

Fouriermethoden

Andreas Stahel

5. Juli 2021



©Andreas Stahel, 2000

Octave at BFH-TI Biel by Andreas Stahel is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

You are free: to copy, distribute, transmit the work, to adapt the work and to make commercial use of the work. Under the following conditions: You must attribute the work to the original author (but not in any way that suggests that the author endorses you or your use of the work). Attribute this work as follows:

Andreas Stahel: Fourier Methods, BFH-TI, Biel, Lecture Notes.

If you alter, transform, or build upon this work, you may distribute the resulting work only under the same or similar license to this one.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
1 Fourier Reihen	1
1.1 Einführung und illustrative Beispiele	3
1.1.1 Lösung von linearen Problemen durch Superposition	3
1.1.2 Ein Tiefpass–Filter	5
1.1.3 Ein statisches Wärmeleitungsproblem	8
1.1.4 Verhalten einer schwingende Saite	10
1.1.5 Bildverarbeitung	12
1.1.6 Fraunhofer’sche Beugungsmuster	16
1.2 Skalarprodukt, orthogonale Funktionen, Korrelation und Projektion	20
1.2.1 Skalarprodukte von Vektoren und Funktionen	20
1.2.2 Korrelation von Funktionen und Winkel zwischen Vektoren	21
1.2.3 Orthonormale Vektoren und Funktionen, Projektionen	26
1.2.4 Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen	31
1.3 Fourierreihen von 2π –periodischen Funktionen	32
1.3.1 Definition der Fourierreihe	32
1.3.2 Beste \mathcal{L}_2 –Approximation	33
1.3.3 Fourier–Reihe einer 2π –periodischen Funktion, periodische Fortsetzung	35
1.3.4 Beispiele	35
1.3.5 Konvergenz	38
1.3.6 Integrieren und Ableiten von Fourierreihen	41
1.3.7 Gerade und ungerade Erweiterungen, Sinus– und Cosinus–Reihen	43
1.3.8 Konvergenz im quadratischen Mittel	44
1.4 Komplexe Fourierreihen	45
1.5 Fourierreihen von T –periodischen Funktionen	49
1.6 Eigenschaften von Fourierreihen	50
1.6.1 Vergleich von Fourierreihen und Laplacetransformation	51
1.6.2 Linearität	51
1.6.3 Invertierbarkeit	51
1.6.4 Translation (Phasenverschiebung)	51
1.6.5 Beste \mathcal{L}_2 –Approximation	53
1.6.6 Konvergenzverhalten	54
1.6.7 Rechnen mit Fourierreihen	54
1.7 Amplitudenspektrum, Leistungsspektrum	54
1.8 Faltung	55
1.8.1 Definition und Illustration der Faltung	55
1.8.2 Faltung von 2π –periodischen Funktionen und Vektoren	57
1.8.3 Faltungssatz	59
1.8.4 Anwendungen der Faltung	60
1.9 Diskrete Fouriertransformation DFT und Fast Fourier Transform FFT	65

1.9.1 Schnelle Fouriertransformation, FFT	69
1.9.2 Amplitude bei einer bestimmten Frequenz, Goertzel Filter	71
1.9.3 FFT mit Octave oder MATLAB	73
1.9.4 Aliasing	75
1.10 Beispiele und Anwendungen	77
1.10.1 Beispiele von diskreten Fouriersummen	77
1.10.2 Trigonometrische Interpolation durch Zero-Padding	85
1.10.3 Kurbeltrieb	87
1.10.4 Klirrfaktor	90
1.10.5 DFT in two dimensions and a low pass image filter	92
1.11 Fourier Series and Boundary Value Problems	95
1.11.1 Fourier Sin Series of function $f(x) = 1$	95
1.11.2 1D Static Heat Equation	95
1.11.3 1D Dynamic Heat Equation	96
1.11.4 2D Static Heat Equation	97
1.11.5 2D Dynamic Heat Equation	99
1.11.6 Vibrating String	100
1.11.7 Vibrating Membrane	101
1.12 Aufgaben	103
1.12.1 Lösungen zu einigen Aufgaben	132
1.13 Zusammenfassung	174
2 Fouriertransformation	175
2.1 Von Fourier-Reihen zu Fourier-Integralen	175
2.2 Definition und Eigenschaften der Fouriertransformation	176
2.2.1 Definition	176
2.2.2 Konvergenz	177
2.2.3 Cosinus und Sinus-Transformation	179
2.2.4 Elementare Eigenschaften	182
2.2.5 Faltung	183
2.3 Delta-Funktionen und Fourierreihen	185
2.4 Applications of the Fourier Transformation	187
2.4.1 1D Dynamic Heat Equation on a Long Beam	187
2.4.2 Heat Waves in Solids, Caused by Surface Temperature	189
2.4.3 Heat Waves in Solids Caused by an Energy Flow	192
2.4.4 Solving a Wave Equation	194
2.4.5 Fraunhofer Diffraction	196
2.5 Aufgaben	198
2.5.1 Lösungen zu einigen Aufgaben	203
2.6 Zusammenfassung	214
Literaturverzeichnis	215
Abbildungsverzeichnis	217
Tabellenverzeichnis	218

Kapitel 1

Fourier Reihen

Im Buch [Stew13] von Ian Stewart findet man eine exzellente Charakterisierung der Fourier Transformation.

- **What does it say?**

Any pattern in space and time can be thought of as a superposition of sinusoidal patterns with different frequencies.

- **Why is it that important?**

The component frequencies can be used to analyze the pattern, sort them in order, extract important features, and remove random noise.

- **What did it lead to?**

Fourier's technique is very widely used, for example in image processing and quantum mechanics. It is used to find the structure of large biological molecules like DNA, to compress image data in digital photography, to clean up old or damaged audio records and to analyze earthquakes. Modern variants are used to store fingerprint data efficiently and to improve medical scanners.

Dieses Kapitel ist ziemlich lang. Deshalb ist es besonders wichtig die Übersicht zu behalten. Um Ihnen diese zu erleichtern sei hier der Inhalt der einzelnen Abschnitte kurz beschrieben.

1. Einführende Beispiele

Ohne Kenntnisse über Fourierreihen werden hier einige Anwendungen besprochen. Sie sollten es erleichtern den erheblichen Aufwand der späteren Abschnitte zu rechtfertigen.

2. Skalarprodukt, orthogonale Funktionen und Korrelation

Das bekannte Skalarprodukt von Vektoren wird analog implementiert für Funktionen. Zur Illustration wird die Korrelation von Funktionen und eine praktische Anwendung vorgestellt.

3. Fourierreihen von 2π -periodischen Funktionen

In diesem Abschnitt wird die grundlegende Theorie der Fourierreihen aufgebaut. Dies ist das Kernstück des Kapitels. Neben der Grundidee der Approximation durch trigonometrische Funktionen werden die Begriffe L_2 -Approximation, gerade und ungerade Erweiterung und Konvergenz von Fourierreihen eingeführt. Auch das Phänomen von Gibbs vor gestellt.

4. komplexe Fourierreihen

Die komplexe Notation führt zu einfacheren Formeln und ist deshalb in der Regel vorzuziehen.

5. Fourierreihen von T -periodischen Funktionen

Die obige Einschränkung auf 2π -periodische Funktionen ist nicht wesentlich und kann leicht eliminiert werden. Für Anwendungen sind die Formeln auf Seite 49 wichtig. Sie bilden die Basis für alle Rechnungen mit Fourierreihen.

6. Eigenschaften von Fourierreihen

Die wesentlichsten Eigenschaften sind in diesem Abschnitt zusammengestellt.

7. Amplitudenspektrum und Leistungsspektrum

Der Begriff wird eingeführt und an wenigen Beispielen erläutert.

8. Faltung

Die Faltung von Funktionen auf der reellen Achse, periodischen Funktionen und Vektoren wird definiert. Als Einleitung wird eine Anwendung aus der Messtechnik vorgestellt. Der wichtigste Satz ist der Faltungssatz. Er hat viele Anwendungen, einigen davon werden kurz vorgestellt.

9. Diskrete Fourier Transformation (DFT), FFT

Zuerst wird gezeigt, dass das Berechnen von Fourierkoeffizienten auch als Matrizenmultiplikation aufgefasst werden kann. Anschliessend wird die Grundlage des FFT–Algorithmus (**Fast Fourier Transform**) vorgestellt, ohne auf eine konkrete Implementierung einzugehen. Auf die Probleme Aliasing und Abtastfrequenz wird sorgfältig eingegangen.

10. Abschliessend werden einige Beispiele und Anwendungen durchgerechnet und numerische Probleme illustriert. Es wird gezeigt wie MATLAB und Octave FFT Berechnungen durchführen.

11. Das Kapitel wird abgeschlossen durch einige Aufgaben.

Das Büchlein [[Jame02](#)] über Fourier Methoden gibt einige Resultate und Anwendungen. In [[Stew87](#)] sind einige Anwendungen von Fourier in der Optik dargestellt.

1.1 Einführung und illustrative Beispiele

Mit Hilfe der Fourier-Reihen kann eine beliebige, aber periodische Funktion als Summe von trigonometrischen Funktionen geschrieben werden. Im Verlaufe dieses Kapitels werden Sie sehen wie diese Zerlegung erzeugt werden kann. Um klarer aufzuzeigen, dass eine solche Zerlegung sehr nützlich sein kann geben wir zuerst wenige Anwendungsbeispiele. Der grundlegende Aufbau der drei Beispiele ist derselbe und Sie sollten nicht versuchen die (teilweise nicht vorhandenen) Detailrechnungen nachzuvollziehen, sondern das grundsätzliche Vorgehen im Auge behalten. Details werden später behandelt.

1. Das System für eine einfache (trigonometrische) Funktion untersuchen.
2. Mit Hilfe der Linearität des Systems und dem Superpositionsprinzip kennt man auch das Verhalten für Linearkombinationen der obigen einfachen Funktionen.
3. Mit Hilfe von Fourier-Reihen kann eine „beliebige“ periodische Funktion als Reihe von einfachen Funktionen geschrieben werden. Da man nur endlich viele Terme der Reihe verwendet muss man sich mit einer Approximation zufrieden geben.

Als Konsequenz der untenstehenden Beispiele werden sich die folgenden mathematischen Fragen stellen:

- Kann „jede“ Funktion als Summe (Reihe) von trigonometrischen Funktionen geschrieben werden?
- Kann „jede“ Funktion als Summe (Reihe) von komplexen Exponentialfunktionen geschrieben werden?
- Wie sind die Koeffizienten der obigen Darstellungen zu finden?
- Wie „gut“ konvergieren die Fourierapproximationen gegen die richtige Funktion? Wie gross sind die Fehler?
- Gibt es ein effizientes Verfahren diese Koeffizienten zu berechnen?

Die Antworten auf diese Fragen werden in diesem Kapitel gegeben.

1.1.1 Lösung von linearen Problemen durch Superposition

In den folgenden Beispielen wird immer wieder **Superposition** verwendet um Berechnungen auszuführen. Dieses Verfahren kann oft bei linearen Problemen verwendet werden. Die Grundidee ist einfach:

- Löse das Problem für „einfache“ Funktionen.
- Schreibe die „komplizierte“ Funktion als Linearkombination von „einfachen“ Funktionen.
- Schreibe die Lösung des „komplizierten“ Problems als Linearkombination der „einfachen“ Lösungen.

Zur Illustration der linearen Superposition untersuchen wir ein Beispiel aus der linearen Algebra. Untersucht wird das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

1-1 Beispiel : Superposition bei linearen Gleichungssystemen

Für einen gegebenen Vektor \vec{b} soll das inhomogene, lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ gelöst werden.

- Die Lösungen von einigen homogenen System seien bekannt, d.h. \vec{v}_j löst $\mathbf{A}\vec{v}_j = \vec{e}_j$. Als Beispiel sei hier \vec{v}_2 illustriert:

$$\mathbf{A}\vec{v}_2 = \vec{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \dots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ v_{3,2} \\ v_{4,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der Vektor \vec{b} wird als Linearkombination der Basisvektoren aufgefasst, d.h.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_j \vec{e}_j$$

- Nun kann die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ leicht angegeben werden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= b_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ v_{4,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ v_{3,2} \\ v_{4,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \\ v_{3,3} \\ v_{4,3} \\ \vdots \\ v_{n,3} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} v_{1,n} \\ v_{2,n} \\ v_{3,n} \\ v_{4,n} \\ \vdots \\ v_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n b_j \vec{v}_j \end{aligned}$$

Hier haben wir den Lösungsvektor \vec{x} durch lineare Superposition der Basislösungen \vec{v}_j erhalten.

In den obigen Basislösungen \vec{v}_j versteckt sich die inverse Matrix. Wegen $\mathbf{A}\vec{v}_j = \vec{e}_j$ gilt

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & \dots & v_{2,n} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} & \dots & v_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & v_{n,3} & \dots & v_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbb{I}$$

und somit $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}$. \diamond

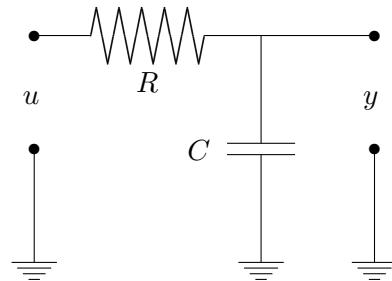
1.1.2 Ein Tiefpass–Filter

Betrachte den elementaren Tiefpass–Filter rechts. Für den Strom i durch die Kapazität C gilt:

$$i = C \frac{d}{dt} y = \frac{u - y}{R}$$

Dies führt zur linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung für die Ausgangsspannung $y(t)$

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$



mit der gegebenen Eingangsspannung $u(t)$.

Nun untersuchen wir das Verhalten des Ausgangs $y(t)$ bei verschiedenen, zunehmend komplizierteren Eingangsfunktionen $u(t)$. Da die Eingangsfunktion periodisch ist, wird auch das Antwortsignal periodisch sein, d.h. wir vernachlässigen den Einschwingvorgang und ignorieren Anfangswerte.

1. Fall: $u(t) = e^{i\omega t}$

Für die Lösung der Gleichung

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = e^{i\omega t}$$

machen wir den Ansatz

$$y(t) = A e^{i\omega t}$$

und setzen in die Gleichung ein. Das führt zu

$$A e^{i\omega t} (iRC\omega + 1) = e^{i\omega t}$$

mit der offensichtlichen Lösung für die Konstante A

$$A = \frac{1}{iRC\omega + 1}$$

Somit ist eine partikuläre Lösung der Gleichung gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{iRC\omega + 1} e^{i\omega t}$$

Der komplexe Faktor kann noch umgeschrieben werden zu

$$iRC\omega + 1 = \sqrt{(RC\omega)^2 + 1} e^{i\phi} \quad \text{mit} \quad \tan \phi = RC\omega$$

und somit

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} e^{i(\omega t - \arctan RC\omega)}$$

2.Fall: $u(t) = \sin(n t)$

Mit Hilfe der Euler'schen Formel erhält man

$$u(t) = \sin(n t) = \operatorname{Im} e^{in t}$$

und somit aufgrund der vorangehenden Rechnungen (mit $\omega = n$)

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{(RCn)^2 + 1}} e^{i(n t - \arctan RCn)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(RCn)^2 + 1}} \sin(n t - \arctan RCn) \end{aligned}$$

3. Fall: $u(t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{i\omega_n t}$

Für jeden der Terme von $u(t)$ finden wir die Lösung der Gleichung

$$RC \dot{y}_n(t) + y_n(t) = c_n e^{i\omega_n t}$$

als

$$y_n(t) = \frac{c_n}{iRC\omega_n + 1} e^{i\omega_n t}$$

Somit können wir eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = \sum_{n=0}^N c_n e^{i\omega_n t}$$

angegeben durch

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^N y_n(t) = \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{iRC\omega_n + 1} e^{i\omega_n t}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$RC \dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0$$

ist gegeben durch

$$y_h(t) = K \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$$

Somit ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gegeben durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{iRC\omega_n + 1} e^{i\omega_n t}$$

wobei die Konstante K durch eine Anfangsbedingung zu bestimmen wäre.

4. Fall: $u(t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(n\omega t)$

Mit den Überlegungen der beiden vorangehenden Abschnitte erhält man

$$y(t) = K \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{\sqrt{(nRC\omega)^2 + 1}} \sin(n\omega t - \arctan(nRC\omega))$$

5. Fall: Eingangssignal $u(t)$ gegeben als Fourierreihe

Ist $u(t)$ eine beliebige T -periodische Funktion, so können wir sie zerlegen in Fourier-Komponenten durch die Formeln

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega t}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ und

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i n \omega t} dt$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

ist somit gegeben durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{i n R C \omega + 1} e^{i n \omega t}$$

Ist $u(t)$ eine reelle Funktion und sind wir nur am Realteil der Lösung interessiert, so können wir auch die Formel

$$y(t) = K \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + c_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{i n R C \omega + 1} e^{i n \omega t} \right)$$

verwenden. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten c_n kann mit numerischen Methoden erfolgen (z.B. FFT anwenden auf Abtastwerte).

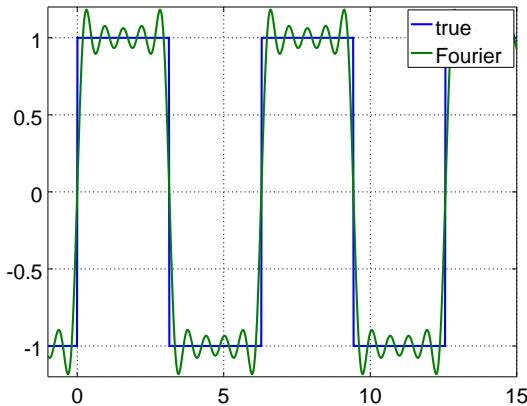
Ein konkretes Beispiel

Das obige Beispiel wurde gerechnet für den Werte $RC = 0.4$ und ein 2π -periodische Eingangssignal u , das entstand durch 2π -periodisches Fortsetzen der Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign} t$ auf die ganze reelle Achse. Später werden Sie sehen, dass die Fourierreihe dieser Funktion gegeben ist durch

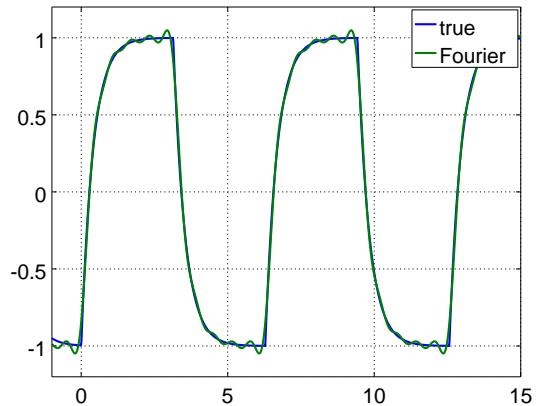
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} \end{aligned}$$

Die Beispielrechnung wurde ausgeführt mit Termen bis zu $\sin(9t)$. Je mehr Terme Sie berücksichtigen, desto besser die Approximation, aber auch der Rechenaufwand steigt.

Es entsteht die Abbildung 1.1. Die Graphiken wurden erzeugt durch den untenstehenden Octave-Code.



(a) Eingangsfunktion



(b) Ausgangsfunktion

Abbildung 1.1: Ein Tiefpassfilter: Eingangsfunktion $u(t)$ und ihre Approximation, Ausgangsfunktion $y(t)$ und die Approximation.

tiefpass.m

```
function tiefpass()
n = 4; % number of Fourier terms to be considered
RC = 0.4;
```

```

x = linspace(-1,15,1001);

function y = f(x)
    y = sign(rem(x+7*pi,2*pi)-pi);
end%function

function y = fn(x,n)
    y = zeros(size(x));
    for k = 0:n
        y = y + 4/pi*sin((2*k+1)*x)/(2*k+1);
    end%for
end%function

function y = odeF(u,x,RC)
    y = 1/RC*(-u + f(x));
end%function

function y = soln(x,n,RC)
    y = zeros(size(x));
    for k = 0:n
        y = y + 4/pi*sin((2*k+1)*x-atan(RC*(2*k+1)))/((2*k+1)*sqrt((2*k+1)^2*RC^2+1));
    end%for
end%function

y1 = f(x);
y2 = fn(x,n);
[xRK,y3] = ode45(@(x,u)odeF(u,x,RC),x,-0.95);
y4 = soln(x,n,RC);

figure(1);
plot(x,y1,x,y2); axis([-1,15,-1.2,1.2])
legend('true', 'Fourier')

figure(2);
plot(xRK,y3,x,y4); axis([-1,15,-1.2,1.2])
legend('true', 'Fourier')

end%function

```

1.1.3 Ein statisches Wärmeleitungsproblem

Ein Stab der Länge π ($0 \leq x \leq \pi$) wird an den beiden Rändern auf einer konstanten Temperatur $u(0) = u(\pi) = 0$ gehalten. Entlang des Stabes wird geheizt mit einer Funktion $f(x)$ (Einheiten: Energie pro Länge pro Zeit). Das führt auf das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= -f(x) \quad \text{für } 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir diese Differentialgleichung für verschiedene Typen von Funktionen $f(x)$.

1. Fall: $f(x) = \sin(n x)$ für $n \in \mathbb{N}$

Wegen $\frac{d^2}{dx^2} \sin(n x) = -n^2 \sin(n x)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = \frac{1}{n^2} \sin(n x)$$

Auch die Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ sind erfüllt.

2. Fall: $f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n x)$

Wegen der Rechnung im vorangehenden Abschnitt und der Linearität der Ableitung ist die Differentialgleichung gelöst durch

$$u(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^2} \sin(n x)$$

Dies kann durch Einsetzen verifiziert werden.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^2} \sin(n x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^2} \frac{d^2}{dx^2} \sin(n x) \\ &= -\sum_{n=1}^N b_n \sin(n x) = -f(x) \end{aligned}$$

Auch die Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ sind erfüllt.

3. Fall: „allgemeine Funktion“ $f(x)$

Als Beispiel untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{für } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

d.h. die rechte Hälfte wird gleichmäßig geheizt, die linke nicht.

Im Verlaufe des Kapitels werden die folgenden Rechnungen begründet. Für die **Fourier–Sinus–Reihe** dieser Funktion benötigt man die Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(n x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \sin(n x) dx \\ &= \frac{-2}{n \pi} \cos(n x) \Big|_{\pi/2}^\pi = \frac{-2}{n \pi} \left((-1)^n - \cos(n \frac{\pi}{2}) \right) \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} b_1 &= (-1 - 0) \frac{-2}{1 \pi} , \quad b_2 = (1 + 1) \frac{-2}{2 \pi} , \quad b_3 = (-1 + 0) \frac{-2}{3 \pi} , \quad b_4 = (1 - 1) \frac{-2}{4 \pi} \\ b_5 &= (-1 + 0) \frac{-2}{5 \pi} , \quad b_6 = (1 + 1) \frac{-2}{6 \pi} , \quad b_7 = (-1 + 0) \frac{-2}{7 \pi} , \quad b_8 = (1 - 1) \frac{-2}{8 \pi} \end{aligned}$$

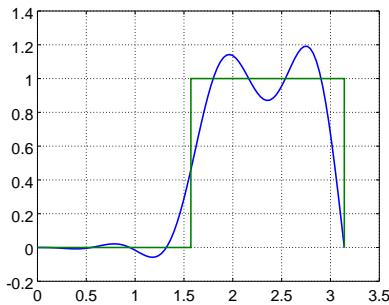
Dann gilt für $0 < x < \pi$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2 \sin(6x)}{6} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

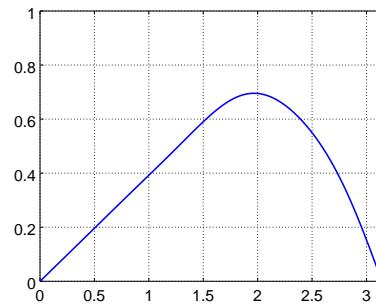
Gemäß dem vorangehenden Abschnitt ist die Lösung der statischen Wärmeleitungsgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{n^2} \sin(n x) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{2 \sin(2x)}{2 \cdot 4} + \frac{\sin(3x)}{3 \cdot 9} + \frac{\sin(5x)}{5 \cdot 25} - \frac{2 \sin(6x)}{6 \cdot 36} + \frac{\sin(7x)}{7 \cdot 49} + \dots \right) \end{aligned}$$

In Abbildung 1.2 finden Sie die Funktion $f(x)$, eine Fourier–Sinus–Approximation und die daraus bestimmte approximative Lösung der Randwertproblems. In der Approximation wurden nur 6 Terme verwendet. Dieses Problem kann auch exakt gelöst werden¹. Die exakte Lösung und die Fourierapproximation unterscheiden sich kaum, der Unterschied ist überall kleiner als 0.004.



