skalaren $\alpha \in \mathbb{C}$ durchgeführt werden. Wir verzichten darauf.

3–1 Definition : Ein **Vektor** $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ besteht aus n Skalaren $v_i \in \mathbb{R}$. Dargestellt werden Vektoren als Spalte von Zahlen.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Die Skalaren v_i heissen auch **Komponenten** des Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

3–2 Beispiel : Hier sind einige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.314 \\ -47 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\diamondsuit$

In diesem Kurs wird fast ausschliesslich mit Zeilenvektoren gearbeitet, aber es gibt Situationen in denen Spaltenvektoren praktischer sind.

3–3 Definition : Wird aus einem Spaltenvektor $\vec{a}$ ein Zeilenvektor gemacht, so spricht man vom **transponierten Vektor** und schreibt $\vec{a}^T$ oder auch $\vec{a}^*$.

3–4 Beispiel :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1\,,\,2\,,\,3) \quad \text{und} \quad (0.2\,,\,-2\,,\,3\,,\,0)^T = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

♢

3.2.1 Addition und Multiplikation mit einem Skalar

3–5 Definition :

- Zwei Vektoren gleicher Grösse werden **addiert** indem die jeweiligen Komponenten addiert werden. Es gilt also

  $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i = a_i + b_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n$$

  oder auch

  $$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ wird mit einem **Skalar** $\alpha \in \mathbb{R}$ **multipliziert** indem jede Komponente mit α multipliziert wird. Es gilt also

  $$\vec{b} = \alpha\,\vec{a} \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_i = \alpha\,a_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n$$

  oder auch

  $$\vec{b} = \alpha\,\vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,a_1 \\ \alpha\,a_2 \\ \vdots \\ \alpha\,a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es es ist zu beachten, dass nur Vektoren gleicher Grösse addiert werden können.

3–6 Satz : *Die bekannten Rechenregeln für Zahlen ergeben direkt einige Rechenregeln für Vektoren.*

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	*Kommutativgesetz*
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	*Assoziativgesetz*
$\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$	*Distributivgesetze*
$(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$	*Distributivgesetz*

3–7 Beispiel : Die folgenden, einfachen Zahlenbeispiele zeigen, dass keine Überraschungen auftreten bei Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren.

(a)

$$7\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\14\\7\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

(c)

$$7\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\cdot 1-3\cdot 0\\7\cdot 2-3\cdot 1\\7\cdot 3-3\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\11\\27\end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \quad \text{ist nicht definiert}$$

♢

3–8 Beispiel : Die meisten Taschenrechner können mit Vektoren rechnen. Es ist Ihre Aufgabe den Taschenrechner vernünftig einzusetzen. Das vorangehende Beispiel kann auch mit *Octave* gelöst werden.

Octave

```
3*[3; 2; 1]
[2; -1] + [4; 0] - [1; 1]
7*[1; 2; 3] - 3*[0; 1; -2]
[2; -1] + [ 1; 0; 2]
```

Octave wird die ersten drei Resultate berechnen und anzeigen. Die vierte Zeile wird zu einer Fehlermeldung führen. ♢

3.2.2 Die Norm eines Vektors und das Skalarprodukt zweier Vektoren

Der Begriff der Länge eines Vektors in der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder dem Raum $\mathbb{R}^3$ kann erweitert werden zur Norm eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

3–9 Definition : Die **Norm** eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\|\vec{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \qquad \text{oder äquivalent} \qquad \|\vec{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

3–10 Beispiel : Es gilt

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{oder} \quad \| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{10}$$

◊

3–11 Definition : Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ können auch miteinander multipliziert werden. Das Resultat ist ein Skalar und diese Operation heisst **Skalarprodukt** der beiden Vektoren. Es gilt

$$\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

Ist aus dem Kontext klar, dass es sich um ein Skalarprodukt handeln muss, so wird oft Transponieren des ersten Vektors in der Notation ignoriert und man schreibt

$$\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

3–12 Theorem : *Es gelten die folgenden Rechenregeln*

$$\begin{array}{ll}
\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} & \textit{Kommutativgesetz} \\
(\lambda\, \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\, \vec{b}) = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{b}) & \textit{für} \quad \lambda \in \mathbb{R} \\
(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} & \textit{Distributivgesetz} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \textit{ senkrecht zu } \vec{b} & \textit{Orthogonalitätsgesetz} \\
\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}\,,\, \vec{a} \rangle} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} &
\end{array}$$

3–13 Satz : *Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Ungleichung von* ***Cauchy*** *und* ***Schwarz***

$$|\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle| \le \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Beweis : Ist einer der beiden Vektoren $\vec{0}$, so ist die Ungleichung sicher richtig. Für die gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ wählen wir

$$\alpha = \sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}} \quad \text{und} \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}} = \frac{\pm 1}{\alpha}$$

wobei das Vorzeichen in β durch das Vorzeichen von $-\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle$ bestimmt ist. Dann verwenden wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
0 \quad &\le \quad \|\alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b}\|^2 = \langle \alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b}\,,\, \alpha\, \vec{a} + \beta \vec{b} \rangle \\
&= \quad \alpha^2\, \|\vec{a}\|^2 + 2\, \alpha\, \beta\, \langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \beta^2 \|\vec{b}\|^2 \\
&= \quad \|\vec{b}\|\, \|\vec{a}\| \pm 2\, \frac{\alpha}{\alpha}\, \langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle + \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\| \\
&= \quad 2\, \|\vec{b}\|\, \|\vec{a}\| - 2\, |\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle|
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$|\langle \vec{a}\,,\, \vec{b} \rangle| \le \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

□

Für Vektoren in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\ \cos\angle(\vec{a}\,\vec{b})$$

Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ **definieren** wir den Zwischenwinkel γ durch die Beziehung

$$\cos\gamma = \frac{\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

Ist $\vec{n}$ ein Vektor mit Länge 1, so gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\|\cos\,\angle(\vec{a},\vec{n})$$

Die Figur 3.1 zeigt, warum $\vec{a}\cdot\vec{n}$ auch **Komponente von** $\vec{a}$ **in Richtung** $\vec{n}$ genannt wird. Man spricht auch von der **Projektion** von $\vec{a}$ auf die Richtung $\vec{n}$. Diese kann in vielen Anwendungen eingesetzt werden. Betrachten Sie dazu die Aufgabe 3–3 (Seite 90).

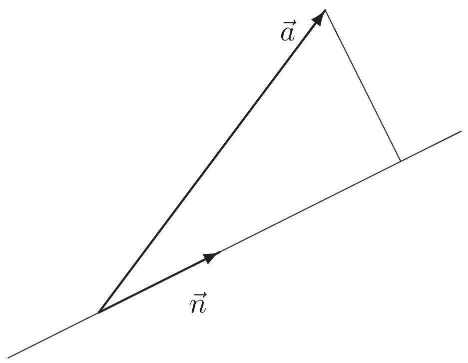


Abbildung 3.1: Komponente von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{n}$

3.2.3 Das Vektorprodukt zweier Vektoren im Raum

Das **Skalar**produkt von zwei Vektoren ergibt eine **skalare** Grösse als Resultat. Das **Vektor**produkt von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ergibt hingegen einen **Vektor** als Resultat. Es ist zu beachten, dass diese Konstruktion **nur in** $\mathbb{R}^3$ möglich ist.

3–14 Definition : In kartesischen Koordinaten gilt

$$\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2\\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3\\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1\end{pmatrix}$$

3–15 Satz :
Für zwei Vektoren $\vec{a}\,,\,\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ charakterisiert durch

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

(2) $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *stehen senkrecht auf* $\vec{a}\times\vec{b}$

(3) *Die Vektoren* $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{a}\times\vec{b}$ *bilden ein* ***Rechtssystem***

Hierbei ist der Winkel zwischen 0 und π zu wählen.

3–16 Satz : *Für zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \textit{Fläche des aufgespannten Parallelogramms}$$

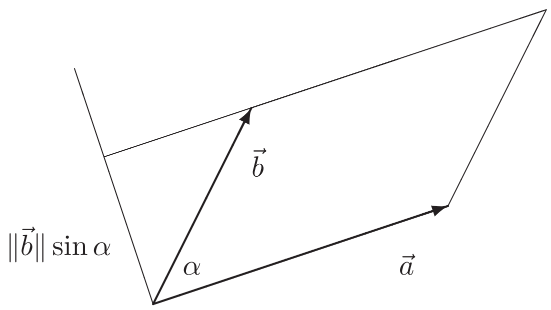


Abbildung 3.2: Vektorprodukt und Parallelogramme

Beweis : In Abbildung 3.2 kann man ablesen, dass die Höhe des Parallelogramms gegeben ist durch $h = \|\vec{b}\| \sin \alpha$ und somit die Fläche als Produkt von Breite mal Höhe durch

$$\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin \alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

□

3–17 Satz : *Aus den Eigenschaften des Vektorproduktes kann man ablesen, dass für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln gelten*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ *und* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \, \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *oder* $\vec{b} = \vec{0}$ *oder* $\vec{a}$ *ist parallel zu* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(Distributivgesetz)*

3–18 Bemerkung : Ist man mit der Notation einer **Determinante** vertraut, so kann für das Vektorprodukt auch die folgende Merkregel verwendet werden.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \, (a_2 \, b_3 - a_3 \, b_2) + \vec{e}_y \, (a_3 \, b_1 - a_1 \, b_3) + \vec{e}_z \, (a_1 \, b_2 - a_2 \, b_1)
\end{aligned}$$

Abbildung 3.3 kann helfen beim Memorisieren dieser Rechenregel. ♢

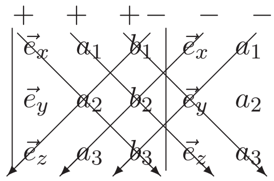


Abbildung 3.3: Merkregel für das Vektorprodukt

3–19 Beispiel : Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-3) - 4\cdot 1 \\ -2\cdot(-3) + 4\cdot 0.5 \\ 2\cdot 1 - (-3)\cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung kann auch mit *Octave* ausgeführt werden.

Octave

```
a=[2;-3;4]
b=[0.5;1;-3]
cross(a,b)
-->
ans =
   5.0000
   8.0000
   3.5000
```

◊

3.3 Matrizen

In diesem Abschnitt beschreiben wir Matrizen und ihre Grundoperationen.

3.3.1 Definition und Grundoperationen

3–20 Definition : Eine $n \times m$–**Matrix** besteht aus n Zeilen und m Spalten von Zahlen. Man schreibt auch $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ oder

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ist die Anzahl der Zeilen (n) gleich der Anzahl der Spalten (m), so spricht man von einer **quadratischen Matrix**.

- Matrizen gleicher Grösse können addiert werden, indem elementweise addiert wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ c_{i,j} &= a_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

  Es ist offensichtlich, dass diese Operation kommutativ ist, d.h. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Matrizen verschiedener Grösse können nicht addiert werden.

- Eine Matrix $\mathbf{A}$ kann mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden, indem elementweise multipliziert wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda\,\mathbf{A} \\ c_{i,j} &= \lambda\,a_{i,j} \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

3–21 Bemerkung : Ein **Spaltenvektor** mit n Komponenten kann als $n \times 1$–Matrix aufgefasst werden. Ein **Zeilenvektor** mit m Komponenten kann als $1 \times m$–Matrix aufgefasst werden. Die Addition von Vektoren stimmt dann mit der Addition dieser Matrizen überein. $\diamondsuit$

3–22 Beispiel : Für die 2×3–Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ \pi & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$3\,\mathbf{A} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3\,\pi & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

3–23 Beispiel : Untersuchen Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Die Operationen $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ und $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ sind **nicht definiert**. $\diamondsuit$

3.3.2 Multiplikation von Matrizen

3–24 Definition : Die **Multiplikation** von zwei Matrizen ist nicht ganz so einfach wie die Addition. Wird eine $n \times m$–Matrix $\mathbf{A}$ mit einer $m \times k$–Matrix $\mathbf{B}$ multipliziert, so entsteht eine $n \times k$–Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Die Anzahl der Spalten des ersten Faktors muss mit der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors bereinstimmen. Die Komponenten des Resultates sind gegeben durch

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \cdot b_{l,j}$$

Es gibt verschiedene Arten sich diese Multiplikationsformel zu merken.

- Um den Eintrag $c_{i,j}$ (i-te Zeile, j-te Spalte) des Produktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ zu erhalten kann die i-te Zeile von $\mathbf{A}$ (als Vektor) mit der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ multipliziert werden.
- Graphisch kann die Abbildung 3.4 helfen. Diese Graphik wird auch Schema von **Falk** genannt. Entlang der beiden Pfeile müssen die entsprechenden Zahlen multipliziert werden, dann addiert. Für die Grössen (Anzahl Zeilen und Spalten) der Matrizen gilt

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ n\times m & \cdot & m\times k & \longrightarrow & n\times k \end{array}$$

- Im Schema von Falk kann man ablesen, dass es problemlos möglich ist einzelne Spalten (oder Zeilen) des Produktes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ zu berechnen, ohne die volle Matrix zu bestimmen.

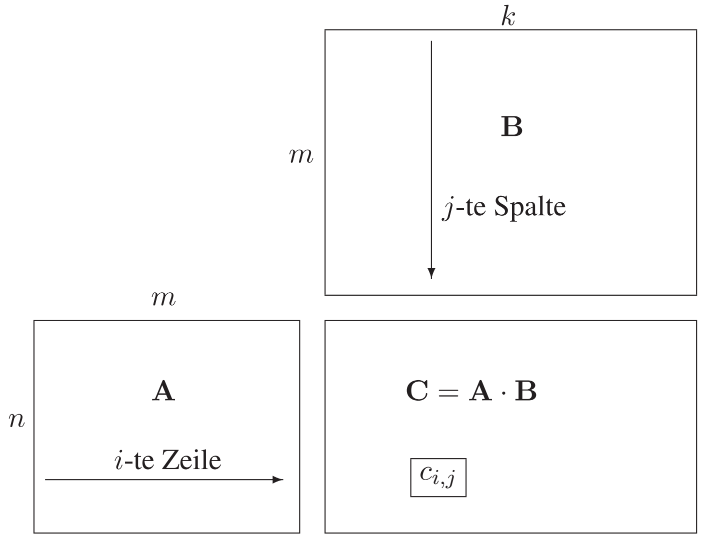


Abbildung 3.4: Multiplikation zweier Matrizen, Schema von Falk

3–25 Beispiel : Eine 3×2 Matrix $\mathbf{A}$ kann mit einer 2×3 Matrix $\mathbf{B}$ multipliziert werden. Das Resultat $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist eine 3×3–Matrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot1-3\cdot4 & 2\cdot2-3\cdot5 & 2\cdot3-3\cdot6 \\ 1\cdot1+0\cdot4 & 1\cdot2+0\cdot5 & 1\cdot3+0\cdot6 \\ -2\cdot1-1\cdot4 & -2\cdot2-1\cdot5 & -2\cdot3-1\cdot6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -10 & -11 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & -9 & -12 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

In *Octave* kann direkt mit Matrizen gerechnet werden, da es sehr ähnlich ist zu `MATLAB`, dessen Name von **Mat**rix **Lab**oratory stammt.

Octave

```
A=[2,-3;1, 0; -2;-1]; B=[1,2,3; 4,5,6];
A*B
-->
ans =
  -10  -11  -12
    1    2    3
   -6   -9  -12
```

In diesem speziellen Beispiel kann auch das Produkt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ berechnet werden. Das Resultat ist eine 2×2–Matrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & -18 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

oder auch mit *Octave*

Octave

```
B*A
-->
ans =
   -2   -6
    1  -18
```

Dieses einfache Beispiel macht klar, dass die Matrizenmultiplikation **nicht kommutativ** ist. ♢

3–26 Definition : Aus einer gegebenen $n \times m$–Matrix $\mathbf{A}$ wird die **transponierte Matrix** $\mathbf{A}^T$ konstruiert indem die erste Zeile von $\mathbf{A}$ zur ersten Spalte von $\mathbf{A}^T$ wird, die zweite Zeile von $\mathbf{A}$ zur zweiten Spalte von $\mathbf{A}^T$ wird, u.s.w. $\mathbf{A}^T$ wird somit eine $m \times n$–Matrix. Man verwendet auch die Notationen $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{tr} = \mathbf{A}'$.

3–27 Beispiel : Die transponierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{tr} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

♢

3–28 Beispiel : Der transponierte Vektor eines Spaltenvektors ist der entsprechende Zeilenvektor. Somit kann das Skalarprodukt zweier Vektoren auch mit Hilfe des Matrizenproduktes geschrieben werden.

$$\langle \vec{x}\,,\,\vec{y}\rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + \ldots + x_n\,y_n$$

Die Notation wird hier nicht immer sehr sorgfältig eingesetzt und man ist gezwungen „aus dem Zusammenhang“ herauszufinden, was genau zu berechnen ist.

Als einfache Konsequenz erhalten wir auch

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + x_3\,x_3 + \ldots + x_n\,x_n = \vec{x}^T \cdot \vec{x} = \langle \vec{x}\,,\,\vec{x}\rangle$$

Dieses Beispiel kann auch gut illustrieren, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

$$\vec{y} \cdot \vec{x}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 & \ldots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 & \ldots & y_2x_n \\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 & \ldots & y_3x_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & y_nx_3 & \ldots & y_nx_n \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

3–29 Beispiel : Eine $n \times m$ Matrix $\mathbf{A}$ kann mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ multipliziert werden, indem der Vektor als $m \times 1$ Matrix aufgefasst wird.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 2 - 2\cdot 1 + 7\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

3–30 Beispiel : Ein lineares Gleichungssystem kann mit Hilfe von Matrizen und Matrizenmultiplikation leicht hingeschrieben werden. Das System von linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,x & +1\,y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

für die drei Unbekannten x, y und z kann auch in der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann man nun kurz schreiben

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Dies ist eine der wichtigsten Anwendungen der Notation einer Matrix. Die Anzahl der Zeilen der Matrix $\mathbf{A}$ entspricht der Anzahl der Gleichungen. Die Anzahl der Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ entspricht der Anzahl der Unbekannten. ♢

Das inhomogene System von m linearen Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

für n Unbekannte kann auch geschrieben werden als

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\
 & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3.3.3 Die inverse Matrix und lineare Gleichungssysteme

3–31 Definition : Die $n \times n$–Matrix mit Zahlen 1 auf der Hauptdiagonalen und Nullen an allen anderen Stellen heisst **Einheitsmatrix** der Grösse n. Man verwendet die Notationen $\mathbb{I}_n = \mathbf{E}_n$. Für jeden n-Vektor $\vec{x}$ gilt $\mathbb{I}_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

3–32 Beispiel :

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

♢

3–33 Definition : Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix (d.h. quadratisch).

- $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n\times n}$ heisst eine **links inverse Matrix** falls $\mathbf{BA} = \mathbb{I}_n$.
- $\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n\times n}$ heisst eine **rechts inverse Matrix** falls $\mathbf{AC} = \mathbb{I}_n$.
- Ist $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix mit

  $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{I}_n$$

  so heisst die Matrix $\mathbf{A}$ **invertierbar** und $\mathbf{B}$ ist die zu $\mathbf{A}$ **inverse Matrix**. Man schreibt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Es müssen somit zwei Bedingungen erfüllt sein.

3–34 Lemma : .

- *Gilt* $\mathbf{BA} = \mathbf{AC} = \mathbb{I}_n$ *so ist* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. *Als Konsequenz ergibt sich* $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$.
- *Zu einer invertierbaren Matrix* $\mathbf{A}$ *gibt es genau eine inverse Matrix.*
- *Es gilt* $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

Beweis :

- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{C}$
- Seien $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ je zu $\mathbf{A}$ inverse Matrizen. Dann gilt $\mathbb{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ diese Beziehung multiplizieren wir von links mit $\mathbf{C}$ und erhalten
$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbb{I}_n = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$$
- Direkte Folgerung von
$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}_n$$

□

3–35 Beispiel : Man kann leicht nachrechen, dass

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

zueinander inverse Matrizen sind. ♢

3–36 Satz : *Ist die Matrix* $\mathbf{A}$ *invertierbar, so kann ein Gleichungssystem*

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

gelöst werden, indem beide Seiten der Gleichung von links mit $\mathbf{A}^{-1}$ *multipliziert werden. Man erhält*

$$\vec{x} = \mathbb{I}_n \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Das obige Resultat ist nur von theoretischer Bedeutung, für konkrete Probleme ist es fast nie notwendig die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zu bestimmen. Es gibt effizientere Verfahren lineare Gleichungssysteme zu lösen, d.h. mit weniger Rechenaufwand. Der Unterschied ist für grosse Systeme von Gleichungen relevant. Das effizientere Verfahren verwendet Algorithmen, die im Kapitel 6 vorgestellt werden.

3–37 Satz : *Sind* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ *invertierbare Matrizen gleicher Grösse, so ist auch* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *invertierbar und es gilt*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

d.h. ein Produkt von zwei Matrizen wird invertiert, indem die beiden Faktoren je invertiert werden und die Reihenfolge vertauscht.

Beweis : Hier muss die Definition der Invertierbarkeit verwendet werden. Die beiden Rechnungen ergeben das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbb{I}_n\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbb{I}_n \\
(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbb{I}_n\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbb{I}_n
\end{aligned}$$

□

3–38 Satz : *Für eine invertierbare quadratische Matrix* $\mathbf{A}$ *gilt*

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

Beweis : Gemäss Definition der inversen Matrix genügen die zwei folgenden Rechnungen um das Resultat zu zeigen.

$$\mathbf{A}^T\cdot\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\cdot\mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n$$

□

3–39 Satz : *(Rechenregeln)*
Sind $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ *Matrizen, so gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} && \textit{Kommutativität der Addition}\\
\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} && \textit{Assoziativität der Addition}\\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} && \textit{Assoziativität der Multiplikation}\\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} && \textit{Distributivgesetz}\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T\\
\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} &= \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T
\end{aligned}$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass alle Operationen definiert sind.

3–40 Beispiel : Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1\,x_1 \quad +3\,x_2 \quad +4\,x_3 &= 7\\
2\,x_1 \quad +0\,x_2 \quad -1\,x_3 &= -1\\
-2\,x_1 \quad +1\,x_2 \quad +2\,x_3 &= 2
\end{aligned}$$

kann durch

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Somit kann die Lösung bestimmt werden durch

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese System von Gleichungen kann auch geschrieben werden als

$$\left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 7 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

d.h. als

$$\vec{x}^T \cdot \mathbf{A}^T = \vec{b}^T$$

Aus dieser Form erhält man die Lösungen durch eine Multiplikation von rechts mit der Matrix $(\mathbf{A}^T)^{-1}$.

$$\vec{x}^T = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^{-1} = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}\right)^T$$

♢

3–41 Beispiel : Mit *Octave* kann die inverse Matrix des obigen Problems bestimmt werden durch

Octave

```
A=[1 3 4; 2 0 -1; -2 1 2];
Ainv=inv(A)
x=Ainv*[7;-1;2]
-->
Ainv =
   0.33333  -0.66667  -1.00000
  -0.66667   3.33333   3.00000
   0.66667  -2.33333  -2.00000

x =
   1.0000
  -2.0000
   3.0000
```

Das Gleichungssystem wird allerdings effizienter gelöst, indem der Vektor von links durch die Matrix $\mathbf{A}$ dividiert wird, ohne Berechnung der inversen Matrix.

Octave

```
x=A\[7;-1;2]
-->
x =
   1
  -2
   3
```

♢

3–42 Beispiel : Der Taschenrechner **HP-48** fasst Vektoren immer als Spaltenvektoren auf, auch wenn sie als Zeilenvektor dargestellt werden. Legt man also die obige Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\vec{x}$ als `[1 -2 3]` auf den Stack und drückt dann die Multiplikationstaste `*`, so wird die Multiplikation

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdot \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 7 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right)$$

ausgeführt. Will man explizit einen Zeilenvektor, so ist er in der Form `[[1 -2 3]]` einzugeben.

Das Gleichungssystem im vorangehenden Beispiel wird gelöst, indem der Vektor $\vec{b}$ als `[7 -1 2]` auf den Stack gelegt wird, dann die Matrix $\mathbf{A}$, und anschliessend wird mit der Divisionstaste die Lösung $\vec{x}$ bestimmt. Legt man eine Matrix $\mathbf{A}$ auf den Stack und drückt dann die Taste `1/x`, so wird die Matrix invertiert. ♢

3–43 Definition : Für eine quadratische $n \times n$ Matrix ist die **Spur** der Matrix gegeben durch die Summe der Diagonalelemente, d.h.

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Manchmal wird der englische Begriff „trace“ verwendet.

3–44 Beispiel :

$$\text{Spur} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

$\diamondsuit$

3.4 Ein mechanisches Beispiel

Die folgende Fragestellung (Abbildung 3.5) ist dem Mechanikkurs von Bernard Schmutz entnommen. Sie kann mit Hilfe eines Systems von sechs linearen Gleichungen für 6 Unbekannte gelöst werden. Leider haben wir noch nicht alle mathematischen und mechanischen Grundlagen in diesem Kurs behandelt. Die fehlenden Facts werden hier aufgeführt:

- Für zwei Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$ kann das Vektorprodukt berechnet werden. Das Resultat ist ein Vektor, gegeben durch

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- Ist der Verbindungsvektor vom Referenzpunkt zum Angriffspunkt einer Kraft $\vec{F}$ gegeben durch $\vec{r}$, so kann das resultierende Moment der Kraft bestimmt werden durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Ist ein mechanisches System im Gleichgewicht, so muss die Summe aller externen Kräfte Null sein.

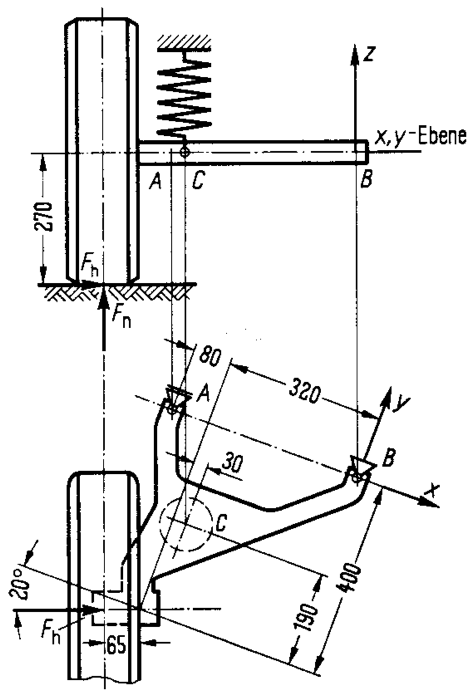
- Ist ein mechanisches System im Gleichgewicht, so muss die Summe aller Momente Null sein. Der Referenzpunkt kann beliebig gewählt werden

Alle folgenden Angaben sind in SI Einheiten. Die geometrischen Daten der Hinterradaufhängung sind gegeben durch die Vektoren

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -0.32 - 0.065 \cos(20°) \\ -0.4 - 0.065 \sin(20°) \\ -0.27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.38108 \\ -0.42223 \\ -0.27000 \end{pmatrix}$$



Das linksstehende Bild zeigt eine vereinfachte Darstellung einer Schräglenkeraufhängung des Hinterrades eines PKW.
Das Lager A lässt nur eine Verschiebung in x-Richtung zu. Das Lager B ist ein fixes Gelenklager. Bei einer Kurvenfahrt übt die Fahrbahn eine Kraft auf das Rad aus. Die Normalkomponente ist $F_n = 6.4$ kN und eine Tangentialkomponente (Haftkraft) von $F_h = 3.8$ kN.
Für diesen Lastfall berechne man die beiden Lagerkräfte $\vec{R}_A$ und $\vec{R}_B$ sowie die Federkraft $\vec{F}_C$.

Abbildung 3.5: Eine Hinterradaufhängung

Die bekannten Kräfte sind

$$\vec{F}_h = \begin{pmatrix} 3.8\,\cos(20°) \\ 3.8\,\sin(20°) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{F}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen sind somit die Kraftvektoren

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix}$$

Die unbekannten Grössen werden in einem Vektor $\vec{u}$ zusammengefasst.

$$\vec{u} = (F_{Cz}\,,\, R_{Ay}\,,\, R_{Az}\,,\, R_{Bx}\,,\, R_{By}\,,\, R_{Bz})^T$$

Als erstes verwenden wir, dass die Summe der Kräfte Null sein muss.

- Als Vektorgleichung erhalten wir

$$\vec{F}_h + \vec{F}_n + \vec{F}_C + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

- Die identische Bedingung kann auch komponentenweise ausgeschrieben werden mit dem Resultat.

$$\begin{pmatrix} 3.8\,\cos(20°) \\ 3.8\,\sin(20°) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun ist es geschickt alle unbekannten Grösen zu isolieren.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3.8\,\cos(20^\circ) \\ 3.8\,\sin(20^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

- Als nächstes verwenden wir die Notation einer Matrix um das identische lineare Gleichungssystem neu zu schreiben.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.8\,\cos(20^\circ) \\ -3.8\,\sin(20^\circ) \\ -6.4 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Als nächsten Schritt betrachten wir die resultierenden Momente bezüglich des Referenzpunktes B. Zur Berechnung verwenden wir das Vektorprodukt.

- $$\vec{BA} \times \vec{R}_A = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +0.4\,R_{Az} \\ -0.4\,R_{Ay} \end{pmatrix}$$

- $$\vec{BC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.21 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.21\,F_{Cz} \\ +0.29\,F_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{BD} \times (\vec{F}_h + \vec{F}_n) \approx \begin{pmatrix} -0.38108 \\ -0.42223 \\ -0.27000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3.5708 \\ 1.2997 \\ 6.4000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.3514 \\ 1.4748 \\ 1.0124 \end{pmatrix}$$

Die Summe der drei Momente muss Null ergeben. Auch diese Bedingung stellen wir verschieden dar.

- Vektoriell oder komponentenweise

$$\begin{aligned} \vec{BA} \times \vec{R}_A + \vec{BC} \times \vec{F}_C &= -\vec{BD} \times (\vec{F}_h + \vec{F}_n) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +0.4\,R_{Az} \\ -0.4\,R_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.21\,F_{Cz} \\ +0.29\,F_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix} &\approx -\begin{pmatrix} -2.3514 \\ 1.4748 \\ 1.0124 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Als lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.29 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Nun kombinieren wir die beiden Gleichungssysteme (3.1) und (3.2) zu einem grösseren System von 6 linearen Gleichungen für 6 Unbekannte.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.29 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.8\,\cos(20^\circ) \\ -3.8\,\sin(20^\circ) \\ -6.4 \\ +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3.57083 \\ -1.29968 \\ -6.4 \\ +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix}$$

Dieses System von Gleichungen kann gelöst werden durch geeignete Hilfsmittel (*Octave*, HP, TI, ...). Das Resultat ist

$$\begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -11.19714 \\ 2.53100 \\ 4.43093 \\ -3.57083 \\ -3.83068 \\ 0.36621 \end{pmatrix}$$

Als Resultat erhalten wir die gesuchten resultierenden Kräfte

$$\vec{F}_C \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11.197 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_A \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 2.531 \\ 4.431 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_B \approx \begin{pmatrix} -3.571 \\ -3.831 \\ 0.366 \end{pmatrix}$$

3.5 Lineare Regression

Als nächste Anwendung untersuchen wir nun die **lineare Regression**.

3–45 Beispiel : Eine Gerade der Form $y = a_0 + a_1 x$ soll durch die drei Punkte $(1,1)$, $(2,3)$ und $(4,0)$ gehen. Dies wird nicht exakt möglich sein. Deshalb bestimmen wir für die drei Punkte je den vertikalen Abstand von der Geraden

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0 + a_1\,x_1 - y1 = a_0 + a_1 \cdot 1 - 1 \\ r_2 &= a_0 + a_1\,x_2 - y2 = a_0 + a_1 \cdot 2 - 3 \\ r_3 &= a_0 + a_1\,x_3 - y3 = a_0 + a_1 \cdot 4 - 0 \end{aligned}$$

Nun verlangen wir, dass die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände minimal sein soll. Dazu bestimmen wir

$$\begin{aligned} F = r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 &= 3\,a_0^2 + a_1^2\,(1^2+2^2+4^2) + a_0\,a_1\,2\,(1+2+4) - \\ &\quad -a_0\,2\,(1+3+0) - a_1\,2\,(1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 0) + (1^2+3^2+0^2) \\ &= 3\,a_0^2 + 21\,a_1^2 + 14\,a_0\,a_1 - 8\,a_0 - 14\,a_1 + 10 \end{aligned}$$

Damit die „quadratische Abweichung" F minimal wird[1], müssen die Ableitungen bezüglich a_0 und a_1 je Null sein, Das führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, F}{\partial a_0} &= 6\,a_0 + 14\,a_1 - 8 = 0 \\ \frac{\partial\, F}{\partial a_1} &= 14\,a_0 + 42\,a_1 - 14 = 0 \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen kann auch geschrieben dargestellt werden durch

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 14 & 42 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

und hat die Lösung

$$a_0 = 2.5 \quad \text{und} \quad a_1 = -0.5$$

Somit geht die Gerade $y = 2.5 - 0.5\,x$ „so gut wie möglich" durch die drei gegebenen Punkte. $\diamondsuit$

Die Überlegungen des obigen Beispiels hängen nicht von den gegebenen Zahlen ab. Mit Hilfe von Matrizen wollen wir die Rechnungen des obigen Beispiels neu darstellen.

3–46 Beispiel : Eine Gerade der Form $y(x) = a_0 + a_1\,x$ soll durch einige gegebene Punkte (x_1, y_i) gehen, d.h. man möchte a_0 und a_1 finden, so dass

$$y_i = a_0 + a_1\,x_i \quad \text{für alle} \quad 1 \le i \le n$$

Mit Hilfe einer Matrizennotation kann man auch schreiben

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\,\vec{a}$$

Für $n > 2$ können diese Bedingungen meistens nicht alle exakt erfüllt werden. Deshalb verlangt man, dass die Länge des Residualvektor $\vec{r}$ minimal werden soll, wobei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a}$$

[1] Man spricht auch von der Methode der kleinsten Quadrate

Deshalb untersucht man

$$\begin{aligned}
\|\vec r\|^2 &= \langle \vec r\,,\,\vec r\rangle = \vec r^T\cdot\vec r \\
&= (\vec y-\mathbf{X}\,\vec a)^T\cdot(\vec y-\mathbf{X}\,\vec a) \\
&= \vec y^T\cdot\vec y-(\mathbf{X}\,\vec a)^T\cdot\vec y-\vec y^T\cdot(\mathbf{X}\,\vec a)+(\mathbf{X}\,\vec a)^T\cdot(\mathbf{X}\,\vec a) \\
&= \|\vec y\|^2-\vec a^T\cdot\mathbf{X}^T\cdot\vec y-\vec y^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a+\vec a^T\cdot\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a \\
&= \|\vec y\|^2-2\,\vec y^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a+\vec a^T\cdot\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a
\end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck minimal ist müssen alle ersten Ableitungen bezüglich der Komponenten von $\vec a$ Null sein. Deshalb sehen wir die einzelnen Beiträge etwas genauer an.

$$\begin{aligned}
\vec y^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a &= (y_1,y_2,\cdots,y_n)\cdot\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n y_i\,,\ \sum_{i=1}^n y_i\,x_i\right)\cdot\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix} \\
&= a_0\,\sum_{i=1}^n y_i+a_1\sum_{i=1}^n y_i\,x_i
\end{aligned}$$

Um den Term $\vec a^T\cdot\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a$ zu untersuchen berechnen wir zuerst das Matrizenprodukt

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X} &= \begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_i & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & x_i\\ 1 & x_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec a^T\cdot\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\cdot\vec a &= (a_0\,,\,a_1)\cdot\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix} \\
&= (a_0\,,\,a_1)\cdot\begin{pmatrix} a_0\,n+a_1\,\sum_{i=1}^n x_i\\ a_0\,\sum_{i=1}^n x_i+a_1\,\sum_{i=1}^n x_i^2\end{pmatrix} \\
&= a_0^2\,n+2\,a_0\,a_1\,\sum_{i=1}^n x_i+a_1^2\,\sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Nun können wir die beiden Ableitungen von $\|\vec r\|^2$ bezüglich a_0 und a_1 bestimmen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\|\vec r\|^2}{\partial a_0} &= -2\,\sum_{i=1}^n y_i+2\,a_0\,n+2\,a_1\,\sum_{i=1}^n x_i \\
\frac{\partial\,\|\vec r\|^2}{\partial a_1} &= -2\,\sum_{i=1}^n y_i x_i+2\,a_0\,\sum_{i=1}^n x_i+2\,a_1\,\sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Terme gleich Null, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten a_0 und a_1.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Matrix $\mathbf{X}$ und den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{y}$ kann das selbe System auch dargestellt werden durch

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \vec{a} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

Für gegebene Datenpunkte (x_i, y_i) kann dieses System nun gelöst werden. $\diamondsuit$

Da der obige Fall einer Regressionsgerade oft verwendet wird kann eine spezielle Notation verwendet werden

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i \quad , \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i \quad , \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$$

und das lineare Gleichungssystem kann nun geschrieben werden in der Form

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Aufgabe 3–12 kann dieses System explizit aufgelöst werden und man erhält

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= n \cdot S_{xx} - S_x^2 \\ a_0 &= \tfrac{1}{\Delta}\left(S_{xx} S_y - S_x S_{xy}\right) \\ a_1 &= \tfrac{1}{\Delta}\left(n \cdot S_{xy} - S_x S_y\right) \end{aligned}}$$

Mit diesen einfach zu programmierenden Formeln können Regressionsgeraden sehr leicht bestimmt werden.

Im Beispiel 3–45 war

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

und es ist

$$\mathbf{X}^T \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Das zu lösende Gleichungssystem ist somit

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dies stimmt mit den vorangehenden Rechnungen in Beispiel 3–45 überein.

Die Technik der linearen Regression ist nicht auf Regressionsgeraden beschränkt. Das obige Beispiel ist ein (wichtiger) Spezialfall der folgenden Situation:

3–47 Satz : *(Lineare Regression)*
Für eine gegebene $n \times m$ Matrix $\mathbf{X}$ *und einen n-Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ so zu finden, dass die Länge des Residualvektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ minimal wird. Hierbei ist*

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \vec{a} - \vec{y}$$

Die Lösung $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ gegeben als Lösung des $m \times m$ Gleichungssystems

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \vec{a} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

Mit diesem Resultat kann unter anderem auch eine Parabel durch einige gegebene Punkte gepasst werden.

3–48 Beispiel : Eine Parabel $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soll möglichst gut durch die vier Punkte $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ und $(4, 5)$ gehen. Dies „übersetzt" man zu der Bedingung, dass die Summe der Quadrate der vier vertikalen Abstände

$$r_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

minimal werden soll. In Matrizennotation soll der Betrag des Residualvektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

minimal sein soll. Somit liegt genau die Situation des vorangehenden Beispiels vor. Und es muss das 3×3 Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gelöst werden. Als Lösung erhält man

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit passt die Parabel

$$y\,(x) = 2.5 + 0.6\,x + 0\,x^2$$

so gut wie möglich durch die vier gegebenen Punkte. Zufällig ergibt sich eine Gerade. Aufgrund der Symmetrie in der Lage der Punkte ist klar, dass die Parabel durch den Punkt $(2.5\,,\,4.0)$ gehen muss.

Mit *Octave* kann das Resultat erzeugt werden mit Hilfe des Befehls `LinearRegression()`[2].

Octave
```
x=[1;2;3;4];
F=[ones(size(x)),x,x.^2]
p=LinearRegression(F,y)
-->
p =
   2.5000e+00
   6.0000e-01
  -2.2204e-16
```

Das Resultat kann graphisch verifiziert werden durch den untenstehenden Code mit der resultierenden Abbildung 3.6.

Octave
```
yFit=F*p;
plot(x,y,'*',x,yFit)
axis([0 5 2 6])
```

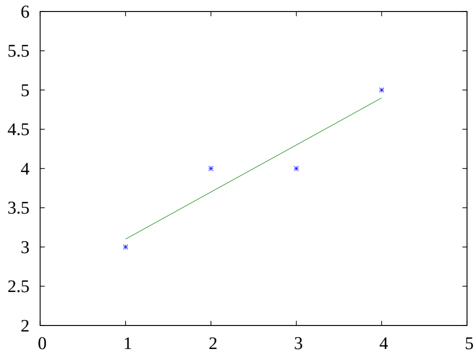


Abbildung 3.6: Eine Regressionsparabel

◇

3.6 Geometrische Optik

In der geometrischen Optik können folgende Vektoren untersucht werden.

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand von der optischen Achse} \\ \text{Winkel bezüglich optischer Achse} \end{pmatrix}$$

Alle Lichtwege werden von links nach rechts durchlaufen. Wir untersuchen nur achsennahe Strahl mit kleinen Winkeln. Als Beispiele untersuchen wir die folgenden optischen Elemente.

1. Ein freies Wegstück der Länge s
2. Eine konvexe dünne Linse (fokussierend) mit gegebener Brennweite f. Für eine konkave Linse (Streulinse) ist die Brennweite f negativ zu wählen.

[2] Code auf der Web–Seite des Autors dieser Notizen verfügbar.

3. Ein kugelförmiger Körper mit Radius R. Der Radius R ist positiv zu wählen, wenn die brechende Fläche zum eintreffenden Strahl hin gewölbt ist, als negativ, wenn sie in Strahl–Richtung konkav ist.

4. Eine zur Achse senkrechte Ebene mit verschiedenen Brechungsindices links und rechts. Dies ist ein Spezialfall ($R = \infty$) der obigen Kugeloberfläche.

- Als erstes Beispiel untersuchen wir das freie Wegstück in Abbildung 3.7. Mit Hilfe von Trigonometrie erhalten wir
$$y_2 = y_1 + s\,\tan\alpha \approx y_1 + s\,\alpha$$
Da der Winkel nicht ändert ergibt sich
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + s\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
und wir erhalten den ersten Eintrag in Tabelle 3.1.

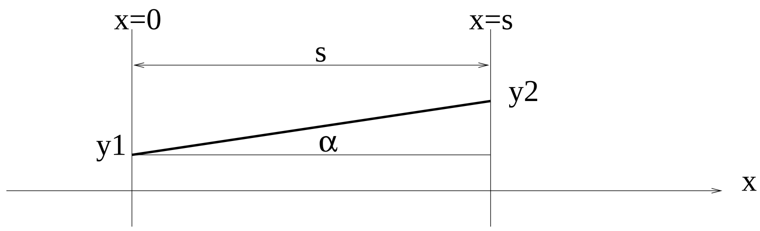


Abbildung 3.7: Strahlengang in einem freien Wegstück

- Das Element dünne Linse wird in Beispiel 3–49 untersucht.

- An einer Grenzfläche (siehe Abbildung 3.8) mit verschiedenen Brechungsindizes n_1 und n_2 ist das Brechungsgesetz
$$n_1\,\sin\alpha_1 = n_2\,\sin\alpha_2$$
zu verwenden. Wegen der kleinen Winkel folgt daraus
$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1$$
Da die vertikale Position des Lichtstrahls nicht ändert gilt
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich dann die Transfermatrizen in Tabelle 3.1. Die Abschnitte 4 und 5 in [StanMeieFalc96] erklären, wie die Matrizen der Grundelemente zu multiplizieren sind um komplexe optische Systeme zu beschreiben und wie die Einträge der System–Matrix zu interpretieren sind.

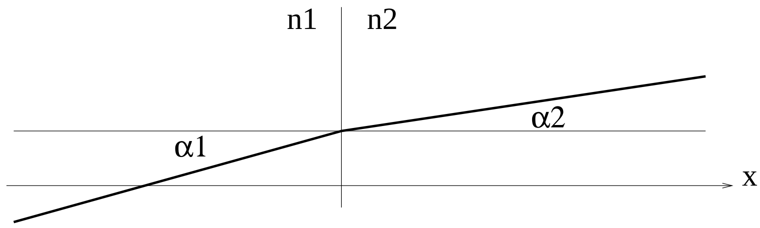


Abbildung 3.8: Strahlengang durch eine Grenzfläche

Beschreibung	Matrix
Ausbreitung, Strecke s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
konvexe dünne Linse, Brennweite f	$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Sphärischer Körper, Radius R Brechungsindex links n_1, rechts n_2	$S(R, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Grenzebene, Index links n_1, rechts n_2	$S_\infty(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Tabelle 3.1: Einige Transfermatrizen in der geometrischen Optik

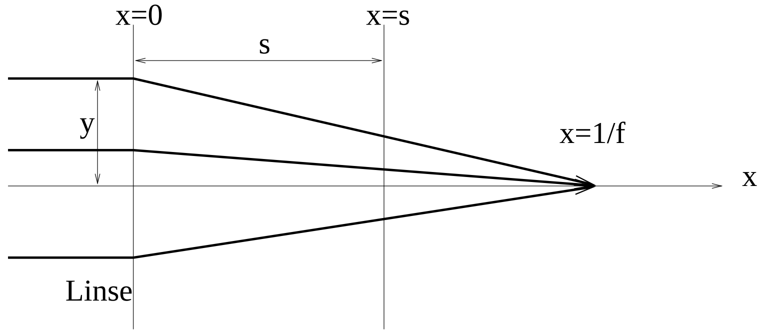


Abbildung 3.9: Strahlengang durch eine Linse

3–49 Beispiel : Achsenparallele Strahlen fallen auf eine konkave dünne Linse mit Brennweite f. Nach der Linse wird noch eine Strecke der Länge s durchlaufen. Die Situation ist in Abbildung 3.9 skizziert.

Da die einfallenden Strahlen achsenparallel sind, gilt dort $\alpha = 0$ und somit erhalten wir nach der Linse und der Strecke einen Abstand y_n und einen Winkel α_n, gegeben durch

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_n \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{L}(f) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -y/f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y - s\,y/f \\ -y/f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit gilt für den neuen Achsenabstand $y - s\,\frac{y}{f}$ und der Winkel ist gegeben durch $\frac{-y}{f}$. Setzt man $s = f$ so wird der Achsenabstand zu $y - f\,\frac{y}{f} = 0$ und somit werden die Strahlen in einem Abstand f von der Linse fokussiert. Die Abbildung 3.9 bestätigt diese Tatsache. ♢

3–50 Beispiel : Bei einer einfachen geometrischen Anordnung sind ein 2 cm grosses Objekt und der Projektionsschirm 50 cm voneinander entfernt. Eine dünne Linse mit Brennweite f sei x cm vom Objekt entfernt. Der Lichtstrahl geht vom Objekt zum Schirm, via Linse. Das auf dem Kopf stehende Bild soll 40 cm gross werden.

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $\mathbf{M}(x, f)$ dieses optischen Systems auf.

(b) Erklären Sie, weshalb diese Matrix die untenstehende Form haben muss, d.h. $A = -20$ und $B = 0$.

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Verwenden Sie den Determinantenmultiplikationssatz und $B = 0$ um zu zeigen, dass $D = 1/A$.

(d) Bestimmen Sie $\frac{x}{f}$, mit Hilfe von $D = -1/20$. Bestimmen Sie anschliessend x, mit Hilfe von $B = 0$

Lösung:

(a) Die Matrix wird konstruiert durch

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Gesamt} = & \text{Linse zu Schirm} \cdot & \text{Linse} & \cdot & \text{Objekt zu Linse} \\
\mathbf{M}(x,f) = & \mathbf{T}(50-x) \quad \cdot & \mathbf{L}(f) & \cdot & \mathbf{T}(x) \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 50-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 50-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot & & \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{-1}{f} & 1-\frac{x}{f} \end{bmatrix} & \\
= & & \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50-x)\,(1-\frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1-\frac{x}{f} \end{bmatrix} & &
\end{array}$$

Somit ist die folgende Matrix zu untersuchen

$$\mathbf{M}(x,f) = \begin{bmatrix} 1-\frac{50-x}{f} & x+(50-x)\,(1-\frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1-\frac{x}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(b) Damit das Bild fokussiert ist muss $B = 0$ sein. Für $B \neq 0$ werden Strahlen, die vom selben Punkt ausgehen, aber nicht mit dem selben α, nicht am selben Ort auf den Schirm auftreffen. Das Bild wird gespiegelt und um den Faktor 20 vergrössert, deshalb $A = -20$. In Formeln geschrieben

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile dieses Systems lautet

$$A\,2 + B\,\alpha = -40$$

Damit dies für beliebige α richtig ist muss $A = -20$ und $B = 0$ sein.

(c) $\det \mathbf{T}(s) = 1$ und $\det \mathbf{L}(f) = 1$ implizieren

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}(x,f) &= \det(\mathbf{T}(50-x))\ \det(\mathbf{L}(f))\ \det(\mathbf{T}(x)) = 1 \\ \det\ \mathbf{M}(x,f) &= A\,D - B\,C = A\,D = 1 \\ D &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

(d)
- Wegen $D = 1/A = -1/20$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20} &= 1-\frac{x}{f} \\ \frac{x}{f} &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

- Wegen $B = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x+(50-x)\,(1-\frac{x}{f}) \\ 0 &= x-(50-x)\,\frac{1}{20} \\ 20\,x &= 50-x \\ x &= \frac{50}{21} \end{aligned}$$

♢

3–51 Beispiel : This example is taken from [GerrBurc75, p 43].
The left end of a long plastic rod of refraction index 1.56 is ground and polished to a convex (outward) spherical surface of radius 2.8 cm . An object 2 cm tall is located in the air and on the axis at a distance of 15 cm from the vertex. Find position x and size of the image inside the rod. The situation is shown in figure 3.10

Lösung: As the ray of light travels from left to right is passes three different elements:

1. a distance of 15 cm
2. the curved surface, determined by the rod

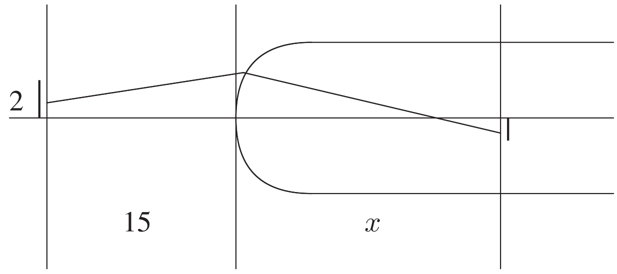


Abbildung 3.10: spherical rod, used as a lense

3. a distance of x cm

Thus the first matrix to be multiplied is the transfer by the distance 15 cm. This leads to the following calculations. It might help to read the operations from right to left since the vector is multiplied by the matrices in that order. This is also the order in which the ray passes the optic elements.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{image} & & \text{distance } x & & \text{spherical surface} & & \text{distance 15} & & \text{original} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(R, n_i, n_a) & \cdot & \mathbf{T}(15) & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_a - n_i}{n_i\, R} & \frac{n_a}{n_i} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.56}{1.56 \cdot 2.8} & \frac{1}{1.56} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{array}$$

By multiplying the matrices we obtain

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - 0.128\,x & 15 - 1.282\,x \\ -0.128 & -1.128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 - 0.128\,x)\, y_{init} + (15 - 1.282\,x)\, \alpha_{init} \\ -0.128\, y_{init} - 1.128\, \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If the image has to show at a distance x from the spherical surface, then all rays leaving at height y_{init} have to arrive at the same level y_{end}, independent on the initial angle α_{init}. This leads to the condition, that the number in the top right corner of the matrix has to vanish, i.e.

$$15 - 1.282\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 11.7$$

Thus the image will show at a distance of 11.7 cm. To find the size of the image we have to compute the result if we set $y_{init} = 2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.128 & -1.282 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.256 - 1.282\, \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

Thus the image has size 1 cm and is inverted.

♢

3–52 Beispiel : The above example may be solved with the help of *Octave*.

- First define the functions to compute the transfer matrices.
- Define a function $f(x)$ to compute the expression in the top right corner of the matrix, as function of the distance x .
- Examine values for the distances x and generate a plot.

Octave
```
1; % assure script file

function res=T(s)
  res=[1,s;0,1];
endfunction

function res=L(f)
  res=[1,0;-1/f,1];
endfunction

function res=S(r,n1,n2)
  res=[1,0;(n1-n2)/(n2*r),n1/n2];
endfunction

function y=f(x)
  M=T(x)*S(2.8,1,1.56)*T(15);
  y=M(1,2);
endfunction

x= 5:1:20; y=x;

for k=1:length(x)
  y(k)=f(x(k));
endfor

plot(x,y)
grid on
```

Using the hint by the resulting graphic we conclude that $f(x)$ is an affine function and thus we can compute its zero easily. Using this zero x_0 we can then compute the size of the resulting image.

Octave
```
x0=-f(0)/(f(1)-f(0))
M=T(x0)*S(2.8,1,1.56)*T(15)
M*[2;0]
```

For other examples we will not end up with an affine function and there will be no easy solution formula. In this case we may use the command `fsolve()` to determine solutions of nonlinear equations. Only one line of code will change.

Octave
```
x0=fsolve('f',10)
```

♢

3–53 Beispiel : Parallele Lichtstrahlen treffen auf eine Kugel mit Radius $r = 1$ cm. Das Material hat einen Brechungsindex $n = 1.4$. Alle Strahlen sind nahe der Kugelachse. Die Situation ist in Abbildung 3.11 skizziert.

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $\mathbf{M}(x)$ dieses optischen Systems auf.

(b) In welchem Abstand x von der Kugel befindet sich der Brennpunkt?

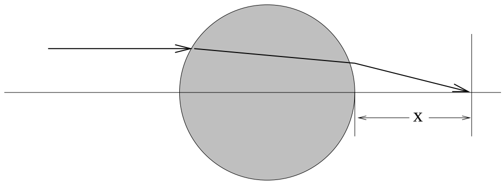


Abbildung 3.11: Strahlengang durch eine Kugel

Lösung: Der achsennahe Lichtstrahl durchläuft nacheinander

1. die erste Kugelfläche mit $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1.4$, $R = 1$
2. eine freie Wegstrecke der Länge 2 cm.
3. die zweite Kugelfläche mit $n_1 = n = 1.4$, $n_2 = 1$, $R = -1$
4. eine freie Wegstrecke der Länge x cm.

Dies kann durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen kombiniert werden.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Gesamt} & = & \text{Weg } x & \cdot & \text{zweite Fläche} & \cdot & \text{Kugel} & \cdot & \text{erste Fläche} \\
\mathbf{M}(x) & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(-1,1,n) & \cdot & \mathbf{T}(2) & \cdot & \mathbf{S}(1,n,1) \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-1} & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n}-1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 0.429 & 1.426 \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

(a) Man erhält

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(x) \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

(b) Damit der Strahl fokussiert muss der Eintrag oben links in der Matrix Null sein. Nur dann hängt der y–Wert des Bildstrahls nicht vom y–Wert des Eingangsstrahls ab. Da die Einganstrahlen parallel zur Achse sind, ist $\alpha_{init} = 0$. Deshalb ist der Eintrag oben rechts in M irrelevant. Somit gilt die folgende Beziehung :

$$0.429 - 0.571\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.75 \text{ cm}$$

Dieses Beispiel wurde [GerrBurc75] entnommen. ◇

3.7 Aufgaben

• Aufgabe 3–1:
Lernen Sie ihren Taschenrechner für elementare Vektor- und Matrix-Operationen einzusetzen.

3.7.1 Vektoren

• Aufgabe 3–2:
Betrachte die zwei Vektoren $\vec{a} = (3,1)$ und $\vec{b} = (2,-1)$. Bestimme

(a) $\vec{a} + \vec{b}$.

(b) $\vec{a} - 3\,\vec{b}$.

(c) $1.5\,\vec{b} - \frac{1}{3}\,\vec{a}$.

(d) $\|\vec{a}\|$ und $\|\vec{b}\|$.

(e) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(f) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{a}$.

(g) $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

(h) den Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

• Aufgabe 3–3:
Es soll die **Komponente** eines Vektors in die Richtung eines anderen Vektors bestimmt werden.

(a) Berechnen Sie die Komponente des Vektors $\vec{a} = (1,3)^T$ in Richtung des Vektors $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.

(b) Berechnen Sie die Komponente des Vektors $\vec{a} = (1,3)^T$ in Richtung des Vektors $\vec{b} = (1,2)^T$

• Aufgabe 3–4:
Finde einen Vektor der Länge 1, der senkrecht steht auf dem Vektor $(2,3)$.

• Aufgabe 3–5:
Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{a} + \vec{b}$	(b) $\lvert\vec{a} - 2\vec{b}\rvert$	(c) $3\vec{a} + 4\vec{b}$	(d) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$
(e) $\vec{a} \times \vec{b}$	(f) $\vec{b} \times \vec{a}$	(g) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle$	(h) $\vec{a} \times \vec{a}$

• Aufgabe 3–6:
Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, falls es möglich ist.

(a) $\vec{a} + 3\,\vec{b}$	(b) $3\,\vec{a} \cdot \vec{b}$	(c) $\vec{b} \times \vec{b}$	(d) $\vec{c} \times \vec{d}$
(e) $(\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e}$	(f) $\vec{c} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{e})$	(g) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	

• Aufgabe 3–7:
Zeigen Sie, dass das Vektorprodukt im allgemeinen nicht assoziativ ist, d.h.

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$$

Verwenden Sie dazu einige Beispiele.

• Aufgabe 3–8:
Bestimmen Sie den Winkel α zwischen den beiden folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3.7.2 Matrizen

• Aufgabe 3–9:
Gegeben seien die Vektoren und Matrizen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $2\,\vec{a} - \vec{b}$	(b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	(c) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$	(d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
(e) $\mathbf{A} \cdot \vec{b}$	(f) $\mathbf{B} \cdot \vec{a}$	(g) $\langle \vec{a} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle$	(h) $\vec{a} \times \vec{b}$

• Aufgabe 3–10:
Für die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

• Aufgabe 3–11:
Untersuchen Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie (falls möglich)

(a) $\mathbf{D}+\mathbf{E}$

(b) $\mathbf{D}-\mathbf{E}$

(c) $5\,\mathbf{A}$

(d) $-7\,\mathbf{D}$

(e) $2\,\mathbf{B}-\mathbf{C}$

(f) $-3\,(\mathbf{D}+2\,\mathbf{E})$

(g) $\mathbf{D}^T+\mathbf{D}$

(h) $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$

(i) trace $\mathbf{D}$

(j) $4\,$trace $(7\,\mathbf{B})$

(k) $2\,\mathbf{A}^T+\mathbf{C}$

(l) $(\mathbf{D}-\mathbf{E})^T$

(m) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T$

(n) trace $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}^T)$

• Aufgabe 3–12:
Verifizieren Sie, dass für eine 2×2–Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit $a\,d-b\,c\neq 0$ die inverse Matrix gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a\,d-b\,c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 3–13:
Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

3.7.3 Regression

• Aufgabe 3–14:
Untersuchen Sie die untenstehenden Punkte (x_i,y_i) und versuchen Sie eine Parabel möglichst gut durch diese Punkte zu legen (lineare Regression).

$$(x_1,y_1)=(1,1)\quad,\quad(x_2,y_2)=(3,0)\quad,\quad(x_3,y_3)=(4,2)\quad,\quad(x_4,y_4)=(5,5)$$

(a) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Parabel.

(b) Bestimmen Sie die Parabel.

• Aufgabe 3–15:
Untersuchen Sie die untenstehenden Punkte (x_i,y_i) und versuchen Sie eine Greade (resp. Parabel) möglichst gut durch diese Punkte zu legen (lineare Regression).

$$(x_1,y_1)=(0,3)\quad,\quad(x_2,y_2)=(1,3)\quad,\quad(x_3,y_3)=(3,4)\quad,\quad(x_4,y_4)=(4,5)\quad,\quad(x_5,y_5)=(5,6)$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden.

(b) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Parabel.

(c) Bestimmen Sie die Parabel.

• Aufgabe 3–16:
Untersuchen Sie die vier Punkte $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$ und $(4,0)$.

(a) Finden Sie eine Gerade, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

(b) Finden Sie eine Parabel, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

• Aufgabe 3–17:
Bei der Kalibrierung von neuen Messgeräten fallen oft Messungen der selben physikalischen Grösse mit zwei Messgeräten an:

- die erste Messung mit dem zu kalibrierenden Gerät mit Messwerten y_i
- die zweite Messung mit dem Referenzgerät mit Messwerten x_i

Zu bestimmen ist der optimale Skalierfaktor $\alpha \in \mathbb{R}$, so das $y = \alpha\, x$, resp. $y_i \approx \alpha\, x_i$. Verwenden Sie lineare Regression um zu zeigen, dass der optimale Wert des Parameters α gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\, y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

• Aufgabe 3–18:
Eine Kurve von der unten gegebenen Form soll möglichst gut durch die gegebenen Punkte $P_i = (x_i, y_i)$ gehen, d.h.

$$\|\vec{r}\|^2 = \sum_{k=1}^{5} r_k^2 = \sum_{k=1}^{5} \left(f\,(x_k) - y_k\right)^2 \quad \text{minimal}$$

wobei

$$f\,(x) = A\,\cos x + B\,\sin x + C$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_5 = \begin{pmatrix} \pi \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie den Residualvektor als Ausdruck der Form

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \vec{y}$$

(a) Finden Sie ein System von drei linearen Gleichungen für die Konstanten A, B und C.

(b) Berechnen Sie A, B und C.

3.7.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 3–3 :

(a) Der Vektor $\vec{b}$ ist bereits normiert.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,\sqrt{2}$$

Die Komponente von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ hat somit die Länge $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,\sqrt{2}$

(b) Der Vektor $\vec{b}$ ist nicht normiert. Es gilt

$$\|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

Somit muss $\vec{b}$ durch $\sqrt{5}$ dividiert werden um ihn zu normieren. Es gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

Die Komponente von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ hat somit die Länge $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Lösung zu Aufgabe 3–6 :

(a)

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$3\,\vec{a}\cdot\vec{b} = -3$$

(c)

$$\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}$$

(d)

$$\vec{c}\times\vec{d} = \quad \text{nicht definiert}$$

(e)

$$(\vec{c}\cdot\vec{d})\cdot\vec{e} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\vec{c}\cdot(\vec{d}\cdot\vec{e}) = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \quad \text{nicht definiert}$$

Lösung zu Aufgabe 3–8 : $\alpha = 112.6^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 3–9 :

(a) $2\,\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -3$

(c) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(d) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A}\cdot\vec{b} =$ nicht definiert

(f) $\mathbf{B}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(g) $\langle \vec{a}\times\vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

(h) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 3–10 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\,y + 2\,z & -3 - 2\,x \\ 4\,y & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} x\,y + 2\,z &= 1 \\ -3 - 2\,x &= -9 \\ 4\,y &= 4 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht ablesen, dass $y = 1$, $x = 3$ und $z = -1$. Nun führt eine einfache Matrizenmultiplikation zum Resultat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -11 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3–12 : Nachrechnen, dass $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}_2$ und $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbb{I}_2$.

Lösung zu Aufgabe 3–13 : Es gilt

$$\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

und

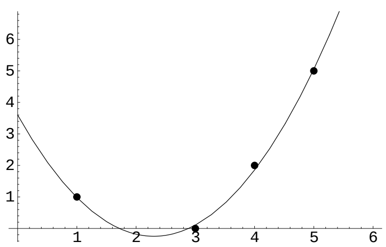
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

Somit ist die gewünschte Eigenschaft gezeigt.

Lösung zu Aufgabe 3–14 : Dies ist ein mit linearer Regression zu lösendes Problem. Für die Parabel

$$y(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2$$

sind die Parameter c_i so zu bestimmen, dass die Abweichung der Parabel von den Punkten minimal wird. Dies ist durch die folgende Graphik illustriert. Die Matrix $\mathbf{X}$ muss für die Rechnung verwendet werden.



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

(a) Das zu lösende Gleichungssytem ist

$$\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 4 & 13 & 51 \\ 13 & 51 & 217 \\ 51 & 217 & 963 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 34 \\ 158 \end{pmatrix}$$

(b) Die Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.60000 \\ -3.34545 \\ 0.72727 \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Parabel

$$y(x) = 3.60000 - 3.34545\, x + 0.72727\, x^2$$

Lösung zu Aufgabe 3–15 : Dies ist ein mit linearer Regression zu lösendes Problem. Die zu lösenden linearen Gleichngssysteme sind von der Form

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{c} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

(a) Für die Regressionsgerade erhalten wir

$$y = c_1 + c_2\, x \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

und somit das System

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 51 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 65 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$y(x) = 2.62791 + 0.60465\, x$$

(b) Für die Regressionsparabel erhalten wir

$$y = c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

und somit das lineare Gleichungssystem $\mathbf{X}^T\mathbf{X}\,\vec{c} = \mathbf{X}^T\,\vec{y}$, wobei

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 51 \\ 13 & 51 & 217 \\ 51 & 217 & 963 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}^T \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 21 \\ 65 \\ 296 \end{pmatrix}$$

(c) Die Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = 2.964286 - 0.040584\, x + 0.131494\, x^2$$

Lösung zu Aufgabe 3–16 :

(a)

$$y(x) = 5 - 0.9\,x$$

(b)

$$y(x) = -1.25 + 5.35\,x - 1.25\,x^2$$

Lösung zu Aufgabe 3–17 : Zu minimieren ist der Betrag des Residualvektors $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{y} - \alpha\,\vec{x}$$

Somit wird aus der Matrix $\mathbf{X}$ in Resultat 3–47 ein Vektor $\vec{x}$ und zu lösen ist die Gleichung

$$\left(\vec{x}^T \cdot \vec{x}\right)\ \alpha = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

oder auch

$$S_{xx}\,\alpha = S_{xy}$$

Somit ist die Lösung

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\,y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Nun kann auch noch die Standardabweichung σ_α des optimalen Parameters geschätzt werden. Hierzu muss zuerst die Standardabweichung der y–Werte geschätzt werden durch

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha\,x_i)^2$$

Dann folgt mit Hilfe der Rechenregeln für Varianzen (Quadrate der Standardabweichungen)

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^2 x_i^2\,\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^2}{S_{xx}^2}\,\sigma_y^2 = \frac{1}{S_{xx}}\,\sigma_y^2$$

Für den Spezialfall von konstanten Werten $x_i = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1}{n\,x}\sum_{i=1}^n y_i \\
\sigma_\alpha &= \frac{1}{x\,\sqrt{n}}\,\sigma_y
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3–18 : In den Spalten der Matrix $\mathbf{X}$ stehen die $\cos$- und $\sin$–Werte der x–Koordinaten, ergänzt durch eine Spalte von Einsen.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \vec{y} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 1 \\ \cos 1 & \sin 1 & 1 \\ \cos\pi/2 & \sin\pi/2 & 1 \\ \cos 2 & \sin 2 & 1 \\ \cos\pi & \sin\pi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.45 \\ -0.5 \\ -1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos 1 & \sin 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos 2 & \sin 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.45 \\ -0.5 \\ -1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

(a) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2.4651 & 0.0762475 & 0.124155 \\ 0.0762475 & 2.53490 & 2.75077 \\ 0.124155 & 2.75077 & 5.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.62574 \\ -1.39435 \\ -4.45 \end{pmatrix}$$

(b) Das führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.92044 \\ 1.01667 \\ -1.49701 \end{pmatrix}$$

3.8 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- rasch und zuverlässig mit Vektoren rechnen können, Addition, Multiplikation mit Skalar, Skalar– und Vektorprodukt.
- rasch und zuverlässig mit Matrizen rechnen können, Addition und Multiplikation.
- die Rechenregeln für Vektoren und Matrizen im Griff haben.
- inverse Matrizen verwenden können.
- einfache lineare Regressionsprobleme lösen können.
- einfache Probleme der geometrischen Optik mit Matrizen behandeln können.

Kapitel 4

Vektoren

4.1 Einführung

In Naturwissenschaft und Technik spielen die Begriffe von *skalare Grösse* und *Vektoren* eine besonders wichtige Rolle. Skalare lassen sich eindeutig durch die Angabe eine Zahl geben. Typische Beispiele sind Masse, Temperatur, Schnelligkeit, Dicke einer Mauer oder Luftdruck. Damit ein Vektor eindeutig beschrieben ist, muss nicht nur seine Grösse, sondern zusätzlich noch die Richtung gegeben sein. Typische Beispiele sind Kräfte, Geschwindigkeit oder ein elektrisches Feld. Vektoren werden an vielen Orten in der Mathematik eingesetzt, z.B. beim CAD, Computergraphik, lösen von Systeme von linearen Gleichungen, Statik, Differentialgleichungen. In Kapitel 3 wurden Vektoren basierend auf algebraischen Eigenschaften aufgebaut und untersucht. In diesem Kapitel steht der gemometrische Aspekt im Vordergrund.

Einige der Resultate und Beispiele wurden aus [Bach71] übernommen.

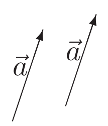
4–1 Definition : Unter **Vektoren** verstehen wir Objekte, die durch Angabe ihrer Länge und Richtung vollständig beschrieben sind. Dabei muss „klar" sein, welche Art Vektoren wir betrachten, z.B. Vektoren in einer Ebene, Vektoren im Raum oder in anderen Stukturen. Zu ihrer Kennzeichnung verwenden wir Symbole die mit einem Pfeil überstrichen werden.

$$\vec{a}, \quad \vec{A}, \quad \overrightarrow{AB}$$

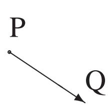
Die Länge des Vektors $\vec{a}$ wird auch **Betrag** von $\vec{a}$ genannt und mit $\|\vec{a}\|$ bezeichnet.