(a) externe Heizfunktion



(b) Temperatur

Abbildung 1.2: Fourier–Lösung eines statischen Wärmeleitungsproblems

1.1.4 Verhalten einer schwingende Saite

Wird eine gespannte Saite der Länge L (d.h. $0 < x < L$) vertikal um $u(x, t)$ ausgelenkt. Zu Zeit $t = 0$ sei die Saite um die Funktion $u(x, 0) = f(x)$ ausgelenkt, aber in Ruhe (Anfangsgeschwindigkeit ist Null). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit² sei c , diese Konstante beschreibt den Einfluss von Spannung der Saite, Materialien und Querschnitt der Saite. Die Auslenkfunktion muss der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u(x, t) &= c^2 \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) && \text{für } 0 < x < L \text{ und } t \geq 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{für } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{für } 0 < x < L \\ \frac{d}{dt} u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 < x < L \end{aligned}$$

Bei dieser Differentialgleichung finden Sie Anfangsbedingungen (bezüglich der Zeit t) und Randbedingungen (bezüglich der Ortsvariablen x). Wie bei den beiden vorangehenden Modellproblemen wollen wir dieses Problem lösen für zunehmend komplexere Anfangsauslenkungen $f(x)$.

1. Fall: $f(x) = \sin(x \frac{n\pi}{L})$ für $n \in \mathbb{N}$

Wir setzen

$$\phi_n(x) = \sin(x \frac{n\pi}{L})$$

uns machen den **Separationsansatz**

$$u_n(x, t) = h(t) \cdot \phi_n(x)$$

Wir sehen sofort, dass die Randbedingungen automatisch erfüllt sind (falls $n \in \mathbb{N}$). Es bleibt uns also eine Funktion $h(t)$ zu finden, so dass die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen gelöst werden.

¹Für $0 < x < \pi/2$ muss gelten $u(x) = mx$ für ein geeignetes m , wegen $u'' = 0$. Für $\pi/2 < x < \pi$ haben wir dann

$$u(x) = mx - \frac{(x - \pi/2)^2}{2} \quad \text{für } \pi/2 < x < \pi$$

Die Bedingung $u(\pi) = 0$ führt dann auf die Gleichung $2m\pi = \pi^2/4$ und somit $m = \pi/8$.

²Es gilt $c^2 = \frac{F}{\rho A}$, wobei A die Querschnittsfläche, ρ die Dichte des Materials und F die Einspannkraft ist

Verlangen wir $h(0) = 1$ und $\dot{h}(0) = 0$, so sind auch die Anfangsbedingungen gelöst. Nun betrachtet man

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} u_n(x, t) &= \ddot{h}(t) \cdot \phi_n(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} u_n(x, t) &= h(t) \cdot \phi_n''(x) \\ \phi_n''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \phi_n(x)\end{aligned}$$

und setzt diese Beziehungen in die Differentialgleichungen ein.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} u(x, t) &= c^2 \frac{d^2}{dx^2} u(x, t) \\ \ddot{h}(t) \cdot \phi_n(x) &= -c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} h(t) \cdot \phi_n(x)\end{aligned}$$

Die unterste Gleichung kann durch $\phi_n(x)$ dividiert werden und man erhält einfache, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{h}(t) = -c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} h(t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$h(t) = A \cos\left(t \frac{cn\pi}{L}\right) + B \sin\left(t \frac{cn\pi}{L}\right)$$

Die Anfangsbedingungen implizieren, dass $A = 1$ und $B = 0$ und somit ist die Lösung des Anfangs–Randwert–Problems gegeben durch

$$u_n(x, t) = h(t) \cdot \phi_n(x) = \cos\left(t \frac{cn\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right)$$

2. Fall: $f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right)$

Wir verwenden die Linearität der Differentialgleichungen und **Superposition**. Aus dem Resultat des vorangegangenen Abschnitt erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n h(t) \cdot \phi_n(x) = \sum_{n=1}^N b_n \cos\left(t \frac{cn\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right)$$

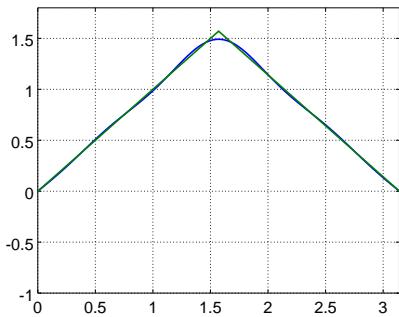
3. Fall: Dreiecksanregung

Als Beispiel untersuchen wir die Anfangsauslenkung

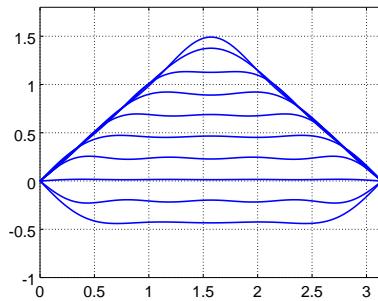
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{für } L/2 < x < L \end{cases}$$

Die **Fourier–Sinus–Reihe** ist in diesem Beispiel gegeben durch

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(x \frac{(2k+1)\pi}{L}\right) \\ &= \frac{4L}{\pi^2} \left(\sin\left(x \frac{\pi}{L}\right) - \frac{\sin\left(x \frac{3\pi}{L}\right)}{3^2} + \frac{\sin\left(x \frac{5\pi}{L}\right)}{5^2} - \frac{\sin\left(x \frac{7\pi}{L}\right)}{7^2} + \dots \right)\end{aligned}$$



(a) Anfangsauslenkung



(b) Auslenkung zu verschiedenen Zeiten

Abbildung 1.3: Bewegung einer eingespannten Saite

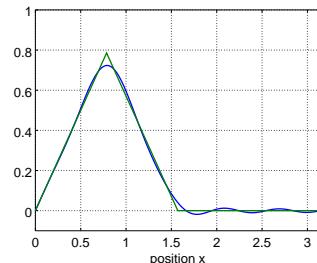
Im linken Teil von Abbildung 1.3 sehen Sie für den Spezialfall $L = \pi$ die Funktion $f(x)$ und die Approximation durch die ersten vier (von Null verschiedenen) Terme. Die Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\left(t \frac{c(2k+1)\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(x \frac{(2k+1)\pi}{L}\right)$$

Diese Lösungen für einige Zeitschritte können Sie im rechten Teil von Abbildung 1.3 sehen.

4. Fall: eine andere Dreiecksanregung

Rechts sehen Sie die Anfangsauslenkung und ihre Fourier-Approximation. Die Lösungen der Differentialgleichung als Funktion der Zeit $0 < t < 10$ und des Ortes x kann in Abbildung 1.4 bestaunt werden. Das Resultat wurde erzeugt mit Hilfe von MATLAB/Octave. Deutlich zu erkennen sind die beiden hin und her wandernden Wellenzüge. Sie werden an den eingespannten Enden reflektiert.



1.1.5 Bildverarbeitung

Der Zieleinlauf bei einem Sprint wird auf einem Zielfilm festgehalten. Da die Stadionbeleuchtung mit der Netzfrequenz oszilliert werden sich deutlich sichtbare Streifen zeigen. Die Frequenz des Stromnetzes ist 60 Hz (USA) und die Intensität des Lichts ist proportional zum Quadrat der Spannung. Deshalb erhalten wir ein Störsignal mit einer Frequenz von 120 Hz. Abbildung 1.5 zeigt ein Beispiel. Über die ganze Breite kann man 54 Streifen zählen. Nun versucht man mit Hilfe von Fouriertransformationen dieses störende Signal zu entfernen.

- Mit MATLAB oder Octave wird das Bild eingelesen und angezeigt, mit dem Resultat in Abbildung 1.5. Anschliessend werden die drei Farbwerte des RGB Bildes summiert um zu einem Graustufenbild zu kommen.

Octave

```
a = imread('Image.bmp'); % read the bmp file
figure(1)
imagesc(a); % display the colored picture
```

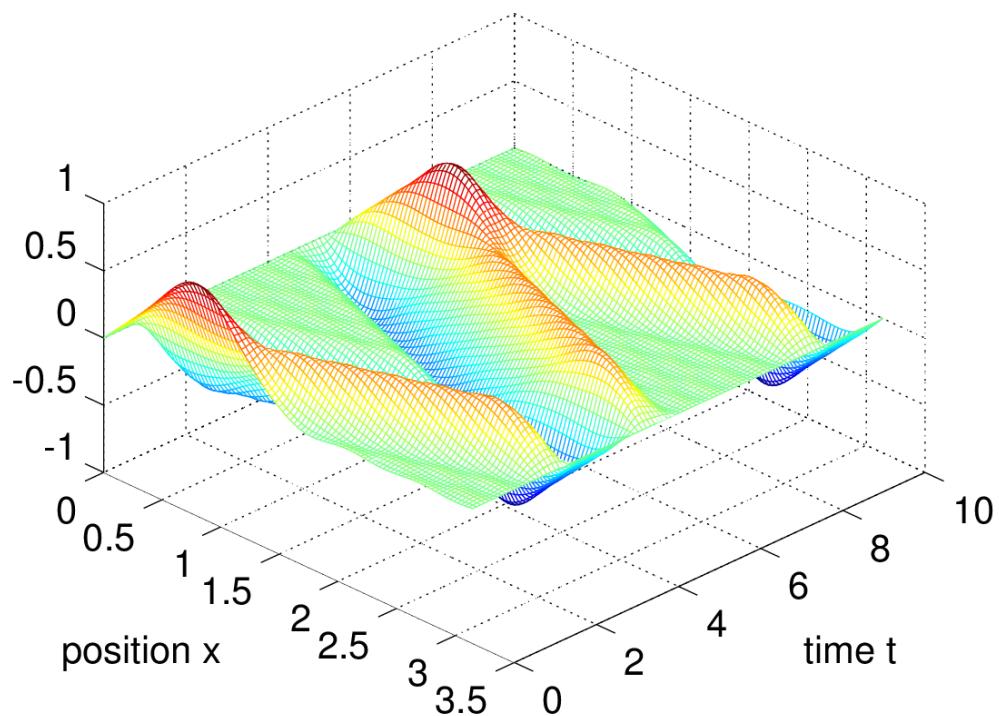


Abbildung 1.4: Bewegung einer eingespannten Saite, Wellenbewegung

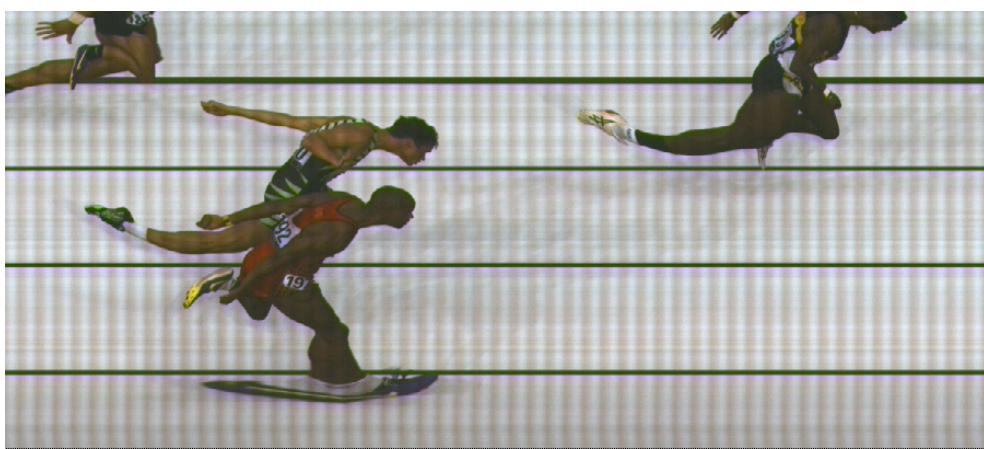


Abbildung 1.5: Orginal eines Zielfilms

```
figure(2)
ad = double(sum(a,3)); % add the three components of the RGB picture
colormap(gray)
imagesc(ad); % display gray scale picture
```

- Zuerst wird nur Zeile 300 im Bild analysiert. In Abbildung 1.6 ist das dunkle Beinsegment in der linken Hälfte klar sichtbar. Ebenso erkennt man die 120 Hz Schwingungen der Lichtintensität. Ziel der Rechnungen ist es diese Störung zu entfernen, oder mindestens sehr viel kleiner zu machen.

Octave

```
%%% choose one line for analysis
nn = 300;
inline = ad(nn,:);

dt = 5/10000; % set the sampling interval, frequency 2000 Hz
np = length.inline;
t = dt*[0:np-1];
figure(3)
plot(t,inline)
grid on
xlabel('time [sec]'); ylabel('signal');
```

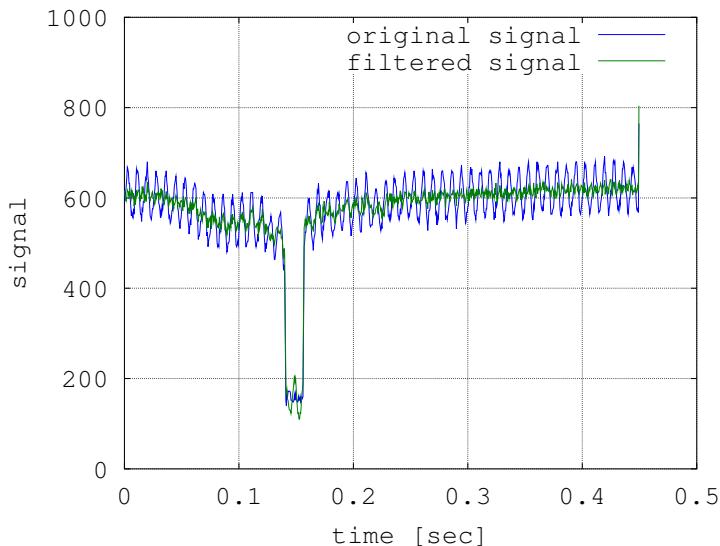


Abbildung 1.6: Signal im Zielfilm entlang einer Zeile

- Mit Hilfe des Befehls `fft()` wird das Signal zerlegt in Komponenten mit verschiedenen Frequenzen.

Octave

```
T = np*dt; % length of the time interval
freq = 1/T*[0:np-1]; % vector with all frequencies

c = fft(inline);
amp = abs(c)/np;
figure(4)
plot(freq, amp)
grid on
xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('amplitude');
```

Es werden noch zu viele Frequenzen angezeigt und wir entscheiden nur Frequenzen bis zu 300 Hz anzuzeigen. Finde das Resultat in Abbildung 1.7. Der Beitrag mit Frequenz 120 Hz ist klar ersichtlich. Man erkennt auch Oberschwingungen bei 240 Hz.

Octave

```
maxFreq = 300;
%%nMax = find(freq>maxFreq) (1); %% works in Octave only
bigFreq = find(freq>maxFreq);
nMax = bigFreq(1);

figure(4)
maxAmp = max(amp(10:np-10))
plot(freq(1:nMax),amp(1:nMax))
axis([0, freq(nMax), 0, maxAmp])
grid on
xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('amplitude');
```

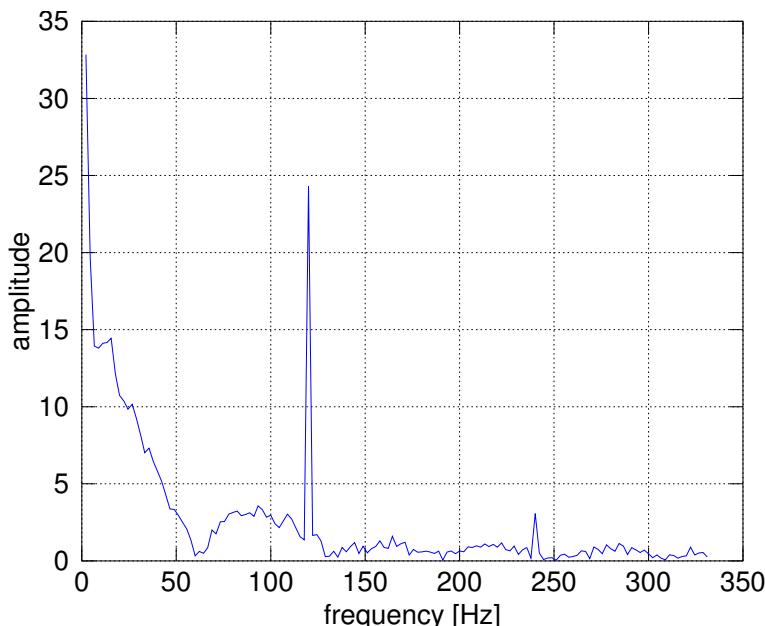


Abbildung 1.7: Spektrum des Signals im Zielfilm entlang einer Zeile

- Der Beitrag mit der störenden Frequenz 120 Hz und den beiden Nebenfrequenzen wird zu 0 gesetzt und das Zeilensignal rekonstruiert mit Hilfe des Befehls `ifft()`. Das Resultat ist in Abbildung 1.6 bereits gezeigt.

Octave

```
%%% remove the component with frequency 120 Hz
n1 = 55; c(n1) = 0; c(np+2-n1) = 0; % central frequency
n2 = 54; c(n2) = 0; c(np+2-n2) = 0; % one smaller
n3 = 56; c(n3) = 0; c(np+2-n3) = 0; % one larger
signal2 = real(ifft(c)); % reconstruct signal

figure(3)
plot(t,inline,t,signal2)
grid on
xlabel('time [sec]'); ylabel('signal');
```

```
legend('original signal','filtered signal')
```

Der obige Vorgang kann für jeder Zeile des Bildes durchgeführt werden. Abbildung 1.8 zeigt das Amplitudenspektrum der Transformation des Bildes. Hierbei wurde jede Bildzeile in Abbildung 1.5 transformiert. Das Spektrum in Abbildung 1.8 zeigt einige charakteristische Eigenschaften:

- Die dunklen Querstreifen im Original (Bahnmarkierungen) führen zu hellen Quersteifen im Spektrum. Das Signal dieser Zeilen enthält praktische keine variablen Anteile.
- In der 55-ten Spalte ist ein deutlich ausgebildeter schwarzer Streifen sichtbar. Er entspricht dem Anteil Signal mit einer Frequenz von 120 Hz.
- Es sind noch zwei weitere dunkle Spalten auszumachen. Sie entsprechen der ersten und zweiten Oberfrequenz (240/360 Hz).
- In den untersten Zeilen sind fast keine Strukturen im Spektrum auszumachen, da dort auch keine Sprinter erfasst wurden. Das Signal besteht fast ausschliesslich aus dem Störsignal.

Nun werden diese drei Frequenzen aus dem Bild „entfernt“, indem die entsprechenden Koeffizienten Null gesetzt werden. Anschliessend wird das modifizierte Signal rücktransformiert um das Bild zu rekonstruieren. Das Resultat sehen Sie in Abbildung 1.9. Die Intensität der Streifen hat deutlich abgenommen. Der Code in MATLAB ist hier gegeben.

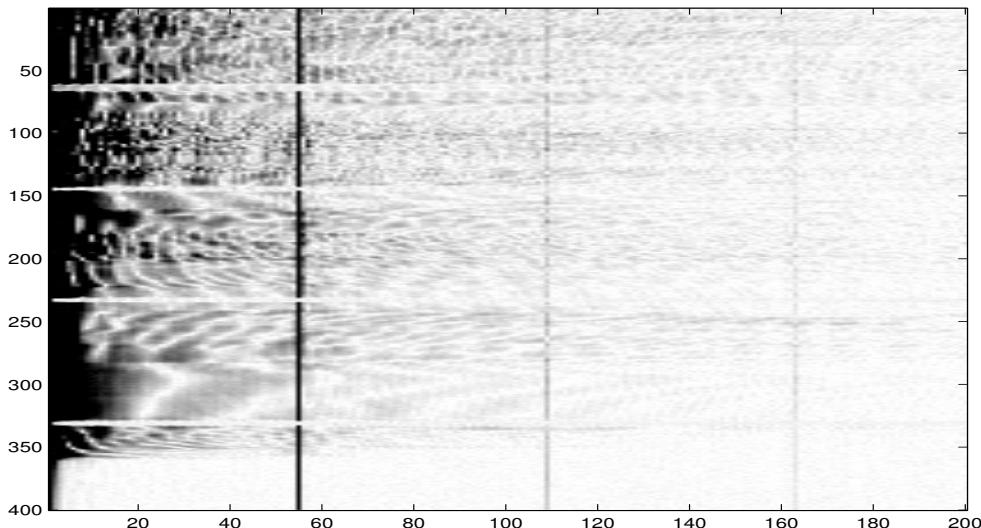


Abbildung 1.8: Amplitudenspektrum eines Zielfilms

Dieses Problem wurde von in der Diplomarbeit [FrutNyff97] von Erich Nyffenegger und Patrick Frutig unter der Leitung von Dr. Peter Gysel sorgfältiger untersucht. Die hier gezeigte Rechnung kann als Startpunkt für eine konkrete Realisierung dienen.

1.1.6 Fraunhofer'sche Beugungsmuster

Tritt eine ebene Welle auf eine Wand mit Öffnungen, so wird nicht die ganze Welle weitergehen, sondern nur Teile davon. Das führt zu Interferenzmustern hinter der Wand. Eine solche Situation ist in Abbildung 1.10 gezeigt. Diese Simulation wurde mit COMSOL erstellt. Die physikalische Grundlage ist in allen guten Optik Büchern beschrieben, z.B. [Fowl75].

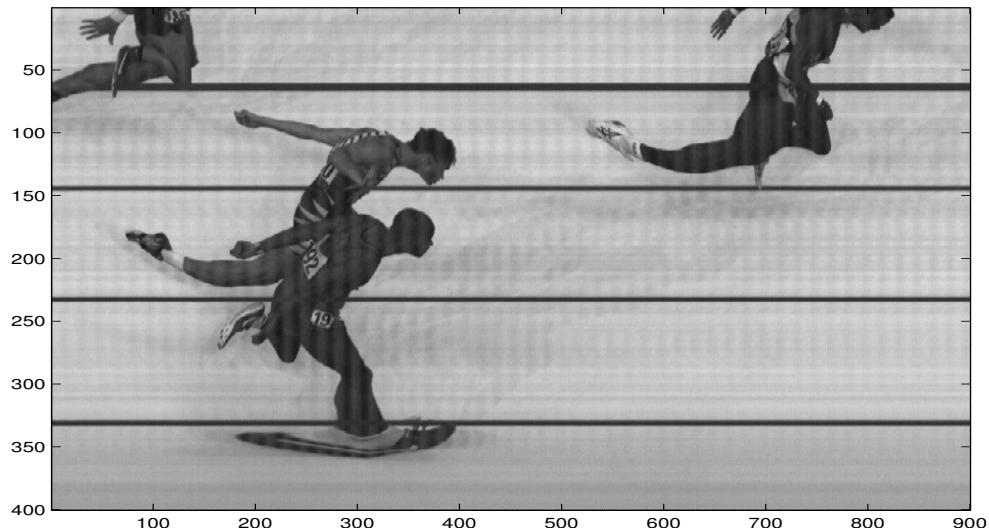


Abbildung 1.9: Zielfilm, nach der Bearbeitung durch Fouriertransformation

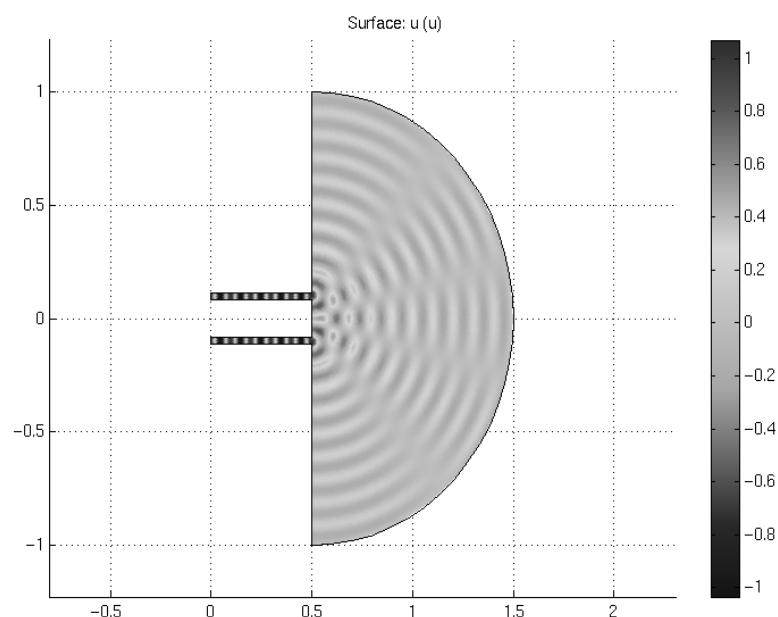


Abbildung 1.10: Fraunhofer Beugung an einem Doppelspalt

Eine ebene Welle in y -Richtung (horizontal) kann beschrieben werden durch eine Funktion

$$u(y, t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(ct - y)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-y)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{2\pi c}{\lambda}t} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}y}\right)$$

Trifft diese Welle auf eine Wand mit Öffnung, so kann jeder Punkt in der Öffnung als eine punktförmige Quelle einer neuen Welle angesehen werden. Nun untersuchen wir die Welle in eine um den Winkel α abweichende Richtung, ausgehend von Höhe x . Wie in der Figur 1.11 ersichtlich ist der von der Welle zurückzulegende Weg von der Starthöhe x abhängig. Die ausgehende Welle wird somit eine Phasenverschiebung erfahren, diese ist gegeben durch den Abstand d in Richtung α und somit

$$d = x \sin \alpha \approx x \alpha$$

Diese Phasenverschiebungen sind zu berücksichtigen über die ganze Öffnung. Um die Intensität I als Funktion des Abstrahlwinkels α zu untersuchen kann ein Integral über die gesamte Öffnung aufgestellt werden. Dazu muss die Überlagerung aller durch den Spalt erzeugten Signale untersucht werden. Die Intensität ergibt sich als Betrag der komplexen Zahl

$$I(\alpha) = \int_{\text{Öffnung}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x\alpha} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x\alpha} dx$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls Wand offen auf Höhe } x \\ 0 & \text{falls Wand geschlossen auf Höhe } x \end{cases}$$

Das obige Integral entspricht einer Fouriertransformation der Funktion $f(x)$. Aus diesem Grund hat die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion viele Anwendungen in der Optik, siehe Abschnitt 1.8.4 und Beispiel 2 im Kapitel Fouriertransformation.

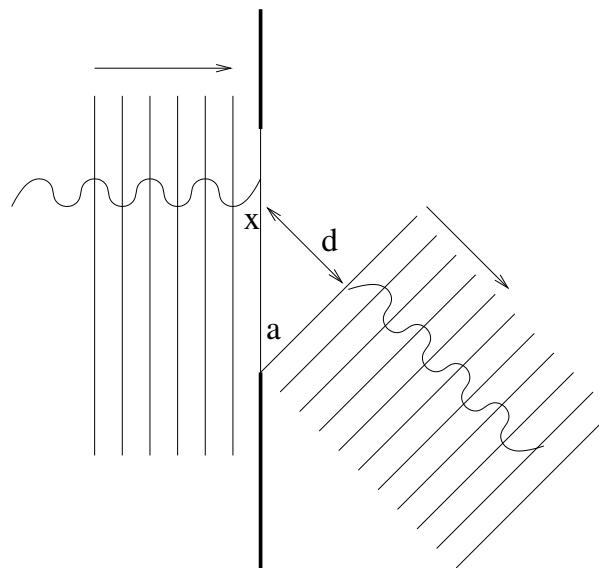


Abbildung 1.11: Fraunhofer Beugung

Der untenstehende Octave-Code berechnet das an einem Doppelspalt entstehende Beugungsmuster mit dem Resultat in Abbildung 1.12. Der Befehl `fft()` berechnet die FFT (Fast Fourier Transform) der Funktion $f(t)$, d.h. eine Approximation der Fouriertransformation der Funktion.

Octave

```

x = linspace(-1,1,8*1024);
y = (x<0.1).* (x>0.05);
y = y + fliplr(y);

c = fft(y);
figure(1);
plot(x,y);
xlabel('position'); ylabel('opening'); axis([-1 1 -1 2])

a = abs(c(2:100));
a = [fliplr(a),abs(c(1)),a];
n = [-99:99];
figure(2);
plot(n,a)
axis('normal'); xlabel('position'); ylabel('intensity');

```

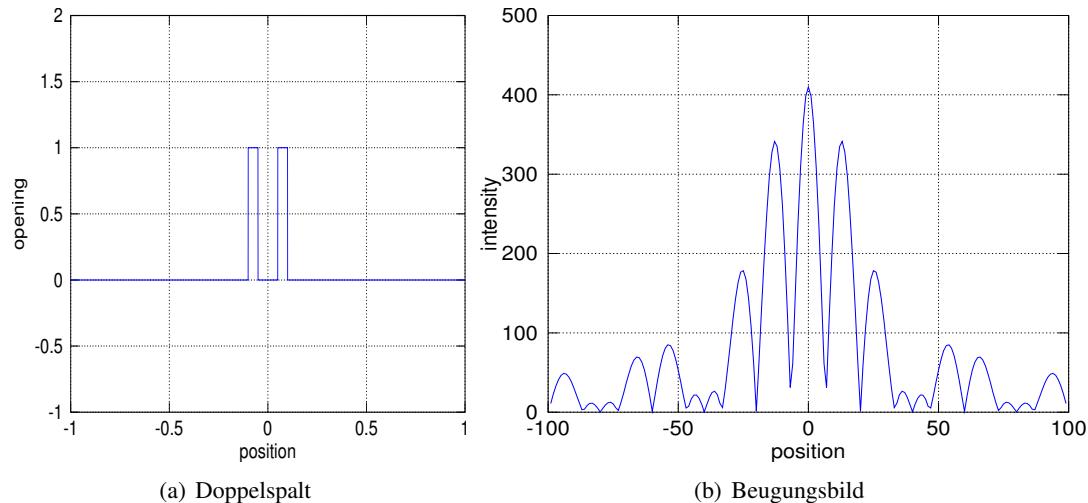


Abbildung 1.12: Fraunhofer Beugung am Doppelspalt

Eine analoge Rechnung für einen einfachen Spalt erzeugt die Abbildung 1.13.

Die obigen Beispiele erlauben es die Beugung von Licht an beliebigen Schlitzmustern zu untersuchen. Für Beugung an Löchern (statt Schlitzen) werden die zu berechnenden Integrale etwas schwieriger und führen zu Bessel Funktionen, z.B. [Fowl75, §5.4] oder [Stew87, Appendix C]. Im Kontext von Fouriertransformation untersuchen wir das im Abschnitt 1.1.6 ab Seite 16. Für numerische Berechnung kann auch eine 2-dimensionale Fourier Transformation verwendet werden.

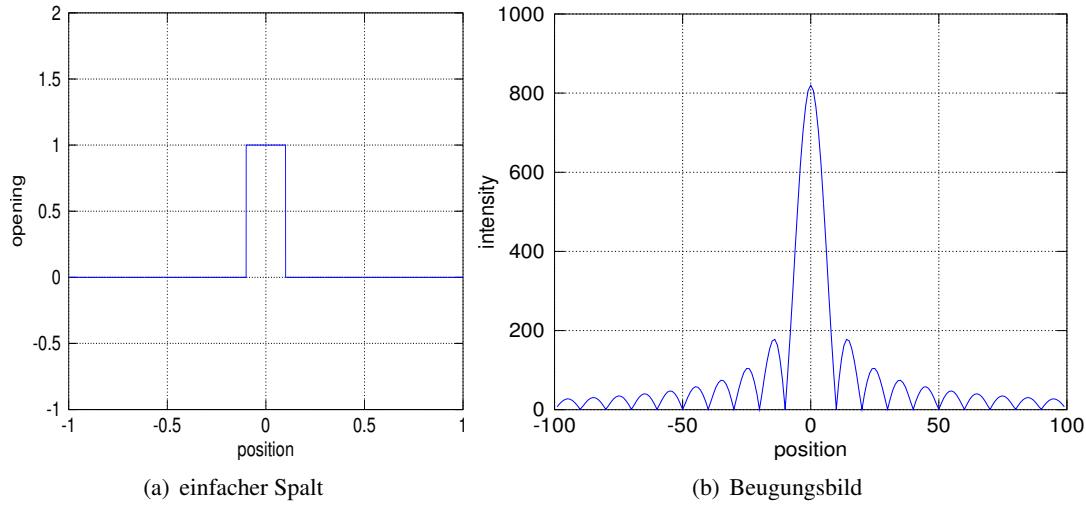


Abbildung 1.13: Fraunhofer Beugung am einfachen Spalt

1.2 Skalarprodukt, orthogonale Funktionen, Korrelation und Projektion

1.2.1 Skalarprodukte von Vektoren und Funktionen

Seien f und g stückweise stetige Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ und $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ (oder auch in \mathbb{R}^n). Dann ist für die Vektoren \vec{u} und \vec{v} das **Skalarprodukt** definiert durch

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

Für die Funktionen f und g setzen wir

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Sind die Vektoren (Funktionen) reellwertig, so kann \bar{v}_i durch v_i (b.z.w. $\overline{g(x)}$ durch $g(x)$) ersetzt werden. Die Notation $f \in \mathcal{L}_2$ bezeichnet eine Funktion f dem Definitionsbereich $[-\pi, \pi]$ für die das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

existiert. Wir haben die folgenden Vergleiche zwischen Vektoren in \mathbb{C}^n und Funktionen in \mathcal{L}_2

	\mathbb{C}^n	\mathcal{L}_2
Objekte	Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	Funktionen f, g, h
Skalarprodukt	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$
Norm	$\ \vec{u}\ ^2 = \sum_{i=1}^n u_i ^2$	$\ f\ ^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) ^2 dx$
Orthogonalität	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$	$\langle f, g \rangle = 0$
Linearität	$\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	$\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$ $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$ $\langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$

Für Vektoren gilt die Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Für Integrale gilt die analoge Ungleichung

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Es gilt also viele Parallelitäten zwischen dem Skalarprodukt für Vektoren und demjenigen für Funktionen auf $[-\pi, \pi]$. Nun werden wir diese Ähnlichkeiten ausnutzen.

1.2.2 Korrelation von Funktionen und Winkel zwischen Vektoren

Für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist der Winkel α zwischen den Vektoren gegeben durch das Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \alpha$$

oder auch

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Die Grösse $\cos \alpha$ „misst“ wie gut die beiden Vektoren in die selbe Richtung zeigen. Ist $\cos \alpha = 1$ so zeigen die beiden Vektoren exakt in die selbe Richtung. Ist $\cos \alpha = -1$ so zeigen die beiden Vektoren in entgegengesetzte Richtungen. Bei $\cos \alpha = 0$ sind die beiden Richtungen unabhängig.

Nun führen wir die selben Rechnungen mit dem Skalarprodukt von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus und erhalten

$$K = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx}{(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx)^{1/2} (\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx)^{1/2}}$$

Die so erhaltene Zahl K heisst **Korrelationskoeffizient** der beiden Funktionen und ist ein Mass für deren Abhängigkeit. Ist $K = \pm 1$, so ist die eine Funktion ein Vielfaches der anderen. Ist $K \approx 0$, so sind die beiden Funktionen unabhängig.

1–2 Beispiel : In Abbildung 1.14 sehen Sie zwei Beispiele von Funktionspaaren und ihren Korrelationskoeffizienten. Der Abschnitt 1.2.4 zeigt, dass Korrelationskoeffizienten von einigen trigonometrischen Funktionen Null sind, d.h. die Funktionen orthogonal. ◇

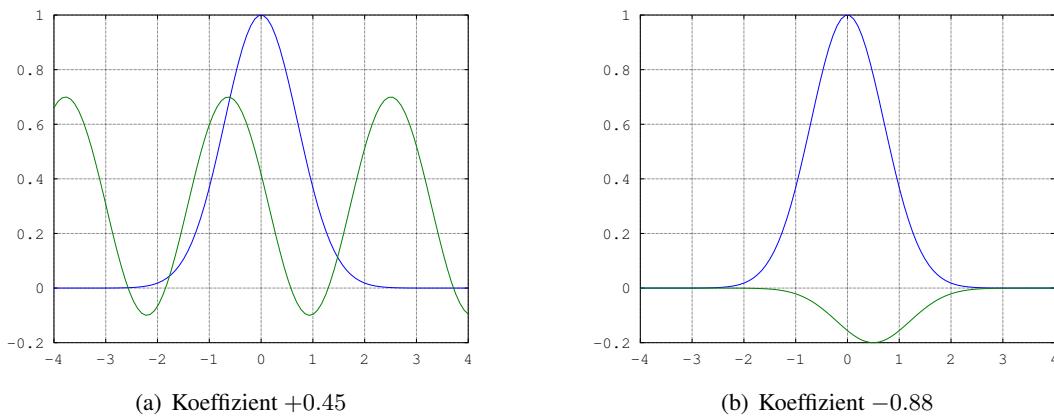


Abbildung 1.14: Funktionen mit Korrelationskoeffizienten +0.45 und -0.88

1–3 Beispiel : Untersuchen Sie die beiden Funktionen mit Parameter $a \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{und} \quad g(t) = a + t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) Berechnen Sie

$$H(a) = \langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t) g(t) dt$$

(b) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $K(a)$ der beiden Funktionen, abhängig vom Parameter a .

(c) Finden Sie den Wert von a für den der Korrelationskoeffizient $K(a)$ maximal wird. Eine numerische Lösung mit Hilfe des Taschenrechners ist ausdrücklich zugelassen.

Mit dieser Rechnung suchen Sie die Ordinate auf der Höhe a , sodass sich die Funktion $y = a + t$ möglichst gut an die Funktion $y = \sin(t)$ anpasst.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} H(a) &= \langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t) g(t) dt = \int_0^{\pi/2} (a + t) \sin t dt \\ &= (-a \cos t + \sin t - t \cos t) \Big|_{t=0}^{\pi/2} = a + 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|\sin t\|^2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} \\ \|a + t\|^2 &= \int_0^{\pi/2} a^2 + 2at + t^2 dt = \left(a^2 t + a t^2 + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{t=0}^{\pi/2} = \frac{a^2 \pi}{2} + a \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{24} \\ K(a) &= \frac{\langle a + t, \sin t \rangle}{\|a + t\|_2 \|\sin t\|_2} = \frac{1 + a}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{a^2 \pi}{2} + a \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{24}}} \end{aligned}$$

(c) Die Rechnungen und Graphiken können mit *Octave* oder einem Taschenrechner erzeugt werden. Die Korrelation ist maximal bei $a \approx 0.17$ und der Wert des Korrelationskoeffizienten ist 0.99.

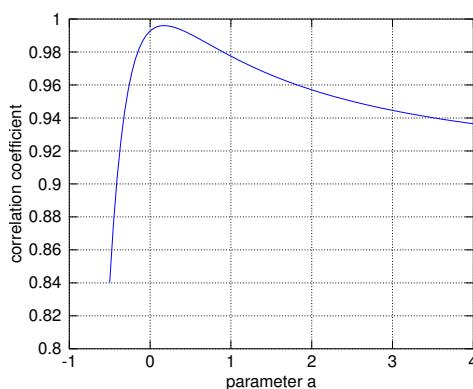


Abbildung 1.15: Graph einer Korellationsfunktion

Octave

```

aa = linspace(-0.5,4); cc = zeros(size(aa));

function k = korrcoeff(a)
  i1 = quad(@(t)((a+t).^2),0,pi/2);
  i2 = quad(@(t)(sin(t).^2),0,pi/2);
  i3 = quad(@(t)(sin(t).*(a+t)),0,pi/2);
  k = i3/sqrt(i1*i2);
endfunction

for ii=1:length(aa)
  cc(ii) = korrcoeff(aa(ii));
endfor

plot(aa,cc)
xlabel('parameter a'); ylabel('correlation coefficient'); grid on
[amin,ccmin] = fminbnd(@(a)(-korrcoeff(a)), -0.5, 1)
-->
amin = 0.17273
ccmin = -0.99605

```

◊

1–4 Beispiel : Bestimmen der Tonhöhe

In der Diplomarbeit von Eliza Munafo (2006) wurde ein Hilfsgerät für Stotterer entwickelt. Um den PSOLA Algorithmus zu verwenden benötigt man als Teilresultat die Grundfrequenz (pitch) eines Sprech- oder Gesangsignals. Diese kann mit Hilfe von Korrelation bestimmt werden. In Abbildung 1.16 ist ein kurzer Ausschnitt aus einem Tonsignal gezeigt. Dieses wurde mittels Octave aus einer wav–Datei gelesen.

- Zuerst wird die Datei `why_22k.wav` gelesen. Es handelt sich um ein Signal von ca. 10 sec Dauer das mit 22050 Hz aufgenommen wurde.
- Dann wird ein Ausschnitt ab $t = \frac{10000}{22050} \approx 0.45$ sec der Länge $\Delta t = \frac{500}{22050} \approx 0.02$ sec angezeigt.

Octave

```

filename = "why1_22k.wav";
[snd, srate, nbits] = wavread(filename);

srate
N = length(snd);
T = N/srate

N0 = 10000; % approx. 0.5 sec into signal
NN = 500;    % analyse sequences of length 0.02 sec

figure(1);
plot([1:NN]/srate*1000,snd(N0:N0+NN-1))
xlabel('time [msec]'); ylabel('Amplitude')

```

Anschliessend wird das ursprüngliche Signal verglichen mit zeitlich leicht versetzten Signalen.

- Die Signale werden in Schritten von $1/22050$ verschoben und es werden 500 Verschiebungen untersucht. Die maximale Verschiebung ist somit ca. 0.02 sec.
- Für jede Verschiebung wird das Skalarprodukt des ursprünglichen Signals mit dem zeitlich verschobenen Signal gleicher Länge bestimmt.

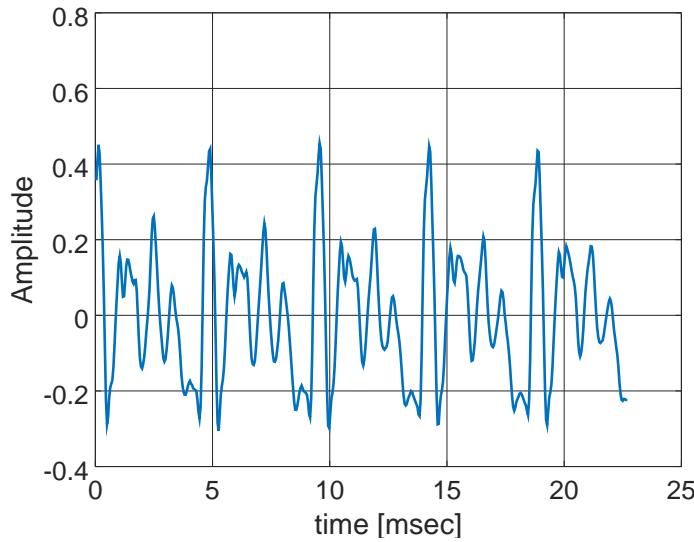


Abbildung 1.16: Ausschnitt aus einem Tonsignal

- Um die Resultate zu normieren werden alle Koeffizienten durch den ersten Koeffizienten dividiert. Der neue erste Koeffizient muss somit 1 sein. Dies entspricht der Tatsache, das das unverschobene Signal perfekt mit sich selbst übereinstimmt.
- Die Koeffizienten werden als Graphik dargestellt mit dem Resultat in Abbildung 1.17.

Octave

```
NShifts = 500
coeff = zeros(NShifts,1);
for k = 1:NShifts
    coeff(k) = snd(N0:N0+NN)' * snd(N0+k-1:N0+k+NN-1);
end%for

coeff = coeff/coeff(1);
figure(2);
plot([0:NShifts-1]/srate*1000,coeff)
xlabel('Shift [msec]'); ylabel('Correlation')
```

Das erste Maximum in Abbildung 1.17 liegt beim Koeffizient mit Nummer 103. Das entspricht einer Periode von $T = \frac{103}{22050}$ sec und somit einer Grundfrequenz von $f = \frac{1}{T} \approx 215$ Hz . Bei einer Periode $T \approx 0.005$ sec haben wir Sequenzen der Länge 0.02 sec untersucht. Somit haben wir klar mehr als eine Periode erfasst, was notwendig ist für zuverlässige Resultate.

Da sich das Tonsignal ständig ändert sind die weiter rechts liegenden lokalen Maxima kleiner als das erste Maximum. ◇

1-5 Beispiel : Berührungslose Geschwindigkeitsmessung [Grun93, p. 116]

Das Prinzip der Messmethode sei am Beispiel eines Schienenfahrzeugs erklärt. Die Schienen haben eine unregelmässige Oberflächenstruktur. Zwei an der Unterseite angebrachte Lichtquellen haben einen festen horizontalen Abstand a . Das Licht wird je nach Oberflächenzustand mehr oder weniger reflektiert. Die in ihrer Helligkeit modulierten Lichtstrahlen werden gemessen. Theoretisch sollte man zwei mal das selbe Signal erhalten, mit einer Zeitverschiebung T . Aus dem Wert von T erhält man sofort die Geschwindigkeit $v = a/T$. Die Messanordnung ist in Abbildung 1.18 gezeigt.

Die beiden Distanzsignale als Funktion der Zeit sehen Sie in Abbildung 1.19.

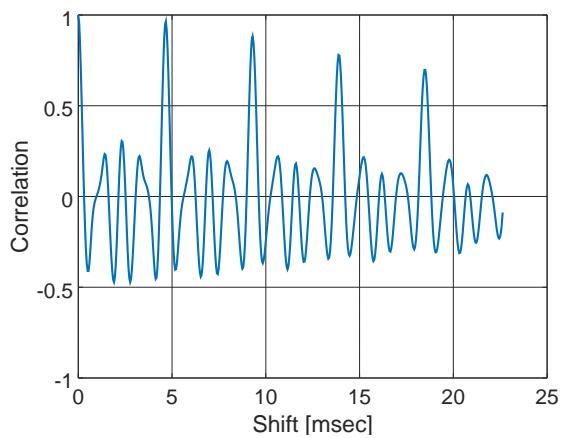


Abbildung 1.17: Autokorrelationskoeffizienten eines Tonsignals

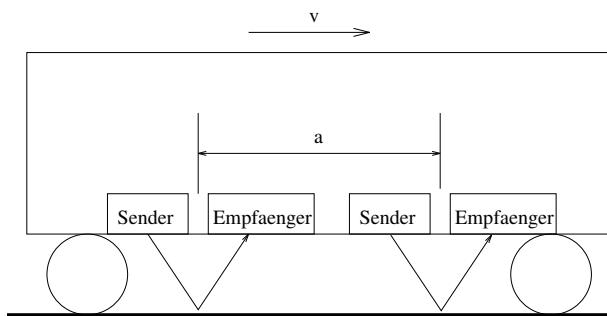


Abbildung 1.18: Berührungslose Geschwindigkeitsmessung

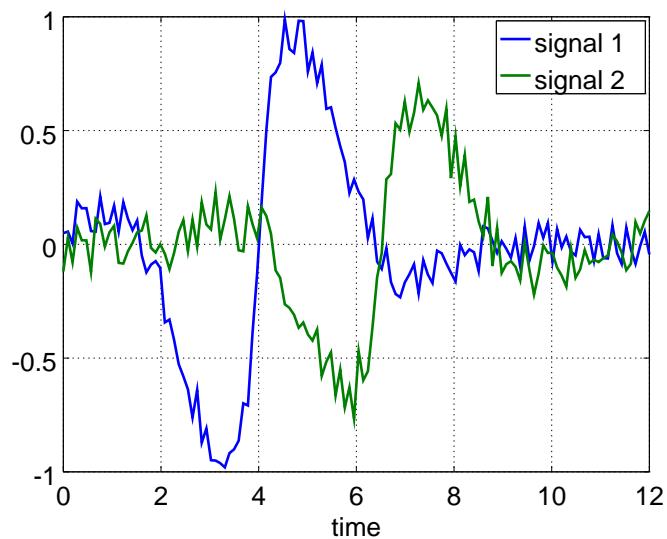


Abbildung 1.19: Gemessene Intensitäten als Funktion der Zeit

Seien die Signale gegeben durch die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$. Nun geht es darum herauszufinden für welchen Wert von T die beiden Funktionen $f(t)$ und $g(t - T)$ möglichst gut übereinstimmen. Hierzu kann der Korrelationskoeffizient verwendet werden. Ergänzen Sie die beiden Funktionen rechts und links durch Null und betrachten für eine sehr grosse Konstante M die neue Funktion

$$K(T) = \int_{-M}^M f(t) g(t - T) dt$$

Die Division durch $\|f\|_2 \|g\|_2$ kann weggelassen werden, da wir „nur“ an der Lage des Maximalwertes interessiert sind. Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 1.20 gezeigt. Man liest leicht ab, dass der Maximalwert bei $T \approx 2.5$ erreicht wird.