4–2 Satz : *Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden als **gleich** bezeichnet, falls sie in Länge und Richtung übereinstimmen.*

Zwei Vektoren sind demnach gleich, falls sie sich durch Parallelverschiebung ineinander überführen lassen.



Graphisch können Vektoren durch Pfeile mit entsprechender Länge und Richtung dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass Pfeile mit verschiedenem Anfangs- und Endpunkt, aber derselben Länge und Richtung demselben Vektor entsprechen.



Ein Vektor lässt sich auch eindeutig durch Angabe eines Anfangs- und eines Endpunktes festlegen. Als Vektorsymbol kann dann auch $\overrightarrow{PQ}$ verwendet werden.

Der **Nullvektor** $\vec{0}$ ist der spezielle Vektor mit Länge 0. Er hat als einziger Vektor keine Richtung.

4–3 Definition : Zwei Vektoren heissen **parallel**, falls sie in dieselbe oder genau entgegengesetzte Richtung zeigen.

Die Vektoren in Abbildung 4.1 sind alle parallel.

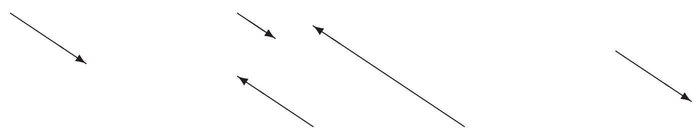


Abbildung 4.1: Parallele Vektoren

4.2 Operationen mit Vektoren

Ziel dieses Abschnittes ist es die grundlegenden Operationen mit Vektoren zu erklären.

1. Addition von Vektoren.
2. Subtraktion von Vektoren.
3. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

4.2.1 Addition von Vektoren

4–4 Definition : Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden nach der folgenden Vorschrift addiert.

Der Vektor $\vec{b}$ wird parallel zu sich selbst verschoben, bis der Anfangspunkt von $\vec{b}$ mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ ïbereinstimmt. Der vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ zeigende neue Vektor ist der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

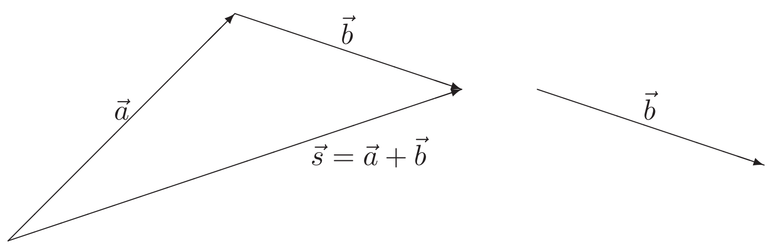


Abbildung 4.2: Summe von Vektoren

4–5 Satz : *Aus entsprechenden Diagrammen kann man die folgenden einfachen Regeln ablesen.*

$\vec{a} + \vec{b}$	$=$	$\vec{b} + \vec{a}$	*Kommutativgesetz*
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	$=$	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	*Assoziativgesetz*

4–6 Satz : *Dreiecksungleichung*
Zeichnet man die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ auf in einem Dreieck so sieht man, dass

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

4.2.2 Subtraktion von Vektoren

Es ist geometrisch leicht zu sehen, dass es zu jedem Vektor $\vec{a}$ genau einen Vektor $\vec{b}$ gibt, sodass $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Der neue Vektor $\vec{b}$ hat dieselbe Länge wie $\vec{a}$, zeigt aber genau in die entgegengesetzte Richtung. Diese Vektor heisst auch der **inverse Vektor** und wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

Die Subtraktion von Vektoren lässt sich als Umkehrung der Addition auffassen, d.h.

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$$

4–7 Definition : Der Differenzenvektor $\vec{a}-\vec{b}$ wird gemäss der Vorschrift

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

gebildet. $-\vec{b}$ ist der zu $\vec{b}$ inverse Vektor.

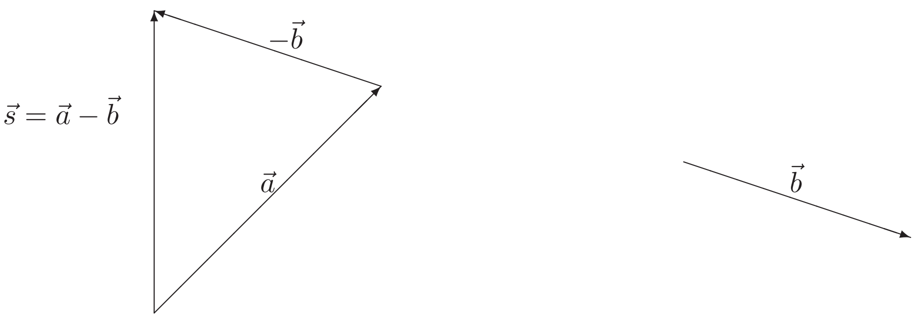


Abbildung 4.3: Differenz von Vektoren

4–8 Satz : *Der Summenvektor $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ und der Differenzenvektor $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ lassen sich geometrisch im durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogram als Diagonalvektoren wieder finden, siehe Figur 4.2.2.*

4.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

4–9 Definition : Durch Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ entsteht ein Vektor $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$ mit den Eigenschaften

1. Die Länge von $\vec{b}$ ist das $|\lambda|$–fache der Länge von $\vec{a}$.

$$\|\vec{b}\| = \|\lambda\,\vec{a}\| = |\lambda|\;\|\vec{a}\|$$

2. Der Vektor $\vec{b}$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$, falls $\lambda>0$. Der Vektor $\vec{b}$ zeigt genau in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$, falls $\lambda<0$.

Finden Sie eine entsprechende Zeichnung um das folgende Resultat zu illustrieren und dir Rechenregeln zu verifizieren.

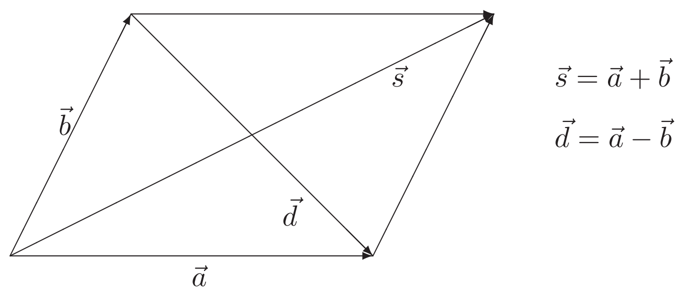


Abbildung 4.4: Vektorparallelogram

4–10 Theorem : *Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann parallel, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda\,\vec{a} = \vec{b}$.*

4–11 Satz : *Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren und $\lambda\ ,\ \gamma \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} 2\,\vec{a} &= \vec{a} + \vec{a} \\ (-1)\cdot\vec{a} &= -\vec{a} \\ \lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b} \\ (\lambda + \gamma)\,\vec{a} &= \lambda\vec{a} + \gamma\vec{a} \end{aligned}$$

4.2.4 Vektoren und Punkte

Betrachten wir eine Ebene oder einen Raum. Beliebige Punkte im Raum können auch mit Vektoren identifiziert werden. Einem Punkt P wird der Verbindungsvektor vom Ursprung zu diesem Punkt zugeordnet. Oft wird diese Konvention stillschweigend verwendet, indem man je nach Bedarf vom Punkt P oder vom Vektor $\vec{P}$ spricht. Korrekterweise müsste man mit der Notation $\overrightarrow{OP}$ arbeiten.

4.3 Vektoren in der Ebene

In diesem Abschnitt sollen Vektoren in einer Ebene und die entsprechenden Anwendungen besprochen werden.

4.3.1 Kartesische Koordinaten

In einer Ebene legen wir den Ursprung 0 fest und zeichnen zugleich zwei spezielle Richtungen $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$ und $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ aus. Hierbei verlangen wir, dass $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ und die beiden Richtungen sollen senkrecht zueinander sein. Dies kann mit der üblichen Zeichnung (Abbildung 4.5) einer Koordinatenebene dargestellt werden. Der Vektor $\vec{e}_x$ (bzw. $\vec{e}_y$) heisst **Koordinateneinheitsvektor** in x–Richtung (bzw. y–Richtung).

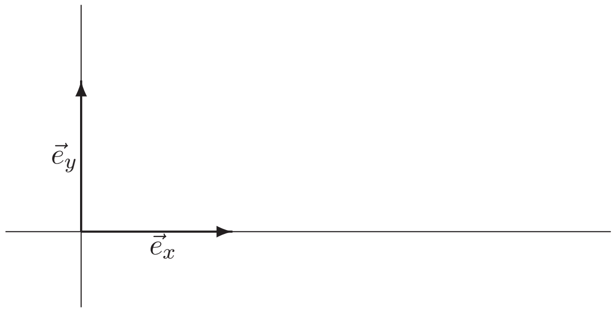


Abbildung 4.5: Kartesische Koordinaten, mit Koordinateneinheitsvektoren

Betrachten wir nun einen „beliebigen“ Vektor $\vec{a}$ in dieser Ebene. In Beispiel in Abbildung 4.6 ist

$$\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y \qquad .$$

Ist umgekehrt die obige Formel gegeben, so lässt sich $\vec{a}$ leicht konstruieren. Wir können somit $\vec{a}$ mit dem Zahlenpaar $(3, 2)$ in Beziehung setzen.

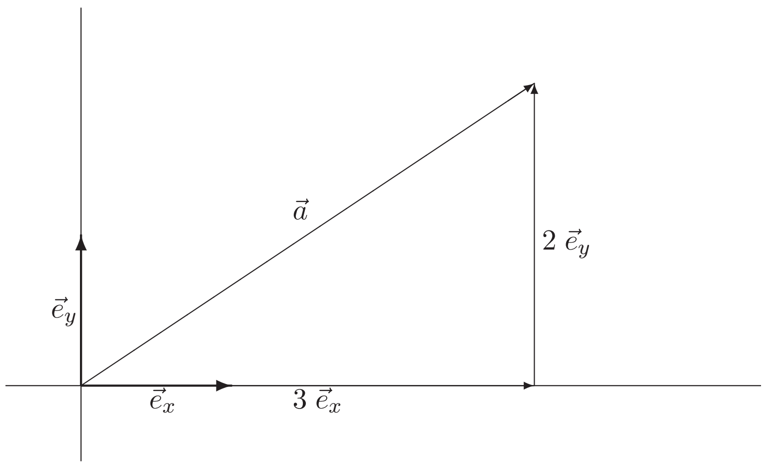


Abbildung 4.6: Koordinatendarstellung eines Vektors

Aus der Figur 4.6 sollte klar sein, dass jeder Vektor $\vec{a}$ in dieser Ebene dargestellt werden kann in der Form

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Somit können Paare von reellen Zahlen mit Vektoren in einer Ebene identifiziert werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2$$

Die Zahlen a_i heissen **Koordinaten** des Vektors $\vec{a}$ und $a_i\,\vec{e}_i$ sind die **Komponenten** des Vektors. Diese Darstellung von Vektoren in einer Ebene durch Zahlenpaare heisst **kartesische Koordinatendarstellung**.

Für die Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ gilt

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3.2 Operationen in der kartesischen Koordinatendarstellung

Wir betrachten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir die grundlegenden Operationen mit Vektoren ausführen. Es ist wichtig sich diese Rechenregeln auch graphisch zu veranschaulichen und den Bezug zu den geometrischen Definitionen herzustellen.

4–12 Satz :

- *Addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

- *Multiplikation mit skalarer Grösse*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \end{pmatrix}$$

- *Länge eines Vektors*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Alle im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Rechenregeln für Vektoren sind mit den obigen Formeln gültig. Überprüfen Sie das an einigen Beispielen.

4.3.3 Anwendungen

Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten

Wir betrachten ein aus n Massenpunkten $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bestehendes ebenes System. Die Lage der einzelnen Massenpunkte wird dabei durch die Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ festgelegt. Die Gesamtmasse M ist dann gegeben durch

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Und der Schwerpunkt S (Massenmittelpunkt) durch

$$\vec{r}(S) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

4–13 Beispiel : Betrachten Sie die Ecken eines regelmässigen Sechsecks mit einer fehlenden Ecke. Finden Sie die Lage des Schwerpunktes. ♢

Kräftegleichgewicht

Wir behandeln ein einfaches Problem, dass in der Statik von grosser Bedeutung ist: An einen gemeinsamen Massenpunkt greifen verschiedene Kräfte $\vec{F}_i$ an. Finde die resultierende Kraft $\vec{F}_R$.

Die Kräfte sind (genau wie Vektoren) durch ihre Stärke (Länge) und ihre Richtung bestimmt und die Kräfte werden wie Vektoren addiert. Somit gilt

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_k$$

4–14 Beispiel :

Die Kräfte sind gegeben durch die rechtsstehende Tabelle.

Finde Richtung und Stärke der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$.

	Richtung	Stärke
$\vec{F}_1$	30°	2
$\vec{F}_2$	90°	1
$\vec{F}_3$	$-30°$	-2
$\vec{F}_4$	45°	2.5

♢

4–15 Beispiel : Eine Skulptur mit Masse 200 kg wir durch zwei Kabel mit den Steigungen 40° (rechts) und 50° (links) aufgehängt. Wie gross sind die Kräfte auf die Kabel?

Lösung:

1. Zeichnen Sie zuerst eine Figur mit den drei auftretenden Kräften.
2. Die Richtungen aller Kräfte sind bekannt, ebenso die Stärke einer Kraft.
3. Stellen Sie zwei Gleichungen auf für die beiden unbekannten Längen der Kraftvektoren.
4. Lösen sie die Gleichungen.
5. Überprüfen Sie das Resultat.

♢

4.3.4 Das Skalarprodukt

Für viele Anwendungen benötigt man Beziehungen zwischen Längen von Vektoren und dem Winkel zwischen Vektoren.

4–16 Definition : Das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren ist gegeben durch die Definition

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{falls} \quad \|\vec{a}\|\neq 0 \quad \text{und} \quad \|\vec{b}\|\neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{oder} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

Man verwendet die Notationen

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

Das Skalarprodukt wird auch **inneres Produkt** genannt und ergibt eine Zahl als Resultat. Für die speziellen Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ erhält man

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1 \quad \text{und} \quad e_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = 0$$

Für allgemeine Vektoren gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

und

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2$$

Ist $\vec{n}$ ein Vektor mit Länge 1, so gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{n})$$

Die Figur 4.7 zeigt, warum $\vec{a}\cdot\vec{n}$ auch **Komponente von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{n}$** genannt wird. Man spricht auch von der **Projektion** von $\vec{a}$ auf die Richtung $\vec{n}$. Diese kann in vielen Anwendungen eingesetzt werden. Betrachten Sie dazu die Aufgabe 3–3 (Seite 90).

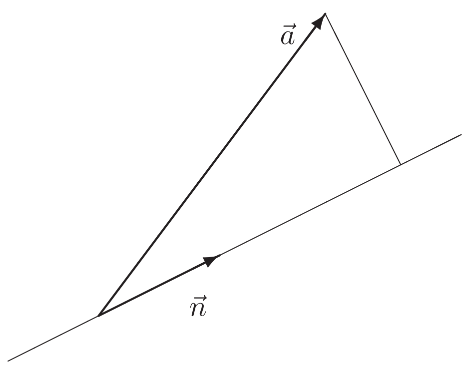


Abbildung 4.7: Komponente von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{n}$

4–17 Theorem : *Es gelten die folgenden wichtigen Rechenregeln*

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} & \textit{Kommutativgesetz} \\
(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \textit{für} \quad \lambda\in\mathbb{R} \\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} & \textit{Distributivgesetz} \\
\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \textit{ senkrecht zu } \vec{b} & \textit{Orthogonalitätsgesetz} \\
\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} &
\end{array}$$

Mittels des obigen Resultates lässt sich das Folgende nun verifizieren.

4–18 Theorem :

1.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

2.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

3.

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|}$$

falls $\|\vec{a}\| \neq 0$ *und* $\|\vec{b}\| \neq 0$.

4. Der Vektor $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ *steht immer senkrecht auf dem Vektor* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

4–19 Satz : *Ist $\vec{n}$ ein Richtungsvektor (d.h. $\|\vec{n}\| = 1$) und $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor, so kann $\vec{a}$ zerlegt werden in einen Anteil parallel zu $\vec{n}$ und einen orthogonalen Anteil*

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}_\perp + \vec{a}_\| \\
\vec{a}_\| &= (\vec{a}\cdot\vec{n})\,\vec{n}
\end{aligned}$$

4–20 Beispiel : (Additionstheorem für die Cosinus–Funktion)
Seien zwei Vektoren gegeben durch

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Dann haben diese Vektoren je die Länge 1 und schliessen einen Winkel von $\alpha-\beta$ ein. Somit gilt

$$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = \|\vec{r}_1\;\|\vec{r}_2\|\;\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

und andererseits

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ sin\beta$$

Da die beiden Resultate übereinstimmen müssen gilt die trigonometrische Identität

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

♢

4.4 Geradengleichungen in der Ebene

In diesem Abschnitt betrachten wir verschiedene Formen um Geraden in einer Ebene zu beschreiben. Einige der Verfahren verwenden Vektoren.

4.4.1 Allgemeine Form einer Geradengleichung

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen. Dann bilden alle Punkte (x, y) in der Ebene mit

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

eine Gerade g. Die Gerade kann somit beschrieben werden durch die drei Zahlen A, B, C .

Sind die drei Zahlen bekannt, so lässt sich die Gerade relativ leicht zeichnen, indem man die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen sucht. Entlang der x–Achse ist $y = 0$ und somit gilt für den Punkt auf der x–Achse und auf der Geraden die Bedingung

$$A\,x + C = 0 \quad .$$

Dadurch ist der Abschnitt auf der x–Achse bestimmt. Analog erhält man den Abschnitt auf der y–Achse als $y = -C/B$.

4–21 Beispiel : Zeichnen Sie die Gerade

$$2x - 3y + 6 = 0$$

in einem kartesischen Koordinatensystem ein. ♢

4–22 Satz : *In der allgemeinen Form einer Geradengleichung kann man die folgenden speziellen Lagen von Geraden erkennen.*

- *Ist $A = 0$ so ist die Gerade parallel zur x–Achse.*
- *Ist $B = 0$ so ist die Gerade parallel zur y–Achse.*
- *Ist $C = 0$ so geht die Gerade durch den Ursprung.*

4–23 Beispiel : Zeichne in einer Ebene alle Punkte (x, y) für die gilt

$$2x - 3y \leq 6 \qquad .$$

♢

4–24 Beispiel : Stellen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems graphisch dar.

$$\begin{aligned} x - y &> -1 \\ 2x - 3y &\leq 6 \\ x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

♢

4.4.2 Standardform einer Geradengleichung

Eine Gerade in kartesischen xy–Koordinaten kann durch den **y–Achsenabschnitt** a und die **Steigung** m gebeben werden. Alle Punkte auf der Geraden erfüllen die Gleichung

$$y = a + m\,x$$

Ist eine Gerade durch die allgemeine Form

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

gegeben und ist $B \neq 0$ so kann die Gleichung in die Standardform

$$y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}\,x$$

umgeschrieben werden. Es ist zu beachten, dass vertikale Geraden ($B = 0$) nicht in der Standardform geschrieben werden können.

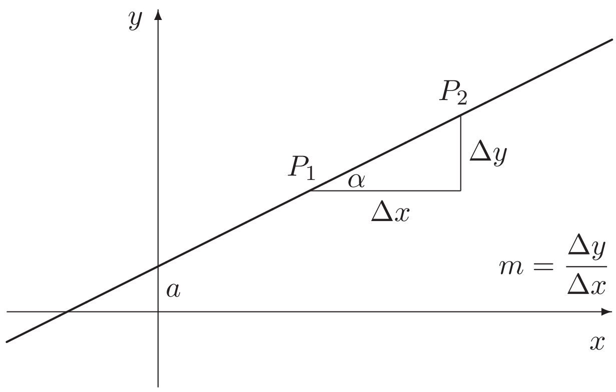


Abbildung 4.8: Zwei Punkte bestimmen eine Gerade

Kennt man von einer Geraden zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$, so ist die Gerade bestimmt und es sollte möglich sein den y–Achsenabschnitt a und die Steigung m zu bestimmen. Hierzu verwendet man die beiden Gleichungen für die Unbekannten a und m

$$\begin{aligned} y_1 &= m\,x_1 + a \\ y_2 &= m\,x_2 + a \end{aligned}$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so ergibt sich

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mittels der ersten (oder zweiten) Gleichung kann man nun auch leicht a berechnen. In Abbildung 4.8 kann man auch ablesen, dass

$$\tan\alpha = m \qquad .$$

4.4.3 Punkt–Richtungsform einer Geradengleichung

Ist von einer Geraden g ein Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ und die Steigung m (oder der Winkel α) gegeben, so ist die Gerade bestimmt. Um die Geradengleichung in Standardform zu erhalten fehlt der y–Achsenabschnitt. Setzt man (x_1, y_1) in die Geradengleichung ein, so ergibt sich

$$y_1 = m\, x_1 + a$$

oder

$$a = y_1 - m\, x_1 \qquad .$$

4–25 Beispiel : Eine Gerade mit Steigung $m = 1.5$ geht durch den Punkt $(3, -1)$. Finde die beiden Achsenabschnitte.

Lösung: Da der Punkt $(3, -1)$ auf der Geraden liegt, gilt mit $y = m\, x + a$

$$-1 = 1.5 \cdot 3 + a \qquad ,$$

also $a = -5.5$. Somit lautet die Geradengleichung

$$y = 1.5\, x - 5.5$$

und wir haben bereits den y–Achsenabschnitt $y = -5.5$ bestimmt. Um den x–Achsenabschnitt zu berechnen setzt man in der Geradengleichung $y = 0$ und erhält somit $x = 11/3$. ♢

4.4.4 Zweipunkteform einer Geradengleichung

Kennt man von einer Geraden zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$, so kann man zuerst die Steigung m bestimmen mittels

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und anschliessend mit der Punkt–Richtungsform weiterarbeiten.

4–26 Beispiel : Untersuche die Gerade durch die Punkte $P_1 = (2, -3)$ und $P_2 = (-1.5, 1)$.

Lösung: Für die Steigung m ergibt sich

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{1 - (-3)}{-1.5 - 2} = \frac{-4}{3.5} = \frac{-8}{7}$$

Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} y_1 = &\quad m\, x_1 + \quad a \\ -3 = &\quad \tfrac{-8}{7}\, 2 + \quad a \end{aligned}$$

erhält man $a = -5/7$ und somit die Geradengleichung in Standardform

$$y = \frac{-8}{7}\, x - \frac{5}{7} \qquad .$$

Das Ergebnis kann durch einsetzen der beiden Punkte überprüft werden. ♢

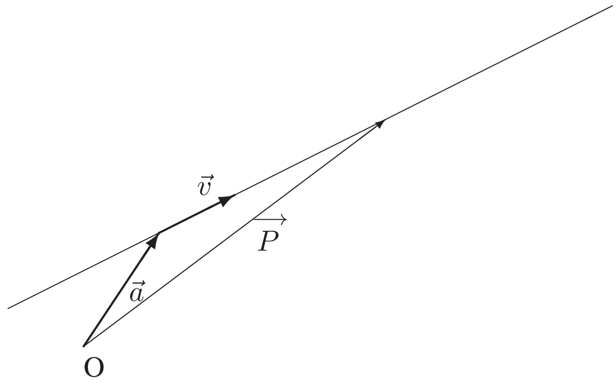


Abbildung 4.9: Geradengleichung in Parameterform

4.4.5 Parameterform einer Geradengleichung

Eine Gerade g kann beschrieben werden durch einen Punkt auf der Geraden und die Richtung, in welche die Gerade verläuft. Sowohl der Anfangspunkt als auch die Richtung können durch Vektoren beschrieben werden, siehe Abbildung 4.9. Ein **Parameter** t wird dann verwendet um das Durchlaufen der Geraden anzuzeigen. Ein Punkt P liegt genau dann auf der Geraden, wenn der Verbindungsvektor vom Ursprung zu P von der Form

$$\overrightarrow{P} = \vec{a} + t\vec{v} \quad \text{für ein} \quad t \in \mathbb{R}$$

ist. Durchläuft t alle reellen Zahlen, so wird die ganze Gerade beschrieben.

Die obigen Operationen kann man in kartesischen Koordinaten auch komponentenweise hinschreiben

$$\vec{P} = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + t\,v_1 \\ a_2 + t\,v_2 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

4–27 Beispiel : Die Gerade g sei gegeben durch den Startpunkt $\vec{a}$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dann liegen alle Punkte der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} x &= 2 + t\,2.5 \\ y &= -3 - t\,3 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

auf der Geraden. Somit liegt zum Beispiel der Punkt $x = 0$, $y = 1$ nicht auf der Geraden, aber $x = 7$, $y = -9$ liegt auf der Geraden ($t = 2$). ♢

4–28 Beispiel : Ist eine Gerade gegeben durch zwei Punkte P und Q, so lässt sich eine Parameterform sehr leicht finden, indem der eine Punkt als Startpunkt und der Verbindungsvektor als Richtung genommen wird.

$$\vec{P} + t\,\overrightarrow{PQ}$$

Um die Gerade zu finden, welche durch die Punkte $P = (1, 2.5)$ und $Q = (-2, 4.5)$ kann man den Startvektor $\vec{a}$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$ verwenden mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4.5-2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Somit ist eine mögliche Parameterform der Geraden gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= 1 - t\,3 \\ y &= 2.5 + t\,2 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Um auf die Standardform zu kommen muss noch der Parameter t eliminiert werden. Aus der ersten Gleichung folgt $t = (1-x)/3$ und somit

$$y = 2.5 + 2\,t = 2.5 + 2\,(1-x)/3 = \frac{-2}{3}\,x + \frac{19}{6}$$

$\diamondsuit$

Es ist zu beachten, dass es viele verschiedene Gleichungen derselben Gerade in Parameterform gibt, aber nur eine Standardform.

4.4.6 Hessesche Normalform einer Geradengleichung

Eine Gerade kann auch durch einen Punkt (Ortsvektor $\vec{a}$) und eine auf der Geraden senkrecht stehenden **Normalenvektor** $\vec{n}$ beschrieben werden, siehe Abbildung 4.10. Damit der Punkt $\vec{P}$ auf der Geraden liegt, muss der Verbindungsvektor von $\vec{a}$ zu $\vec{P}$ senkrecht sein zu $\vec{n}$, d.h.

$$\begin{gathered} (\vec{P} - \vec{a}) \;\perp \vec{n} \\ (\vec{P} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n} \end{gathered}$$

Für die zweite Zeile wurde verwendet, dass zwei Vektoren genau dann senkrecht zueinander sind, falls ihr Skalarprodukt Null ergibt.

Sind die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{n}$ gegeben so kann man Geradengleichungen finden.

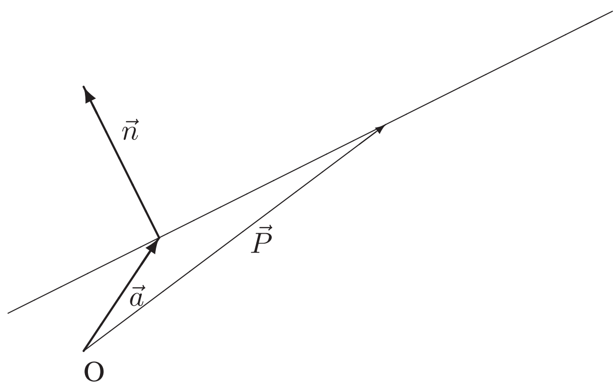


Abbildung 4.10: Gerade gegeben durch einen Punkt $\vec{a}$ und Normale $\vec{n}$

4–29 Beispiel : Eine Gerade g geht durch den Punkt $Q = (-2, 3)$ und der Vektor $\vec{n} = (1, 3)$ steht senkrecht auf g. Finde die Geradengleichung in Standardform.

Lösung: Gemäss der obigen Formel liegt der Punkt (x, y) auf der Geraden, genau dann wenn die Gleichung

$$\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array}\right)\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right) = 0$$

erfüllt ist. Daraus ergibt sich

$$x + 2 + 3\,y - 3 \cdot 3 = 0$$

oder auch

$$y = \frac{1}{3}\,(-x + 7) = \frac{-1}{3}\,x + \frac{7}{3}$$

$\diamondsuit$

Ist eine Gerade durch den Vektor $\vec{n}$, die Zahl d und die Gleichung

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \cdot \vec{n} = d$$

gegeben, wobei $\|\vec{n}\| = 1$, so spricht man von der Gleichung in der **Hesseschen Normalenform**. Diese Gleichung kann in kartesischen Koordinaten ausgeschrieben werden

$$n_1\,x + n_2\,y = d \quad \text{wobei} \quad n_1^2 + n_2^2 = 1$$

Der Abstand des Nullpunktes von einer Geraden g (gegeben in Hessescher Normalenform) ist $|d|$. Die Gerade teilt die Ebene auf in zwei Halbebenen. Falls der Normalenvektor $\vec{n}$ von g in die den Ursprung enthaltende Seite zeigt, so ist $d > 0$.

4–30 Beispiel : Schreibe die Gerade

$$y = 2\,x - 0.5$$

in Hessescher Normalenform.

Lösung:

$$\begin{array}{rcl} y - 2\,x &=& -0.5 \\ \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) &=& -0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) &=& \frac{-0.5}{\sqrt{5}} \\ \left(\begin{array}{c} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) &=& \frac{-0.5}{\sqrt{5}} \end{array}$$

$\diamondsuit$

4.4.7 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Eine Anwendung der Hesseschen Normalenform einer Geraden ist die Berechnung des Abstands eines Punktes $\vec{P} = (x, y)$ von einer Geraden g, gegeben durch $\vec{n} = (n_1, n_2)$ und d.

Der Ausdruck

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = x\, n_1 + y\, n_2$$

entspricht der Komponente von $\vec{P}$ in Richtung von $\vec{n}$. Liegt $\vec{P}$ auf der Geraden, so ist der Ausdruck gleich d. Eine einfache Figur zeigt, dass

$$f\,(x, y) = \vec{P} \cdot \vec{n} - d = x\, n_1 + y\, n_2 - d$$

dem **orientierten Abstand** des Punktes von der Geraden entspricht.

Haben d und $f(x, y)$ dasselbe Vorzeichen, so liegen der Koordinatenursprung und der Punkt $\vec{P} = (x, y)$ auf derselben Seite der Geraden.

4.4.8 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Seien zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 : &\qquad y = a_1 + m_1\, x \\ g_2 : &\qquad y = a_2 + m_2\, x \end{aligned}$$

wobei $m_1 \neq m_2$.

Der **Schnittpunkt** ist bestimmt durch die Bedingung, dass beide Gleichungen für dieselbe Wahl von x und y erfüllt sein müssen. Somit erhalten wir die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} y - m_1\, x &= a_1 \\ y - m_2\, x &= a_2 \end{aligned}$$

für die beiden Unbekannten x und y. Weil $m_1 \neq m_2$ gibt es immer genau eine Lösung dieser Gleichungen. Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten so erhält man

$$(m_2 - m_1)\, x = a_1 - a_2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Diesen Wert von x kann man nun in eine der beiden obigen Gleichungen einsetzen um y zu bestimmen. Man kann auch die erste Gleichung mit m_2 multiplizieren, die zweite mit m_1, dann die beiden voneinander subtrahieren und man erhält

$$(m_2 - m_1)\, y = m_2 a_1 - m_1 a_2 \quad \text{oder} \quad y = \frac{m_2 a_1 - m_1 a_2}{m_2 - m_1}$$

Ist $m_1 = m_2$, so sind die beiden Geraden parallel und es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

- Sind die beiden Achsenabschnitte verschieden, so schneiden sich die Geraden nicht, es gibt keine Schnittpunkte.
- Sind die beiden Achsenabschnitte gleich, so haben wir zwei mal dieselbe Gerade und es gibt somit unendlich viele Schnittpunkte.

4–31 Satz : *Schneidet man zwei Geraden mit den Gleichungen*

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & y = a_1 + m_1\, x \\ g_2 : \quad & y = a_2 + m_2\, x \end{aligned}$$

so ergibt sich die folgende Anzahl von Schnittpunkten

Steigung	*Achsenabschnitts*	*Anzahl Schnittpunkte*
$m_1 \neq m_2$		*genau einen*
$m_1 = m_2$	$a_1 \neq a_2$	*keinen*
$m_1 = m_2$	$a_1 = a_2$	*unendlich viele*

Für die Steigungswinkel der beiden Geraden gilt

$$\tan \alpha_i = m_i$$

Sind die Geraden weder parallel noch senkrecht zueinander, so kann man aus einer einfachen Figur ablesen, dass für den Winkel γ zwischen den Geraden gilt

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

Daraus folgt

$$\tan \gamma = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$$

Somit erhalten wir

$$\tan \gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Falls die beiden Geraden nicht senkrecht aufeinender stehen ist $1 + m_1 m_2 \neq 0$.

Im Schnittpunkt von zwei Geraden treten immer vier Winkel auf, von denen je zwei gleich sind und von denen sich zwei je auf π (180°) ergänzen. Die obige Formel liefert den Winkel, der überstrichen wird, wenn man die Geraden mit Steigung m_1 um den Schnittpunkt im mathematisch positiven Sinn dreht bis sie sich mit der Geraden mit Steigung m_2 deckt.

4.5 Kreisgleichungen

4–32 Definition : Ein Kreis mit **Mittelpunkt** $\vec{M}$ und **Radius** R besteht aus allen Punkten $\vec{x} = (x, y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für die gilt

$$\left\| \vec{x} - \vec{M} \right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M} \right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{M} \right) = R^2$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die „quadratische Gleichung“ für den Vektor $\vec{x}$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\, \vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Bezeichnen wir die kartesischen Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ mit $\vec{M} = (u, v)$ so entspricht dies der Gleichung

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2$$

4–33 Beispiel : Die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 4\,x + 6\,y - 3 = 0$$

hat als Lösungsmenge einen Kreis. Quadratisches Ergänzen ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + 4 + y^2 + 6\,y + 9 &= 3 + 4 + 9 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Somit haben wir einen Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt bei $(2, -3)$. ♢

4–34 Beispiel : Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt $(0, -2)$ und Radius 5 mit der Geraden $x - 2\,y + 1 = 0$.

Lösung: Zuerst ist die Kreisgleichung aufzustellen.

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \end{aligned}$$

Man hat die beiden Gleichungen zu kombinieren und dann das System von zwei Gleichungen zu lösen. Aus der Geradengleichung folgt sofort, dass $x = 2\,y - 1$. Dies kann man in der Kreisgleichung einsetzen und erhält die folgende quadratische Gleichung für y:

$$\begin{aligned} (2\,y-1)^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \\ 5\,y^2 + (4-4)\,y - 21 + 1 &= 0 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$$

mit den zwei Lösungen $y_{1,2} = \pm 2$. Daraus erhalten wir die x–Werte $x_{1,2} = 2\,y_{1,2} - 1 = \pm 4 - 1$. Somit haben wir die zwei Schnittpunkte $(3\,,\,2)$ und $(-5\,,\,-2)$. Die Abbildung 4.11 bestättigt das Ergebniss.

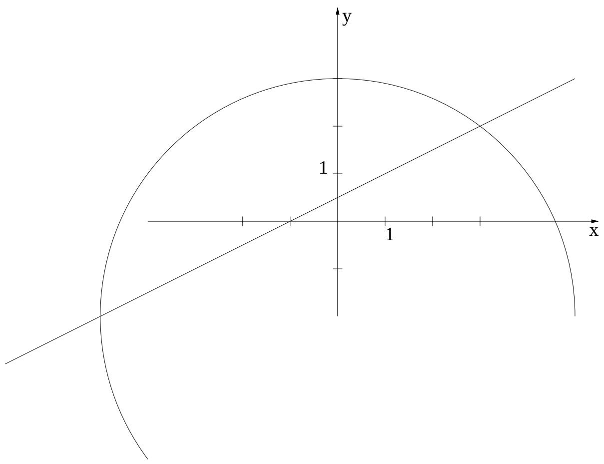


Abbildung 4.11: Schnitt eines Kreises mit einer Geraden

Mathematica kann diese Aufgabe auch für Sie lösen.

Mathematica

```
Solve[{x^2+y^2+4*y-21 == 0 , x-2*y+1 == 0} , {x,y}]
.
{{x -> -5, y -> -2}, {x -> 3, y -> 2}}
```

♢

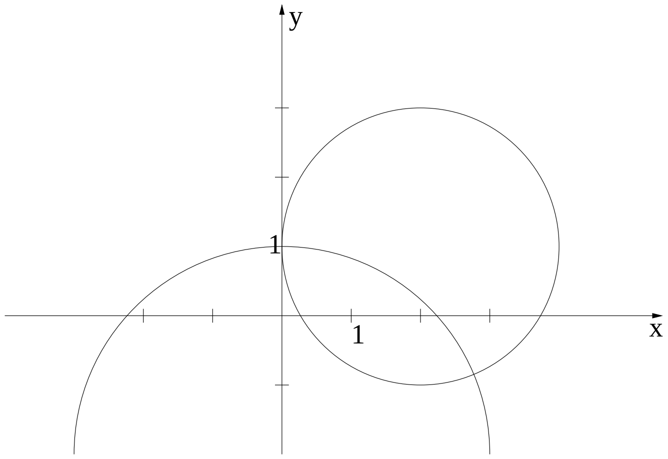


Abbildung 4.12: Schnitt zweier Kreise

4–35 Beispiel : Gegeben sind zwei Kreise mit Mittelpunt $\vec{M}_1 = (2,1)$ und Radius $r_1 = 2$, respektive $\vec{M}_2 = (0,-2)$ und $r_2 = 3$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Kreise.

Lösung: Die beiden Kreisgleichungen müssen aufgelöst werden nach x und y

$$\begin{array}{ccccc} (x-2)^2 & + & (y-1)^2 & = & 2^2 \\ x^2 & + & (y+2)^2 & = & 3^2 \end{array}$$

Durch subtrahieren werden alle quadratischen Terme eliminiert und wir erhalten

$$\begin{array}{ccccc} -4\,x+4 & + & (-6\,y+1-4) & = & 4-9 \\ -4\,x & - & 6\,y & = & -6 \end{array}$$

und somit liegen die beiden Schnittpunkte auf der Geraden $x = -\frac{3}{2}\,y + \frac{3}{2}$. Diese Information kann in der zweiten Kreisgleichung eingesetzt werden und wir erhalten eine quadratische Gleichung für y.

$$\begin{array}{ccccc} (-\frac{3}{2}\,y+\frac{3}{2})^2 & + & (y+2)^2 & = & 3^2 \\ (3\,y-3)^2 & + & 4\,(y+2)^2 & = & 4\cdot 9 \\ 13\,y^2 & -2\,y & -11 & = & 0 \end{array}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$y_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{2^2 + 4\cdot 13\cdot 11}}{26} = \frac{+2 \pm 24}{26} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{-11}{13} \end{array} \right.$$

Mit Hilfe der Geardengleichung können nun auch die x–Werte bestimmt werden und wir finden die beiden Schnittpunkte $(0,1)$ und $(\frac{36}{13}, \frac{-11}{13})$. $\diamondsuit$

4–36 Beispiel : Zeigen Sie, dass alle Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ deren Abstände von zwei gegebenen Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ein festes Verhältnis bilden, auf einem Kreis liegen, dem **Apolloniuskreis**.

Lösung: Die beiden Abstände d_i sind gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} d_1^2 & = & (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) \\ d_2^2 & = & (\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \end{array}$$

Bezeichnen wir das Verhältnis der Abstände mit $\lambda > 0$, so muss also die folgende Gleichung erfüllt sein

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \lambda^2\, d_2^2 \\ (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) &= \lambda^2\,(\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \\ \vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{r}_1\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 &= \lambda^2\,(\vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{r}_2\cdot\vec{x}+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2) \\ (1-\lambda^2)\,\vec{x}\cdot\vec{x}-2\,(\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2)\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 &= 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{x}-2\,\vec{M}\cdot\vec{x}+\vec{M}\cdot\vec{M}-R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also ein Kreis mit den Daten

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{1-\lambda^2}\,\left(\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\right) \\ R^2 &= \vec{M}\cdot\vec{M}-\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2}{1-\lambda^2} \end{aligned}$$

Der Spezialfall $\lambda = 1$ ergibt keinen Kreis, sondern eine Gerade, die **Mittelsenkrechte**. Aus der obigen Rechnung kann man ablesen, dass die Gleichung dieser Geraden gegeben ist durch [1]

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{x}+d=-2\,(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{x}+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 &= 0 \\ (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Somit liegt der Mittelpunkt $\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ der beiden gegebenen Punkte auf der Geraden und die Richtung ist orthogonal zum Verbindungsvektor $\vec{r}_1-\vec{r}_2$. ♢

4–37 Beispiel : Ein Punkt $\vec{r}$ liege auf einem Kreis mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius R. Der Vektor $\vec{v}$ soll ein **Tangentialvektor** an den Kreis im Punkt $\vec{r}$ sein. Somit muss der Verbindungsvektor vom Kreismittelpunkt zum Punkt $\vec{r}$ senkrecht stehen auf $\vec{v}$. Das führt auf die Bedingung

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{r}-\vec{M}\right)=0$$

Ersetzt man den Vektor $\vec{v}$ durch den Verbindungsvektor $\vec{x}-\vec{r}$ eines beliebigen Punktes $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ zu Kreispunkt $\vec{r}$, so erhalten wir die Gleichung der **Tangente** an den Kreis im Punkt $\vec{r}$.

$$(\vec{x}-\vec{r})\cdot\left(\vec{r}-\vec{M}\right)=0$$

♢

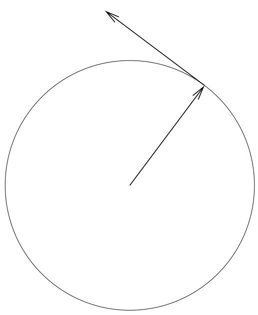


Abbildung 4.13: Tangente an einen Kreise

[1]Verwende $(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1+-\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_2\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1-\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2$.

4–38 Beispiel : Sei ein Richtungsvektor $\vec{n}$ gegeben ($\|\vec{n}\| = 1$) und ein Kreis mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius R bestimmt durch die Gleichung

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Die durch

$$\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{n} = t\,\vec{n}$$

parametrisierte Gerade hat 0, 1 oder zwei Schnittpunkte mit dem Kreis. Liegen zwei Schnittpunkte vor, so sind diese charakterisiert durch die quadratische Gleichung

$$t^2\,\vec{n} \cdot \vec{n} - t\,2\,\vec{M} \cdot \vec{n} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

und die Länge der Abschnitte des Koordinatenursprunges zu den Schnittpunkten ist gegeben durch $|t_1|$ und $|t_2|$ (Dies ist der Grund für die Normierung $\|\vec{n}\| = 1$). Das Produkt der beiden Lösungen t_1 und t_2 der Gleichung

$$t^2 + b\,t + c = 0$$

ist $t_1 \cdot t_2 = c$ (Vieta). Somit gilt in unserem Fall

$$t_1\;t_2 = \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2$$

Diese Grösse ist unabhängig vom Richtungsvektor $\vec{n}$. Dies ist der bekannte **Potenzsatz** aus der Geometrie. Das Produkt der Länge der beiden Abschnitte heisst **Potenz** des Punktes (Ursprung) bezüglich des gegebenen Kreises. Die Potenz ist gleich dem Quadrat des Tangentialabschnittes.

Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises ausserhalb des Kreises, so ist das Produkt des Längen der Abschnitte vom Schnittpunkt der Sekanten zu den Schnittpunkten mit dem Kreis unabhängig von der Sekante.

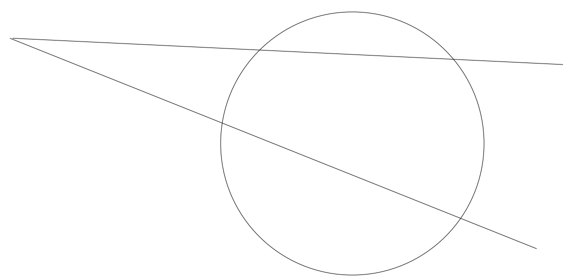


Abbildung 4.14: Potenzsatz

♢

4.6 Vektoren im Raum

Vektoren können auch als Objekte im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachtet werden. Viele der Ideen übertragen sich problemlos von der Ebene in dem Raum.

4.6.1 Kartesische Koordinaten

Im Raum legen wir den Ursprung 0 fest und zeichnen zugleich drei spezielle Richtungen $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ und $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, wobei wir verlangen, dass $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ und die drei Richtungen sollen senkrecht zueinander sein. Die drei Vektoren müssen der **Rechten–Hand–Regel** genügen, d.h. die drei Vektoren sind so orientiert, dass (ohne Finger zu brechen) die folgende Identifikation möglich ist.

$\vec{e}_x$	entspricht dem Daumen der rechten Hand
$\vec{e}_y$	entspricht dem Zeigefinger der rechten Hand
$\vec{e}_z$	entspricht dem Mittelfinger der rechten Hand

Man sagt auch

Die Vektoren $\vec{e}_x\ ,\ \vec{e}_y\ ,\ \vec{e}_z$ bilden ein **Rechtssystem**

Sehen Sie sich dazu Abbildung 4.15 an. Die Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ heissen auch hier **Koordinateneinheitsvektoren**.

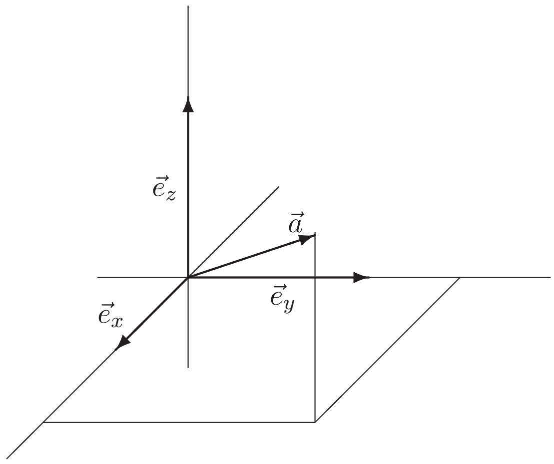


Abbildung 4.15: Kartesische Koordinaten in $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir nun einen „beliebigen“ Vektor $\vec{a}$ in diesem Raum. In unserem Beispiel in Abbildung 4.15 ist

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_x + 1.5\,\vec{e}_y + 1\,\vec{e}_z \qquad .$$

Ist umgekehrt die obige Formel gegeben, so lässt sich $\vec{a}$ leicht konstruieren. Wir können somit $\vec{a}$ mit dem Zahlentripel $(2\,,\ 1.5\,,\ 1)$ in Beziehung setzen.

Aus der Abbildung 4.15 sollte klar sein, dass jeder Vektor $\vec{a}$ in diesem Raum dargestellt werden kann in der Form

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3}$$

Die Zahlen a_i heissen **Koordinaten** des Vektors $\vec{a}$ und $a_i\,\vec{e}_i$ sind die **Komponenten** des Vektors. Diese Darstellung von Vektoren in einem Raum durch Zahlentripel heisst **kartesische Koordinatendarstellung**.

Für die Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ gilt

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.6.2 Operationen mit Vektoren

Wir betrachten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir die grundlegenden Operationen mit Vektoren ausführen. Es ist wichtig sich diese Rechenregeln auch graphisch zu veranschaulichen und den Bezug zu den geometrischen Definitionen herzustellen.

4–39 Satz :

- *Addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

- *Multiplikation mit skalarer Grösse*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \\ \lambda\,a_3 \end{pmatrix}$$

- *Länge eines Vektors*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Alle im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Rechenregeln für Vektoren sind mit den obigen Formeln gültig. Überprüfen Sie das an einigen Beispielen.

4.6.3 Das Skalarprodukt

Genau wie in der Ebene ist das Skalarprodukt charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{falls} \quad \|\vec{a}\| \neq 0 \quad \text{und} \quad \|\vec{b}\| \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{oder} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

Man verwendet die Notationen

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle \vec{a},\vec{b}\rangle$$

Für die speziellen Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ erhält man

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1 \quad \text{und} \quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0$$

Für allgemeine Vektoren gilt

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{e}_x &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \\
\vec{a}\cdot\vec{e}_y &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2 \\
\vec{a}\cdot\vec{e}_z &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3
\end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

4–40 Theorem :

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} & \textit{Kommutativgesetz} \\
(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \textit{für} \quad \lambda\in\mathbb{R} \\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} & \textit{Distributivgesetz} \\
\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\ \textit{senkrecht zu}\ \vec{b} & \textit{Orthogonalitätsgesetz} \\
\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} &
\end{array}$$

Mittels des obigen Resultates lässt sich das Folgende auch hier leicht verifizieren.

4–41 Theorem :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \\
\|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\
\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} \quad \textit{falls}\ \|\vec{a}\| \neq 0\ \textit{und}\ \|\vec{b}\| \neq 0
\end{aligned}$$

4.6.4 Das Vektorprodukt

Das **Skalar**produkt von zwei Vektoren ergibt eine **skalare** Grösse als Resultat. Das **Vektor**produkt von zwei Vektoren ergibt hingegen einen **Vektor** als Resultat mit den folgenden Eigenschaften.

4–42 Definition :
Für zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ charakterisiert durch

(1) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \ \|\vec{b}\| \ \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$

(2) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht auf $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein **Rechtssystem**

Hierbei ist der Winkel zwischen 0 und π zu wählen.

4–43 Beispiel : Für die Koordinateneinheitsvektoren gelten die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x \\
\vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y \\
\vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z
\end{aligned}$$

♢

4–44 Satz : *Für zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \ \|\vec{b}\| \ \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Fläche des aufgespannten Parallelogramms}$$

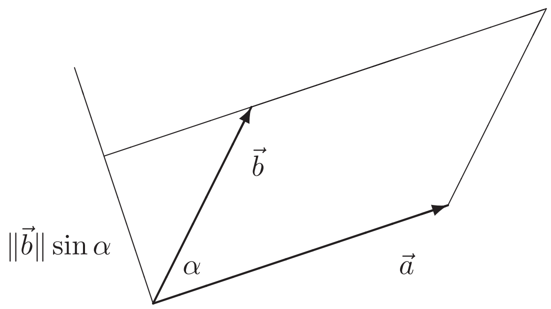


Abbildung 4.16: Vektorprodukt und Parallelogramme

Beweis : In Abbildung 4.16 kann man ablesen, dass die Höhe des Parallelogramms gegeben ist durch $h = \|\vec{b}\| \sin\alpha$ und somit die Fläche als Produkt von Breite mal Höhe durch

$$\|\vec{a}\| \ \|\vec{b}\| \ \sin\alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

□

4–45 Satz : *Aus der Definition des Vektorproduktes kann man ablesen, dass für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln gelten*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ *und* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\, \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *oder* $\vec{b} = \vec{0}$ *oder* $\vec{a}$ *ist parallel zu* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(Distributivgesetz)*

Beweis : Die Beweise von a), b) und c) folgen direkt aus der geometrischen Definition. Den Punkt d) untersuchen wir zuerst im Spezialfall $\vec{a} = \vec{e}_z$. In diesem Fall hat die dritte Komponente von $\vec{b}$ keinen Einfluss auf die Fläche des von $\vec{e}_z$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Dann nutzen wir aus, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht steht auf $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dieselbe Länge hat. Beide stehen senkrecht auf $\vec{e}_z$. Also gilt

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog gilt

$$\vec{e}_z \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_z \times \vec{b} + \vec{e}_z \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Behauptung d) im Spezialfall $\vec{a} = \vec{e}_z$ richtig. Hat $\vec{a}$ nun nicht Länge 1, so können alle obigen Gleichungen mit dem Faktor $\|\vec{a}\|$ multipliziert werden und wir erhalten das Resultat. Da die geometrische Definition des Vektorproduktes nicht von der Orientierung der Koordinateneinheitsvektoren abhängt wählen wir für diesen Beweis das Koordinatensystem so, dass $\vec{a}$ in die z–Richtung zeigt. Damit sind die obigen Überlegungen anwendebar und wir haben das gewünschte Resultat. □

4–46 Satz : *In kartesischen Koordinaten gilt*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$$

4–47 Bemerkung : Ist man mit der Notation einer **Determinante** vertraut, so kann für das Vektorprodukt auch die folgenden Merkregel verwendet werden.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

♢

Beweis : Dazu betrachten wir zuerst einen Ausdruck der Form

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \vec{e}_x \times (b_1\,\vec{e}_x + b_2\,\vec{e}_y + b_3\,\vec{e}_z) \\
&= b_1\,\vec{e}_x \times \vec{e}_x + b_2\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y + b_3\,\vec{e}_x \times \vec{e}_z = b_1\,\vec{0} + b_2\,\vec{e}_z - b_3\,\vec{e}_y \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung kann auch für die Vektoren $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ durchgeführt werden. Anschliessend verifiziert man

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1\,\vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_2\,\vec{e}_y \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_3\,\vec{e}_z \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

4–48 Beispiel : (Bestimmen einer Dreiecksfläche)
Die drei Ecken eines Dreiecks sind gegeben durch die Vektoren $\vec{P}$, $\vec{Q}$ und $\vec{R}$. Dann können die drei Seiten beschrieben werden durch die Differenzenvektoren

$$\vec{a} = \vec{Q} - \vec{P} \quad , \quad \vec{b} = \vec{R} - \vec{Q} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \vec{P} - \vec{R}$$

Da die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gegeben ist durch $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ gilt

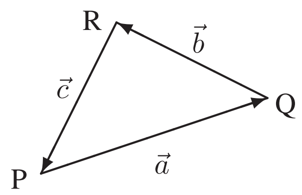


Abbildung 4.17: Fläche eines Dreiecks

$$\text{Dreicksfläche} \quad = \frac{1}{2}\,\|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

Beachten Sie, dass diese Formel auch für Dreiecke im Raum gültig ist. Ebenso könnten natürlich die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eingesetzt werden und man erhält

$$\text{Dreicksfläche} \quad = \frac{1}{2}\,\|\vec{b}\times\vec{c}\|$$

Die beiden Formeln müssen selbstverständlich dasselbe Ergebniss liefern. Um das einzusehen verwenden wir

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &= \vec{0}\\
\vec{c} &= -\vec{a}-\vec{b}\\
\vec{b}\times\vec{c} &= \vec{b}\times\left(-\vec{a}-\vec{b}\right) = -\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}\\
&= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}
\end{aligned}$$

♢

4–49 Beispiel : Zwei Vektoren sind genau dann parallel, wenn ihr Vektorprodukt $\vec{0}$ ist. Dies kann verwendet werden um zu untersuchen ob drei Punkte auf einer Geraden liegen. Untersuchen Sie die Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} -3\\ -3\\ 4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Nun untersuchen wir die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{Q}-\vec{P} = \begin{pmatrix} -4\\ -2\\ 2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \vec{R}-\vec{P} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

auf Parallelität. Dazu berechnen wir

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -4\\ -2\\ 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1) - & 2\cdot 1\\ 2\cdot 2 & -(-4)\cdot(-1)\\ (-4)\cdot 1 & - \quad (-2)\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Folglich sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel und somit die drei Punkte auf einer Geraden. ♢

4.6.5 Spatpodukt

Zu untersuchen ist das von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Parallelepiped in Abbildung 4.18. Die Grundfläche A ist gegeben durch

$$A = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

und die Höhe h durch die Komponente von $\vec{c}$ in Richtung von $\vec{a}\times\vec{b}$. Dazu muss der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ normiert werden. Dann kann h mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet werden durch

$$h = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\cdot\vec{c}$$

Somit ist das Volumen V gegeben durch das Produkt von Grundfläche und Höhe durch

$$V = A\cdot h = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\,\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

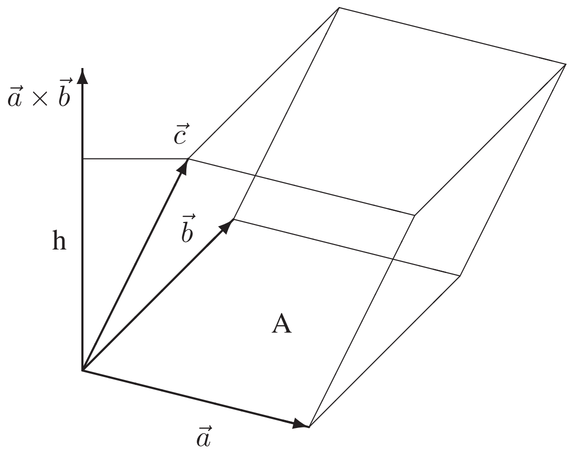


Abbildung 4.18: Spatprodukt

Diese Formel liefert das **orientierte Volumen** des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. Ist $V>0$, so bilden die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem. Ist $V<0$, so bilden sie ein Linkssystem. Man verwendet auch die Notation

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Da das Volumen des Spates nicht von der Reihenfolge der Vektoren abhängt gilt

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$$

4–50 Satz : *Ist man mit der Notation einer **Determinante** vertraut, so kann für das Spatprodukt auch die folgenden Merkregel verwendet werden.*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\quad=\det\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$$

4–51 Beispiel : Mit Hilfe des Spatproduktes kann man untersuchen ob vier Punkte im Raum in einer Ebene liegen. Als Beispiel betrachten wir die vier Punkte

$$(5,2,1)\quad,\quad(-6,3,-2)\quad,\quad(2,5,2)\quad\text{und}\quad(0,0,-2)$$

Wir wählen den ersten Punkt als Referenzpunkt und bilden die drei Differenzenvektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-11\\1\\-3\end{pmatrix}\quad,\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

Die vier Punkte liegen genau dann in einer Ebene, wenn das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Volumen V Null ist. Um dieses zu berechnen verwenden wir das Spatprodukt und berechnen

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-11\\1\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1\quad-\;(-3)\cdot3\\(-3)\cdot(-3)-(-11)\cdot1\\(-11)\cdot3\;-\;1\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\-30\end{pmatrix}$$

und somit

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -50 - 40 + 90 = 0$$

Somit liegen die vier Punkte in einer Ebene. Mit Hilfe einer Determinantenrechnung erhält man dasselbe Ergebnis durch

$$\det \begin{bmatrix} -11 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \ldots = 0$$

Mit Hilfe von *Mathematica* können die obigen Rechnungen ausgeführt werden.