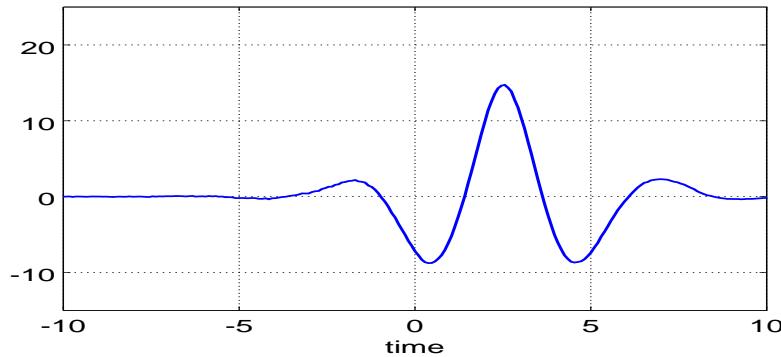


Abbildung 1.20: Korrelationsfunktion der beiden Signale

Es ist unbedingt zu beachten, dass der Rechenaufwand um die Funktion $K(T)$ zu bestimmen sehr gross ist. Für jeden Wert von T muss ein Integral bestimmt werden. Das kann ein zu grosser Rechenaufwand sein. Der **FFT-Algorithmus** und der **Faltungssatz** werden den Rechenaufwand drastisch reduzieren. ◇

1.2.3 Orthonormale Vektoren und Funktionen, Projektionen

In \mathbb{R}^n gibt es die **Basisvektoren**

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für diese Vektoren gilt

$$\|\vec{e}_i\|^2 = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j$$

d.h. diese Vektoren sind **orthonormal** in \mathbb{R}^n . Ein beliebiger Vektor \vec{x} kann geschrieben werden als **Linearkombination** dieser Basisvektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

wobei man die Koeffizienten durch

$$x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle$$

bestimmen kann und somit gilt

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

Der Vektor $\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ kann auch als **Projektion** von \vec{x} auf die von \vec{e}_i aufgespannte Gerade (Koordinatenachse) aufgefasst werden. Hat ein Vektor \vec{b} die Länge 1 so ergibt

$$\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \alpha = \|\vec{x}\| \cdot 1 \cos \alpha$$

die Länge der Projektion von \vec{x} in die Richtung von \vec{b} . Somit ist

$$\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b} = \text{Projektion von } \vec{x} \text{ auf die von } \vec{b} \text{ aufgespannte Gerade}$$

Untersuche den Abstand aller Punkte auf der Geraden $t \vec{b}$ mit $t \in \mathbb{R}$ vom Punkt \vec{x} und suche den Wert von t mit minimalem Abstand.

$$\begin{aligned} f(t) &= \|\vec{x} - t \vec{b}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - t b_i)^2 \\ \frac{d}{dt} f(t) &= \sum_{i=1}^n 2(x_i - t b_i) b_i = 0 \\ t \sum_{i=1}^n b_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ t &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \sum_{i=1}^n x_i b_i = 1 \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

Somit ist der Punkt auf der Geraden mit minimalem Abstand von \vec{x} genau bei $\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b}$.

1–6 Beispiel :

- (a) Bestimmen Sie den Punkt auf der durch den Vektor \vec{b}_1 aufgespannten Geraden mit minimalem Abstand vom Punkt \vec{x} .

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{pmatrix}$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t)$ die Norm 1 hat. Dann ist die Funktion

$$f(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

zu untersuchen. Suchen Sie den Parameter $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $\lambda_1 b_1(t)$ einen minimalen Abstand von der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ hat.

Lösung:

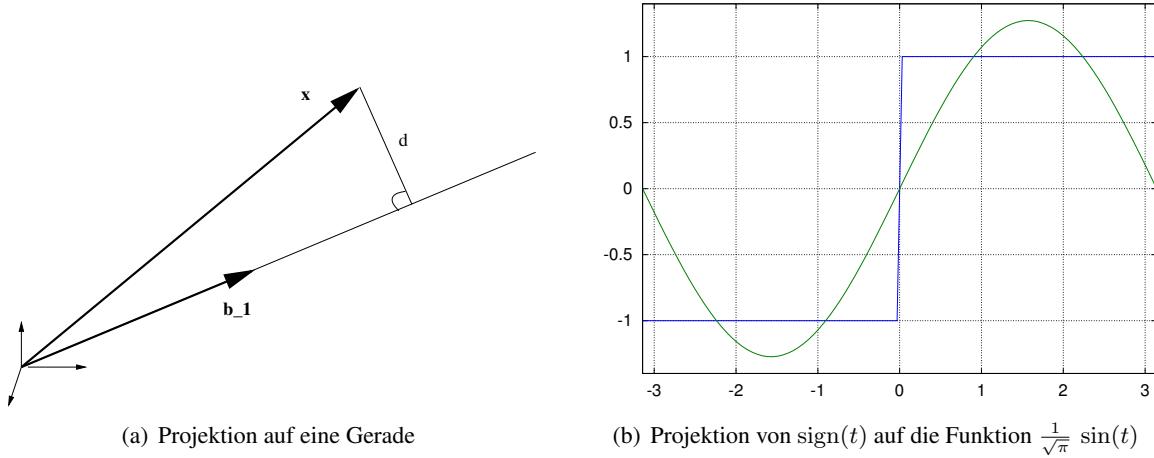


Abbildung 1.21: Projektion auf einen eindimensionalen Raum

- (a) Zu bestimmen ist die Projektion des Vektors \vec{x} auf die durch den Vektor \vec{b} aufgespannte Gerade. Zuerst muss verifiziert werden, dass \vec{b} die Länge 1 hat, d.h.

$$\|\vec{b}\|^2 = 0.40825^2 + 0.40825^2 + 0.81650^2 \approx 1$$

Da dieser Test positiv verläuft ist die Projektion gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{b} &= (1 \cdot 0.40825 + 2 \cdot 0.40825 + 3 \cdot 0.81650) \begin{pmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{pmatrix} \\ &\approx +3.6742 \begin{pmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der minimale Abstand dieses Punktes von \vec{x} ist ca. 0.707 .

- (b) Die Norm der Funktion $b_1(t)$ ist gegeben durch

$$\|b_1(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(t)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} 2 \pi = 1$$

Um den optimalen Wert von λ_1 zu bestimmen muss die Funktion

$$h(\lambda_1) = \|f(t) - \lambda_1 b_1(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \lambda_1 b_1(t))^2 dt$$

minimiert werden. Das führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda_1} h(\lambda_1) = - \int_{-\pi}^{\pi} 2 (f(t) - \lambda_1 b_1(t)) b_1(t) dt \\ \lambda_1 \int_{-\pi}^{\pi} (b_1(t))^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) b_1(t) dt \\ \lambda_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) b_1(t) dt = \langle f, b_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(t) dt \\
 &= -\frac{2 \cos(t)}{\sqrt{\pi}} \Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \approx 2.2568
 \end{aligned}$$

Somit hat die Funktion $\frac{2.2568}{\sqrt{\pi}} \sin(t) \approx 1.2733 \sin(t)$ minimalen Abstand von $f(t)$. Dies wird in Abbildung 1.21 illustriert.

◇

1-7 Beispiel :

- (a) Bestimmen Sie den Punkt auf der durch die Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 aufgespannten Ebene mit minimalem Abstand vom Punkt \vec{x} .

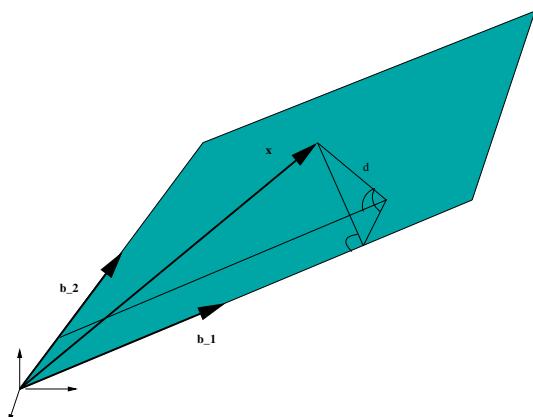
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ +0.81650 \\ 0.40825 \end{pmatrix}$$

Der Wert von $\alpha \approx 1.0954$ ist so gewählt, dass $\|\vec{b}_2\| = 1$.

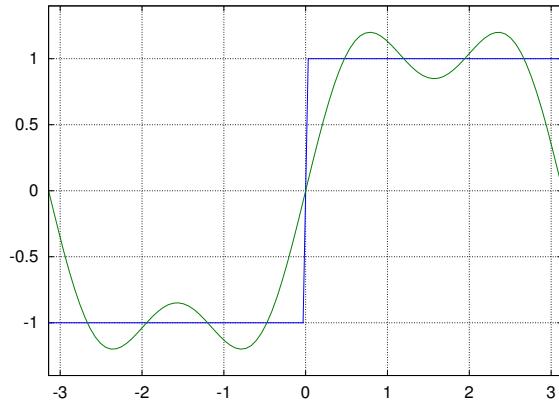
- (b) Die Funktionen $b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t)$ und $b_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(3t)$ haben Norm 1. Dann ist die Funktion

$$f(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

zu untersuchen. Suchen Sie die Parameter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sodass die Funktion $\lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ einen minimalen Abstand von der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ hat.



(a) Projektion auf eine Ebene



(b) Projektion von $\text{sign}(t)$ auf die beiden Funktionen $\lambda_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t) + \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(3t)$

Abbildung 1.22: Projektion auf einen zweidimensionalen Raum

Mit Hilfe des obigen Resultates kann für einen Tiefpassfilter statt eines Rechtecksignals eine Summe von sin-Funktionen untersucht werden. Das wurde im Beispiel im Abschnitt 1.1.2 (Seite 5) verwendet.

Lösung:

- (a) Zu bestimmen ist die Projektion des Vektors \vec{x} auf die durch die Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 aufgespannte Ebene. Die Längen der Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 ist 1. Das wurde bereits im vorangehenden Beispiel nachgerechnet. Weiter gilt

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0$$

und somit sind die beiden Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 orthonormal. Zu suchen sind die optimalen Werte von λ_1 und λ_2 , sodass $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$ minimalen Abstand von \vec{x} hat. Zu minimieren ist die Funktion

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = \|\vec{x} - (\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2)\|^2 = \langle \vec{x} - \lambda_1 \vec{b}_1 - \lambda_2 \vec{b}_2, \vec{x} - \lambda_1 \vec{b}_1 - \lambda_2 \vec{b}_2 \rangle$$

Das führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\lambda_1} h(\lambda_1, \lambda_2) &= -\langle \vec{b}_1, \vec{x} - \lambda_1 \vec{b}_1 - \lambda_2 \vec{b}_2 \rangle - \langle \vec{x} - \lambda_1 \vec{b}_1 - \lambda_2 \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle \\ &= 2\lambda_1 \|\vec{b}_1\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle + 2\lambda_2 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 2\lambda_1 - 2\langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \\ \lambda_1 &= \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \approx +3.6742 \end{aligned}$$

und mit ähnlicher Rechnung

$$\lambda_2 = \langle \vec{x}, \vec{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81650 \\ 0.40825 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.89443 \\ 0.44721 \end{pmatrix} \right\rangle \approx +0.4472$$

Beachte, dass in der obigen Rechnung verwendet wurde, dass die Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 orthonormal sind. Somit erhalten wir den Projektionspunkt auf der Ebene durch

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 \approx +3.6742 \begin{pmatrix} 0.40825 \\ 0.40825 \\ -0.81650 \end{pmatrix} + 0.4472 \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81650 \\ 0.40825 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.9 \\ -2.8 \end{pmatrix}$$

Der minimale Abstand ist ca. 0.548. Das ist kleiner als in der vorangehenden Aufgabe.

- (b) Durch Integration erhalten wir

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} b_1(t) b_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin(t) \sin(3t) dt = \dots = 0$$

Somit sind die beiden Funktion $b_1(t)$ und $b_2(t)$ orthonormal auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Um die optimalen Werte von λ_1 und λ_2 zu bestimmen muss die Funktion

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = \|f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2\|^2 = \langle f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2, f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 \rangle$$

minimiert werden. Das führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda_1} h(\lambda_1, \lambda_2) = -\langle b_1, f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 \rangle - \langle f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2, b_1 \rangle \\ &= 2\lambda_1 \|b_1\|^2 - 2\langle f, b_1 \rangle + 2\lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = 2\lambda_1 - 2\langle f, b_1 \rangle \\ \lambda_1 &= \langle f, b_1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) b_1(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} 1 \sin(t) dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \approx 2.2568 \end{aligned}$$

und mit ähnlicher Rechnung

$$\lambda_2 = \langle f, b_2 \rangle = \dots \approx 0.752$$

Somit hat die Funktion

$$\frac{2.22568}{\sqrt{\pi}} \sin(t) + \frac{0.752}{\sqrt{\pi}} \sin(3t) \approx 1.273 \sin(t) + 0.424 \sin(3t)$$

minimalen Abstand von $f(t)$. Dies wird in Abbildung 1.22 illustriert.



Es lohnt sich die Rechnungen und Resultate der beiden vorangehenden Beispiele zu vergleichen.

- Die Approximation ist besser als in Abbildung 1.21 in des ersten Beispiels.
- Alle Rechnungen und Resultate der ersten Aufgabe konnten in der zweiten wiederverwendet werden.
- Die Orthogonalität der Vektoren und Funktionen war wesentlich für die Rechnung.
- Das Vorgehen ist sehr systematisch und kann auf andere Beispiele übertragen werden. Das resultierende Verfahren führt zu Fourierapproximationen.

Die Aufgabe 1–10 ist verwandt mit dem obigen Beispiel.

Nun wollen wir eine ähnliche Struktur für beliebige Funktionen finden. Dazu betrachten wir die unendlich vielen **Basisfunktionen** auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$.

$$1, \cos nx, \sin nx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

und nun ist es das Ziel eine „beliebige“ Funktion $f(x)$ zu schreiben in der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Statt der ursprünglichen Funktion $f(x)$ untersuchen wir also die Partialsummen $f_N(x)$, wobei

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Nun sind zwei grundlegende Fragen zu beantworten

1. Wie sind die Koeffizienten a_n und b_n zu bestimmen?
2. Konvergiert diese Reihe (d.h. die Funktionen $f_N(x)$) tatsächlich gegen die vorgegebene Funktion $f(x)$?

Die Antworten werden gegeben durch die Theorie der **Fourierreihen**.

1.2.4 Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen

Mittels trigonometrischer Identitäten³ und elementarer Integration kann man nachrechnen, dass für natürliche Zahlen n und m gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx &= 2\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \pi \quad \text{falls } n \neq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \pi \quad \text{falls } n \neq 0 \end{aligned}$$

³

$$\begin{aligned} 2 \sin(x) \sin(y) &= \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2 \cos(x) \cos(y) &= \cos(x - y) + \cos(x + y) \\ 2 \sin(x) \cos(y) &= \sin(x - y) + \sin(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= 0 \quad \text{falls } n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0 \quad \text{falls } n \neq m\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können auch mit der Notation des Skalarproduktes dargestellt werden.

$$\begin{aligned}\|1\|^2 &= 2\pi \\ \|\cos^2 nx\|^2 &= \pi \quad \text{falls } n \neq 0 \\ \|\sin^2 nx\|^2 &= \pi \quad \text{falls } n \neq 0 \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle &= 0 \\ \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= 0 \quad \text{falls } n \neq m \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= 0 \quad \text{falls } n \neq m \\ \langle \cos nx, 1 \rangle = \langle \sin nx, 1 \rangle &= 0\end{aligned}$$

Somit sind die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

orthonormal als 2π -periodische Funktionen.

1.3 Fourierreihen von 2π -periodischen Funktionen

1.3.1 Definition der Fourierreihe

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Funktionen die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert sind und wir zeigen die Resultate über Fourierreihen für diese Funktionen. Die wenigen notwendigen Änderungen für Intervalle mit anderen Längen werden später vorgestellt.

Um die Rechnungen zu verkürzen betrachten wir für im Moment nur die Basisfunktion $\sin(nx)$. Betrachten wir also die normierten Funktionen

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

so gilt

$$\|\phi_n\|_2 = 1, \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0 \quad \text{falls } n \neq m$$

Durch Vergleichen mit der Formel (gültig für Vektoren in \mathbb{R}^n)

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

können wir den Ansatz

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

versuchen. Das führt auf die Formel

$$\hat{b}_n = \langle f, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \phi_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

mit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \phi_n(x)$$

oder auch

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x) dx$$

mit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x)$$

Analoge Überlegungen können auch für die Funktionen $1, \cos(nx)$ angestellt werden und man erhält die Fourierreihe einer stückweise stetigen⁴, 2π -periodischen Funktion.

1-8 Definition : (Fourierreihe für 2π -periodische Funktionen)

Sei f eine auf $[-\pi, \pi]$ definierte, stückweise stetige Funktion und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n x) dx \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n x) dx \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots \end{aligned}$$

dann ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x))$$

die **Fourierreihe** der Funktion $f(x)$

1.3.2 Beste L_2 -Approximation

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die obige Wahl der Koeffizienten a_n, b_n die best mögliche ist, in einem genau spezifizierten Sinne.

Sei $f(x)$ eine stückweise stetige Funktion auf $[-\pi, \pi]$, $N \in \mathbb{N}$ fest und

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x))$$

eine Partialsumme der Fourierreihe. Sei

$$g_N(x) = \frac{r_0}{2} + \sum_{n=1}^N (r_n \cos(n x) + s_n \sin(n x))$$

⁴Zur Erinnerung: eine Funktion heisst **stückweise stetig** auf dem Intervall $[a, b]$ falls

- f ist stetig auf $[a, b]$, ausser in endlich vielen Punkten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$.
- Bei diesen Unstetigkeitsstellen existieren die einseitigen Grenzwerte

$$f(x_+) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_-) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x)$$

Bemerkungen:

- Eine stückweise stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist notwendigerweise beschränkt.
- Die Funktionswerte in den Ausnahmepunkten x_i sind für bestimmte Integral der Funktion f über das Intervall belanglos. Somit spielen sie auch für die Fourierkoeffizienten keine Rolle.

eine andere mögliche Approximation der selben Form von $f(x)$. Dann zeigt der Beweis dieses Resultates, dass

$$\|f_N - f\| \leq \|g_N - f\|$$

Die selbe Aussage, geschrieben als Integral, lautet

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g_N(x) - f(x)|^2 dx$$

Somit ist f_N die **best mögliche Approximation im \mathcal{L}_2 -Sinne**.

Beweis : Wir führen die Überlegungen wiederum nur für die sinus-Funktionen aus. Dadurch werden die Formeln etwas übersichtlicher.

Um die obige Bemerkung zu verifizieren, kann man die Funktionen $\phi_n(x) = \sin(nx)$ und

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^N s_n \phi_n(x)$$

betrachten, wobei wir nur $s_n \in \mathbb{R}$ untersuchen. Wir haben somit

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \langle f, \phi_n \rangle$$

Wegen

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \pi & \text{falls } n = m \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} \|f - g_N\|^2 &= \langle f - g_N, f - g_N \rangle \\ &= \langle f - \sum_{n=1}^N s_n \phi_n, f - \sum_{m=1}^N s_m \phi_m \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \sum_{n=1}^N s_n \left(\sum_{m=1}^N \langle \phi_n, s_m \phi_m \rangle \right) - \sum_{n=1}^N s_n \langle \phi_n, f \rangle - \sum_{m=1}^N s_m \langle f, \phi_m \rangle \\ &= \|f\|^2 + \pi \sum_{n=1}^N s_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N s_n \langle f, \phi_n \rangle \end{aligned}$$

Es ist klar, dass für grosse Werte von s_n dieser Ausdruck sehr gross wird. Nun ist zu untersuchen für welche Wahl von s_n dieser Ausdruck minimal wird. Dazu setzen wir die partielle Ableitung bezüglich s_n gleich Null. Das ergibt

$$s_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \phi_n \rangle$$

und somit ist

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx)$$

die best mögliche Wahl. □

Setzen wir im obigen Ausdruck $0 \leq \|f - g_N\|^2$ für s_n den optimalen Wert $b_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \phi_n \rangle$ ein, so erhalten wir

$$0 \leq \|f - f_N\|^2 = \|f\|^2 - \pi \sum_{n=1}^N b_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N b_n \pi b_n = \|f\|^2 - \pi \sum_{n=1}^N b_n^2$$

und somit gilt

$$\pi \sum_{n=1}^N b_n^2 \leq \|f\|^2$$

Das ist die sogenannte **Bessel'sche Ungleichung**. Eine präzise Formulierung finden Sie in Gleichung 1.1 auf Seite 44.

1.3.3 Fourier-Reihe einer 2π -periodischen Funktion, periodische Fortsetzung

Bisher haben wir nur Funktionen untersucht, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert waren. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass wir damit aber auch 2π -periodische Funktionen erfasst haben.

- Jede auf $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion $f(x)$ kann zu einer 2π -periodischen Funktion auf \mathbb{R} erweitert werden, falls $f(-\pi) = f(\pi)$.
- Jede 2π -periodische Funktion $f(x)$ kann problemlos auf den neuen Definitionsbereich $[-\pi, \pi]$ eingeschränkt werden. Erweitern wir diese eingeschränkte Funktion wieder auf ganz \mathbb{R} (2π -periodische), so erhalten wir die ursprüngliche Funktion zurück.

Aufgrund der obigen Überlegungen sind 2π -periodische Funktionen auf \mathbb{R} und Funktionen definiert auf $[-\pi, \pi]$ „im wesentlichen“ dasselbe. Die **Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion** ist definiert als die Fourierreihe der entsprechend eingeschränkten Funktion auf $[-\pi, \pi]$.

Für eine 2π -periodische Funktion können die Fourerkoeffizienten durch Integration über ein beliebiges Intervall der Länge 2π bestimmt werden. So gilt zum Beispiel

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_L^{L+2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

1.3.4 Beispiele

Hier sind einige einfache Beispiele von Fourierreihen. Das erste Beispiel wird viele für Fourierreihen typische Effekte zeigen. Es lohnt sich die Rechnungen sorgfältig auszuführen und sich jederzeit zu verdeutlichen was man eigentlich berechnen will.

1–9 Beispiel :

$$f(x) = x \quad \text{auf dem Intervall } [-\pi, \pi]$$

Lösung: Es sind die Integrale

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots \end{aligned}$$

zu bestimmen. Weil $x \cos(nx)$ immer eine ungerade Funktion ergibt sind alle $a_n = 0$. Um die Koeffizienten b_n zu berechnen kann man partielle Integration, Integraltafeln oder *Mathematica* verwenden.

$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = -x \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= \frac{-2\pi}{n} (-1)^n + 0 \end{aligned}$$

Somit gilt für $n \geq 1$

$$b_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$$

Die Fourierreihe ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} x &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(n x) \\ &= 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \frac{2 \sin(4x)}{4} + \frac{2 \sin(5x)}{5} - \dots \end{aligned}$$

Mit Octave/MATLAB können die Graphen der Funktion und der Fourierapproximation erstellt werden, z.B Abbildung 1.23.

FourierOfx.m

```

function FourierOfx()
x = linspace(-4, 4, 1001);

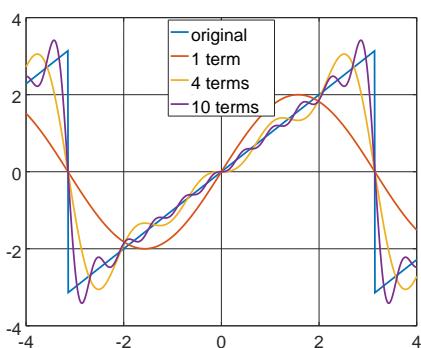
function y = f(x)
y = mod(x+pi, 2*pi)-pi;
end%function

function res = F(x,n)
res = zeros(size(x));
for k = 1:n
res = res - 2*(-1)^k * sin(k*x)/k;
end%for
end%function

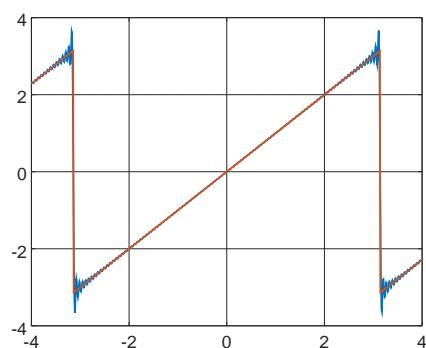
y1 = F(x,1); y4 = F(x,4); y10 = F(x,10); y100 = F(x,100);
figure(1)
plot(x,f(x),x,[y1;y4;y10])
legend('original','1 term','4 terms','10 terms','location','north'); grid on

figure(2)
plot(x,y100,x,f(x)); grid on
end%function

```



(a) Approximation durch 1, 4 und 10 Terme



(b) Approximation durch viele Terme

Abbildung 1.23: Fourierapproximation von $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$

Je grösser n ist, desto besser die Approximation an die ursprüngliche Funktion. Bei der Wahl des Anzahl der Terme n ist etwas Vorsicht angebracht, ein zu grosser Wert kann Octave sehr lange beschäftigt halten, auch wenn die Partialsumme $f_n(x)$ dann sehr genau bei der ursprünglichen Funktion $f(x)$ liegt. Die Abbildungen 1.23(b) und 1.24 zeigen die Approximation mit 100 Termen.

Es lohnt sich den Bereich um den Punkt (π, π) etwas genauer anzusehen. Sie sehen in Abbildung 1.24 den Effekt von Gibbs.

Octave

```
x2 = linspace(2.8,3.2,500);
plot(x2,F(x2,100),x2,f(x2))
axis([2.8 3.2 2.7 3.7]); grid on
```

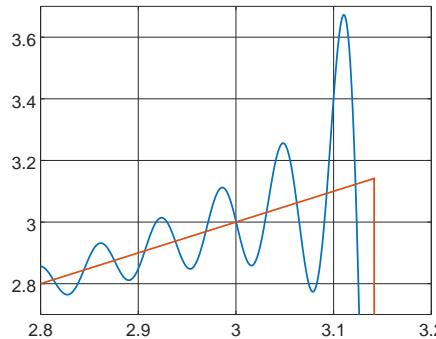


Abbildung 1.24: Phänomen von Gibbs

◊

1-10 Beispiel : Die Funktion

$$f(x) = |x| \quad \text{auf dem Intervall } [-\pi, \pi]$$

kann mit sehr ähnlichen Rechnungen wie das vorangehende Beispiel untersucht werden. Allerdings sind hier alle $b_n = 0$ und die Koeffizienten a_n konvergieren viel schneller gegen Null, da die 2π -periodische Fortsetzung dieser Funktion stetig ist.

Lösung: Es sind die Integrale

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots \end{aligned}$$

zu bestimmen. Weil $|x| \sin(nx)$ immer eine ungerade Funktion ergibt sind alle $b_n = 0$. Leicht zeigt man, dass

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= 2x \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx = +2 \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} -4/n^2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4 \cos(x)}{\pi} - \frac{4 \cos(3x)}{\pi 9} - \frac{4 \cos(5x)}{\pi 25} - \frac{4 \cos(7x)}{\pi 49} - \dots \end{aligned}$$

◇

1.3.5 Konvergenz

In diesem Abschnitt werden die Konvergenzresultate für Fourierreihen von 2π -periodischen Funktionen exakt formuliert. Für eine gegebene Funktion $f(x)$ untersuchen wir die Folge der Partialsummen

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x))$$

1-11 Definition : Die Folge von Funktion $f_N(x)$ **konvergiert gleichmäßig** gegen die Grenzfunktion $S(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ falls es für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ ein $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|f_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b] \quad n \geq M(\varepsilon)$$

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge ist zu unterscheiden von der **punktweisen Konvergenz**. Bei punktweiser Konvergenz darf die Zahl $\varepsilon > 0$ auch von x abhängig sein. Jede gleichmäßige konvergente Funktionenfolge ist auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

1-12 Beispiel : Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise gegen 0 auf dem Intervall $(-1, 1)$, aber nicht gleichmäßig. ◇

Für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen gilt das folgende Resultat

1-13 Satz : Sind die Funktionen $f_n(x)$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und konvergiert die Folge gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g(x)$, so ist auch $g(x)$ stetig auf $[a, b]$.

Nun können wir das fundamentale Konvergenzresultat für Fourierreihen formulieren.

1-14 Theorem : Sei $f(x)$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Die Funktion wird 2π -periodisch fortgesetzt. Dann gilt für die Folge der Partialsummen

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

1. Ist f stetig auf dem Teilintervall $[a, b]$, so konvergiert f_N gleichmäßig gegen f auf diesem Intervall.

2. Hat $f(x)$ eine Sprungstelle bei $x = x_0$, so gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0+) + f(x_0-))$$

d.h die Fourierreihe konvergiert gegen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes der Funktion.

3. Bei jeder Sprungstelle tritt das Gibbs-Phänomen auf.

Das **Gibbs-Phänomen** tritt bei Sprungstellen der Funktion $f(x)$ auf. Ist der Sprung von der Höhe h , so überschwingen die Fourierapproximationen $f_N(x)$ „oben“ und „unten“ je um ca. 0.09 h (d.h. je um 9%) für genügend grosse Werte von N .

Notation: Da die Fourierreihe nicht überall mit der Funktion übereinstimmt dürfen wir kein Gleichheitszeichen verwenden. Mit der Notation

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

deutet man an, dass die Reihe (meistens) für fast alle x gegen $f(x)$ konvergiert.

Hier ist eine Illustration des Gibbs-Phänomens mittels Octave.

RectGibbs.m

```
function RectGibbs()
n = 30; % number of terms in Fourier series
x1 = linspace(-4, 7, 1001); x2 = linspace(0, 0.4, 1001);

function y = f(x)
y = sign(rem(x+7*pi, 2*pi)-pi);
end%function

function y = fn(x,n)
y = zeros(size(x));
for k = 0:n
y = y + 4/pi*sin((2*k+1)*x)/(2*k+1);
end%for
end%function

y11 = f(x1); y12 = fn(x1,n);
y21 = f(x2); y22 = fn(x2,n);

subplot(1,2,1); plot(x1,y11,x1,y12);
axis([-4 7 -1.2, 1.2]);
```

```

subplot(1,2,2); plot(x2,y21,x2,y22);
axis([-0.05,0.4,0.9,1.2]);
end%function

```

Eine Vergrößerung des Bereichs um eine Sprungstelle erlaubt sogar das Ablesen von numerischen Werten für das Überschwingen. Der Sprung der Höhe 2 müsste auf ein Überschwingen von 0.18 führen. Dies wird durch die Figur 1.25 bestätigt. Das Phänomen von Gibbs wird somit auch beim Tiefpass Filter von Beispiel 1.1.2 auftreten.

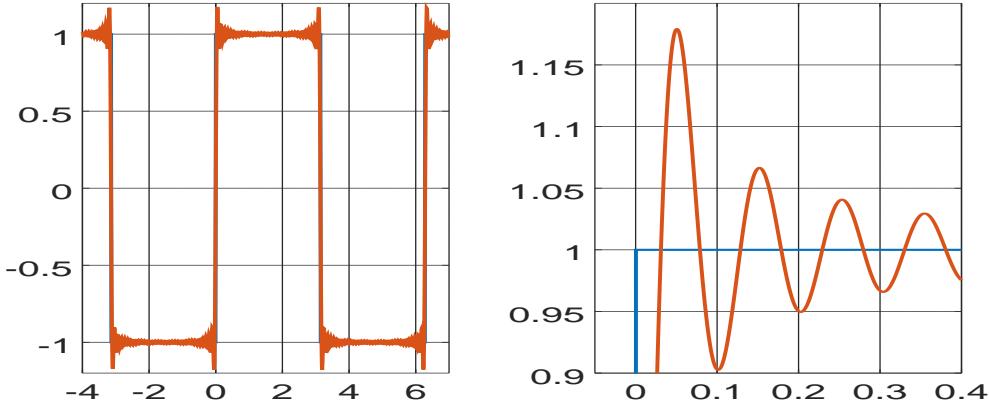


Abbildung 1.25: Vergrößerung des Phänomens von Gibbs für $f(x) = \text{sign } x$

1–15 Beispiel : Die Fourierreihe der 2π –periodischen Fortsetzung von $f(x) = x$ ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

beziehungsweise die Partialsummen

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

Gemäss dem obigen Konvergenztheorem gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = x \quad \text{für} \quad -\pi < x < \pi$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = \pi/2$, so ergibt sich

$$\pi/2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k$$

Also gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (-1)^k = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Die Berechnung von Grenzwerten von solchen speziellen Reihen ist **nicht** die Hauptanwendung von Fourierreihen, aber ein schöner Nebeneffekt. ◇

1.3.6 Integrieren und Ableiten von Fourierreihen

Gilt für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ die Fourierreihendarstellung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

so erwarten wir

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n (-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

d.h. die Reihe wir termweise differenziert. Ebenso sollte gelten

$$F(x) = \int^x f(\tau) d\tau \sim c + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx))$$

unter der Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz der involvierten Reihen. Der Term $\frac{a_0}{2} x$ tanzt aus der Reihe der anderen Terme, deshalb wird das Resultat meistens nur auf Funktionen $f(x)$ angewandt, für die $a_0 = 0$ ist, d.h. der Mittelwert der Funktion ist 0. Das folgende Theorem bestätigt diese Erwartungen.

1-16 Theorem : Sei $f(x)$ eine stückweise stetige, 2π -periodische Funktion mit Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Die gliedweise Integration der Reihe ist zulässig, d.h.

$$F(x) \sim c + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx))$$

ergibt eine Stammfunktion von $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Diese Reihe konvergiert gleichmässig gegen die Funktion $F(x)$. Ist $a_0 = 0$ so ist auch $F(x)$ eine 2π -periodische Funktion und wir erhalten die Fourierreihe der Funktion $F(x)$. Ist $a_0 \neq 0$ so erhalten wir allerdings nicht die Fourierreihe der Funktion $F(x)$.

- Konvergiert die formal differenzierte Reihe

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n (-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$$

auf einem Intervall I gleichmässig, so gilt dort $g(x) = f'(x)$, d.h. die Darstellung der Ableitung durch die gliedweise differenzierte Reihe zulässig.

Um gliedweise zu Integrieren müssen keine speziellen Voraussetzungen überprüft werden. Will man aber gliedweise Ableiten, so muss überprüft werden, ob die differenzierte Reihe gleichmässig konvergiert. Dies kann schwierig sein. Deshalb sollte man immer versuchen Integrale zu verwenden.

Ist eine Funktion f stetig und die Ableitung f' stückweise stetig, so kann die Funktion $f(x)$ aus der Funktion f' durch Integration konstruiert werden

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) ds$$

Somit lässt sich die Fourierreihe von f aus der Fourierreihe von f' durch gliedweises integrieren konstruieren. Da man nun weiss, dass dies möglich ist, kann man die Fourierreihe von f' durch gliedweises Ableiten der Fourierreihe von f bestimmen.

Ist eine Funktion f nur stückweise stetig (nicht stetig), so kann die obige Operation falsche Resultate liefern. Die Aufgabe 1–30 illustriert diesen Problemkreis.

1–17 Beispiel : Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Da die Funktion ungerade ist gilt $a_n = 0$ und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{-2}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^\pi = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist die Fourierreihe gegeben durch

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

Diese Reihe konvergiert gleichmässig gegen die Funktion $f(x)$ auf allen Teilintervallen von $[-\pi, \pi]$, welche die Punkte $-\pi, 0$ und π nicht enthalten.

Die „neue“ Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds = |x|$$

kann somit durch die gliedweise integrierte Reihe

$$F(x) \sim c - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

dargestellt werden. Die Konstante c ist so zu bestimmen, dass $F(0) = 0$. Also gilt

$$c = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

Gleichzeitig muss c aber auch dem Term $a_0/2$ in der allgemeinen Fourierreihe von $|x|$ entsprechen und somit

$$c = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2}$$

Als Konsequenz von diesen Rechnungen erhält man die Fourierreihe

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

und mit $x = 0$ ergibt sich sofort

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Es besteht auch die Versuchung die Fourierreihe von $f(x)$ gliedweise zu differenzieren und mit der Formel

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} (\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \dots)$$

weiterzurechnen. Da diese Reihe aber **nicht** gleichmässig konvergiert ist dies nicht zulässig und es können durchaus falsche Resultate herauskommen. ◇

1–18 Beispiel : Die Funktion

$$f(x) = x^2$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wird periodisch fortgesetzt. Die Ableitung dieser Funktion haben wir bereits untersucht und es ergab sich

$$f'(x) = 2x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin(nx)$$

Diese Reihe konvergiert gleichmässig auf allen Intervallen der Form $[a, b]$, wobei $-\pi < a < b < \pi$. Somit gilt

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

Die Konstante c kann durch die Beziehung

$$c = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

bestimmt werden. Somit gilt für $-\pi \leq x \leq \pi$ die Beziehung

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

Setzt man in dieser Beziehung $x = 0$ so ergibt sich leicht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Setzt man in dieser Beziehung $x = \pi$ so ergibt sich

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

◊

1.3.7 Gerade und ungerade Erweiterungen, Sinus– und Cosinus–Reihen

Ist eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ gegeben, so kann man sie durch die Konstruktion (Spiegelung an der y -Achse)

$$f_g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x) & \text{falls } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

erweitern zu einer geraden Funktion. Diese „neue“ Funktion heisst auch **gerade Erweiterung von $f(x)$** . Die Fourerkoeffizienten der erweiterten Funktion sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_g(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

und die Fourierreihe von $f_g(x)$ durch

$$f_g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Man nennt diese Reihe auch die **Fourier–Cosinus–Reihe der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$** .

Ist eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ gegeben, so kann man sie durch die Konstruktion (Spiegelung am Ursprung)

$$f_u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x) & \text{falls } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

erweitern zu einer ungeraden Funktion. Diese „neue“ Funktion heisst auch **ungerade Erweiterung von $f(x)$** . Die Fourierkoeffizienten der erweiterten Funktion sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

und die Fourierreihe von $f_u(x)$ durch

$$f_u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Man nennt diese Reihe auch die **Fourier–Sinus–Reihe der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$** .

1.3.8 Konvergenz im quadratischen Mittel

In diesem Abschnitt sei $f(x)$ immer eine stückweise stetige Funktion und $f_N(x)$ die Folge der Partialsummen. Es gilt das Theorem über die Konvergenz im quadratischen Mittel.

1–19 Theorem : Für alle stückweise stetigen Funktionen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt für $N \rightarrow \infty$

$$\|f - f_N\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|^2 \, dx \rightarrow 0$$

1–20 Satz : Bessel’sche Ungleichung

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \|f_N\|^2 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \quad (1.1)$$

1–21 Satz : Parseval’sche Gleichung

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \quad (1.2)$$

Wegen diesen Resultaten müssen die Koeffizienten a_n und b_n gegen Null konvergieren. Die Reihen können sonst nicht konvergent sein. Bei den meisten Beispielen konvergieren die Koeffizienten sogar schneller gegen 0 als dieses Resultat andeutet.

1-22 Satz : Ist die Ableitung $f'(x)$ einer stetigen Funktion stückweise stetig, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| n = 0$$

Die Koeffizienten konvergieren also schneller gegen 0 als $1/n$.

Ist die zweite Ableitung $f''(x)$ einer stetigen Funktion stückweise stetig, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| n^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| n^2 = 0$$

Die Koeffizienten konvergieren also schneller gegen 0 als $1/n^2$.

Beweis : Die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x))$$

und da f' stückweise stetig ist gilt

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n (-a_n \sin(n x) + b_n \cos(n x))$$

Aufgrund der Bessel'schen Ungleichung ist also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

konvergent. Daraus folgt die erste Behauptung. Der Beweis der zweiten Behauptung beruht auf dem selben Argument, angewandt auf die Fourierreihe von f'' . \square

1.4 Komplexe Fourierreihen

Bisher haben wir versucht allgemeine Funktionen $f(x)$ durch Summen (Reihen) der Basisfunktionen

$$1, \cos(n x), \sin(n x) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

darzustellen. Die Beziehungen

$$e^{inx} = \cos(n x) + i \sin(n x)$$

und

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \quad \text{und} \quad \sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})$$

lassen die Vermutung aufkommen, dass eine solche Darstellung auch mittels komplexer Exponentialfunktionen möglich ist. Soll die Gleichung

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)$$

für alle Werte von x gültig sein, dann gilt sie sicher auch für $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2n}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= a_n \\ i(c_n - c_{-n}) &= b_n \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nach c_{-n} und c_n aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_n - i b_n) &= c_n \\ \frac{1}{2} (a_n + i b_n) &= c_{-n} \end{aligned}$$

Nimmt die Funktion $f(x)$ **nur reelle Werte** an, so sind auch a_n und b_n reell und es gilt die Beziehung

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

und

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n \quad \text{und} \quad b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$$

Wegen $e^{0x} = 1$ gilt auch

$$a_0 = 2 c_0 \quad \text{und} \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad .$$

Nun können wir die elementare Beziehung

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

herleiten und erhalten das Theorem über komplexe Fourierreihen.

1-23 Theorem : Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion. Dann ist N -te Partialsumme der **komplexe Fourierreihe** gegeben durch

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Dieses Resultat stimmt mit der mit den Partialsummen der reellen Fourierreihen überein. Sie hat also auch genau dasselbe Konvergenzverhalten wie die üblichen Fourierreihen.

Ist die Funktion $f(x)$ reellwertig, so gilt

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Falls $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle x so ist

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) (\cos(nx) + i \sin(nx)) \\ &= \frac{1}{2} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) + \frac{i}{2} (a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)) \end{aligned}$$

und somit auch

$$f_N(x) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N c_n e^{inx} \right)$$

Diese Formel führt dazu, dass man für reelle, 2π -periodische Funktion oft die „Fourierreihe“

$$f(x) \sim c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} ,$$

verwendet, obwohl nur der Realteil der Resultates zu verwenden ist. Dieser Trick führt oft zu kürzeren Formeln für die Rechnungen und Resultate.

1–24 Beispiel : Als Beispiel soll die komplexe Fourierreihe der Funktion x auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ bestimmt werden. Der Koeffizient

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-i0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

ist elementar zu bestimmen. Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{-in} e^{-inx} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-in} e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{-in} e^{-in\pi} - \frac{-\pi}{-in} e^{+in\pi} + 0 \right) = \frac{\pi}{2\pi n} (-i \cos(-n\pi) - i \cos(n\pi)) \\ &= i \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die komplexe Fourierreihe

$$x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} (e^{inx} - e^{-inx})$$

Mittels der Eulerschen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned} x &\sim \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} (e^{inx} - e^{-inx}) = \sum_{n=1}^{\infty} i \frac{(-1)^n}{n} 2i \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \frac{2 \sin(x)}{1} - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \frac{2 \sin(4x)}{4} + \dots \end{aligned}$$

Das Resultat stimmt mit Beispiel 9 (Seite 35) überein. ◊

Aus der Integralformel für die komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

kann man die Eigenschaften in Tabelle 1.1 ablesen. Mit Hilfe dieser Tabelle kann man oft einiges an Recheneffizienz gewinnen. Es können die Fourierreihen von zwei reellen Funktionen durch eine einzige Fourier-Rechnung bestimmt werden. Untersuchen Sie die zwei untenstehenden Beispiele. Praktisch alle FFT-Bibliotheken verwenden auch Ideen dieser Art.

1–25 Beispiel : Sind $g(x)$ und $h(x)$ zwei reelle, ungerade Funktionen, deren Fourierkoeffizienten zu bestimmen sind, so konstruiert man eine neue komplexe Funktion

$$f(x) = g(x) + i h(x)$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktionen g und h sind bestimmt durch die beiden Integrale

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \quad \text{und} \quad h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-int} dt$$

f ist reell	$\Rightarrow c_{-n} = \bar{c}_n$
f ist rein imaginär	$\Rightarrow c_{-n} = -\bar{c}_n$
f ist gerade	$\Rightarrow c_{-n} = c_n$, d.h. c_n ist gerade
f ist ungerade	$\Rightarrow c_{-n} = -c_n$, d.h. c_n ist ungerade
f ist reell und gerade	$\Rightarrow c_n$ ist reell und gerade
f ist reell und ungerade	$\Rightarrow c_n$ ist imaginär und ungerade
f ist imaginär und gerade	$\Rightarrow c_n$ ist imaginär und gerade
f ist imaginär und ungerade	$\Rightarrow c_n$ ist reell und ungerade

Tabelle 1.1: Symmetrieeigenschaften der Fourierkoeffizienten

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften sind die Zahlen g_n und h_n rein imaginär und ungerade. Bestimmt man „nur“ die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Aufgrund von Tabelle 1.1 finden Sie g_n als Imaginärteil von c_n und h_n als Realteil, d.h.

$$\begin{array}{lll} c_n &= g_n &+ i h_n \\ &\text{komplex} & \text{imaginär} & \text{reell} \end{array}$$

◇

1–26 Beispiel : Sind $g(x)$ und $h(x)$ zwei reelle Funktionen, deren Fourierkoeffizienten zu bestimmen sind, so konstruiert man eine neue komplexe Funktion

$$f(x) = g(x) + i h(x)$$

Statt der beiden Integrale

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-inx} dx \in \mathbb{C}$$

Bestimmt man „nur“ die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) + i h(x)) e^{-inx} dx \in \mathbb{C}$$

Aufgrund von Tabelle 1.1 und $f = g + i h$ gilt

$$\begin{aligned} c_n &= g_n + i h_n \\ c_{-n} &= \bar{c}_n = \bar{g}_n - i \bar{h}_n \\ g_{-n} &= \bar{g}_n \\ h_{-n} &= \bar{h}_n \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} +c_{-n} + c_n &= (+\bar{g}_n + g_n) + i (-\bar{h}_n + h_n) = 2 \operatorname{Re} g_n + 2 i \operatorname{Im} h_n \\ -c_{-n} + c_n &= (-\bar{g}_n + g_n) + i (+\bar{h}_n + h_n) = 2 \operatorname{Im} g_n + 2 i \operatorname{Re} h_n \end{aligned}$$

Somit können wir Real- und Imaginärteile von g_n und h_n aus den c_n konstruieren durch

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} g_n &= \operatorname{Re}(c_{-n} + c_n) \quad \text{und} \quad 2 \operatorname{Im} h_n = \operatorname{Im}(c_{-n} + c_n) \\ 2 \operatorname{Im} g_n &= \operatorname{Re}(c_n - c_{-n}) \quad \text{und} \quad 2 \operatorname{Re} h_n = \operatorname{Im}(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

Durch eine komplexe Fourierreihe können also die Koeffizienten der Fourierreihen von zwei reellen Signalen rekonstruiert werden. ◇

1.5 Fourierreihen von T -periodischen Funktionen

Ist die Funktion $f(t)$ stückweise stetig und T -periodisch, so können wir die neue Variable

$$t = \frac{x}{\omega} = \frac{T}{2\pi} x \quad \text{wobei} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

einführen. Durchläuft x einen Bereich der Länge 2π so ändert t um T . Also ist die transformierte Funktion

$$g(x) = f(t) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

2π -periodisch bezüglich x und wir können die übliche Fourierreihe bestimmen.

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{\omega}\right) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \omega dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

Um die Fourierreihe einer T -periodischen Funktion zu bestimmen sind die folgenden Koeffizienten zu berechnen.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

oder

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die trigonometrische Fourierreihe ist gegeben durch

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

und die komplexe Fourierreihe

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Für reelle Funktionen f gilt auch

$$f(t) \sim c_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \right)$$

Das Konvergenzverhalten dieser Fourierreihen von T -periodischen Funktionen unterscheidet sich natürlich nicht vom Verhalten im 2π -periodischen Fall.

1–27 Beispiel : Fourier–Sinus–Reihe

Eine auf dem Intervall $0 \leq x \leq L$ gegebene Funktion $f(x)$ kann zuerst **ungerade** erweitert werden zu $f_u(x)$, anschliessend wird $2L$ periodisch erweitert. Für die entsprechenden Fourierkoeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_u(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx = 0 \\ b_n &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_u(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx = \frac{2 \cdot 2}{2L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx \end{aligned}$$

Die Fourierreihe dieser modifizierten Funktion führt zur Fourier–Sinus–Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Diese Fourierreihe erfüllt die Randbedingung $u(0) = u(L) = 0$. \diamond

1–28 Beispiel : Fourier–Cosinus–Reihe

Eine auf dem Intervall $0 \leq x \leq L$ gegebene Funktion $f(x)$ kann zuerst **gerade** erweitert werden zu $f_g(x)$, anschliessend wird $2L$ periodisch erweitert. Für die entsprechenden Fourierkoeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_g(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx = 0 \\ \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_g(x) 1 dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_g(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx = \frac{2 \cdot 2}{2L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx \end{aligned}$$

Die Fourierreihe dieser modifizierten Funktion führt zur Fourier–Cos–Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Diese Fourierreihe erfüllt die Randbedingung $u'(0) = u'(L) = 0$. \diamond

1.6 Eigenschaften von Fourierreihen

Die Fourierreihe kann auch als Transformation bezeichnet werden. Einer T –periodischen Funktion $f(t)$ wird ein „Vektor“ $\mathcal{F}[f]$ mit unendlich vielen Komponenten zugeordnet, d.h. eine Folge von komplexen Zahlen. Für komplexe, T –periodische Funktionen gilt

$$\mathcal{F}[f(t)](n) = c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \omega t} dt$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Diese Transformation hat einige einfache, aber wichtige Eigenschaften die wir nun genauer untersuchen werden.

1.6.1 Vergleich von Fourierreihen und Laplacetransformation

Vergleiche mit der Laplacetransformation sind angebracht. Die Laplacetransformation einer Funktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Die beiden Transformationen haben eine sehr ähnliche Struktur:

Transformation	Fourierreihe	Laplacetransformation
Variable	$n \in \mathbb{Z}$	$s \in \mathbb{R}$
Integral bezüglich t über	$[0, T]$	$[0, \infty)$
multipliziert mit	$e^{-in\omega t}$	e^{-st}

Ignoriert man den verschiedenen Integrationsbereich, so kann man sehen, dass die Rolle von $i n \omega$ bei Fourierreihen übernommen wird durch $s \in \mathbb{R}$ bei der Laplacetransformation. Die Ähnlichkeit wird noch grösser wenn wir uns später mit Fourierintegralen beschäftigen. Es sollte also keine Überraschung sein, wenn wir einige Eigenschaften der Laplacetransformation bei Fourierreihen wiederfinden.