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={-11,1,-3}
b={-3,3,1}
c={-5,-2,-3}
Cross[a,b]
Cross[a,b].c
```

◇

4–52 Satz : *Das Volumen eines Tetraeders mit Ecken in den Punkten $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist gleich einem Sechstel des Volumens des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates. Also gilt für die orientierten Volumen*

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{1}{6}\, \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \frac{1}{6}\, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

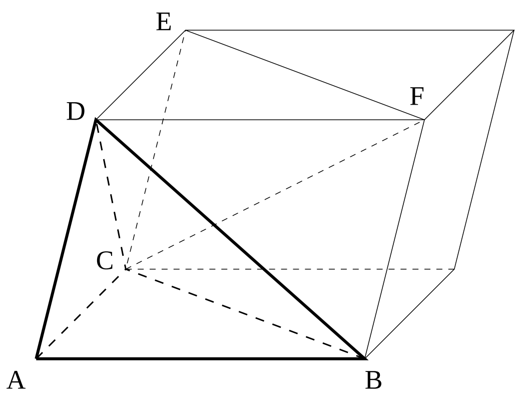


Abbildung 4.19: Volumen eines Tetraeders

Beweis : Um diese Beziehung einzusehen kann man die Abbildung 4.19 untersuchen. Im halben Parallelepiped mit Ecken ABCDEF können drei Pyramiden untergebracht werden. Die beiden Pyramiden ABCD und DFEC haben dasselbe Volumen. Ebenso sind die Pyramiden ABCD und BCDF volumengleich. Zu erkennen sind jeweils eine gleiche Grundfläche und Höhe. □

4–53 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir ein Tetraeder mit Ecken bei $\vec{0}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann man das Spatprodukt bestimmen mit Hilfe von

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 24 = 48$$

Die unübliche Reihenfolge der Vektoren wirkt sich höchstens auf das Vorzeichen des Resultates aus, vereinfacht aber die Rechnungen. Somit haben wir in diesem Beispiel

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{48}{6} = 8$$

♢

4.7 Ebenengleichungen

4.7.1 Allgemeine Form einer Ebenengleichung

Die allgemeine Form einer Ebenengleichung für eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

wobei a, b, c und d reelle Konstanten sind. Die Ebene E besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, welche die obige Gleichung erfüllen. Entlang der x-Achse ist $y = z = 0$ und somit ist der Schnittpunkt der Ebene mit der x–Achse bestimmt durch die Gleichung $a\,x + d = 0$. Das führt auf

$$\begin{aligned} x &= -\frac{d}{a} && \text{Achsenabschnitt auf der } x\text{–Achse} \\ y &= -\frac{d}{b} && \text{Achsenabschnitt auf der } y\text{–Achse} \\ z &= -\frac{d}{c} && \text{Achsenabschnitt auf der } z\text{–Achse} \end{aligned}$$

Taucht in der Ebenengleichung kein y auf ($b = 0$), so ist der Wert von y irrelevant für den Test ob die Gleichung erfüllt ist oder nicht. Deshalb ergibt sich eine Ebene E die parallel ist zur y–Achse und typischerweise keinen Schnittpunkt hat mit der y–Achse.

Es ist zu beachten, dass die obige Ebenengleichung nicht eindeutig bestimmt ist durch die Ebene E, d.h. dieselbe Ebene kann verschiedene Gleichungen haben. So ergeben die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 1.5\,x - 2\,y + 4\,z + 7 &= 0 \\ -3\,x + 4\,y - 8\,z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

dieselbe Ebene (Lösungsmenge der Gleichung). Eine Ebenengleichung kann mit einer von Null verschiedenen Konstante multipliziert werden, ohne die Ebene zu ändern. Damit ist klar das in einer Ebenengleichung trotz der vier Konstanten a, b, c und d nur drei „echte" Bedingungen gestellt werden können. Eine Ebene ist typischerweise bestimmt durch drei Punkte.

4–54 Beispiel : Zu bestimmen ist die Ebene durch die drei Punkte

$$(1/2/-3) \quad , \quad (0/-4/0) \quad \text{und} \quad (3/-1/3)$$

Es muss möglich sein die Werte der Konstanten in der Ebenengleichung zu bestimmen. ♢

Lösung : Da die Gleichung von der Form

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

ist setzen wir die Werte der gegebenen Punkte ein und erhalten ein System von drei linearen Gleichungen für vier Unbekannte[2]

$$\begin{array}{rrrrcl} a\,1 & +b\,2 & -c\,3 & +d & = & 0 \\ a\,0 & -b\,4 & -c\,0 & +d & = & 0 \\ a\,3 & -b\,1 & +c\,3 & +d & = & 0 \end{array}$$

Da zu viele Unbekannte vorhanden sind „wählen" wir $d = 4$. Dadurch wird die zweite Gleichung leicht ganzahlig lösbar und wir haben nun das System

$$\begin{array}{rrrl} a & +2\,b & -3\,c = & -4 \\ & -4\,b & = & -4 \\ 3\,a & -1\,b & +3\,c = & -4 \end{array}$$

Wegen der zweiten Gleichung erhalten wir $b = 1$ und somit das neue System

$$\begin{array}{rl} a & -3\,c = -6 \\ 3\,a & +3\,c = -3 \end{array}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert $a = -9/4$ und somit auch $3\,c = a + 6 = 15/4$. Damit haben wir die Gleichung

$$\frac{-9}{4}\,x + y + \frac{5}{4}\,z + 4 = 0$$

Um nur mit ganzen Zahlen rechnen zu müssen könnte man noch mit 4 multiplizieren

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Damit kann man die Achsenabschnitte leicht ausrechnen

$$\begin{array}{ll} x = +\dfrac{16}{9} & \text{Achsenabschnitt auf der } x\text{–Achse} \\ y = -\dfrac{16}{4} & \text{Achsenabschnitt auf der } y\text{–Achse} \\ z = -\dfrac{16}{5} & \text{Achsenabschnitt auf der } z\text{–Achse} \end{array}$$

□

[2] Wir werden etwas später systematische Verfahrnen kennen lernen um Gleichungen von diesem Typ zu lösen

4–55 Definition : Die **Spur** einer allgemeinen Ebene

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

in der xy–Ebene ist die Schnittgerade der beiden Ebene. Sie ist charakterisiert durch die Bedingung $z = 0$ (xy–Ebene) und die obige Ebenengleichung. Also ergibt sich die Gleichung

$$a\,x + b\,y + d = 0$$

in der xy–Ebene.

4–56 Beispiel : Die Gleichungen der drei möglichen Spurgeraden der Ebene

$$7\,x - 3\,y + \pi\,z - 99 = 0$$

sind gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \text{in } xy\text{–Ebene:} & +7\,x - 3\,y - 99 = 0 \\ \text{in } xz\text{–Ebene:} & +7\,x + \pi\,z - 99 = 0 \\ \text{in } yz\text{–Ebene:} & -3\,y + \pi\,z - 99 = 0 \end{array}$$

♢

4.7.2 Parameterform einer Ebenengleichung

Eine Ebene kann auch beschrieben werden durch einen Punkt $\vec{p}$ auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann sind alle Punkte auf der Ebene E von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

oder kürzer

$$\vec{x} = \vec{p} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Durchlaufen die **Parameter** u und v je alle reellen Zahlen, so wird die ganze Ebene überstrichen. Abbildung 4.20 illustriert diese Situation.

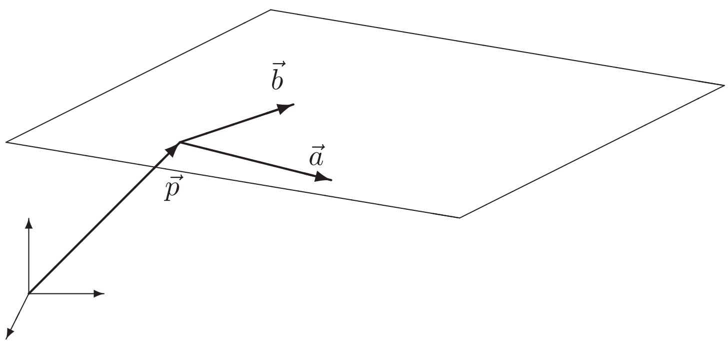


Abbildung 4.20: Parametrisierung einer Ebene

4–57 Beispiel : Liegt der Ursprung (0/0/0) in der Ebene und sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

parallel zu Ebene E, so ist eine mögliche Parameterform der Ebenengleichung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} x &= +3\,u - 5\,v \\ y &= -6\,u - 4\,v \\ z &= -10\,u - 2\,v \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen könnte man mit Hilfe zweier Gleichungen die Parameter u und v eliminieren um die Gleichung auf Standardform zu bringen. Subtrahiert man man das doppelte der dritten Gleichung von der zweiten so ergibt sich

$$y - 2\,z = 14\,u + 0\,v \quad \text{und somit} \quad u = \frac{y - 2\,z}{14}$$

Addiert man man das doppelte der ersten Gleichung zur zweiten so ergibt sich

$$2\,x + y = 0\,u - 14\,v \quad \text{und somit} \quad v = \frac{-2\,x - y - 2}{14}$$

Diese beiden Formeln für u und v kann man nun in der ersten Gleichung einsetzen um eine mögliche Standardform der Ebenengleichung zu erhalten

$$14\,x = 3\;(y - 2\,z) - 5\;(-2\,x - y) = 10\,x + 8\,y - 6\,z$$

und somit

$$4\,x - 8\,y + 6\,z = 0$$

oder auch

$$2\,x - 4\,y + 3\,z = 0$$

$\diamondsuit$

4.7.3 Normalenvektoren

Eine Ebene E kann auch gegeben werden durch einen Punkt $\vec{p}$ in der Ebene und einen Normalenvektor $\vec{n} \neq \vec{0}$. Der Punkt $\vec{x} = \vec{p} + \vec{a}$ liegt in der Ebene, falls $\vec{a}$ senkrecht steht auf $\vec{n}$. Diese Situation ist in Abbilding 4.21 illustriert. Das führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{p}) &\perp \vec{n} \\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

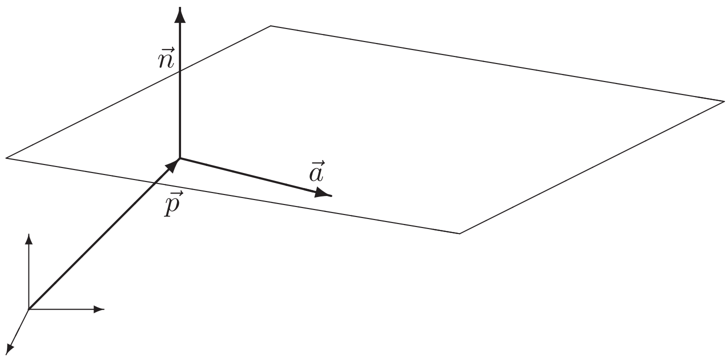


Abbildung 4.21: Eine Ebene, gegeben durch einen Punkt und den Normalenvektor

4–58 Beispiel : Zu bestimmen ist die Ebene durch den Punkt $\vec{p}$, senkrecht auf den Vektor $\vec{n}$, wobei

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Es ist die obige Bedingung einzusetzen und die Skalarprodukte sind auszurechnen. Das führt nach kurzer Rechnung auf eine Ebenengleichung in allgemeiner Form.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -x + 3\,y + 2\,z &= 2 + 21 + 0 = 23 \end{aligned}$$

♢

Am obigen Beispiel kann man leicht einsehen, dass die Koeffizienten a, b und c in der allgemeinen Ebenengleichung

$$a\,x + b\,y + c\,z = -d$$

genau dem Normalenvektor $\vec{n}$ entsprechen und somit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\,d = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

4–59 Beispiel : Ist eine Ebene gegeben durch einen Punkt $\vec{p}$ in der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, parallel zur Ebene, so kann ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}$ mit Hilfe des Vektorproduktes von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt werden. Siehe dazu Abbildung 4.22.

Liegt der Punkt $(3/2/1)$ in der Ebene und sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

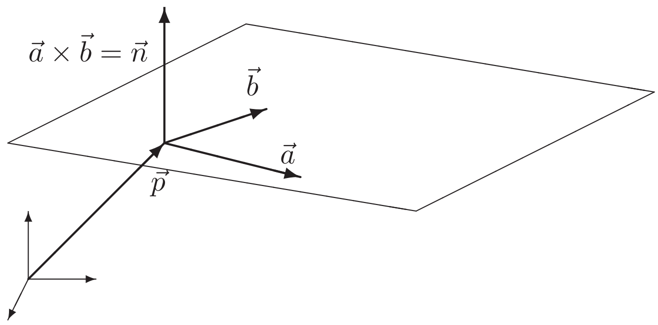


Abbildung 4.22: Eine Ebene, gegeben durch einen Punkt und zwei Richtungsvektoren

parallel zu Ebene E, so ist ein möglicher Normalenvektor gegeben durch

$$\vec n = \vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da (im Moment) nur die Richtung des Normalenvektors relevant ist nehmen wir die etwas einfacheren Zahlen $\vec n = (-2\,,\,4\,,\,-3)^T$ und erhalten die Ebenengleichung

$$\begin{aligned} \vec n \cdot \vec x &= \vec n \cdot \vec p \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -2\,x + 4\,y - 3\,z &= -6 + 8 - 3 = -1 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4–60 Beispiel : Zu bestimmen ist die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte

$$(1/2/-3) \quad , \quad (0/-4/0) \quad \text{und} \quad (3/-1/3)$$

Das selbe Beispiel wurde bereits mit einem anderen Verfahren behandelt, siehe Seite 131.

Lösung: Wir wählen (willkürlich) der ersten Punkt als festen Punkt in der Ebene und bestimmen zwei Richtungsvektoren als Differenzenvektoren

$$\vec a = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun erzeugt das Vektorprodukt einen Normalenvektor

$$\vec n = \vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und somit die Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$-27\,x + 12\,y + 15\,z = -48$$

Mit einer Division durch 3 wird daraus

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Dies stimmt mit dem Resultat des Beispiels auf Seite 131 überein. ♢

4.7.4 Hessesche Normalenform, Abstand Punkt–Ebene

Für einen Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene ist nur die Richtung relevant, die Länge kann variiert werden. Eine gute Wahl ist die **Normierung** der Normalenvektors zu einem **Einheitsnormalenvektor**, d.h.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$$

Da $\vec{n}$ die Länge 1 hat entspricht $\vec{p} \cdot \vec{n} = -d$ der Komponente von $\vec{p}$ in Richtung $\vec{n}$ (siehe Abbildung 4.23). Diese Grösse entspricht dem orientierten Abstand des Ursprungs von der Ebene.

$$n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z + d = 0$$

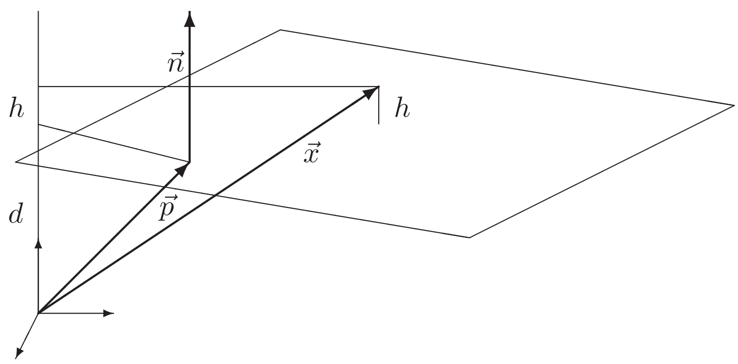


Abbildung 4.23: Hesse'sche Normalenform einer Ebene

Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ergibt $\vec{x} \cdot \vec{n}$ die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung von $\vec{n}$ und somit ist

$$h = \vec{x} \cdot \vec{n} - d = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}$$

der **orientierte Abstand** des Punktes $\vec{x}$ von der Ebene. Der geometrische Abstand ist gegeben durch den Betrag des orientierten Abstands. Das Vorzeichen zeigt an, auf welcher Seite der Ebene der Punkt liegt. Hat der orientierte Abstand für zwei Punkte das selbe Vorzeichen, so liegen die beiden Punkte auf der selben Seite, sonst auf verschiedenen Seiten.

Der Vektor

$$\vec{x}_p = \vec{x} - h\,\vec{n} = \vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}$$

ergibt die **orthogonale Projektion** des Punktes $\vec{x}$ auf die Ebene. Um dies zu überprüfen müssen zwei Punkte getestet werden:

1. $\vec{x}_p$ liegt in der Ebene:
   Dazu berechnen wir den Abstand des Punktes von der Ebene durch

$$\begin{aligned}\text{Abstand} \quad &= \vec{x}_p\cdot\vec{n} - d = \vec{x}\cdot\vec{n} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}\cdot n - d \\ &= \vec{x}\cdot\vec{n} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ 1 - d = 0\end{aligned}$$

2. $\vec{x} - \vec{x}_p$ steht senkrecht auf der Ebene:
   Wegen

$$\vec{x} - \vec{x}_p = \vec{x} - (\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}) = (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}$$

   ist der Vektor ein Vielfaches des Normalenvektors $\vec{n}$ und somit senkrecht auf der Ebene.

4.8 Kugelgleichungen

Die Kugel im Raum $\mathbb{R}^3$ entspricht einem Kreis in $\mathbb{R}^2$. Somit sollte es keine Überraschung sein, dass die Ideen, Rechnungen und Resultate sehr ähnlich sind.

4–61 Definition : Eine Kugel mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius R besteht aus allen Punkten $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ für die gilt

$$\left\|\vec{x} - \vec{M}\right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M}\right)\cdot\left(\vec{x} - \vec{M}\right) = R^2$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die „quadratische Gleichung“ für den Vektor $\vec{x}$.

$$\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{M}\cdot\vec{x} + \vec{M}\cdot\vec{M} - R^2 = 0$$

Bezeichnen wir die Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ mit $\vec{M} = (u, v, w)$ so entspricht dies der Gleichung

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$$

4–62 Beispiel : Ein Punkt $\vec{r}$ liege auf einer Kugel mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius R. Der Vektor $\vec{v}$ soll ein **Tangentialvektor** an die Kugel im Punkt $\vec{r}$ sein. Somit muss der Verbindungsvektor vom Kugelmittelpunkt zum Punkt $\vec{r}$ senkrecht stehen auf $\vec{v}$. Das führt auf die Bedingung

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{r} - \vec{M}\right) = 0$$

Ersetzt man den Vektor $\vec{v}$ durch den Verbindungsvektor $\vec{x} - \vec{r}$ eines beliebigen Punktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ zum Kugelpunkt $\vec{r}$, so erhalten wir die Gleichung der **Tangentialebene** an die Kugel im Punkt $\vec{r}$.

$$(\vec{x} - \vec{r})\cdot(\vec{r} - \vec{M}) = 0$$

♢

4–63 Beispiel : Der Punkt $(3/2/1)$ liegt auf einer Kugel mit Mittelpunkt $(5/1/3)$ und Radius 3. Zu bestimmen sind

(a) die Kugelgleichung

(b) die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel im gegebenen Punkt

(c) Die Spur der Tangentialebene in der yz–Ebene, d.h. $x = 0$

Lösung: Die Kugelgleichung ist in diesem Beispiel gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 3^2$$

Setzt man $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ so sieht man, dass wegen

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 2^2 + 1 + 2^2 = 3^2$$

der Punkt (3/2/1) tatsächlich auf der Kugel liegt. Der Verbindungsvektor $\vec{r}$ vom Kugelmittelpunkt zum Kontaktpunkt von Kugel und Tangentialebene ist hier

$$\vec{r} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und somit ist die Gleichung der Tangentialebene

$$\begin{aligned}
(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) &= 0 \\
\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\
-2\,x + 6 + y - 2 - 2\,z + 2 &= 0 \\
-2\,x + y - 2\,z &= -6
\end{aligned}$$

Setzt man $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ so sieht man, dass wegen

$$-2 \cdot 3 + 2 - 2 = -6$$

der Kontaktpunkt tatsächlich auch auf der Ebene liegt Somit ist die Gleichung der Spurgeraden in der yz–Ebene $(x = 0)$.

$$y - 2\,z = -6$$

Mit Hilfe von *Mathematica* kann die Abbildung 4.24 erzeugt werden. Im Code werden zuerst die Plot der Habkugel und der Tangentialebene erzeugt, anschliessend werden die beiden Graphiken mittels des Befehls `Show[]` in einer Graphik angezeigt.

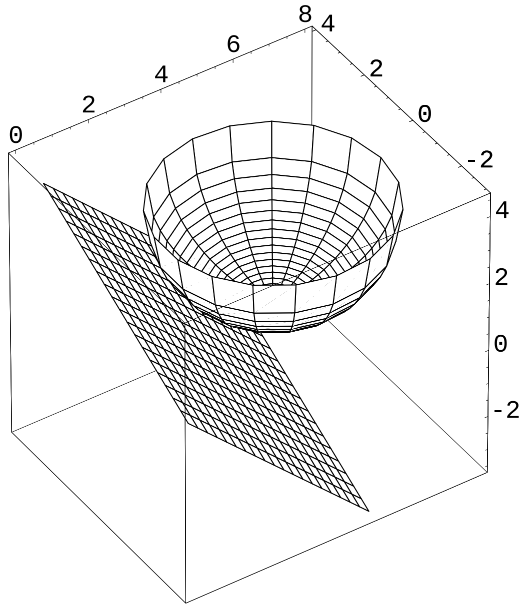


Abbildung 4.24: Halbkugel und Tangentialebene

Mathematica
```
Kugel[r_,phi_] := {5 + r Cos[phi] , 1+ r Sin[phi] ,3 -  Sqrt[9-r^2]}
KugelPlot=ParametricPlot3D[Kugel[r,phi],{r,0,3},{phi,0,2Pi}]
```

Mathematica
```
Ebene[x_,y_] := {x,y,(6-2x+y)/2}
EbenenPlot=ParametricPlot3D[Ebene[x,y],{x,0,5},{y,-3,3}]
```

Mathematica
```
Show[EbenenPlot,KugelPlot,ViewPoint -> {-20,-30,30}]
```

♢

4–64 Beispiel : Sei ein Richtungsvektor $\vec{n}$ gegeben ($\|\vec{n}\| = 1$) und eine Kugel mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius R bestimmt durch die Gleichung

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Die durch

$$\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{n}$$

parametrisierte Gerade hat 0, 1 oder zwei Schnittpunkte mit der Kugel. Liegen zwei Schnittpunkte vor, so sind diese charakterisiert durch die quadratische Gleichung

$$t^2\;\vec{n} \cdot \vec{n} - t\;2\,\vec{M} \cdot \vec{n} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

und die Länge der Abschnitte des Koordinatenursprunges zu den Schnittpunkten ist gegeben durch $|t_1|$ und $|t_2|$. Dies ist der Grund für die Normierung $\|\vec{n}\| = 1$. Das Produkt der beiden Lösungen t_1 und t_2 der Gleichung

$$t^2 + b\,t + c = 0$$

ist $t_1\, t_2 = c$ (Vieta). Somit gilt in unserem Fall

$$t_1\ t_2 = \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2$$

Diese Grösse ist unabhängig vom Richtungsvektor $\vec{n}$.

Diese Rechnung zeigt, dass der **Potenzsatz** aus der Geometrie auf für Schnittpunkte mit einer Kugel im Raum richtig ist. $\diamondsuit$

4.9 Aufgaben

4.9.1 Vektoroperationen

• **Aufgabe 4–1:**
Zeichnen Sie die Gerade
$$3x - 2y + 6 = 0$$
in einem kartesischen Koordinatensystem ein. Finden Sie insbesondere die beiden Achsenabschnitte.

• **Aufgabe 4–2:**
Zeichnen Sie die Gerade
$$8x - y - 12 = 0$$
in einem kartesischen Koordinatensystem ein. Untersuchen Sie ob die Gerade durch die Punkte $P_1 = (1.5, 0)$, $P_2 = (4, 4)$ und $P_3 = (3, 2)$ geht.

• **Aufgabe 4–3:**
Stelle die Lösungsmenge des Ungleichungssystems graphisch dar.
$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 6 & \geq & 0 \\ 3x - 2y - 9 & \leq & 0 \\ x + y - 2 & \geq & 0 \\ x & \leq & 5 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

• **Aufgabe 4–4:**
Stelle die Lösungsmenge des Ungleichungssystems graphisch dar.
$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 4 & \geq & 0 \\ x + y - 2 & \geq & 0 \\ x + 2y - 10 & \leq & 0 \\ 3x - y - 9 & \leq & 0 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

• **Aufgabe 4–5:**
Beweisen Sie die Formel
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 .$$
Tipp: geometrische Definition des Skalar- und Vektorproduktes verwenden.

4.9.2 Geraden und Ebenen

• **Aufgabe 4–6:**
Eine Gerade geht durch die beiden Punkte $(1.5\,,\,-2)$ und $(2\,,\,3)$. Finde die Geradengleichung in Standardform und die beiden Achsenabschnitte.

• **Aufgabe 4–7:**
Untersuchen Sie das untenstehende System von Ungleichungen in der xy–Ebene.

(a) Schreiben Sie alle beteiligten Geraden 1, 2 und 3 in der Standardform.

(b) Stellen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems graphisch dar.

(c) Finden Sie die Koordinaten des Punktes in der obigen Lösungsmenge mit dem grössten y–Wert.

1 :	$3\,y + x \leq 9$
2 :	unterhalb der Geraden durch den Punkt $(1,0)$ und mit Steigung 2
3 :	oberhalb der Geraden durch die beiden Punkte $(2,1)$ und $(8,4)$

• Aufgabe 4–8:
Untersuchen Sie das untenstehende System von Ungleichungen in der xy–Ebene.

(a) Schreiben Sie alle beteiligten Geraden 1, 2 und 3 in der Standardform.

(b) Stellen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems graphisch dar.

(c) Finden Sie die Koordinaten des Punktes in der obigen Lösungsmenge mit dem grössten x–Wert.

1 :	$y + \frac{x}{2} \leq 4$
2 :	unterhalb der Geraden durch den Punkt $(1,4)$ und mit Steigung 3
3 :	oberhalb der Geraden durch die beiden Punkte $(3,1)$ und $(7,3)$
4 :	$x > 0$ und $y > 0$

• Aufgabe 4–9:
Die Geradengleichung $8x - 6y + 25 = 0$ ist in die Hessesche Normalenform überzuführen.

• Aufgabe 4–10:
Welchen Abstand haben die beiden Punkte $\vec{P} = (1,3)$ und $\vec{Q} = (5,2)$ von der Geraden $5x - 12y + 1 = 0$?

• Aufgabe 4–11:
Finde die Standardform der Gleichung einer Geraden die den Abstand 2 vom Ursprung hat und senkrecht steht zum Vektor $\vec{n} = (1, -2)$.

• Aufgabe 4–12:
Finde die Standardform der Gleichung einer Geraden die den Abstand 4 vom Ursprung hat und durch den Punkt $\vec{P} = (4, -2)$ geht.

• Aufgabe 4–13:
Zwei Geraden sind gegeben durch die Zahlen m_1, m_2, a_1, a_2 und die Gleichungen

$$y = m_1\,x + a_1 \quad \text{und} \quad y = m_2\,x + a_2$$

Finde eine Bedingung an m_1 und m_2, sodass die beiden Geraden senkrecht zueinander stehen.
Tip: $\tan\alpha_1 = m_1$, $\tan\alpha_2 = m_2$ und $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$.

• Aufgabe 4–14:
Zwei zueinander senkrecht stehende Geraden schneiden sich im Punkt $(-2, 1.5)$ und der x–Achsenabschnitt der ersten Gerade ist 2. Finde die Gleichung der zweiten Geraden in Standardform.

• Aufgabe 4–15:
Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden

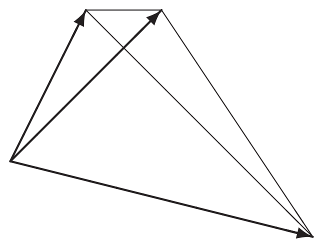
$$\begin{aligned} 2x - y - 3 &= 0 \\ x - 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

• Aufgabe 4–16:
Alle Rechnungen müssen **exakt** ausgeführt werden. Arbeiten Sie mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ -2\,\pi \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} \quad , \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{b}\times\vec{c}$$



(b) Finden Sie eine Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(2/2/0)$ deren Richtungsvektor senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

(c) Bestimmen Sie das Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Tetraeders.

• Aufgabe 4–17:
Gegeben sei die Gerade

$$g:\; y = 3x + 1 \qquad .$$

Bestimmen Sie die Gerade, die senkrecht zu g ist und durch den Punkt $(1,4)$ geht.

• Aufgabe 4–18:
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Ebene $x - y + 2z - 3 = 0$ mit der Geraden durch die Punkte $A(-1,0,4)$ und $B(1,2,0)$.

• Aufgabe 4–19:
Bestimmen Sie die Parametergleichung der Schnittgeraden der Ebene

$$x - 2y + z = 0$$

mit der Ebene durch die Punkte $A(2,3,1)$, $B(-3,0,2)$ und $C(1,2,3)$.

• Aufgabe 4–20:
Gegeben sei die Ebene $\epsilon:\; x+4y-3z+9=0$ und der Punkt $P(0,-5,5)$. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt $\overline{P}$ von P bezüglich der Ebene ϵ .

• Aufgabe 4–21:
Bestimmen Sie den spitzen Winkel zwischen den Ebenen $2x+3y+4z-6=0$ und $3x-2y-z+4=0$.

• Aufgabe 4–22:
Von welchen Punkten auf der Geraden

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erscheint die Strecke von $A = (1,0,2)$ zu $B = (5,-4,0)$ unter einem rechten Winkel ?

• Aufgabe 4–23:

(a) Finden Sie die Gleichung der Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n} = (1\,,\,-1\,,\,2)^T$ und einem Abstand $\sqrt{6}$ vom Ursprung. Der Ursprung liegt oberhalb der Ebene.

(b) Finden Sie eine Parametrisierung der Schnittgerade der obigen Ebene E mit der Ebene $x + y + z = 2$.

• Aufgabe 4–24:
Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks $A(1,-1,3),\ B(2,1,3),\ C(4,1,-3)$.

• Aufgabe 4–25:
Bestimmen Sie die Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(1,0,3)$ geht und die senkrecht zu den folgenden Geraden ist:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 4–26:
Gegeben seien die beiden Ebenen $2x - y + 3z + 4 = 0,\ x + y - 2z - 3 = 0$ und der Punkt $P(2,0,-1)$. Bestimmen Sie die Parametergleichung der Geraden durch P, die parallel zu den beiden Ebenen ist.

• Aufgabe 4–27:
Beweisen Sie, dass die Punkte $A(-3,-7),\ B(-6,5)$ und $C(5,-39)$ auf einer Geraden liegen.

• Aufgabe 4–28:
Zeigen Sie , dass die vier Pukte je in einer Ebene liegen.

(a)

$$(0,2,4) \quad , \quad (1,0,5) \quad , \quad (2,2,4) \quad \text{und} \quad (1,4,3)$$

(b)

$$(3,1,-4) \quad , \quad (-1,3,8) \quad , \quad (-2,-1,2) \quad \text{und} \quad (1,-1,-4)$$

• Aufgabe 4–29:
Eine Ebene geht durch die drei untenstehenden Punkte

$$A\,(0/3/2) \quad , \quad B\,(-2/3/0.5) \quad , \quad C\,(4/2/1)$$

(a) Finden Sie die Gleichung der Ebene.

(b) Berechnen Sie die Länge der drei Achsenabschnitte.

(c) Finden Sie einen Normalenvektor.

• Aufgabe 4–30:
Bestimmen Sie die Volumen der Tetraeder mit den unten gegebenen Eckpunkten.

(a) A(2/3/3), B(4/-1/4), C(1/1/-2), D(5/1/0)

(b) A(0/2/3), B(-2/2/-1), C(4/-2/2), D(3/6/0)

(c) A(0/2/4), B(1/0/5), C(2/2/4), D(3/1/0)

• Aufgabe 4–31:
Ein Kegel mit Spitze im Ursprung ist charakterisiert durch die Bedingung, dass ein Vektor $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ auf dem Kegelmantel mit dem gegebenen Achsenvektor $\vec{d}$ einen festen Winkel α einschliesst.

Finden Sie die Gleichung des Kegelmantels eines Kegels mit Spitze im Ursprung, Achse in Richtung $\vec{d} = (1, 2, 0)^T$ und halbem Öffnungswinkel $\alpha = 30°$. Drücken Sie Gleichung in x, y und z aus. Schreiben Sie die Gleichung als quadratische Gleichung für die Variablen.

• Aufgabe 4–32:
Ein Tetraeder im Raum ist gegeben durch die drei Eckpunkte $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (2, 3, 0)$ und $P_3 = (4, 4, 1)$. Der vierte Punkt P_4 liegt auf der Geraden

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Finden Sie die exakte Lage des vierten Punktes P_4 so, dass das Volumen des Tetraeders 10 ist.

• Aufgabe 4–33:
Gegeben sind zwei Punkte durch $\vec{A} = (1, 2, 5)$ und $\vec{B} = (7, 4, 3)$ und die parametrisierte Gerade g durch

$$g \;:\qquad \vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie einen Punkt $\vec{C}$ auf der Geraden g, sodass das Dreieck ABC gleichschenklig wird. ($AC = BC$).

(b) Bestimmen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

• Aufgabe 4–34:
Eine Ebene E und die Gerade g

$$g \;:\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -\pi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

haben keinen Schnittpunkt. Die Punkte $P_1 = (1/2/-4)$ und $P_2 = (0/2/-1)$ liegen in der Ebene E. Finden Sie die Ebenengleichung in der Hesse'schen Normalenform.

• Aufgabe 4–35:
Gegeben Sei eine Ebene E durch $x + 2\,y + 2\,z = 27$. Finden Sie eine Parameterform $\vec{r} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$ so, dass die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ paarweise orthogonal sind. Zusätzlich müssen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Länge 1 haben.

• Aufgabe 4–36:
Ein Tetraeder in R^3 hat die folgenden Eckpunkte:

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.

(b) Berechnen Sie die gesamte Oberfläche des Tetraeders.

4.9.3 Kreise und Kugeln

• Aufgabe 4–37:
Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, der durch die Punkte $A(6,-1)$ und $B(4,5)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden g liegt.

$$g:\ 3x+5y-11=0$$

• Aufgabe 4–38:
Gegeben seien die beiden Punkte $A(0,0)$ und $B(5,0)$. Bestimmen Sie alle Punkte deren Abstand von B doppelt so gross ist wie von A.

• Aufgabe 4–39:
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Kreis K im Punkt P :

(a) $K:\ x^2+y^2+16x-4y+43=0,\ \ P(-5,y),\ y<0;$

(b) $K:\ 4x^2+4y^2+24x+16y+27=0,\ \ P(-1.5,0);$

• Aufgabe 4–40:
Der Kreis C mit Mittelpunkt $\vec{M}=(3\,,\,1)$ berührt die Gerade $y=-1-2\,x$.

(a) Bestimmen Sie die Kreisgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises C mit der Geraden $x+y=4$.

• Aufgabe 4–41:

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Kreis mit Mittelpunkt $M\,(3/4)$ durch den Punkt $P\,(2/1)$.

(b) Bestimmen Sie den Abstand dieser Geraden vom Punkt $Q\,(-2,3)$.

• Aufgabe 4–42:
Untersuchen Sie den Kreis mit Mittelpunkt $\vec{M}=(4,2)$ und Radius $R=3$.

(a) Finden Sie die Schnittpunkte mit der Geraden $y=2\,x-4$.

(b) Für welche Werte des Parameters λ wird die Gerade $y=2\,x+\lambda$ zu einer Tangente an den Kreis.

• Aufgabe 4–43:
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kugel mit Mittelpunkt M und Radius R und der Geraden durch A und B :

a) $M(0,0,0),\ R=11,\ A(0,6,10),\ B(2,6,9);$

b) $M(6,-10,-9),\ R=17,\ A(0,5,3),\ B(-7,8,3);$

• Aufgabe 4–44:
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel mit Mittelpunkt $M(0,0,0)$ und Radius $R=3$ im Punkt $P(2,y,2)$.

• Aufgabe 4–45:
Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(2,-5,3)$ geht und die parallel zur folgenden Ebene ist:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 4–46:**
Eine Kugel in $\mathbb{R}^3$ is gegeben durch die Gleichung

$$x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 9 = 0$$

(a) Bestimmen Sie Zentrum und Radius dieser Kugel.

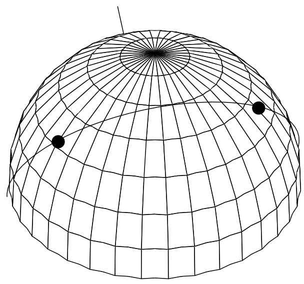
(b) Berechnen Sie den Abstand der Kugel von der Ebene $x + y + 2\,z = 17$.

• **Aufgabe 4–47:**
Eine Kugel K mit Radius $R = 6$ berührt die Ebene $x - 2\,y + 2\,z - 1 = 0$ im Punkt $x = 1$, $y = 3$ und $z =?$. Die Kugel liegt oberhalb der Ebene. Bestimmen Sie einen der Durchstosspunkte dieser Kugel K mit der Geraden g, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 4–48:**

Rechts finden Sie eine Skizze der nördlichen Halbkugel der Erde mit Radius $R = 6300$ km. Ersichtlich sind die beiden Städte Zürich (CH) und Salt Lake City (USA). Deren geographische Lage ist unten tabelliert.



	Breite	Länge
Zürich	47°	+8°
Salt Lake City	41°	−112°

Die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Städten auf der Erdoberfläche liegt auf einem Grosskreis, d.h. auf dem Schnitt der Kugel mit einer Ebene durch den Ursprung.

(a) Stellen Sie die Lage der beiden Städte durch geeignete Vektoren in $\mathbb{R}^3$ dar.

(b) Berechnen Sie den Abstand der beiden Städte entlang der Verbindungsgeraden.

(c) Berechnen Sie den Abstand der beiden Städte entlang der Erdoberfläche.

(d) Finden Sie einen Normalenvektor der Ebene mit dem Grosskreis.

(e) Bestimmen Sie die maximale geographischer Breite auf dem Grosskreis zwischen den Städten.

4.9.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 4–5 : Wegen

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|\;\cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\;\|\vec{b}\|^2\;\cos^2\alpha$$

und

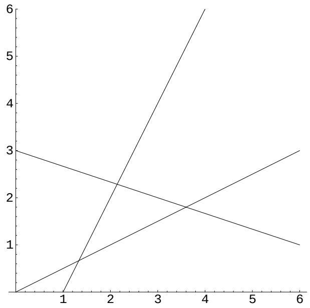
$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|\;\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle^2 = \|\vec{a}\|^2\;\|\vec{b}\|^2\;\sin^2\alpha$$

folgt die Behauptung aus dem Satz von Pythagoras.

Lösung zu Aufgabe 4–7 :

(a)

Die Standardform einer Geradengleichung ist $y = a \cdot x + b$.



$$\begin{array}{lcl} \text{Gerade 1} & : & y(x) = 3 - \frac{1}{3}\,x \\ \text{Gerade 2} & : & y(x) = -2 + 2\,x \\ \text{Gerade 3} & : & y(x) = \frac{1}{2}\,x \end{array}$$

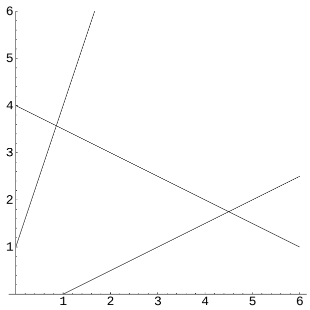
(b) Die Figur oben rechts zeigt die Graphen der drei Funktionen. Die gesuchte Lösungsmenge entspricht dem kleinen, geschlossenen Dreieck rechts.

(c) In der Figur ist auch ablesbar, dass der am weitesten oben liegende Punkte (grösster Wert der y–Koordinate) gegeben ist als Schnittpunkt der Geraden 1 und 2. Die x–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden 1 und 3 ist gegeben als Lösung der Gleichung $3 - \frac{1}{3}\,x \;=\; -2 + 2\,x$. Das führt auf $\frac{7}{3}\,x = 5$ und somit $x = \frac{15}{7}$. Der y–Wert kann bestimmt werden mit Hilfe einer der beiden Geraden, z.B. $y = -2 + 2\,\frac{15}{7} = \frac{16}{7}$. Somit hat der gesuchte Punkte die Koordinaten $(x, y) = (\frac{15}{7}\,,\,\frac{16}{7})$.

Lösung zu Aufgabe 4–8 :

(a)

Die Standardform einer Geradengleichung ist $y = a \cdot x + b$.



$$\begin{array}{lcl} \text{Gerade 1} & : & y(x) = 4 - \frac{1}{2}\,x \\ \text{Gerade 2} & : & y(x) = 1 + 3\,x \\ \text{Gerade 3} & : & y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x \end{array}$$

(b) Die Figur oben rechts zeigt die Graphen der drei Funktionen. Die gesuchte Lösungsmenge entspricht dem kleinen, geschlossenen Dreieck rechts.

In der Figur ist auch ablesbar, dass der am weitesten rechts liegende Punkte (grösster Wert der x–Koordinate) gegeben ist als Schnittpunkt der Geraden 1 und 3.

(c) Die x–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden 1 und 3 ist gegeben als Lösung der Gleichung $4 - \frac{1}{2}\,x \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x$. Das führt auf $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Der y–Wert kann bestimmt werden mit Hilfe einer der beiden Geraden, z.B. $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{9}{2} = \frac{7}{4} = 1.75$. Somit hat der gesuchte Punkte die Koordinaten $(x, y) = (4.5\,,\,1.75)$.

Lösung zu Aufgabe 4–9 : $-0.8x + 0.6y - 2.5 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4–10 : 2.31 und -0.15. Die verschiedenen Vorzeichen zeigen, dass die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Gerade liegen.

Lösung zu Aufgabe 4–11 : Die Geradengleichung muss von der Form

$$1\,x - 2\,y = d$$

sein, wobei d zu bestimmen ist durch die Abstandsbedingung. Um den Abstand zu berechnen sollte man die Hesse'sche Normalenform verwenden

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,x-\frac{2}{\sqrt{5}}\,y=\frac{d}{\sqrt{5}}$$

und es ergibt sich die Bedingung

$$\frac{d}{\sqrt{5}}=\pm 2$$

mit den beiden Lösungen

$$d=\pm 2\sqrt{5}$$

Somit sind die beiden Geradengleichungen

$$1\,x-2\,y=\pm 2\sqrt{5}$$

Lösung zu Aufgabe 4–13 : $m_2=-1/m1$

Lösung zu Aufgabe 4–15 : $\gamma\approx 143.1^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 4–16 :

(a)

$$\vec{a}+3\,\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\6\\\pi+6\end{pmatrix}\quad,\quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c}=4\,(e-\pi^2)\quad\text{und}\quad \vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\,\pi\\2\,e-4\,\pi\\-e\end{pmatrix}$$

(b) Der Richtungsvektor $\vec{d}$ der Geraden muss senkrecht stehen auf $\vec{a}$. Eine mögliche (und einfache) Wahl ist $\vec{d}=(-3,2,0)^T$. Das führt auf die parametrisierte Gleichung

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}\quad\text{wobei}\quad t\in\mathbb{R}$$

Viele andere Lösungen sind möglich.

(c)

$$\begin{aligned}\text{Vol}&=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|\\&=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}2\\3\\\pi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\,\pi\\2\,e-4\,\pi\\-e\end{pmatrix}\right|\\&=\frac{1}{6}\,|-16\,\pi+6\,e-e\,\pi|\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4–17 : $x+3y-13=0$.

Lösung zu Aufgabe 4–18 : $S(0,1,2)$;

Lösung zu Aufgabe 4–19 :

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–20 : $\overline{P}(2,3,-1)$.

Lösung zu Aufgabe 4–21 : 78.6°

Lösung zu Aufgabe 4–22 : $P_1 = (2,-4,-1)$ und $P_2(4,0,3)$

Lösung zu Aufgabe 4–23 :

(a) Verwende die Hessesche Normalenform um den Abstand zu bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}\cdot\vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \pm\sqrt{6}\\ x-y+2\,z &= \pm 6\end{aligned}$$

Damit der Ursprung oberhalb der Ebene liegt, muss der Wert von z bei $x=y=0$ negativ sein. Somit ist die Ebenengleichung $x-y+2\,z=-6$.

(b) Zu bestimmen sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2\,z & = & -6\\ x & + & y & + & z & = & 2\end{array}$$

Mit Hilfe von erweiterten Matrizen erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\1&1&1&2\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&2&-1&8\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&1&-1/2&4\end{array}\right]$$

Wähle $z=t$ als Parameter und man erhält $y=4+z/2=4+t/2$ und $x=-6+y-2\,z=-6+4+t/2-2\,t=-2-\frac{3}{2}\,t$ und somit

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–24 : 7

Lösung zu Aufgabe 4–25 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–26 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–28 : Kontrollieren Sie mit Hilfe von *Mathematica*.

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={0,2,4};
b={1,0,5};
c={2,2,2};
d={1,4,3};
Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
0
```

Lösung zu Aufgabe 4–29 :

(a) Die Verbindungsvektoren der drei Punkte auf der Ebene sind

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Normalenvektor der Ebene gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Form der Ebenengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} &= 0 \\ -1.5\,x - 8\,y + 2\,z &= -24 + 4 \\ 3\,x + 16\,y - 4\,z &= 40 \end{aligned}$$

(b) Die drei Achsenabschnitte können nun leicht berechnet werden:

$$x_{Absch} = \frac{40}{3} \quad , \quad y_{Absch} = \frac{5}{2} \quad \text{und} \quad z_{Absch} = -10$$

(c) Der Normalenvektor wurde oben bereits bestimmt: z.B. $\vec{n} = (3, 16, -4)^T$.

Mathematica

```
f[x_,y_,z_] := a x + b y + c z + d
Solve[ {f[0,3,2]==0,
        f[-2,3,1/2]==0,
        f[4,2,1]==0}] /. d -> 40
Solve::svars:
   Warning: Equations may not give solutions
     for all "solve" variables.
.
{{a -> -3, b -> -16, c -> 4}}
```

Die Gleichung ist

$$-3\,x - 16\,y + 4\,z + 40 = 0$$

Lösung zu Aufgabe 4–30 : Kontrollieren Sie mit Hilfe von *Mathematica*.

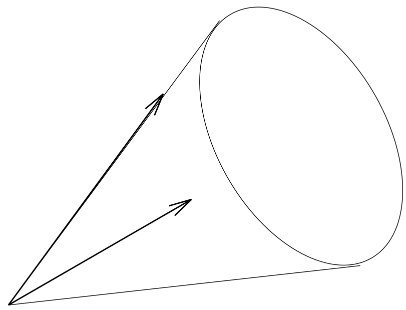
Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={2,3,3};
b={4,-1,4};
c={1,1,-2};
d={5,1,0};
1/6 Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
12
```

Lösung zu Aufgabe 4–31 :
Es gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{d} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{d}\| \, \cos\alpha$$

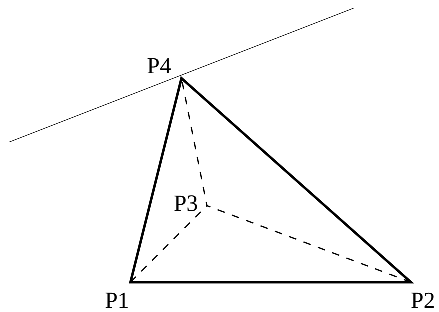
Hierbei sind $\vec{d} = (1,2,0)^T$, $\alpha = 30°$ und $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$. Somit



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{5}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x + 2\,y &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\frac{\sqrt{15}}{2} \\ (x+2\,y)^2 &= \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\frac{15}{4} \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für x, y und z.

Lösung zu Aufgabe 4–32 :
Das Volumen des Tetraeders kann mittels Spatprodukt bestimmt werden.



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left[\vec{AB}\,,\,\vec{AC}\,,\,\vec{AD}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right)\cdot\vec{AD} \end{aligned}$$

Der Punkt D auf der Geraden ist so zu wählen, dass $V = 10$. Das ergibt eine Gleichug für den Parameter t.

$$6\,V(t) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+t \\ 1+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+t \\ 1+2t \end{pmatrix} = 2 - 6\,t$$

Somit ist die zu lösende Gleichung

$$V = \frac{1}{3} - t = 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = -\frac{29}{3}$$

Der Punkt P_4 auf der Geraden ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{29}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-29}{3} \\ \frac{-55}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9.667 \\ -18.333 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–33 :

(a)

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\,(t) - \vec{A}\|^2 &= \|\vec{x}\,(t) - \vec{B}\|^2 \\
(5 + t\,4)^2 + (7 - t\,3)^2 + (3 + t\,5)^2 &= (-1 + t\,4)^2 + (5 - t\,3)^2 + (5 + t\,5)^2 \\
83 + t\,2 \cdot 14 + t^2\,50 &= 51 + t\,2 \cdot 6 + t^2\,50 \\
t\,16 &= 51 - 83 = -32 \\
t &= -2
\end{aligned}$$

$t = -2$ einsetzen in $\vec{x}(t)$ ergibt $\vec{C} = (-2\,,\,15\,,\,-2)$

(b) Die Fläche F mit Hilfe des Vektorproduktes bestimmen.

$$(\vec{A} - \vec{C}) \times (\vec{B} - \vec{C}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Somit

$$\text{Fläche} \quad = \frac{1}{2}\,\|(\vec{A} - \vec{C}) \times (\vec{B} - \vec{C})\| \approx 6\,\sqrt{66} \approx 48.7$$

Lösung zu Aufgabe 4–34 :

Die Gerade g ist parallel zur Ebene E, deshalb kann der Richtungsvektor der Geraden auch als Richtungsvektor der Ebene verwendet werden. Ein zweiter Richtungsvektor ist gegeben durch den Differenzenvektor $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Somit erhalten wir eien Normalenvktor $\vec{n}$ der Ebene durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $\vec{P}_1$ liegt in der Ebene und es gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 17$$

Eine Normalenform der Ebenengleichung ist also

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 17 = 0$$

Für die Hesse'sche Normalenform muss der Vektor $\vec{n}$ noch normiert werden und das Schlussresultat ist

$$\frac{3\,x + 9\,y + z - 17}{\sqrt{91}} = 0$$

Lösung zu Aufgabe 4–35 : Ein Normalenvektor der Ebene ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}$ auf der Ebene muss ein Vielfaches des Vektors $\vec{n}$ sein, da er senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen muss (Figur). Somit ist $\vec{r} = \lambda\,\vec{n}$. Diese Bedingung kann in der Ebenegleichung eingesetzt werden.

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = \lambda\vec{n}\cdot\vec{n} = \lambda\|\vec{n}\|^2 = \lambda\,9 = 27$$

Somit ist $\lambda = 3$ und $\vec{r} = (3,6,6)^T$.

Die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ müssen senkrecht sein auf $\vec{n}$. Solche Vektoren können mit Hilfe des Vektorproduktes leicht erzeugt werden.

$$\begin{aligned}\vec{a}_0 &= \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\\ \vec{b}_0 &= \vec{a}\times\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nun müssen diese Vektoren noch normiert werden.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{1}{\|\vec{a}_0\|}\,\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\ \vec{b} &= \frac{1}{\|\vec{b}_0\|}\,\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Somit ist die Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{s}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Bei dieser Augfabe sind viele verschiedene Lösungen möglich.

Lösung zu Aufgabe 4–36 : Setze

$$\vec{a} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \vec{P}_4 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}$$

(a)

$$\text{Vol} = \frac{1}{6}\,(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -1$$

Somit ist das Volumen 1, mit negativer Orientierung des Tetraeders.

(b) Vier Dreiecksflächen sind zu berechnen und dann zu addieren.

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\times\vec{b}\| &= 9\\ \|\vec{a}\times\vec{c}\| &= \sqrt{5}\\ \|\vec{b}\times\vec{c}\| &= 2\sqrt{89}\\ \|(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\| &= 2\sqrt{35}\end{aligned}$$

Addieren und durch zwei dividieren ergibt eine Oberfläche von ≈ 20.9681 .

Lösung zu Aufgabe 4–37 : $M(2,1),\ R=\sqrt{20}$;

Lösung zu Aufgabe 4–38 : Kreis mit Mittelpunkt $M(-5/3,0)$ und Radius $R=10/3$.

Lösung zu Aufgabe 4–39 : a) $3x-4y+7=0$, b) $6x+8y+9=0$

Lösung zu Aufgabe 4–40 :

(a) Der Radius R des Kreises ist gegeben als Abstand des Mittelpunktes von der Geraden. Um diesen zu bestimmen verwenden wir die Hesse'sche Normalenform und setzen dann die Koordinaten des Mittelpunktes ein.

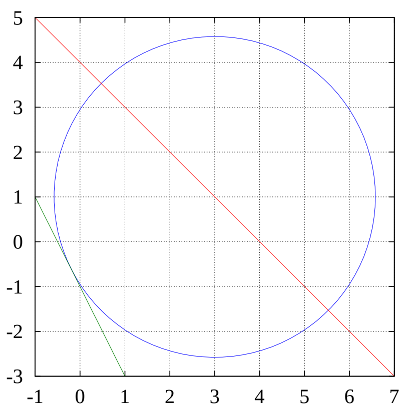
$$\begin{aligned} y+2\,x+1 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,y+\frac{2}{\sqrt{5}}\,x+\frac{1}{\sqrt{5}} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\,1+\frac{2}{\sqrt{5}}\,3+\frac{1}{\sqrt{5}} &= \frac{8}{\sqrt{5}}=R\approx 3.58 \end{aligned}$$

Somit ist die Kreisgleichung

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &= R^2 \\ (x-3)^2+(y-1)^2 &= \frac{64}{5} \end{aligned}$$

(b) Die Geradengleichun in der Form $y=4-x$ kann in der Kreisgleichung eingesetzt werden, dann kann man die quadratische Gleichung nach x auflösen.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-1)^2 &= \frac{64}{5} \\ (x-3)^2+(4-x-1)^2 &= \frac{64}{5} \\ (x-3)^2+(3-x)^2 &= \frac{64}{5} \\ (x-3)^2 &= \frac{32}{5} \\ x &= 3\pm\sqrt{\frac{32}{5}} \end{aligned}$$



Daraus können die y–Werte bestimmt werden durch $y=4-x=1\mp\sqrt{\frac{32}{5}}$ und wir finden die zwei Schnittpunkte

$$\begin{pmatrix} 3+\sqrt{\frac{32}{5}} \\ 1-\sqrt{\frac{32}{5}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.5298 \\ -1.5298 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3-\sqrt{\frac{32}{5}} \\ 1+\sqrt{\frac{32}{5}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4702 \\ 3.5298 \end{pmatrix}$$

Die Rechnungen werden bestättigt durch die obenstehende Graphik.

Lösung zu Aufgabe 4–41 :

(a)

$$\begin{aligned} (\vec{x}-\vec{P}) &\perp (\vec{M}-\vec{P}) \\ \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} &\perp \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ x+3\,y-5 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Hesse'sche Normalenform $(1^2+3^2=10)$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\;(x+3\,y-5)=0$$

Nun $(x,y)=(-2,3)$ einsetzen um den gerichteten Abstand zu bestimmen

$$\text{Abstand } = \frac{1}{\sqrt{10}}\;(-2+3\cdot 3-5)=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Lösung zu Aufgabe 4–42 :

(a) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-4$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned} (x-4)^2+(y-2)^2 &= 9 \\ (x-4)^2+(2\,x-4-2)^2 &= 9 \\ (x^2-8\,x+16)+(4\,x^2-24\,x+36)-9 &= 0 \\ 5\,x^2-32\,x+43 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{32\pm\sqrt{32^2-20\cdot 43}}{10}=\frac{16\pm\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}1.91938\\4.48062\end{cases} \\ y_{1,2} &= 2\,x_{1,2}-4=\frac{12\pm 2\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}-0.16125\\4.96125\end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1,y_1)\approx(1.91938\,,\,-0.16125)$ und $(x_2,y_2)\approx(4.48062\,,\,4.96125)$.

(b) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-\lambda$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned} (x-4)^2+(y-2)^2 &= 9 \\ (x-4)^2+(2\,x+\lambda-2)^2 &= 9 \\ (x^2-8\,x+16)+(4\,x^2+\lambda^2+4+4\,\lambda\,x-8\,x-4\,\lambda)-9 &= 0 \\ 5\,x^2+(4\,\lambda-16)\,x+\lambda^2-4\,\lambda+11 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gerade ist eine Tangente, falls die beiden Lösungen zusammenfallen. Somit muss die Diskriminate $(b^2-4\,a\,c)$ Null sein. Das ergibt eine quadratische Gleichung für den Parameter λ.

$$\begin{aligned} (4\,\lambda-16)^2-4\cdot 5\cdot(\lambda^2-4\,\lambda+11) &= 0 \\ 4\,\lambda^2+48\,\lambda-36 &= 0 \\ \lambda^2+12\,\lambda-9 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-12\pm\sqrt{144+36}}{2}=-6\pm\sqrt{45}\approx\begin{cases}-12.7082\\+0.708204\end{cases} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4–43 : a) $S_1(2,6,9),\ S_2(6,6,7)$ b) $S_1(7,2,3),\ S_2(14,-1,3)$

Lösung zu Aufgabe 4–44 : $2x+y+2z-9=0$ und $2x-y+2z-9=0$

Lösung zu Aufgabe 4–45 : $3x-5y-4z-19=0$

Lösung zu Aufgabe 4–46 :

(a) Mittels quadratischer Ergänzung kann die Gleichung umgefort werden, sodass die Parameter der Kugel abgelesen werden können.

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 9 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 &= -9 + 2^2 + 3^2 = 4 \end{aligned}$$

Somit ist der Kugelmittelpunkt bei $\vec{M} = (2\,,\,-3\,,\,0)$ und die Kugel hat einen Radius von $R = \sqrt{4} = 2$.

(b) Zuerst sollte der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene bestimmt werden. Der normierte Normalenvektor der Ebene ist

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Hessesche Normalenform der Ebenengleichung

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,x + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y + \frac{2}{\sqrt{6}}\,z - \frac{17}{\sqrt{6}} = 0$$

Der orientierte Abstand des Kugelmittelpunktes $\vec{M}$ von der Ebene ist

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\,2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-3) + \frac{2}{\sqrt{6}}\,0 - \frac{17}{\sqrt{6}} = \frac{-18}{\sqrt{6}} = -3\,\sqrt{6}$$

Mit Kugelradius $R = 2$ ist der Abstand Kugel–Ebene gegeben durch $3\sqrt{6} - 2 \approx 5.34847$.

Lösung zu Aufgabe 4–47 : Die z–Koordinate des Kontaktpunktes ist gegeben durch die Ebenengleichung: $1 - 6 + 2\,z - 1 = 0$, d.h. $z = 3$. Die Verbindung von Kontaktpunkt zu Kugelmittelpunkt muss ein Vielfaches der Normalenvektors $\vec{n}$ sein. Mit Hilfe des normierten Vektors $\vec{n} = (1\,,\,-2\,,\,2)^T$ können die Koordinaten des Mittelpunktes angegeben werden. Der Kugelmittelpunkt ist gegeben durch

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Kugelgleichung

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 6^2$$

In diese Gleichung kann die Parametrisierung der Geraden eingesetzt werden. Das führt auf

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 &= 6^2 \\ (t-3)^2 + (t+1)^2 + (6 - 2\,t - 7)^2 &= 6^2 \\ (1+1+4)\,t^2 + (-6+2+4)\,t + 9 + 1 + 1 &= 36 \\ 6\,t^2 &= 25 \\ t &= \pm\frac{5}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Die beiden Durchstosspunkte sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \frac{5}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 4–48 : Die geographische Breite ist der Ergänzungswinkel auf 90° zum Winkel θ in Kugelkoordinaten.

(a) Mit leicht modifizierten Kugelkoordinaten ergibt sich für Zürich $\vec{Z}$ und Salt Lake City $\vec{S}$

$$\vec{Z} = R \begin{pmatrix} \cos 47^\circ \ \cos 8^\circ \\ \cos 47^\circ \ \sin 8^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4254.78 \\ 597.97 \\ 4607.53 \end{pmatrix} km$$

und

$$\vec{S} = R \begin{pmatrix} \cos 41^\circ \ \cos 112^\circ \\ -\cos 41^\circ \ \sin 112^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1781.13 \\ -4408.45 \\ 4133.17 \end{pmatrix} km$$

(b) der Abstand entlang einer Geraden ist gegeben durch

$$d_1 = \|\vec{Z} - \vec{S}\| \approx 7856.3 \text{ km}$$

(c) Um den Abstand entlang des Grosskreises zu bestimmen, muss zuerst der Winkel α zwischen den beiden Vektoren bekannt sein

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{Z}, \vec{S}\rangle}{\|\vec{Z}\| \ \|\vec{S}\|} \approx 0.222 \Longrightarrow \alpha \approx 1.346 \approx 77.15^\circ$$

Es gilt

$$d_2 = R\,\alpha \approx 8482.72 \text{ km}$$

Der Abstand entlang der Erdoberfläche ist grösser als entlang der Geraden.

(d) Ein Normalenvektor kann mit dem Vektorprodukt bestimt werden. Anschliessend kann der Vektor auch normalisiert werden.

$$\vec{n}_1 = \vec{S} \times \vec{Z} \approx \begin{pmatrix} -2.35126 \\ 2.66176 \\ 1.8258 \end{pmatrix} 10^7 \quad \text{oder} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0.588792 \\ 0.666546 \\ 0.457209 \end{pmatrix}$$

(e) Untersuchen Sie die durch die z–Achse und den Normalenvektor $\vec{n}_2$ aufgespannte Ebene. Der Normalenvektor $\vec{n}_2$ schliesst mit der z–Achse den selben Winkel ein, der exakt die maximale geographische Breite angibt. Somit gilt

$$\text{maximale Breite } = \arccos 0.457 \approx 62.8^\circ$$

4.10 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Operationen mit Vektoren graphisch illustrieren können.
- rasch und zuverlässig mit Vektoren rechnen können, Addition, Multiplikation mit Skalar, Skalar– und Vektorprodukt.
- mit Geradengleichungen in den verschiedenen Formen umgehen können.
- mit Ebenengleichungen in den verschiedenen Formen umgehen können.
- von gemetrischen zu analytischen Beschreibungen von Geraden, Ebenen, Kreisen und Kugeln übersetzen können.

Kapitel 5

Systeme von linearen Gleichungen

Als Arbeitsgrundlage für dieses Kapitel dient das erste Kapitel aus dem englischen Buch *Elementary Linear Algebra, Application Version* von Howard Anton und Chris Rorres ([AntoRorr91]). Diese Notizen sind zum grossen Teil diesem Buch entnommen.

5.1 Einführung zu Systemen von linearen Gleichungen

Die Gleichung einer Geraden in der xy–Ebene kann gegeben werden durch eine Gleichung

$$a_1\,x + a_2\,y = b$$

wobei die Werte von a_1, a_2 und b die Gerade bestimmen. Eine solche Gleichung heisst **lineare Gleichung** für die Variablen x und y. Analog ist eine **lineare Gleichung** für n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben durch

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + \ldots + a_n\,x_n = b$$

So kann eine Ebene im Raum beschrieben werden als lineare Gleichung für die Variablen x, y und z.

5–1 Beispiel : Das folgende sind lineare Gleichungen.

$$\begin{aligned} x + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3}\,x + 3\,z + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Zu beachten ist, dass in linearen Gleichungen keine Produkte, Brüche oder Potenzen (bezüglich der Variablen) vorkommen dürfen.

5–2 Beispiel : Das folgende sind **keine** linearen Gleichungen.

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3\,x} + 3\,\sqrt{z} + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_1\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

5–3 Beispiel : Um alle Lösungen der linearen Gleichung

$$2\,x - 4\,y = \pi$$

für die Variablen x und y zu finden, kann man den Wert von x beliebig wählen. Wir setzen hier $x = t$. Dann kann der Wert von y aus der Gleichung bestimmt werden durch

$$y = \frac{1}{4}\ (2\,x - \pi) = \frac{1}{4}\ (2\,t - \pi)$$

Wir erhalten somit die **parametrisierten Lösungen** mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & \frac{2\,t-\pi}{4} \end{array} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

♢

Sind mehrere lineare Gleichungen miteinander zu untersuchen, so spricht man von einem **System von linearen Gleichungen**.

5–4 Beispiel : Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 &= -1 \\ 3\,x_1 + x_2 + 9\,x_3 &= -4 \end{aligned}$$

wird gelöst durch $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, da für diese Werte beide Gleichungen erfüllt sind.

Jedoch ist $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ keine Lösung, da nur die erste der beiden verlangten Gleichungen gelöst ist. ♢

5–5 Beispiel : Das System

$$\begin{aligned} 2\,x - 3\,y &= 1 \\ 3\,x + 2\,y &= 8 \end{aligned}$$

von linearen Gleichungen wird gelöst durch $x = 2$ und $y = 1$. Die beiden Gleichungen entsprechen je einer Geraden in der Ebene. Der Punkt $(x, y) = (2, 1)$ entspricht somit dem Schnittpunkt der beiden Gleichungen. Dieser Ansatz erlaubt es zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten auch mittels eines graphischen Verfahrens zu lösen, indem zwei Geraden geschnitten werden. ♢

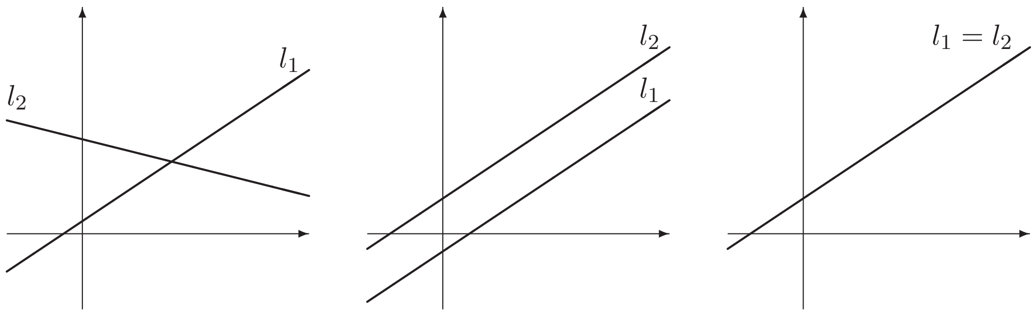
5–6 Beispiel : Das System

$$\begin{aligned} 2\,x - 3\,y &= 1 \\ 4\,x - 6\,y &= 8 \end{aligned}$$

von linearen Gleichungen hat keine Lösung. Dies kann leicht eingesehen werden, falls man die erste Gleichung mit 2 multipliziert. Das führt auf das äquivalente System

$$\begin{aligned} 4\,x - 6\,y &= 2 \\ 4\,x - 6\,y &= 8 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichung können nicht zusammen gelöst werden, dass sonst $2 = 8$ sein müsste. Die den Gleichungen entsprechenden Geraden sind parallel und haben keinen Schnittpunkt. ♢



genau eine Lösung keine Lösung unendlich viele Lösungen

Abbildung 5.1: Lösungsverhalten von Systemen von Gleichungen

5–7 Definition : Ein System von linearen Gleichungen heisst **inkonsistent**, falls es keine Lösungen hat. Ein System von linearen Gleichungen, dass mindestens eine Lösung hat, heisst **konsistent**.

Sucht man den Schnittpunkt zweier Geraden in der Ebene, so sind drei verschiedene Verhalten möglich. Dies ist in Abbildung 5.1 illustriert.

1. Die Geraden sind nicht parallel und haben somit genau einen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **genau eine** Lösung. Das System ist konsistent.
2. Die Geraden sind parallel, liegen aber nicht aufeinender. Es gibt keinen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **keine** Lösung. Das System ist inkonsistent.
3. Die Geraden sind parallel und sie liegen aufeinender. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **unendlich viele** Lösungen. Das System ist konsistent.

Man wird nie ein System von linearen Gleichungen finden mit genau zwei Lösungen. Wir haben hier nur zwei Gleichungen für zwei Unbekannte untersucht, werden aber später sehen, dass dieses Resultat für beliebige Systeme von linearen Gleichungen richtig ist.

Ein System von linearen Gleichungen hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

5–8 Beispiel : Ebenen im Raum
Jede der drei Gleichungen des System

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

kann aufgefasst werden als eine Ebenengleichung im Raum $\mathbb{R}^3$. Ohne zu rechnen ist klar, dass folgenden Situationen auftreten können:

1. Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt. Es gibt genau eine Lösung. Das System ist konsistent.

2. Zwei der drei Ebenen sind parallel, aber sie sind nicht identisch. Es gibt somit keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.

3. Die Ebenen sind nicht parallel, aber je zwei dieser Ebenen bilden eine Schnittgeraden und diese sind parallel (Toblerone). Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.

4. Zwei der Ebenen sind identisch, die dritte ist nicht parallel zu den ersten beiden. Es ergibt sich eine Schnittgerade, d.h. unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.

5. Die drei Ebenen sind identisch und die Lösungsmenge ist diese Schnittebene. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.

$\diamondsuit$

5.2 Matrix–Darstellung und der Algorithmus von Gauss

5.2.1 Matrix–Darstellung eines linearen Gleichungssystems

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,x & +1\,y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

sind eigentlich nur die Zahlen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

relevant. Man spricht von der **Darstellung des Gleichungssystems durch eine erweiterte Matrix**. Die erste Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Variablen (hier x genannt). Die zweite Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Variablen (hier y genannt). Die dritte Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der dritten Variablen (hier z genannt). Einzig die letzte Spalte spielt eine besondere Rolle: sie enthält die Konstanten der Gleichungen. Die erste Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Gleichung, die zweite Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Gleichung, u.s.w.

Nun werden wir solche Systeme von Gleichungen systematisch lösen. Dazu werden wir diese Systeme in äquivalente Systeme umformen. Dabei ist das Ziel ein elementar lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Wir verwenden die folgenden Grundoperationen:

- Eine Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren.
- Zwei Gleichungen austauschen.

Diese drei Grundoperationen verändern die Lösungsmenge des Systems nicht, sind also **Äquivalenztransformationen**. Um Schreibarbeit zu sparen werden wir die Operationen meist mit Hilfe der Matrix–Notation ausführen. Es ergeben sich die folgenden Zeilenoperationen:

- Eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren.
- Zwei Zeilen austauschen.

Nun wollen wir das Verfahren an einem Beispiel sorgfältig demonstrieren.

5–9 Beispiel : Als einführendes, typisches Beispiel untersuchen wir ein lineares System von 3 Gleichungen für drei Unbekannte (x, y und z). Statt planlos zu rechnen erstellen wir zuerst einen Plan:

1. Mit Hilfe der ersten Gleichung x aus der zweiten und dritten Gleichung eliminieren.
2. Mit Hilfe der (neuen) zweiten Gleichung y aus der dritten Gleichung eliminieren.
3. Die (neue) dritte Gleichung kann nun leicht nach z aufgelöst werden.
4. Der nun bekannte Wert von z und die zweite Gleichung ergeben y.
5. Die nun bekannten Werte von z und y und die erste Gleichung ergeben schliesslich den Wert von x.

Die obigen Rechnungen sind mit Hilfe von Äquivalenztransformationen auszuführen, da die Lösungsmenge nicht ändern darf. Nun untersuchen wir auch noch den Effekt dieser Operationen auf die entsprechende Darstellung des Systems durch eine erweiterte Matrix.

In der linken Spalte finden Sie Gleichungssysteme und die Beschreibung der Operationen. In der rechten Spalte werden die selben Operationen mit Hilfe der erweiterten Matrix ausgeführt.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 2-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahieren

Das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 3-fache der ersten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren

Das 3-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ & 3\,y & -11\,z & = & -27 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, dann dann das 3-fache der zweiten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren

Die zweite Zeile mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren dann das 3-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & \frac{-1}{2}\,z & = & \frac{-3}{2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung mit -2 multiplizieren

Die dritte Zeile mit -2 multiplizieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Gleichung zur zweiten Gleichung addieren
Das 2-fache der dritten Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren

Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile addieren
Das 2-fache der dritten Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren

Die zweite Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die einzige Lösung

$$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3$$

ist nun leicht ablesbar. $\diamondsuit$

5.2.2 Treppengestalt, Verfahren von Gauss

Die Rechenschritte im vorangehenden Beispiel wurden natürlich nicht zufällig gewählt. Der bekannte Algorithmus von **Gauss–Jordan** wurde ausgeführt. Damit können die Lösungen von beliebigen linearen Gleichungssystemen untersucht werden. Wir werden nun dieses Verfahren etwas genauer unter die Lupe nehmen.

5–10 Definition : Eine Matrix ist in **Treppenform** falls:

- die erste von Null verschiedenen Zahl in jeder Zeile ist eine 1.
- Zeilen die ausschliesslich die Zahl 0 enthalten sind unten zu finden.
- je weiter unten die Zeile, desto weiter rechts die führende 1.
- unter einer „führenden 1“ stehen nur Zahlen 0 .

Eine Matrix ist in **reduzierter Treppenform** falls:

- die Matrix in Treppenform ist
- in jeder Spalte mit einer führenden 1 sind alle anderen Zahlen 0.

Ist die Matrix in reduzierter Treppenform, so stehen unter und über führenden Zahlen 1 nur Nullen.

5–11 Beispiel : Die folgenden Matrizen sind in Treppenform, aber nicht in reduzierter Treppenform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um diese Matrizen in reduzierte Treppenform zu bringen, müssen sie noch leicht modifiziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

5–12 Bemerkung : Nun kann man in den Rechnungen in Beispiel 5–9 erkennen, dass die Matrix zuerst in Treppenform und anschliessend in reduzierte Treppenform transformiert wird. Bei all diesen Transformationen wird die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert (Äquivalenztransformationen).

Die folgenden Punkte in Beispiel 5–9 sind zu beachten:

1. Ist die Matrix in Treppenform, so kann das zugehörige System von Gleichungen „von unten nach oben“ aufgelöst werden.
2. Die vollständig reduzierte Matrix enthält nur die Zahlen 0, ausser in der Diagonalen, dort findet man die Zahlen 1 . Es ist die **Einheitsmatrix**.
3. Ist die Matrix vollständig reduziert, so ist das zugehörige System von Gleichungen bereits aufgelöst.

$\diamondsuit$

Nun wollen wir einige Beispiel von Gleichungssystemen untersuchen.

5–13 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2\,y & +3\,z & = & 9 \\ & y & +9\,z & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aus der letzten Zeile liest man ab, dass $z = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung sofort $y = 1$. Die erste Zeile ergibt anschliessend $x = 9 - 2\,y - 3\,z = 7$. Somit ist das System gelöst. Transformiert man das ursprüngliche System auf eine Matrix in reduzierter Treppenform, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 7 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist elementar ablesbar. ♢

5–14 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ & & z & +\pi\,u & = & 0 \\ & & & u & = & -3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Aufgrund der letzten Zeile gilt $u = -3$ und die zweite Gleichung ergibt $z = 0 - \pi\,u = 3\,\pi$. Die erste Gleichung kann nach x aufgelöst werden mit dem Resultat

$$x = 10 - 2\,y - 3\,z - 4\,u = 10 - 2\,y - 9\,\pi + 12$$

Er darf nicht erstaunen, dass drei Gleichungen für vier Unbekannt nicht eindeutig gelöst werden können. Wählt man $y = t$ als Parameter, so können alle Lösungen geschrieben werden in der Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 - 9\,\pi \\ 0 \\ 3\,\pi \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein identisches Lösungsverhalten kann auch bei vier Gleichungen für vier Unbekannte entstehen. Falls Sie nach der Reduktion auf Treppenform die Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vorfinden, so erhalten sie dieselben Lösungen. ♢

5–15 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 13 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

Die vierte Gleichung ist nicht lösbar. Das System von vier Gleichungen für vier Unbekannte hat somit keine Lösungen. ♢

5.3 Lösen von linearen Gleichungssystemen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Form der Lösungen eines linearen Gleichungssystems leicht aus der auf Treppengestalt reduzierten erweiterten Matrix abgelesen werden kann. Es geht nicht darum viele, grosse Systeme mühsam von Hand aufzulösen. Später werden Sie Computer und Taschenrechner einsetzen, um solche Systeme effizient zu lösen. Sie sollten Sich auf die Struktur der zu verwendenden Algorithmen und die Interpretation der Resultate konzentrieren.

5.3.1 Gauss'sche Elimination

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass für eine Matrix in Treppengestalt die Lösungen des zugehörigen linearen Gleichungssystems leicht beschrieben werden können. Deshalb versuchen wir nun jede Matrix in Treppengestalt zu bringen, mit Hilfe von Äquivalenztransformationen. Dies wollen wir systematisch ausführen.

5–16 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Das führt auf eine erweiterte Matrixdarstellung.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & 12 & 28 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl ($\frac{1}{2}$), damit die erste Zahl 1 wird.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu gestartet werden mit der kleineren Matrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x & -5\,y & +6\,z & = & 14 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & -6 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

Diese System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{rclllcr} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

◇

5–17 Beispiel : Die Zeilenoperationen des oben ausgeführten Algorithmus von Gauss können auch in *Octave* oder `MATLAB` implementiert werden. Dazu sind zwei Befehle zu definieren:

- `SwapRows` um zwei Zeilen zu vertauschen.

SwapRows.m

```
function An=SwapRows(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:)=A(j,:);
  An(j,:)=A(i,:);
endfunction
```

- `Pivot` um eine Zahl zu 1 zu machen und die darunterstehenden Zahlen zu eliminieren.

Pivot.m

```
function An=Pivot(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:) = An(i,:)/A(i,j);
  for k=i+1:size(A)(1)
      An(k,:) = An(k,:)-A(k,j)*An(i,:);
  endfor
endfunction
```

Der obenstehende Code ist nicht effizient implementiert und darf nur für Illustrationen und Verifikation von Aufgaben verwendet werden. Es gibt effiziente Implementierungen.

Nun kann das vorangehende Beispiel durchgerechnet werden.

Octave