1.6.2 Linearität

Aus den Eigenschaften des Integrals kann man sofort ablesen, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g] &= \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}[\lambda f] &= \lambda \mathcal{F}[f]\end{aligned}$$

Somit ist das Bestimmen der Fourierreihe eine **lineare Operation**.

1.6.3 Invertierbarkeit

Ist die Funktion bekannt, so können die Fourierkoeffizienten bestimmt werden. Dieser Vorgang kann auch invertiert werden: sind die Koeffizienten c_n einer T -periodischen Funktion bekannt, so ist die Funktion gegeben durch

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Das Berechnen der Fourierkoeffizienten ist ein invertierbarer Prozess.

1.6.4 Translation (Phasenverschiebung)

Statt der Fourierkoeffizienten des ursprünglichen Signals untersuchen wir ein phasenverschobenes Signal.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t+\tau)](n) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t+\tau) e^{-in\omega t} dt \\ &\quad \text{Substitution } t+\tau = s, \quad dt = ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} f(s) e^{-in\omega(s-\tau)} ds = \frac{1}{T} e^{in\omega\tau} \int_0^T f(s) e^{-in\omega s} ds \\ &= e^{in\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)](n)\end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft zeigt, wie sich Phasenverschiebungen in einem Signal auf die Fourierkoeffizienten auswirken.

Diese Rechenregel kann auch in der Fourierreihe direkt abgelesen werden, indem das Argument t durch $t + \tau$ ersetzt wird.

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+i n \omega t} \\ f(t + \tau) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+i n \omega (t+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{+i n \omega \tau} c_n e^{+i n \omega t} \end{aligned}$$

1–29 Beispiel : In Beispiel 1–17 haben wir gesehen, dass die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion $f(t) = \text{sign } t$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegeben sind durch $a_n = 0$ und

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Somit erhalten wir die komplexen Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \begin{cases} \frac{-i 2}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Nun untersuchen wir die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf dem selben Intervall $[-\pi, \pi]$. In Abbildung 1.26 erkennt man, dass diese neue Funktion auch mit Hilfe der obigen Funktion $f(t)$ geschrieben werden kann als

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(t + \frac{\pi}{2})$$

Somit sind die neuen Fourierkoeffizienten gegeben durch $c_0 = \frac{1}{2}$ und

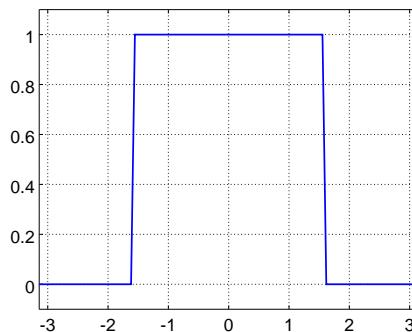


Abbildung 1.26: Graph einer Rechtecksfunktion

$$\frac{e^{i n \pi/2}}{2} c_n = \begin{cases} \frac{-i e^{i n \pi/2}}{n\pi} = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Hierbei haben wir die folgende, leicht verifizierbare Tabelle verwendet.

n	1	3	5	7	9	11	...
$e^{in\pi/2}$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$...

Somit sind nur die Realteile der neuen Koeffizienten von Null verschieden und wir erhalten eine reine Cosinus-Reihe. Dies muss der Fall sein, da die Funktion gerade ist.

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2 \cos t}{\pi} - \frac{2 \cos 3t}{3\pi} + \frac{2 \cos 5t}{5\pi} - \frac{2 \cos 7t}{7\pi} + \frac{2 \cos 9t}{9\pi} - \dots$$

Diese Reihe könnte selbstverständlich auch durch direktes Berechnen der Koeffizienten bestimmt werden

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cos(nt) dt$$

Sind aber die Koeffizienten von $f(t) = \text{sign } t$ bereits bekannt, so kann mit dem oben vorgestellten Rechentrick Arbeit gespart werden. \diamond

Die obigen Rechnungen wurden komplex ausgeführt. Selbstverständlich lassen sich die Resultate auf den reellen Fall übertragen. Für reelle Signale gilt

$$a_n - i b_n = 2 c_n = 2 |c_n| e^{i\phi} = 2 |c_n| (\cos \phi + i \sin \phi)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n führen zu einem Beitrag

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A \cos(nt + \phi) = A (\cos \phi \cos(nt) - \sin \phi \sin(nt))$$

des ursprünglichen Signals, wobei $A^2 = a_n^2 + b_n^2$. Wird eine Funktion $f(t)$ phasenverschoben um τ zu $f(t + \tau)$, so erhalten wir den „neuen“ Fourierkoeffizienten

$$e^{in\tau} c_n = |c_n| e^{i(\phi+n\tau)} = |c_n| (\cos(\phi + n\tau) + i \sin(\phi + n\tau))$$

Die Norm $|c_n|$ des komplexen Koeffizienten und der Ausdruck $A^2 = a_n^2 + b_n^2$ bleiben konstant. Einzig das Verhältnis von a_n zu b_n wird ändern.

Symmetrien

In Tabelle 1.1 auf Seite 48 können sie ablesen, wie sich Symmetrien der Funktion auf die Fourierkoeffizienten übertragen.

1.6.5 Beste L_2 -Approximation

Mit Hilfe von Rechnungen im Abschnitt 1.3.2 kann man verifizieren, dass die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

so gewählt sind, dass mit

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}$$

der L_2 -Abstand

$$\|f - f_N\|_2^2 = \int_0^T |f(t) - f_N(t)|^2 dt$$

der beiden Funktionen so klein wie möglich wird. Wir haben die beste L_2 -Approximation gefunden.

1.6.6 Konvergenzverhalten

Die Aussage f_N konvergiert gegen f wenn $N \rightarrow \infty$ muss etwas präziser formuliert werden. Details finden Sie in Theorem 1–14 und Theorem 1–19.

- Für (fast) beliebige Funktionen konvergiert f_N gegen f im \mathcal{L}_2 -Sinne.
- Ist die Funktion f stetig auf einem Teilintervall, so konvergiert f_n gleichmässig gegen f auf diesem Intervall.
- Bei einer Sprungstelle t gilt

$$f_N(t) \longrightarrow \frac{f(t-) + f(t+)}{2} \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

und das Phänomen von Gibbs tritt auf.

1.6.7 Rechnen mit Fourierreihen

Aufgrund der Linearität können Fourierreihen von Summen (und Multiplikation mit Konstanten) leicht vereinfacht werden. Es ist **nicht** elementar die Fourierreihe eines Produktes von zwei Funktionen zu bestimmen. Wir werden später (Abschnitt 1.8.3) den Faltungssatz kennenlernen. In Abschnitt 1.3.6 haben wir gesehen, dass Fourierreihen oft (aber nicht immer) gliedweise integriert und abgeleitet werden können.

1.7 Amplitudenspektrum, Leistungsspektrum

In Anwendungen interessiert oft nur der Anteil einer gewissen Frequenz am Gesamtsignal, d.h der Betrag des entsprechenden Fourierreihenkoeffizienten. Um diese Information herauszulesen, kann man die Spektren aufzeichnen.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t + \delta_n)$$

Somit haben wir im T periodischen Signal einen Teilbeitrag $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t + \delta_n)$ mit Amplitude $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$ und Frequenz $\nu = \frac{n\omega}{2\pi} = \frac{n}{T}$. Zeichnet man $|c_n|$ als Funktion von n oder der Frequenz $\frac{n}{T}$ auf, so erhält man das Amplitudenspektrum des Signals, siehe Abbildung 1.27.

Octave

```

N = 20;

function b = coeff(k)
    b = -2*(-1).^k./k;
endfunction

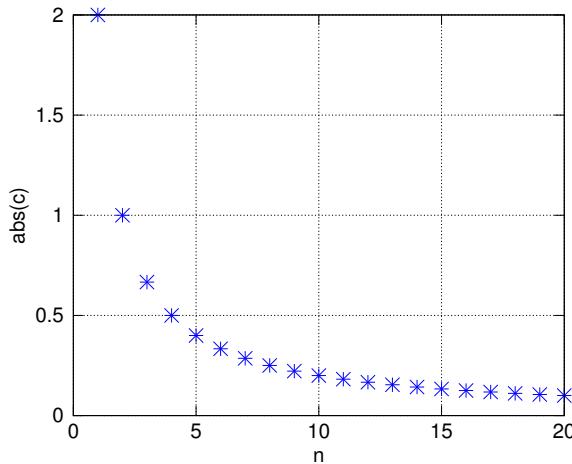
b = coeff(1:N)

figure(1)
plot(1:N,abs(b),'*')
xlabel('n'); ylabel('abs(c)');
grid on;

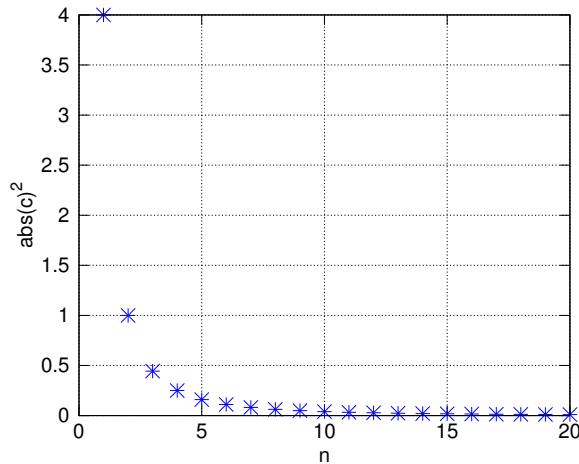
figure(2)
plot(1:N,abs(b).^2,'*')
xlabel('n'); ylabel('abs(c)^2');
grid on;

```

Oft wird das Quadrat der Koeffizienten aufgetragen, da dieser der in dieser Frequenz steckenden Energie entsprechen kann (bei elektrischen Signalen). Das Resultat ist das **Leistungsspektrum** des Signals. Beim Studium und Erstellen solcher Graphen muss man immer genau untersuchen welcher Ausdruck aufzutragen ist.



(a) Betrag der Koeffizienten



(b) Quadrate des Betrags der Koeffizienten

Abbildung 1.27: Amplitudenspektren der Funktion $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$

1.8 Faltung

1.8.1 Definition und Illustration der Faltung

1–30 Beispiel : Temperaturverteilung in der Atmosphäre mit einem Satelliten messen. Dieses Beispiel ist dem Buch [Twom77, p. 2] entnommen.

Wir gehen davon aus, dass die Atmosphäre infrarote Strahlung erzeugt, deren Intensität gemäss einem bekannten Gesetz von der Temperatur abhängt (wahr). Weiter verwenden wir, dass auf jeder Höhe die Energie mit einer charakteristischen Wellenlänge λ ausgestrahlt wird (nicht korrekt). Es gibt also eine wahre Intensitätsfunktion $I_{eff}(\lambda)$. Dadurch kann ein über der Atmosphäre plazierter Satellit die Intensität der Strahlung für verschiedene Wellenlängen messen und dadurch den Temperaturverlauf, abhängig von der Höhe bestimmen. Leider ist es nicht möglich nur eine Wellenlänge λ zu messen. Neben der gewünschten Wellenlänge λ werden auch noch Intensitäten von benachbarten Wellenlängen mitgemessen, wenn auch mit immer kleiner werdendem Anteil. Eine solche Intensitätsverteilung ist in Abbildung 1.28 gezeigt⁵. Man erhält eine gemessene Intensitätsverteilung $I_{mess}(\lambda)$. Mit der gewünschten Wellenlänge $\lambda = 3$ werden auch Wellenlängen zwischen 2 und 4 mitgemessen. Offensichtlich hat die Breite dieser „Schlitzfunktion“ einen Einfluss auf die Qualität der Messung, je schmäler der Schlitz, desto weniger Streueffekte werden mitgemessen.

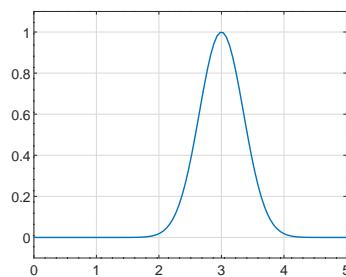


Abbildung 1.28: Intensitätsverteilung

In Abbildung 1.28 sehen sie als Filterfunktion eine Glockenkurve $f(x) = e^{-4(x-3)^2}$. Für die Wel-

⁵Optische Filter dieser Art werden hergestellt, z.B. durch Thorlabs <https://www.thorlabs.com>.

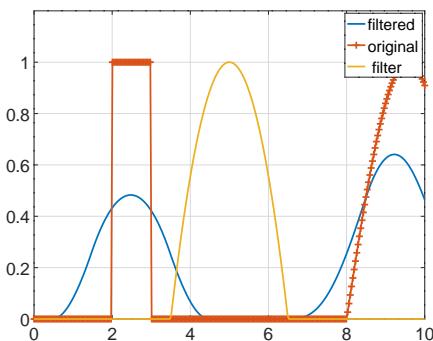
Wellenlänge $\lambda = 3$ erhält man

$$I_{mess}(3) = \int_0^\infty e^{-4(x-3)^2} I_{eff}(x) dx$$

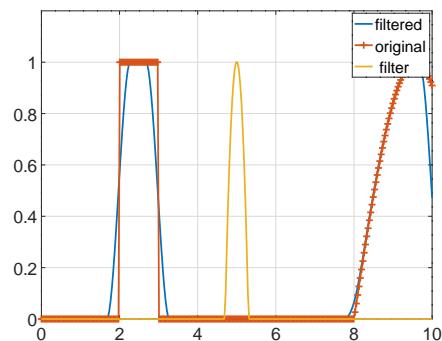
Verwendet man eine um 0 zentrierte Filterfunktion $f(x)$ (z.B. $f(x) = e^{-4x^2}$) so wird diese durch $f(\lambda - x)$ bei der Wellenlänge λ „zentriert“. Es ergibt sich die gemessene Intensität

$$I_{mess}(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda - x) I_{eff}(x) dx$$

Die effektive Intensität $I_{eff}(\lambda)$ wird durch die Funktion f ausgeschmiert zur gemessenen Intensität $I_{mess}(\lambda)$.



(a) breiter Filter



(b) schmäler Filter

Abbildung 1.29: Intensitätsverteilung mit zwei verschiedenen Filterfunktionen

In Abbildung 1.29 sehen Sie eine effektive Intensität $I_{eff}(\lambda)$ mit einer breiten (1.29(a)) und einer schmalen (1.29(b)) Filterfunktion. Sie sehen das effektive Signal $I_{eff}(\lambda)$, das gemessene Signal $I_{mess}(\lambda)$ und die Filterfunktion (in der Mitte). Da die ursprüngliche Funktion nur auf dem Intervall $[0, 10]$ definiert war, wurde sie für die anderen Werte durch 0 fortgesetzt. Dies führt zum Abfallen der gemessenen Intensität $I_{mess}(\lambda)$ am rechten Bildrand, da die Werte 0 außerhalb des Bildes auch berücksichtigt werden. Es ist deutlich zu erkennen, dass die schmale Filterfunktion einen viel kleineren Effekt auf das gemessene Signal hat, es wird weniger ausgeschmiert. ◇

Das obige Beispiel ist ein Spezialfall eines **Faltungsintegrals**. Es wurden nur positive Wellenlängen verwendet und eine der Funktionen hatte den Effekt eines Filters. Hier ist die Definition der Faltung von zwei (fast) beliebigen Funktionen.

1–31 Definition : Sind zwei Funktionen f und g definiert auf der ganzen reellen Achse, so ist die Faltung der beiden Funktionen wiederum eine Funktion, gegeben durch

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$$

Hierbei wird natürlich verlangt, dass dieses uneigentliche Integral existiert⁶.

⁶Im Kapitel über Laplacetransformation wurde eine leicht andere Definition der Faltung gegeben

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

Der einzige Unterschied liegt in den Integrationsgrenzen. Für **Laplacetransformationen werden alle Funktion für negative Argumente zu Null gesetzt**. Ist τ nicht im Intervall $[0, t]$ so ist entweder τ oder $t - \tau$ negativ, somit die zu integrierende Funktion 0 und das Faltungsintegral kann auf das Intervall $[0, t]$ reduziert werden.

1–32 Beispiel : Um den Wert $(f * g)(x)$ der Faltung zweier Funktionen zu berechnen kann man folgendermassen vorgehen:

1. Den Graphen der Funktion $g(\tau)$ aufzeichnen.
2. Den Graphen der Funktion $f(\tau)$ an der y -Achse spiegeln und um x Einheiten nach rechts schieben.
3. Sie erhalten so zwei übereinanderliegende Funktionen. Diese sind zu multiplizieren und das Resultat zu integrieren.

◇

Nun werden wir die Definition der Faltung auf die Situation von 2π -periodischen Funktionen anpassen und den wichtigen Zusammenhang zu Fourierreihen (Faltungssatz) herleiten. Auf die Faltung von auf der reellen Achse definierten Funktionen werden wir in Kapitel über Fourier–Transformationen zurückkommen.

1.8.2 Faltung von 2π -periodischen Funktionen und Vektoren

In diesem Abschnitt betrachten wir 2π -periodische Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ mit den komplexen Darstellungen

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{inx} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{n=-N}^N G_n e^{inx}$$

Die komplexen Zahlen F_n und G_n sind also die Fourierreihenkoeffizienten

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{und} \quad G_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx$$

und für $|n| > N$ gilt $F_n = G_n = 0$, d.h. die vorkommenden Frequenzen sind beschränkt. Mittels einer Grenzwertbetrachtung $N \rightarrow \infty$ könnte diese Einschränkung entfernt werden.

1–33 Definition : Faltung von 2π -periodischen Funktionen

Die **Faltung von zwei Funktionen** ergibt wiederum eine Funktion. Sie ist gegeben durch.

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) g(s) ds$$

Aufgrund der Periodizität der Funktion f ist auch die Faltung eine 2π -periodische Funktion.

1–34 Definition : Faltung von Vektoren

Sind

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_{-N} \\ F_{-N+1} \\ \vdots \\ F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} G_{-N} \\ G_{-N+1} \\ \vdots \\ G_0 \\ \vdots \\ G_{N-1} \\ G_N \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren mit $2N + 1$ Komponenten, so ergibt die **Faltung von zwei Vektoren** wiederum einen Vektor $\vec{H} = \vec{F} * \vec{G}$ mit

$$H_n = \sum_{k=-N}^N F_{n-k} G_k$$

Ist $|n - k| > N$ so setzt man $F_{n-k} = 0$. Der neue Vektor hat $4N + 1$ Komponenten, d.h. fast doppelt so viele wie die ursprünglichen Vektoren.

$$\vec{H} = (H_{-2N}, H_{-2N+1}, \dots, H_0, \dots, H_{2N-1}, H_{2N})$$

1–35 Beispiel : Um die j -te Komponente H_j der Faltung der beiden Vektoren

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_{-n}, F_{-n+1}, \dots, F_0, \dots, F_{n-1}, F_n) \\ \vec{G} &= (G_{-n}, G_{-n+1}, \dots, G_0, \dots, G_{n-1}, G_n)\end{aligned}$$

zu bestimmen kann man folgendermassen vorgehen:

1. Die Komponenten des Vektors \vec{G} horizontal anschreiben
2. Den Vektor \vec{F} „wenden“ und um j Einheiten nach rechts schieben. F_0 sollte unter der Komponente G_j stehen.
3. Sie erhalten so zwei Reihen von Zahlen, fehlende Zahlen sind durch 0 zu ergänzen.
4. Die untereinander stehenden Zahlen multiplizieren und die Resultate anschliessend summieren.

Als konkretes Beispiel berechnen wir die Komponente H_{-2} des Vektors

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgrund des obigen Rechenschemas erhält man

$$\begin{array}{r} 6 \quad 0 \quad -2 \quad 5 \quad 1 \\ 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 18 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Die Summe der Zahlen in der letzten Zeile ist 16. Dieses Resultat wird bestätigt durch die Rechnung mit Octave. Es ist zu beachten, dass die Numerierung der Komponenten in der Mitte beginnt, in diesem Beispiel ist $H_0 = 35$. In dieser Illustration ist auch leicht ersichtlich weshalb die Faltung die Anzahl der Komponenten in den Vektoren (fast) verdoppelt.

Octave

```
conv([ 1 2 3 4 5], [6 0 -2 5 1])
```

```
.
```

```
6 12 16 25 35 9 13 29 5
```

◇

1–36 Beispiel : Der $(2n + 1)$ -Vektor \vec{G} bestehe nur aus Nullen, ausser in der Mitte, dort steht die Zahl 1.

$$\vec{G} = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)$$

Dann gilt für alle Vektoren⁷ \vec{F}

$$\vec{F} * \vec{G} = \vec{F}$$

d.h. eine Faltung mit dem sehr speziellen Vektor \vec{G} gibt den ursprünglichen Vektor \vec{F} zurück. ◇

⁷Hier ignorieren wir, dass die Vektoren \vec{F} rechts und links nicht die selbe Anzahl Komponenten enthalten. Fehlende Komponenten sind durch 0 zu ersetzen.

Aufgrund der Eigenschaften des Integrals und der Summe gilt:

1-37 Satz : Für Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ gilt

$$\begin{array}{ll} f * g = g * f & \text{Kommutativität} \\ f * (g + h) = f * g + f * h & \text{Distributivgesetz} \\ f * (c \cdot g) = c(f * g) & \text{Linearität} \end{array}$$

Die entsprechenden Resultate sind auch für die Faltung von Vektoren richtig.

Beweis : Wir untersuchen nur die Kommutativität der Faltung von Vektoren. Läuft der alte Index k von $-N$ zu N , so läuft der neue Index $j = n - k$ (oder $k = n - j$) von $n + N$ zu $n - N$. Da $F_j = G_j = 0$ für $|j| > N$ kann der Summationsbereich verschoben werden, ohne die Summe zu ändern.

$$(\vec{F} * \vec{G})_n = \sum_{k=-N}^N F(n-k) G(k) = \sum_{j=n-N}^{n+N} F(j) G(n-j) = \sum_{j=-N}^N G(n-j) F(j) = (\vec{G} * \vec{F})_n$$

□

1.8.3 Faltungssatz

Nun haben wir die Begriffe und Resultate zur Verfügung, um den **Faltungssatz** für periodische Funktionen zu beweisen.

1-38 Theorem : Sind \vec{F} , \vec{G} und \vec{H} die Vektoren der komplexen Fourierkoeffizienten der 2π -periodischen Funktionen $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ so gilt

$$\begin{aligned} h(t) = (f * g)(t) &\iff H_n = 2\pi F_n \cdot G_n \\ \vec{H} = \vec{F} * \vec{G} &\iff h(t) = f(t) \cdot g(t) \end{aligned}$$

Durch die Fouriertransformation wird aus einer Faltung eine elementweise (punktweise) Multiplikation.

Beweis : Mit $h = f * g$ gilt

$$h(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(t-s) ds$$

Nun kann man durch einfache, leider längere Umformungen nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(t-s) e^{-int} dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t-s) e^{-int} dt \right) ds \\ \text{Substitution } \tau &= t-s \quad \text{und} \quad d\tau = dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\int_{-\pi-s}^{\pi-s} g(\tau) e^{-in(\tau+s)} d\tau \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\pi F_n 2\pi G_n = 2\pi F_n G_n
\end{aligned}$$

Dies ist die erste Behauptung des Faltungssatzes.

Ist die Funktion $h(t)$ gegeben durch $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ so kann man die Darstellungen der einzelnen Funktionen als Fourier-Summen verwenden und erhält

$$\begin{aligned}
H_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-N}^N F_k e^{ikt} \right) \left(\sum_{l=-N}^N G_l e^{ilt} \right) e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \left(\sum_{l=-N}^N F_k G_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{ilt} e^{-int} dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \left(\sum_{l=-N}^N F_k G_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+l-n)t} dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N F_k G_{n-k} 2\pi \\
&= (\vec{F} * \vec{G})_n
\end{aligned}$$

Um aus der Doppelsumme eine einfache Summe zu machen verwendet man die Identität.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{falls } m = 0 \end{cases}$$

Das Integral in der obigen Summe ist somit nur von Null verschieden wenn $n - k - l = 0$, d.h. $l = n - k$. Damit ist auch der zweite Teil des Faltungssatzes bewiesen. \square

1.8.4 Anwendungen der Faltung

Es gibt sehr viele Anwendungen der Faltung und folglich auch sehr viel Literatur. Die hier ausgewählten Beispiele stammen aus den Büchern [Twom77], [Grun93] und [OppeScha89]. Weiter Anwendungen finden Sie in [Oppe78].