```
### script file to test Gauss algorithm
A=[0 -2 7 12; 2 -10 12 28; 2 -5 -5 -1]
A=SwapRows(A,1,2)
A=Pivot(A,1,1)
A=Pivot(A,2,2)
A=Pivot(A,3,3)
```

$\diamondsuit$

5–18 Theorem : *Gauss'sche Elimination*
Um die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems in Treppengestalt zu bringen kann systematisch vorgegangen werden.

1. *Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.*
2. *Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.*
3. *Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl, damit die erste Zahl 1 wird.*
4. *Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.*
5. *Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu (Schritt 2) gestartet werden mit der kleineren Matrix.*

Aufgabe 5–5 auf Seite 181 ist eine geeignete, einfache Übungsaufgabe.

5.3.2 Homogene Systeme

5–19 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben, so heisst

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & 0
\end{array}$$

ein **homogenes System von linearen Gleichungen**. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten x_1, x_2, $\ldots$, x_n .

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0
\end{array}\right]$$

Da durch Zeilenoperationen die Null–Spalte rechts immer erhalten bleibt, ist es nicht unbedingt notwendig diese Spalte mitzuschreiben.

> Ein homogenes System von linearen Gleichungen kann immer gelöst werden, indem alle Variablen 0 gewählt werden.

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \dots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \dots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ x_3 + & \dots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & 0 \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ ist die einzige Lösung.

Es kann aber auch vorkommen, dass die letzte Zeile der erweiterten Matrix nur 0 enthält. Dann ist die letzte Variable frei wählbar, die anderen können daraus berechnet werden. Als Beispiel untersuchen wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

In entsprechenden Gleichungssystem für die Variablen x_1, x_2 und x_3 ist der Wert von $x_3 = t$ frei wählbar. Die Werte der anderen Variablen können dann bestimmt werden.

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & t & = & t \\ x_2 & = & -e\,x_3 & = & -t\,e \\ x_1 & = & -5\,x_3 + 3\,x_2 & = & t\,(-5 - 3\,e) \end{array}$$

Alle Lösungen des entsprechenden Gleichungssystems sind somit parametrisiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5-3\,e \\ -e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Gibt es in der Treppenmatrix mehrere Zeilen von Nullen, so können auch mehrere Variablen frei gewählt werden. Es wird wiederum unendlich viele Lösungen geben, die als Funktion von mehreren Parametern geschrieben werden können. Um dies einzusehen kann folgendermassen vorgegangen werden:

1. Entferne die nur aus Nullen bestehenden Zeilen der reduzierten Matrix, sie beinhalten keinerlei Information über die Lösungen.
2. Alle Spalten des Gleichungssystems die **keine** führende 1 enthalten, sind auf die rechte Seite des Gleichungssystems zu schreiben. Sie werden zu Parametern der Lösungen.
3. Für gegebene Werte der Parameter kann nun nach den links gebliebenen Unbekannten aufgelöst werden.

Diese Schema können wir auf das vorangehende Beispiel anwenden. Die erweiterte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -3\,x_2 & +5\,x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +e\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Spalte der x_3 enthält keine führende 1, deshalb werden diese Terme nach rechts gebracht und $x_3 = t$ als Parameter gewählt.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & -3\,x_2 & = & -5\,x_3 & = & -5\,t \\ & x_2 & = & -e\,x_3 & = & -e\,t \end{array}$$

Dieses System kann von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -3\,x_2 & = & (-5-3\,e)\,t \\ & x_2 & = & -e\,t \end{array}$$

Das führt auf die oben angeschriebenen Lösungen.

Die beiden Aufgaben 5–10 und 5–11 illustrieren dieses Verhalten.

Verschiedene Anzahl von Gleichungen und Unbekannten

Diese Situation unterscheidet sich nicht wesentlich von der obigen. Zusammenfassend kann für homogene Systeme von linearen Gleichungen festgehalten werden:

- Jedes homogene, lineare Gleichungssystem hat die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Steht in jeder Spalte der auf Treppenform reduzierten Matrix eine „führende 1“, so hat das System nur die triviale Lösung.

- Für jede Spalte ohne „führende 1“ kann ein Parameter eingeführt werden und die unendlich vielen Lösungen damit konstruiert werden.

Die wesentliche Schwierigkeit ist es also, die Matrix auf Treppengestalt zu bringen.

5–20 Theorem : *Ein homogenes, lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung ($\vec{x} = \vec{0}$). Entstehen bei der Reduktion auf Treppengestalt der erweiterten Matrix Spalten ohne „führende 1“, so hat das System unendlich viele Lösungen. Diese können mit Hilfe der reduzierten Matrix berechnet werden.*

Als Konsequenz ergibt sich sofort, dass ein homogenes System mit mehr Unbekannten als Gleichungen unendlich viele Lösungen hat.

5.3.3 Inhomogene Systeme

5–21 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ und b_i für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben, so heisst

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

ein **inhomogenes System von linearen Gleichungen**. Es muss mindestens eine der Zahlen b_i von Null verschieden sein. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\
 & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]$$

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n} & b_3 \\
 & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n
\end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & b_n \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Es gibt genau eine Lösung

5–22 Beispiel : Das Beispiel 5–16 auf Seite 168 ist

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Die entsprechende, auf Treppengestalt reduzierte Matrix ist (nach längerer Rechnung)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{rcrrrcr} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

und führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

♢

5–23 Beispiel : Die zu untersuchende Situation ist in Abbildung 5.2 aufgezeigt. Die beiden Spannungen U_1 und U_2 sind gegeben, ebenso die drei Widerstände R_i. Zu bestimmen sind die drei Ströme I_i. Dieses Beispiel stammt aus dem Buch [LandHest92].

Lösung: Die Kirchhoff'sche Stromregel, angewandt auf den Knoten A ergibt

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

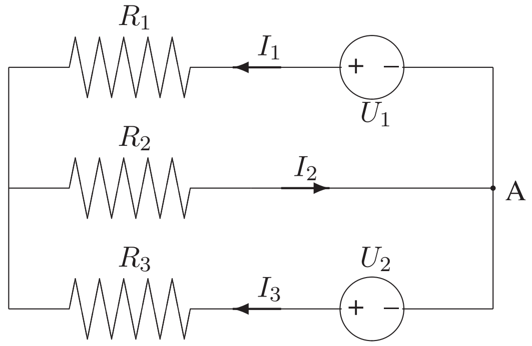


Abbildung 5.2: Ein einfaches elektrisches Netz

Die Spannungsregel, angewandt auf die obere und untere Stromschlaufe, ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} R_1\,I_1 + R_2\,I_2 & = & U_1 \\ R_3\,I_3 + R_2\,I_2 & = & U_2 \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir drei lineare Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{rrrcl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 \\ R_1\,I_1 & +R_2\,I_2 & & = & U_1 \\ & R_2\,I_2 & +R_3\,I_3 & = & U_2 \end{array}$$

Für das Zahlenbeispiel $U_1 = 5\,V$, $U_2 = 18\,V$, $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$ und $R_3 = 12\,\Omega$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrrcl} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 \\ 8\,I_1 & +6\,I_2 & & = & 5 \\ & 6\,I_2 & +12\,I_3 & = & 18 \end{array}$$

Die erweiterte Matrix ist somit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right]$$

Nun bringen wir diese Matrix zuerst auf Treppengestalt, dann auf reduzierte Treppengestalt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -36 & -37 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{36} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{34}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right]$$

Nun ist die eindeutig bestimmte Lösung $I_1 = \frac{-3}{36}\,A$, $I_2 = \frac{34}{36}\,A$ und $I_3 = \frac{37}{36}\,A$ leicht ablesbar. $\diamondsuit$

5–24 Beispiel : Ein Kreis mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2 &= 0 \\ x^2-2\,x\,x_0+y^2-2\,y\,y_0+M &= 0 \quad \text{wobei} \quad M=x_0^2+y_0^2-R^2 \end{aligned}$$

Sind nun drei Punkte (x, y) auf dem Kreis gegeben, so kann ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_0, y_0 und M aufgestellt werden. Geht der Kreis durch die Punkte $(0, 2)$, $(6, 2)$ und $(6, 4)$. Aus der Gleichung

$$x^2-2\,x\,x_0+y^2-2\,y\,y_0+M=0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0^2-2\cdot 0\,x_0+2^2-2\cdot 2\,y_0+M &= 0 \\ 6^2-2\cdot 6\,x_0+2^2-2\cdot 2\,y_0+M &= 0 \\ 6^2-2\cdot 6\,x_0+4^2-2\cdot 4\,y_0+M &= 0 \end{aligned}$$

oder etwas systematischer

$$\begin{array}{cccrr} M & & -4\,y_0 & = & -4 \\ M & -12\,x_0 & -4\,y_0 & = & -40 \\ M & -12\,x_0 & -8\,y_0 & = & -52 \end{array}$$

mit der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right]$$

Hierbei wurde die Variable M absichtlich nach vorne geschoben, da eine Spalte von Zahlen 1 sehr günstig ist für das Verfahren von Gauss. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Somit haben wir $M = 8$, $x_0 = 3$ und $y_0 = 3$. Es ist

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - M = 9 + 9 - 8 = 10$$

Der Kreis mit Radius $R = \sqrt{10}$ hat den Mittelpunkt bei $(3, 3)$. Eine einfache Skizze wird Sie problemlos davon überzeugen, dass die Zahlen richtig sind. $\diamondsuit$

5–25 Beispiel : Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gibt es keinen Kreis durch diese drei Punkte. Das entsprechende lineare Gleichungssystem wird also keine Lösung haben. Als Beispiel kann ein Kreis gesucht werden durch die drei Punkte $(1, 3)$, $(-1, -3)$ und $(2, 6)$. Analog zum vorangehenden Beispiel erhalten wir ein Gleichungssystem für die Unbekannten M, x_0 und y_0.

$$\begin{aligned} M+1^2-2\cdot 1\,x_0+3^2-2\cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M+1^2+2\cdot 1\,x_0+3^2+2\cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M+2^2-2\cdot 2\,x_0+6^2-2\cdot 6\,y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix ist.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right]$$

Die Reduktion auf Treppengestalt ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -30 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung des reduzierten Systems lautet somit

$$0\,M + 0\,x_0 + 0\,y_0 = 30$$

und es ist offensichtlich das diese Gleichung nicht gelöst werden kann. Das ursprüngliche System hat somit **keine Lösung**. $\diamondsuit$

5–26 Beispiel : Hat die durch das Verfahren von Gauss reduzierte Matrix die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

so steckt in der letzten Zeile keinerlei Information über die Gleichung. Das entsprechende System lautet

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2\,y & -6\,z & = & -10 \\ & y & -3\,z & = & 7 \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrcrr} x & -2\,y & = & -10 & +6\,z \\ & y & = & 7 & +3\,z \end{array}$$

Es ist offensichtlich, dass $z = t$ ein freier Parameter ist. Es gibt somit unendlich viele Lösungen. Durch auflösen von oben nach unten erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= +2\,y - 10 + 6\,t = 2\,(7 + 3\,t) - 10 + 6\,t = 4 + 12\,t \\ y &= 7 + 3\,t \\ z &= t \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Geometrisch kann diese Situation entstehen, falls sich drei Ebenen im Raum in einer Geraden schneiden.

Das entsprechende homogene System von Gleichungen führt auf die reduzierte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des inhomogenen Systems kann also geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** $(4\,,\,7\,,\,0)^T$ und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Diese Struktur ist nicht zufällig, sondern gilt für beliebige Systeme vom linearen Gleichungen. ♢

Die vorangehenden Beispiele führen auf das folgende Resultat.

5–27 Theorem : *Ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte hat normalerweise genau eine Lösung. Es gibt Spezialfälle ohne Lösungen, oder mit unendlich vielen Lösungen. Die auf Treppengestalt reduzierte Matrix gibt Auskunft über das Verhalten.*

1. *Befinden sich auf der Diagonalen der reduzierten Matrix nur Zahlen 1, so hat das System genau eine Lösung.*
2. *Ist die Diagonale nicht mit Zahlen 1 belegt, so gibt es eine (oder mehrere) Zeilen nur mit Nullen im linken Teil. Diese Zeilen sind zu untersuchen.*
   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ eine von Null verschiedene Zahl, so hat das System keine Lösung.*
   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ auch die Zahl Null, so hat das System unendlich viele Lösungen.*
   - *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems kann geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems.*

In allen obigen Fällen können die Lösungen durch auflösen „von unten nach oben“ bestimmt werden.

Unter- und über–bestimmte Gleichungssysteme

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Unbekannte als Gleichungen, so ist nicht zu erwarten, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Da die entstehende Matrix breiter ist als hoch, wird es Spalten geben ohne „führende 1“. Somit wird das System unendlich viele, oder keine Lösungen haben.

5–28 Beispiel : Ein System von drei Gleichungen für vier Unbekannte kann also unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier zwei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

  Die Lösungen erhält man durch auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2\,x_2 & +4\,x_4 & = & \pi & -3\,x_3 \\ & x_2 & +0\,x_4 & = & 10 & +7\,x_3 \\ & & x_4 & = & -8 & \end{array}$$

  Hierbei kann der Parameter $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Die der dritten Zeile entsprechende Gleichung lautet

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 = -8$$

und kann somit sicher nicht gelöst werden. Es gibt keine x_i, sodass die Gleichung erfüllt ist.

◇

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte, so wird es typischerweise keine Lösung geben. Es gibt aber Spezialfälle mit einer, oder sogar unendlich vielen Lösungen.

5–29 Beispiel : Ein System von vier Gleichungen für drei Unbekannte kann unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier drei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

- genau eine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

◇

Das Verhalten der Lösungen von unter- und überbestimmten Gleichungssystemen kann somit auch durch das Theorem 5–27 beschrieben werden.

5–30 Bemerkung :

- Es gibt mehrere systematische Verfahren (Algorithmen) um Systeme von linearen Gleichungen zu untersuchen. Bisher haben wir nur den Algorithmus von Gauss (oder Gauss–Jordan) vorgestellt. Es ist bei weitem der wichtigste Algorithmus. Er führt direkt auf die im nächsten Kapitel vorgestellte **LU–Zerlegung** einer Matrix.
- Für grosse Systeme von Gleichungen ist es wesentlich eine geeignete **Pivot–Strategie** zu wählen, damit die Resultate auch zuverlässig sind. Im hier gegebenen Rahmen müssen wir das Problem der numerischen Stabilität ignorieren.
- Für spezielle Matrizen (symmetrische, schwach besetzt, Bandstruktur, u.s.w.) gibt es spezielle, effizientere Verfahren.

$\diamondsuit$

5.4 Aufgaben

• Aufgabe 5–1:
Bestimmen Sie graphisch die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

• Aufgabe 5–2:
Untersuchen Sie das Gleichungssystem mit geometrischen Methoden.

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2\,y = 2 \\ -2\,x & + & a\,y = b \end{array}$$

(a) Für welchen Wert von a hat das System genau eine Lösung?

(b) Für welche Werte von a und b hat das System keine Lösung?

(c) Für welche Werte von a und b hat das System unendlich viele Lösungen?

• Aufgabe 5–3:

Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & + & i\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & c_2 \\ 2\,i\,z_1 & + & z_2 & + & c_1\,z_3 & = & 0 \\ 4\,i\,z_1 & + & 5\,z_2 & + & z_3 & = & i \end{array}$$

• Aufgabe 5–4:
Von einer Parabel der Form

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

ist bekannt, dass sie durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) geht. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die drei Unbekannten a, b und c. Verifizieren Sie, dass die erweiterte Matrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

• Aufgabe 5–5:
Stellen Sie das folgende Gleichungssystem durch einer erweiterte Matrix dar.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

Anschliessend ist die Matrix auf Treppengestalt zu bringen und die Lösung des Gleichungssystems zu finden.

• Aufgabe 5–6:
Zeigen Sie, dass die reduzierte Treppenform einer Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

falls $a\,d - c\,d \neq 0$.

• Aufgabe 5–7:
Bringen Sie die Matrix auf Treppengestalt

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ohne Brüche zu verwenden.

• Aufgabe 5–8:
Die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Finden Sie ein solches System von **drei** Gleichungen.

• Aufgabe 5–9:
Eine Ebene E geht durch die drei Punkte $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$ und $(0, 3, 0)$. Stellen Sie das Gleichungssystem auf für die Parameter a, b und c in der Ebenengleichung

$$z = a\,x + b\,y + c$$

(a) Finden Sie das Gleichungssystem.

(b) Schreiben Sie das System mit Hilfe einer erweiterten Matrix.

(c) Reduzieren Sie die Matrix auf Treppengestalt und finden Sie die Lösung.

• **Aufgabe 5–10:**
Wie ist im Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +a\,x_3 & = & 0 \\ & 2\,x_2 & +4\,x_3 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & +10\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

der Parameter a zu wählen, damit das System mehrere Lösungen hat? Bestimmen Sie anschliessend alle Lösungen.

• **Aufgabe 5–11:**
Die erweiterte Matrix des folgenden Gleichungssystem ist bereits in Treppenform.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(a) Finden Sie ein System von 4 linearen Gleichungen, dass zum obigen System äquivalent ist, aber keine Zeile von Nullen enthält.

(b) Setzen Sie $x_2 = t$ und $x_4 = s$ und geben Sie alle Lösungen dieses Systems von Gleichungen an in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 5–12:**

Im folgenden Gleichungssystem sind die Werte der Konstanten a und b, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von a und b.

(b) Geben Sie alle Lösungen des Systems an.

Pour le système des équations ci–dessous les constantes a et b sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de a et b.

(b) Trouver toutes les solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 6\,y & + & a\,z & = & b \\ 2\,x & + & 7\,y & + & 6\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 8\,y & + & 7\,z & = & 0 \end{array}$$

• **Aufgabe 5–13:**

L'équation d'un cercle est

Eine Kreisgleichung hat die Form

$$a\,(x^2 + y^2) + b\,x + c\,y + d = 0$$

Ce cercle passe par les points

Dieser Kreis geht durch die Punkte

$$P_1 = (5/3) \quad , \quad P_2 = (-2/2) \quad \text{et/und} \quad P_3 = (-1/3)$$

(a) Trouver un système d'équations pour les coefficients a, b, c et d.

(b) Écrire ce système sous la forme d'une matrice augmentée.

(c) Transformer cette matrice sous la forme d'une échelle. Tous les nombres doivent être des nombres entiers.

(d) Donner une formule explicite pour calculer **toutes** les solutions de ce système; pas besoin de calculer les solutions.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a, b, c und d.

(b) Schreiben Sie dieses Gleichungssytem in der Form einer erweiterten Matrix.

(c) Bringen Sie die Matrix in Treppengestalt. Hierbei sollen alle Zahlen ganz sein.

(d) Geben Sie eine Formel um **alle** Lösungen des Gleichungssystems auszurechnen. Es ist nicht notwendig die Lösungen auszurechnen.

• **Aufgabe 5–14:**

Lösen Sie das komplexe Gleichungssystem mit dem Algorithmus von Gauss. Die Zwischenresultate müssen angegeben werden.

Résoudre le système d'équations linéaires complexes à l'aide de l'algorithme de Gauss. Donner les résultats intermédiaires.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & i \\ 2+i & 1+4\,i & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3\,i \\ 5+i \\ 3+9\,i \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 5–15:**

Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

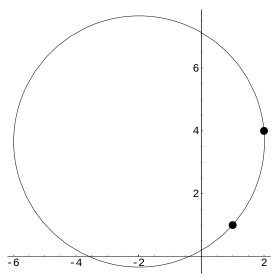
(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & 0 \\ -2\,i\,z_1 & + & z_2 & + & c_1\,z_3 & = & c_2 \\ -4\,i\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & z_3 & = & i \end{array}$$

• **Aufgabe 5–16:**

Ein Kreis mit Radius $R = 4$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird gestützt in den zwei Punkten $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Finden Sie die y–Koordinate des höchsten Punktes des Kreises.
Un cercle avec rayon $R = 4$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est supporté par les deux points $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Trouver la coordonnée y du point le plus haut du cercle.



• **Aufgabe 5–17:**

Eine Kugel mit Radius $R = 3$ im Raum $\mathbb{R}^3$ wird gestützt in den drei Punkten

$$P_1 = (0/0/0) \quad , \quad P_2 = (2/1/0) \quad \text{und} \quad P_3 = (0/2/1)$$

Zu bestimmen ist der Mittelpunkt der Kugel.

• Aufgabe 5–18:
Für welche Werte von λ hat das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcl} (3-\lambda)\,x & & +3\,y & = & 0 \\ x & & +(2-\lambda)\,y & = & 0 \end{array}$$

5.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 5–1 : Es sind zwei Geraden mit Steigungen ± 1 zu zeichnen. der Schnittpunkt ist bei $(x,y)=(3,1)$.

Lösung zu Aufgabe 5–2 :

(a) Die Geraden sind parallel falls $a=-4$. Für $a\neq -4$ gibt es somit genau einen Schnittpunkt.

(b) Für $a=-4$ erhalten wir das System

$$\begin{array}{rcrl} x & + & 2\,y = 2 \\ -2\,x & - & 4\,y = b \end{array}$$

Die beiden Geraden liegen übereinander falls auch $b=-4$. Somit gibt es keine Lösungen bei $a=-4$ und $b\neq -4$.

(c) Es gibt unendlich viele Lösungen bei $a=-4$ und $b=-4$.

Lösung zu Aufgabe 5–3 : Verwende erweiterte Matrizen und Reduktion auf Treppengestalt. Verwendet man die Zahl 1 in der ersten Zeile und Spalte um die erste Spalte zu reduzieren, so erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 2\,i & 1 & c_1 & 0 \\ 4\,i & 5 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 9 & 1-8\,i & i-i\,4\,c_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 1+4\,i-3\,c_1 & i+2\,i\,c_2 \end{array}\right]$$

Man kann auch zuerst die dritte Zeile vereinfachen, mit Hilfe der zweiten, dann sind die Rechnungen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 2\,i & 1 & c_1 & 0 \\ 4\,i & 5 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 3 & 1-2\,c_1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 1+4\,i-3\,c_1 & i+i\,2\,c_2 \end{array}\right]$$

Die Endmatrix hat eine identische Struktur.

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat müssen in der dritten Zeile Nullen stehen und somit muss $c_1=\frac{1+4\,i}{3}$ und $c_2=-1/2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -1/2 \\ 0 & 3 & \frac{1+4\,i}{3}-4\,i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & + & i\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & \frac{-1}{2} \\ & & 3\,z_2 & + & (\frac{1+4\,i}{3} - 4\,i)\,z_3 & = & i \end{array}$$

Die dritte Variable $z_3 \in \mathbb{C}$ kann frei gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicher $z_3 = 0$. Dann liest man ab, dass

$$z_2 = \frac{i}{3} \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{1}{2} - i\,z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}$$

Lösung zu Aufgabe 5–5 : Die erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Nach dem Anwenden des Algorithmus von Gauss ergibt sich

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

und die eindeutig bestimmte Lösung ist

$$(x, y, z) = (1\,,\,2\,,\,3)$$

Lösung zu Aufgabe 5–7 : Ein möglicher Rechnungsweg ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–8 : Offensichtlich kann $z = t$ als Parameter gewählt werden. Die folgende reduzierte Matrix ergibt die gewünschten Lösungen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nun können (bei Bedarf) noch einige Zeilenoperationen ausgeführt werden

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & -39 & 13 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Ein passendes Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rrrcr} 13\,x & & -39\,z & = & 13 \\ & -2\,y & -4\,z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & -2 \end{array}$$

Zu dieser Aufgabe gibt es viele verschiedene richtige Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 5–9 :

(a)

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,a & +2\,b & +c & = & 3 \\ -2\,a & +3\,b & +c & = & 4 \\ 0\,a & +3\,b & +c & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Die Rechnungen (ohne Zeilenvertauschen) ergeben die reduzierte Matrix

Mathematica

```
mat={{1,2,1,3},{-2,3,1,4},{0,3,1,0}}
mat=Pivot[mat,1,1]
mat=Pivot[mat,2,2]
mat=Pivot[mat,3,3]
```

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Einsetzen „von unten nach oben“ ergibt die eindeutig bestimmte Lösung

$$c = 15 \quad , \quad b = -5 \quad \text{und} \quad a = -2$$

Die Ebenengleichung ist somit

$$z = -2\,x - 5\,y + 15$$

Man sollte nun überprüfen, dass die Punkte $(1,2,3)$, $(-2,3,4)$ und $(0,3,0)$ tatsächlich auf dieser Ebene liegen.

Lösung zu Aufgabe 5–10 : Die Darstellung durch eine erweiterte Matrix und Reduktion auf Treppengestalt liefert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 10-3\,a & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12-3\,a & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System unendlich viele Lösungen hat, darf die unterste Zeile nur 0 enthalten, d.h. $12 - 3\,a = 0$. Somit muss $a = 4$ sein. In der Lösung ist $x_3 = t$ frei wählbar. Es gilt $x_2 = -2\,x_3 = -2\,t$ und $x_1 = -x_2 - a\,x_3 = t\,(2-a)$. Somit sind alle Lösungen gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2-a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 5–11 :

(a) Ein einfaches Beispiel kann erzeugt werden, indem die erste Gleichung zur dritten und vierten addiert wird. anschliessend wird das doppelte der zweiten Zeile von der vierten subtrahiert. Eine Reduktion auf Treppengestalt mit dem Verfahren von Gauss wird das ursprüngliche System wieder herstellen.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -9\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b) Das ursprüngliche System kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +3\,x_3 & = & -x_2 & +x_4 \\ & x_3 & = & 0\,x_2 & -4\,x_4 \end{array}$$

In dieser Form ist offensichtlich, dass nach x_1 und x_3 aufgelöst werden kann. Mit $x_2 = t$ und $x_4 = s$ erhält man

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +3\,x_3 & = & -t & +s \\ & x_3 & = & & -4s \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & = & -t & -11\,s \\ & x_3 & = & & -4s \end{array}$$

und somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–12 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 2 & 7-a & -b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a/2 & b/2 \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 0 & a-5 & b-2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat muss $a = 5$ und $b = 2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & + & 3\,y & + & \frac{5}{2}\,z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

(b) Die dritte Variable $z = t \in \mathbb{R}$ kann frei gewählt werden. Dann liest man ab, dass $y = -1 - z = -1 - t$ und $x = 1 - 3\,y - \frac{5}{2}\,z = 1 + 3 + 3\,t - \frac{5}{2}\,t = 4 + \frac{1}{2}\,t$. Die Lösung ist somit eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–13 :

(a)

$$\begin{aligned} a\,34 + b\,5 + c\,3 + d &= 0 \\ a\,8 - b\,2 + c\,2 + d &= 0 \\ a\,10 - b\,1 + c\,3 + d &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Matrix auf Treppengestalt reduzieren.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to Z_2 - \frac{8}{34}\,Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - \frac{10}{34}\,Z_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{40}{34} & 2 - \frac{24}{34} & 1 - \frac{8}{34} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{50}{34} & 3 - \frac{30}{34} & 1 - \frac{10}{34} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to 34\,Z_2 \\ Z_3 \to 34\,Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & -84 & 72 & 24 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to Z_3 - \frac{84}{108}\,Z_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 72 - \frac{84\cdot 44}{108} & 24 - \frac{84\cdot 26}{108} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\,Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 108\cdot 72 - 84\cdot 44 & 108\cdot 24 - 84\cdot 26 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 4080 & 408 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to \frac{1}{408}\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(d) Der Wert von d kann frei gewählt werden. Aus dem obigen Gleichungssystem lassen sich dann der Reihe nach c, b und a bestimmen.

$$\begin{aligned} c &= \frac{-1}{10}\, d \\ b &= \frac{1}{108}\, (44\, c + 26\, d) \\ a &= \frac{-1}{34}\, (5\, b + 3\, c + d) \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Reduziert man die Matrix auf **untere Treppengestalt**, so werden die Zahlen und Rechnungen **viel einfacher**.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 - Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1/6 \\ Z_2 \to -Z_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hier kann a beliebig gewählt werden und dann die anderen Gleichungen bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} b &= -4\, a \\ c &= -b - 2\, a \\ d &= -3\, c + b - 10\, a \end{aligned}$$

Die beiden Lösungswege sind äquivalent.

Lösung zu Aufgabe 5–14 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ i & 3 & i & 5+i \\ 2+i & 1+4\,i & i & 3+9\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & -3+2\,i & -6-2\,i & -4-2\,i \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & -6-4\,i & 4-6\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} z_1 & +2\,z_2 & +3\,z_3 & = & 5+3\,i \\ & (3-2\,i)\,z_2 & -2\,i\,z_3 & = & 8-4\,i \\ & & z_3 & = & i \end{array}$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$z_3 = i \quad , \quad z_2 = 2 \quad , \quad z_1 = 1$$

Lösung zu Aufgabe 5–15 : Mittels erweiterter Matrizen und Reduktion auf Treppengestalt erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2\,i & 1 & c_1 & c_2 \\ -4\,i & 2 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 0 & 1-2\,c_1 & i-2\,c_2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat müssen in der dritten Zeile Nullen stehen und somit muss $c_1 = 1/2$ und $c_2 = i/2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & 1/2+2\,i & i/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{ccccccc} z_1 & + & z_2 & + & z_3 & = & 0 \\ & & (2+4\,i)\,z_2 & + & (1+4\,i)\,z_3 & = & i \end{array}$$

Die dritte Variable $z_3 \in \mathbb{C}$ kann frei gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicher $z_3 = 0$. Dann liest man ab, dass

$$z_2 = \frac{i}{2+4\,i} \quad \text{und} \quad z_1 = -z_2 = \frac{-i}{2+4\,i} = \frac{-i\,(2-4\,i)}{2^2+4^2} = \frac{-4-2\,i}{20}$$

Lösung zu Aufgabe 5–16 : 1. Lösungsmöglichkeit Die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt bei (u, v) ist

$$\begin{aligned} (x-u)^2 + (y-v)^2 &= R^2 \\ x^2 - 2\,x\,u + u^2 + y^2 - 2\,y\,v + v^2 &= R^2 \\ -2\,x\,u - 2\,y\,v + u^2 + v^2 &= R^2 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen" Unbekannten $M = u^2 + v^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u - 2\,y\,v + M = R^2 - x^2 - y^2$$

Wir kennen zwei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrcr} -2\,u & -2\,v & +M & = & 14 \\ -4\,u & -8\,v & +M & = & -4 \end{array}$$

Die entsprechende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -2 & 1 & 14 \\ -4 & -8 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 1 & 2 & \frac{-1}{4} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{+1}{4} & 8 \end{array}\right]$$

Die Variable M kann frei gewählt werden und wir erhalten dann

$$\begin{aligned} v &= 8 - \frac{1}{4}\,M \\ u &= -7 + \frac{1}{2}\,M - v = -15 + \frac{3}{4}\,M \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen können nun in $M = u^2 + v^2$ eingesetzt werden und man erhält eine quadratische Gleichung für M.

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-60 + 3\,M}{4}\right)^2 + \left(\frac{32 - M}{4}\right)^2 \\ 16\,M &= (9+1)\,M^2 - (360 + 64)\,M + 60^2 + 32^2 \\ 0 &= 10\,M^2 - 440\,M + 4624 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung kann gelöst werden mit den beiden Lösungen

$$M_{1,2} = \frac{2\,(55 \pm 3\,\sqrt{15})}{5}$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass der grössere der beiden möglichen Werte der Koordinate v zu wählen ist. Deshalb

$$v = 8 - \frac{1}{4}\,M = 8 - \frac{1}{4}\,\frac{2\,(55 - 3\,\sqrt{15})}{5} \approx 3.6619$$

Der höchste Punkt liegt um R höher als der Mittelpunkt, d.h. auf der Höhe $h \approx 7.6619$. Es gilt (ohne Rechnung) $u \approx -1.98569$.

2. Lösungsmöglichkeit Der Mittelpunkt der Kreises muss auf der Mittelsenkrechten der beiden Punkte liegen. Eine Parametrisierung dieser Geraden ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt muss einen Abstand von $R = 4$ vom Punkt $(1,1)$ haben. Das ergibt die Gleichung

$$16 = \left\| \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.5 - 3\,t \\ 1.5 + t \end{pmatrix} \right\|^2 = (0.5 - 3\,t)^2 + (1.5 + t)^2$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 16 &= \frac{1}{4} - 3\,t + 9\,t^2 + \frac{9}{4} + 3\,t + t^2 \\ 0 &= 10\,t^2 + 104 - 16 = 10\,t^2 - 544 \\ t_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{54}{40}} = \pm\sqrt{\frac{27}{20}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Eine Zeichnung zeigt, dass die positive Lösung die Richtige ist und wir erhalten die Mitelpunktskoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.98569 \\ 3.6619 \end{pmatrix}$$

Der höchste Punkt ist noch um $R = 4$ nach oben verschoben und hat somit die Koordinaten $(-1.98569\,/\,7.6619)$.

Lösung zu Aufgabe 5–17 : Die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt bei (u, v, w) ist

$$\begin{aligned}(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 &= R^2\\ x^2-2\,x\,u+u^2+y^2-2\,y\,v+v^2+z^2-2\,z\,w+w^2 &= R^2\\ -2\,x\,u-2\,y\,v-2\,z\,w+u^2+v^2+w^2 &= R^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\end{aligned}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen“ Unbekannten $M = u^2 + v^2 + w^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v, w und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u-2\,y\,v-2\,z\,w+M = R^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Wir kennen drei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrrcl} 0\,u & +0\,v & +0\,w & +M & = & 9\\ -4\,u & -2\,v & +0\,w & +M & = & 4\\ 0\,u & -4\,v & -2\,w & +M & = & 4\end{array}$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten und dritten subtrahieren, wird daraus sofort ein System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{rrrcl} 4\,u & +2\,v & & = & 5\\ & 4\,v & +2\,w & = & 5\end{array}$$

Dieses System hat bereits Dreiecksgestalt und kann von unten nach oben aufgelöst werden. Hierbei kann $w = t$ als freier Parameter gewählt werden.

$$\begin{aligned} v &= \frac{5}{4}-\frac{t}{2}=\frac{5-2\,t}{4}\\ u &= \frac{5}{4}-\frac{v}{2}=\frac{5}{4}-\frac{5-2\,t}{8}=\frac{5+2\,t}{8}\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{8}\\ \frac{5}{4}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{-2}{8}\\ \frac{-2}{4}\\ 1\end{pmatrix}$$

Dies ist offensichtlich die Parametrisierung einer Geraden im Raum. Ist die mögliche Lage aller Kugelmittelpunkte. Der Radius wird aber nicht 3 sein. Diese Gerade kann erzeugt werden als Schnittgerade der mittelsenkrechten Ebenen der drei gegebenen Punkte.

Diese Beziehungen können nun in der ersten Gleichung eingesetzt werden um den Mittelpunkt mit dem richtigen Radius zu finden.

$$\begin{aligned} u^2+v^2+w^2 &= M=9\\ \frac{(5+2\,t)^2}{64}+\frac{(5-2\,t)^2}{16}+t^2 &= 9\\ 25+20\,t+4\,t^2+4\,(25-20\,t+4\,t^2)+64\,t^2 &= 9\cdot 64\\ t^2\,(4+16+64)+t\,(20-80)+25+100-9\cdot 64 &= 0\\ t^2\,84-t\,60-451 &= 0\\ t_{1,2}=w_{1,2} &= \frac{1}{42}\left(15\pm 4\sqrt{606}\right)\end{aligned}$$

Da die Kugel gestützt wird durch die drei Punkte, muss sie oberhalb der Punkte liegen. Somit kommt nur die positive Lösung von w in Frage und wir erhalten

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{42}\left(30+\sqrt{606}\right)\approx 1.30041\\ v &= \frac{1}{42}\left(45-2\sqrt{606}\right)\approx -0.100813\\ w &= \frac{1}{42}\left(15+4\sqrt{606}\right)\approx 2.70163\end{aligned}$$

Die Aufgabe kann auch mit *Mathematica* gelöst werden

Mathematica

```
eq[x_,y_,z_] := (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 ==9
eq1=eq[0,0,0];
eq2=eq[2,1,0];
eq3=eq[0,2,1];
sol=Solve[{eq1,eq2,eq3}]
N[sol]
```

Lösung zu Aufgabe 5–18 : Die erweiterte Matrix und deren Reduktion auf Treppengestalt ergeben.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0 \\ 0 & \left(2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}\right) & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System nichttriviale Lösungen hat, muss die zweite Zeile nur aus Nullen bestehen, d.h.

$$2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$(2-\lambda)\,(3-\lambda)-3=\lambda^2-5\,\lambda+3=0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\,\left(5\pm\sqrt{25-12}\right)$$

Diese beiden Werte $\lambda_{1,2}$ heissen auch Eigenwerte der Matrix

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

5.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Systeme von zwei und drei linearen Gleichungen geometrisch intepretieren können.
- Systeme von linearen Gleichungen von Hand und mit geeigneten Hilfsmitteln zuverlässig lösen können.
- den Gauss'schen Algorithmus gut verstehen.
- das Verhalten von Lösungen von homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen beschreiben können.

Kapitel 6

Matrizen und die LU–Zerlegung

6.1 Elementaroperationen und die LU–Zerlegung

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren kennen lernen um lineare Gleichungssysteme zu lösen oder inverse Matrizen effizient zu bestimmen. Die vorgestellten Verfahren bilden die Grundlage für die in Taschenrechnern oder Mathematikprogrammen verwendeten Verfahren.

6.1.1 Elementaroperationen und Elementarmatrizen

6–1 Definition : Es gibt drei Typen von **elementaren Zeilenoperationen**:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl c, wobei $c \neq 0$.
2. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
3. Vertauschen von zwei Zeilen.

Analog können elementare Spaltenoperationen festgelegt werden.

6–2 Definition : Eine **Elementarmatrix** entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ durch eine elementare Zeilen/Spalten–Operation.

6–3 Theorem :

- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Zeilen**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $E\,A$ aus der Matrix A durch die selbe **Zeilen**operation.*
- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Spalten**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $A\,E$ aus der Matrix A durch die selbe **Spalten**operation.*

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{I}_n \longrightarrow E \quad \text{durch eine Zeilenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow E\,A \quad \text{durch dieselben Zeilenop.} \\
\mathbb{I}_n \longrightarrow E \quad \text{durch eine Spaltenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow A\,E \quad \text{durch dieselben Spaltenop.}
\end{array}$$

6–4 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann die dritte Zeile oder Spalte einer Matrix mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 18 \\ 7 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

6–5 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann das (-2)–fache der dritten Zeile zur ersten Zeile addiert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

oder das (-2)–fache der ersten Spalte zur dritten Spalte addiert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

6–6 Beispiel : Elementarmatrizen können sehr leicht invertiert werden, indem man die entsprechenden Zeilen (oder Spalten) Operationen wieder rückgängig macht. Hier einige Beispiele

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fast alle Elementarmatrizen sind invertierbar. Einzig falls eine Zeile (oder Spalte) mit Null multipliziert wird, kann die Operation nicht rückgängig gemacht werden. $\diamondsuit$

In Aufgabe 6–1 ist zu zeigen, dass eine Dreiecksmatrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Dadurch lassen sich Dreicksmatrizen auch leicht invertieren.

6–7 Beispiel : Permutationsmatrizen
Ensteht eine Elementarmatrix durch Vertauschen zweier Zeilen (oder) Spalten, so heisst sie auch **Permutationsmatrix**. Zwei Beispiele von elementaren Permutationsmatrizen sind

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P_1 entsteht durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile (oder Spalte). P_2 entsteht durch Vertauschen der zweiten und vierten Zeile (oder Spalte).

Elementare Permutationsmatrizen sind leicht invertierbar: die inverse Matrix ist gegeben durch die Matrix selbst. Mit den obigen beiden Beispielen gilt

$$P_1 \cdot P_1 = \mathbb{I}_4 \quad \text{und} \quad P_2 \cdot P_2 = \mathbb{I}_4$$

Auch wenn mehrere Vertauschungen ausgeführt werden spricht man von Permutationsmatrizen. So ist

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Permutationsmatrix, aber keine Elementarmatrix. Eine beliebige Permutationsmatrix P ist charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften.

- Alle Einträge in P sind 1 oder 0.
- In jeder Zeile befindet sich genau eine Zahl 1 .
- In jeder Spalte befindet sich genau eine Zahl 1 .

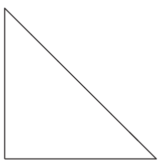
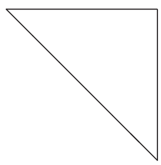
Man kann zeigen, dass jede Permutationsmatrix aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ erzeugt werden kann durch mehrere Zeilenvertauschungen (siehe Aufgabe 6–2). ♢

6.1.2 Die LU–Zerlegung löst Gleichungssysteme

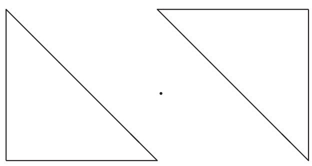
Im vorangehenden Kapitel wurden Systeme von linearen Gleichungen mit Hilfe von elementaren Zeilenoperationen gelöst. Nun wird aufgezeigt, dass dieser Prozess zur Zerlegung einer Matrix als Produkt von zwei Dreiecksmatrizen führt. Wir werden zuerst aufzeigen, dass damit das lineare Gleichungssystem so gut wie gelöst ist. Als Konsequenz des letzten Abschnittes kann die **LU–Zerlegung** einer Matrix besprochen werden. In Programmbibliotheken ist dieses Verfahren oft implementiert. So finden Sie zum Beispiel in [Pres92] und [Pres86] Pascal und C Programme.

Die LU–Zerlegung (manchmal auch LR–Zerlegung) einer quadratischen Matrix ist die bekannteste Form einer Zerlegung. Man schreibt die Matrix A als Produkt einer Links–Matrix L mit einer Rechts–Matrix U. Ist diese Zerlegung geglückt, so kann ein Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ leicht gelöst werden. Diese Tatsache kann graphisch illustriert werden:

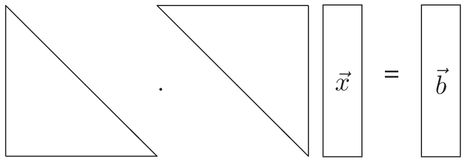
L und U sind Dreiecksmatrizen, alle Zahlen in der Matrix, ausserhalb eines Dreiecks, sind Null.

L =  und U = 

Wegen $A = L\,U$ gilt

A = 

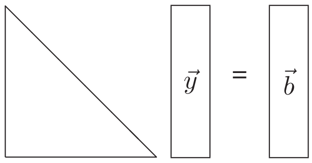
Das System $A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = \vec{b}$ entspricht der Graphik



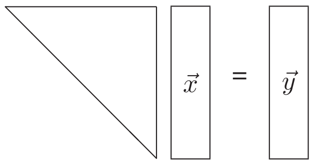
Das Gleichungssystem wird nun in zwei Schritten bearbeitet

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} L\,\vec{y} &=& \vec{b} \\ U\,\vec{x} &=& \vec{y} \end{array}$$

Zuerst wird das Gleichungssystem $L\,\vec{y} = \vec{b}$ von oben nach unten nach $\vec{y}$ aufgelöst (Vorwärtseinsetzen).



Anschliessend kann $U\,\vec{x} = \vec{y}$ von unten nach oben nach $\vec{x}$ aufgelöst werden (Rückwärtseinsetzen).



Aufgrund der obigen Erläuterungen sollte klar sein, dass mit Hilfe der LU–Zerlegung Systeme von linearen Gleichungen gelöst werden können. In nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie diese Zerlegung konstruiert werden kann.

6.1.3 LU–Zerlegung und der Algorithmus von Gauss

Bringen Sie eine Matrix mit Hilfe des Algorithmus von Gauss auf Treppengestalt, so führen Sie unbewusst eine LU–Zerlegung durch. Wir ignorieren das (eventuell notwendige) Vertauschen von Zeilen und illustrieren das Verfahren anhand eines Beispiels aus [AntoRorr91, p. 443]. Berücksichtigt man das Pivotieren, was für grosse Matrizen unumgänglich ist, so sind zusätzlich noch Permutationsmatrizen zu berücksichtigen.

Wir untersuchen als typisches Beispiel ein System mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Wollen wir diese Matrix auf Treppengestalt reduzieren, so können die folgenden Elementarschritte ausgeführt werden

1. erste Zeile durch 2 dividieren
2. das 3–fache der ersten Zeile zur zweiten addieren
3. das 4–fache der ersten Zeile von der dritten subtrahieren
4. das 3–fache der zweiten Zeile zur dritten addieren
5. die dritte Zeile durch 7 dividieren

Diese Schritte sind in der linken Spalte der Figur 6.1 illustriert. Rechts finden Sie die Matrizen um die Elementaroperationen durch Matrizenmultiplikationen auszuführen.

Die Zeilenoperationen in Figur 6.1 werden wir nun mit Hilfe von Multiplikationen von Elementarmatrizen interpretieren. Wir schreiben die Matrix A künstlich als Produkt $A = \mathbb{I}_3 \cdot A$ und fügen zwischen die beiden Faktoren

Reduktion auf Treppengestalt	Elementarmatrix der Zeilenoperation	Inverse Matrix der Elementarmatrix
$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_2 \leftarrow Z_2 + 3\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow Z_3 - 4\, Z_1$	
$\downarrow$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow Z_3 + 3\, Z_2$	
$\downarrow$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$Z_3 \leftarrow \frac{1}{7}\, Z_3$	
$\downarrow$	$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$	$E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		

Abbildung 6.1: Beispiel einer LU–Zerlegung einer Matrix

Terme $\mathbb{I}_3 = E_i^{-1} \cdot E_i$ ein. Der Faktor E_i wirkt als Zeilenoperation auf den rechten Faktor, der Term E_i^{-1} wirkt als Spaltenoperation auf den linken Faktor.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1^{-1} \cdot E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} \cdot E_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} \cdot E_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4^{-1} \cdot E_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_5^{-1} \cdot E_5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \cdot \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Matrix A zerlegt als

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

6.1.4 Bestimmen der inversen Matrix

Bei der Zerlegung von $A = L \cdot U$ wurden Zeilenoperationen ausgeführt, indem die Matrix A von links mit Elementarmatrizen multipliziert wurde. Die selben Operationen können auch mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ ausgeführt werden. Das führt zu

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I} \\
E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
U \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Die obere Dreiecksmatrix U kann durch drei weitere Elementaroperationen auf die Einheitsmatix reduziert werden, d.h.

$$E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot U = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{I} \cdot A^{-1} = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1$$

Indem die selben Zeilenoperationen nicht nur auf A, sondern auch auf der Einheitsmatrix ausgeführt werden, entsteht die inverse Matrix A^{-1}. Nun können wir in der obigen Formel für A^{-1} einen Algorithmus ablesen um die inverse Matrix zu berechnen:

1. Starte mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.
2. Während der LU–Zerlegung der Matrix A ist jede Zeilenoperation auch auf die obige Matrix anzuwenden.
3. Nach der LU–Zerlegung ist die Rechtsmatrix U durch Zeilenoperationen auf Diagonalgestalt zu bringen und die passenden Operationen sind auf die obige Matrix anzuwenden.
4. Als Resultat entsteht die inverse Matrix A^{-1} in der rechten Hälfte der erweiterten Matrix.

Dieses Verfahren kann mit Hilfe einer erweiterten Matrix noch geschickt dargestellt werden. Im hier untersuchten Beispiel ergeben sich die folgenden Rechnungen. Mit den zur Verfügung stehenden modernen Hilfsmitteln wird man kaum mehr in die Lage kommen viele solche Rechnungen von Hand ausführen zu müssen. Trotzdem ist es nützlich zu wissen, worauf zugrundeliegende Algorithmen aufbauen. Deshalb sei hier ein Beispiel mit allen Rechendetails vorgeführt. Bestimmt wird die inverse Matrix von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{2}\,Z_1 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_2 + 3\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 - 4\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 + 3\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{7}\,Z_3 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_2 - 3\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - 3\,Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-16}{14} & \frac{+3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -16 & 6 & 16 \\ 6 & -4 & -6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

6–8 Theorem : *Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichwertig):*

(a) A ist invertierbar.

(b) Das lineare Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Die Matrix A kann geschrieben werden als Produkt zweier Dreiecksmatrizen $A = L\,U$. In den Diagonalen der Matrizen L und U sind alle Einträge von Null verschieden.

(d) Die Matrix A ist zeilenäquivalent zur Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.

Beweis : Wir zeigen eine geschlossene Implikationskette $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Da A invertierbar ist, gibt es eine inverse Matrix A^{-1} mit $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathbb{I}_n$. Ist nun $\vec{x}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$ so kann diese Gleichung von links mit A^{-1} multipliziert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A\,\vec{x} &= A^{-1}\,\vec{0} \\ \mathbb{I}_n\,\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Somit hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Da das System $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die Lösung $\vec{0}$ hat, kann der Gauss–Algorithmus vollständig ausgeführt werden und A wird also in die Form $A = L\,U$ umgeschrieben.

$(c) \Longrightarrow (d)$ Die Dreiecksmatrizen L und U können je als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden, und somit auch $A = L\,U$.

$(d) \Longrightarrow (a)$ A kann als endliches Produkt von invertierbaren Elementarmatrizen geschrieben werden, d.h.

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=1}^{m} E_i$$

Die einzelnen Elementarmatrizen sind offensichtlich invertierbar und wir können die obige Gleichung der Reihe nach von links mit den Matrizen E_1^{-1}, E_2^{-1}, $E_3^{-1} \ldots E_m^{-1}$ multiplizieren

$$\begin{aligned} E_1^{-1} \cdot A &= E_1^{-1} \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=2}^{m} E_i \\ E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_3 \cdot E_4 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=3}^{m} E_i \\ E_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_m \\ E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

Multipliziert man A der Reihe nach von rechts mit $E_m^{-1}, E_{m-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$ so ergibt sich mit einer sehr ähnlichen Rechnung
$$A \cdot E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} = \mathbb{I}_n$$
Deshalb ist die inverse Matrix gegeben durch
$$A^{-1} = E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1}$$

□

In der Definition der inversen Matrix A^{-1} werden die **beiden** Eigenschaften
$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n$$
verlangt. Mit Hilfe des obigen Theorems kann man zeigen, dass eine der beiden genügt.

6–9 Satz : *Sei A eine $n \times n$–Matrix und B eine Matrix gleicher Grösse. Dann gilt*

(a) *Gilt $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.*

(b) *Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.*

Beweis :

(a) Wir zeigen dazu zuerst, dass A invertierbar ist. Sei $\vec{x}$ eine Lösung von $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Dann multiplizieren wir diese Gleichung von links mit B und erhalten $B \cdot A\,\vec{x} = B\,\vec{0}$ und somit erhalten wir wegen $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ auch $\mathbb{I}_n\,\vec{x} = \vec{0}$. Deshalb hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Aufgrund des vorangehenden Theorems ist die Matrix A invertierbar und wir erhalten
$$\begin{aligned} B \cdot A &= \mathbb{I}_n \\ B \cdot A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I}_n \cdot A^{-1} \\ B &= A^{-1} \end{aligned}$$

(b) Wir müssen noch zeigen, dass $B \cdot A = \mathbb{I}_n$. Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$, so ist aufgrund des Beweises des ersten Teils B invertierbar und $B^{-1} = A$. Nun können wir die Gleichung $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ von rechts mit A multiplizieren und erhalten $B \cdot A = B \cdot B^{-1} = \mathbb{I}_n$. Damit erfüllt B beide Eigenschaften der inversen Matrix von A und es gilt also $A^{-1} = B$

□

6.1.5 Lösen von Gleichungssystemen, Rechenaufwand

Ist nun ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte.
$$A\,\vec{x} = \vec{b}$$
zu lösen, so löst man die beiden einfach lösbaren Systeme (Dreicksmatrizen)
$$\begin{aligned} L\,\vec{y} &= \vec{b} \\ U\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$
und es gilt
$$A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = L\,\vec{y} = \vec{b}$$
d.h. wir haben das ursprüngliche System in zwei Schritten gelöst. Das Lösen der Gleichung $L\,\vec{y} = \vec{b}$ heisst auch **Vorwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „oben nach unten“ durch Einsetzen gelöst werden. Das Lösen der Gleichung $U\,\vec{x} = \vec{y}$ heisst auch **Rückwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „unten nach oben“ durch Einsetzen gelöst werden.

Nun versuchen wir den Rechenaufwand für diese Operationen abzuschätzen. Eine **Operation** soll hierbei aus einer Multiplikation und einer Addition bestehen. Wir versuchen ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte zu lösen. Geht man den Algorithmus von Gauss Zeile für Zeile durch, so kann die Anzahl der notwendigen Operationen für die LU–Zerlegung gezählt werden, ebenso beim Vor- und Rückwärtseinsetzen.

Lösen einer einzelnen Gleichung

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.
   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ Operationen ausgeführt werden.

   Als Rechenaufwand für $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6} \approx \frac{1}{3}\,n^3$$
2. Vorwärtseinsetzen $L\,\vec{y} = \vec{b}$: Aufwand für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$
3. Rückwärtseinsetzen $U\,\vec{x} = \vec{y}$: Aufwand für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$

Ist n gross, so ist offensichtlich $n^3 \gg n^2$ und nur der Aufwand für die Zerlegung ist erheblich. Müssen mehrere Gleichungssysteme mit der selben Matrix A aber verschiedenen Vektoren $\vec{b}$ gelöst werden, so muss die Zerlegung $A = L\,U$ nur einmal bestimmt werden. Der Aufwand pro zusätzlich zu lösendes Gleichungssystem ist in etwa n^2. Terme der Ordnung n^2 können für $n \gg 1$ vernachlässigt werden und man erhält:

> Um ein System von n linearen Gleichungen mit Hilfe der LU–Zerlegung zu lösen benötigt man ca. $\frac{1}{3}\,n^3$ Operationen.

Berechnen der inversen Matrix

Will man die inverse Matrix bestimmen, so kann auch das Schema der LU–Zerlegung verwendet werden. Das Schema muss aber mit der um eine Einheitsmatrix erweiterten Matrix ausgeführt werden.

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.
   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ und $n-1$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ und $2\,(n-2)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ und $3\,(n-3)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Die obigen Schritte werden bis zur letzten Zeile durchgeführt.

   Als Rechenaufwand für die erste Phase des Invertierens einer $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n}((n-k)^2 + k\,(n-k)) = \sum_{k=1}^{n} n\,(n-k) = \frac{n^2\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$
2. Beim Rückwärtseinsetzen arbeiten wir von unten nach oben.
   - Um alle Zahlen ganz rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-1)\,(n+1)$ Operationen.

- Um alle Zahlen in der zweiten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-2)\,(n+1)$ Operationen.
- Um alle Zahlen in der dritten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-3)\,(n+1)$ Operationen.
- Der Prozess muss bis zur obersten Zeile fortgesetzt werden.

$$(n+1)\,\sum_{k=1}^{n}(n-k) \approx (n+1)\,\frac{n^2}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$

Insgesamt sind also ca. n^3 Operationen notwendig, um eine $n \times n$–Matrix zu invertieren. Um anschliessend ein Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, kann der Vektor $\vec{b}$ mit A^{-1} multipliziert werden. Das benötigt ca. n^2 Operationen.

	LU–Zerlegung	A^{-1} bestimmen
Grundaufwand	$\frac{1}{3}\,n^3$	n^3
Zusätzlicher Aufwand um ein System$A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen	n^2	n^2

Tabelle 6.1: Vergleich von LU–Zerlegung und Matrizeninversion

Tabelle 6.1 zeigt, dass die LU–Zerlegung effizienter ist um ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, als das Berechnen der inversen Matrix A^{-1}.

Computer	Anzahl FLOP pro Sekunde
NeXT (68040/25MHz)	1.0 M
HP 735/100	10.0 M
SUN Sparc ULTRA 10 (440MHz)	50.0 M
Pentium III 800 (zu wenig Cache)	50.0 M
Pentium III 800 (in Cache)	185.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (zu wenig Cache)	370.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (in Cache)	450.0 M

Tabelle 6.2: Rechenleistung einiger CPU

In Tabelle 6.2 finden Sie eine Zusammenstellung von Rechenleistungen einiger CPU's für Probleme vom Typ "Matrix invertieren". Aufgrund dieser Tabelle kann leicht die Rechenzeit abgeschätzt werden um ein System von n linearen Gleichungen zu lösen. Die Zahlen in Tabelle 6.3 können Ihnen einen Hinweis geben welche Grössenordnung Sytem auf einem gegebenen Rechener gelöst werden kann.

Anzahl Gleichungen	Anzahl Operationen	Rechenzeit für 10 M Flop CPU
n	$\frac{1}{3}\,n^3$	$\frac{1}{3}\,n^3\ 10^{-7}$ sec
10	333	0.03 msec
100	$3.33 \cdot 10^5$	3 msec
1000	$3.33 \cdot 10^8$	3 sec
10000	$3.33 \cdot 10^{11}$	50 min

Tabelle 6.3: Rechenzeit um ein lineares System zu lösen

6.1.6 Speicheraufwand und Code in MATLAB

Um für eine $n \times n$–Matrix A die Zerlegung $A = L \cdot U$ zu speichern ist nur eine $n \times n$–Matrix nötig, da man weiss, dass die obere Hälfte von L und die untere Hälfte von U mit Nullen gefüllt sind. Auf der Diagonalen von U findet man nur Zahlen 1. Diese Information kann bereits während der Rechnung ausgenutzt werden um Speicherplatz zu sparen.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix}$$

Die obige Notation muss folgendermassen gelesen werden

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix} \quad \text{entspricht} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Im Verlaufe des Reduktionsprozesses werden also in der zu zerlegenden Matrix A die Einträge modifiziert, so dass zum Schluss alle Information über die LR–Zerlegung in A enthalten ist. Der untenstehende MATLAB–Code (tatsächlich wurde die MATLAB–Clone OCTAVE verwendet) führt die Rechnungen aus. Es ist zu beachten, dass alle Rechnungen „innerhalb“ der Matrix A ausgeführt werden.

Octave

```
function res = ludemo(A)
%  res  = ludemo(A) if A is a square matrix
%  performs the LU decomposition of the matrix A
%  !!!!!!!!!!!! NO PIVOTING IS DONE !!!!!!!!!!!!!!!!
%  this is for instructional purposes only
%  the computation are done without creating new matrices
%  the matrix A is used to store L and U
%  the upper matrix is to be found strictly above the diagonal
%  and diagonal elements are 1, you may call
%     U=triu(res,1)+eye(3)
%  the lower matrix is to be found on and below the diagonal
%  you may call
%     L=tril(res)
%   you should then obtain A = L U

% a test on the dimensions
[n,m] = size(A);
if (n!=m)
  error ("ludemo: matrix has to be square ")
endif

% perform the decomposition
for k=1:n-1
  if ( A(k,k) == 0) error ("ludemo: division by 0") endif
  A(k,k+1:n) = A(k,k+1:n)/A(k,k);
  for j=k+1:n
     A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(k,k+1:n)*A(j,k);
  endfor
endfor

% return the result
```

```
res=A;
endfunction
```

Die untenstehende Help–Seite von Matlab (orginal) zeigt, dass auch bei Berücksichtigung der Permutationen keine gravierenden Änderungen auftreten.

Matlab

```
LU     Factors from Gaussian elimination.
       [L,U] = LU(X) stores a upper triangular matrix in U and a
       "psychologically lower triangular matrix", i.e. a product
       of lower triangular and permutation matrices, in L , so
       that X = L*U.

       [L,U,P] = LU(X) returns lower triangular matrix L, upper
       triangular matrix U, and permutation matrix P so that
       P*X = L*U.

       By itself, LU(X) returns the output from LINPACK'S ZGEFA routine.
```

6.2 Matrix Operationen mit dem HP 48

Dieser Taschenrechner beherrscht alle Grundoperationen mit Vektoren und Matrizen. Für eine Einführung ist das Handbuch zu konsultieren.

6.2.1 Lösen von Gleichungssystemen

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,x_1 \quad +3\,x_2 \quad +4\,x_3 &= 7 \\ 2\,x_1 \quad +0\,x_2 \quad -1\,x_3 &= -1 \\ -2\,x_1 \quad +1\,x_2 \quad +2\,x_3 &= 2 \end{aligned}$$

kann durch

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Der HP kann dieses System lösen, indem der Vektor $\vec{b}$ als `[7 -1 2]` auf den Stack gelegt wird, dann die Matrix **A** und anschliessend wird mit der Divisionstaste $\boxed{\div}$ die Lösung $\vec{x}$ bestimmt. Legt man eine Matrix **A** auf den Stack und drückt dann die Taste `1/x`, so wird die Matrix invertiert. Die inverse Matrix kann mit dem Vektor $\vec{b}$ multipliziert werden mit dem Resultat $\vec{x}$.

6.2.2 Matrix–Zerlegungen

Auf den neueren Modellen der Taschenrechner HP 48 sind einige Befehle für Matrixzerlegungen (**Faktorisierung**) installiert. Ziel dieser Notiz ist es diese zu erläutern und mit Beispielen zu illustrieren. Sie finden diese Befehle via Menues durch `MTH` `MATR` `FACTR`. Um die Übersichtlichkeit etwas zu verbessern wurden alle Resultate gerundet.

LU–Zerlegung

Im Kurs wird die LU–Zerlegung einer Matrix besprochen. Sie entspricht dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Verfahrens von Gauss. Auf dem Taschenrechner erhalten Sie diese Faktorisierung mit Hilfe der Taste `LU` . Die LU–Zerlegung kann nur von einer quadratischen Matrix bestimmt werden.

Mit Hilfe der LU–Zerlegung können auch nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme untersucht werden.

6–10 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Legt man diese Matrix auf den Stack und wendet den Befehl $\boxed{\texttt{LU}}$ an, so erhalten Sie drei Matrizen als Resultat zurück:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1.14286 & 1.2857 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

In den Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{U}$ stecken die Zeilenoperation des Verfahrens von Gauss und in $\mathbf{P}$ die eventuell notwendigen Zeilenvertauschungen. Da bei der Matrix $\mathbf{L}$ unten rechts eine 0 steht ist $\det \mathbf{A} = 0$ und ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ nicht eindeutig lösbar. Man untersucht stattdessen die zwei einfach lösbaren Systeme

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,\vec{y} &= \mathbf{P} \cdot \vec{b} \\ \mathbf{U}\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,\vec{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L}\,\vec{y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}\,\vec{b} = \vec{b}$$

Als Beispiel untersuchen wir den Vektor $\vec{b} = (1, 2, 4)^T$. Es ist

$$\mathbf{P}\,\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit wird aus der Gleichung $\mathbf{L}\,\vec{y} = \mathbf{P}\,\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses System versucht man von oben nach unten zu lösen und erhält sofort

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{7} \\ y_2 &= \frac{1}{0.85714}\,(1 - y_1) = \frac{1}{0.85714}\,\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Aber die dritte Gleichung lautet

$$4\,y_1 + 0.42857\,y_2 = 2$$

Diese Gleichung ist falsch (y_1 und y_2 sind bereits bekannt). Die Gleichung wäre dann gelöst, wenn in der zweiten Komponente des Vektors $\vec{b}$ statt der 2 die „richtige" Zahl stehen würde. Man kann also mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{L}$ herausfinden für welche speziellen Vektoren das System $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung hat, obwohl $\det \mathbf{A} = 0$. Man kann auch ablesen, wie diese Lösungen aussehen. ♢

LQ–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ dargestellt durch

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}$$

Hierbei ist $\mathbf{P}$ eine $m \times m$–Permutationsmatrix, $\mathbf{L}$ eine $m \times n$ untere Dreiecksmatrix und $\mathbf{Q}$ eine orthogonale $n \times n$–Matrix. Lösungen von $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,\vec{y} &= \mathbf{P}\cdot\vec{b} \\ \mathbf{Q}\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

untersucht. Da die Matrix $\mathbf{Q}$ orthogonal ist, ist das System $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$ für beliebige Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Eine wesentliche Eigenschaft von orthogonalen Matrizen ist $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ und somit kann $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$ leicht durch $\vec{x} = \mathbf{Q}^T\,\vec{y}$ gelöst werden. Das wesentliche Verhalten von Lösungen von $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ wird bestimmt durch das erste Gleichungssystem.

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung können auch über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

6–11 Beispiel : Wir untersuchen die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix entspricht einem System von zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten und man kann deshalb keine eindeutige Lösung erwarten. Mit Hilfe von $\boxed{\texttt{LQ}}$ erhält man

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix}$$

es gilt $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}$, d.h.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

und statt des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

untersucht man

$$\begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das erste Gleichungssystem für y_1, y_2 und y_3 lautet

$$\begin{aligned} 4.583\,y_1 \quad &+0\,y_2 &+0\,y_3 &= b_2 \\ 3.273\,y_1 \quad &-1.813\,y_2 &+0\,y_3 &= b_1 \end{aligned}$$

Somit sind y_1 und y_2 eindeutig bestimmt, die dritte Variable y_3 aber bleibt frei wählbar. Mit Hilfe von

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sind nun alle Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems beschrieben. ♢

6–12 Beispiel : Der Nullraum der Matrix $\mathbf{A}$ ist gegeben durch die Lösungen des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung kommt man auf die zwei Gleichungssysteme $\mathbf{L}\,\vec{y} = \vec{0}$ und $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$. Die Zerlegung des vorangehenden Beispiels führt also auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrr} 4.583\,y_1 & +0\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \\ 3.273\,y_1 & -1.813\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \end{array}$$

Die Lösungen sind Vielfache der Vektors $\vec{y}_h = (0,0,1)^T$. Alls Lösungen des Systems $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$ sind somit Vielfache des Vektors

$$\vec{x}_h = \mathbf{Q}^T\,\vec{y}_h = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.241 \\ -0.843 \\ 0.482 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{x}_h$ bildet eine Basis von $\ker A$. ♢

6–13 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der drei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

für die zwei Unbekannten x_1 und x_2 untersucht man nun

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Der wesentliche Unterschied ist die Zahl 0 oben rechts in der Matrix $\mathbf{L}$ und die Permutation der Komponenten von $\vec{b}$. Aus den ersten beiden Gleichungen $-5\,y_1 = b_3$ und $0.2\,y_1 + 1.4\,y_2 = b_1$ können y_1 und y_2 berechnet werden. Nun gibt es genau einen zugelassenen Wert für b_2 so dass die dritte Gleichung $-2.8\,y_2 + 0.4\,y_2 = b_2$ gelöst wird. Dieses Verhalten sollte keine Überraschung sein für ein überbestimmtes Gleichungssystem. ♢

QR–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$$

Hierbei ist P eine $n \times n$–Permutationsmatrix, R eine $m \times n$ obere Dreiecksmatrix und Q eine orthogonale $m \times m$–Matrix. Lösungen von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von $\vec{x} = P\,\vec{z}$ und $A\,P\,\vec{z} = Q \cdot R\,\vec{z} = \vec{b}$ ersetzt.

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{Q}\,\vec{y} & = & \vec{b} \\ \mathbf{R}\,\vec{z} & = & \vec{y} \\ \vec{x} & = & \mathbf{P}\,\vec{z} \end{array}$$

Da die Matrix $\mathbf{Q}$ orthogonal ist, ist $\vec{y}$ ergeben durch $\vec{y} = \mathbf{Q}^T\,\vec{b}$. Da $\mathbf{R}$ eine Rechtsmatrix ist kann das zweite Gleichungssystem von unten nach oben aufgelöst werden. Von der Lösung $\vec{z}$ kommt man durch Permutationen zu $\vec{x} = \mathbf{P}\,\vec{z}$ zum Lösungsvektor.

Auch mit Hilfe der QR–Zerlegung können über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

6–14 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels $\boxed{\texttt{QR}}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der zwei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

für die drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 berechnet man zuerst

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

d.h. man löst $\mathbf{Q}\vec{y} = \vec{b}$ durch $\vec{y} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b} = \mathbf{Q}^T\vec{b}$. Dann untersucht man die beiden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

d.h $\mathbf{R}\vec{z} = \vec{y}$. In diesem System ist z_3 frei wählbar. z_1 und z_2 können als Funktion von z_3 angegeben werden. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\,\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

können wir x_2 frei wählen und dann x_3 und x_1 als Funktion x_2 angeben.

Für $\vec{b} = (1\,,\,2)^T$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und aus

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} -5\,z_1 &= 1 - 0.2\,z_2 - 2.8\,z_3 \\ 1.4\,z_2 &= -2 + 0.4\,z_3 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{5}\,(1 - 0.2\,x_1 - 2.8\,x_2) \\ x_1 &= \frac{1}{1.4}\,(-2 + 0.4\,x_2) \end{aligned}$$

♢

Singulärwert–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}$$

Hierbei ist **U** eine orthogonale $m \times m$–Matrix, **V** eine orthogonale $n \times n$–Matrix und **D** eine $m \times n$–Matrix die nur in der Diagonale von 0 verschiedene Zahlen enthält.

6–15 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels `SVD`

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix}$$

Da nur in der Diagonalen Zahlen auftreten wird nur der Vektor mit den Diagonalelementen als Resultat ausgegeben. Ist man nur an diesen Werten interessiert, so kann der Befehl `SVL` verwendet werden. Die Matrizen U und V werden dann nicht bestimmt. Mit `SVD` erhält man auch noch

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

♢

6.2.3 Weitere Matrizen–Befehle

Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix kann durch den Befehl `det` bestimmt werden.

Rang einer Matrix

Der Rang[1] einer Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen). Diese ganze Zahl kann mit dem Befehl `RANK` bestimmt werden. Der Rang der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ist 2. Der Rang der erweiterten Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

[1]Die Dokumentation zu diesem Befehl im „Benutzerhandbuch, Serie HP 48 G, 1. Ausgabe“ ist falsch. Der Fehler ist teilweise auf eine (falsche) Übersetzung des Wortes „Eigenvalue“ zu „Einzelwert“ zurückzuführen. Zudem ist für nichtquadratische Matrizen die Berechnung via Eigenwerte nicht anwendbar.

ist 3. So sieht man, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 1 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung hat.

Spaltennorm

Um die Spalten–Maximum–Norm einer Matrix zu bestimmen, muss für jede Spalte die Summe der Beträge gebildet werden. Der maximale Wert dieser Spaltensummen liefert die Norm. $\boxed{\texttt{CNRM}}$ steht für „Column–NoRM“. Für die obige Matrix $\mathbf{A}$ ist die Spaltennorm 18.

Zeilennorm

Diese Rechnung ist analog zur obigen Spaltennorm, aber es wird mit Zeilen gerechnet. $\boxed{\texttt{RNRM}}$ steht für „Row–NoRM“. Für die obige Matrix $\mathbf{A}$ ist die Zeilennorm 24.

Konditionierungszahl

Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist die Konditionierungszahl gegeben durch das Produkt der Spaltennorm von $\mathbf{A}$ und der Spaltennorm der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$. Die Konditionierungszahl gibt an wieviele Stellen Genauigkeit beim Lösen eines Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ verloren gehen können. Sind vom Vektor $\vec{b}$ n Stellen bekannt, so kann man sich bei $\vec{x}$ auf $n - \log(\text{cond}\,\mathbf{A})$ Stellen verlassen. $\boxed{\texttt{COND}}$ steht für „CONDition number“.

Eigenwerte, Eigenvektoren

Im Menue $\boxed{\texttt{MTH}}$ $\boxed{\texttt{MATR}}$ befinden sich die beiden Befehle $\boxed{\texttt{EGVL}}$ (EiGenVaLue) und $\boxed{\texttt{EGV}}$ (EiGenVector) um Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen Matrizen zu bestimmen. Als Beispiel kann die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

untersucht werden. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 \approx 16.12 \quad , \quad \lambda_2 \approx -1.117 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = 0$$

Die Eigenvektoren erhält man als Spalten des HP–Resultates. Sie sind in diesem Beispiel

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.283 \\ 0.642 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.110 \\ -0.779 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Wie die untenstehende Rechnung mit *Octave* (oder MATLAB) zeigt, sind die Eigenvektoren nicht eindeutig bestimmt. Sie können mit beliebigen Faktoren gestreckt werden.

Octave