Fenster-Funktionen (fanz. fenêtreage)

In einem Signal $f(t)$ für $-\infty < t < \infty$ sind nicht nur diskrete Frequenzen vertreten sondern Anteile mit beliebigen Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ können auftreten. Um Fourierreffizienten dieses gemessenen Signals zu bestimmen können wir natürlich nur auf einem endlichen Zeitintervall messen und hoffen somit das Signal richtig erfasst zu haben. Es werden sich systematische Messfehler ergeben. Der Effekt wird hier mit einem „unendlich“ langen Intervall $[-\pi, \pi]$ und einem Messintervall $[-0.2, 0.2]$ illustriert. Das Messen für Zeiten $-0.2 < t < 0.2$ kann durch eine Multiplikation des wahren Signals $f(t)$ mit der Fensterfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -0.2 < t < 0.2 \\ 0 & \text{falls } |t| \geq 0.2 \end{cases}$$

beschrieben werden. Das gemessene Signal ist nun

$$h(t) = f(t) \cdot g(t)$$

Aufgrund des Faltungssatzes gilt für die Vektoren der entsprechenden Fourierkoeffizienten

$$\vec{H} = \vec{F} * \vec{G}$$

Statt des „richtigen“ Spektralvektors \vec{F} misst man den Vektor \vec{H} . Nun soll der Einfluss dieses systematischen

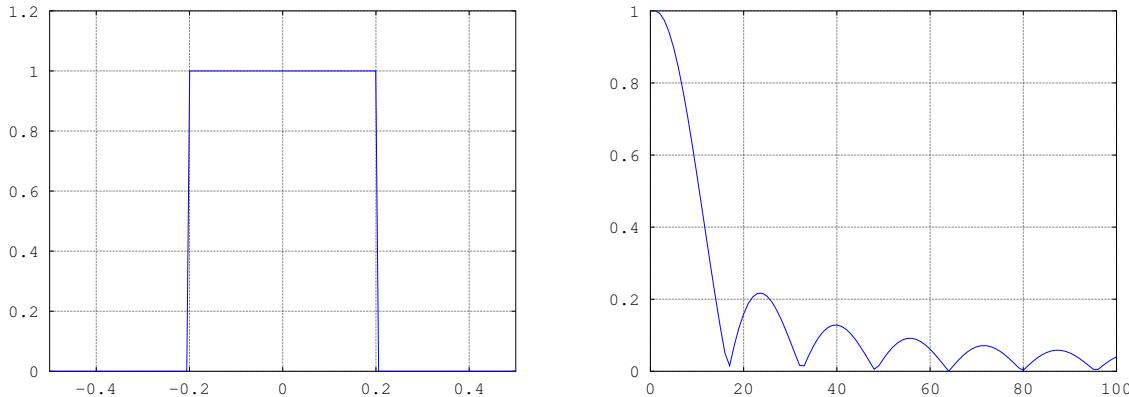


Abbildung 1.30: Eine Rechteckfunktion und ihr Amplitudenspektrum

Fehlers auf die Fourierkoeffizienten kontrolliert werden, d.h. der Einfluss der Faltung von \vec{F} mit \vec{G} muss untersucht werden. In Abbildung 1.30 sehen Sie den Graphen der Fensterfunktion $g(t)$ und den Absolutbetrag der ersten 100 der berechneten 1024 Fourierkoeffizienten G_n . Aufgrund von Symmetrievergleichungen sind die Koeffizienten reell und es gilt $G_{-n} = G_n$.

Ideal wäre die Situation $G_0 = 1$ und $G_n = 0$ für $n \neq 0$, weil dann die Faltung die Koeffizienten von \vec{F} nicht verändern würde. Somit ist ein enges Maximum bei $n = 0$ und ein schnelles Abfallen der Koeffizienten für grosse Werte von n anzustreben. Die Koeffizienten des „wahren“ Signals \vec{F} werden durch Faltung mit dem (symmetrisch ergänzten) Vektor \vec{G} ausgeschmiert. Das Amplitudenspektrum in Abbildung 1.30 zeigt ein ähnliches Verhalten.

Als Testbeispiel untersuchen wir die Funktion

$$f(t) = \sin(100.1t) + 0.5 \cos(25.2t) \quad \text{für } -\pi < t < \pi$$

In Abbildung 1.31 sehen Sie die Amplitudenspektren von $f(t)$ und $f(t) \cdot g(t)$.

Man erkennt, dass die Fensterfunktion einen Einfluss hat auf das **Auflösungsvermögen** der Spektrumsmessung. Ist der Abstand zweier Frequenzen kleiner als die typische Breite des Hauptmaximas des Amplitudenspektrums der Fensterfunktion, so „verschmiert“ die Faltung die beiden Frequenzen zu einer einzigen und die beiden können nicht unterschieden werden. Auch Nebenmaxima können die Messung verfälschen.

Bereits im Spektrum von $f(t)$ sind die beiden Beiträge bei $\omega = 25.2$ und $\omega = 100.1$ etwas ausgeschmiert, da wir auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ eingeschränkt haben. Durch die neuere Einschränkung auf $[-0.2, 0.2]$ durch Multiplikation mit der Rechtecksfunktion $g(t)$ werden die beiden Spitzen des Signals wesentlich ausgeschmiert. Man kann die Haupt- und Nebenmaxima aus Abbildung 1.30 gut wiedererkennen.

Einer der bei Messungen zu wählenden Parameter ist die Breite des Fensters. Ein breites Fenster entspricht einem langen Messintervall und sollte die Messung weniger verfälschen. Dies zeigt sich im Amplitudenspektrum durch ein schmales Hauptmaximum. Drei typische Vergleichssituationen sind in Abbildung 1.32 aufgezeigt. Man stellt fest, dass das Produkt der Breite des Fensters mit der Breite des Hauptmaximas des Amplitudenspektrums konstant ist. In Übungsaufgabe 1-48 (Seite 124) können Sie die Details dieser Überlegung nachvollziehen.

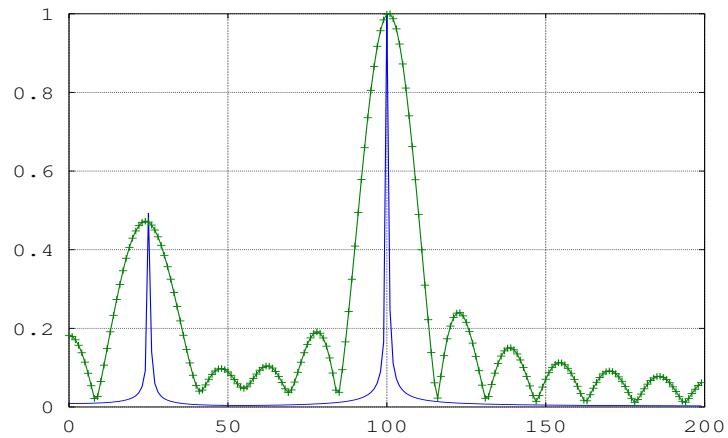
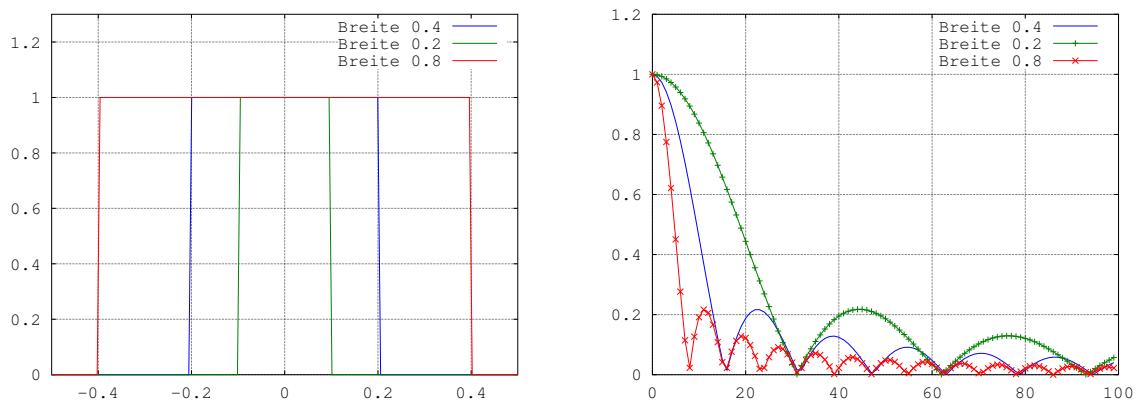
Abbildung 1.31: Amplitudenspektrum von $f(t)$ und $f(t) \cdot g(t)$ 

Abbildung 1.32: Mehrere Rechteckfunktionen und ihr Amplitudenspektrum

Es ist zu beachten, dass die oben vorgestellten Effekte der Fensterfunktion auf die Messung des Amplitudenspektrums nicht verkleinert werden können durch eine höhere Abtastfrequenz.

Verschiedene Fensterfunktionen

Es können auch andere Fensterfunktionen eingesetzt werden. Ziel ist es das Spektrum des „wahren“ Signals möglichst nicht zu verändern. Aufgrund des obigen Beispiels ergeben sich die folgenden Kriterien an das Amplitudenspektrum einer Fensterfunktion:

- Schmale hohe Spitze bei 0.
- Möglichst schnell abfallend für grosse Werte der Frequenz.
- Möglichst tiefe Nebenmaxima.

Hier ist eine kurze Liste von möglichen Fensterfunktionen. All Fenster haben Breite $2w$. In Abbildung 1.33 finden Sie die Graphen der Fensterfunktionen (mit $w = 0.2$) und ihre Amplitudenspektren. Um mehrere Größenordnungen der Amplitudenwerte zu erfassen wird eine Dezibelskala verwendet für die Amplitudenspektren.

- **Rechteck–Fenster**

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -w < t < w \\ 0 & \text{falls } |t| \geq w \end{cases}$$

- **Dreieck–Fenster**

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t| / w & \text{falls } -w < t < w \\ 0 & \text{falls } |t| \geq w \end{cases}$$

- **Parabel–Fenster**

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t^2 / w^2 & \text{falls } -w < t < w \\ 0 & \text{falls } |t| \geq w \end{cases}$$

- **Hanning–Fenster**

$$g(t) = \begin{cases} \cos^2(t \frac{\pi}{2w}) & \text{falls } -w < t < w \\ 0 & \text{falls } |t| \geq w \end{cases}$$

- **Hamming–Fenster**

$$g(t) = \begin{cases} 0.08 + 0.92 \cos^2(t \frac{\pi}{2w}) & \text{falls } -w < t < w \\ 0 & \text{falls } |t| \geq w \end{cases}$$

In Abbildung 1.33 kann man deutlich erkennen, dass die Rechteckfunktion klar das schmalste Hauptmaximum hat, dafür hat z.B. das Hamming–Fenster ein sehr schwaches erstes Nebenmaximum. Als Beispiel untersuchen wir die Funktion

$$f(t) = \sin(100.1t) + 0.5 \cos(25.2t) \quad \text{für } -\pi < t < \pi.$$

Das Signal wurde mit einem Rechteck– und einem Hamming–Fenster abgeschnitten und dann die Amplitudenspektren aufgezeichnet. Das Resultat finden Sie in Abbildung 1.34. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Hamming–Fenster die beiden Hauptmaxima stärker verbreitert, dafür zu deutlich kleineren Nebenmaxima führt. In Anwendungen ist abzuschätzen welcher Effekt wichtiger ist.

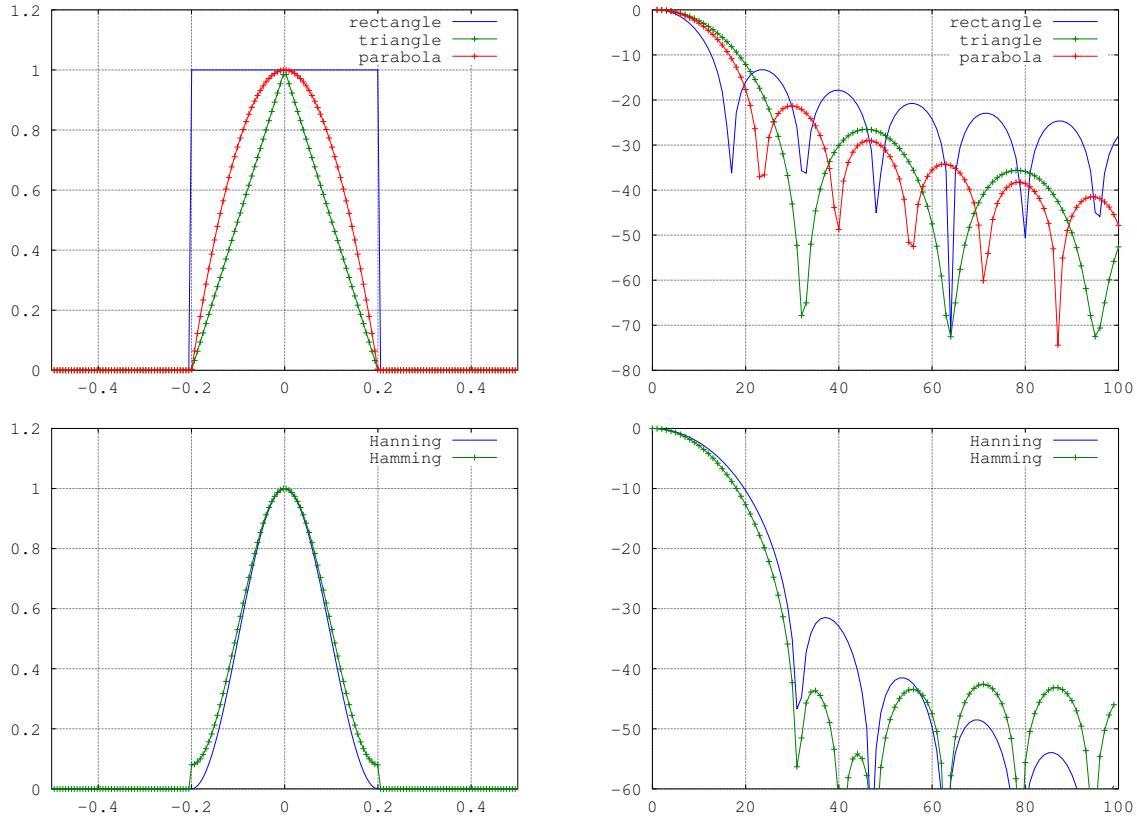
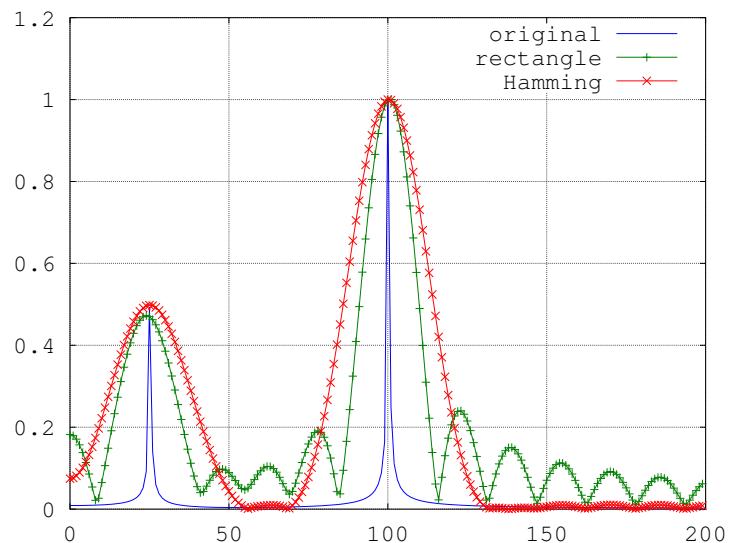


Abbildung 1.33: Einige Fensterfunktionen und Ihre Amplitudenspektren (Dezibel-Skala)

Abbildung 1.34: Amplitudenspektrum von $f(t)$, mit Rechteck- und Hamming-Fenster

Faltung und Korrelation

Die beiden Integralformeln für Faltung und Korrelation von zwei Funktionen sehen sehr ähnlich aus.

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(x-s) ds \\ \text{corr}(T) &= \frac{1}{\|f\| \|g\|} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t-T) dt\end{aligned}$$

Betrachtet man statt der ursprünglichen Funktion $g(t)$ die gespiegelte Funktion $g_s(t) = g(-t)$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}(f * g_s)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g_s(x-s) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) g(s-x) ds \\ &= \text{corr}(x) \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

Da die Fouriertransformation aus einer Faltung eine Multiplikation macht kann die Korrelationsfunktion auch mit dem folgenden, auf den ersten Blick zu komplizierten Verfahren bestimmt werden. Dank des FFT-Algorithmus ist dieser Ansatz aber sehr effizient und wird in vielen Anwendungen eingesetzt.

1. $f(t)$ und $g(t)$ „messen“.
2. Die Spiegelung $g_s(t) = g(-t)$ bestimmen.
3. Die Vektoren \vec{F} und \vec{G}_s der Fourierkoeffizienten bestimmen.
4. Das elementweise Produkt bestimmen $H_n = F_n \cdot (G_s)_n$.
5. Mit Hilfe von

$$\text{corr}(T) = h(T) = \sum_{n=-N}^{N} H_n e^{i n T}$$

die Korrelationsfunktion bestimmen (Fourierrücktransformation).

Es ist unbedingt zu beachten, dass das **Entfalten** von Signalen ein **schlecht konditioniertes Problem** ist, d.h. es ist numerisch extrem empfindlich auf kleine Störungen. Auch bei bekannter Fensterfunktion $g(t)$, resp. G_n , und gemessenem $h(t)$, resp. H_n , kann aus

$$F_n = \frac{H_n}{G_n}$$

nur in den seltensten Fällen die Funktion $f(t)$ stabil rekonstruiert werden. Das Problem und mögliche Lösungsansätze sind in [Twom77] beschrieben.

1.9 Diskrete Fouriertransformation DFT und Fast Fourier Transform FFT

Bisher wurden Fourier-Reihen von periodischen Funktionen untersucht, d.h. unendlich viele Terme in den Summen und die Koeffizienten sind durch Integrale zu bestimmen. Bei Messungen sind immer nur diskrete Werte bekannt und somit sind die Integrale numerisch zu bestimmen, d.h. durch Summen. Das wird auf die **Diskrete Fourier Transformation (DFT)** führen. Eine effiziente Berechnung der Summen der DFT wird auf die **FFT (Fast Fourier Transform)** führen. Im nächsten Kapitel werden wir uns auch mit nicht periodischen Funktionen beschäftigen, d.h. mit Fourier Transformationen. Die Verbindungen sind in Abbildung 1.35 dargestellt.

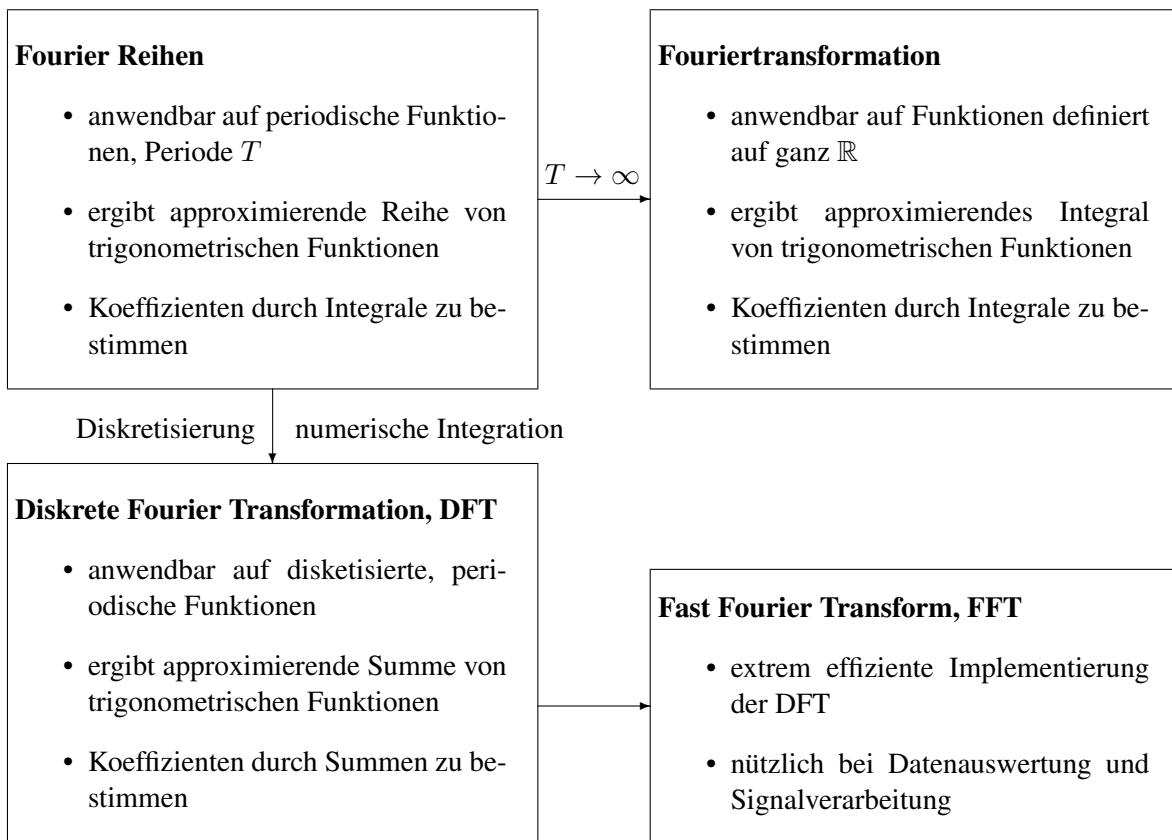


Abbildung 1.35: Fourier Methoden

Wir untersuchen in diesem Abschnitt T -periodische Funktionen und deren Fourierreihen. Wir gehen davon aus, dass die Funktion an N äquidistanten Punkten $t_k = k T/N$ gegeben ist und um die Notation zu vereinfachen setzen wir

$$f_k = f(t_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right) \quad \text{und} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Da die Funktion f T -periodisch ist gilt $f_0 = f_N$. Nun geht es darum die Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

durch numerische Integration zu bestimmen. Mit den Bezeichnungen

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{N}, \quad \omega \Delta t = \frac{2\pi}{N}$$

kann die Trapezregel⁸ mit einem Zeitschritt von $\Delta t = T/N$ verwendet werden. Das führt auf die Formel

$$c_n \approx y_n = \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ink\omega\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ink\omega\Delta t}$$

⁸Beachte, dass $f_0 = f_N$ und $\exp(i N k \omega \Delta t) = \exp(i k 2 \pi) = 1$.

und der Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

ist die **diskrete Fouriertransformierte der Funktion** f , oder kurz DFT.

Mit

$$w = e^{i\omega\Delta t} = e^{i2\pi/N}$$

gilt

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{-nk} f_k \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.3)$$

Die $N \times N$ -**Fouriermatrizen** sind gegeben durch

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & w^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{1(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Das Element der $(k+1)$ -ten Zeile und $(j+1)$ -ten Spalte von \mathbf{F}_N ist gegeben durch w^{kj} . Es ist zu beachten, dass wegen $w^N = 1$ nur N verschiedene Zahlen in dieser Matrix auftreten. So ist zum Beispiel

$$\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Nun kann die obige Formel für die diskrete Fouriertransformation auch geschrieben werden als

$$\vec{y} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N} \vec{f}$$

Somit kann man aus dem Vektor \vec{f} den neuen Vektor \vec{y} durch eine Matrixmultiplikation bestimmen. Es stellt sich die Frage ob man aus dem Resultat \vec{y} auch den ursprünglichen Vektor \vec{f} rekonstruieren kann. Die Antwort ist gegeben durch das folgende Resultat.

1–39 Satz :

$$\mathbf{F}_N \cdot \overline{\mathbf{F}_N} = \overline{\mathbf{F}_N} \cdot \mathbf{F}_N = N \mathbb{I}$$

Beweis :

Das Element der $(k+1)$ -ten Zeile und $(l+1)$ -ten Spalte von $\mathbf{F}_N \cdot \overline{\mathbf{F}_N}$ ist gegeben durch

$$\sum_{j=0}^{N-1} w^{jk} \overline{w^{jl}} = \sum_{j=0}^{N-1} w^{jk} w^{-jl} = \sum_{j=0}^{N-1} w^{j(k-l)} = \begin{cases} N & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Ist $k = l$ so ist jeder Summand 1 und das Resultat offensichtlich. Ist $k \neq l$, so setzen wir $z = w^{k-l}$. Wegen $w^N = 1$ ist auch $z^N = 1$ und die obige Summe führt auf

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} = 0$$

□

Die Matrix \mathbf{F}_N ist also invertierbar und die inverse Matrix ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N}$$

Folglich gilt auch

$$\vec{y} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N} \vec{f} \quad , \quad \vec{f} = \mathbf{F}_N \vec{y}$$

Das ist die Matrixformulierung der **inversen diskreten Fouriertransformation**. Mit der Summennotation lautet dieselbe Formel

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{nk} y_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i n k \omega \Delta t} y_n \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Die Differenz der diskreten Fouriersumme und der kontinuierlichen Fourierreihe kann berechnet werden.