```
[v,d]=eig([1 2 3; 4 5 6;7 8 9])
-->
v =

   0.231971   0.785830   0.408248
   0.525322   0.086751  -0.816497
   0.818673  -0.612328   0.408248

d =
```

```
    16.11684    0.00000    0.00000
     0.00000   -1.11684    0.00000
     0.00000    0.00000   -0.00000
```

Nullraum einer Matrix

Der Nullraum (Kern) einer Matrix $\mathbf{A}$ entspricht den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$. Für quadratische Matrizen bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 eine Basis des Kerns. Für nichtquadratische Matrizen $\mathbf{A}$ lässt sich $\ker \mathbf{A}$ mit Hilfe der LQ–Zerlegung bestimmen (siehe Beispiel auf Seite 210).

6.3 Aufgaben

6.3.1 LU–Zerlegung und Elementaroperationen

• **Aufgabe 6–1:**
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

als Produkt von drei Elementarmatrizen geschrieben werden kann in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$$

Bestimmen Sie anschliessend $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe der Inversen der Elementarmatrizen und Matrizenmultiplikationen.

• **Aufgabe 6–2:**
Zeigen Sie, dass die Permutationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

als Produkt von elementaren Permutationsmatrizen geschrieben werden kann. Bestimmen Sie anschliessend $\mathbf{P}^{-1}$.

• **Aufgabe 6–3:**
In den untenstehenden Matrizen sind alle Werte $k_i \neq 0$. Bestimmen Sie die inversen Matrizen dieser Matrizen.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 6–4:

Bestimmen Sie die inverse Matrix der folgenden Matrix mit Hilfe von Zeilenoperationen. Alle Zwischenrechnungen sind zu zeigen.

Trouver la matrice inverse de la matrice ci–dessous. Montrer tous les calculs intermédiaires.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 6–5:

Soit donné le système d'équations pour x, y et z.

Gegeben ist das Gleichungssystem für x, y und z.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned}$$

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$ il existe une solution. Calculer x, y et r.

(b) Soit $q = 2$. Decider pour quel valeur de r il y a infiniment de solutions et trouver ces solutions.

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ gibt es eine Lösung. Berechnen Sie x, y und r.

(b) Sei $q = 2$. Für welche Werte von r gibt es unendlich viele Lösungen? Finden Sie diese.

• Aufgabe 6–6:

Die LU–Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ liefert

La décomposition LU d'une matrice $\mathbf{A}$ rend

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$

(b) Bestimmen Sie $\ker \mathbf{A}$

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

(a) Calculer $\det(\mathbf{A})$

(b) Déterminer $\ker \mathbf{A}$

(c) Trouver la solution générale du système des équations linéaires

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 22 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–7:

La commande `LU(A)` d'une calculatrice rend le résultat ci–dessous.

Der Befehl `LU(A)` eines Taschenrechners liefert das untenstehende Resultat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et/und} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver $\mathbf{A}$.

(b) Déterminer toutes les solutions $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ du système des équations linéaires ci–dessous.

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 6–8:**

Eines der möglichen vier Produkte $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ ist die LU–Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$.

(a) Bestimmen Sie alle Einträge von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$.

Un des quatres produits possible $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ correspond à la factorisation LU de la matrice $\mathbf{A}$

(a) Trouver tous les nombres en $\mathbf{A}$.

(b) Trouver le vecteur de solution $\vec{x}$.

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 6–9:**

Für eine Matrix

Pour une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gilt

on a

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$ **exakt**.

(b) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die vier Koeffizienten der Matrix $\mathbf{A}$.

(a) Trouver $\mathbf{A}$ d'une façon **exacte**.

(b) Chercher un système des équations linéaires pour les quatres coefficients de la matrice $\mathbf{A}$.

• Aufgabe 6–10:
Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(b) Wir verlangen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Stellen Sie ein System von 4 Gleichungen auf für die Unbekannten a, b, c und d. Stellen Sie dieses System mit Hilfe einer 4×4–Matrix dar.

(c) Bringen Sie diese Matrix auf Treppengestalt.

• Aufgabe 6–11:

On sait que le système ci–dessous a au moins une solution.

Man weiss, dass das untenstehende System mindestens eine Lösung hat.

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} = \vec{b}$$

(a) Trouver la valeur de q.

(b) Donner tous les solutions du système homongène.

(c) Donner tous les solutions du système inhomongène.

(a) Bestimmen Sie den Wert von q.

(b) Finden Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

(c) Finden Sie alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems.

• Aufgabe 6–12:

Soit

Sei

$$\mathbf{A}\,(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Il existe une valeur de α, tel que la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ n'est pas inversible. trouver cette valeur.

(b) Avec la valeur de α trouver ci–dessus, trouver tous les solutions de l'équation lineaire $\mathbf{A}(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Trouver toutes les solutiones du système suivant, d'une façon exacte.

(a) Es gibt einen Wert von α, sodass die Matrix $\mathbf{A}(\alpha)$ nicht invertierbar ist. Finden Sie diesen Wert.

(b) Für den oben gefundenen Wert von α sind alle Lösungen der linearen Gleichung $\mathbf{A}(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen.

(c) Finden Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems. Die Lösungen müssen exakt sein.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–13:

Untersuchen Sie die Matrix

Examiner la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(a) Finden Sie eine LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$, wobei in der Diagonalen von $\mathbf{U}$ nur die Zahlen 1 zu finden sind.

(b) Finden Sie eine LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$, wobei in der Diagonalen von $\mathbf{L}$ nur die Zahlen 1 zu finden sind.

Diese Aufgabe zeigt, dass es verschiedene Formen von LU-Zerlegungen gibt, die aber alle dem selben Zweck dienen.

(a) Trouver une décomposition LU de $\mathbf{A}$, tel-que dans la diagonal de $\mathbf{U}$ on ne trouve que la nombre 1.

(b) Trouver une décomposition LU de $\mathbf{A}$, tel-que dans la diagonal de $\mathbf{L}$ on ne trouve que la nombre 1.

Ce problème montre qu'il y a des décompositions differentes. Mais le but des calculations ne change pas.

• Aufgabe 6–14:

Untersuchen Sie das Gleichungssystem

Examiner le système des éqations

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & +2\,x_2 & & +3\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Der Befehl **LU**, angewandt auf die Matrix

La commande **LU**, appliquée sur la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt

rend

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystem mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{U}$. Die Rechnungen sind ohne Taschenrechner auszuführen.

Trouver toutes les solutions de ce système à l'aide des matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$. Travailler sans calculatrice.

• Aufgabe 6–15:

Un système de n équations linéaires est représenté par les matrices augmentées ci–dessous. Compter la nombre des multiplications nécessaires pour résoudre le système, veut dire transformer dans la forme à droite. Une division correspond à une multiplication. N'echanger pas des lignes. Montrer vos explications.

Ein System von n linearen Gleichungen ist dargestellt durch die untenstehenden, erweiterten Matrizen. Bestimmen Sie die Anzahl der notwendigen Multiplikationen um die Systeme zu lösen, d.h. in die rechtsstehende Form zu transformieren. Verwenden Sie keine Zeilenvertauschungen. Eine Division zählt als Multiplikation. Zeigen Sie ihre Erklärungen.

(a) 4 Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

(b) n Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & -1 & & & & & 1 \\ -2 & 4 & -1 & & & & 2 \\ & -2 & 4 & -1 & & & 3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -2 & 4 & -1 & n-1 \\ & & & & -2 & 4 & n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & a_1 \\ & 1 & & & & & a_2 \\ & & 1 & & & & a_3 \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & & a_{n-1} \\ & & & & & 1 & a_n \end{array}\right]$$

6.3.2 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 6–1 :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

Wegen

$$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1} \cdot \mathbf{E}_3^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–2 :

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$$

Lösung zu Aufgabe 6–3 :

(a)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1}&0&0&0\\0&\frac{1}{k2}&0&0\\0&0&\frac{1}{k_3}&0\\0&0&0&\frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0&0&0&\frac{1}{k_4}\\0&0&\frac{1}{k_3}&0\\0&\frac{1}{k_2}&0&0\\\frac{1}{k_1}&0&0&0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k}&0&0&0\\\frac{-1}{k^2}&\frac{1}{k}&0&0\\\frac{1}{k^3}&\frac{-1}{k^2}&\frac{1}{k}&0\\\frac{-1}{k^4}&\frac{1}{k^3}&\frac{-1}{k^2}&\frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–4 : Rechnen mit Hilfe einer erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&4&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&-1&-5&0&0&1 \end{array}\right] \quad Z_1 + Z_2 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&4&1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\1&-1&-5&0&0&1 \end{array}\right] \quad Z_3 - Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&4&1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&-2&-9&-1&0&1 \end{array}\right] \quad Z_3 + 2\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&4&1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&0&1&1&2&1 \end{array}\right] \quad Z_2 - 5\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&4&1&0&0\\0&1&0&-4&-9&-5\\0&0&1&1&2&1 \end{array}\right] \quad Z_1 - 4\,Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad Z_1 - Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Lösung zu Aufgabe 6–5 :

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$

$$\begin{array}{rcl} x - y + 3 & = & 3 \\ r\,x - y - 3 & = & 1 \\ 2\,x + y - 12 & = & -3 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ r\,x - y & = & 4 \\ 2\,x + y & = & 9 \end{array}$$

Addition de la première ligne à la troisième, et soustraction de la deuxiṁe on arrive à

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ (r-1)\,x & = & 4 \\ 3\,x & = & 9 \end{array}$$

Donc $x = 3$ et $r - 1 = \frac{4}{3}$, $r = \frac{7}{3}$ et $y = x = 3$.

(b) Matrice augmente et transformation dans la forme d'une échelle. Mettre $q = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ r & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_2 - r\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_3 - 2\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 0 & 3 & -6 & -12 \end{array}\right] \quad Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \end{array}\right] \quad Z_3 - \frac{Z_2\,(r-1)}{3} \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3+r & -3+r \end{array}\right]$$

Pour $r = 3$ on arrive donc à

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et le système a infiniment de solutions, donné par

$$z = t \quad , \quad y = -4 + 2\,z = -4 + 2\,t \quad \text{et} \quad x = 3 + y - z = 3 - 4 + 2\,t - t = -1 + t$$

Reécrit comme paramétrisation d'une droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–6 : Man kann direkt mit der LU–Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ arbeiten. Es ist nicht notwendig (und führt zu Mehrarbeit) die Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.

(a) Determinantenmultiplikationssatz

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = -12 \cdot 0 = 0$$

(b) $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$ genau dann wenn $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0}$ und $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$

$$\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y & = & 2\,z \\ x & = & -2\,y - 3\,z = -7\,z \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Eine partikuläre Lösung ist zu bestimmen. Löse zuerst $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{b}$ mit Hilfe der erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & -18 \\ 1 & -2 & -2 & 22 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist $(r, s, t)^T = (6\,,\,-8\,,\,0)^T$ die einzige Lösung. Nun ist $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$ zu lösen. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hier ist z frei wählbar. Mit $z = 0$ erhält man $y = -8$ und $x = 6 - 2\,y - 3\,z = 22$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6–7 :

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Das System $\mathbf{A}\ \vec{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$ kann ersetzt werden durch die beiden Dreieck-Systeme $\mathbf{L}\ \vec{y} = \vec{0}$ und anschliessend $\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{y}$.

- Das die Matrix $\mathbf{L}$ in der Diagonalen keine Nullen hat erhalten wir für das System $\mathbf{L}\ \vec{y} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{y} = \vec{0}$.
- Somit ist $\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$ genauer zu untersuchen. Dieses System kann von oben nach unten aufgelöst werden.

$$\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste und letzte Zeile diese Systems ergeben sofort $x_1 = x_4 = 0$ Da in der dritten Zeile keine führende 1 steht kann der Parameter $t = x_3$ frei gewählt werden. Die zweite Gleichung liefert anschliessend

$$2\,x_2 + 1\,x_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{2}\,x_3 = -\frac{1}{2}\,t$$

Als Lösungsmenge erhalten wir eine Gerade in $\mathbb{R}^4$

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6–8 :

(a) Nur eine der vier möglichen Matrizenmutilpikationen liefert die Zahl 4 an der richtigen Stelle. Folgliuch gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor $\vec{x}$ ist als Lösung eines linearen Gleichugssystems gegeben. Er kann durch verschiedene Rechnungen bestimmt werden:

- $$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Wegen $\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2}$ kann zuerst $\mathbf{L}_1\ \vec{y} = \vec{b}$ und anschliessend $\mathbf{R}_2\ \vec{x} = \vec{y}$ gelost werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2\,y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 \\ -3 + 2\,x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von `MATLAB` oder *Octave* die folgenden Zeilen bestätigen das Resultat.

Octave

```
L1=[1 0 0;2 1 0;0 0 2]
R1=[2 2 2; 0 2 -2;0 0 2]
L2=[2 0 0;-2 1 0;0 0 1]
R2=[1 2 3; 0 1 -2;0 0 1]

A=L1*R2

b=A\[1;-1;2]
```

Lösung zu Aufgabe 6–9 :

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{1}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5\,e-3\,\pi & 2\,e+\pi \\ -19 & 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Einer der möglichen Lösungswege ist

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+3\,b & -2\,a-5\,b \\ c+3\,d & -2\,c-5\,d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\begin{array}{rrrrcl}
a & +3\,b & & & = & e \\
-2\,a & -5\,b & & & = & \pi \\
& & c & +3\,d & = & 2 \\
& & -2\,c & -5\,d & = & 3
\end{array}$$

Dies ist ein lineraes Gleichungssystem für die vier Unbekannten a, b, c und d.

Lösung zu Aufgabe 6–10 :

(a)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a-b & 4\,a+b \\ c-d & 4\,c+d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+4\,c & b+4\,d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
a-b &= a+4\,c \\
4\,a+b &= b+4\,d \\
c-d &= -a+c \\
4\,c+d &= -b+d
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrrrl} & -b & -4\,c & & = 0 \\ 4\,a & & & -4\,d & = 0 \\ +a & & & -d & = 0 \\ & +b & +4\,c & & = 0 \end{array}$$

Das führt auf die Matrizennotation

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somit können die Werte von c und d frei gewählt werden und man kann daraus a und b bestimmen.

$$a = d \quad \text{und} \quad b = -4\,c$$

Dieses homogene System von vier linearen Gleichungen hat somit unendlich viele Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 6–11 : Erweiterte Matrix auf Treppengestalt bringen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & -7 & q \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & q-15 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-12 \end{array}\right]$$

Somit ist das ursprüngliche System äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q-12 \end{pmatrix}$$

(a) Damit das System lösbar ist muss $q = 12$ sein.

(b) $x_2 = t$ und $x_4 = s$ sind frei wählbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 = -s \\ x_1 &= -3\,x_2 + 2\,x_4 = -3\,t + 2\,s \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{x}_h = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) eine partikuläre Lösung kann mit Hilfe der speziellen Wahl $x_2 = x_4 = 0$ bestimmt werden als

$$x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_1 = 5$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle [LandHest92, p 364]

Lösung zu Aufgabe 6–12 :

(a) Bei der Reduktion auf Treppengestalt ergeben sich die fogenden erweiterten Matrizen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1-\frac{\alpha}{2} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\alpha}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Die Matrix ist nicht invertierbar, falls in der letzten Zeile alle Eintäge 0 sind. Das führt auf die Bedingung $\alpha = 4$.

(b) Das System

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist zu lösen. Die dritte Zeile ist eine Linearkombination der ersten beiden. Deshalb können wir nur die ersten beiden Gleichungen untersuchen und kommen somit auf

$$\begin{array}{ccrcr} 2\,x & +0\,y & = & -4\,z \\ 1\,x & -2\,y & = & 0\,z \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -2z$ und aus der zweiten $y = \frac{1}{2}\,x = -z$. Somit ist der Lösungsraum gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2\,z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) Von oben nach unten auflösen führt auf

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–13 : Die beiden Resultate wurden ohne Permutationen erzeugt.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 9.9 & 0 \\ 5 & -0.5 & 8.98990 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.02020 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.050505 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 0 & 9.9 & -0.2 \\ 0 & 0 & 8.98990 \end{bmatrix}$$

Taschenrechner erzeugen in der Regel nur eines der beiden Resultate. Wegen

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{L}\cdot\mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{L}^T = \mathbf{L}_1\cdot\mathbf{R}_1$$

erhalten Sie aus der LU–Zerlegung der Transponierten $\mathbf{A}^T$ das andere Resultat. Werden auch Zeilenpermutationen verwendet, so wird das übersetzen schwieriger.

Lösung zu Aufgabe 6–14 : Zuerst $\mathbf{L}\,\vec{y} = \vec{b}$ lösen, dann $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von oben nach unten auflösen

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= -1 + y_1 = -3 \\ y_3 &= 0 - y_1 + \frac{1}{4}\,y_2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nun kann das System $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y}$ untersucht werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

x_4 kann frei gewählt werden. Setzt man $x_4 = 0$ so kann das System von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-3 - 3\,x_3) = 0 \\ x_1 &= -2 - 2\,x_2 - 3\,x_3 = 1 \end{aligned}$$

Somit haben wir eine partikuläre Lösung

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen setzt man $x_4 = t$ und löst von unten nach oben auf.

$$\begin{aligned} x_3 &= -t \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-7\,t - 3\,x_3) = -t \\ x_1 &= -4\,t - 2\,x_2 - 3\,x_3 = t \end{aligned}$$

und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–15 :

(a) Zu zählen sind Multiplikationen (Multiplikation=Division)

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 2 Divisionen um 1 entlang der Diagonalen zu erzeugen
   - 2 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile darunter zu erzeugen und den erweiterten Teil der Matrix zu behandeln. Für die letzte Zeile ist nur eine Division notwendig.
   - Total: $(4-1)\,(2+2)+1=13$ Multiplikationen

   Das Zwischenresultat ist eine Matrix mit 0 unterhalb der Diagonalen, 1 entlang der Diagonalen und Zahlen in der ersten, oberen Nebendiagonalen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & c_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right]$$

2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 1 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile oberhalb der Diagonalen zu Null setzen. Die Operation muss nur im erweiterten Teil effektiv ausgeführt werden.
   - Die unterste Zeile muss nicht bearbeitet werden
   - Total: 3 Multiplikationen

Insgesamt 16 Multiplikationen

(b) Zu zählen sind Multiplikationen

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen.
   Total: $(n-1)\,(2+2)+1=4\,n-3$ Multiplikationen
2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen.
   Total: $n-1$ Multiplikationen

Insgesamt werden $5\,n-4$ Multiplikationen benötigt.

6.4 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Matrizenoperationen schnell und zuverlässig ausführen können.
- Elementarmatrizen erkennen und mit ihnen rechnen können.
- Gleichungssysteme mit Dreiecksmatrizen schnell und zuverlässig (von Hand) lösen können.
- die engen Beziehungen zwischen Elementarmatrizen, LU–Zerlegung und dem Verfahren von Gauss kennen.
- die inversen Matrizen von 3×3 und 4×4–Matrizen auch von Hand ausführen können.
- alle obigen Rechnungen schnell und zuverlässig mit Ihrem Taschenrechner ausführen können.
- auch spezielle Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner lösen können: Stichwort Faktorisierungen.

Kapitel 7

Determinanten

7.1 Einführung

In diesem Abschnitt wird die Bedeutung der Determinante von 2×2 und 3×3 Matrizen für Gleichungssysteme, Flächen- und Volumenberechnung erklärt. Für 3×3–Determinanten wird die Methode des Entwickelns entlang einer Zeile eingeführt. Das führt auf die Berechnungsformel der Determinante einer quadratischen Matrix beliebiger Grösse.

7.1.1 Determinante einer 2×2–Matrix

Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

Für Konstanten a, b, c und d kann das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} a\,x & + & b\,y & = & 1 \\ c\,x & + & d\,y & = & 0 \end{array}$$

gelöst werden, indem die erste Zeile mit d und die zweite mit $-b$ multipliziert wird

$$\begin{array}{rcrcl} a\,d\,x & + & b\,d\,y & = & d \\ -b\,c\,x & - & b\,d\,y & = & 0 \end{array}$$

Durch Addition erhält man daraus

$$x = \frac{d}{a\,d - c\,b} \quad \text{und} \quad y = \frac{-c}{a\,d - c\,b}$$

Der Nenner $a\,d - c\,b$ entsteht aus der entsprechenden Matrix durch eine Subtraktion des Produktes von Diagonalelementen. Das führt auf die Definition der **Determinante** einer 2×2–Matrix.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\,d - c\,b$$

2×2–Determinanten und Flächen von Parallelogrammen

Der Vektor $(d\,,\,-c)^T$ steht senkrecht auf $(c\,,\,d)^T$ und hat dieselbe Länge. Ist α der Winkel zwischen den Vektoren $(a\,,\,b)^T$ und $(c\,,\,d)^T$, so ist der Winkel zwischen den Vektoren $(a\,,\,b)^T$ und $(-d\,,\,c)^T$ gegeben durch $\frac{\pi}{2} - \alpha$ oder $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Wegen

$$\begin{aligned} a\,d - c\,b &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| (\mp 1)\, \sin(\alpha) \end{aligned}$$

ist der Wert der Determinante gleich dem (orientierten) Flächeninhalt des durch $(a\,,\,b)^T$ und $(-d\,,\,c)^T$ aufgespannten Parallelogramms. Diese Tatsache kann durch eine Zeichnung illustriert werden.

7.1.2 Determinante einer 3×3–Matrix

Lösen von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten

Der untenstehende *Mathematica*–Code bestimmt die x–Komponente der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mathematica

```
Factor[LinearSolve[
   {{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}},
    {1,0,0}][[1]]]
.
(-(a23 a32) + a22 a33) /

  (-(a13 a22 a31) + a12 a23 a31 + a13 a21 a32 -

    a11 a23 a32 - a12 a21 a33 + a11 a22 a33)
```

Man erkennt den Nenner

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Dieser Term entspricht der Determinante einer 3×3–Matrix und man schreibt

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Auch diese (kompliziertere) Formel für eine 3×3–Determinante kann durch ein Rechenschema mit Produkten entlang Diagonalen illustriert werden. Der ursprünglichen 3×3–Matrix werden rechts die beiden ersten Spalten nocheinmal angefügt. Dann werden sechs Diagonalprodukte gemäss dem Schema in Abbildung 7.1 addiert, bzw. subtrahiert. Dieser Rechentrick wird auch Regel von **Sarrus** genannt. Sie gilt nur für 3×3–Determinanten.

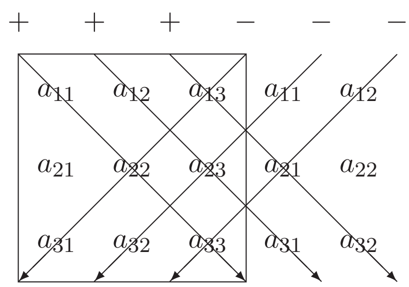


Abbildung 7.1: Berechnung einer 3×3–Determinante mit der Regel von Sarrus

3×3–Determinanten und Spatvolumen

Nun wollen wir diesen Ausdruck als Volumen interpretieren. Sei dazu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{33} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}\,(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}\,(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

Dies ist aber exakt das Resultat der obigen Determinantenrechnung. Im Kapitel über Vektoren haben wir gezeigt, dass dieses Spatprodukt dem (orientierten) Volumen des durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds entspricht. Somit **berechnet die Determinante das Volumen eines Spates**.

Die Determinante kann auch mit Hilfe eines anderen Rechenschemas bestimmt werden. Man verifiziert leicht, dass

$$\begin{aligned} \det A &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\,\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\,\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\,\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\,\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\,\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\,\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Dies ist die **Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile**. Die Zahlen $a_{1\,k}$ in der ersten Zeile werden multipliziert mit den vorzeichenbehafteten 2×2–Determinanten, die entstehen durch entfernen der ersten Zeile und der k–ten Spalte aus der ursprünglichen Matrix A. Das Vorzeichenschema kann dem folgenden Schachbrettmuster entnommen werden.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Eine elementare (längere) Rechnung zeigt, dass man auch nach der **zweiten Zeile entwickeln** kann und zum selben Resultat kommt.

$$\begin{aligned} \det A &= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= -a_{21}\,\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\,\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23}\,\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= -a_{21}\,\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{22}\,\left(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\right) - a_{23}\,\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) \end{aligned}$$

Ebenso kann man nach der dritten Zeile entwickeln, oder auch nach einer der Spalten.

7–1 Beispiel : Zu bestimmen ist die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Determinante wird mit einigen verschiedenen Rechenwegen bestimmt. Selbstverständlich muss das Resultat jedesmal dasselbe sein.

(a) Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned}\det A &= +1\ \det\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0\ \det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -6 + 0 - 8 = -14\end{aligned}$$

(b) Entwicklung nach der dritten Spalte

$$\begin{aligned}\det A &= +2\ \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3\ \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 1\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -8 - 6 + 0 = -14\end{aligned}$$

(c) Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned}\det A &= -0\ \det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 0\ \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -0 + 0 - 14 = -14\end{aligned}$$

Nach kurzem Nachdenken sollte man feststellen, dass die dritte Variante am leichtesten zu berechnen war. $\diamondsuit$

7.1.3 Definition der Determinante einer $n \times n$– Matrix

Die obigen Überlegungen und das Beispiel führen auf die allgemeine Definition einer Determinante.

Sei A eine $n \times n$–Matrix, gegeben durch

$$A = (a_{i\,j})_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

7–2 Definition : Streicht man aus der ursprünglichen Matrix A die i–te Zeile und die j–te Spalte, berechnet die Determinante dieser $(n-1) \times (n-1)$–Untermatrix und multipliziert sie mit $(-1)^{i+k}$, so erhält man eine Zahl. Das Resultat $A_{i\,j}$ heisst **Adjunkte**, **algebraisches Komplement** oder auch **Kofaktor**.

Das Vorzeichenmuster $(-1)^{i+j}$ der Kofaktoren kann auch in der folgenden Matrix abgelesen werden

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \cdots & (-1)^{n} \\ + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n} & (-1)^{n+1} & \cdots & + \end{bmatrix}$$

7–3 Definition : (Laplace'scher Entwicklungssatz)
Die Determinante einer $n \times n$–Matrix A kann durch Entwicklung nach der i–ten Zeile bestimmt werden.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \cdot A_{i\,j} = a_{i\,1} \cdot A_{i\,1} + a_{i\,2} \cdot A_{i\,2} + \ldots + a_{i\,n} \cdot A_{i\,n}$$

oder durch Entwicklung nach der j–ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} \cdot A_{i\,j} = a_{1\,j} \cdot A_{1\,j} + a_{2\,j} \cdot A_{2\,j} + \ldots + a_{n\,j} \cdot A_{n\,j}$$

Das Resultat ist unabhängig von der Auswahl der Zeile oder Spalte.

7–4 Bemerkung : Es sollte beachtet werden, dass diese Definition der Determinantenberechnung **rekursiv** ist. Um eine 5×5–Determinante zu bestimmen müssen 5 einzelne 4×4–Determinanten bestimmt werden. Für jede dieser 4×4–Determinanten sind je vier 3×3–Determinanten zu bestimmen ...

Dieser Algorithmus zur Berechnung von Determinanten darf unter keinen Umständen programmiert werden um Determinanten grosser Matrizen zu bestimmen. Der Rechenaufwand wird prohibitiv gross und die Resultate unzuverlässig. Bessere Verfahren basieren auf der LU–Zerlegung der Matrix. Die Determinanten kleiner Matrizen können von Hand durchaus mit diesem Entwicklungssatz bestimmt werden. ♢

7–5 Beispiel : Die Determinante der folgenden Matrix wird mit Vorteil nach der ersten Zeile entwickelt. Ebenso verfährt man mit den Unterdeterminanten.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -37 & -2 & 0 & 0 \\ 13 & -13 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} &= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \\
&= 3 \cdot (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \\
&= 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} + 0 = -120
\end{aligned}$$

♢

7.2 Resultate

7.2.1 Transponierte Matrix

Da gemäss dem Laplace'schen Entwicklungssatz die Determinante einer Matrix A wahlweise nach einer Zeile oder Spalte entwickelt werden kann ist klar, dass die Determinante der Matrix A gleich der Determinanten der transponierten Matrix A^T ist.

$$\det A = \det A^T$$

7.2.2 Determinanten von Dreiecksmatrizen und Elementarmatrizen

Im Beispiel 7–5 wurde die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix bestimmt. Aufgrund der vielen Nullen war die Rechnung elementar. Die Idee lässt sich leicht auf beliebige, quadratische Matrizen übertragen und man erhält das folgende Resultat.

7–6 Satz : *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gegeben durch das Produkt der Diagonalelemente.*

7–7 Beispiel :

$$\det \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 & 137 & e \\ 0 & -2 & \log 45 & 77 & 69 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = -6$$

♢

7–8 Satz : *(Elementarmatrizen)*
Mit Hilfe des Entwicklungssatzes können auch die Determinanten der zu elementaren Zeilenoperationen gehörenden Matrizen leicht bestimmt werden. Diese Elementarmatrizen E entstehen aus der $n \times n$–Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ durch Ausführen der entsprechenden Zeilenoperation.

(a) *Multiplikation einer Zeile mit λ :* $\det E = \lambda$

(b) *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen :* $\det E = 1$

(c) *Vertauschen von zwei Zeilen :* $\det E = -1$.

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Auf Seite 231 haben wir gesehen, dass die Determinante der Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

auch als orientiertes Volumen des Tetraeders mit den erzeugenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgefasst werden kann. Genauer ist das Volumen des Tetraeders gleich einem Sechstel von $\det M$. In Abbildung 7.2 wird die obere Ecke in die Richtung des vorderen Vektors verschoben, genauer

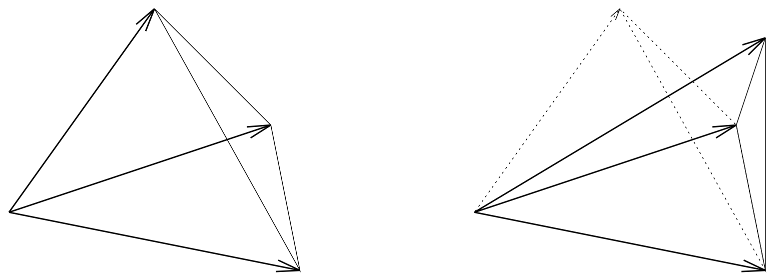


Abbildung 7.2: Zwei volumengleiche Spate

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \longrightarrow & \vec{a} \\ \vec{b} & \longrightarrow & \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{a} \\ \vec{c} & \longrightarrow & \vec{c} \end{array}$$

Zu einem Vektor wird also ein Vielfaches eines anderen dazugezählt. Da die obere Ecke des Tetraeders in einer Ebene verschoben wird parallel zur Grundebene ändern sich weder Höhe noch Grundfläche. Somit bleibt das Volumen gleich und es gilt

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{a} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

Die Addition eines Vielfachen der ersten Zeile zur zweiten kann auch als Multiplikation von links mit der Elementarmatrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aufgefasst werden. Es ist $\det E = 1$ und somit

$$\det\,(\,E \cdot M\,) = \det\,E \cdot \det\,M$$

Vertauschen zweier Zeilen

Man kann auch verifizieren, dass durch das Vertauschen von zwei Vektoren nur die Orientierung des Volumens ändert und somit

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor

Streckt man einen Vektor des Spates um den Faktor λ, so wird die entsprechende Höhe um den selben Faktor gestreckt, die Grundfläche aber nicht verändert. Somit wird das Volumen mit λ multipliziert. Mit Hilfe einer Elementarmatrix kann man also schreiben

$$\begin{aligned} \det(\, E \cdot M \,) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda\, a_1 & \lambda\, a_2 & \lambda\, a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \det E \cdot \det M \end{aligned}$$

Für 3×3–Matrizen haben wir somit für verschiedene Typen vom Operationen gezeigt, dass die Determinante eines Produktes als Produkt der Determinanten bestimmt werden kann. Dieses Resultat ist allgemein gültig (Theorem 7–9). Ein möglicher Beweis dieses Resultates beruht auf der Darstellung von beliebigen Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen und den obigen Überlegungen[1].

7.2.3 Multiplikationssatz

7–9 Theorem : *(Multiplikationssatz)*
Sind A und B zwei quadratische Matrizen gleicher Grösse, so ist auch das Produkt $A \cdot B$ eine Matrix gleicher Grösse. Es gilt

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

7–10 Satz : *Für jede $n \times n$–Matrix gilt*

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

Beweis : Das Resultat ist eine Konsequenz von Theorem 7–9, $\lambda \cdot A = \lambda \mathbb{I}_n \cdot A$ und

$$\det(\lambda\, \mathbb{I}_n) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^n$$

□

[1] Es ist nicht allzu schwer zu sehen, dass jede $n \times n$–Matrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Allerdings muss man dann Elementarmatrizen mit nur aus Nullen bestehenden Zeilen zulassen.

7–11 Beispiel : Im vorangehenden Kapitel haben wir die LU–Zerlegung einer Matrix untersucht. Aus dieser Zerlegung lässt sich die Determinante leicht ablesen.

$$\begin{aligned} A &= L \cdot U \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \det\, A &= \det\, L \cdot \det U = 14 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dieser auf dem Verfahren von Gauss beruhende Rechentrick erlaubt es die Determinanten von grossen Matrizen schnell und zuverlässig (mit Hilfe von Computern) zu bestimmen. ♢

7–12 Theorem : *Der Einfluss von elementaren Zeilen- und Spalten–Operationen auf die Determinante lässt sich nun leicht nachvollziehen.*

(a) *Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit einer Zahl, so ist die Determinante mit der selben Zahl zu multiplizieren.*

(b) *Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.*

(c) *Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert die Determinante nicht.*

Wir haben auch gesehen, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn eine LU–Zerlegung möglich ist, wobei in den Diagonalen keine Nullen auftauchen dürfen. Das führt auf das folgende, einfach zu formulierende Resultat. Der praktische Nutzen ist nicht so gross wie es auf den ersten Blick erscheint. Um die Determinante zu bestimmen verwendet man die LU–Zerlegung der Matrix und somit ist bereits bekannt ob die Matrix invertierbar ist oder nicht.

7–13 Satz : *Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$. *Dann gilt*

$$\det\,(A^{-1}) = \frac{1}{\det\, A}$$

Beweis : Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Die Determinanten dieser Matrizen sind je von Null verschieden, somit auch das Produkt der Determinanten der Matrizen und wegen dem Multiplikationssatz gilt also $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I}_n \\ \det\,(A \cdot A^{-1}) &= \det\, \mathbb{I}_n = 1 \\ \det\,(A) \cdot \det\,(A^{-1}) &= = 1 \\ \det\,(A^{-1}) &= \frac{1}{\det\, A} \end{aligned}$$

□

7–14 Beispiel : Im Allgemeinen ist

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Betrachten Sie hierzu das Beispiel

$$\det\, A = \det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = 14 \quad \text{und} \quad \det\, B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A + B) = \det \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} = 99$$

♢

7.3 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

7–15 Definition : Für eine $n \times n$–Matrix $A = (a_{i\,j})_{1\leq i,j\leq n}$ ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbb{I}_n) = \det\begin{bmatrix} a_{1\,1}-\lambda & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2}-\lambda & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3}-\lambda & \cdots & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n}-\lambda \end{bmatrix}$$

ein Polynom vom Grad n (das **charakteristische Polynom**) und die Nullstellen heissen **Eigenwerte** der Matrix A.

7–16 Beispiel : Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 14$$

und die beiden reellen Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{2}$$

♢

7–17 Beispiel : Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 19$$

Diese Matrix hat keine reellen Eigenwerte, die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm i\,\sqrt{3}$$

♢

7.4 Aufgaben

• **Aufgabe 7–1:**
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$$

• **Aufgabe 7–2:**
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 7–3:
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\det B \neq 0$ falls die drei Zahlen x, y und z verschieden sind.

• Aufgabe 7–4:
Eine Parabel $y = a + b\,x + c\,x^2$ geht durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3), wobei die drei Zahlen x_1, x_2 und x_3 verschieden sind. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die drei Unbekannten a, b und c und zeigen Sie, dass dieses eindeutig lösbar ist. Die Lösung ist nicht zu berechnen.

• Aufgabe 7–5:
Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 7–6:
Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 7–7:
Überprüfen Sie den Determinantenmultiplikationssatz für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

indem Sie $\det A$, $\det B$, die Matrix $A \cdot B$ und $\det(A \cdot B)$ von Hand berechnen.

• Aufgabe 7–8:
Bestimmen Sie den Wert der Determinante, indem Sie die Matrix zuerst mittels geeigneter Zeilenoperationen in Dreiecksgestalt bringen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 7–9:
Bestimmen Sie mit Hilfe geeigneter Zeilenoperationen die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

Tip: lassen Sie zuerst a_{32} „verschwinden“, dann a_{54}. Anschliessend a_{45} und a_{23}. Dann führen drei Zeilenvertauschungen auf das Resultat.

• Aufgabe 7–10:
Untersuchen Sie für welche Werte von λ das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & + & (4-\lambda)\,y & = & 0 \end{array}$$

nichttriviale Lösungen hat.
Tip: untersuchen Sie

$$\det\ A = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

als Funktion von λ.

• Aufgabe 7–11:
Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 7–12:

Untersuchen Sie die die $n \times n$–Matrix

Examiner la matrice $n \times n$

$$A\,(n) \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Es gilt

On a

$$\det A\,(1) = a \quad \text{und/et} \quad \det A\,(2) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 - b^2$$

(a) Berechnen Sie $\det A\,(3)$.

(b) Es gibt Zahlen c_1 und c_2 sodass die untenstehende Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Finden Sie c_1 und c_2.
Tip: zwei mal entwickeln nach geeigneten Zeilen oder Spalten.

(a) Calculer $\det A\,(3)$.

(b) Il existe des nombres c_1 et c_2 tel que la formule ci–dessous est juste pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver c_1 et c_2.
Tip: deux développement par rapport à des lignes ou columnes biens choisi.

$$\det\ A\,(n) = c_1\ \det\ A\,(n-1) + c_2\ \det A\,(n-2)$$

• Aufgabe 7–13:

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

Trouver les valeurs des déterminantes suivantes

(a)

$$a = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$b = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \end{bmatrix}$$

(c)

$$c = \det \begin{bmatrix} n & n & n & n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

Tip: Subtrahieren Sie die zweite Zeile von der ersten, dann ...

Tip: substraction de la deuxième ligne de la première, puis ...

7.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 7–1 : $\det A = -23$ und $\det B = y - x$.

Lösung zu Aufgabe 7–2 : Mit Hilfe einer Entwicklung nach der ersten Spalte (mehrmals) gilt

$$\det\ A = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 24$$

Lösung zu Aufgabe 7–3 : $\det A = 13$ und $\det B = (y-x)\,(z-x)\,(y-z)$. Sind die drei Zahlen x, y und z verschieden , so ist offensichtlich $\det B \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 7–4 :

$$\begin{aligned} a + b\,x_1 + c\,x_1^2 &= y_1 \\ a + b\,x_2 + c\,x_2^2 &= y_2 \\ a + b\,x_3 + c\,x_3^2 &= y_3 \end{aligned}$$

Die entsprechende Matrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der vorangehenden Aufgabe ist die Determinante dieser Matrix nicht Null, die Matrix somit invertierbar und das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Lösung zu Aufgabe 7–5 :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = -2\,k + 20 \quad \text{und} \quad \det\,B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A+B) = \det \begin{bmatrix} k & -8 \\ 12 & k-2 \end{bmatrix} = k^2 - 2\,k + 96$$

Also erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \det\,(A+B) &= \det\,A + \det\,B \\ k^2 - 2\,k + 96 &= -2\,k + 20 + 28 \\ k^2 &= -48 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung und somit ist $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ für alle (reellen) Werte von k.

Lösung zu Aufgabe 7–6 :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} k & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 2\,k - 20 \quad \text{und} \quad \det\,B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A+B) = \det \begin{bmatrix} k & 0 \\ 12 & k+2 \end{bmatrix} = k^2 + 2\,k$$

Also erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \det\,(A+B) &= \det\,A + \det\,B \\ k^2 + 2\,k &= 2\,k - 20 + 28 \\ k^2 &= 8 \\ k &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

Somit ist genau für zwei Werte von k die Bedingung $\det(A+B) = \det A + \det B$ erfüllt und für alle anderen falsch.

Lösung zu Aufgabe 7–8 : Durch elementare Zeilenoperationen erhalten wir die Folge von Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{Z_3 = Z_3 - Z_2/2}{\longrightarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{Z_3 \leftrightarrow Z_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Da zwei mal Zeilen vertauscht wurden hat die Determinante ihr Vorzechen zwei mal gewechselt und bleibt somit gleich.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 140$$

Lösung zu Aufgabe 7–9 :

1. Vielfaches der ersten Zeile von der dritten subtrahieren: $a_{32} \to 0$

2. Vielfaches der dritten Zeile von der fünften subtrahieren: $a_{54} \to 0$
3. Vielfaches der sechsten Zeile von der vierten subtrahieren: $a_{45} \to 0$
4. Vielfaches der vierten Zeile von der zweiten subtrahieren: $a_{23} \to 0$

Das führt auf

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

Nun kann man die Zeilenpaare $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$ und $5 \leftrightarrow 6$ vertauschen und erhält

$$\det\, A = -a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}\, a_{56}\, a_{65}$$

Lösung zu Aufgabe 7–10 : Ist $\det A \neq 0$ so ist die Matrix invertierbar und $(0,0)^T$ somit die einzige Lösung. Somit ist die Bedingung $\det A = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} &= (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 6 = 0 \\ \lambda^2 - 6\,\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\,\left(6 \pm \sqrt{36-8}\right) = 3 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei den beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ handelt es sich um die **Eigenwerte** der Matrix A und das Polynom $\lambda^2 - 6\,\lambda + 2$ heisst auch **charakteristisches Polynom** der Matrix.

Lösung zu Aufgabe 7–11 : Mit Hilfe einer Entwicklung nach der ersten Spalte (mehrmals) gilt

$$\det\,(A - \lambda\,\mathbb{I}_5) = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$$

und die fünf Eigenwerte sind direkt ablesbar.

Lösung zu Aufgabe 7–12 :

(a) Eine einfache Rechnung ergibt

$$\det A\,(3) = \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \ldots = a^3 - 2\,a\,b^2$$

(b) Zuerst entlang der ersten Spalte entwickeln

$$\det\, A\,(n) \;=\; a\,\det\, A\,(n-1) - b\det \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & b & a & b & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b & a & b \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

entlang der ersten Zeile entwickeln

$$= a \det A(n-1) - b^2 \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & b & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$= a \det A(n-1) - b^2 \det A(n-2)$$

Lösung zu Aufgabe 7–13 :

(a) Eine elementare Rechnung zeigt, dass $a = -8$.

(b) Vertauschen der ersten und dritten Zeile, und der zweiten und fünften Zeile ergibt

$$b = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3 = 6\,\pi$$

(c) Der Reihe nach auszuführen

1. Subtrahieren Sie die zweite Zeile von der ersten.
2. Subtrahieren Sie die dritte Zeile von der zweiten.
3. Subtrahieren Sie die vierte Zeile von der dritten.

$$c = \det \begin{bmatrix} n & n & n & n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & 0 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix} = n\,!$$

7.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- die Determinanten kleiner Matrizen von Hand und mit dem Taschenrechner schnell und zuverlässig berechnen können.
- den Wert von 2×2 und 3×3 Determinanten als Flächen und Volumen interpretieren können.
- den Laplace'schen Entwicklungssatz beherrschen.
- mit dem Multiplikationssatz und Elementarmatrizen umgehen können.
- wissen dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist.

Kapitel 8

Lineare Strukturen

In diesem Kapitel werden vor allem Begriffe und Strukturen der linearen Algebra definiert und mit wenigen Beispielen illustriert. In diesem Kapitel werden Sie keine direkten Anwendungen finden.

8.1 Vektorraum

Die folgende (abstrakte) Definition eines Vektorraumes ist historisch gewachsen. Zuerst wurden viele Beispiele von Vektorräumen untersucht und anschliessend festgestellt das sie alle die selbe Struktur haben. Wir gehen hier den umgekehrten Weg: nach der Definition geben wir einige, teilweise bereits bekannte, Beispiele.

8–1 Definition : Ein (reeller) **Vektorraum** V ist eine Menge von Objekten (Vektoren) mit zwei Operationen **Addition** und **Multiplikation mit einem Skalar** mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{x} \in V, \vec{y} \in V \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V$
2. $\vec{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\,\vec{x} \in V$
3. Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{0} \in V$ mit $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in V$.
4. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln:
   (a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
   (b) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{y} + (\vec{x} + \vec{z})$
   (c) $\alpha\,(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\,\vec{x} + \alpha\,\vec{y}$
   (d) $(\alpha + \beta)\,\vec{x} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{x}$
   (e) $(\alpha\,\beta) \cdot \vec{x} = \alpha\,(\beta \cdot \vec{x})$
   (f) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

8–2 Beispiel : Betrachten Sie Paare (x_1, x_2) von reellen Zahlen und untersuchen sie die folgendermassen definierten Operationen Addition und Multiplikation mit Skalar α:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \alpha\,x_1 \\ \alpha\,x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die so definierte Menge V von reellen Zahlenpaaren genügt allen verlangten Bedingungen in Definition 8–1. Somit haben wir einen Vektorraum. Es ist der wohlbekannte Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ♢

8–3 Beispiel : Verifizieren Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$ den Bedingungen in Definition 8–1 genügt. ♢

8–4 Definition : Die Menge $\mathbb{P}_n$ besteht aus allen Polynomen vom Grad kleiner oder gleich n mit den folgendermassen definierten Operationen:
Für Polynome f und g und Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x)+g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \end{aligned}$$

d.h. punktweise Definition der Operationen.

8–5 Beispiel : Zu zeigen ist, dass $\mathbb{P}_n$ mit diesen Operationen einen Vektorraum bildet.

Lösung: Die Summe von zwei Polynomen vom Grad kleiner oder gleich n ergibt einen Polynom mit der selben Eigenschaft. Ebenso die Multiplikation eines Polynoms mit einer reellen Zahl. Somit sind die ersten beiden Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt. Der Nullvektor in $\mathbb{P}_n$ ist das Nullpolynom (d.h. $f(x) = 0$ für alle x). Aufgrund der punktweisen Definition der Rechenoperationen übertragen sich die Rechenregeln für Zahlen auf die Rechenregeln für Polynome und es sind somit alle Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt. $\mathbb{P}_n$ ist ein Vektorraum. ♢

8–6 Beispiel : Die Menge aller stetigen Funktionen $C^0([0,1])$ auf dem Intervall $[0,1]$ bildet einen Vektorraum. Hierbei sind die Operationen punktweise definiert.

Lösung: Summen und Vielfache von stetigen Funktionen sind wieder stetig und die Rechenregeln sind auch erfüllt. Somit sind alle Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt und wir haben einen Vektorraum. ♢

8–7 Beispiel : Sei V die Menge aller 2×3–Matrizen. Diese können addiert werden und auch mit (reellen) Zahlen multipliziert und es gelten die üblichen Rechenregeln. Somit haben wir auch hier einen Vektorraum. ♢

8–8 Definition : Eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraumes V heisst **(linearer) Teilraum**, falls

1. $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U \Longrightarrow \vec{x}+\vec{y} \in U$
2. $\vec{x} \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\,\vec{x} \in U$

Man sagt, dass ein Teilraum **abgeschlossen** ist unter den Operationen Addition und Multiplikation mit einer Konstanten. Ein Teilraum ist selbst wieder ein Vektorraum. Setzt man $\alpha = 0$, so ist klar, dass $\vec{0} \in U$ sein muss.

8–9 Definition : Eine Teilmenge $W \subset V$ eines Vektorraumes heisst **affine Teilmenge** (auch **affiner Teilraum**), falls es einen Vektor $\vec{a} \in V$ gibt und einen linearen Teilraum $U \subset V$, so dass W entsteht durch verschieben des Teilraumes U um den Vektor $\vec{a}$.

8–10 Beispiel : Jede durch den Ursprung gehende Gerade in der Ebene ist ein Teilraum. Nicht durch den Ursprung gehende Geraden bilden keinen Teilraum. Sie bilden einen affinen Teilraum. ♢

8–11 Beispiel : Die xy–Ebene ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ♢

8–12 Beispiel : Jede durch den Ursprung gehende Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein Teilraum. Nicht durch den Ursprung gehende Ebenen bilden keinen Teilraum. Sie bilden einen affinen Teilraum. ♢

8–13 Beispiel : $\mathbb{P}_n$ ist ein Teilraum des Vektorraumes aller stetigen Funktionen $C^0(\mathbb{R})$. ♢

8–14 Theorem : ***(Lösungen von homogenen Gleichungssystemen)***
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Nun untersuchen wir

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\} = \ker A$$

d.h. die Lösungen eines linearen, homogenen Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten. Die Menge aller Lösungen $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dieser Teilraum heisst auch ***Kern*** *der Matrix A. Man schreibt $U = \ker A$.*

Die Menge der Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystem bilden **keinen Teilraum** (siehe Aufgabe 8–2). Sie bilden einen affinen Teilraum.

Beweis : Es ist zu zeigen, dass Summen und Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind. Falls

$$A\,\vec{x} = \vec{0} \quad \text{und} \quad A\,\vec{y} = \vec{0}$$

dann gilt

$$A\,(\vec{x} + \vec{y}) = A\,\vec{x} + A\,\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A\,(\alpha\,\vec{x}) = \alpha\,A\,\vec{x} = \alpha\,\vec{0} = \vec{0}$$

□

8–15 Beispiel : Sei die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\ker A$ besteht somit aus allen Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1\,x + 2\,y + 3\,z & = & 0 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z & = & 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z & = & 0 \end{array}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} 1\,x + 2\,y + 3\,z & = & 0 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z & = & 0 \\ 0\,x + 0\,y + 0\,z & = & 0 \end{array}$$

In diesem System ist $z \in \mathbb{R}$ frei wählbar, y und x können dann bestimmt werden. Wir erhalten die Lösungen

$$\begin{pmatrix} z \\ -2\,z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Vielfachen des Vektors $(1, -2, 1)^T$ bilden eine Gerade, den Teilraum $\ker A \subset \mathbb{R}^3$. ♢

8–16 Theorem : ***(Lösungen von inhomogenen Gleichungssystemen)***
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Nun untersuchen wir die Lösungen eines linearen, inhomogenen Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten, d.h.

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

Es können verschiedene Fälle auftreten

- *Das System hat keine Lösung.*
- *Das System hat eine Lösung. Diese Lösung $\vec{x}_p$ heisst auch* ***partikuläre Lösung****.*
  Nun ist es auch möglich, dass dieses System noch mehrere Lösungen hat. Dazu muss das zugehörige homogene System
  $$A\,\vec{x} = \vec{0}$$
  mit der allgemeinen Lösung
  $$\vec{x}_h \in \ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\}$$
  betrachtet werden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist nun
  $$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$
  - *Hat das homogene System nur die triviale Lösung $\vec{0}$, so ist dass inhomogene System eindeutig lösbar.*
  - *Hat das homogene System nichttriviale Lösung $\vec{x}_h \neq \vec{0}$, so ist dass inhomogene System unendlich viele Lösungen.*

  Die Lösungsmenge eines inhomogenen, linearen Gleichungssystems bilden einen affinen Teilraum.

Beweis : Das Beispiel

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

zeigt, dass es Gleichungssysteme ohne Lösung gibt. Falls das System nun eine Lösung $\vec{x}_p$ hat (eine partikuläre Lösung), so untersuchen wir neu das modifizierte Gleichungssystem für den Vektor $\vec{y}$.

$$A\,(\vec{y} + \vec{x}_p) = \vec{b}$$

Wegen $A\,\vec{x}_p = \vec{b}$ muss der „neue“ unbekannte Vektor $\vec{y}$ die homogene Gleichung

$$A\,\vec{y} = \vec{0}$$

lösen. Somit ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ gegeben durch $\vec{y} \in \ker A$. Die Notation $\vec{y} = \vec{x}_h$ ist also angebracht.

- Hat das homogene System nur die triviale Lösung ($\ker A = \{\vec{0}\}$), so hat das inhomogene System die eindeutige Lösung $\vec{x}_p$.
- Hat das homogene System nichttriviale Lösungen $\vec{x}_h \in \ker A$, so ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems gegeben durch
  $$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

□

8.2 Lineare Kombinationen und lineare Abhängigkeit

8–17 Definition : Ein Vektor $\vec{y} \in V$ in einem Vektorraum V heisst **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ falls es Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\vec{x}_k = \lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\,\vec{x}_n$$

8–18 Definition : Die Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n \in V$ heissen **linear abhängig** falls es Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\vec{x}_k = \lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\,\vec{x}_n$$

wobei nicht alle $\lambda_k = 0$ sein dürfen. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist eine (nichttriviale) Linearkombination der Vektoren.

Sind die Vektoren nicht linear abhängig, so sagt man, dass sie **linear unabhängig** sind.

8–19 Beispiel : Der Vektor $\vec{y} = (4,4,3)^T$ ist eine Linearkombination der beiden Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

weil

$$3\,\vec{x}_1 - 0.5\,\vec{x}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 6-2 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

8–20 Satz : *Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.*

Beweis : Sind die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ linear abhängig, so gilt

$$\lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \lambda_3\,\vec{x}_3 = \vec{0}$$

Hierbei ist einer der Koeffizienten $\lambda_k \neq 0$. Für die weitere Rechnung gehen wir davon aus, dass $\lambda_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\vec{x}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\vec{x}_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,\vec{x}_3$$

Somit liegt $\vec{x}_2$ in der durch $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_3$ aufgespannten Ebene. $\square$

8–21 Beispiel : Die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, weil

$$3\,\vec{x}_1 - 0.5\,\vec{x}_2 - \vec{y} = \vec{0}$$

$\diamondsuit$

Die obigen Beispiele illustrieren das folgende, einfache Resultat.

8–22 Satz : *Die Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann.*

Beweis : Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\vec{x}_i = \vec{0}$$

wobei es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\lambda_k \neq 0$. Dann gilt

$$\vec{x}_k = \frac{-1}{\lambda_k} \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \lambda_i\,\vec{x}_i$$

Somit ist $\vec{x}_k$ als Linearkombination der anderen Vektoren geschrieben. $\square$

8–23 Beispiel : Untersuchen Sie die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Der Nullvektor $\vec{0}$ ist eine (nichttriviale) Linearkombination der drei Vektoren, falls es Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 gibt mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei mindestens eines der λ_k von Null verschieden sein muss. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die triviale $\lambda = \vec{0}$, diese ist aber hier nicht interessant. Das System hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante Null ist. Deshalb bestimmen wir diese.

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 0 + 4 \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 15 + 24 \neq 0$$

Deshalb hat dieses Gleichungssystem nur die triviale Lösung und die drei gegebenen Vektoren sind somit linear unabhängig. $\diamondsuit$

Das obige Beispiel kann analog für n Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ durchgerechnet werden und wir erhalten das folgende Resultat.

8–24 Satz : *Die n Vektoren*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig wenn die Determinante der aus diesen Vektoren gebildeten quadratischen Matrix nicht Null ist, d.h.

$$\det\,[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n] = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

Das obige Resultat lässt sich nur anwenden, falls die Anzahl der Vektoren mit der Anzahl der Komponenten jedes Vektors übereinstimmt. Sonst wird die zu untersuchende Matrix nicht quadratisch und $\det A$ kann nicht berechnet werden.

8–25 Beispiel : Untersuchen Sie die vier Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \pi \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Die selben Überlegungen wie im vorangehenden Beispiel führen auf die Bedingung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei mindestens eines der λ_k von Null verschieden sein muss. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & \pi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also vier Unbekannte aber nur drei Gleichungen. Das System muss also eine nichttriviale Lösung haben (ohne Rechnung). Somit sind die vier Vektoren linear abhängig.

Aufgrund dieser Überlegungen sollte klar sein, dass vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind. ♢

8–26 Beispiel : Zu untersuchen sind die drei Polynome

$$P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + x + x^2$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Lösung: Zu finden sind Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 mit

$$\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 (1 + x + x^2) + \lambda_3 (2 + x + x^2) &= 0 \\ 1 (\lambda_2 + 2\lambda_3) + x (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x^2 (\lambda_2 + \lambda_3) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig, wenn die Terme in den drei Klammern je Null sind. Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3 &= 0 \\ 1\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 1\,\lambda_3 &= 0 \\ 0\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 1\,\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann auch mit Hilfe von Matrizen geschrieben werden als

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die triviale Lösung $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Damit die drei Polynome linear abhängig sind benötigen wir aber eine nichttriviale Lösung. Eine solche existiert genau dann wenn die Determinante der Matrix Null ist. Eine Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \; \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Somit hat das System nur die triviale Lösung und die drei Polynome sind linear unabhängig. ♢

8.3 Basis und Dimension eines Vektorraumes

8–27 Definition : Eine Menge $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ von Vektoren in einem Vektorraum V heisst **Basis** der Vektorraumes falls

1. die Vektoren $\vec{b}_k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ linear unabhängig sind.
2. jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination der $\vec{b}_k$ geschrieben werden kann.

Für einen Vektor $\vec{x} \in V$ gibt es also Zahlen c_k mit

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \vec{b}_k = c_1\, \vec{b}_1 + c_2\, \vec{b}_2 + \ldots + c_n\, \vec{b}_n$$

Die Zahlen c_k heissen **Koeffizienten** des Vektors $\vec{x}$ in der Basis B. Die Zahl n heisst **Dimension** des Vektorraumes V.

Die erste Bedingung verlangt, dass **nicht zu viele** Vektoren in der Basis sind. Hat man zu viele Vektoren, so werden Sie linear abhängig sein. Die zweite Bedingung verlangt, dass **nicht zu wenige** Vektoren in der Basis sind. Hat man zu wenig Vektoren, so kann nicht jeder Vektor als Linearkombination der Basiselemente geschrieben werden.

8–28 Beispiel : Die drei Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des dreidimensionale Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Man spricht auch von der **Standardbasis** von $\mathbb{R}^3$. ♢

8–29 Beispiel : Die vier Polynome

$$P_0\,(x) = 1 \quad , \quad P_1\,(x) = x \quad , \quad P_2\,(x) = x^2 \quad \text{und} \quad P_3\,(x) = x^3$$

bilden eine Basis von $\mathbb{P}_3$. Die Dimension von $\mathbb{P}_3$ ist 4 . Man spricht auch von der **Standardbasis** von $\mathbb{P}_3$.
Beweis : Es ist klar, dass jedes Polynom in $\mathbb{P}_3$ als Linearkombination von 1, x, x^2 und x^3 geschrieben werden kann. Der Identitätssatz für Polynome zeigt, dass

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

nur richtig ist falls

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Somit sind die obigen Polynome auch linear unabhängig und bilden eine Basis. □
♢

8–30 Beispiel : Im Beispiel 8–23 haben wir gesehen, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, weil die Determinante der Matrix nicht Null ist.

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 39 \neq 0$$

Nun versuchen wir einen beliebigen Vektor $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_k$ zu schreiben, d.h.

$$c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

für die drei unbekannten Koeffizienten c_k. Da die Determinante nicht Null ist kann die Matrix invertiert werden und wir haben die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{y}$ kann als Linearkombination von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ geschrieben werden. Somit bilden die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. ♢

Die Rechnungen im obigen Beispiel können für beliebige Vektoren im Raum ausgeführt werden. Wir erhalten die folgende Charakterisierung einer Basis im Raum $\mathbb{R}^3$.

8–31 Beispiel : Drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ in $\mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. ♢

Mit Hilfe von Resultat 8–24 und dem obigen Beispiel erhalten wir sofort das folgende Resultat.

8–32 Satz : *Die n Vektoren*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^n$, wenn die linear unabhängig sind, d.h. wenn die Determinante der aus diesen Vektoren gebildeten quadratischen Matrix nicht Null ist.

Beweis : Der Beweis basiert auf den selben Rechnungen wie das vorangehende Beispiel. Statt mit drei Vektoren muss nur mit n Vektoren operiert werden. □

Das obige Resultat ist nicht nur im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ gültig, sondern gilt in beliebigen Vektorräumen.

8–33 Theorem : *n Vektoren in einem n–dimensionalen Vektorraum bilden genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind.*

8–34 Beispiel : Im Beispiel 8–30 haben wir gesehen, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ eine Basis bilden. Dazu haben wir aber auch noch die Standardbasis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist klar, dass ein Vektorraum verschiedene Basen haben kann.

In der Standardbasis gilt

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und in der „neuen" Basis gilt

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Beziehung zwischen den Koeffizienten y_k in der Standardbasis und den Koeffizienten c_k in der „neuen" Basis ist

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die obige Matrix beschreibt den **Basiswechsel**. Sind die Koeffizienten eines Vektors in einer Basis gegeben, so können mit Hilfe dieser Matrix (oder der Inversen) die Koeffizienten in der anderen Basis bestimmt werden. ♢

8–35 Beispiel : Die Legendre–Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3\,x^2 - 1\right) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5\,x^3 - 3\,x\right) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3\right) \end{aligned}$$

bilden eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_4$. Die Dimension von $\mathbb{P}_4$ ist 5.

Lösung: Wir untersuchen zuerst die lineare Unabhängigkeit. Das führt auf die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{4} \lambda_k\, P_k(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist erfüllt falls

$$\lambda_0\, 1 + \lambda_1\, x + \lambda_2\, \frac{1}{2}\left(3\,x^2 - 1\right) + \lambda_3\, \frac{1}{2}\left(5\,x^3 - 3\,x\right) + \lambda_4\, \frac{1}{8}\left(35\,x^4 - 30\,x^2 + 3\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung kann nach aufsteigenden Potenzen von x sortiert werden.

$$\left(\lambda_0 - \lambda_2\,\frac{1}{2} + \lambda_4\,\frac{3}{8}\right) + x\left(\lambda_1 - \lambda_3\,\frac{3}{2}\right) + x^2\left(\lambda_2\,\frac{3}{2} - \lambda_4\,\frac{30}{8}\right) + x^3\,\lambda_3\,\frac{5}{2} + x^4\,\lambda_4\,\frac{35}{8} = 0$$

Damit das Polynom identisch mit Null ist müssen alle Koeffizienten Null sein. Das führt auf das folgende Gleichungssystem für $\vec{\lambda}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht $*$ für beliebige Zahlen. Aufgrund der Dreiecksstruktur der Matrix ist dieses System eindeutig gelöst durch die triviale Lösung $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Somit sind diese Polynome linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass ein beliebiges Polynom vom Grad 4

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

als Linearkombination der Legendre–Polynome geschrieben werden kann muss die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{4} c_k\,P_k(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

untersucht werden. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

und auch dieses System ist eindeutig lösbar. Somit bilden die obigen fünf Legendre–Polynome eine Basis in $\mathbb{P}_4$. ♢

8–36 Beispiel : Die elementare Matrizenmultiplikation

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 7 & 10 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} x_3$$

zeigt, dass durch die Multiplikation mit dem Vektor $\vec{x}$ eine Linearkombination der Spalten der Matrix A gebildet wird. Daraus lässt sich ablesen, dass das System

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 7 & 10 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

genau dann lösbar ist, wenn $\vec{b}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix A geschrieben werden kann. Diese Beobachtung führt auf die Definition des Spaltenranges und eine andere Formulierung für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems. ♢

8–37 Definition : Ist A eine $n \times m$–Matrix, so bildet die Menge aller Linearkombinationen der Spalten der Matrix einen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, den **Spaltenraum**. Man schreibt auch

$$\operatorname{span} A = \{ \text{ Linearkombinationen der Spalten von } A \text{ } \}$$

Die Menge aller Linearkombinationen der Zeile der Matrix bildet einen Teilraum von $\mathbb{R}^m$, den **Zeilenenraum**. Der **Spaltenrang** einer Matrix ist eine positive ganze Zahl, gegeben durch

$$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{span} A$$

Analog ist der **Zeilenrang** einer Matrix gegeben als Dimension des Zeilenraumes.

8–38 Satz : *Man kann zeigen, dass für beliebige Matrizen*

$$\operatorname{rang} A = \textit{ Spaltenrang von } A \; = \textit{ Zeilenrang von } A$$

8–39 Satz : *Für jede $n \times m$–Matrix gilt*

$$\operatorname{span} A = \operatorname{Image} A$$

d.h. die Menge aller Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ für welche die Gleichung $A\,\vec{x} = \vec{y}$ eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ hat ist $\operatorname{span} A$.

Beweis : Die Rechnungen im vorangehenden Beispiel können problemlos auf den allgemeinen Fall übertragen werden. □

8–40 Theorem : *Ein inhomogenes System von n Gleichungen ($\vec{b} \in \mathbb{R}^n$) für m Unbekannte ($\vec{x} \in \mathbb{R}^m$)*

$$A\,\vec{x} = \vec{b}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

d.h. die erweiterte Matrix hat den selben Rang wie die ursprüngliche Matrix.

Beweis : Der Rang der Matrix A wird nicht erhöht durch das Anfügen der neuen Spalte, falls $\vec{b}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist, d.h. das System lösbar. □

Das folgende, elementare Resultat beschreibt das Verhalten von Zeilen- und Spaltenräumen unter Elementaroperationen. Die zugelassenen Elementaroperationen sind: Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten), Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer von Null verschiedenen Konstante.

8–41 Satz : *Elementare Zeilenoperationen, angewandt auf eine Matrix A ändern den Zeilenraum nicht. Der Spaltenraum kann sich aber ändern.*

Elementare Spaltenoperationen, angewandt auf eine Matrix A ändern den Spaltenraum nicht. Der Zeilenraum kann sich aber ändern.

Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Dieses Reultat zeigt, dass die Zeilenoperationen des Verfahrens von Gauss den Rang einer Matrix nicht ändern.

8.4 Aufgaben

• Aufgabe 8–1:
Zeigen Sie, dass die Polynome vom Grad gleich 3 **keinen** Vektorraum bilden.

• Aufgabe 8–2:
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$. Nun untersuchen wir die Menge

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{b} \in \mathbb{R}^n\}$$

d.h. die Lösungen eines linearen, **inhomogenen** Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten. Zeigen Sie, dass U **kein** Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist.

• Aufgabe 8–3:
Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor und

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{a} = 0\}$$

die Menge aller Vektoren, die senkrecht stehen auf $\vec{a}$. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum ist.

• Aufgabe 8–4:
Beschreiben Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= -1 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die Lösungsmenge auch geometrisch.

• Aufgabe 8–5:
Untersuchen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= \alpha \end{aligned}$$

Für welche Werte von α ist dieses System lösbar?

• Aufgabe 8–6:
Beschreiben Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= -1 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die Lösungsmenge auch geometrisch.

• Aufgabe 8–7:
Finden Sie zuerst die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Probleme $A\,\vec{x} = \vec{b}$. Beschreiben Sie anschliessend die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Probleme $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Verwenden Sie Vektornotationen. (Quelle: [AntoRorr91, p. 212])

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3\,x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & - & 6\,x_2 & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & = & -1 \\ 2\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 1 \\ 3\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & -3 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \\ 4\,x_1 & - & 7\,x_2 & & & - & 5\,x_4 & = & -5 \end{array}$$

• Aufgabe 8–8:
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x+\phi)$ als Linearkombination der beiden Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ geschrieben werden kann.

• Aufgabe 8–9:

Examiner les polynômes

Untersuchen Sie die Polynome

$$p_1(x) = x^2 - 1 \quad , \quad p_2(x) = 1 + x + 2\,x^2 \quad , \quad p_3(x) = x - 3\,x^3$$

$$f(x) = \alpha + 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3$$

Il existe une valeur de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que le polynôme $f(x)$ ci–dessus est une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3.

(a) Trouver la valeur de α.

(b) Écrire f comme combinaison linéaire des polynômes p_i.

Es gibt einen Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ sodass das obige Polynom $f(x)$ eine Linearkombination der Polynome p_1, p_2 und p_3 ist.

(a) Bestimmen Sie den Wert von α.

(b) Schreiben Sie f als Linearkombination der Polynome p_i.

• Aufgabe 8–10:
Die beiden folgenden Teilaufgaben haben sehr viel gemeinsam!

(a) Entscheiden Sie ob die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

(b) Entscheiden Sie ob die drei Polynome

$$P_1(x) = 2 - x + 4\,x^2 \quad , \quad P_2(x) = 3 + 6\,x + 2\,x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + 10\,x - 4\,x^2$$

in $\mathbb{P}_2$ linear abhängig sind.

• Aufgabe 8–11:
Die beiden folgenden Teilaufgaben haben sehr viel gemeinsam!

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ eine Basis bilden und schreiben Sie den Vektor $\vec{y} = (0,1,0)^T$ als Linearkombination der $\vec{x}_i$.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Polynome

$$P_1(x) = 2 - x + 4\,x^2 \quad , \quad P_2(x) = 3 + 6\,x + 2\,x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + 10\,x - 4\,x^2$$

in $\mathbb{P}_2$ eine Basis bilden und schreiben Sie das Polynom $f(x) = x$ als Linearkombination der $P_i(x)$.

• Aufgabe 8–12:
Zeigen Sie, dass die drei stetigen Funktion

$$f_1(x) = e^x \quad , \quad f_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sinh x$$

linear abhängig sind.

• **Aufgabe 8–13:**
Untersuchen Sie die drei folgenden Polynome im Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Examiner les trois polynômes ci–dessous.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 \quad , \quad f_2(x) = 1 + 2\,x + x^2 \quad \text{und/et} \quad f_3(x) = -1 + x + 3\,x^2$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Polynome linear unabhängig sind.

(a) Montrer que ces trois polynômes sont linéairement indépendent.

(b) Schreiben Sie $g(x) = 3\,x$ als Linearkombination der $f_i(x)$.

(b) Écrire $g(x) = 3\,x$ comme combinaison linéaire des $f_i(x)$.

• **Aufgabe 8–14:**

(a) Entscheiden Sie, ob die Polynome p_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$.

(a) Decider si les polynômes p_i sont linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$.

$$p_1(x) = 1 + x \quad , \quad p_2(x) = x^3 - 13x \quad , \quad p_3(x) = 1 + 3\,x + x^3 \quad \text{und/et} \quad p_4(x) = 2\,x + 7\,x^3$$

(b) Für welchen Wert von a sind die Polynome f_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$?

(b) Pour quel valeur de a sont les polynômes f_i linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$?

$$f_1(x) = 1 + x \quad , \quad f_2(x) = x^2 - 2\,x \quad , \quad f_3(x) = 1 + x^2 + x^3 \quad \text{und/et} \quad f_4(x) = 2\,x + a\,x^3$$

• **Aufgabe 8–15:**
Zeigen Sie, dass die Polynome

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x-3)\,(x-1)\,(x+1) \\ P_2(x) &= x\,(x-1)\,(x+1) \\ P_3(x) &= x\,(x-3)\,(x+1) \\ P_4(x) &= x\,(x-3)\,(x-1) \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{P}_3$ bilden. Um schreiben Sie das Polynom $f(x) = 1 + x$ als Linearkombination der $P_i(x)$.

• **Aufgabe 8–16:**
Zeigen Sie, dass die Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - 2 \\ P_2(x) &= (x-2)^2 \\ P_3(x) &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{P}_3$ bilden. Bestimmen Sie die Matrix die den Basiswechsel von der Standardbasis zur obigen Basis festlegt. Was hat diese Aufgabe mit dem grossen Horner–Schema zu tun?

8.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 8–1 : Die Summe zweier Polynome vom Grad 3 muss kein Polynom vom Grad 3 sein, der Grad kann kleiner werden. Ein mögliches Beispiel ist

$$(x^3 - x^2) + (x - x^3) = x^2 + x$$

Lösung zu Aufgabe 8–2 : Damit U ein Teilraum wäre müssten Summen und Vielfache von Lösugen wieder Lösungen sind. Falls

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{und} \quad A\,\vec{y} = \vec{b}$$

gilt aber

$$A\,(\vec{x}+\vec{y}) = A\,\vec{x} + A\,\vec{y} = \vec{b} + \vec{b} = 2\,\vec{b} \neq \vec{b}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A\,(\alpha\,\vec{x}) = \alpha\,A\,\vec{x} = \alpha\,\vec{b}$$

Somit ist U kein Teilraum.

Lösung zu Aufgabe 8–3 : Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in U, so gilt

$$\vec{x}\cdot\vec{a} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{y}\cdot\vec{a} = 0$$

somit gilt auch

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{a} &= \vec{x}\cdot\vec{a}+\vec{y}\cdot\vec{a} = 0\\ (\alpha\,\vec{x})\cdot\vec{a} &= \alpha\,(\vec{x}\cdot\vec{a}) = 0\end{aligned}$$

Also sind auch Summen und Vielfache von Vektoren in U wiederum in U, d.h. U ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Lösung zu Aufgabe 8–4 : Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

Es gilt $\det a = 0$ und somit kann die Matrix nicht invertiert werden.

Zuerst sind die Lösungen homogenen Gleichungssystems zu untersuchen. $\ker A$ besteht aus allen Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1\,x+2\,y+3\,z &= 0\\ 4\,x+5\,y+6\,z &= 0\\ 7\,x+8\,y+9\,z &= 0\end{aligned}$$

und wurde in Beispiel 8–15 berechnet. Er besteht aus allen Punkten auf der Geraden

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 0\\ 7 & 8 & 9 & -1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & -6 & -12 & -8\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned}1\,x+2\,y+3\,z &= 1\\ 0\,x+1\,y+2\,z &= \frac{4}{3}\\ 0\,x+0\,y+0\,z &= 0\end{aligned}$$

Wir brauchen nur eine Lösung und wählen deshalb den einfachen Fall $z = 0$. Dann erhält man sofort $y = \frac{4}{3}$ und $x = 1 - 2\,y = \frac{-5}{3}$ Eine andere Wahl von z ist auch korrekt.

Nun kombiniert man die partikuläre Lösung des inhomogenen Systems mit der allgemeine Lösung des homogenen Systems und erhält alle Lösungen des ursprünglichen Systems

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} -5/3\\ 4/3\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems können geometrisch als Schnittmenge von drei Ebenen in $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden. Die Schnittmenge besteht aus einer Geraden. Dies ist ein Spezialfall.

Lösung zu Aufgabe 8–5 : Es gilt $\det A = 0$ und somit kann die Matrix nicht invertiert werden. Die Lösungen des homogenen Systems wurden in Aufgabe 8–4 bereits bestimmt und sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & \alpha \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -12 & \alpha-7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z &= \frac{4}{3} \\ 0\,x + 0\,y + 0\,z &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $\alpha = -1$. Dann erhält man Aufgabe 8–4

Lösung zu Aufgabe 8–6 : Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist **nicht quadratisch** kann somit sicher nicht invertiert werden.

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist bereits in der Lösung von Aufgabe 8–4 vorgekommen. Man erhält die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 8–7 : Die Lösungen zu dieser Aufgaben können verschieden aussehen und trotzdem richtig sein.

(a)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_h = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 8–8 :

$$\begin{aligned} \sin(x+\phi) &= \cos\phi\ \sin x + \sin\phi\ \cos x \\ &= \lambda_1\ \sin x + \lambda_2\ \cos x \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8–9 : Zu bestimmen sind die Koeffizienten λ_i, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1\, p_1(x) + \lambda_2\, p_2(x) + \lambda_3\, p_3(x) \\ \alpha + 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3 &= \lambda_1\,(x^2-1) + \lambda_2\,(1+x+2\,x^2) + \lambda_3\,(x - 3\,x^3) \\ &= (-\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_2 + \lambda_3)\,x + (\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\,x^2 + (-3\,\lambda_3)\,x^3 \end{aligned}$$

Das ist genau dann der Fall wenn

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Diese System kann untersucht werden mit Hilfer einer erweiterten Matrix, die auf Treppengestalt zu reduzieren ist. Elementare Zeilenoperation führen zu den folgenden Zwischenresultaten.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3+\alpha \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3+\alpha \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{array}\right]$$

(a) Damit dieses System lösbar ist, muss $\alpha = -1$ sein.

(b) Dann erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda_3 = 4/3$, $\lambda_2 = 2 - \lambda_3 = 2/3$ und $\lambda_1 = 1 + \lambda_2 = 5/3$. Somit ist

$$\frac{5}{3}\,(x^2 - 1) + \frac{2}{3}\,(1 + x + 2\,x^2) + \frac{4}{3}\,(x - 3\,x^3) = f(x) = -1 + 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3$$

Lösung zu Aufgabe 8–10 : Beide Teilprobleme führen exakt auf die selben Rechnungen. Zu untersuchen ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann die Determinante berechnen und erhält

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \ldots = -32 \neq 0$$

Somit sind die Vektoren (Polynome) linear unabhängig.

Lösung zu Aufgabe 8–11 : Beide Teilprobleme führen exakt auf die selben Rechnungen. In Aufgabe 8–10 wurde bereits gezeigt, dass die Vektoren (Polynome) linear unabhängig sind. Mit Hilfe von Theorem 8–33 folgt daraus sofort, dass eine Basis vorliegt.

Um den Vektor (das Polynom) als Linearkombination zu schreiben muss man das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Da die Determinante nicht Null ist kann das System eindeutig gelöst werden und man erhält

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für die Polynome gilt entsprechend

$$x = -\frac{1}{2}\,(2 - x + 4\,x^2) + \frac{1}{2}\,(3 + 6\,x + 2\,x^2) - \frac{1}{4}\,(2 + 10\,x - 4\,x^2)$$

Lösung zu Aufgabe 8–12 :

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\,e^x - \frac{1}{2}\,e^{-x}$$

Lösung zu Aufgabe 8–13 : Zu untersuchen sind Linearkombinationen der drei Polynome, d.h.

$$\begin{aligned} c_1\,f_1(x) + c_2\,f_2(x) + c_3\,f_3(x) &= c_1\,(2 + x - x^2) + c_2\,(1 + 2\,x + x^2) + c_3\,(-1 + x + 3\,x^2) \\ &= (2\,c_1 + c_2 - c_3) + x\,(c_1 + 2\,c_2 + c_3) + x^2\,(-c_1 + c_2 + 3\,c_3) \end{aligned}$$

(a) Man versucht das Nullpolynom als Linearkombination zu schreiben. Das führt auf

$$c_1\, f_1\,(x) + c_2\, f_2\,(x) + c_3\, f_3\,(x) = 0 \Longleftrightarrow A\,\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A = 3 \neq 0$ ist $\vec{c} = \vec{0}$ die einzige Lösung und somit sind die drei Polynome linear unabhängig.

(b) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$A\,\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System wird gelöst durch (Taschenrechner)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$c_1\, f_1\,(x) + c_2\, f_2\,(x) + c_3\, f_3\,(x) = -4\,(2 + x - x^2) + 5\,(1 + 2\,x + x^2) - 3\,(-1 + x + 3\,x^2) = 3\,x$$

Lösung zu Aufgabe 8–14 :

(a) Immer linear abhängig, da der Term x^2 fehlt.

(b)

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -a & 2 & -a & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -a & 2 & -a \end{bmatrix} \\ &= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2+a & -a \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2+a & -a \end{bmatrix} \\ &= -(2\,a - 2 - a) = 2 - a \end{aligned}$$

Somit sind die Polynome linear unabhängig für $a \neq 2$.

8.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- mit den Begriffen Vektorraum, Teilraum, Linearkombination, lineare Abhängigkeit und Basis vertraut sein.
- einfache Beispiele zu den obigen Begriffen (auch ohne Hilfsmittel) durchrechnen können.
- die Lösungsmengen von homogenen und inhomogenen Gleichungssystemen präzise berechnen und beschreiben können.

Kapitel 9

Lineare Abbildungen

9.1 Definition und einleitende Beispiele

9–1 Definition : Seien U und V zwei Vektorräume. Dann ist $F\,:\,U \longrightarrow V$ eine **lineare Abbildung**, falls

1. $F(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2)$
2. $F(\lambda\,\vec{u}) = \lambda\,F(\vec{u})$

Hierbei sind $\vec{u}_i \in V$ beliebige Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$.

9–2 Beispiel : . Sei $F\,:\,\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d.h. die beiden Komponenten werden vertauscht.

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\vec{x} + \vec{y}) &= F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= F(\vec{x}) + F(\vec{y}) \end{aligned}$$

und

$$F(\lambda\,\vec{x}) = F\left(\begin{pmatrix} \lambda\,x_1 \\ \lambda\,x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda\,x_2 \\ \lambda\,x_1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda\,F(\vec{x})$$

Somit liegt eine lineare Abbildung vor. Diese Abbildung entspricht geometrisch einer Spiegelung in der Ebene an der $45°$–Geraden $x_1 = x_2$. $\diamondsuit$

9–3 Satz : *Für eine lineare Abbildung F muss $F(\vec{0}) = \vec{0}$ sein.*

Beweis : Für einen beliebigen Vektor $\vec{u} \in U$ gilt

$$F(\vec{u}) = F(\vec{u} + \vec{0}) = F(\vec{u}) + F(\vec{0})$$

und durch Subtraktion von $F(\vec{u})$ erhalten wir die Behauptung. $\square$

Für eine lineare Abbildung gilt $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Es kann aber auch Vektoren $\vec{u} \neq \vec{0}$ geben mit $F(\vec{u}) = \vec{0}$. Die Menge dieser Vektoren bildet den **Kern** der Abbildung.

9–4 Definition : Seien U und V Vektorräume und $F : U \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Die Menge aller $\vec{u} \in U$ mit $F(\vec{u}) = \vec{0}$ heisst **Kern** der Abbildung F. Es wird auch der Begriff **Nullraum** verwendet.
$$\ker F = \{\vec{u} \in U \,|\, F(\vec{u}) = \vec{0} \in V\}$$
- Die Menge aller $\vec{v} \in V$ für die es ein $\vec{u} \in U$ gibt mit $F(\vec{u}) = \vec{v}$ heisst **Bild** der Abbildung F.
$$\text{Image}\, F = \{F(\vec{u}) \in v \,|\, \vec{u} \in U\}$$

9.1.1 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ und $n \times m$–Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $\vec{y} = \mathbf{A}\,\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und es gelten die bekannten Rechenregeln

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= \mathbf{A}\,\vec{x}_1 + \mathbf{A}\,\vec{x}_2 \\ \mathbf{A}\,(\lambda\,\vec{x}) &= \lambda\,\mathbf{A}\,\vec{x} \end{aligned}$$

Somit ist $F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix A kann als lineare Abbildung aufgefasst werden. Mit Hilfe von Basisdarstellungen von linearen Abbildungen werden wir später zeigen, dass (fast) jede lineare Abbildung als Matrix aufgefasst werden kann.

9–5 Beispiel : Mit der Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
erhalten wir
$$F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$
Somit erhalten wir die selbe lineare Abbildung wie im Beispiel 9–2. Man verifiziert, dass $\ker F = \{\vec{0}\}$ und $\text{Image}\, F = \mathbb{R}^2$. ♢

9–6 Beispiel : Aus der Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
erhalten wir eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, mit
$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ y - z \end{pmatrix}$$
Um $\ker \mathbf{A}$ zu bestimmen muss das Gleichungssystem
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
gelöst werden. Hierzu setzt man geschickterweise den Algorithmus von Gauss ein (LU–Zerlegung). Da die Matrix bereits in zeilenreduzierter Form vorliegt, kann man leicht ablesen, dass z beliebig gewählt werden kann. Die Werte von y und x können als Funktion von z bestimmt werden als
$$y = z \quad \text{und} \quad x = -2\,y - 3\,z = -5\,z$$

Somit ist

$$\ker \mathbf{A} = \{ \begin{pmatrix} -5\,z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

d.h. alle Vielfachen des Vektors $(-5,1,1)^T$. Da das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

für beliebige Werte von a und b gelöst werden kann gilt $\text{Image}\,\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$, jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ kann durch die Abbildung $\mathbf{A}$ erreicht werden. ♢

9.1.2 Lineare Abbildungen angewandt auf Polynome

9–7 Beispiel : Die Ableitung eines Polynomes in $\mathbb{P}_4$ ergibt wiederum in solches Polynom. Es gelten die bekannten Rechenregeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(f\,(x) + g\,(x)) &= \frac{d}{dx}\,f\,(x) + \frac{d}{dx}\,g\,(x) \\ \frac{d}{dx}\,(\lambda\,f\,(x)) &= \lambda\,\frac{d}{dx}\,f\,(x) \end{aligned}$$

Somit kann die Abbildung „Ableiten“ $\frac{d}{dx}\ : \mathbb{P}_4 \longrightarrow \mathbb{P}_4$ als lineare Abbildung aufgefasst werden.

Die Ableitung einer Funktion f ist genau dann Null (als Funktion), wenn die Funktion $f\,(x)$ eine Konstante ist, d.h. $f \in \mathbb{P}_0$. Somit gilt

$$\ker \frac{d}{dx} = \mathbb{P}_0$$

Leiten wir ein Polynom in $\mathbb{P}_4$ ab, so erhalten wir ein Polynom von tieferem Grad, in $\mathbb{P}_3$. Jedes Polynom in P_3 kann als Ableitung eines Polynoms in $\mathbb{P}_4$ geschrieben werden. Somit haben wir

$$\text{Image}\,\frac{d}{dx} = \mathbb{P}_3$$

♢

9–8 Beispiel : Verwendet man die Standardbasis in $\mathbb{P}_4$ so können Polynome $f \in \mathbb{P}_4$ mit Vektoren $\vec{f} \in \mathbb{R}^5$ identifiziert werden.

$$f\,(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 \in \mathbb{P}_4 \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Die Ableitung f' eines solchen Polynoms kann auch mit einem neuen Vektor identifiziert werden

$$f'\,(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + 0\,x^4 \in \mathbb{P}_4 \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2\,a_2 \\ 3\,a_3 \\ 4\,a_4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Geht man vom Vektor $f \in \mathbb{R}^5$ aus, so kommt man mit Hilfe der obigen Konstruktion auf den Vektor $\vec{g} \in \mathbb{R}^5$. Man überprüft leicht, dass

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2\,a_2 \\ 3\,a_3 \\ 4\,a_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{f} \in \mathbb{R}^5$$

Somit kann das Ableiten des Polynoms $f\,(x)$ auch als Multiplikation des Vektors $\vec{f}$ mit der Matrix $\mathbf{A}$ aufgefasst werden. Das untenstehende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} f\,(x) \in \mathbb{P}_4 & \stackrel{\frac{d}{dx}}{\longrightarrow} & f'\,(x) \in \mathbb{P}_5 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{f} \in \mathbb{R}^5 & \stackrel{\mathbf{A}}{\longrightarrow} & \vec{g} \in \mathbb{R}^5 \end{array}$$

Der Kern der Matrix $\mathbf{A}$ ist gegeben durch alle Vielfachen des Vektors $(1,0,0,0,0)^T$ und das Bild als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathrm{Image}\,\mathbf{A}$ ist gegeben als Linearkombination der Spalten der Matrix $\mathbf{A}$. ♢

9.2 Lineare Abbildungen von der Ebene in die Ebene und 2×2–Matrizen

Nun untersuchen wir Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sehr sorgfältig. Obwohl alle Rechnungen nur für je zwei Komponenten ausgeführt werden lassen sich alle Ideen und Verfahren auf allgemeinere Situationen übertragen. Einzig die Matrizen werden grösser, die Bilder komplexer und die Rechnungen mühsamer.

9.2.1 Einführende Beispiele

Das folgende, wichtige Beispiel zeigt die geometrische Interpretation einer 2×2–Matrix als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Die (hier) einfache Illustration lässt sich auf komplexere Situationen übertragen. **Es ist wichtig anhand dieses Beispiels die Verbindung von Rechnung und geometrischer Interpretation gut zu verstehen**.

9–9 Beispiel : Wir untersuchen die durch die Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung gegeben durch

$$\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Basisvektoren (der Standardbasis) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\,\vec{e}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

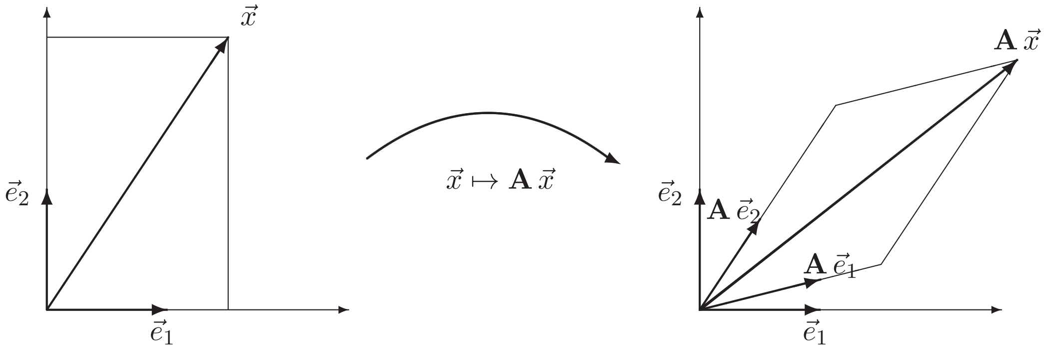


Abbildung 9.1: Lineare Abbildung, angewandt auf ein Rechteck

Somit finden Sie **in den Spalten der Matrix A die Bilder der Basisvektoren**. In Abbildung 9.1 finden Sie die Basisvektoren (links) und ihre Bilder (rechts).

Da die Abbildung linear ist gilt für den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.25 \end{pmatrix} = 1.5\,\vec{e}_1 + 2.25\,\vec{e}_2$$

die Beziehung

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \mathbf{A}\,(1.5\,\vec{e}_1 + 2.25\,\vec{e}_2) = 1.5\,\mathbf{A}\,\vec{e}_1 + 2.25\,\mathbf{A}\,\vec{e}_2 = 1.5\begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} + 2.25\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Auch diese Beziehung ist Abbildung 9.1 illustriert. In Abbildung 9.2 sehen Sie ein gleichmässiges Gitter (links) in der Ebene und das selbe Gitter nachdem alle Punkte (Vektoren) mit der Matrix **A** multipliziert wurden. ♢

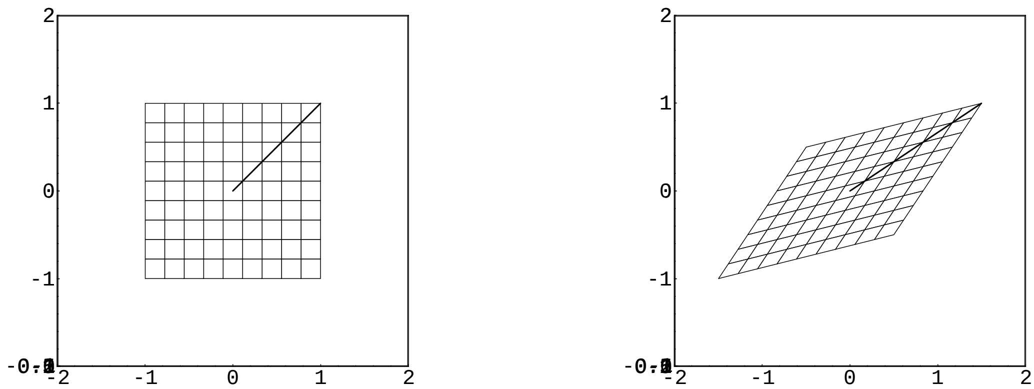


Abbildung 9.2: Gitter und Bild des Gitters in der Ebene

Die Figuren in Abbildung 9.2 wurden mit dem untenstehenden *Mathematica*–Code erzeugt.

Mathematica

```
Show[
ParametricPlot3D[{x,y,0},{x,-1,1},{y,-1,1},
  PlotPoints -> 10,
  PlotRange ->{{-2,2},{-2,2},{-1,1}},
  ViewPoint-> {0,0,100},
  Shading -> False,
  DisplayFunction -> Identity],
ParametricPlot3D[{t,t,0},{t,0,1},
```

```
  DisplayFunction -> Identity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Mathematica

```
matrix={{1,0.5,0},
        {0.25,0.75,0},
        {0,0,1}};
Show[
ParametricPlot3D[matrix.{x,y,0},{x,-1,1},{y,-1,1},
  PlotPoints -> 10,
  PlotRange ->{{-2,2},{-2,2},{-1,1}},
  ViewPoint-> {0,0,100},
  Shading -> False,
  DisplayFunction -> Identity],
ParametricPlot3D[matrix.{t,t,0},{t,0,1},
  DisplayFunction -> Identity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

9–10 Beispiel : Von einer linearen Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sind die Bilder der beiden Standardbasisvektoren bekannt, nämlich

$$\vec{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist das Bild eines beliebigen Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: Da

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2$$

und die Abbildung F linear ist gilt

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= F(x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2) \\ &= x_1\,F(\vec{e}_1) + x_2\,F(\vec{e}_2) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,x_1 - 1\,x_2 \\ 2\,x_1 - 1\,x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

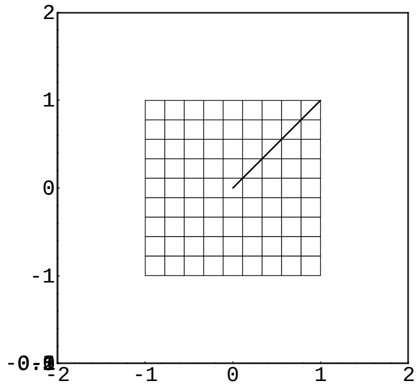
Sind von einer linearen Abbildung die Bildvektoren der Basis bekannt, so kann die zugehörige Matrix konstruiert werden, indem die Bilder der Basisvektoren als Spalten der Matrix verwendet werden. Die Abbildung 9.3 zeigt, dass diese Abbildung das Gitter dreht und verzerrt. ♢

Die beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ erzeugen ein Einheitsquadrat in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Fläche 1. Werden sie durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

abgebildet, so wird aus dem Quadrat ein Parallelogramm, erzeugt durch die beiden Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



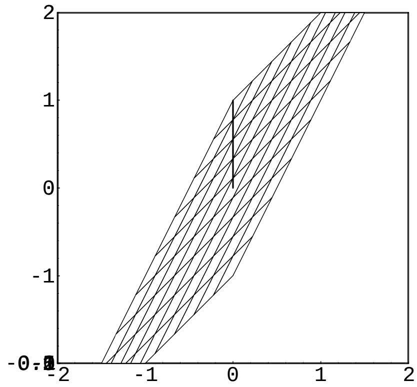


Abbildung 9.3: Drehen und Verzerren eines Gitters in der Ebene

Die Fläche dieses Parallelogramms ist gegeben durch

$$\det\ \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Der Faktor $\det \mathbf{A}$ gibt an um welchen **Faktor Flächen vergrössert werden durch die Abbildung**. Ist $\det \mathbf{A} < 0$, so wird die Orientierung geändert.

Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist beschrieben durch eine 2×2–Matrix, wobei die Bilder der Standardbasis in den Spalten der Matrix stehen. Es gibt aber noch viele andere Arten lineare Abbildungen zu beschreiben. Im Folgenden wird aus gegebenener Information über die lineare Abbildung die zugehörige Matrix berechnet oder aus der Matrix Information über die zugehörige lineare Abbildung extrahiert. Wir untersuchen

- Abbildung gegeben durch die Bilder der Standardbasisvektoren (siehe vorangehender Abschnitt).
- Abbildung gegeben durch die Bilder zweier beliebiger Vektoren.
- Abbildung gegeben durch zwei reelle Eigenvektoren und Eigenwerte.
- Drehungen in der Ebene.
- Abbildung gegeben durch eine symmetrische Matrix.
- Abbildung gegeben durch komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren.

Fast alle Untersuchungen werden wir später auf andere Fälle übetragen, z.B. Abbildung vom Raum $\mathbb{R}^3$ in den Raum $\mathbb{R}^3$.

9.2.2 Abbildung gegeben durch die Bilder zweier beliebiger Vektoren

Zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Somit kann jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden Vektoren geschrieben werden. Das Bild eines beliebigen Vektor unter einer linearen Abbildung kann somit als Linearkombination der Bilder der beiden Basisvektoren geschrieben werden. Daraus wird ersichtlich, dass eine lineare Abbildung vollständig bestimmt ist durch die Bilder einer Basis. Dieses Verhalten wird durch das folgende Beispiel illustriert.

9–11 Beispiel : Von einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) weiss man, dass

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. man kennt die Bilder zweier Vektoren. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

Lösung: Aus den beiden gegebenen Bedingungen folgt

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung kann von rechts mit der geeigneten inversen Matrix multipliziert werden um man erhält

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können mit Hilfe von

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kontrolliert werden.

Mit diesem Lösungsverfahren musste eine 2×2–Matrix invertiert werden. ♢

9–12 Beispiel : Die vorangehende Aufgabe könnte auch mit einem anderen, allerdings ineffizienteren Verfahren gelöst werden. Zu finden ist eine Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt auf vier Gleichungen

$$\begin{array}{rl} 1\,a_{11} & +2\,a_{12} = 3 \\ 1\,a_{21} & +2\,a_{22} = 4 \\ -1\,a_{11} & +1\,a_{12} = 2 \\ -1\,a_{21} & +1\,a_{22} = 0 \end{array}$$

oder mit Hilfe der Matrizennotation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir wie in der vorangehenden Aufgabe auch hier

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Mit diesem Lösungsverfahren musste ein System von vier Gleichungen gelöst werden. Das ist ein erheblich grösserer Aufwand als das Invertieren einer 2×2–Matrix. ♢

9–13 Satz : *Es ist sehr einfach eine 2×2–Matrix zu invertieren, nämlich*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Die beiden Zahlen auf der Diagonalen werden vertauscht und die Vorzeichen der beiden Einträge in der Gegendiagonalen wechseln das Vorzeichen. Dazu kommt noch die Division durch die Determinate der Matrix.

Die folgende Rechnung mit *Mathematica* bestättigt das obige Resultat.

Mathematica
```
mat={{a,b},{c,d}};
Det[mat]*Inverse[mat] //MatrixForm
.
d    -b

-c   a
```

9.2.3 Abbildung gegeben durch zwei reele Eigenvektoren und Eigenwerte

9–14 Beispiel : Von einer Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt, dass sie den Vektor $(1,3)^T$ um den Faktor 3 streckt und den Vektor $(4,1)^T$ am Ursprung spiegelt und seine Länge halbiert. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$. Eine Illustration dieser Abbildung finden Sie in Abbildung 9.4.

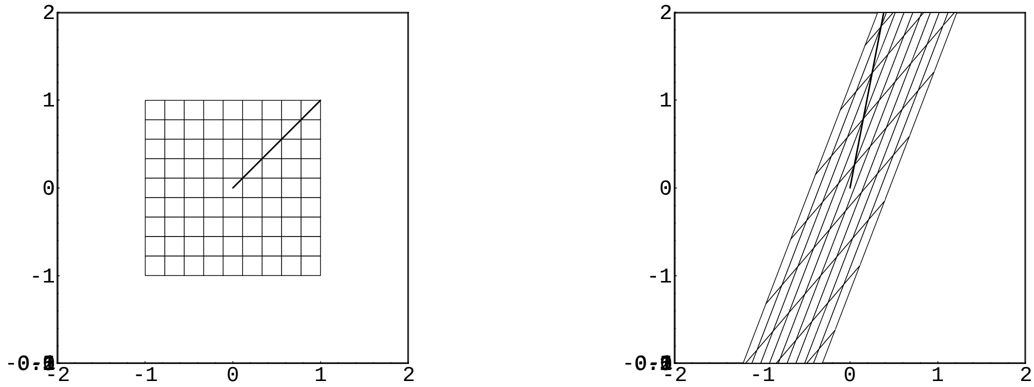


Abbildung 9.4: Gitter und ein durch lineare Abbildung verzerrtes Gitter in der Ebene

Lösung: Aufgrund der obigen Beschreibung der Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

Somit sind die beiden gegebenen Vektoren **Eigenvektoren** der Matrix $\mathbf{A}$ und die Zahlen 3 und $\frac{-1}{2}$ sind **Eigenwerte**. Wie in den beiden vorangehenden Aufgaben sind die Bilder zweier linear unabhängiger Vektoren gegeben und die Matrix $\mathbf{A}$ ist zu bestimmen.

Statt einen Eigenvektor mit der Matrix $\mathbf{A}$ zu multiplizieren, kann man ihn auch mit dem entsprechenden Eigenwert multiplizieren ($\mathbf{A}\,\vec{e} = \lambda\,\vec{e}$). Durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

wird die erste Spalte mit drei multipliziert und die zweite mit $\frac{-1}{2}$. Somit gilt

$$\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

und deshalb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

Setzt man Zahlen ein so ergibt sich nach einigen Rechnungen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix}-18 & 28\\ -21 & 73\end{bmatrix}$$

Die Überlegungen sind vergleichbar mit Beispiel 9–11. Der Faktor $\frac{1}{22}$ ist leicht zu finden wegen

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ein weiterer Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht durch die Multiplikation mit der Diagonalmatrix. $\diamondsuit$

9–15 Beispiel : Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im vorangehenden Beispiel war gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} -18 & 28 \\ -21 & 73 \end{bmatrix}$$

d.h. $F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$. Die Spalten der Matrix beinhalten die Bilder der Standardbasisvektoren.

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -18 \\ -21 \end{pmatrix} \\ F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 28 \\ 73 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Zahlen in der Matrix $\mathbf{A}$ sind somit eng an die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gebunden. Die beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig und bilden somit auch eine Basis in $\mathbb{R}^2$. Für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es Koeffizienten c_1 und c_2 mit

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + c_2\,\vec{v}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Angaben in der vorangehenden Aufgabe zeigen, dass

$$F(\vec{v}_1) = 3\,\vec{v}_1 \quad \text{und} \quad F(\vec{v}_2) = \frac{-1}{2}\,\vec{v}_2$$

und somit (Linearität)

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= F(c_1\vec{v}_1 + c_2\,\vec{v}_2) \\ &= c_1\,F(\vec{v}_1) + c_2\,F(\vec{v}_2) \\ &= c_1\,3\,\vec{v}_1 + c_2\,\frac{-1}{2}\,\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Diese Zuordnung kann auch folgendermassen dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\,c_1 \\ \frac{-1}{2}\,c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Somit kann die selbe Abbildung F in der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dargestellt werden durch die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Die Verbindung der Matrix A zur Matrix D wird gegeben durch die Beziehung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$$

oder auch

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$$

In den Spalten der Matrix $\mathbf{E}$ stehen die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Aufgrund dieser Beziehung sollte klar sein, weshalb die Matrix $\mathbf{E}$ den **Basiswechsel** beschreibt.

Dieselbe lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ kann also zu verschiedenen Matrizendarstellungen führen. Das kann durch ein kommutatives Diagramm illustriert werden, siehe Abbildung 9.5. Für die Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ erhalten wir die untere Hälfte der Diagramms, für die anderen Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ erhalten wir die obere Hälfte. In der zweiten

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{D}} & \mathbf{D}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 & & F(\vec{x}) = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x} \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 & & F(\vec{x}) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Abbildung 9.5: Darstellung einer Abbildung durch verschiedene Matrizen

Basis ist die Darstellungsmatrix $\mathbf{D}$ speziell einfach, es ist eine Diagonalmatrix. Dieser Spezialfall tritt ein, weil die Vektoren $\vec{v}_i$ Eigenvektoren der linearen Abbildung F sind. Der geometrische Effekte dieser Abbildung lässt sich so leicht erklären. $\diamondsuit$

9.2.4 Drehungen in der Ebene

9–16 Beispiel : Nun untersuchen wir die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

und die zugehörige lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Basisvektoren (der Standardbasis) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\,\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}\,\vec{e}_2 &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ erhalten wir

$$\mathbf{A}\,\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\vec{e}_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass $\|\mathbf{A}\,\vec{e}_1\| = \|\mathbf{A}\,\vec{e}_2\| = 1$. Somit haben die Einheitsvektoren ihre Länge durch die Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{A}$ nicht geändert. Beide Basisvektoren wurden um den Winkel $\phi = 30°$ (im Gegenuhrzeigersinn) gedreht. Dies ist in Abbildung 9.6 zu beobachten. $\diamondsuit$

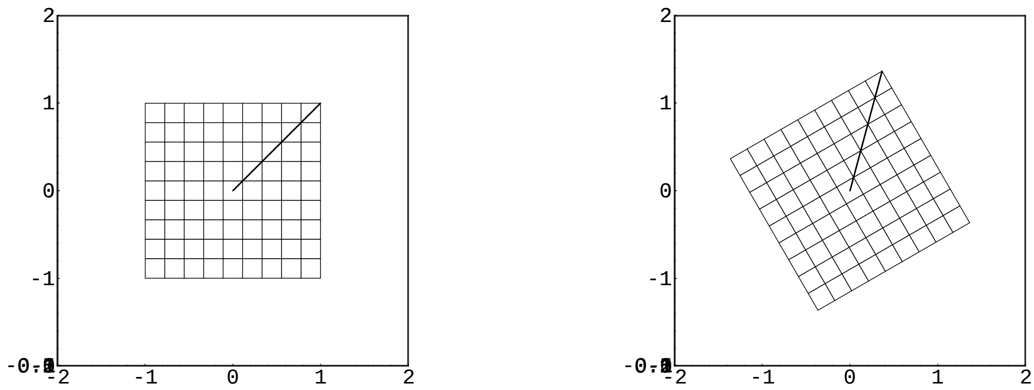


Abbildung 9.6: Gitter und um 30° gedrehtes Gitter in der Ebene

Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|^2 &= \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x} \rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \cos^2\phi\,x_1^2 + \sin^2\phi\,x_2^2 - 2\sin\phi\,x_1\,\cos\phi\,x_2 \\
&\quad + \sin^2\phi\,x_1^2 + \cos^2\phi\,x_2^2 + 2\cos\phi\,x_1\,\sin\phi\,x_2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

Das Bild des Vektors ($\mathbf{A}\,\vec{x}$) hat die selbe Länge wie der ursprüngliche Vektor ($\vec{x}$). Die Abbildung dreht den Vektor. Um den Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ zu bestimmen verwenden wir

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\cos\alpha &= \langle \vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x} \rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \cos\phi\,x_1^2 - \sin\phi\,x_1\,x_2 + \sin\phi\,x_1\,x^2 + \cos\phi\,x_2^2 \\
&= \cos\phi\,(x_1^2 + x_2^2) = \cos\phi\,\|\vec{x}\|^2 \\
&= \cos\phi\,\|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|
\end{aligned}$$

Es ist also $\cos\alpha = \cos\phi$ und es werden **alle Vektoren um den Winkel ϕ gedreht**.

9–17 Satz : *Soll ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene um den Winkel ϕ im positiven Sinn gedrecht werden (Gegenuhrzeigesinn), so kann er mit der **Drehmatrix A** multipliziert werden. Es ist*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Die inverse Matrix ist leicht zu bestimmen (Drehung um den Winkel $-\phi$) als

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

9–18 Beispiel : Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen
Mit Hilfe der obigen Rotationsmatrizen können die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen leicht verifiziert werden. Dreht man einen Vektor zuerst um α, dann um β, so wird er insgesamt um $\alpha+\beta$ gedreht. Stell man dies durch Matrizenmultiplikationen dar, so gilt mit

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

die Identität

$$\mathbf{D}(\alpha+\beta) = \mathbf{D}(\beta)\cdot\mathbf{D}(\alpha)$$

Ausgeschrieben heisst das

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vergleicht man die Einträge in der ersten Spalte der obigen Matrizen, so kann man ablesen, dass

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

9.2.5 Abbildung gegeben durch eine symmetrische Matrix

9–19 Beispiel : In Beispiel 9–16 haben wir gesehen, dass die inverse Matrix der Drehmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Schreiben wir das Skalarprodukt

$$\langle\vec{y},\vec{x}\rangle = y_1\,x_1 + y_2\,x_2 = \vec{y}^T\cdot\vec{x}$$

als Produkt von zwei (sehr speziellen) Matrizen so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{A}\,\vec{x},\mathbf{A}\,\vec{y}\rangle &= (\mathbf{A}\vec{x})^T\,\mathbf{A}\vec{y} \\ &= \vec{x}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\vec{x} \\ &= \langle\vec{x},\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\vec{y}\rangle \\ &= \langle\vec{x},\vec{y}\rangle \end{aligned}$$

für beliebige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Also gilt für $\vec{y} = \vec{x}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|^2 &= \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

d.h. $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ haben die selbe Länge. Wegen

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle &= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\ \cos\angle(\vec{x}, \vec{y}) \\ \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}\rangle &= \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{y}\|\ \cos\angle(\mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\ \cos\angle(\mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}) \end{aligned}$$

ist der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gleich dem Winkel zwischen $\mathbf{A}\,\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{y}$.

Somit ändert die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\,\vec{x}$ weder Längen von Vektoren noch die Winkel zwischen Vektoren. Um diese zu verifizieren haben wir nur die Eigenschaft $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ verwendet. $\diamondsuit$

9–20 Definition : Eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ heisst **orthogonale Matrix**. Fasst man die Spalten der Matrix $\mathbf{R}$ als Vektoren auf, d.h.

$$\mathbf{R} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n]$$

so haben die Vektoren $\vec{r}_k$ je die Länge 1 und stehen paarweise senkrecht aufeiander.

9–21 Satz : *Sei $\mathbf{R}$ eine $n \times n$–Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{r}_i$, d.h.*

$$\mathbf{R} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n]$$

Die Matrix $\mathbf{R}$ ist genau dann orthogonal, wenn alle Vektoren $\vec{r}_i$ Länge 1 haben und senkrecht aufeinander stehen.

Beweis : Falls $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ so gilt wegen $\vec{r}_i = \mathbf{R}\,\vec{e}_i$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j\rangle &= \langle \mathbf{R}\,\vec{e}_i, \mathbf{R}\,\vec{e}_j\rangle \\ &= \langle \mathbf{R}^T\,\mathbf{R}\,\vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Das entpricht genau den gewünschten Eigenschaften der Spaltenvektoren $\vec{r}_i$.

Mit Hilfe der Definition der Matrizenmultiplikation verifiziert man elementar, dass

$$\mathbf{R}^T\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1^{\,T} \\ \vec{r}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{r}_n^{\,T} \end{bmatrix} [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n] = \begin{bmatrix} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_1, \vec{r}_n\rangle \\ \langle \vec{r}_2, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_2, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_2, \vec{r}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{r}_n, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_n, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_n, \vec{r}_n\rangle \end{bmatrix}$$

Haben nun die Vektoren $\vec{r}_i$ alle Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander, so gilt

$$\mathbf{R}^T\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_N$$

und somit ist $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. $\square$

Das folgende Resultat beschreibt das Verhalten von linearen Abbildungen, die durch **symmetrische** Matrizen $\mathbf{A}$ gegeben sind. Es gibt zwei zueinander senkrechte Richtungen (gegeben durch Eigenvektoren) in diese Richtungen werden die Vektoren um feste Faktoren (Eigenwerte) gestreckt. Das Resultat ist nicht nur für 2×2–Matrizen richtig, sondern gilt auch für symmetrische $n \times n$–Matrizen. Allerdings beweisen wir das Resultat nur für den zweidimensionalen Fall.

9–22 Satz : *Für jede **symmetrische** 2×2–Matrix* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

gibt es eine Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

so dass

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T$$

*Die Diagonalelemente λ_i sind die **Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ und in den Spalten der Matrix $\mathbf{R}$ stehen normalisierte Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.** Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

Statt den Vektor mit der Matrix $\mathbf{A}$ zu multiplizieren kann man ihn auch mit $\mathbf{R}$ multiplizieren, das Resulat mit der Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ multiplizieren und dann mit $\mathbf{R}^T$ multiplizieren. Das führt auf Tabelle 9.1. Der Effekt der drei Multiplikationen kann geometrisch leicht beschrieben werden.

Rechnung	Geometrische Beschreibung
$\mathbf{A}\,\vec{x}$	
$\mathbf{R}\,\vec{x}$	Drehung um Winkel ϕ
$\mathbf{D}\,(\mathbf{R}\,\vec{x})$	Streckung um λ_1 in eine Richtung Streckung um λ_2 in senkrechte Richtung
$\mathbf{R}^T\,(\mathbf{D}\,\mathbf{R}\,\vec{x})$	Drehung um Winkel $-\phi$

Tabelle 9.1: Multiplikation mit symmetrischer Matrix zerlegt als Drehung / Streckung / Drehung

Beweis : Die Beweisidee wurde [Twom77, p. 65] entnommen. Da $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix ist gilt

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Wir müssen den Drehwinkel ϕ bestimmen, sodass $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ zu einer Diagonalmatrix wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}\cos\phi + a_{12}\sin\phi & -a_{11}\sin\phi + a_{12}\cos\phi \\ a_{21}\cos\phi + a_{22}\sin\phi & -a_{21}\sin\phi + a_{22}\cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_{11}\cos^2\phi + (a_{12} + a_{21})\cos\phi\sin\phi + a_{22}\sin^2\phi \\ d_{12} &= -a_{11}\cos\phi\sin\phi + a_{12}\cos^2\phi - a_{21}\sin^2\phi + a_{22}\cos\phi\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= -a_{11}\cos\phi\sin\phi - a_{12}\sin^2\phi + a_{21}\cos^2\phi + a_{22}\cos\phi\sin\phi \\ d_{22} &= a_{11}\sin^2\phi - (a_{12}+a_{21})\cos\phi\sin\phi + a_{22}\cos^2\phi \end{aligned}$$

Die beiden Nebendiagonalelemente $d_{12} = d_{21} = 0$ müssen Null sein, damit $\mathbf{D}$ zu einer Diagonalmatrix wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn $d_{12} + d_{21} = 0$ und $d_{12} - d_{21} = 0$. Nun setzen wir die Bedingung $A = A^T$ eine, d.h. $a_{21} = a_{12}$. Die Differenz $d_{12} - d_{21} = 0$ verschwindet immer. Für die Summe erhalten die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= d_{12} + d_{21} = -2\,a_{11}\cos\phi\sin\phi + 2\,a_{12}\,(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\,a_{22}\cos\phi\sin\phi \\ &= (a_{22} - a_{11})\,2\,\cos\phi\sin\phi + 2\,a_{12}\,(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ &= (a_{22} - a_{11})\,\sin 2\,\phi + 2\,a_{12}\,\cos 2\phi \end{aligned}$$

Wir wählen somit den Drehwinkel ϕ aufgrund der Bedingung

$$\tan(2\phi) = \frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi)} = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Diese Bedingung ist immer erfüllbar, selbst wenn $a_{11} - a_{22} = 0$. Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Wir haben noch zu zeigen, dass wir auch Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt haben.

Wegen $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und der obigen Gleichung gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T$$

Betrachten wir die Spalten von $\mathbf{R}$ als Vektoren und rechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}\cos\phi & -d_{22}\sin\phi \\ d_{11}\sin\phi & d_{22}\cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multipliziert man die Matrix $\mathbf{R}$ mit $\mathbf{A}$, so wird die jede Spalte von $\mathbf{R}$ mit der entsprechenden Diagonalzahl aus $\mathbf{D}$ multipliziert. Führen wir die Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ Spaltenweise auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} &= d_{11} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} &= d_{22} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit hat das homogene Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - d_{11}\mathbb{I})\vec{e} = \begin{bmatrix} a_{11} - d_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_{11} \end{bmatrix} \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung, d.h. die Determinate muss Null sein. Somit ist $\lambda = d_{11}$ eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2$$

d_{11} und d_{22} sind die **Eigenwerte** der Matrix $\mathbf{A}$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen. Sei dazu

$$\mathbf{A}\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{v} = \mu\,\vec{v}$$

mit $\mu \neq \lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\,\langle\vec{u},\vec{v}\rangle &= \langle\lambda\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\vec{u},\mu\vec{v}\rangle\\ &= \langle\mathbf{A}\,\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\vec{u},\mathbf{A}\,\vec{v}\rangle\\ &= \langle\mathbf{A}\,\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\mathbf{A}^T\,\vec{u},\vec{v}\rangle\\ &= \langle\mathbf{A}\,\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\mathbf{A}\,\vec{u},\vec{v}\rangle=0\end{aligned}$$

Da $(\lambda-\mu)\neq 0$ ist muss $\langle\vec{v},\vec{u}\rangle=0$ sein, d.h. $\vec{v}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$. □

Das obige Resultat ist auch richtig für grössere, symmetrische Matrizen.

9–23 Satz : *Für jede* ***symmetrische*** *$n\times n$–Matrix A*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\ a_{12}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

gibt es eine orthogonale Matrix $\mathbf{R}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}$, so dass

$$\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\ 0&\lambda_2&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\dots&\lambda_n\end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{R}^T$$

Die Diagonalelemente λ_i sind die ***Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ und in den Spalten der Matrix $\mathbf{R}$ stehen normalisierte Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.*** *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

9–24 Beispiel : Beschreiben Sie das Verhalten der Abbildung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2&3\\ 3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Lösung: Wir suchen die Zerlegung

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3\\ 3&1\end{bmatrix}=\mathbf{R}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\ 0&\lambda_2\end{bmatrix}\mathbf{R}^T$$

Im Beweis des Satzes 9–22 sehen wir

$$\tan(2\phi)=\frac{2\,a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{6}{2-1}=6$$

Daraus ergibt sich $\phi=\frac{1}{2}\arctan 6\approx 0.703\approx 40.3^\circ$. Somit erhalten wir

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\ \sin\phi&\cos\phi\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.76302&-0.64637\\ 0.64637&0.76302\end{bmatrix}$$

Die beiden Eigenwerte können wir nun aus den Bedingungen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0.76302 \\ 0.64637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.46516 \\ 2.93543 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0.76302 \\ 0.64637 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 \approx 4.5414$$

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -0.64637 \\ 0.76302 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99631 \\ -1.17610 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -0.64637 \\ 0.76302 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 \approx -1.5414$$

ablesen. Die beiden Eigenwerte müssen auch Lösung der charakteristischen Gleichung sein.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 3\,\lambda - 7 = 0$$

Das ergibt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(3 \pm \sqrt{9+28}\right) = \begin{cases} 4.5414 \\ -1.5414 \end{cases}$$

Somit kann das Vehalten der linearen Abbildung wie folgt beschrieben werden:

1. Multiplikation mit $\mathbf{R}^{-1}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx -40.3°$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit $\mathbf{D}$:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx 4.54$
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx -1.54$ (Spiegelung und Streckung)
3. Multiplikation mit $\mathbf{R}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx 40.3°$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In diesem (einfachen) Beispiel haben wir zuerst die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix berechnet, dann mit deren Hilfe die Eigenwerte. Üblicherweise arbeitet man in der anderen Reihenfolge:

1. Berechne die Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}\right) = 0$$
2. Für jeden Eigenwert λ_i hat das lineare Gleichungssystem
$$\mathbf{A}\,\vec{v} - \lambda_i\,\vec{v} = \vec{0}$$
eine nichttriviale Lösung $\vec{v}$, einen Eigenvektor. Dieser kann bei Bedarf normiert werden.

♢

9–25 Beispiel : Die Abbildung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

des vorangehenden Beispiels kann auch mit *Mathematica* oder `MATLAB` untersucht werden.

Mathematica

```
N[Eigensystem[{{2,3},{3,1}}]]
.
{{-1.54138, 4.54138}, {{-0.847127, 1.}, {1.18046, 1.}}}
```

Leider sind die von *Mathematica* berechneten Eigenvektoren (noch) nicht normiert. Mit einigen zusätzlichen Befehlen kann dem aber abgeholfen werden.

Mathematica

```
Clear[vec,val]
{val,vec}=N[Eigensystem[{{2,3},{3,1}}]];
{val[[1]],vec[[1]]/Sqrt[vec[[1,1]]^2+vec[[1,2]]^2]}
{val[[2]],vec[[2]]/Sqrt[vec[[2,1]]^2+vec[[2,2]]^2]}
.
{-1.54138, {-0.646375, 0.76302}}
{4.54138,  { 0.76302,  0.646375}}
```

MATLAB liefert direkt die gewünschten Resultate.

Matlab

```
[vectors,values]=eig([2,3;3,1])
.
vectors =

   0.76302  -0.64637
   0.64637   0.76302

values =

   4.54138   0.00000
   0.00000  -1.54138
```

♢

9.2.6 Abbildung gegeben durch komplexe Eigenvektoren und Eigenwerte

Die Eigenwerte einer reellen 2×2–Matrix sind Nullstellen eines Polynoms der Ordnung 2. Deshalb ist es möglich, dass es keine reellen Eigenwerte gibt, sondern ein Paar von konjugiert komplexen Eigenwerten. Dazu gibt es dann auch komplexe Eigenvektoren. Wir wollen untersuchen wie sich eine lineare Abbildung mit einer solchen Matrix verhält.

9–26 Beispiel : Untersuchen Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind Lösungen der Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0$$

und somit gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm i\,3 = \alpha \pm i\,\beta$$

Um den Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + i\,3$ zu bestimmen muss man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -9 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -i\,3 & -9 \\ 1 & -i\,3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine einfache (nicht normierte) Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u} + i\,\vec{w}$$

mit reellen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$. Wir haben den komplexen Eigenvektor $\vec{v}$ zerlegt in Real- und Imaginär–Teil. Da die Matrix A reell ist gilt $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) &= \overline{\mathbf{A}}\;\overline{(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\mathbf{A}\,(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\lambda_1\,(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\lambda_1}\;\overline{(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \lambda_2\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) \end{aligned}$$

Somit ist der zu $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$ konjugiert komplexe Vektor $\vec{u} - i\vec{w}$ der Eigenvektor zum konjugiert komplexen Eigenwert $\lambda_2 = \alpha - i\,\beta = 1 - i3$. Folglich gelten die beiden komplexen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\vec{u} + i\,\vec{w}) &= (\alpha + i\,\beta)\,(\vec{u} + i\,\vec{w}) = (\alpha\,\vec{u} - \beta\,\vec{w}) + i\,(\alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{u}) \\ \mathbf{A}\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) &= (\alpha - i\,\beta)\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) = (\alpha\,\vec{u} - \beta\,\vec{w}) - i\,(\alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{u}) \end{aligned}$$

Diese beiden komplexen Gleichungen können addiert und subtrahiert werden. Dividiert man die entsprechenden Resultate durch 2 so erhält man die beiden reellen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\vec{u} &= \alpha\,\vec{u} - \beta\,\vec{w} \\ \mathbf{A}\,\vec{w} &= \alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{u} \end{aligned}$$

Hier sieht man, dass bei einer Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{A}$ sowohl der Vektor $\vec{u}$ als auch $\vec{w}$ um den Faktor α gestreckt werden, dann wird noch das β–fache des anderen Vektors dazu addiert (resp. subtrahiert). Da die beiden reellen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind[1], bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis kann ein beliebiger Vektor geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \vec{y} = c_1\,\vec{u} + c_2\,\vec{w} \Longrightarrow \mathbf{A}\,\vec{y} &= c_1\,\mathbf{A}\,\vec{u} + c_2\,\mathbf{A}\,\vec{w} \\ &= c_1\,(\alpha\,\vec{u} - \beta\,\vec{w}) + c_2\,(\alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{u}) \\ &= c_1\,(\alpha\,\vec{u} - \beta\,\vec{w}) + c_2\,(\alpha\,\vec{w} + \beta\,\vec{u}) \\ &= (\alpha\,c_1 + \beta\,c_2)\,\vec{u} + (-\beta\,c_1 + \alpha\,c_2)\,\vec{w} \\ &= d_1\,\vec{u} + d_2\,\vec{w} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix entspricht der Darstellung der linearen Abbildung in der Basis $\{\vec{u}, \vec{w}\}$. Setzt man

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{\alpha}{\beta}$$

und fasst $(\alpha, \beta)^T$ als Punkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf, so kann man mit Polarkoordinaten schreiben

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Somit bewirkt die Abbildung in der Basis $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ einer Drehung um den Winkel $-\phi$ und einer anschliessenden Streckung um den Faktor r. Diese Beschreibung ist einfach. In der Standardbasis ergibt die Matrix $\mathbf{A}$ keine reine Drehung, wie sie in Abbildung 9.7 beobachten. Die Streckung ist nicht in alle Richtungen gleich gross und es gibt auch noch Scherungen. Diese Beschreibung ist weniger einfach. Die obige Darstellung hat sehr viel zu tun mit der Polardarstellung der komplexen Zahl

$$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta = r\,e^{i\phi} \quad \text{wobei} \quad r^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{\alpha}{\beta}$$

Dies wird illustriert durch die folgende Sequenz von Abbildungen.

[1]Beweis durch Widerspruch: Falls $\vec{w} = k\,\vec{u}$ so gilt wegen $\mathbf{A}\,(\vec{u} + i\,\vec{w}) = (\alpha + i\,\beta)\,(\vec{u} + i\,\vec{w})$ die Gleichung

$$\mathbf{A}\,(1 + i\,k)\,\vec{u} = (\alpha + i\,\beta)\,(1 + i\,k)\,\vec{u}$$

Nach einer Division durch $(1 + i\,k) \neq 0$ gilt somit

$$\mathbf{A}\,\vec{u} = (\alpha + i\,\beta)\,\vec{u}$$

Der Ausdruck links ist reell, aber der Ausdruck recht hat einen Imaginärteil. Somit kann diese Gleichung nicht richtig sein. Wir haben den gewünschten Widerspruch.

- Basiswechsel

$$x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 = c_1\,\vec{u} + c_2\,\vec{w} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

  oder auch

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Rotation und Streckung

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- Basiswechsel rückgängig machen

$$y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 = d_1\,\vec{u} + d_2\,\vec{w} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \cdot r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

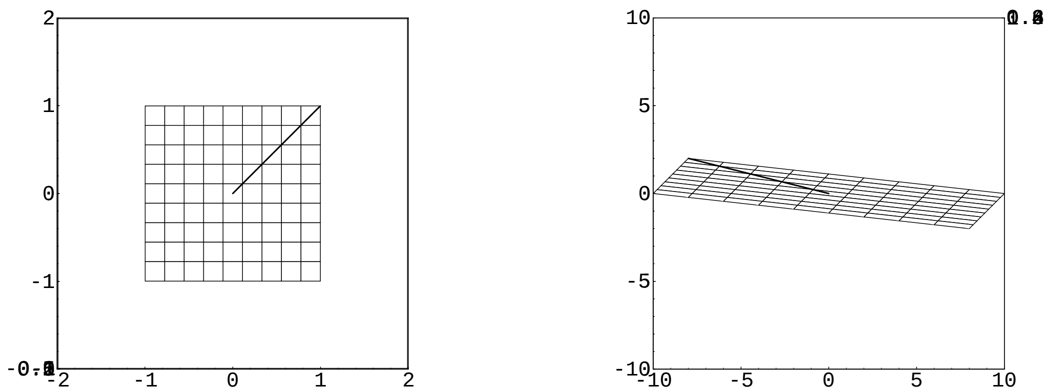


Abbildung 9.7: Abbildung durch komplexe Eigenwerte

Im obigen Beispiel haben wir das folgende Resultat bewiesen:

9–27 Satz : *Ist* $\mathbf{A}$ *eine reelle* $n \times n$*–Matrix und* $\lambda = \alpha + i\beta$ *ein komplexer Eigenwert mit komplexem Eigenvektor* $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$*. So ist* $\lambda = \alpha - i\beta$ *ein komplexer Eigenwert mit komplexem Eigenvektor* $\vec{v} = \vec{u} - i\vec{w}$*, d.h.*

$$\mathbf{A}\,(\vec{u} + i\vec{w}) = (\alpha + i\,\beta)\,(\vec{u} + i\vec{w}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}\,(\vec{u} - i\vec{w}) = (\alpha - i\,\beta)\,(\vec{u} - i\vec{w})$$

Der Realteil $\vec{u}$ *und und der Imaginärteil* $\vec{w}$ *der komplexen Eigenvektors sind linear unabhängig.*

9.3 Komposition und Matrizenmultiplikation

9–28 Beispiel : Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ soll folgendermassen konstruiert werden:

1. Zuerst eine Spiegelung an der y–Achse.
2. Das Resultat der obigen Operation soll um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden.
3. Das Resultat der obigen Operation soll in der x–Richtung um den Faktor 2 gestreckt werden.

Die Gesamtabbildung soll durch eine Matrizenmultiplikation in der Standardbasis dargestellt werden.

Lösung: Als erstes erzeugen wir die Matrizen der einzelnen Abbildungen.

1. Spiegelung an der y–Achse
   Die Matrix
   $$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   entspricht der Abbildung
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{S}_1\,\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$
   Das ist die gewünschte Spiegelung.
2. Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn
   Der Drehwinkel ist $\phi = +\frac{\pi}{2}$ und die Drehmatrix somit
   $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
3. Streckung um Faktor 2 in x–Richtung
   Diese Abbildungsmatrix ist gegeben durch
   $$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun setzen wir die Abbildungen zusammen.

1. Spiegelung an der y–Achse
   Der ursprüngliche Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ wird abgebildet.
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{S}_1\,\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$
2. Drehung um 90° im Uhrzeigersinn
   Das Resultat $\mathbf{S}_1\vec{x}$ muss gedreht werden
   $$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \mathbf{D} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_1\,\vec{x} & \mapsto & \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$
   Durch die Komposition der ersten Spiegelung und der zweiten Drehung erhalten wir die Abbildung
   $$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \\ \vec{x} & \mapsto & \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

3. Streckung um Faktor 2 in x–Richtung
   Das Resultat $\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\vec{x}$ muss gestreckt werden.

$$\begin{array}{ccl} \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} & \mapsto & S_2 \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,y \\ -x \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} & \mapsto & \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

   Durch die Komposition der drei Teilabbildungen erhalten wir erhalten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2\,y \\ -x \end{pmatrix} \\ \vec{x} & \mapsto & \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

Somit kann die gesamte Abbildung dargestellt werden durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind die beiden Lösungen von

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0$$

Somit ist $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ mit den Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \quad , \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{2} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Komposition der drei Abbildungen hat insgesamt den folgenden Effekt:

- In der Richtung $(\sqrt{2},-1)^T$ eine Streckung um den Faktor $+\sqrt{2}$.
- In der Richtung $(\sqrt{2},1)^T$ Streckung um den Faktor $+\sqrt{2}$, d.h. eine Spiegelung und eine Streckung.

Mit Hilfe dieser Information kann die Gesamtabbildung gut beschrieben werden. ♢

Das obige Beispiel zeigt, dass Kompositionen von linearen Abbildungen (dargestellt durch Matrizen) zur Multiplikation der entsprechenden Matrizen führt. Das Resultat ist nicht auf lineare Abbildungen in der Ebene beschränkt.

9–29 Satz : *Seien F und G zwei lineare Abbildungen mit*

$$\begin{array}{ll} F\ :\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m & \text{mit} \quad F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{y} \\ G\ :\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l & \text{mit} \quad G(\vec{y}) = \mathbf{B}\,\vec{y} = \vec{z} \end{array}$$

Hierbei ist $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ und $\vec{z}\in\mathbb{R}^l$. $\mathbf{A}$ ist eine $m\times n$–Matrix und $\mathbf{B}$ ist eine $l\times m$–Matrix. Dann ist die Komposition $H = G\circ F$ (d.h. $H(\vec{x}) = G(F(\vec{x}))$) eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^l$ mit

$$H\ :\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l \quad \text{und} \quad H(\vec{x}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{z}$$

$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ *ist eine $l\times n$–Matrix.*
Das entsprechende Resultat für die Komposition mehrerer linearer Abbildungen ist korrekt.

9–30 Beispiel : In Beispiel 9–24 haben wir gesehen, dass die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^T$$

mit der Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tan 2\phi = 6$$

und $\lambda_1 \approx 4.54$ und $\lambda_2 \approx -1.54$ richtig ist. Das obige Resultat zeigt, dass die Multiplikation eines Vektors $\vec{x}$ auch durch die folgenden Operationen beschrieben werden kann.

1. Multiplikation mit $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$: Drehung um den Winkel $\phi \approx -40.3^\circ$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit $\mathbf{D}$:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx 4.54$
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx -1.54$ (Spiegelung und Streckung)
3. Multiplikation mit $\mathbf{R}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx 40.3^\circ$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

Das Komponieren der Abbildungen (hintereinander ausführen) entspricht dem Multiplizieren der Matrizen. Dieses Resultat haben wir bereits in Beispiel 9–24 gefunden. ♢

Die Verbindung von Komposition von linearen Abbildungen und Matrizenmultiplikation führt auf ein einfaches Verfahren Umkehrabbildungen von linearen Abbildungen zu bestimmen. Die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{I}$$

führt auf das folgende Resultat.

9–31 Satz : *Ist eine invertierbare, lineare Abbildung beschrieben durch eine Matrix* $\mathbf{A}$*, so ist die Matrix der Umkehrabbildung gegeben durch die inverse Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$.

9.4 Homogene Koordinaten in der Ebene

Im vorangehenden Abschnitt wurden Drehungen und Streckungen in der Ebene als Matrizenmultiplikationen dargestellt. Es war aber (noch) nicht möglich **Translationen** als Matrizenmultiplikation aufzufassen. Eine Translation ist keine lineare Abbildung. Es gibt aber eine einfache **Trick** um auch Translationen mit Hilfe von Matrizenmultiplikationen darzustellen. Untersuchen Sie dazu die folgenden Formeln. Eine Translation um den festen Vektor $(a, b)^T$ wird untersucht.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dem 2–Vektor $(x, y)^T$ wird eine dritte Komponente (immer 1) angefügt, der verlängerte Vektor wird mit einer passenden 3–Matrix multipliziert. In der dritten Spalte dieser Matrix steckt der Vektor $(a, b)^T$ um den verschoben wird. Die dritte Zeile der Matrix enthält immer die Zahlen $(0, 0, 1)$.

Werden nun Translationen, Streckungen und Rotationen hintereinander ausgeführt, so kann dies durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen dargestellt werden. In Tabelle 9.2 finden Sie eine Zusammenstellung von einfachen Abbildungen und ihrer Matrizendarstellung. Arbeitet man mit homogenen Koordinaten so wir man oft zwischen Rechnungen mit 2 oder 3 Komponenten umschalkten müssen.

Beschreibung der Abbildung	Matrixdarstellung
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ	$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Streckung in x–Richtung um den Faktor λ	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Streckung in y–Richtung um den Faktor λ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Zwei reelle Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt, d.h. $\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \mapsto \lambda_2 \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$ wobei $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabelle 9.2: Affine Abbildungen in der Ebene und Matrizen mit homogene Koordinaten

9–32 Beispiel : Ist eine lineare Abbildung in der Ebene gegeben durch die 2×2–Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

so wird daraus mit homogenen Koordinaten die neue 3×3–Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wird das Resultat der obigen Abbildung anschliessend um den Vektor $(a, b)^T$ verschoben, so kann das Resultat mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

multipliziert werden. Man erhält

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Statt die Matrizenmultiplikation auszuführen könnten auch die Komponenten a und b am richtigen Ort eingefügt werden.

Es ist wichtig die Multiplikation in der richtigen Reihenfolge auszuführen. Eine Matrix mit $(a, b, 1)^T$ in der dritten Spalte entspricht einer linearen Abbildung in der Ebene und einer anschliessenden Verschiebung um den Vektor $(a, b)^T$. Führt man zuerst die Verschiebung aus und anschliessen die lineare Abbildung, so führt das auf die Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\,a + a_{12}\,b \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}a + a_{22}\,b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das entspricht einer linearen Abbildung in der Ebene (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) und einer anschliessenden Verschiebung um den Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,a + a_{12}\,b \\ a_{21}a + a_{22}\,b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

9–33 Beispiel : Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um 30° gedreht in positiver Richtung.
2. Anschliessend um den Vektor $(1, 2)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird um den Faktor 2 gestreckt in der 45°–Richtung. Die dazu senkrechte Richtung soll nicht verändert werden.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der drei obigen Abbildungen darstellt.

Lösung:

1. Drehung um 30°
   Die entsprechenden Rotationsmatrix ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Translation um $(1,2)^T$
   Die Matrix ist
$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3. Streckungen
   Die erste Bedingung kann durch die Abbildung
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mapsto 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
   dargestellt werden. Die dazu senkrechte Richtung wird nicht verändert, d.h.
$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
   Somit sind zwei Eigenwerte und passende Eigenvektoren bekannt. Nun verwenden wir die Idee aus Beispiel 9–14 (Seite 274) um die passende Matrix zu konstruieren. Wegen
$$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$
   gilt
$$\mathbf{E}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
   Somit ist die dritte Teilabbildung gegeben durch die Matrix
$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{E}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{E}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1.5&0.5&0\\0.5&1.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Die Komposition der drei Abbildungen führt nun auf die Matrix $\mathbf{A}$ gegeben durch
$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}\\&=\begin{bmatrix}1.5&0.5&0\\0.5&1.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\&\approx\begin{bmatrix}1.54904&-0.31699&2.5\\1.18301&1.04904&3.5\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

9–34 Beispiel : Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Vektor $(1,2)^T$ verschoben.
2. Anschliessend wird um den Faktor 2 gestreckt in der $45°$–Richtung. Die dazu senkrechte Richtung soll nicht verändert werden.
3. Anschliessend um $30°$ gedreht in positiver Richtung.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der drei obigen Abbildungen darstellt.

Lösung: Die drei Teilabbildungen sind der vorangehenden Aufgabe entnommen, einzig die Reihenfolge hat geändert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 1.04904 & -0.31699 & 0.415064 \\ 1.18301 & 1.54904 & 4.281089 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Das Resultat unterscheidet sich erheblich von der vorangehenden Aufgabe. ♢

9.5 Lineare Abbildungen vom Raum $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

Genauso wie lineare Abbildungen in der Ebene können auch Abbildungen vom Raum $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ untersucht werden. Die Ideen und Rechnungen sind sinngemäss zu übertragen. Die Rechnungen sind mit Hilfe geeigneter Werkzeuge (*Mathematica*, `MATLAB`, HP–48) auszuführen.

9.5.1 Bilder der drei Basisvektoren, Eigenvektoren

9–35 Beispiel : Abbildung gegeben durch Bilder von drei Vektoren
Von einer linearen Abbildung $F\ :\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ist bekannt, dass

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sind drei Vektoren und ihre Bilder gegeben. Zu bestimmen ist die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$, sodass $F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$.

Lösung: Die obige Vorschrift kann nur erfüllt werden, falls die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Dies ist der Fall, da

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = 18 \neq 0$$

Wegen der obigen drei Bedingungen müssen die drei Gleichungen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein. Setzt man diese drei Systeme von Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt sofort

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Das Invertieren der einen Matrix und eine anschliessende Multiplikation ergeben

$$\mathbf{A} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & 15 & 6 \\ -4 & 8 & 8 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Die obigen Rechnungen können auch mit *Mathematica* ausgeführt werden.

Mathematica