1-40 Satz : Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion, deren Fourierreihe überall gegen f konvergiert und

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

DFT diskret	Fourier Reihe kontinuierlich
$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i \frac{2\pi}{N} n k}$ $f_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} n k} y_n$	$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \frac{2\pi}{T} t} dt$ $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \frac{2\pi}{T} t}$

Für die Praxis: Wird die T -periodische Funktion $f(t)$ in konstanten Zeitabständen $\Delta t = T/N$ abgetastet, so erhält man eine N -periodische Folge von Abtastwerten. Von dieser Folge betrachtet man die ersten N Werte und steckt sie in einen Vektor \vec{f} . Aus diesem Vektor erzeugt man mittels der obigen Formel den Vektor \vec{y} der **Spektralwerte**. Aus den Spektralwerten alleine lassen sich die Abtastwerte wieder rekonstruieren.

Für eine steige, T -periodische Funktion $f(t)$ kann die Differenz der Fourierkoeffizienten c_n und den diskreten Koeffizienten y_n bestimmt werden mit Hilfe von

$$f_k = f(k \Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega k \Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n k \frac{2\pi}{N}}$$

und

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(l-n)k \frac{2\pi}{N}} = \begin{cases} 1 & \text{für } l - n = pN \\ 0 & \text{für } l - n \neq pN \end{cases}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i n k \frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i l k \frac{2\pi}{N}} \right) e^{-i n k \frac{2\pi}{T}} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(c_l \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(l-n)k \frac{2\pi}{N}} \right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{n+pN} = c_n + \sum_{|p| \geq 1} c_{n+pN} \end{aligned}$$

und somit

$$y_n - c_n = \sum_{|p| \geq 1} c_{n+pN} = c_{n+N} + c_{n-N} + c_{n+2N} + c_{n-2N} + c_{n+3N} + c_{n-3N} + \dots$$

1.9.1 Schnelle Fouriertransformation, FFT

Im Jahre 1965 haben James Cooley und John Tukey einen genialen Algorithmus gefunden um die FTD zu bestimmen [CoolTuke65]. Dieses Resultat ist einer der wesentlichen Gründe für die sehr verbreitete Anwendung der DFT von Ingenieuren.

Die obige Darstellung der diskreten Fouriertransformation als Matrizenmultiplikation deutet darauf hin, dass für eine Transformation von N Datenpunkten N^2 Operationen (Multiplikationen) nötig sind. Dieser Abschnitt zeigt, dass man die selben Resultate auch mit wesentlich kleinerem Rechenaufwand erhalten kann. Dazu sehen wir uns die Transformation eines Spektralvektors \vec{y} der Länge $2N$ an und teilen ihn auf in Teile mit geraden und ungeraden Indizes

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{2N-2} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{2N-1} \end{pmatrix}$$

Den Vektor \vec{f} der Abtastwerte teilen wir auf in eine obere und eine untere Hälfte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} f_N \\ f_{N+1} \\ f_{N+2} \\ \vdots \\ f_{2N-1} \end{pmatrix}$$

Nun schreiben wir die obige Formel um

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{k=0}^{2N-1} w^{nk} y_k = \sum_{j=0}^{N-1} w^{2nj} y_{2j} + \sum_{j=0}^{N-1} w^{2nj+n} y_{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} g_j + w^n \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} u_j \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2N-1 \end{aligned}$$

Die Zahl $w = \exp(i 2 \pi / (2N))$ wurde für die Transformation von $2N$ Datenpunkten konstruiert und somit gilt $w^{2N} = 1$ und $w^N = -1$. Wir können die obige Summenformel für f_n nun umschreiben zu

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} g_j + w^n \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} u_j \\ b_n &= \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} g_j - w^n \sum_{j=0}^{N-1} (w^2)^{nj} u_j \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau zwei diskreten Fouriertransformationen der Länge N .

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \mathbf{F}_N \vec{g} + \text{diag}(1, w^1, w^2, w^3, \dots, w^{N-1}) \mathbf{F}_N \vec{u} \\ \vec{b} &= \mathbf{F}_N \vec{g} - \text{diag}(1, w^1, w^2, w^3, \dots, w^{N-1}) \mathbf{F}_N \vec{u} \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $A(N)$ die Anzahl der notwendigen Operationen (Multiplikationen), um eine diskrete Fouriertransformation der Länge N durchzuführen, so zeigt die obige Formel

$$A(2N) = 2 A(N) + N$$

Ist N von der Form 2^M für ein ganzzahliges M , so lässt sich diese Verfahren rekursiv weiterführen und ergibt das sehr wichtige Resultat über die **schnelle Fouriertransformation**⁹.

1-41 Theorem : Die inverse diskrete Fouriertransformation eines Spektralvektors der Länge N lässt sich mit weniger als

$$N \log_2 N$$

Operationen ausführen, falls N eine Zweierpotenz ist.

Der untenstehende einfache Beweis ist nur für Zweierpotenzen richtig. Die FFT kann auch für Vektoren anderer Länge bestimmt werden. Der Algorithmus ist komplexer und nicht ganz so effizient, aber immer noch erheblich schneller als eine klassische Matrizenmultiplikation.

Beweis : Durch Induktion. Sei

$$h(n) = n \log_2 n$$

Zu zeigen ist $A(n) \leq h(n)$

- Verankerung: Es gilt $h(2) = A(2) = 2$

- Induktionsschritt von n auf $2n$:

Verwende $A(n) \leq h(n)$ um zu zeigen, dass $A(2n) \leq h(2n)$.

Die Rechenregeln für Logarithmen ergeben

$$h(2n) = 2n \log_2 (2n) = 2(n \log_2 n + n) \geq 2h(n) + n$$

Wegen $A(n) \leq h(n)$ und $A(2N) = 2A(N) + N$ gilt also

$$h(2n) \geq 2h(n) + n \geq 2A(n) + n = A(2N)$$

Somit folgt mittels Induktion die Behauptung für alle Zweierpotenzen n . □

⁹Der Cooley-Tukey Algorithmus, benannt nach J.W. Cooley and John Tukey, wurde 1965 in publiziert. Es ist eine der wichtigsten Anwendungen der Mathematik

Diese Resultat muss unbedingt mit der direkten Matrizenmultiplikation verglichen werden. Multipliziert man eine $N \times N$ Matrix mit einem N Vektor, so sind N^2 Multiplikationen notwendig. Die folgende Tabelle vergleicht die beiden Verfahren. In praktischen Anwendungen sind FFT mit 4096 Punkten durchaus üblich.

N	Matrizenmultiplikation N^2	FFT $N \log_2 N$	Faktor $N / \log_2 N$
16	256	64	4
128	≈ 16000	≈ 900	18
1024	$\approx 10^6$	$\approx 10^4$	100
4096	$\approx 1.6 \cdot 10^7$	$\approx 4.9 \cdot 10^4$	341
2^{20}	$\approx 10^{12}$	$\approx 20 \cdot 10^6$	50 000

1.9.2 Amplitude bei einer bestimmten Frequenz, Goertzel Filter

Ein kontinuierliches, reelles Signal $f(t)$ enthält einen Anteil mit einer Frequenz $\frac{\nu}{2\pi}$. Dieses Signal wird während einer grossen Zeit T gemessen und dann mittels der Bedingung

$$\nu = n \omega = n \frac{2\pi}{T}$$

der Fourierkoeffizient bestimmt als

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \omega t} dt$$

Dann kann die Amplitude des Signal mit der Frequenz $\frac{\nu}{2\pi}$ bestimmt werden durch $2 \|c_n\|$, d.h. die Funktion $f(t)$ hat einen Anteil

$$2 |c_n| \cos(n \omega t + \delta)$$

Nun versucht man die obige Berechnung für diskrete Signale möglichst analog zu bestimmen und effizient zu berechnen.

- Die kontinuierliche Funktion $h(t) = e^{-i n \omega t}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) = -(n \omega)^2 h(t) \quad \text{mit} \quad h(0) = h(T) = 1$$

Nun untersucht man die diskreten Werte im Abstand $\Delta t = \frac{T}{N}$

$$z_k = h(\Delta t k) = e^{-i n \omega \Delta t k} = w^{-n k} \quad \text{wobei} \quad w = e^{i \omega \Delta t} = \cos(\omega \Delta t) + i \sin(\omega \Delta t)$$

Statt der zweiten Ableitung der Funktion verwendet man Differenzenquotienten, d.h.

$$\begin{aligned} \ddot{h}(t) &\approx \frac{\dot{h}(t + \Delta t/2) - \dot{h}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} - \frac{h(t) - h(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{h(t - \Delta t) - 2 h(t) + h(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2} \end{aligned}$$

Die Folge z_k von komplexen Zahlen erfüllt die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} z_{k-1} - 2 z_k + z_{k+1} &= w^{-n(k-1)} - 2 w^{-n k} + w^{-n(k+1)} \\ &= w^{-n k} (w^n - 2 + w^{-n}) \\ &= z_k (2 \cos(n \omega \Delta t) - 2) \end{aligned}$$

und wegen $\omega \Delta T = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{N}$ gelten die beiden Bedingungen

$$z_0 = 1 \quad \text{und} \quad z_N = w^{-nN} = 1$$

Sind $z_0 = 1$ und $z_1 = w^{-n} = e^{-in\omega\Delta t}$ bekannt, so können die anderen Werte mittels der Rekursionsformel

$$z_{k+1} = 2 \cos(n\omega\Delta t) z_k - z_{k-1}$$

sukzessive bestimmt werden.

- Da der Koeffizient $z_k = a_k + i b_k$ komplex ist, müssen Real- und Imaginärteil bestimmt werden. Somit wird eine komplexe Multiplikation ersetzt durch zwei reelle Multiplikationen. Um alle N komplexen Werte zu bestimmen, sind somit $2N$ reelle Multiplikationen und $2N$ Additionen notwendig.
- Die Integration des Fourierkoeffizienten kann nun numerisch erfolgen mittels einer Integration durch die Trapezregel.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(\Delta t k) e^{-in\omega \Delta t k} \Delta t \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k z_k$$

- Setzt man $s_0 = 0$ so kann mittels der Formel

$$s_{k+1} = s_k + f_{k+1} z_{k+1} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, N$$

die Summe bestimmt werden und eine anschliessende Division durch N ergibt eine Approximation des Koeffizienten c_n .

- Insgesamt ergibt sich der folgende Algorithmus:

– Initialisierung:

$$s_0 = f_0, \quad z_0 = 1 \quad \text{und} \quad z_{-1} = e^{in\omega\Delta t} = e^{i2\pi n/N} = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

– Für jeden Messpunkt $k = 1, \dots, N-1$ bestimme

$$z_{k+1} = 2 \cos(n\omega\Delta t) z_k - z_{k-1} \quad \text{und} \quad s_{k+1} = s_k + f_{k+1} z_{k+1}$$

– Die Amplitude des Signalanteils mit der gewählten Frequenz $\frac{\nu}{2\pi} = \frac{n}{T}$ ist gegeben durch

$$\frac{2}{N} \|s_N\|$$

– Der Rechenaufwand ist bestimmt durch $2N$ komplexe Multiplikationen, oder auch $4N$ reelle Multiplikationen. Dank der rekursiven Struktur der Formeln können die Rechnung während der Messung ausgeführt werden. Der oben beschriebene Algorithmus heisst auch **Goertzel Filter**. Sind nur eine, oder wenige Frequenzen zu untersuchen, so ist dies ein sehr effizienter Algorithmus.

Durch Einsatz von Methoden der digitalen Signalverarbeitung (z -Transformation, digitale Filter) kann der Rechenaufwand für den Goertzel Filter noch leicht reduziert werden, siehe z.B. [OppScha89].

1.9.3 FFT mit Octave oder MATLAB

In Octave und MATLAB werden die beiden Befehle `fft()` und `ifft()` verwendet um die FFT zu bestimmen. Zwei typische Anwendungen finden Sie in den Anwendungsbeispielen in Abschnitt 1.1.5 (ab Seite 12) und Beispiel 5 (Seite 24). In diesem Abschnitt wird der Befehl `fft()` für eine nicht-typische Berechnung verwendet.

Wir untersuchen die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x)$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Gemäss Beispiel 17 (Seite 42) ist die Fourierreihe gegeben durch

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

Man erkennt, dass

- Jeder zweite Koeffizient ist 0
- Die Realteile sind Null, d.h. wir haben eine reine Sinus-Reihe
- Wegen $2c_n = (a_n - i b_n)$ sollten wir $c_n = 0$ für n gerade und $c_n = -i \frac{4}{\pi n}$ für n ungerade erhalten.

Nun versuchen wir dieses Resultat mittels Octave und `fft()` zu bestätigen.

SignDemo.m

```

N = 2^7;           %% number of data points
a = -pi; b = +pi; %% the interval to be examined
t = linspace(a,b,N+1); %% define the grid points
f = sign(t);       %% evaluate the function
f(1) = (f(1)+f(N+1))/2; f = f(1:N); %% enforce periodicity and use the
                                         %% correct number of points
c = fft(f); c = c(:); %% enforce a column vector
c(1:10)
-->
    0.00000 + 0.00000i
    0.00000 + 81.47097i
    0.00000 + 0.00000i
   -0.00000 + 27.11334i
    0.00000 + 0.00000i
   -0.00000 + 16.21557i
    0.00000 + 0.00000i
    0.00000 + 11.52628i
    0.00000 + 0.00000i
   -0.00000 + 8.90640i

```

Das Resultat sind **nicht** die schönen Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$. Verschiedene Effekte tragen zu dieser “Überraschung” bei:

- Die Formel für c_n beinhaltet einen Faktor $\frac{1}{N}$, der beim Befehl `fft()` von MATLAB/Octave fehlt. Das ist leicht zu korrigieren.
- Für die Beziehung approximation $y_n \approx c_n$ haben wir das Integral

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \omega t} dt \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{i n k \frac{2\pi}{N}} = y_n$$

verwendet. Somit ist die periodische Fortsetzung der Funktion $\text{sign}(x)$ auf $[-\pi, +\pi]$ auf dem Intervall. Somit haben wir mit der modifizierten Funktion $f(x) = \text{sign}(x + \pi)$ gerechnet. Das kann durch einen Faktor -1 korrigiert werden. Bei der Rekonstruktion $\text{sign}(x) \approx \sum_{k=1}^{20} b_n \sin(k x)$ wird diese Verschiebung automatisch korrigiert.

Durch Multiplikation mit dem korrekten Faktor können diese Abweichungen korrigiert werden und die Faktoren $\frac{4\pi}{n}$ werden sichtbar.

SignDemo.m

```
2*c(1:10)/4*pi/N
-->
0.00000 + 0.00000i
0.00000 + 0.99980i
0.00000 + 0.00000i
-0.00000 + 0.33273i
0.00000 + 0.00000i
-0.00000 + 0.19900i
0.00000 + 0.00000i
0.00000 + 0.14145i
0.00000 + 0.00000i
-0.00000 + 0.10930i
```

Wir beobachten:

- Der erste Koeffizient c_0 ist 0.
- Jeder zweite Koeffizient ist 0, d.h. $c_{2k} = 0$
- Die Realteile sind alle Null, d.h. wir haben eine reine Sinus-Reihe.

Nun kann die ursprüngliche Funktion $f(x) = \text{sign}(x)$ rekonstruiert werden.

SignDemo.m

```
b = imag(2*c(1:10)/N);
y = zeros(size(t));
for k = 1:10
    y = y + b(k)*sin((k-1)*t);
end%for

plot(t,y)
xlabel('time t'); ylabel('y(t)'); grid on
```

Vergleichen Sie das Resultat von

Octave

```
fft(eye(4))
-->
1 + 0i   1 + 0i   1 + 0i   1 + 0i
1 + 0i   0 - 1i   -1 + 0i   0 + 1i
1 + 0i   -1 + 0i   1 + 0i   -1 + 0i
1 - 0i   0 + 1i   -1 - 0i   0 - 1i
```

mit der Matrix \mathbf{F}_4 in Gleichung (1.5) (Seite 67) um festzustellen, dass der Befehl `fft()` in MATLAB/Octave effektiv mit der Matrix $\overline{\mathbf{F}_4}$ multipliziert. Folglich muss der zugehörige inverse Befehl `ifft()` mit der Matrix $\frac{1}{4} \mathbf{F}_4$ multiplizieren. Dies kann durch `ifft(eye(4))` bestätigt werden.

1-42 Satz : DFT und `fft()` mit MATLAB/Octave

Die Berechnung der DFT in diesem Kurs und mit Hilfe von MATLAB/Octave sind (leider) leicht verschieden. Allen Formeln gemeinsam ist der komplexe Koeffizient $w = e^{i \frac{2\pi}{N}} \in \mathbb{C}$.

- In diesem Kurs werden die diskreten Fourier-Koeffizienten $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$ eines diskreten Signals $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ (oder auch $\vec{f} \in \mathbb{C}^N$) bestimmt durch (1.3) oder mit der Fourier Matrix \mathbf{F}_N in (1.4).

$$\vec{y} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{F}_N} \vec{f} \iff y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} f_k e^{-i n k \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} f_k w^{-n k}$$

Die dazugehörige inverse DFT ist gegeben durch

$$\vec{f} = \mathbf{F}_N \vec{y} \iff f_k = \sum_{n=1}^{N-1} y_n e^{+i n k \frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=1}^{N-1} y_n w^{+n k}$$

- Mit MATLAB/Octave gilt für einen Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ (oder auch $\vec{f} \in \mathbb{C}^N$)

$$y = \text{fft}(f) \iff \vec{y} = \overline{\mathbf{F}_N} \vec{f} \iff y_n = \sum_{k=1}^{N-1} f_k e^{-i n k \frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=1}^{N-1} f_k w^{-n k}$$

Die dazugehörige inverse DFT ist gegeben durch

$$f = \text{ifft}(y) \iff \vec{f} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N \vec{y} \iff f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} y_n e^{+i n k \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} y_n w^{+n k}$$

Je nach Anwendungsgebiet und zu verwendeter Fourier Bibliothek sind (leider) auch noch andere Kombinationen von Vorfaktoren und Vorzeichen in regelmässigem Gebrauch. Es ist klar die Verantwortung des Anwenders sicherzustellen, dass ein konsistenter Satz von Formeln für die DFT (FFT) und die zugehörige inverse Formel verwendet wird.

1.9.4 Aliasing

Ein noch viel erstaunlicher „Fehler“ zeigt sich durch Aufzeichnen des gesamten Spektrums, wobei 128 Datenpunkte verwendet wurden, siehe Abbildung 1.36.

Octave

```
plot(0:N-1,abs(c),'+' )
xlabel('n'); ylabel('abs(c)')
axis([0 N])
```

Zwei mathematische Resultate tragen zu diesem Effekt bei.

1. Periodizität

Die FFT-Koeffizienten sind gegeben durch

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i n k \omega \Delta t}$$

Wegen

$$e^{i N \omega \Delta t} = e^{i N 2\pi / N} = e^{-i 2\pi} = 1$$

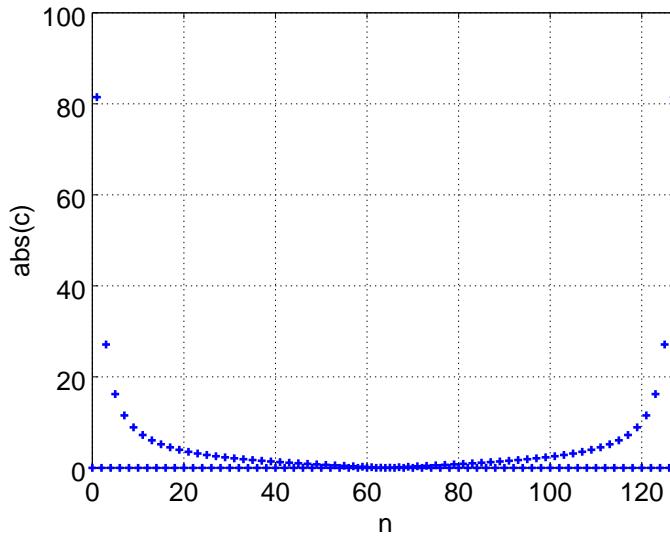


Abbildung 1.36: Vollständiges FFT-Spektrum der Funktion $f(x) = \text{sign } x$ auf $[-\pi, \pi]$

gilt somit

$$y_{n+N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i(n+N)k\omega\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i n k \omega \Delta t} = y_n$$

Dieser Effekt ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass nur N Werte der ursprünglichen Funktion $f(x)$ verwendet werden. Für die exakten Fourierkoeffizienten c_n gilt im allgemeinen $c_{n+N} \neq c_n$. Es ist zu unterscheiden zwischen Fouriersummen und Fourierreihen.

2. Reelle Signale f_k

Ist $f(x)$ eine reelle Funktion, so haben wir gesehen, dass $c_{-n} = \overline{c_n}$ und somit

$$|c_{-n}| = |c_n|$$

Dieser Effekt überträgt sich auf die diskreten Fourierkoeffizienten und es gilt

$$|y_{-n}| = |y_n|$$

Kombiniert man die beiden obigen Effekte so ergibt sich

$$|y_{N-n}| = |y_n|$$

und genau dieser Effekt kann in Abbildung 1.36 beobachtet werden.

Die Übungsaufgabe 1–55 zeigt einen möglichen Effekt von Aliasing.

Der obige Effekt muss in Anwendungen berücksichtigt werden. Sollen von einem reellen Signal (z.B. Luftdruck) Signale mit Frequenzen bis zu 22 kHz richtig dargestellt werden, so muss mit einer Frequenz von mindestens 44 kHz gesampelt werden.

Von einem Signal ist bekannt, dass nur Frequenzen die kleiner sind als Ω auftreten. Sammelt man Abtastwerte mit einer Frequenz von 2Ω , so kann das Signal vollständig rekonstruiert werden. Dieses Resultat wird verbunden mit den Namen **Shannon** oder **Nyquist**.

Den Beweis dieser Tatsache finden Sie in guten Büchern über Signalverarbeitung oder Fouriertransformationen.

1.10 Beispiele und Anwendungen

Sehen Sie sich die Beispiele in Abschnitt 1.1 ab Seite 3 noch einmal an. Jetzt sollten Sie in der Lage sein die dort fehlenden Rechnungen und Details nachträglich einzufügen. Die Aufgaben 1–62 bis 1–65 beziehen sich auf die selben Beispielprobleme.

1.10.1 Beispiele von diskreten Fouriersummen

Gegeben ist eine reelle Funktion $f(t)$ auf einem Intervall $[a, b]$. Dieses Intervall wird in $N = 2^m$ Stücke gleicher Länge unterteilt. Zu den diskreten Zeitwerten $t_k = a + k \frac{b-a}{N}$ wird die Funktion gemessen. Dann wird der erste Messwert $f_0 = f(a)$ ersetzt durch den Mittelwert der ersten und letzten Messung $\frac{1}{2}(f(a) + f(b))$. Dadurch werden die beiden Endpunkte des Intervalls miteinander verbunden. Dieser Vorgang entspricht der periodischen Fortsetzung der Funktion. Falls die Funktion $(b - a)$ -periodisch ist, so ändert sich nichts. Wir erhalten einen Vektor mit N Komponenten

$$\vec{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T$$

Daraus wir mit Hilfe der Formel

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i \frac{2\pi}{N} k j}$$

der Vektor der komplexen Fourierkoeffizienten bestimmt. Diese Rechnung muss mit Hilfe des FFT–Algorithmus ausgeführt werden. Dann ist die Fourierpartialsumme gegeben durch

$$f_{Four}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{i 2 \pi \frac{t-a}{b-a} j}$$

eine reelle Funktion und bei den Abtastwerten t_k für $k \neq 0, n$ gilt

$$f(t_k) = f_{Four}(t_k)$$

d.h. die Funktion wird exakt rekonstruiert. Da die Funktion reell ist gilt $F_k = F_{N-k}$ und somit benötigen wir nur die erste Hälfte der N Koeffizienten und mit $F_k = a_k + i b_k$ gilt auch

$$f_{Four}(t) = a_0 + 2 \sum_{j=1}^{N/2-1} \left(a_j \cos \left(2 \pi \frac{t-a}{b-a} j \right) + b_j \sin \left(2 \pi \frac{t-a}{b-a} j \right) \right)$$

Da im Intervall $[a, b]$ zu $N+1$ Zeiten gemessen wurde ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Messwerten $(b - a)/N$ und die **Abtastfrequenz** $\nu = \frac{N}{b-a}$. Somit können bestenfalls (theoretisch) Signale mit Frequenzen bis zu $\frac