```
B1 ={{1,0,-1},{2,2,0},{3,-2,4}};
Det[B1]
B2 ={{3,1,1},{2,0,2},{1,1,1}};
A=B2.Inverse[B1]
.
18

  1  5  1      2   4  4      5   11  1
{{-, -, -}, {-(-), -, -}, {-(-), --, -}}
  3  6  3      9   9  9      9   18  9
```

Eine lesbarere Darstellung erhält man durch

Mathematica

```
18 A //MatrixForm
.
6     15    6
-4    8     8
-10   11    2
```

und die Resultate können überprüft werden durch

Mathematica

```
A.{0,2,-2}
.
{1, 0, 1}
```

♢

9–36 Beispiel : Abbildung gegeben durch drei Eigenvektoren
Es können auch drei Eigenvektoren und zugehörige Eigenwerte gegeben werden. Daraus kann die Matrix $\mathbf{A}$ konstruiert werden. Als Beispiel untersuchen wir eine lineare Abbildung beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{wird um den Faktor 2 gestreckt}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{wird auf die halbe Länge reduziert}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wird am Ursprung gespiegelt}$$

Daraus soll die Matrix der linearen Abbildung konstruiert werden.

Lösung: Die drei Bedingungen können auch geschrieben werden als

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Mit *Mathematica* erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{16}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Das Resultat wurde erzeugt durch

Mathematica

```
B = {{1,0,-1},{2,2,0},{3,-2,4}};
A = B.{{2,0,0},{0,1/2,0},{0,0,-1}}.Inverse[B]
```

Als Kontrolle können Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix berechnet werden mit

Mathematica

```
Eigensystem[A]
```

♢

9–37 Beispiel : Orthogonale Projektion auf eine Ebene
Die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$ und $\vec{b} = (0, -1, 1)^T$ spannen eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$ auf. Punkte $\vec{x}$ in dieser Ebene sollen durch die lineare Abbildung F nicht geändert werden. Liegt der Punkt $\vec{x}$ nicht in der Ebene E, so soll er entlang einer zur Ebene senkrechten Geraden auf die Ebene projiziert werden. Zu bestimmen ist die Matrix dieser linearen Abbildung F.

Lösung: Da die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht verändert werden haben wir zwei Eigenvektoren mit Eigenwert 1.

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = \vec{b}$$

Der Vektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{a}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E. Durch die Abbildung F wird er auf $\vec{0}$ abbgebildet, d.h.

$$\mathbf{A}\,\vec{n} = A\,(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}$$

Genau wie beim vorangehenden Beispiel erhalten wir die Gleichung

$$\mathbf{A}\,\left[\vec{a}\;,\;\vec{b}\;,\;\vec{b} \times \vec{a}\right] = \left[\vec{a}\;,\;\vec{b}\;,\;\vec{0}\right]$$

Mit den hier gegebenen Zahlen ergibt dies $\vec{n} = (-1,1,1)^T$ und somit

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Die Projektion auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene ist also beschrieben durch

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das Resultat kann durch die drei Bedingungen

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad , \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = \vec{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{n} = \vec{0}$$

kontrolliert werden.

Die selbe Aufgabe kann auch ohne die Hilfe von Matrizen gelöst werden. Dazu ist der Normalenvektor $\vec{n}$ zu normieren

$$\vec{n}_{norm} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann kann die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung $\vec{n}_{norm}$ bestimmt werden mit Hilfe des Skalarproduktes

$$\vec{x}_n = \langle \vec{x}, \vec{n}_{norm} \rangle\, \vec{n}_{norm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-x_1 + x_2 + x_3)\,\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiert man vom Vektor $\vec{x}$ seine Komponente senkrecht zur Ebene, so ergibt sich die Projektion auf die Ebene.

$$F(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Resultate der beiden Lösungswege übereinstimmen. ♢

9.5.2 Drehungen im Raum, Euler'sche Winkel

Drehungen in $\mathbb{R}^3$ sind etwas schwieriger als Drehungen in der Ebene, weil neben dem Drehwinkel auch die Drehachse berücksichtigt werden muss.

9–38 Definition : Die **positive Drehrichtung** wird durch die **rechte–Hand–Regel** festgelegt: Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung der Drehachse, so wird die positive Drehrichtung durch die leicht gebeugten Finger der rechten Hand angezeigt.

Es ist unbedingt zu beachten, dass die Drehachse gerichtet ist. Eine Drehung um den Vektor $\vec{d}$ oder den Vektor $-\vec{d}$ als Achse ergibt nicht die selbe Drehung. Der Drehsinn ändert.

9–39 Beispiel : Werden Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel α um die z–Achse gedreht, so entspricht dies einer Multiplikation mit der Matrix

$$\mathbf{D}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Drehung um α mit der y–Achse and Achse ist durch

$$\mathbf{D}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

gegeben und eine Drehung um die x–Achse durch

$$\mathbf{D}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Besondere Beachtung ist den Vorzeichen zu schenken. Da Drehungen das Volumen nicht verändern und auch die Orientierung fest lassen, muss die Determinante dieser Drehmatrizen 1 sein. Dies kann leicht überprüft werden. $\diamondsuit$

9–40 Definition : Die Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ) in $\mathbb{R}^3$ sind bestimmt durch die Beziehungen

$$\begin{array}{rclcrcl} x & = & r\,\cos\phi\,\sin\theta & & r^2 & = & x^2+y^2+z^2 \\ y & = & r\,\sin\phi\,\sin\theta & \text{oder} & \tan\,\phi & = & \frac{y}{x} \\ z & = & r\,\cos\theta & & \tan\,\theta & = & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{array}$$

und die passende Abbildung 9.8. Aus den Kugelkoordinaten können also leicht die kartesischen Koordinaten bestimmt werden, oder auch umgekehrt.

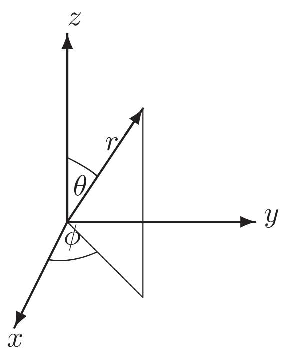


Abbildung 9.8: Definition von Kugelkoordinaten

Sei nun ein Richtungsvektor $\vec{d}$ gegeben ($\|\vec{d}\| = 1$). Somit ist dieser Vektor gegeben durch

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \cos\phi\,\sin\theta \\ \sin\phi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor soll nun durch zwei Drehungen aus dem Vektor in z–Richtung hervorgehen. In Abbildung 9.8 ist ersichtlich, dass der Einheitsvektor $\vec{e}_3$ (z–Richtung) um den Winkel θ um die y–Achse gedreht werden kann. Der resultierende Vektor wird dann um die z–Achse um den Winkel ϕ gedreht. Das Resultat sollte der Vektor $\vec{d}$ sein. Mit Hilfe der obigen Drehmatrizen können dies zwei Drehungen dargestellt werden durch

$$\vec{d} = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta)\,\vec{e}_3$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi\ \sin\theta \\ \sin\phi\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die einzelnen Drehmatrizen leicht zu invertieren sind gilt auch

$$\vec{e}_3 = (\mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta))^{-1}\ \vec{d} = \mathbf{D}_y^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{D}_z^{-1}(\phi)\ \vec{d} = \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{d}$$

Somit können wir den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\vec{d}$ drehen, und zurück. Diese Überlegungen erlauben es die Matrix einer Drehung um eine beliebige Achse $\vec{d}$ zu konstruieren. Da vom Achsenvektor $\vec{d}$ nur die Richtung wichtig ist, kann man seine Länge verwenden um den Drehwinkel anzugeben. Eine Drehung um den Vektor $\vec{d}$ bedeutet also

$$\text{Drehachse } \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} \quad \text{und Dehwinkel} \quad \alpha = \|\vec{d}\|$$

9–41 Beispiel : Drehung um eine gegebene Drehachse
Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ soll um den Winkel α um die durch $\vec{d}$ gegebene Drehachse gedreht werden. Diese Drehungen wird durch die folgende Sequenz von einfacheren Drehungen dargestellt.

1. den Vektor $\vec{d}$ in $\vec{e}_3$ drehen
2. um die z–Achse drehen, Drehwinkel α
3. den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\vec{d}$ zurückdrehen

Der Effekt dieser Operationen auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ kann durch Matrixmultiplikationen dargestellt werden. Seien θ und ϕ die Kugelkoordinaten der Drehachse $\vec{d}$.

1.
$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{x}$$

2.
$$\vec{x}' \mapsto \vec{x}'' = \mathbf{D}_z(\alpha)\ \vec{x}'$$

3.
$$\vec{x}'' \mapsto \vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta)\ \vec{x}''$$

Insgesamt ergibt sich
$$\vec{x} \mapsto \vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{x}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ der Drehung um die Achse $\vec{d}$ ist also gegeben als Produkt von 5 elementaren Drehmatrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)$$

Es sollte klar sein, dass der Vektor $\vec{d}$ durch diese Operationen insgesamt nicht verändert wird, d.h. $\mathbf{A}\ \vec{d} = \vec{d}$. Dies kann mit Hilfe des Skalarproduktes verifiziert werden. Drehmatrizen ändern die Länge von Vektoren nicht, deshalb gilt $\|\mathbf{A}\ \vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

Nun wird zuerst der Vektor $\vec{x}$ um den Winkel $-\phi$ um die z–Achse gedrecht, anschliessend um den Winkel $-\theta$ um die y–Achse, das Resultat taufen wir $\vec{y}$. Dieselbe Abbildung transformiert die Drechachse $\vec{d}$ in die z–Achse. Es gilt $\vec{y} = \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\, \vec{x}$ und somit $\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|$. Eine längere Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|^2 \,\cos\angle(\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}) &= \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\cos\angle(\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}) = \langle \vec{x}\,,\, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \vec{x}\,,\, \mathbf{D}_z(\phi)\cdot \mathbf{D}_y(\theta)\cdot \mathbf{D}_z(\alpha)\cdot \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}_z^T(\phi)\,\vec{x}\,,\, \mathbf{D}_y(\theta)\cdot \mathbf{D}_z(\alpha)\cdot \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}_y^T(\theta)\cdot \mathbf{D}_z^T(\phi)\,\vec{x}\,,\, \mathbf{D}_z(\alpha)\cdot \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\,,\, \mathbf{D}_z(\alpha)\cdot \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \vec{y}\,,\, \mathbf{D}_z(\alpha)\,\vec{y}\rangle \\
&= \|\vec{y}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\angle(\vec{y},\, \mathbf{D}_z(\alpha)\,\vec{y})
\end{aligned}$$

und somit

$$\cos\angle(\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}) = \cos\angle(\vec{y},\, \mathbf{D}_z\,(\alpha)\,\vec{y})$$

Somit ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ gegeben durch den Winkel zwischen $\vec{y}$ und dem selben Vektor um die z–Achse gedreht um den Winkel α. $\diamondsuit$

Aus den obigen Überlegungen wird klar, dass eine Drehung durch drei Parameter vollständig bestimmt ist: zwei Winkel bestimmen die Richtung der Drehachse und zusätzlich ist der Drehwinkel zu geben. Obwohl die 3×3–Matrix einer Rotation 9 Einträge hat stehen nur drei freie Parameter zur Verfügung. Die Bedingung „Rotation“ führt tatsächlich auf sechs Bedingungen:

- Die Länge der drei Basisvektoren muss 1 bleiben (3 Bedingungen)
- Die Bilder der drei Basisvektoren müssen paarweise senkrecht sein zueinander (3 Bedingungen)

9–42 Beispiel : Euler'sche Winkel

Eine Drehung um eine beliebige Achse kann auch durch drei Euler'sche Winkel und zugehörige Elementardrehungen dargestellt werden. Die Drehung wird durch die folgende Sequenz von einfacheren Drehungen dargestellt.

1. um die z–Achse mit Winkel ψ drehen. Der Winkel ψ (Psi) heisst **Präzessionswinkel** (angle de précession).
2. anschliessend wir um das Bild der x–Achse gedreht mit dem Winkel θ. Der Winkel θ (Theta) heisst **Nutations-winkel** (angle de nutation).
3. anschliessend wir um das Bild der z–Achse gedreht mit dem Winkel ϕ.

Es muss unbedingt beachtet werden, dass jeweils um die **neuen** Koordinatenachsen zu drehen ist. Der Effekt dieser Operationen auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ kann durch Matrixmultiplikationen dargestellt werden:

1. $$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \mathbf{D}_z(\psi)\,\vec{x}$$

2. Es muss um die **neue** x–Achse gedreht werden. Dieser Effekt kann erreicht werden indem der ursprungliche Vektor zuerst um die alte x–Achse gedreht wird und dann die Abbildung des ersten Teils ausgeführt wird. Das führt auf
$$\vec{x} \mapsto \mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x} \mapsto \mathbf{D}_z(\psi)\cdot \mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x}$$
oder kürzer
$$\vec{x} \mapsto \vec{x}'' = \mathbf{D}_z(\psi)\cdot \mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x}$$

3. Es muss um die **neue** z–Achse gedreht werden. Dieser Effekt kann erreicht werden indem der ursprungliche Vektor zuerst um die alte z–Achse gedreht wird und dann die Abbildung der ersten beiden Teile ausgeführt werden. Das führt auf
$$\vec{x} \mapsto \mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x} \mapsto \mathbf{D}_z(\psi)\cdot \mathbf{D}_x(\theta)\cdot \mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x}$$
oder kürzer
$$\vec{x} \mapsto \vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\psi)\cdot \mathbf{D}_x(\theta)\cdot \mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x}$$

Die Matrix A der Drehung um die Euler'schen Winkel ist also gegeben als Produkt von 3 elementaren Drehmatrizen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\phi) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\,\cos\theta & \sin\psi\,\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\,\cos\theta & -\cos\psi\,\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\phi-\cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\psi\cos\theta\sin\phi+\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi\cos\theta-\sin\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrizenmultiplikation kann auch mit *Mathematica* ausgeführt werden.

Mathematica

```
Clear[Dx,Dy,Dz,alpha]
Dx[alpha_] = {{1,0,0},{0,Cos[alpha],-Sin[alpha]},{0,Sin[alpha],Cos[alpha]}};
Dy[alpha_] = {{Cos[alpha],0,Sin[alpha]},{0,1,0},{-Sin[alpha],0,Cos[alpha]}};
Dz[alpha_] = {{Cos[alpha],-Sin[alpha],0},{Sin[alpha],Cos[alpha],0},{0,0,1}};
Dz[psi].Dx[theta].Dz[phi]
```

Ist eine Rotationsmatrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ gegeben, so lassen sich die drei Euler'schen Winkel bestimmen mit Hilfe der dritten Spalte und Zeile:

$$\cos\theta = a_{33} \quad , \quad \tan\phi = \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad \text{und} \quad \tan\psi = \frac{-a_{13}}{a_{23}}$$

$\diamondsuit$

Im obigen Beispiel haben wir um die Achsen Z-X-Z gedreht. Man kann auch Euler'sche Winkel für Drehungen um andere Reihenfolgen von Achsen untersuchen, z.B. X-Z-X ode X-Y-Z. Insgesamt sind 12 verschiedene Kombinationen möglich. Zu jeder Kombination kann eine zugehörige Transformationsmatrix A bestimmt werden. Eine Übersicht finden Sie in [Crai89]. *Mathematica* stellt einige Befehle mit den Euler'schen Winkeln zur Verfügung.

Mathematica

```
<<Geometry`Rotations`

?RotationMatrix3D
"RotationMatrix3D[psi,theta,phi] gives the matrix for rotation by the
specified Euler angles in three dimensions."

The rotation given by the Euler angles psi, theta, and phi can be decomposed
into a sequence of three successive rotations. The first by angle psi about
the z axis, the second by angle theta about the x axis, and the third around
the z axis (again) by angle phi. The angle theta is restricted to the range
0 to Pi.

Get the general matrix (in Mma this is a list of three lists of three
entries)

rm=RotationMatrix3D[psi,theta,phi]
{{Cos[phi] Cos[psi] - Cos[theta] Sin[phi] Sin[psi],
   Cos[psi] Cos[theta] Sin[phi] + Cos[phi] Sin[psi], Sin[phi] Sin[theta]},
  {-Cos[psi] Sin[phi] - Cos[phi] Cos[theta] Sin[psi],
   Cos[phi] Cos[psi] Cos[theta] - Sin[phi] Sin[psi], Cos[phi] Sin[theta]},
  {Sin[psi] Sin[theta], -Cos[psi] Sin[theta], Cos[theta]}}
```

```
Here it is abbreviated and in 2D format:

rm/. {psi->p,theta->q,phi->r, Sin->S,Cos->C} //MatrixForm

C[p]C[r] - C[q]S[p]S[r]    C[r]S[p] + C[p]C[q]S[r]    S[q]S[r]
-C[q]C[r]S[p] - C[p]S[r]   C[p]C[q]C[r] - S[p] S[r]   C[r] S[q]
S[p]S[q]                   -C[p]S[q]                  C[q]
```

Im obigen Beispiel ist gezeigt, wie aus gegebenen Euler'schen Winkel die Transformationsmatrix bestimmt werden kann. In Beispiel 9–41 wurde aus gegebener Drehachse $\vec{d}$ und Drehwinkel α die Transformationsmatrix bestimmt. Das folgende Beispiel untersucht, wie aus den gegebenen Euler'schen Winkeln ψ, θ und ϕ die Drehachse $\vec{d}$ und der Drehwinkel α berechnet werden können.

9–43 Beispiel : Als Zahlenbeispiel untersuchen wir eine Rotation mit den drei Euler'schen Winkeln

$$\psi = \frac{\pi}{9} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \phi = -\frac{\pi}{6}$$

Das führt auf eine Transformationsmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\psi) \cdot \mathbf{D}_x(\theta) \cdot \mathbf{D}_z\,(\phi) = \begin{bmatrix} 0.899303 & 0.321747 & 0.296198 \\ 0.061275 & 0.577909 & -0.813798 \\ -0.433013 & 0.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen dises Beispiels sind mit einem geeigneten Werkzeug auszuführen (HP, *Mathematica*, `MATLAB`). Nun bestimmen wir Drehachse und Winkel in zwei Schritten:

1. Berechnen der Drehachse:
   Die Drehachse $\vec{d}$ ist bestimmt durch die Bedingung, dass sie durch die Abbildung nicht verändert wird, d.h.

   $$\mathbf{A}\,\vec{d} = \vec{d}$$

   Somit muss 1 ein Eigenvektor der Matrix A sein und der zugehörige Eigenvektor liefert die Drehachse. eine Rechnung mit *Mathematica* (Befehl `Eigenvectors`) ergibt

   $$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.896154 \\ 0.417884 \\ -0.149267 \end{pmatrix}$$

   Dieser Eigenvektor ist bereits normiert. Somit haben wir die Drehachse bestimmt. Die Drehachse kann auch in Kugelkoordinaten dargestellt werden

   $$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.896154 \\ 0.417884 \\ -0.149267 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_d\ \sin\theta_d \\ \sin\phi_d\ \sin\theta_d \\ \cos\theta_d \end{pmatrix}$$

   Daraus lassen sich die Kugelkoordinaten θ_d und ϕ_d der Drehachsenvektors $\vec{a}$ leicht bestimmen. Warnung: es handelt sich nicht um die Euler'schen Winkel der Drehung. Wir erhalten $\theta_d \approx 1.7206$ und $\phi_d \approx 0.436332 = 25^\circ$.

2. Bestimmen des Drehwinkels:
   Um den Drehwinkel α zu bestimmen untersuchen wir einen Vektor $\vec{x}$ der senkrecht steht auf der Drehachse $\vec{d}$. Der Winkel zwischen diesem Vektor und dem Bildvektor $A\,\vec{x}$ ist α, d.h.

   $$\langle\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\ \cos\angle(\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}) = \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\ \cos\,\alpha$$

Da $\mathbf{A}$ einer reinen Rotation entspricht gilt $\|\vec{x}\| = \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|$. Um einen Vektor zu erhalten der senkrecht steht auf $\vec{d}$ vertauschen wir zwei Komponenten, multiplizieren die eine mit -1 und setzen die dritte zu 0. Dann wird $\langle \vec{x}, \vec{d}\rangle = 0$. Wir wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.417884 \\ -0.896154 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und erhalten} \quad \|\vec{x}\| \approx 0.9888$$

Somit erhalten wir

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.0874687 \\ -0.49229 \\ -0.853065 \end{pmatrix}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}, A\,\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2} \approx \frac{0.477719}{0.977719^2} \approx 0.4886$$

und somit $\alpha \approx \pm 1.06031 \approx \pm 60.75^\circ$. Da nur der Cosinus des Drehwinkels gegeben ist können wir damit nicht über das Vorzeichen, den Drehsinn, entscheiden. Dazu sehen wir uns die folgende Beziehung an.

$$\begin{aligned} \text{Drehung in positivem Sinne} &= \alpha > 0 \\ &= \vec{d},\,\vec{x} \text{ und } A\,\vec{x} \text{ bilden ein rechtsorientiertes System} \\ &= \det[\vec{d}, \vec{x}, A\vec{x}] > 0 \end{aligned}$$

In unserem Beispiel gilt $\det[\vec{d}, \vec{x}, \mathbf{A}\vec{x}] \approx 0.85306 > 0$ und somit ist $\alpha > 0$.
Mit Hilfe von Beispiel 9–41 erhält man nun auch

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi_d) \cdot \mathbf{D}_y(\theta_d) \cdot \mathbf{D}_z\,(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y\,(-\theta_d) \cdot \mathbf{D}_z\,(-\phi_d)$$

Mit *Mathematica* oder `MATLAB` erhält man

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.899303 & 0.321747 & 0.296198 \\ 0.061275 & 0.577909 & -0.813798 \\ -0.433013 & 0.750000 & 0.500000 \end{bmatrix}$$

Dieses Resultat muss mit der ursprünglichen Matrix $\mathbf{A}$ übereinstimmen. ♢

9.5.3 Homogene Koordinaten, affine Abbildungen

Genau wie bei Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ kann man auch bei Abbildungen vom Raum in den Raum homogene Koordinaten einführen, damit auch Translationen erfasst werden können. Den üblichen drei Komponenten eines Vektor wird künstlich die vierte Komponente 1 angefügt und statt mit 3×3–Matrizen rechnet man mit 4×4–Matrizen. Man erhält die Transformationsmatrizen in Tabelle 9.3. Man kann beliebige affine Abbildungen durch Matrizenmultiplikationen darstellen.

9–44 Definition : Eine **affine Abbildung** von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine lineare Abbildung und eine anschliessende Translation um einen festen Verschiebungsvektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$, d.h. es gibt eine 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ und einen Vektor $\vec{d} = (a, b, c)^T$ mit

$$F\,(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} + \vec{d} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Den Spezialfall einer linearen Abbildung erhält man mit $\vec{d} = \vec{0}$.

9–45 Satz : *In homogenen Koordinaten kann die affine Abbildung der vorangehenden Definition durch eine Multiplikation mit einer 4×4–Matrix dargestellt werden.*

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

Die Komposition von affinen Abbildungen kann durch die Multiplikation der entsprechenden Matrizen dargestellt werden. Eine Liste von Grundtransformationen finden Sie in Tabelle 9.3.

Beschreibung der Abbildung	Matrixdarstellung
$\vec{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 \mapsto \begin{pmatrix} a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Translation $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Streckungen in die drei Achsenrichtungen um die Faktoren s_x, s_y und s_z	$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die z–Achse	$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die y–Achse	$\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die x–Achse	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Tabelle 9.3: Affine Abbildungen im Raum und Matrizen mit homogenen Koordinaten

9–46 Satz : *Sind von einer affinen Abbildung das Bild $\vec{y}_0$ des Ursprunges $\vec{0}$ und die Bilder von drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ bekannt (d.h. $F(\vec{x}_i) = \vec{y}_i$ für $i = 1,2,3$), dann kann die Matrix konstruiert werden.*

Beweis : Die affine Abbildung ist beschrieben durch

$$F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} + \vec{d}$$

Somit ist

$$F(\vec{0}) = \mathbf{A}\,\vec{0} + \vec{d} = \vec{d} = \vec{y}_0$$

Somit stehen in der letzten Spalte der 4×4–Matrix die Komponenten von $\vec{y}_0$, ergänzt durch 1. Wegen

$$\vec{y}_i = F(x_i) = \mathbf{A}\,\vec{x}_i + \vec{d} = \mathbf{A}\,\vec{x}_i + \vec{y}_0$$

gilt

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_1 \\ \vec{y}_2 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_2 \\ \vec{y}_3 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_3 \end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen kann die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ konstruiert werden (siehe Beispiel 9–35, Seite 293). Weil die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ linear unabhängig sind ist die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar. Damit ist auch die 4×4–Matrix $\mathbf{T}$ bestimmt. □

9–47 Beispiel : Für eine affine Abbildung F von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gelte

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{T}$.

Lösung: Die letzte Spalte ist gegeben durch $(1, -1, 2, 1)^T$). Die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ in der linken, oberen Ecke ist bestimmt durch die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das führt auf die Gleichung

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir haben also

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Rechnung kann kontrolliert werden, z.B. durch $F(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die vier gegebenen Punkte erlauben es auch direkt einen Ansatz für die 4×4–Matrix $\mathbf{T}$ zu machen. Die Aufgabe könnte auch gelöst werden durch die Gleichungen

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In dieser Darstellung ist es nicht mehr wesentlich, dass in der ersten Spalte der linken Matrix der Vektor $(0, 0, 0, 1)^T$ steht. Statt des Koordinatenursprunges könnte ein beliebiger Punkt eingesetzt werden. Dieses zweite Lösungsverfahren führt auf das untenstehende, allgemein gültige Resultat. ♢

9–48 Satz : *Sind von einer affinen Abbildung die Bilder von vier Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_4$ bekannt (d.h. $F(\vec{x}_i) = \vec{y}_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$), dann kann die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ konstruiert werden. Dazu müssen die drei Vektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_1$ und $\vec{x}_4 - \vec{x}_1$ linear unabhängig sein.*

Dieses Resultat zeigt, dass eine affine Abbildung im allgemeinen durch die Bilder von vier Punkten vollständig beschrieben ist. Die notwendige Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass das Volumen des Tetraeders mit den Ecken in den Punkten $\vec{x}_i$ von Null verschieden ist.

Beweis : Die Matrix $\mathbf{T}$ ist charakterisiert durch

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

das führt auf

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 & \vec{x}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \vec{y}_3 & \vec{y}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$$

Damit dieses System von 16 Gleichungen für 16 Unbekannte lösbar ist muss die Determinate der 4×4–Matrix $\mathbf{X}$ von 0 verschieden sein. Um dies zu verifizieren subtrahieren wir die erste Spalte von den anderen Spalten. Die Determinate wir dadurch nicht verändert. Es gilt

$$\det \mathbf{X} = \det \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 - \vec{x}_1 & \vec{x}_3 - \vec{x}_1 & \vec{x}_4 - \vec{x}_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entwickelt man diese Determinate nach der letzten Zeile, so sieht man, dass sie nicht 0 ist, da die drei Vektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_1$ und $\vec{x}_4 - \vec{x}_1$ linear unabhängig sind. Wir erhalten

$$\mathbf{T} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^{-1}$$

□

9–49 Beispiel : Für eine affine Abbildung F von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gelte

$$F\left(\begin{pmatrix}\pi\\ e\\ 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 20\end{pmatrix}\quad,\quad F\left(\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5\\ -7\\ 3\end{pmatrix}\quad,$$

$$F\left(\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.7\\ 0\\ \pi\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad F\left(\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 20\end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{T}$.

Lösung: Zu lösen ist die Gleichung

$$\mathbf{T}\cdot\begin{bmatrix}\pi & 0 & 10 & -3\\ e & 2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0.5 & 0.7 & 6\\ 0 & -7 & 0 & 1\\ 20 & 3 & \pi & 20\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Das führt auf

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix}10 & 0.5 & 0.7 & 6\\ 0 & -7 & 0 & 1\\ 20 & 3 & \pi & 20\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi & 0 & 10 & -3\\ e & 2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}0.22956 & 4.6660 & 1.8091 & -3.4047\\ 0.28981 & 1.3583 & 1.7046 & -4.6028\\ -0.11060 & 7.3984 & 4.0111 & 0.2364\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Die Rechnungen sind mit einem geeigneten Werkzeug auszuführen. ♢

9–50 Beispiel : 3D–Computer–Graphik

Eine Funktion $z = f(x, y)$ beschreibt eine Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$. Um diese Fläche darzustellen kann sie mit einem Gitter überzogen werden. Entlang der einzelnen Linien sind die y–Werte konstant und die x–Werte variieren. Der Wert von z wird mit Hilfe der Funktion bestimmt. Ebenso werden auch, bei festen x–Werten, die y–Werte variiert. Nun sind diese Kurven zu zeichnen. Auf Papier oder Bildschirm können nur zwei Koordinaten dargestellt werden. Deshalb muss man sich mit Projektionen begnügen. Als Beispiel untersuchen wir die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+4\,y^2}}{\sqrt{x^2+4\,y^2}} \quad \text{für} \quad -10 \le x, y \le 10$$

1. In einem ersten Versuch werden die ursprünglichen x und y–Werte angezeigt. Die entstehende Figur ist nicht sehr aussagekräftig. Die Information über die z–Werte geht vollständig verloren.
2. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um 45° um die x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (oben rechts).
3. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um 30° um die z–Achse, dann um 45° um die neue x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (unten links).
4. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um 120° um die z–Achse, dann um 45° um die neue x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (unten rechts).

Diese Operationen können vom Graphikprogramm mit Hilfe von geeigneten 4×4–Matrizen implementiert werden.

In *Mathematica* können Sie vergleichbare Graphiken erzeugen mit den Befehlszeilen

Mathematica

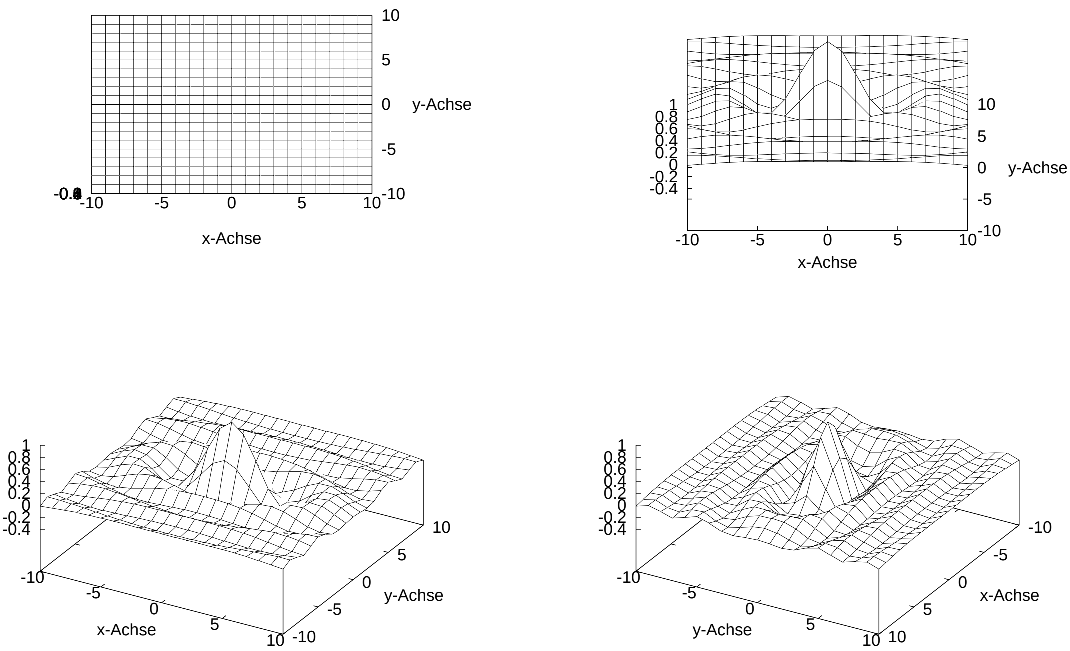


Abbildung 9.9: Graphen einer Funktion unter verschiedenen Blickwinkeln

```
f[x_,y_] = Sin[Sqrt[x^2+4y^2]]/ Sqrt[x^2+4y^2]
Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10},
    PlotRange -> All,
    PlotPoints -> 30,
    Shading -> False];
```

Einen neuen Blickwinkel können Sie mit der Option `ViewPoint` festlegen. Intern verwendet *Mathematica* Matrixoperationen der obigen Art um den Blickpunkt festzulegen.

Mathematica

```
Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10},
    PlotRange -> All,
    PlotPoints -> 30,
    Shading -> False,
    AxesLabel -> {"x-Achse","y-Achse",""},
    ViewPoint -> {50,20,20}];
```

Die Resultat der beiden obigen Rechnungen finden Sie in Abbildung 9.10. ♢

9.6 Aufgaben

9.6.1 Abbildungen von Polynomen

• **Aufgabe 9–1:**
Sei die Abbildung $I\ : \mathbb{P}_3 \mapsto \mathbb{P}_4$ bestimmt durch die folgende Vorschrift: jedem Polynom in $\mathbb{P}_3$ wird jene Stammfunktion zugeordnet, für die der Wert bei $x = 0$ Null ist. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} I\,(x) &= \frac{1}{2}\,x^2 \\ I\,(3 + x^3) &= 3\,x + \frac{1}{4}\,x^4 \end{aligned}$$

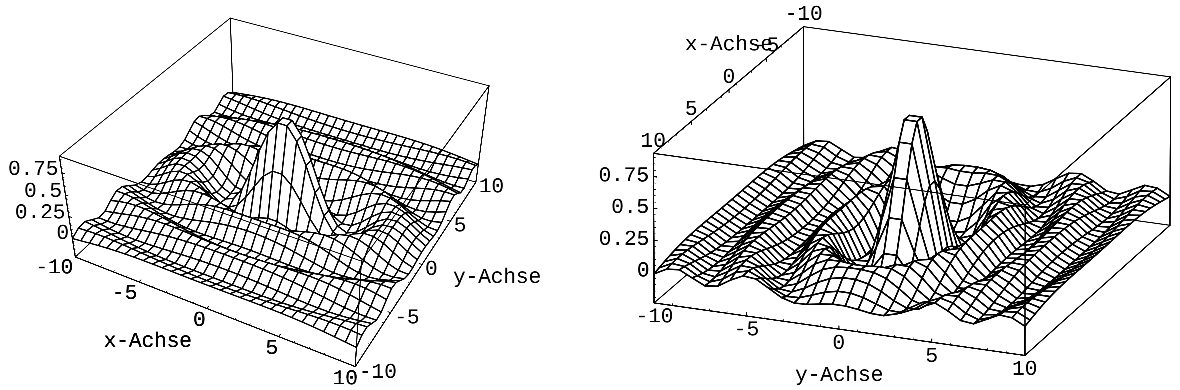


Abbildung 9.10: Graphen einer Funktion unter verschiedenen Blickwinkeln, mit *Mathematica*

Zeigen Sie, dass dies eine lineare Abbildung ergibt und finden Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung in der Standardbasis.

• Aufgabe 9–2:

Examiner l'application linéaire A de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_2$, donnée par

Zu untersuchen ist die lineare Abbildung A von $\mathbb{P}_2$ nach $\mathbb{P}_2$, beschrieben durch

$$f(x) \to \frac{d^2}{dx^2}\ \left((1+x^2)\cdot f(x)\right)$$

(a) L'application $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_4$. Trouver une matrice 3×5 qui correspond à cette application.

(b) L'application $g(x) \to g''(x)$ est une application linéaires de $\mathbb{P}_4$ en $\mathbb{P}_2$. Trouver une matrice 5×3 qui correspond à cette application.

(c) L'application A est une composition des applications ci–dessus. Trouver une matrice 3×3 qui correspond à cette application A.

(d) Pour un polynôme $h(x)$ de degré 2 on sait que l'application A rend le résultat $1+18\,x^2$. Trouver $h(x)$.

(a) Die Abbildung $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{P}_2$ nach $\mathbb{P}_4$. Stellen Sie diese durch eine geeignete 3×5 Matrix dar.

(b) Die Abbildung $g(x) \to g''(x)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{P}_4$ nach $\mathbb{P}_2$. Stellen Sie diese durch eine geeignete 5×3 Matrix dar.

(c) Die Abbildung A ist die Komposition der obigen Abbildungen. Stellen Sie A durch eine geeignete 3×3 Matrix dar.

(d) Für ein Polynom $h(x)$ vom Grad 2 weiss man, dass die lineare Abbildung A zum Resultat $1+18\,x^2$ führt. Bestimmen Sie $h(x)$.

• Aufgabe 9–3:

Mit einem gegebenen Polynom $p\in\mathbb{P}_2$ werden die folgenden Operationen ausgeführt.

1. zuerst mit $(1-2\,x)$ multiplizieren
2. anschliessend ableiten bezüglich x

Das Resultat ist ein Polynom $F(p)\in\mathbb{P}_2$

Avec un polynôme $p\in\mathbb{P}_2$ on fait les opérations suivantes

1. d'abord multiplier par $(1-2\,x)$
2. puis calculer la dérivé par rapport à x

Le résultat est un polynômes $F(p)\in\mathbb{P}_2$

(a) Stellen Sie diese lineare Abbildung $F:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ durch eine geeignete Matrix dar.

(b) Berechnen Sie das Resulat, falls man $p(x) = -x^2+2\,x-3$ setzt.

(c) Finden Sie ein Polynom $f\in\mathbb{P}_2$, so dass als Resultat der Abbildung F das Polynom $x^2-3\,x$ erscheint.

(a) Représenter cette application linéaire $F:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ par une matrice adaptée.

(b) Trouver le résultat si on met $p(x) = -x^2+2\,x-3$.

(c) Trouver un polynôme $f\in\mathbb{P}_2$, tel que le résultat de l'application F est le polynôme $x^2-3\,x$.

• Aufgabe 9–4:

Mit einem gegebenen Polynom $p \in \mathbb{P}_2$ werden die folgenden Operationen ausgeführt.

1. zuerst mit $(1 + 3\,x)$ multiplizieren
2. anschliessend ableiten bezüglich x

Das Resultat ist ein Polynom $F(p) \in \mathbb{P}_2$

(a) Stellen Sie diese lineare Abbildung $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ durch eine geeignete Matrix dar.

(b) Berechnen Sie das Resulat, falls man $p(x) = x^2 + 7$ setzt.

(c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{P}_2$, so dass als Resultat der Abbildung F das Polynom $g(x) = x$ erscheint.

Avec un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ on fait les opérations suivantes

1. d'abord multiplier par $(1 + 3\,x)$
2. puis calculer la dérivé par rapport à x

Le résultat est un polynômes $F(p) \in \mathbb{P}_2$

(a) Représenter cette application linéaire $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ par une matrice adaptée.

(b) Trouver le résultat si on met $p(x) = x^2 + 7$.

(c) Trouver un polynôme $f \in \mathbb{P}_2$, tel que le résultat de l'application F est le polynôme $g(x) = x$.

9.6.2 Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

• Aufgabe 9–5:

Von einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) weiss man, dass

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.h. man kennt die Bilder zweier Vektoren. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

• Aufgabe 9–6:

Pour une application linéaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on sait que le vecteur $(1,3)^T$ est allongé par un facteur 3 et l'image du vecteur $(1,1)^T$ est donné par $(\frac{-1}{2}\,,\ \frac{-1}{2})$.

(a) Touver la matrice $\mathbf{A}$ de cette application.

(b) Trouver l'image du vecteur $(4,1)^T$.

Von einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ weiss man, dass der Vektor $(1,3)^T$ um den Faktor 3 gestreckt wird und der Vektor $(1,1)^T$ wird auf $(\frac{-1}{2}\,,\ \frac{-1}{2})$ abgebildet.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ dieser Abbildung.

(b) Bestimmen Sie das Bild des Vektors $(4,1)^T$.

• Aufgabe 9–7:

Von einer Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt, dass sie den Vektor $(2,-1)^T$ um den Faktor 0.5 streckt und den Vektor $(1,1)^T$ auf $\vec{0}$ abbildet. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

• Aufgabe 9–8:

Eine lineare Abbildung ist gegeben als Spiegelung an der 60°–Geraden. Finden Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung in der Standardbasis. Zwei verschiedene Lösungswege sind zu verwenden.

(a) Verwenden Sie die Bilder der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Drehen sie zuerst um $-60° = -\frac{\pi}{3}$, dann eine passende Spiegelung und anschliessend zurückdrehen.

Vergleichen Sie die Rechnungen der beiden Lösungen.

• Aufgabe 9–9:

Beschreiben Sie das Verhalten der Abbildung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

geometrisch (Drehungen, Streckungen).

• Aufgabe 9–10:
Eine Verschiebung um den Vektor $(a,b)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ und beschreiben Sie die entsprechende geometrische Operation.

• Aufgabe 9–11:

Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben durch die folgenden Vorschriften:

1. Drehung um den Ursprung um $45°$ im Gegenuhrzeigersinn
2. Verschiebung um den Vektor $(2\,,\,1)$
3. Drehung um den Ursprung um $30°$ im Uhrzeigersinn

(a) Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer Matrix.

(b) Es gibt einen Punkt $(x_0\,,\,y_0)$ der durch diese Abbildung nicht bewegt wird. Bestimmen Sie diesen Punkt.

Une application affine est donné par la description ci–dessous:

1. rotation autour l'origine par $45°$ contre le sens d'une aiguille d'une montre.
2. translation par le vecteur $(2\,,\,1)$
3. rotation autour l'origine par $30°$ dans le sens d'une aiguille d'une montre.

(a) Donner une description de cette application à l'aide des coordonnées homogène et une matrice.

(b) Il existe un point $(x_0\,,\,y_0)$ qui n'est pas bougé par cette application. Trouver ce point.

• Aufgabe 9–12:

Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben durch die folgenden Vorschriften:

1. Drehung um den Ursprung um $60°$ im Uhrzeigersinn
2. Verschiebung um den Vektor $(3\,,\,-1)$
3. Drehung um den Ursprung um $30°$ im Gegenuhrzeigersinn

(a) Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer Matrix.

(b) Es gibt einen Punkt $(x_0\,,\,y_0)$ der durch diese Abbildung nicht bewegt wird. Bestimmen Sie diesen Punkt.

Une application affine est donné par la description ci–dessous:

1. rotation autour l'origine par $60°$ dans le sens d'une aiguille d'une montre.
2. translation par le vecteur $(3\,,\,-1)$
3. rotation autour l'origine par $30°$ contre le sens d'une aiguille d'une montre.

(a) Donner une description de cette application à l'aide des coordonnées homogène et une matrice.

(b) Il existe un point $(x_0\,,\,y_0)$ qui n'est pas bougé par cette application. Trouver ce point.

• Aufgabe 9–13:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Winkel $\phi = 30°$ gedreht in positive Richtung.
2. Anschliessend wird um den Vektor $(1,1)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird noch einmal um $30°$ gedreht in positive Richtung.
4. Anschliessend wird um den Vektor $(1,1)^T$ verschoben.
5. Anschliessend wird noch um $-60°$ gedreht.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der fünf obigen Abbildungen darstellt, mit Hilfe von homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–14:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Winkel $\phi = 30°$ gedreht in positive Richtung.
2. Anschliessend wird um den Vektor $(1,1)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird noch einmal um $30°$ gedreht in positive Richtung.
4. Anschliessend wird um den Vektor $(-1,-1)^T$ verschoben.
5. Anschliessend wird noch um $-60°$ gedreht.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der fünf obigen Abbildungen darstellt, mit Hilfe von homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–15:
Verwenden Sie homogene Koordinaten. Zeigen Sie. dass eine Verschiebung um den Vektor $(-2,2)$ auch dargestellt werden kann durch

1. Drehung um einen geeigneten Winkel α.
2. Verschiebung in x–Richtung um die positive Länge l.
3. Drehung um $-\alpha$

• Aufgabe 9–16:
La matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ est donnée par

Die Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver une déscription de cette transformation à l'aide des valeurs et vecteurs propres. Écrire l'application comme composition des rotations et allongement dans la direction des axes.

(b) Le carré $-1 \leq x, y \leq 1$ est transformé dans une nouveau figure. Calculer l'aire de cette figure.

(a) Beschreiben sie den Effekt dieser Abbildung mit Hilfe von Eigen–Vektoren und Eigen–Werten als Komposition von Drehungen und Streckungen in die Richtung der Koordinatenachsen.

(b) Das Quadrat $-1 \leq x, y \leq 1$ wird durch die obige Abbildung in eine neue Figur transferiert. Bestimmen Sie die Fläche dieser neuen Figur.

• Aufgabe 9–17:
La matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ est donnée par

Die Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver une déscription de cette transformation à l'aide des valeurs et vecteurs propres. Écrire l'application comme composition des rotations et allongement dans la direction des axes.

(b) Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est transformé dans une nouveau figure. Esquisser cette nouveau figure.

(c) Le triangle aves les coins $(\pm 1, 0)$ et $(0, 2)$ est transformé dans une nouveau figure. Calculer l'aire de cette figure.

(a) Beschreiben sie den Effekt dieser Abbildung mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten als Komposition von Drehungen und Streckungen in die Richtung der Koordinatenachsen.

(b) Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ wird auf eine neue Figur abgebildet. Zeichnen Sie diese neue Figur.

(c) Das Dreieck mit den Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, 2)$ wird durch die obige Abbildung in eine neue Figur transferiert. Bestimmen Sie die Fläche dieser neuen Figur.

• Aufgabe 9–18:

Eine affine Transformation $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Ebene in die Ebene ist gegeben durch die Transformationsmatrix

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ du plan dans le plan est donné par la matrice de transformation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Das Dreieck ABC mit den drei Punkten $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ und $C = (1/-1)$ wird durch diese Transformation in ein neues Dreieck abgebildet. Bestimmen Sie die Ecken des neuen Dreiecks.

(b) Es gibt genau einen Punkt $(x, y)^T$ der durch die Abbildung F nicht verändert wird. Finden Sie ihn.

(a) Le triangle ABC avec les trois coins $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ et $C = (1/-1)$ est transformé dans un nouveau triangle par cette application. Trouver les coins de ce nouveau triangle.

(b) Il y a un seul point $(x, y)^T$ dont la position ne change pas par l'application F. Touver ce point.

• Aufgabe 9–19:

Une rotation par $60°$ par rapport au point fix $P = (2, 3)$ rend une transformation affine dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice $\mathbf{A}$ de cette transformation, en utilisant les coordonnée homogène.

(a) Cette application peut être reécrit comme composition de trois applications élémentaire. Donner ces trois applications élémentaires et les trois matrices élémentaires.

(b) Trouver la matrice $\mathbf{A}$ de la rotation originalle.

(c) Trouver l'image du point $Q = (-3, 2)$.

Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben als Drehung um den festen Punkt $P = (2, 3)$ um den Winkel $60°$. Gesucht ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{A}$, wobei homogene Koordinaten zu verwenden sind.

(a) Die Abbildung kann beschrieben werden als Komposition von drei elementaren Abbildungen. Finden Sie diese drei elementaren Abbildungen und die zugehörigen elementaren Transformationsmatrizen.

(b) Bestimmen die die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ der ursprünglichen Drehung.

(c) Berechnen Sie das Bild des Punktes $Q = (-3, 2)$.

• Aufgabe 9–20:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben als Spiegelung an der Geraden $y = 1 + 2\,x$. Stellen Sie G durch eine geeignete 3×3–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

Une application affine $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée comme réflexion à la droite $y = 1 + 2\,x$. Representer G par une matrice 3×3 en coordonnées homogène. Il peut être utile d'écrire l'application comme composition de plusieures applications simples.

• Aufgabe 9–21:

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforme le triangle ABC avec $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ et $C(1, 3)$ en le nouveau triangle $A'B'C'$ avec $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ et $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. On a

Durch eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wird das Dreieck ABC mit $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ und $C(1, 3)$ in das neue Dreieck $A'B'C'$ abgebildet mit $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. Es gilt

$$F(\vec{x}) = \mathbf{M} \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

Donner des résultats exacts (sans calculatrice).

(a) Trouver le vecteur $\vec{c}$ et la matrice $\mathbf{M}$.

(b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice $\mathbf{M}$.

(c) L'application F ci–desus transforme le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ en une ellipse. Dessiner cette ellipse.

(d) Trouver les longueurs des demi–axes de cette ellipse et l'aire.

Die Resultate sind exakt anzugeben (ohne Taschenrechner).

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ und die Matrix $\mathbf{M}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M}$.

(c) Die Abbildung F transformiert den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ in eine Ellipse. Zeichnen Sie diese Ellipse.

(d) Bestimmen Sie die Längen der Halbachsen und die Fläche der Ellipse.

9.6.3 Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$

• Aufgabe 9–22:

Utiliser le vecteur $\vec{a} = (2, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ et pour les deux applications linéaires trouver les matrices 3×3 qui corresponds à ces applications.

(a) $\mathbf{P}$ est la projection dans la direction de $\vec{a}$ sur le plan orthogonal au vecteur $\vec{a}$. L'origine fait partie du plan.

(b) $\mathbf{R}$ est la rotation par $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ avec axe de rotation $\vec{a}$.

Verwenden Sie den Vektor $\vec{a} = (2, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ und für die beiden folgenden linearen Abbildung ist die passende 3×3-Matrix anzugeben.

(a) $\mathbf{P}$ ist die Projektion in der Richtung von $\vec{a}$ auf die zu $\vec{a}$ senkrechte Ebene durch den Ursprung.

(b) $\mathbf{R}$ ist eine Rotation um $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ um die Drehachse $\vec{a}$.

• Aufgabe 9–23:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Verschiebung um der Vektor $(1, 2, 3)^T$
2. Rotation um die ursprüngliche x–Achse um 30°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–24:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Verschiebung um der Vektor $(1, 2, 3)^T$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–25:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Rotation um die alte z–Achse um 45°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–26:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Rotation um die neue z–Achse um 45°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–27:
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben als Rotation um 30° um die Gerade

$$g \; : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Aufgabe 9–28:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben als Rotation um 30° um die Achse welche die Punkte $(1/0/1)$ und $(1/1/1)$ verbindet. Das Bild des Ursprunges liegt unterhalb der xy–Ebene.

Une application affine $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée comme rotation de 30° par rapport à l'axe passant par les points $(1/0/1)$ et $(1/1/1)$. L'image de l'origine se trouve au–dessous du plan xy.

(a) Stellen Sie G durch eine geeignete 4×4–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

(b) Finden Sie das Bild des Punktes $P = (1/2/-4)$.

(a) Représenter G par une matrice 4×4 en utilisant des coordonnées homogènes. Il peut être utile d'écrire l'application comme une composition de plusieures applications plus simples.

(b) Touver l'image du point $P = (1/2/-4)$.

• Aufgabe 9–29:

(a) Pour une rotation par 30° dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on sait que le point $(1,2,-1)$ ne bouge pas. L'image du point $(1,0,0)$ se trouve au–dessus du plan des xy. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ de largeur 3×3 qui correspond à cette rotation.

(b) Déterminer l'axe de rotation et l'angle de rotation pour la rotation donnée par la matrice $\mathbf{R}$ ci–dessous.

(a) Von einer Rotation um 30° im Raum $\mathbb{R}^3$ weiss man, dass der Punkt $(1,2,-1)$ nicht bewegt wird. Das Bild des Punktes $(1,0,0)$ liegt oberhalb der xy–Ebene. Bestimmen Sie die zugehörige 3×3–Matrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Rotationsachse und den Rotationswinkel der durch die untenstehende Matrix $\mathbf{R}$ gegebenen Rotation.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.8125 & 0.15309 \\ -0.6875 & 0.5625 & -0.45928 \\ -0.45928 & 0.15309 & 0.875 \end{bmatrix}$$

9.6.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 9–1 : Die Linearität der Abbildung folgt aus

$$\int_0^x a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3\;dt = a_0\,x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \frac{a_3}{4}\,x^4$$

Wegen der Elementarintegrale

$$\begin{aligned} I\,(1) &= x \\ I\,(x) &= \frac{1}{2}\,x^2 \\ I\,(x^2) &= \frac{1}{3}\,x^3 \\ I\,(x^3) &= \frac{1}{4}\,x^4 \end{aligned}$$

Dem Polynom

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \in \mathbb{P}_3$$

ist also das Bildpolynom

$$0 + a_0\,x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \frac{a_3}{4}\,x^4$$

zugeordnet. Verwendet man die Standardbasen in $\mathbb{P}_3$ und $\mathbb{P}_4$ so kann das selbe Resultat dargestellt werden durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_2}{3} \\ \frac{a_3}{4} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Matrixdarstellung der Abbildung gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9–2 : Es ist die Standardbasis $1,\,x,\,x^2,\ldots$ in den Räumen $\mathbb{P}_2$ und $\mathbb{P}_4$ zu verwenden. In den Spalten der Matrizen stehen die Bilder der Basisvektoren.

(a) Für die Abbildung $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & 1+x^2 \\ x & \to & x+x^3 \\ x^2 & \to & x^2+x^4 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Für die Abbildung $g(x) \to g''(x)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & 0 \\ x & \to & 0 \\ x^2 & \to & 2 \\ x^3 & \to & 6\,x \\ x^4 & \to & 12\,x^2 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(c) Da die gesuchte Abbildung Komposition der beiden obigen ist, kann $\mathbf{A}$ mittels Matrizenmultiplikation bestimmt werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(d) Das Polynom sei $h(x) = a + b\,x + c\,x^2$. Die Abbildung liefert das Resultat $1 + 18\,x^2$, d.h.

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der ursprünglichen Funktion können mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Somit ist $h(x) = -1 + \frac{3}{2}\,x^2$.

Lösung zu Aufgabe 9–3 : Ein Polynom $a + b\,x + c\,x^2$ wird dargestellt durch den Vektor $(a,b,c)^T$.

(a) Mit der Standardbasis in $\mathbb{P}_2$ muss man die drei Funktionen 1, x und x^2 untersuchen. Jedes der Basispolynome ist zuerst mit $(1-2\,x)$ zu multiplizieren, dann abzuleiten. Man erhält

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{d}{dx}\,((1-2\,x)\;1) = -2 + 0\,x + 0\,x^2 \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\,((1-2\,x)\;x) = 1 - 4\,x + 0\,x^2 \\ F(x^2) &= \frac{d}{dx}\,\left((1-2\,x)\;x^2\right) = 0 + 2\,x - 6\,x^2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Resultate sind in den Spalten von A einzutragen. Als Matrix ergibt sich somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

(b) Das Polynom $p(x) = -x^2 + 2\,x - 3$ wird dargestellt durch den Vektor $(-3, 2, -1)^T$. Wegen

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist das resultierende Polynom $8 - 10\,x + 6\,x^2$.

(c) Wegen

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist $f(x)$ gegeben durch

$$f\,(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{6}\,x^2$$

Dieses Resultat könnte auch bestimmt werden indem man zuert das gegebene Polynom $x^2 - 3\,x$ integriert und anschliessend durch $(1 - 2x)$ dividiert. Die Integrationskonstante ist so zu wählen, dass bei der Division kein Rest entsteht.

Lösung zu Aufgabe 9–4 : Ein Polynom $a + b\,x + c\,x^2$ wird dargestellt durch den Vektor $(a, b, c)^T$.

(a) Mit der Standardbasis in $\mathbb{P}_2$ muss man die drei Funktionen 1, x und x^2 untersuchen. Jedes der Basispolynome ist zuerst mit $(1 + 3\,x)$ zu multiplizieren und dann abzuleiten. Man erhält

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{d}{dx}\,((1+3\,x)\,1) = 3 \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\,((1+3\,x)\,x) = 1 + 6\,x \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\,\left((1+3\,x)\,x^2\right) = 2\,x + 9\,x^2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Resultate sind in den Spalten von A einzutragen. Als Matrix ergibt sich somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) Das Polynom $p(x) = x^2 + 7$ wird dargestellt durch den Vektor $(7, 0, 1)^T$. Wegen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ist das resultierende Polynom $21 + 2\,x + 9\,x^2$.

(c) Wegen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $f(x)$ gegeben durch

$$f\,(x) = \frac{-1}{18} + \frac{1}{6}\,x$$

Lösung zu Aufgabe 9–5 : Vergleiche Beispiel 9–11

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9–6 :

(a) Die Abbildung ist bestimmt durch

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Matrix **A** bestimmt durch

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ 9 & -0.5 \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 \\ 9 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.25 & 1.75 \\ -5.25 & 4.75 \end{bmatrix}$$

(b) Das Bild von $(4, 1)^T$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25 & 1.75 \\ -5.25 & 4.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.25 \\ -16.25 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9–7 : Vergleiche Beispiel 9–14. Es gilt

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Somit sind zwei Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt.
Mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9–8 :

(a) Der Vektor $\vec{a}$ zeigt in die 60°–Richtung, $\vec{b}$ steht senkrecht dazu. Deshalb gilt

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = -\vec{b}$$

Wir haben zwei Eigenwerte und Eigenvektoren und erhalten somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Die Drehung um $\alpha = \frac{-\pi}{3}$ wird dargestellt durch die Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Nach der Drehung kann neu an der x–Achse gespiegelt werden. Die Operation ist dargestellt durch die Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Drehung um 60° ist gegeben durch $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ und wir erhalten

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen sind fast identisch.

Lösung zu Aufgabe 9–9 : Vergleiche mit Beispiel 9–24
Die Eigenwerte der Matrix sind Lösungen von

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda - 16 = (\lambda-1)^2 - 17$$

und somit $\lambda_1 = 1 - \sqrt{17}$ und $\lambda_2 = 1 + \sqrt{17}$. Die **orthonormierten** Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.78821 \\ 0.61541 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.61541 \\ 0.78821 \end{pmatrix}$$

Daraus konstruiert man

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.78821 & -0.61541 \\ 0.61541 & 0.78821 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

wobei $\alpha \approx 0.66291 \approx 38°$. Die Matrix $\mathbf{E}$ ist orthogonal ($\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T$) und entspricht somit einer Drehung. Es gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$$

Das Vehalten der linearen Abbildung kann wie folgt beschrieben werden:

1. Multiplikation mit $\mathbf{E}^{-1}$: Drehung um den Winkel $-\alpha \approx -38°$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit Diagonalmatrix:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx -3.12$. Es handelt sich um eine Streckung und Spiegelung.
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx 5.12$
3. Multiplikation mit $\mathbf{E}$: Drehung um den Winkel $\alpha \approx 30°$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

Da es sich um eine 2×2–Matrix handelt, könnte der Drehwinkel auch durch

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

bestimmt werden. Die obigen Rechnungen lassen sich auch mit grösseren Matrizen durchführen, meist mit Hilfe von geeigneten Programmen (*Mathematica*, `MATLAB`).

Lösung zu Aufgabe 9–10 : Es gilt

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das entspricht einer Verschiebung um den Vektor $-(a, b)^T$.

Lösung zu Aufgabe 9–11 : Die Matrizen der drei einzelnen Abbildungen sind

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Die Matrix ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_1 \approx \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 & 2.2321 \\ 0.2588 & 0.9659 & -0.1340 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Da der Punkt (x_0, y_0) nicht bewegt wird muss die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein, d.h. der Punkt ist durch den zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenvektor bestimmt. *Mathematica* liefert den Eigenvektor, der so zu strecken ist, dass die dritte Komponente 1 wird.

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} 0.188 \\ 0.975 \\ 0.116 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.62 \\ 8.41 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Fixpunkt gegeben durch $(x_0, y_0) \approx (1.62\,,\ 8.41)$.

Lösung zu Aufgabe 9–12 : Der erste Drehwinkel ist $-60° = -\pi/3$ und die zweite Drehung ergibt einen Winkel von $= 30° = \pi/6$. Die Matrizen der drei einzelnen Abbildungen sind somit

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Die gesuchte Matrix ist gegeben als Produkt der drei obigen Transformationsmatrizen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 3.098 \\ -0.5 & 0.866 & 0.634 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Da der Punkt (x_0, y_0) nicht bewegt wird muss die Gleichung

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein, d.h. der Punkt ist durch den zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenvektor bestimmt. Geeignete Hilfsmittel (*Octave*, `MATLAB`, *Mathematica*, TI, HP) liefern den Eigenvektor, der so zu strecken ist, dass die dritte Komponente 1 wird.

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} +0.441 \\ -0.883 \\ +0.162 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} +2.732 \\ -5.464 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Fixpunkt gegeben durch $(x_0, y_0) \approx (2.732\,,\ -5.464)$.
Altenativ können auch die beiden ersten Gleichungen des Systems

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nach x_0 und y_0 aufgelöst werden.

Lösung zu Aufgabe 9–13 : Die Drehmatrix um den Winkel 30° ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Drehung um $-30°$ kann durch $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ dargestellt werden. Eine Drehung um $-60°$ kann durch das Produkt $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T$ (zwei Drehungen um je $-30°$) dargestellt werden. Die Verschiebung um den Vektor $(1, 1)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Komposition der Abbildungen ist somit

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich also nur eine Verschiebung um 2.732 in x–Richtung.

Lösung zu Aufgabe 9–14 : Die Lösung in eng verwandt mit der vorangehenden Aufgabe.
Die Drehmatrix $\mathbf{R}$ und die Translationsmatrix $\mathbf{T}$ können übernommen werden. Die Verschiebung um den Vektor $(-1, -1)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Komposition der Abbildungen ist somit

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich also nur eine Verschiebung um 0.732 in y–Richtung.

Lösung zu Aufgabe 9–15 : Es gilt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{2^2+2^2}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

Der Vektor hat also die Länge $l = 2\sqrt{2}$ und schliesst mit der x–Achse einen Winkel von 135° ein. Statt um den Vektor $(-2,2)^T$ zu verschieben werden wir die folgenden Operationen ausführen:

1. Um -135° drehen
2. Um $2\sqrt{2}$ in x–Richtung verschieben.
3. Um 135° drehen

Mit der Drehmatrix um den Winkel $\frac{-3\pi}{4}$

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir der Vektor $(-2,2)^T$ in die x–Richtung gedreht. Nun wendet man eine Verschiebung um $2\sqrt{2}$ in x–Richtung mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und dreht wieder zurück um 135°. Das ergibt

$$\mathbf{R}(\alpha)\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die obige Behauptung ist bestätigt.

Lösung zu Aufgabe 9–16 :

(a) Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind gegeben als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 11 = 0$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+44}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm 3\sqrt{5}\right) \approx \begin{cases} 2.8541 \\ -3.8541 \end{cases}$$

Der zum ersten Eigenwert λ_1 gehörende Eigenvektor $\vec{e}_1$ ist gegeben als Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)x + 3\,y &= 0 \\ \left(1-\sqrt{5}\right)x + 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

mit der leicht ablesbaren Lösung

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor schliesst mit der x–Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.5536 \approx 31.7^\circ$ ein. Der zweite Eigenvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht dazu, da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist. Somit kann der Effekt der obigen Abbildung folgendemassen beschrieben werden

1. Rotation um $-\alpha$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Streckung um Faktor $\lambda_1 \approx 2.8541$ in der x–Richtung.
3. Streckung und Spiegelung um Faktor $\lambda_2 \approx -3.8541$ in der y–Richtung.
4. Rotation um α, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In der Matrizensprache ausgedrückt ergiebt dies

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können auch mit dem Taschenrechner durchgeführt werden. Die Zahlen in der Rotationsmatrix sind dann

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.850651 & 0.525731 \\ -0.525731 & 0.850651 \end{bmatrix}$$

(b) Die ursprüngliche Fläche ist 4 . Diese muss mit $\det \mathbf{A} = -2 - 9 = -11$ multipliziert werden. Man erhält also eine Figur mit Flächeninhalt 44. Die Fläche hat die Orientierung gewechselt.

Lösung zu Aufgabe 9–17 :

(a) Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind gegeben als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\,\lambda - 23 = 0$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(6 \pm \sqrt{36+92}\right) = 3 \pm 4\,\sqrt{2} \approx \begin{cases} +8.65685 \\ -2.65685 \end{cases}$$

Der zum ersten Eigenwert $\lambda_1 = 3 + 4\,\sqrt{2}$ gehörende Eigenvektor $\vec{e}_1$ ist gegeben als Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda_1 & 4 \\ 4 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 4-4\sqrt{2} & 4 \\ 4 & -4-4\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} \left(4-4\sqrt{2}\right)\,x + 4\,y &= 0 \\ \left(1-\sqrt{2}\right)\,x + y &= 0 \end{aligned}$$

mit der leicht ablesbaren Lösung

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor schliesst mit der x–Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan(-1+\sqrt{2}) \approx 0.39 \approx 22.5^\circ$ ein. Der zweite Eigenvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht dazu, da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist. Der Drehwinkel kann auch aus der Beziehung

$$\tan\,2\alpha = \frac{2\,a_{1,2}}{a_{1,1} - a_{2,2}} = \frac{2\cdot 4}{7+1} = 1$$

bestimmt werden.

Somit kann der Effekt der obigen Abildung folgendemassen beschrieben werden

1. Rotation um $-\alpha$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Streckung um Faktor $\lambda_1 \approx 8.66$ in der x–Richtung.
3. Streckung und Spiegelung um Faktor $\lambda_2 \approx -2.66$ in der y–Richtung.
4. Rotation um α, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In der Matrizensprache ausgedrückt ergiebt dies

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können auch mit dem Taschenrechner durchgeführt werden. Die Zahlen in der Rotationsmatrix sind dann

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.92388 & 0.38268 \\ -0.38268 & 0.92388 \end{bmatrix}$$

(b) Die resultierende Figur ist eine Ellipse Die eine Halbachse der Länge 8.66 zeigt in die 22.5°–Richtung. Die andere Halbachse der Länge 2.66 ist senkrecht dazu und zeigt in die 112.5°–Richtung.

(c) Die Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist 2. Rotationen ändern die Fläche nicht. Die beiden Streckungen vergrössen die Fläche um den Faktor

$$\lambda_1\lambda_2 = (3 - 4\sqrt{2})(3 + 4\sqrt{2}) = 3^2 - (4\sqrt{2})^2 = -23$$

Man erhält also eine Figur mit Flächeninhalt 46. Das Dreieck hat somit die Orientierung gewechselt.

Lösung zu Aufgabe 9–18 :

(a) Die Matrix $\mathbf{A}$ kann mit drei Vektoren multipliziert werden. Die drei Rechnungen können auch (spaltenweise) in eine einzige Matrizenmultiplikation gesteckt werden.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit sind die drei Eckpunkte des neuen Dreiecks $(9/7)$, $(9/7)$ und $(0/10)$.

(b) Multiplizieren mit der Matrix $\mathbf{A}$ darf den Vektor nicht verändern, deshalb gilt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Komponenten können als Gleichungssytem für die Unbekannten x und y geschrieben werden

$$\begin{array}{rrrcl} 3\,x & +3\,y & +0\cdot 1 & = & x \\ 2\,x & -1\,y & +7\cdot 1 & = & y \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrcr} 2\,x & +3\,y & = & 0 \\ 2\,x & -2\,y & = & -7 \end{array}$$

Dieses System kann leicht gelöst werden mit den Lösungen $x = \frac{-21}{10}$ und $y = \frac{7}{5}$. Dieser Vektor kann auch erhalten werden als Eigenvektor zum Eigenwert 1, wobei die dritte Komponente auf 1 zu normieren ist.

Lösung zu Aufgabe 9–19 :

(a) Die Abbildung kann folgendermassen zerlegt werden:

1. Zuerst wird der Punkt P in den Ursprung verschoben durch eine Translation um den Vektor $(-2,-3)^T$. Die Transformationsmatrix ist
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Drehung um 60° mt Hilfe der Matrix ($\alpha = 60^\circ$)
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
3. Dann muss der Ursprung wieder auf den P zurückgeschoben werden mit Hilfe der Transformationsmatrix
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ ist nun gegeben durch
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866025 & 3.59808 \\ 0.866025 & 0.5 & -0.232051 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Als Kontrolle kann das Resultat
$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
verwendet werden.

(c) Wegen der Rechnung
$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5-5\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.366025 \\ -1.83013 \\ 1 \end{pmatrix}$$
wird der Punkt $Q = (-3,2)$ abgebildet auf den neuen Punkt $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-5\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 9–20 : Die Abbildung kann zerlegt werden in: eine Verschiebung nach unten, Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung, Verschieben nach oben.

1. Verschiebung um Vektor $(0,-1)^T$ mit der Matrix
$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Nun kann an der „neuen“ Gerade $y = 2\,x$ gespiegelt werden. Bei dieser Abbildung bleibt der Vektor $(1,2)^T$ fest und der dazu senkrechte Vektor $(2,-1)^T$ wird mit (-1) multipliziert. Das ergibt
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die Spiegelungsmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese $\mathbf{S}$ Matrix könnte auch erzeugt werden durch: Drehung um $-\arctan 2$, Spiegelung an x–Achse, Drehung um $\arctan 2$.

3. Das Rückverschieben nach oben wird erzeugt durch

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Zusammengesetzt erhält man die Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Als Kontrolle können die Punkte $(0,1)$ mit Bild $(0,1))$, $(1,3)$ mit Bild $(1,3)$ und $(-2,2)$ mit Bild $(2,0)$ verwendet werden.

Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem die Bilder von drei Vektoren aus einer Figur abgelesen werden. Es gilt

$$G(0,1) = (0,1) \quad , \quad G(1,3) = (1,3) \quad \text{und} \quad G(-2,2) = (2,0)$$

Übersetzt in die Matrizensprache erhält man

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9–21 :

(a) $\vec{c}$ muss das Bild des Ursprunges $A(0/0)$ sein. Aufgrund der Beschreibung gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{23}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{33}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{33}{4} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{33}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir als Resultat der ersten Teilaufgabe

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

(b) Die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2}-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \lambda^2 - 3\,\lambda + \frac{11}{16} = 0$$

Hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9 - \frac{11}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm \frac{5}{2}\right)$$

Daraus erhält man

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{11}{4} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Zentrum bei $A'(\frac{3}{4}, \frac{-2}{2})$. In Richtung von $\vec{v}_1$ (Steigung $\frac{-1}{3}$) um Faktor $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ gestreckt, d.h. gestaucht. In Richtung von $\vec{v}_2$ (Steigung 3) um Faktor $\lambda_2 = \frac{11}{4}$ gestreckt.

(d) Die Längen der Halbachsen sind gegeben durch die beiden Eigenwerte.

$$\text{Fläche } = \pi \, \det \mathbf{M} = \pi\,\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{11\,\pi}{16}$$

Lösung zu Aufgabe 9–22 :

(a) Es gilt $\mathbf{P}\,\vec{a} = \vec{0}$. Vektoren senkrecht zu $\vec{a}$ werden nicht geändert. Somit muss gelten

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit lässt sich $\mathbf{P}$ nun berechnen mittels

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor $\vec{a}$ liegt in der xy–Ebene und schliesst mit der x Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ ein. Somit können die folgenden Operationen ausgeführt werden

1. Rotation um die z Achse mit Winkel $-\alpha$
2. Rotation um die x Achse mit Winkel $+60^\circ$
3. Rotation um die z Achse mit Winkel $+\alpha$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.894 & -0.447 & 0 \\ 0.447 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.894 & 0.447 & 0 \\ -0.447 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0.387 \\ 0.2 & 0.6 & -0.775 \\ -0.387 & 0.775 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9–28 :

(a) Die Rotationsachse ist parallel zur y–Achse. Der Rotationswinkel α muss -30° sein, damit der Ursprung nach unten gedreht wird. Die Abbildung kann zerlegt werden in: eine Verschiebung des Punktes $(1/0/1)$ in den Ursprung, Rotation um -30°, dann zurückschieben.

Die Verschiebung um Vektor $(-1,0,-1)^T$ erfolgt mit Hilfe mit der Matrix $\mathbf{T}$, das Rückverschieben mit der inversen Matrix $\mathbf{T}^{-1}$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun kann um -30° um die y–Achse rotiert werden. Das ergibt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & -\sin 30^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zusammengesetzt erhält man die Transformationsmatrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0.634 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & -0.366 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Als einfache Kontrolle kann ein Punkt auf der Rotationsachse verwendet werden. Es darf seine Lage nicht verändern, d.h. es sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

(b) Um den Punkt $P = (1/2/-4)$ kann die Multiplikation des um 1 erweiterten Vektors mit der Matrix der vorangehenden Teilaufgabe erzeugt werden.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 2 \\ 1 - 5\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \\ -3.33 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Bildpunkt die Koordinaten $(3.5/2/-3.33)$.

Lösung zu Aufgabe 9–29 :

(a) Zuerst muss die Drehachse auf die z–Achse gedreht werden, dann um $\pm 30^\circ$ rotiert und anschliessend die Drehachse zurückgedreht werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)$$

wobei

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{2}{1}$$

und somit

$$\mathbf{D}_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_z(\phi) = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Punkt $(1, 0, 0)$ wird nach oben rotiert und somit muss der Rotationswinkel $\alpha = -30^\circ = -\pi/6$ sein. Das führt auf

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.888355 & -0.159466 & -0.430577 \\ 0.248782 & 0.955342 & 0.159466 \\ 0.385919 & -0.248782 & 0.888355 \end{bmatrix}$$

Die Kontrollrechnung

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.888355 \\ 0.248782 \\ 0.385919 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass das Bild des Punktes $(1, 0, 0)$ oberhalb der xy–Ebene liegt.

(b) Die Rotationsachse $\vec{d}$ wird durch die Multiplikation mit $\mathbf{R}$ nicht bewegt und ist somit der zum Eigenwert 1 gehörende Eigenvektor. Das führt auf

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -0.353553 \\ -0.353553 \\ +0.866025 \end{pmatrix}$$

Um den Winkel zu bestimmen muss ein zu $\vec{d}$ senkrecht stehender Vektor $\vec{x}$ untersucht werden. Es gilt

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}\,,\, \mathbf{R}\,\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|\;\|\mathbf{R}\,\vec{x}\|} = \frac{\langle \vec{x}\,,\, \mathbf{R}\,\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2}$$

Mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} +0.353553 \\ -0.353553 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = 0.5 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \pi/3 = 60^\circ$$

9.7 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- lineare Abbildungen als solche zu erkennen.
- in der Lage sein Matrixdarstellungen von linearen Abbildungen anzugeben und zu interpretieren.
- lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ gut, schnell und zuverässig untersuchen können. Stichworte: Drehungen, Streckungen, Eigenwerte, Eigenvektoren.
- mit homogenen Koordinaten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ umgehen können.
- lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ beschreiben können.
- mit den Begriffen Rotationsmatrix, Drehachse, und Euler'schen Winkeln vertraut sein.
- affine und lineare Abbildungen zuverlässig unterscheiden können.
- mit homogenen Koordinaten im Raum $\mathbb{R}^3$ umgehen können, d.h. affine Abbbildungen durch geeignete Matrizen darstellen können.
- *Mathematica*, `MATLAB` und den Taschenrechner für die notwendigen Matrixoperationen einsetzen können.

Kapitel 10

Anwendungen der linearen Algebra

10.1 Anwendungen von Transformationsmatrizen

10.1.1 Beschreibung eines Roboterarmes

Die Methoden von Abschnitt 9.5 können verwendet werden Bewegungen von Robotern zu beschreiben. Hierzu betrachten wir ein einfaches Beispiel in Abbildung 10.1, beschrieben durch

- Das erste Element AB zeigt vom Ursprung (A) um die feste Länge H nach oben. Das Element ist drehbar um die z-Achse und wird um den Winkel θ gedreht.
- Das zweite Element BC hat eine variable Länge l und wird horizontal befestigt. Aufgrund der Drehung des ersten Elementes schliesst das zweite Element mit der x-Achse einen Winkel θ ein.
- Das dritte Element CD hat eine feste Länge h und liegt in der durch die beiden ersten Elemente aufgespannten Ebene. Diese Element zeigt ursprünglich vertikal nach unten, kann aber um den Winkel ϕ ausgelenkt werden.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es die Koordinaten der Kontrollpunkte A, B, C und D als Funktion der Variablen θ, l und ϕ zu beschreiben. Um dieses Ziel zu erreichen verwenden wir homogene Koordinaten und entsprechende 4×4 Transformationsmatrizen.

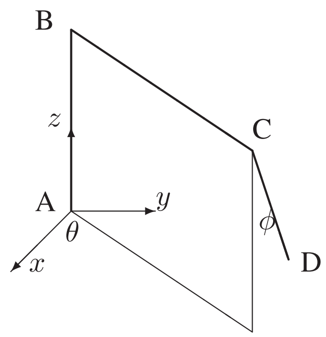


Abbildung 10.1: Ein einfacher Roboter mit drei Elementen

Der Ursprung A wird in homogenen Koordinaten dargestellt durch den Vektor $\vec{A} = (0,0,0,1)$. Um das erste Roboterelement zu beschreiben verwenden wir eine affine Transformation welche das Koordinatensystem um H nach oben bewegt und um den Winkel θ dreht, d.h.

$$\mathbf{TAB} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um vom Ursprung zum Punkt C zu gelangen können wir zuerst um l in die x-Richtung verschieben und anschliessend die durch **TAB** gegebene Transformation ausführen. Somit gilt

$$\mathbf{TAC} = \mathbf{TAB} \cdot \mathbf{TBC}$$

wobei

$$\mathbf{TBC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um vom Ursprung zum Punkt D zu gelangen können wir zuerst um h nach unten verschieben und dann um die y-Achse mit dem Winkel $-\phi$ drehen. Anschliessend die durch **TAC** gegebene Transformation ausführen. Somit gilt

$$\mathbf{TAD} = \mathbf{TAC} \cdot \mathbf{TCD}$$

wobei

$$\mathbf{TCD} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der obigen Transformationsmatrizen können die Koordinaten der verschiedenen Punkte nun leicht berechnet werden durch

$$\vec{B} = \mathbf{TAB} \cdot \vec{A} \quad , \quad \vec{C} = \mathbf{TAC} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{D} = \mathbf{TAD} \cdot \vec{A}$$

Die Konstruktion der Matrix

$$\mathbf{TAD} = \mathbf{TAB} \cdot \mathbf{TBC} \cdot \mathbf{TCD}$$

Beschreibt das Vorgehen um vom Startpunkt A zum Endpunkt D zu gelangen

1. Verschiebe den Punkt um H nach oben und rotiere um die z-Achse mit dem Winkel θ. Diese Operationen können auch ausgeführt werden indem der ursprüngliche Vektor im neuen Koordinatensystem gezeichnet wird, wobei der neue Koordinatenursprung im Punkt B liegt und die neue x-Achse in Richtung von C zeigt.
2. Im neuen Koordinatensystem ist der Punkt um l in die neue x-Richtung zu verschieben. Dies kann wiederum durch ein neues Koordinatensystem (Ursprung bei C) dargestellt werden.
3. Nun muss der Punkt um $-h$ in die neue (und alte) z-Richtung verschoben werden, dann um die neue y-Achse mit dem Winkel $-\phi$ gedreht werden.

Die Reihenfolge der Operationen und Matrizenmultiplikationen ist wichtig.

10.1.2 Bewegungen eines Skifahrers

Als Semester- und Diplomarbeit wird 2004 ein Beschleunigungsmesssystem entworfen das am Schuh eines Skifahrers befestigt wird und Daten über die Bewegung aufnehmen muss.

Die Höhe eines Hügels kann gegeben sein durch die Höhe $z = h(x, y)$ als Funktion der horizontalen Position (x, y). Nun bewegt sich ein Skifahrer entlang einer gegebenen Kurve $(x(t)\,,\, y(t))$. Das führt auf die folgenden Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \frac{\partial}{dt}\,h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \frac{\partial^2}{dt^2}\,h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Kurve ist in Abbildung 10.2 gezeigt.

Nun konstruieren wir ein mit dem Skifahrer mitfahrendes Koordinatensystem.

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigt mit einem Winkel θ nach unten und sein horizontaler Anteil zeigt in eine durch einen Winkel ϕ gegebene Richtung. Die zeitabhängigen Winkel sind gegeben durch

$$\sin\theta(t) = \frac{-v_3(t)}{\|\vec{v}(t)\|} \quad \text{und} \quad \tan\phi(t) = \frac{v_2(t)}{v_1(t)}$$

Das ortsfeste Koordinatensystem wird nun

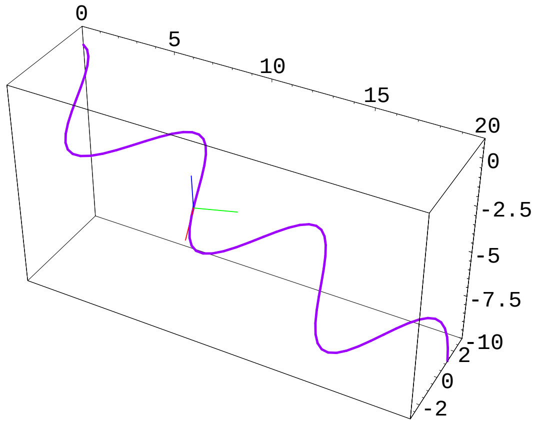


Abbildung 10.2: Bewegungskurve eines Skifahrers

- um den Winkel $\theta(t)$ um die y–Achse rotiert und
- anschliessend um dien Winkel $\phi(t)$ um die ortsfeste z–Achse rotiert.

Die x–Achse des neuen Systems wird folglich in die selbe Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigen. Diese Transformation kann beschrieben werden durch Multiplikation mit Rotationsmatrizen.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\phi(t)) \cdot \mathbf{R}_y(\theta(t)) = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_{xneu} & \vec{e}_{yneu} & \vec{e}_{zneu} \end{array} \right]$$

Die neue z–Achse $\vec{e}_{zneu}$ zeigt noch nach oben, ist aber bereits senkrecht zur Bahnkurve. ein solches begleitendes Dreibein ist auf in Abbildung 10.2 sichtbar. Nun muss diese vertikale Achse noch um den richtigen Winkel gekippt werden, damit die Kurvenlage des Skifahrers korrekt widergegeben wird. Wir nehmen an, dass diese Richtung durch die auf den Schu wirkenden Kräfte bzu bestimmen ist, da die Hauptlast senkkrecht zur Schulsohle aufgenommen werden sollte. Auf den Skifahrer wirkt eine Gravitationskraft der Stärke $m\,g$ nach unten. Damit er auf der gegebenen Bahn bleibt, muss nach dem Gesetz von Newton die Summe aller wirkenden Kräfte $m\,\vec{a}$ sein. Somit wirken auf den Schuh insgesamt die Kräfte

$$m\,\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,g \end{pmatrix}$$

Nun kippen wir die neue z Achse um einen geeigneten Winkel, soddas diese Gesamtkraft keine Komponente sekrecht dazu hat. Um dies zu erreichen schreiben wir die Gesamtkraft im neuen Koordinatensystem

$$\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{g} = b_1\,\vec{e}_{xneu} + b_2\,\vec{e}_{yneu} + b_3\,\vec{e}_{zneu}$$

Somit sind die Koeffizienten b_i gegeben durch

$$\begin{aligned} b_1 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{xneu} \rangle \\ b_2 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{yneu} \rangle \\ b_3 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{zneu} \rangle \end{aligned}$$

Der gewünschte Kippwinkel φ ist nun bestimt durch

$$\tan\varphi(t) = \frac{b_2(t)}{b_3(t)}$$

und die neue Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_n(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}_x(\varphi(t)) = \mathbf{R}_z(\phi(t)) \cdot \mathbf{R}_y(\theta(t)) \cdot \mathbf{R}_x(\varphi(t)) = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_{xN} & \vec{e}_{yN} & \vec{e}_{zN} \end{array} \right]$$

Die Beschleunigungssensoren sind in diesem mitbewegten Bezugssystem befestigt und messen folglich die folgenden Komponenten der Beschleunigung:

10.2 Einfache Anwendungen von Eigenwerten und Eigenvektoren

10.2.1 Die Fibonacci Folge

Die Fibonacci Folge von ganzen Zahlen ist gegeben durch die rekursive Berechnungsvorschrift

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 1 \quad \text{mit} \quad x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$$

Einige Zahlenbeispiele sind hier berechnet

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$x_{n-2} + x_{n-1}$			$1+1$	$1+2$	$2+3$	$3+5$	$5+8$	$8+13$	$\cdots$
x_n	1	1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$

Die Berechnungen können auch mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden.

$$\begin{array}{rcrcl} x_n & = & & + & x_n \\ x_{n+1} & = & x_{n-1} & + & x_n \end{array} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun können Vektoren $\vec{y}_n \in \mathbb{R}^2$ eingeführt werden und statt einer Folge von Zahlen x_n kann eine Folge von Vektoren $\vec{y}_n$ untersucht werden.

$$\vec{y}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \vec{y}_n \quad \text{wobei} \quad \vec{y}_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur Illustration sind hier einige Berechnungen gezeigt.

$$\begin{aligned}
\vec{y}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_1 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_2 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_1 = \mathbf{A}^2 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_3 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_2 = \mathbf{A}^3 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_4 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_3 = \mathbf{A}^4 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_5 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_4 = \mathbf{A}^5 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_n &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_{n-1} = \mathbf{A}^n \cdot \vec{y}_0
\end{aligned}$$

Die obige Rechnung zeigt, dass die Werte von $\vec{y}_n$ auch mit Hilfe von ganzen Potenzen $\mathbf{A}^n$ der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt werden können. Für diese Rechnungen sind Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ nützlich. Dies soll anhand dieses Beispiels illustriert werden.

Zuerst sind die beiden Eigenwerte zu berechnen. Sie sind bestimmt durch

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Anschliessend können die Eigenvektoren bestimmt werden durch die folgenden Rechnungen. Für den ersten Eigenwert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist das Gleichungsystem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt auf die eine Gleichung

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, x + y = 0$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 1+\sqrt{5} \quad \text{und somit} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Eigenwert $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erhält man analog

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{zu lösen ist} \qquad -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\, x + y = 0$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 1-\sqrt{5} \quad \text{und somit} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Nun schreiben wir den Startvektor $\vec{y}_0$ als Linearkombination der beiden linear unabhängigen Eigenvektoren.

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Diese beiden Gleichungen für α und β sind eindeutig lösbar mit der Lösung $\alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Wegen

$$\mathbf{A}^n\,\vec{v}_1 = \lambda_1^n\,\vec{v}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^n\,\vec{v}_2 = \lambda_2^n\,\vec{v}_2$$

gilt nun

$$\vec{y}_n = \mathbf{A}^n \vec{y}_0 = \mathbf{A}^n \cdot (\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2) = \alpha\ (\mathbf{A}^n \cdot \vec{v}_1 - \mathbf{A}^n\,\vec{v}_2) = \alpha\ (\lambda_1^n\,\vec{v}_1 - \lambda_2^n\,\vec{v}_2)$$

und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right)$$

Somit haben wir eine explizite Formel für den n-ten Term in der Fibonacci Folge.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

Auf den ersten Blick mag es überraschen, dass diese Formel immer einen ganzzahligen Wert liefert, aber eine genauere Analyse bestätigt diese Tatsache. Mit der obigen Formel kann auch für grosse Werte von $n \in \mathbb{N}$ direkt die Zahl x_n bestimmt werden, ohne alle vorangehenden Terme zu bestimmen.

Die obigen Rechnungen können mit *Mathematica* implementiert werden. Die ersten 20 Terme der rekursiven Definition werden bestimmt mittels

Mathematica

```
n = 20;
val = Table[, {n}];
val[[1]] = 1; val[[2]] = 1;
For[k = 3, k <= n, k = k + 1, val[[k]] = val[[k - 1]] + val[[k - 2]]];
val
.
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,
 4181, 6765}
```

Der 20-te Term kann direkt bestimmt werden mittels

Mathematica

```
x[k_] := Simplify[(((1 + Sqrt[5])/2)^k - ((1 - Sqrt[5])/2)^k)/Sqrt[5]]
x[20]
.
6765
```

10.2.2 Markov'sche Ketten

Gewisse Probleme der Wahrscheinlichkeit können sehr gut mit Hilfe von Markov Kette beschrieben werden. Als Hilfsmittel werden Übergangsmatrizen verwendet. Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrizen beinhalten Information über dieses System. Das Verfahren wird mit Hilfe von zwei Beispielen illustriert, ohne auf Details der zugrundeliegenden Theorie einzugehen. Einfache Einführungen sind gegeben in [AntoRorr77, §7] und [SchnBark68, §6.7].

Grösse der Söhne

Wir betrachten eine grosse Gruppe von Vater–Sohn Paaren und untersuchen die Grösse (Länge). Wir gehen von den folgenden (hypothetischen) Tatsachen aus

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein kleiner Mann einen kleinen Sohn hat ist 0.6.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein kleiner Mann einen grossen Sohn hat ist 0.4.
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein grosser Mann einen kleinen Sohn hat ist 0.2.
4. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein grosser Mann einen grossen Sohn hat ist 0.8.

Diese Information kann auch als 2×2 Matrix dargestellt werden.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Die erste Zeile entspricht kleinen Söhnen, die zweite Zeile grossen Söhnen. Die erste Spalte entspricht kleinen Vätern, die zweite Spalte grossen Vätern. Diese Matrix hat einige spezielle Eigenschaften:

- Da jeder kleine Vater entweder einen kleinen oder grossen Sohn hat, ist die Summe der Zahlen in der ersten Spalte 1.
- Da jeder grosse Vater entweder einen kleinen oder grossen Sohn hat, ist die Summe der Zahlen in der zweiten Spalte 1.
- Alle Einträge in der Matrix sind positiv.
- Subtrahieren wir die Zahl 1 entlang der Diagonalen, so ist die Summe aller Zeilen immer Null.

$$\begin{bmatrix} 0.6-1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Somit ist die letzte Zeile eine Linearkombination der oberen Zeilen[1] und die Determinate dieser Matrix ist Null.

[1]Für 2×2 Matrizn ist diese Tatsache trivial, sie gilt aber auch für grössere Matrizen

Sind in der Gruppe k kleine Väter und g grosse Väter vorhanden, so erwarten wir $0.6 \cdot k + 0.2 \cdot g$ kleine Söhne und $0.4 \cdot k + 0.8 \cdot g$ grosse Söhne. Diese Rechnungen können auch als Matrizenmultiplikation geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Söhne} \\ \text{Anzahl grosse Söhne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \cdot k + 0.2 \cdot g \\ 0.4 \cdot k + 0.8 \cdot g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Mit den selben Überlegungen kann auch auf die Verteilung der Grosskinder geschlossen werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Grossöhne} \\ \text{Anzahl grosse Grosssöhne} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Söhne} \\ \text{Anzahl grosse Söhne} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.28 \\ 0.56 & 0.72 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach n Generationswechseln erwarten wir somit eine Verteilung von

$$\begin{pmatrix} \text{klein} \\ \text{gross} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Analog zu den Überlegungen im Abschnitt 10.2.1 über die Fibonacci Folge sind Eigenwerte und Eigenvektoren nützlich um das Verhalten von $\mathbf{A}^n$ zu untersuchen.

Die beiden Eigenwerte sind Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0.6-\lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} &= (0.6-\lambda)\,(0.8-\lambda) + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= \lambda^2 - (0.6+0.8)\,\lambda + 0.6 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.4 = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((1.4) \pm \sqrt{1.4^2 - 4\,(0.48+0.08)}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0.4 \end{cases}$$

Aufgrund der obigen Überlegungen ist es kein Zufall, dass 1 ein Eigenwert ist. Die Eigenvektoren können nun bestimmt werden und man erhält

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0.4 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenvektoren gilt:

- Der zum Eigenwert 1 gehörende Vektor kann so normiert werden, dass alle Einträge positiv sind und die Summe aller Einträge 1 ist.
- Die Summe aller Einträge des/der anderen Eigenvektoren ist 0. Um dies einzusehen untersuchen wir einen von 1 verschiedenen Eigenwert λ mit Eigenvektor $\vec{v} = (x,y)^T$. Für diesen Vektor gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}) \cdot \vec{v} &= (\mathbf{A} - \mathbb{I}) \cdot \vec{v} - (\lambda - 1)\,\vec{v} = \vec{0} \\ \begin{bmatrix} 0.6-1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\lambda-1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 0 &= (\lambda-1) \cdot (x+y) \end{aligned}$$

  Um zur letzten Zeile zu gelangen, wurden die Gleichungen addiert. Für $\lambda \neq 1$ gilt somit $x + y = 0$, d.h. die Summe der Komponenten ist Null.

Die Anfangsverteilung der Väter wird nun geschrieben als Linearkombination der Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2$$

Für die Werte α und β erhalten wir ein lineares Gleichungssytem

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & , & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Addiert man die beiden Gleichungen so erhält man

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + (1-1)\,\beta = g + k$$

und somit $\alpha = 1$. Der Wert von β könnte auch berechnet werden.

Für die Verteilung in der n-ten Generation gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \cdot (\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2) \\ &= \alpha\,\mathbf{A}^n\,\vec{v}_1 + \beta\,\mathbf{A}^n\,\vec{v}_2 \\ &= \alpha\,\lambda_1^n\,\vec{v}_1 + \beta\,\lambda_2^n\,\vec{v}_2 \\ &= \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,0.4^n\,\vec{v}_2 \\ &\longrightarrow \alpha\,\vec{v}_1 = \vec{v}_1 \quad \text{falls} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

Da die Anzahl der Männer in jeder Generation bereits bekannt ist (ein Sohn pro Vater) muss die Summe der Einträge in $\alpha, \vec{v}_1$ gleich der ursprünglichen Anzahl Väter sein, d.h. $\alpha\,(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = \alpha = k + g$. Dies bestätigt den Wert von $\alpha = 1$. Nach vielen Generationen ergibt sich die Verteilung

Art	Anzahl	Anteil
klein	$\frac{k+g}{3}$	$\frac{1}{3}$
gross	$\frac{2\,(k+g)}{3}$	$\frac{2}{3}$

Somit ist die prozentuale Verteilung von kleinen und grossen Söhnen durch die Einträge im Eigenvektor $\vec{v}_1$ gegeben. Es ist der zu $\lambda_1 = 1$ gehörende Eigenvektor. Es ist zu beachten, dass die Endverteilung unabhängig ist von der Verteilung der ersten Generation.

10.2.3 Wechsel der Sportart

Mit den selben Methoden wie im vorangehenden Abschnitt untersuchen wir die durch eine Gruppe von Jugendlichen ausgeübten Sportarten:

- F steht für den Anteil FussballerInnen
- B steht für den Anteil BasketballerInnen
- N steht für den Anteil NichtsportlerInnen

Im Laufe eines Jahres wechseln die Jugendlichen ihre Sportart gemäss dem folgende Schema

	bisher		
neu	Fussball	Basketball	Nichts
Fussball	80%	15%	20%
Basketball	12%	75%	10%
Nichts	8%	10%	70%

• Aufgabe 10–1:
Mit Hilfe der Ideen des vorangehenden Abschnittes sind die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Es ist zu verifizieren, dass die Angaben konsistent sind, d.h. widerspruchsfrei.

(b) Zu Beginn spielen je 50% Fussball und Basketball. Es gibt (noch) keine Nichtsportler. Wie sieht die Situation nach einem, resp. zwei Jahren aus?

(c) Die drei Eigenwerte und Eigenvektoren sind zu berechnen. Ein Eigenwert muss $\lambda_1 = 1$ sein. Der entsprechende Eigenvektor ist so zu wählen, dass die Summe aller Komponeneten 1 ergibt.

(d) Wie ist die Verteilung auf die drei Sportarten nach vielen Jahren?

Lösung: Die zu untersuchende Matrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.20 \\ 0.12 & 0.75 & 0.10 \\ 0.08 & 0.10 & 0.70 \end{bmatrix}$$

(a) Die Summe in jeder Spalte der Matrix ist tatsächlich 1.

(b) Zu berechnen sind

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.435 \\ 0.090 \end{pmatrix}$$

Somit spielen nach einem Jahr 47.5% Fussball, 43.5% Basketball und die verbleibenden 9% sind ‘untätig’. Wegen

$$\mathbf{A}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.435 \\ 0.090 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46325 \\ 0.39225 \\ 0.14450 \end{pmatrix}$$

ist die Verteilung nach zwei Jahren 46.3%, 39.2% und 14.5% .

(c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und das konjugiert komplexe Paar $\lambda_{2,3} \approx 0.62500 \pm i\,0.01936$. Der Eigenvektor $\vec{v}_1$ zum Eigenwert 1 ist

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.46099 \\ 0.31206 \\ 0.22695 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten wurden so normiert, dass die Summe 1 ergibt.

(d) Nach vielen Generationen erhält man 46% Fussball, 31% Basketball und 23% sportlich Inaktive.

• Aufgabe 10–2:

In einer grossen Gruppe von Personen werden drei Sportarten betrieben (A, B und C). Nach jeder Saison können die Teilnehmer wechseln. Es haben sich die folgenden Wechselmuster ergeben.

Dans une grande groupe des personnes trois sport différente (A, B et C) sont possibles . Après chaque saison les participants on le choix de changer le sport. On trouve les pourcentages suivantes des changements.

- vorher/avant A. nachher/après: 20% B, 10% C
- vorher/avant B. nachher/après: 10% A, 5% C
- vorher/avant C. nachher/après: 20% A, 30% B

(a) Nach einer Wechselperiode spielen 40% A, 40% B und 20% C. Bestimmen Sie die ursprüngliche Verteilung.

(b) Welche Verteilung wird sich nach vielen Jahren einstellen?

(a) Après un seul changement on trouve la distribution de 40% A, 40% B et 20% C. Déterminer la distribution originale.

(b) Quel est la distribution après beaucoup des années?

Lösung: Die Übergangsmatrix für die Sportartenwechsel ist gegeben durch

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.10 & 0.2 \\ 0.2 & 0.85 & 0.3 \\ 0.1 & 0.05 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Die Summe in jeder Spalte muss 1 je ergeben.

(a) Ist (A, B, C) die Anfangsverteilung, so gilt nach einem Wechsel

$$\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45283 \\ 0.26415 \\ 0.28302 \end{pmatrix}$$

(b) Nach vielen Jahren ist die Verteilung gegeben durch den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörende Eigenvektor $\vec{v}$. Der Eigenvektor ist so zu normieren, dass die Summe der Komponeneten 1 ergibt. Somit ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.27907 \\ 0.60465 \\ 0.11628 \end{pmatrix}$$

Somit werden nach vielen Jahren 28% die Sportart A betreiben und 60% bleiben für B und noch 12% für C .

• Aufgabe 10–3:

In einer grossen Gruppe von Personen werden drei Sportarten betrieben (A, B und C). Nach jeder Saison können die Teilnehmer wechseln. Es haben sich die folgenden Wechselmuster ergeben.

Dans une grande groupe des personnes trois sport différente (A, B et C) sont possibles . Après chaque saison les participants on le choix de changer le sport. On trouve les pourcentages suivantes des changements.

- vorher/avant A. nachher/après: 80% A, 10% B, 10% C
- vorher/avant B. nachher/après: 10% A, 50% B, 40% C
- vorher/avant C. nachher/après: 30% A, 30% B, 40% C

(a) Nach zwei Wechselperioden spielen 37.8% A, 31.2% B und 31.0% C. Bestimmen Sie die ursprüngliche Verteilung.

(b) Welche Verteilung wird sich nach vielen Jahren einstellen?

(a) Après deux changement on trouve la distribution de 37.8% A, 31.2% B et 31.0% C. Déterminer la distribution originale.

(b) Quel est la distribution après beaucoup des années?

Lösung: Die Übergangsmatrix für die Sportartenwechsel ist gegeben durch

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(a) Ist (A, B, C) die Anfangsverteilung, so gilt nach zwei Wechseln

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.8 \\ 31.2 \\ 31.0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 37.8 \\ 31.2 \\ 31.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

(b) Nach vielen Jahren ist die Verteilung gegeben durch den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektor $\vec{v}$. Der Eigenvektor ist so zu normieren, dass die Summe der Komponeneten 1 ergibt. Somit ist $\vec{v} = (0.5, 0.25, 0.25)^T$. Somit werden 50% die Sportart A betreiben und je 25% bleiben für B und C .

Ändert man die Verteilung nach zwei Jahren ab zu $(0.388\,,\, 0.302\,,\, 0.310)$, so ergibt sich eine sehr verschiedene Anfangsverteilung. Die Matrix $\mathbf{T}^2$ hat eine grosse Konditionierungszahl (≈ 150) und somit ist die Lösung von $\mathbf{T}^2\,\vec{x} = \vec{b}$ sehr empfindlich auf Änderungen im Vektor $\vec{b}$.

10.3 Geometrische Optik

In der geometrischen Optik können folgende Vektoren untersucht werden.

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand von der optischen Achse} \\ \text{Winkel bezüglich optischer Achse} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

Alle Lichtwege werden von links nach rechts durchlaufen. Als Beispiele untersuchen wir die folgenden optischen Elemente.

1. Ein freies Wegstück der Länge s
2. Eine konvexe dünne Linse (fokussierend) mit gegebener Brennweite f. Für eine konkave Linse (Streulinse) ist die Brennweite f negativ zu wählen.
3. Ein kugelförmiger Körper mit Radius R. Der Radius R ist positiv zu wählen, wenn die brechende Fläche zum eintreffenden Strahl hin gewölbt ist, als negativ, wenn sie in Strahl–Richtung konkav ist.
4. Eine zur Achse senkrechte Ebene mit verschiedenen Brechungsindices links und rechts. Dies ist eine Spezialfall ($R = \infty$) der obigen Kugeloberfläche.

Tous les rayon de lumière vont de gauche a droite. Comme exemples, examinons les éléments optiques suivants.

1. Un chemin libre de longueur s.
2. une lentille convexe avec longueur focale f. Pour une lentille concave choisir la longueur focale f négative.
3. Un solide sphérique de rayon R. Choisir R positif si la surface se boucle contre la direction du trait, R est négatif si la surface se boucle dans la direction du rayon incident.
4. Un plan orthogonal à l'axe optique avec des indices de réfractions différentes.

Es ergeben sich dann die Transfermatrizen in Tabelle 10.1. Die Abschnitte 4 und 5 in [StanMeieFalc96] erklären, wie die Matrizen der Grundelemente zu multiplizieren sind um komplexe optische Systeme zu beschreiben und wie die Einträge der System–Matrix zu interpretieren sind.

On arrive alors aux matrices de transfert de la table 10.1. Les sections 4 et 5 en [StanMeieFalc96] expliquent comment multiplier les matrices des éléments de bas pour traiter des système optiques plus compliqués et comment tirer de l'information des éléments de cette matrice du système.

10–1 Beispiel : Achsenparallele Strahlen fallen auf eine konkave dünne Linse mit Brennweite f. Nach der Linse wird noch eine Strecke der Länge s durchlaufen. Die Situation ist in Abbildung 10.3 skizziert.

Da die einfallenden Strahlen achsenparallel sind gilt dort $\alpha = 0$ und somit erhalten wir nach der Linse und der Strecke einen Abstand y_{neu} und einen Winkel α, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_{neu} \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{L}(f) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beschreibung / description	Matrix/matrice
Ausbreitung, Strecke s distance à parcourir s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
konvexe dünne Linse, Brennweite f lentille convexe, longueur focale f	$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Sphärischer Körper, Radius R Brechungsindex links n_1, rechts n_2 Solide sphérique, rayon R indices de réfraction: à gauche n_1, à droite n_2	$S(R, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Grenzebene, Index links n_1, rechts n_2 plan, indices: à gauche n_1, à droite n_2	$S_\infty(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Tabelle 10.1: Einige Transfermatrizen in der geometrischen Optik

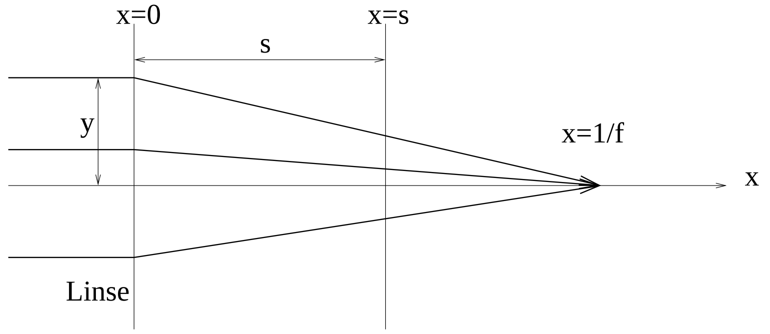


Abbildung 10.3: Strahlengang durch eine Linse

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -y/f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y - s\,y/f \\ -y/f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit gilt für den neuen Achsenabstand $y - s\,\frac{y}{f}$ und der Winkel ist gegeben durch $\frac{-y}{f}$. Setzt man $s = f$ so wird der Achsenabstand zu $y - f\,\frac{y}{f} = 0$ und somit werden die Strahlen in einem Abstand f von der Linse fokussiert. Die Abbildung 10.3 bestätigt diese Tatsache. ♢

10–2 Beispiel :

Bei einer einfachen geometrischen Anordnung sind ein 2 cm grosses Objekt und der Projektionsschirm 50 cm voneinander entfernt. Eine dünne Linse mit Brennweite f sei x cm vom Objekt entfernt. Der Lichtstrahl geht vom Objekt zum Schirm, via Linse. Das auf dem Kopf stehende Bild soll 40 cm gross werden.

Dans une situation simple on a un objet de largeur 2 cm et un écran à une distance de 50 cm . Une lentille de longueur focale f se trouve à une distance de x cm de l'objet. Des rayons de lumière passent de l'objet à l'écran par la lentille. L'image de l'objet est inversée et a une largeur de 40 cm .

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x,f)$ dieses optischen Systems auf.

(b) Erklären Sie, weshalb diese Matrix die untenstehende Form haben muss, d.h. $A = -20$ und $B = 0$.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x,f)$ de ce système optique.

(b) expliquer pourquoi la matrice $M(x,f)$ doit être de la forme donnée ci–dessous, c'est–à–dire $A = -20$ et $B = 0$.

$$M\,(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Verwenden Sie den Determinantenmultiplikationssatz und $B = 0$ um zu zeigen, dass $D = 1/A$.

(d) Bestimmen Sie $\frac{x}{f}$, mit Hilfe von $D = -1/20$. Bestimmen Sie anschliessend x, mit Hilfe von $B = 0$

(c) Utiliser le théorème des multiplication des déterminant et $B = 0$ pour montrer que $D = 1/A$.

(d) Trouver $\frac{x}{f}$ à l'aide de $D = -1/20$. Puis trouver x à l'aide de $B = 0$

Lösung:

(a) Die Matrix wird konstruiert durch

$$\begin{aligned}
\text{Gesamt} &= \text{Linse zu Schirm} \cdot \quad \text{Linse} \quad \cdot \text{Objekt zu Linse} \\
M\,(x,f) &= \quad T\,(50-x) \quad \cdot \quad L\,(f) \quad \cdot \quad T\,(x) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50-x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist die folgende Matrix zu untersuchen

$$M\,(x,f) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50-x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(b) Damit das Bild fokussiert ist muss $B = 0$ sein. Für $B \neq 0$ werden Strahlen, die vom selben Punkt ausgehen, aber nicht mit dem selben α, nicht am selben Ort auf den Schirm auftreffen. Das Bild wird gespiegelt und um den Faktor 20 vergrössert, deshalb $A = -20$.

In Formeln geschrieben

$$M \left(\begin{array}{c} 2 \\ \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -40 \\ \alpha' \end{array}\right)$$

Die erste Zeile dieses Systems lautet

$$A\,2 + B\,\alpha = -40$$

Damit dies für beliebige α richtig ist muss $A = -20$ und $B = 0$ sein.

(c) $\det T(s) = 1$ und $\det L(f) = 1$ implizieren

$$\begin{aligned} \det M\,(x, f) &= \det(T\,(50 - x))\ \det\,(L\,(f))\ \det\,(T\,(x)) = 1 \\ \det\ M\,(x, f) &= A\,D - B\,C = A\,D = 1 \\ D &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

(d) • Wegen $D = 1/A = -1/20$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20} &= 1 - \frac{x}{f} \\ \frac{x}{f} &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

• Wegen $B = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x + (50 - x)\ (1 - \frac{x}{f}) \\ 0 &= x - (50 - x)\ \frac{1}{20} \\ 20\,x &= 50 - x \\ x &= \frac{50}{21} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

10–3 Beispiel : This example is taken from [GerrBurc75, p 43].
The left end of a long plastic rod of refraction index 1.56 is ground and polished to a convex (outward) spherical surface of radius 2.8 cm . An object 2 cm tall is located in the air and on the axis at a distance of of 15 cm from the vertex. Find position x and size of the image inside the rod. The situation is shown in figure 10.4

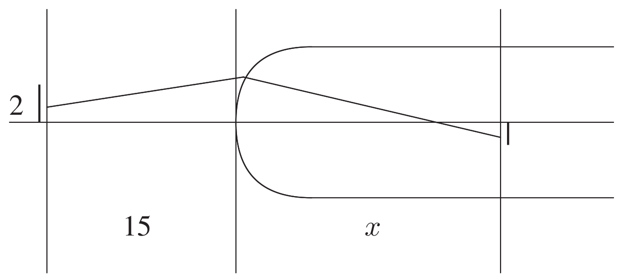


Abbildung 10.4: spherical rod used as a lense

Lösung: As the ray of light travels from left to right is passes three different elements:

1. a distance of 15 cm
2. the curved surface, determined by the rod
3. a distance of x cm

Thus the first matrix to be multiplied is the transfer by the distance 15 cm. This leads to the following calculations. It might help to read the operations from right to left since the vector is multiplied by the matrices in that order. This is also the order in which the ray passes the optic elements.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{image} & & \text{distance } x & & \text{spherical surface} & & \text{distance 15} & & \text{original} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & T(x) & \cdot & S(R, n_i, n_a) & \cdot & T(15) & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_a - n_i}{n_i\,R} & \frac{n_a}{n_i} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.56}{1.56\cdot 2.8} & \frac{1}{1.56} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{array}$$

By multiplying the matrices we obtain

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - 0.128\,x & 15 - 1.282\,x \\ -0.128 & -1.128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 - 0.128\,x)\, y_{init} + (15 - 1.282\,x)\, \alpha_{init} \\ -0.128\, y_{init} - 1.128\, \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If the image has to show at a distance x from the spherical surface, then all rays leaving at height y_{init} have to arrive at the same level y_{end}, independent on the initial angle α_{init}. This leads to the condition, that the number in the top right corner of the matrix has to vanish, i.e.

$$15 - 1.282\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 11.7$$

Thus the image will show at a distance of 11.7 cm. To find the size of the image we have to compute the result if we set $y_{init} = 2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.128 & -1.282 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.256 - 1.282\,\alpha_{init} \end{pmatrix}$$

Thus the image has size 1 cm and is inverted.

The calculation of this exercise can be done with *Mathematica*.

Mathematica

```
T[x_]:= {{1,x},{0,1}}
R[r_,ni_,na_] :={{1,0},{(na-ni)/(ni*r),na/ni}}
L[f_] := {{1,0},{-1/f,1}}
res1=T[x].R[2.8,1.56,1].T[15] //Simplify;
Solve[res1[[1,2]]==0]
.
{{x -> 11.7}}
```

◊

10–4 Beispiel :

Parallele Lichtstrahlen treffen auf eine Kugel mit Radius $r = 1$ cm. Das Material hat einen Brechungsindex $n = 1.4$. Alle Strahlen sind nahe der Kugelachse.

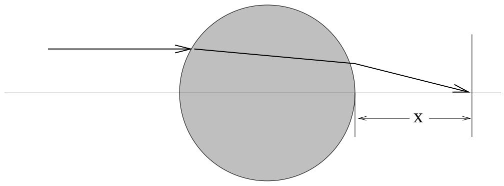
(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x)$ dieses optischen Systems auf.

(b) In welchem Abstand x von der Kugel befindet sich der Brennpunkt?

Des rayons lumineuse paralèlles passent par une spère (rayon $r = 1$ cm) dont l'indic de réfraction est $n = 1.4$. Tous les rayons sont proche de l'axe de la spère.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x)$ de ce système optique.

(b) A quelle distance x de la boule se trouve le foyer?



Lösung: Der Lichtstrahl durchläuft nacheinander

1. die erste Kugelfläche mit $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1.4$, $R = 1$
2. eine freie Wegstrecke der Länge 2 cm.
3. die zweite Kugelfläche mit $n_1 = n = 1.4$, $n_2 = 1$, $R = -1$
4. eine freie Wegstrecke der Länge x cm.

Dies kann durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen kombiniert werden.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Gesamt} & & \text{Weg } x & & \text{zweite Fläche} & & \text{Kugel} & & \text{erste Fläche} \\
M(x) & = & T(x) & \cdot & S(-1,1,n) & \cdot & T(2) & \cdot & S(1,n,1) \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-1} & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n}-1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 0.429 & 1.426 \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

(a) Man erhält

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = M(x) \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

(b) Damit der Strahl fokussiert muss der Eintrag oben links in der Matrix Null sein. Nur dann hängt der y–Wert des Bildstrahls nicht vom y–Wert des Eingangsstrahls ab. Da die Eingansstrahlen parallel zur Achse sind ist $\alpha_{init} = 0$. Deshalb ist der Eintrag oben rechts in M irrelevant. Somit die folgende Beziehung gelten:

$$0.429 - 0.571\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.75 \text{ cm}$$

Diese Beispiel wurde [GerrBurc75] entnommen. ♢

10.4 Spannungen, Elastizität

Teile dieses Abschnittes wurden den Büchlein [Demm75, p. 90] und [ChouPaga67] entnommen.

10.4.1 Definition von ebenen Spannungen und Grundgleichungen

Auf einen elastischen Körper wirken Kräfte die alle parallel zur xy–Ebene sind. Die Kontur des Körpers ist unabhängig von z. Deshalb untersuchen wir auch im Inneren des Körpers nur Spannungen parallel zur xy–Ebene. Nun schneiden wir (in Gedanken) aus dem Körper ein kleines Rechteck heraus und untersuchen die auf den Rand der Quaders der Breite Δx, Tiefe Δy und Höhe Δz wirken. Die gemessenen Kräfte werden durch die Flächen auf denen sie wirken dividiert. Dadurch erhält man die **Spannungen**.

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Senkrecht zu den Trennflächen erhält man die **Normalspannungen** σ und parallel zu den Flächen erhält man die **Tangentialspannungen** τ. Wir gehen davon aus, dass der Quader so klein ist, dass die Spannungen als konstant betrachtet werden können. Die Pfeile in der Abbildung 10.5 zeigen die positiven Richtungen an. Das Rechteck hat eine Breite von Δx und eine Höhe Δy. Die Dicke in die nicht sichtbare z–Richtung sei Δz. Nun gehen wir davon aus, dass der Körper in Ruhe ist. Somit muss die Summe aller wirkenden Kräfte und Momente verschwinden. Das wird auf einige Bedingungen an die Spannungen führen.

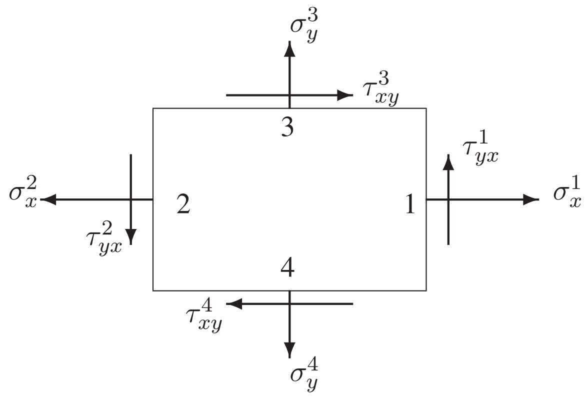


Abbildung 10.5: Spannungen in der Ebene, erster Versuch

- Kräfte in x–Richtung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_x^1\,\Delta y\,\Delta z - \sigma_x^2\,\Delta y\,\Delta z + \tau_{xy}^3\,\Delta x\,\Delta z - \tau_{xy}^4\,\Delta x\,\Delta z \\ 0 &= (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)\,\Delta y + (\tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4)\,\Delta x \end{aligned}$$

  In der obigen Gleichung konnten wir problemlos durch Δz dividieren, da dieser Term nicht Null ist. All obigen Überlegungen können wir auch mit einem Rechteck der Breite Δx und der neuen Höhe $2\Delta y$ durchführen. Im Schlussresultat kann einfach Δy durch $2\Delta y$ ersetzt werden, d.h.

$$0 = (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)\,2\,\Delta y + (\tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4)\,\Delta x$$

  Nun können die beiden Gleichungen geeignet kombiniert werden (Addition, Subtraktion) und man liest sofort ab, dass

$$\sigma_x^1 - \sigma_x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4 = 0$$

- Kräfte in y–Richtung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_y^3\,\Delta x\,\Delta z - \sigma_y^4\,\Delta x\,\Delta z + \tau_{yx}^1\,\Delta y\,\Delta z - \tau_{yx}^2\,\Delta y\,\Delta z \\ 0 &= (\sigma_y^3 - \sigma_y^4)\,\Delta x + (\tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2)\,\Delta y \end{aligned}$$

  In der obigen Gleichung konnten wir problemlos durch Δz dividieren, da dieser Term nicht Null ist. Auch hier können wir Δy durch $2\Delta y$ ersetzt werden, d.h.

$$0 = (\sigma_y^3 - \sigma_y^4)\,\Delta x + (\tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2)\,\Delta y$$

  Nun können die beiden Gleichungen geeignet kombiniert werden (Addition, Subtraktion) und man liest sofort ab, dass

$$\sigma_y^3 - \sigma_y^4 = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2 = 0$$

- Somit sind die Normal- und Tangentialspannungen an gegenüberliegenden Seiten je gleich und wir können auf die Numerierung der Spannungen verzichten.

- Moment bezüglich des Mittelpunktes:
  Das Moment der Normalkräfte ist Null und wir müssen nur die Tangentialspannungen berücksichtigen. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Delta x}{2}\,\tau_{yx}^1\,\Delta\,y\,\Delta z + \frac{\Delta x}{2}\,\tau_{yx}^3\,\Delta\,y\,\Delta z - \frac{\Delta y}{2}\,\tau_{xy}^1\,\Delta\,x\,\Delta z + \frac{\Delta y}{2}\,\tau_{xy}^3\,\Delta\,x\,\Delta z \\ 0 &= \tau_{yx} - \tau_{xy} \end{aligned}$$

  Für die letzte Umformung haben wir die obigen Resultate (z.B. $\tau_{yx}^1 = \tau_{yx}^2$) bereits verwendet. Somit haben alle Tangentialspannungen den selben Betrag und unterscheiden sich nur in der Richtung.

Somit können wir die Bezeichnungen in der Abbildung 10.5 vereinfachen und erhalten die neue Abbildung 10.6.

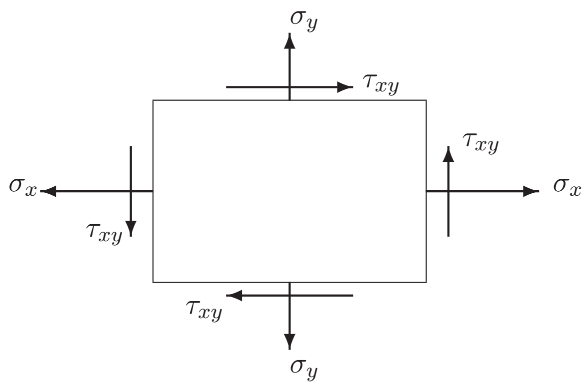


Abbildung 10.6: Spannungen in der Ebene

10.4.2 Ebene Spannungszustände, Hauptspannungsrichtungen

Nun untersuchen wir Normal- und Tangential–Spannung entlang einer geneigten Schnittfläche mit dem normierten Normalenvektor $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\ \alpha)^T$. Die Situation ist in Abbildung 10.7 skizziert.

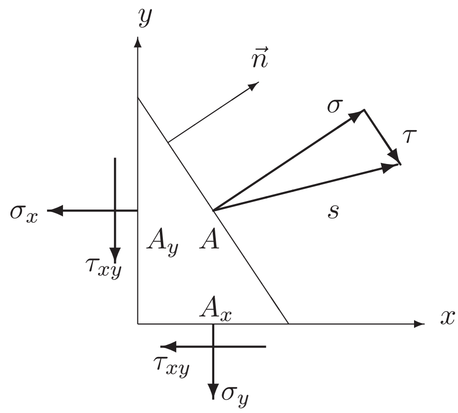


Abbildung 10.7: Spannungen entlang eines schiefen Schnittes

In Abbildung 10.7 gilt

$$A_x = A\ \sin\ \alpha \quad \text{und} \quad A_y = A\ \cos\ \alpha$$

Da sich die beiden Komponenten der externen Spannungskräfte auch hier aufheben müssen gilt für den Spannungsvektor $\vec{s} = (s_x, s_y)^T$ auf dem schiefen Schnitt

$$\begin{aligned} s_x\ A = \sigma_x\ A_y + \tau_{xy}\ A_x \quad &\Longrightarrow \quad s_x = \sigma_x\ \cos\ \alpha + \tau_{xy}\ \sin\ \alpha \\ s_y\ A = \sigma_y\ A_x + \tau_{xy}\ A_y \quad &\Longrightarrow \quad s_y = \tau_{xy}\ \cos\ \alpha + \sigma_y\ \sin\ \alpha \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Matrizen kann man diese beiden Gleichungen umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\ \alpha \\ \sin\ \alpha \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$\vec{s} = S\ \vec{n}$$

wobei die symmetrische Spannungsmatrix gegeben ist durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Der Spannungsvektor $\vec{s}$ kann zerlegt werden in einen Anteil reine Normalspannung der Stärke τ und einen Anteil Tangentialspannung der Stärke σ. Da sich die Komponente eines Vektors in eine gegebene Richtung mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen lässt gilt

$$\begin{aligned}\sigma &= \langle \vec{n}\,,\,\vec{s}\rangle = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = (\cos\,\alpha,\sin\,\alpha)\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\ \tau &= (-\sin\,\alpha,\cos\,\alpha)\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das Vorzeichen von τ und σ hängt von den gewählten positiven Richtungen ab.

10–5 Beispiel : Gegeben sind die Spannungen $\sigma_x = 500$ und $\sigma_y = 300$. Es gilt $\tau_{xy} = 0$. Gesucht sind die Spannungen in den um 60° gedrehten Ebenen.

Lösung: Die Lösung sollte durch eine passende Figur illustriert werden.

- Der erste Normalenvektor $\vec{n}$ bildet einen Winkel von 60° mit der x–Achse. Für den Spannungsvektor $\vec{s}$ gilt

  $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}s_x\\ s_y\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}500 & 0\\ 0 & 300\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\\ 150\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Die Normalspannung ist gegeben durch

  $$\sigma_1 = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix}250\\ 150\sqrt{3}\end{pmatrix} = 125 + \frac{3}{2}\,150 = 350$$

  Der Betrag der Tangentialspannung ist

  $$|\tau_1| = \left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}250\\ 150\sqrt{3}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}\;|-125+75| = 50\sqrt{3} \approx 86.6$$

- Der zweite Normalenvektor $\vec{n}$ bildet einen Winkel von -30° mit der x–Achse. Für den Spannungsvektor $\vec{s}$ gilt

  $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}s_x\\ s_y\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}500 & 0\\ 0 & 300\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Die Normalspannung ist gegeben durch

  $$\sigma_2 = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix}250\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix} = 450$$

  Der Betrag der Tangentialspannung ist

  $$|\tau_2| = \left|\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix}250\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix}\right| = 50\sqrt{3}$$

- Wie zu erwarten war gilt $|\tau_1| = |\tau_2|$, d.h. die beiden Tangentialspannungen sind gleich gross. Die Normalspannungen sind $\sigma_1 = 350$ und $\sigma_2 = 450$.

$\diamondsuit$

Eine zentrale Fragestellung bei der Analyse des Spannungszustandes ist die folgende:

> Gibt es eine schräge Fläche, die schubspannungsfrei ist, auf der also der gesamte Spannungsvektor $\vec{s}$ senkrecht steht auf der Fläche? Wenn ja, wie gross ist dann diese **Hauptspannung** σ, und wie ist diese Fläche orientiert.

Die lineare Algebra kann die obigen Fragen beantworten. Der Spannungsvektor $\vec{s}$ ist genau dann senkrecht auf der Ebene, wenn er ein Vielfaches des normierten Normalenvektors $\vec{n}$ ist. Der Faktor entspricht dann der Hauptspannung, d.h. $\vec{s} = \sigma\,\vec{n}$. Setzt man dies in der obigen Formel ein so ergibt sich mit der gegebenen Spannungsmatrix S die Gleichung

$$S\,\vec{n} = \sigma\,\vec{n} \quad \text{oder auch} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

für den Faktor σ und den Vektor $\vec{n}$. Dies ist ein Eigenwert–Problem. Somit gilt in der Sprache der linearen Algebra

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Eigenwert der Matrix } S \\ \vec{n} &= \text{Eigenvektor der Matrix } S \end{aligned}$$

Die Eigenwerte (Hauptspannungen) sind gegeben als Lösungen einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte σ.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 - \sigma\,(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\,\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

Die Lösungen sind

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\,\sigma_x\,\sigma_y + 4\,\tau_{xy}^2}\right) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen lassen sich berechnen mit den Methoden für Eigenvektoren. Da die Spannungsmatrix S symmetrisch ist, gibt es immer zwei Hauptspannungen und die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen sind senkrecht zueinander.

Aufgrund der obigen Gleichung gilt auch

$$\left(\sigma_{1,2} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Nun untersuchen wir einen Kreis in einer $\sigma\tau$–Ebene mit Mittelpunkt bei $(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\,,\,0)$ und Radius R. diese Gleichung lautet

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

In der obigen Gleichungen kann man ablesen, dass die Punkte

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix}$$

alle auf diesem **Spannungskreis von Mohr** liegen. Dieser Kreis ist in Abbildung 10.8 gezeigt. Im Beweis des Satzes 10–22 (Seite 280) sehen wir, dass die Richtung des ersten Eigenvektors der Matrix **S** beschrieben ist durch den Winkel ϕ, wobei

$$\tan{(2\phi)} = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Somit kann auch der Winkel ϕ (resp. $2\,\phi$) im Mohr'schen Spannungskreis abgelesen werden.

Sind die Werte von σ_x, σ_y und τ_{xy} bekannt so kann er leicht konstruiert werden:

- Zeichne die Punkte (σ_x, τ_{xy}) und $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ ein.
- Verbinde die Punkte durch eine Gerade, der Schnittpunkt mit der σ–Achse ergibt den Kreismittelpunkt.
- Zeichne den Kreis und die Schnittpunkte mit der σ–Achse ergeben die Hauptspannungen σ_1 und σ_2.

Nun können auch Normal- und Tangential–Spannungen für beliebige Richtungen am Kreis abgelesen werden. Um diese Spannungen in Richtung mit Abweichung ψ von der Hauptspannungsrichtung zu bestimmen, muss eine Gerade mit Winkel $2\,\psi$ durch den Kreismittelpunkt gezeichnet werden. An den Schnittpunkten mit dem Kreis können die Werte abgelesen werden.

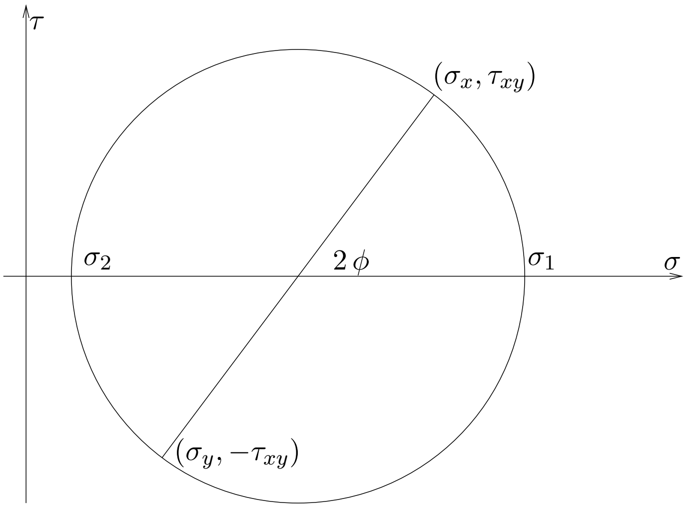


Abbildung 10.8: Spannungskreis von Mohr

10.4.3 Räumliche Spannungszustände

Die obigen Überlegungen können auch für die z–Komponenten durchgeführt werden. Wir erhalten die Tabelle 10.2 von 6 Spannungen, die den Spannungszustand in einem Punkt (sehr kleiner Quader) vollständig beschrieben. Die Abbildung 10.9 illustriert die verschiedenen Normal- und Tangentialspannungen. Die gezeichneten Vektoren geben die positiven Richtungen an. In Abbildung 10.9 sind neun Grössen eingezeichnet, aber einige der Tangentialspannungen sind gleich gross. So ist zum Beispiel $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wäre dies nicht der Fall würden sich die Momente bezüglich einer Achse parallel zu z–Achse durch den Mittelpunkt nicht aufheben.

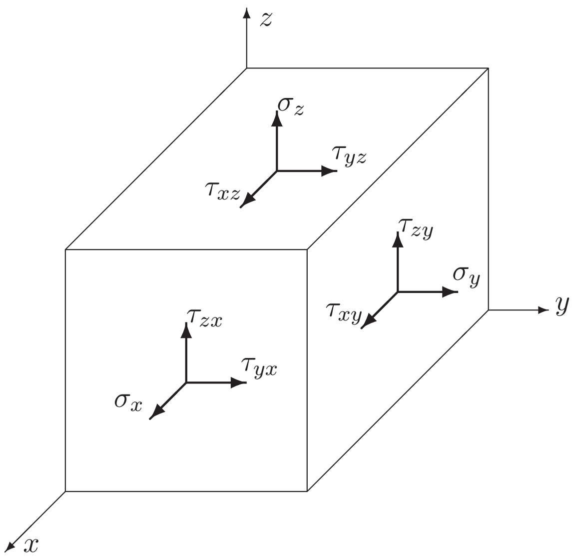


Abbildung 10.9: Spannungen im Raum

Die symmetrische Spannungsmatrix S ist hier gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Notation	Bedeutung
σ_x	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung
σ_y	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung
σ_z	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Tangentialspannung in y-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung Tangentialspannung in x-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$	Tangentialspannung in z-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung Tangentialspannung in x-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$	Tangentialspannung in z-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung Tangentialspannung in y-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung

Tabelle 10.2: Normal- und Tangential–Spannungen im Raum

und der Spannungsvektor $\vec{s}$ an einer Schnittebene mit normiertem Normalenvektor $\vec{n}$ ist auch hier gegeben durch

$$\vec{s} = S\,\vec{n}$$

Die symmetrische Matrix S hat drei reelle Eigenwerte $\sigma_{1,2,3}$, Lösungen der kubischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_3) = \det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

und zugehörige Eigenvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Diese Eigenvektoren sind paarweise senkrecht. Sind die Flächen eines Quaders je senkrecht auf diesen Eigenvektoren, so wirken keine tangentialen Schubspannungen, es gibt nur Normalspannungen.

10.4.4 Beispiele

10–6 Beispiel : Bei einem ebenen Spannungsproblem werden nur Tangentialspannungen τ_{xy} festgestellt. Zu bestimmen sind die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen

Lösung: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

und die Hauptspannungen somit als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix} -\sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 - \tau_{yx}^2 = 0$$

Somit sind die beiden Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xy}$$

Die erste Hauptspannungsrichtung ist gegeben durch die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(S - \sigma_1\,\mathbb{I}_2)\,\vec{n} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} -\tau_{xy}\,n_x + \tau_{xy}\,n_y &= 0 \\ \tau_{xy}\,n_x - \tau_{xy}\,n_y &= 0 \end{aligned}$$

Eine normierte Lösung ist

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die beiden Hauptspannungsrichtungen $45°$ und $-45°$. Die Normalspannung in der $45°$–Richtung ist gegeben durch τ_{xy} und in der $-45°$–Richtung durch $-\tau_{xy}$. ♢

10–7 Beispiel : Bei einem ebenen Spannungsproblem wirken in den Achsenrichtungen nur Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, d.h. $\tau_{xy} = 0$. Zu zeigen ist, dass dann in jeder Richtung nur Normalspannungen wirken.

Lösung: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Der Spannungsvektor in Richtung $\vec{n}$ ist also

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \vec{n} = \sigma\, \vec{n}$$

Somit zeigt der Spannungsvektor $\vec{s}$ in die Richtung des Normalenvektors der zu untersuchenden Ebene, d.h. es liegt eine reine Normalbelastung vor. ♢

10–8 Beispiel : Bei einem ebenen Spannungsproblem ist $\sigma_x = -800$, $\sigma_y = 300$ und $\tau_{xy} = -400$. Zu bestimmen sind die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen

Lösung: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} -800 & -400 \\ -400 & 300 \end{bmatrix}$$

und die Hauptspannungen somit als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\, \mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} -800 - \sigma & -400 \\ -400 & 300 - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 + 500\,\sigma - 400'000 = 0$$

Somit sind die beiden Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = -250 \pm 680 = \begin{cases} 430 \\ -930 \end{cases}$$

Die erste Hauptspannungsrichtung ist gegeben durch die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(S - 430\,\mathbb{I}_2)\,\vec{n} = \begin{bmatrix} -1230 & -400 \\ -400 & -130 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} -1230\, n_x - 400\, n_y &= 0 \\ -400\, n_x - 130\, n_y &= 0 \end{aligned}$$

Somit muss $n_y = \frac{40}{13}\, n_x \approx 3\, n_x$ sein. Der Winkel kann bestimmt werden durch $\arctan \frac{40}{13} \approx 1.26 \approx 72°$. In diese Richtung herrscht eine reine Zugspannung von 430 Einheiten ($\left[\frac{N}{m^2}\right]$). In der dazu senkrechten Richtung eine reine Druckbelastung von 930 Einheiten. ♢

10–9 Beispiel : Bei einem räumlichen Spannungszustand ist $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ und $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau$. Gesucht sind die Hauptspannungen und ihre Richtung. Für die Konvention der Richtungen der Tangentialspannungen sollten Sie Abbildung 10.9 verwenden.

Lösung: Die Spannungsmatrix ist

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Zu finden sind die drei Eigenwerte und die Eigenvektoren

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_3) = \det \begin{bmatrix} -\sigma & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma \end{bmatrix}$$

Das führt auf die kubische Gleichung

$$-\sigma^3 + 3\,\tau^2\,\sigma + 2\,\tau^3 = 0$$

Die erste Lösung $\sigma_1 = -\tau$ findet man durch Raten. Division des Polynoms durch $\sigma + \tau$ ergibt die quadratische Gleichung

$$\sigma^2 - \tau\,\sigma - 2\tau^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $\sigma_2 = -\tau$ und $\sigma_3 = 2\tau$. Der Eigenvektor des grössten Eigenwertes σ_3 ergibt sich als Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -2\,\tau & \tau & \tau \\ \tau & -2\,\tau & \tau \\ \tau & \tau & -2\,\tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der normierten Lösung

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit wirkt in die Richtung der Diagonalen des Einheitswürfels eine Spannung von $2\,\tau$ (Zug). In den dazu senkrechten Richtung wirkt eine Normalspannung von $-\tau$ (Druck). $\diamondsuit$

Literaturverzeichnis

[AntoRorr77] H. Anton and C. Rorres. *Applications of Linear Algebra*. John Wiley and Sons, Inc., 3rd edition, 1977.

[AntoRorr91] H. Anton and C. Rorres. *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. John Wiley and Sons, Inc., 1991.

[Bach71] H. Bachmann. *Vektorgeometrie*. Sabe, Velagsinstitut für Lehrmittel, 1971.

[ChouPaga67] P. C. Chou and N. J. Pagano. *Elasticity, Tensors, dyadic and engineering Approaches*. D Van Nostrand Company, 1967. reprinted by Dover 1992.

[Crai89] J. J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addision Wesley, second edition, 1989.

[Demm75] G. Demmig. *Matrizen und Determinanten*. Demmig Verlag, 1975.

[GerrBurc75] A. Gerrard and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. John Wiley & Sons, 1975. Dover edition 1994.

[LandHest92] E. M. Landesman and M. R. Hestenes. *Linear Algebra for Mathematics, Science and Engineering*. Prentice Hall, 1992.

[Pres86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (in PASCAL)*. Cambridge University Press, 1986.

[Pres92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.

[SchnBark68] H. Schneider and G. P. Barker. *Matrices and Linear Algebra*. Holt, Rinehard and Winston, 1968.

[Schw75] W. Schwarz. *Brücke zur Höheren Mathematik*. Verlag Vieweg, Braunschweig, 1975.

[Solo90] D. Solow. *How to Read and Do Proofs*. John Wiley & Sons, New York, 1990.

[StanMeieFalc96] S. Stankowski, C. Meier, and L. Falco. Matrix–Optik im Physik–Unterricht. Jahresbericht 1995/96 der Ingenieurschule Biel, 1996.

[Swok92] E. W. Swokowski. *Calculus, late Trigonometry Version*. PWS–Kent Publishing Company, Boston, fifth edition, 1992.

[Twom77] S. Twomey. *Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements*. Number 3 in Developments in Geomathematics. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. republished by Dover 1996.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis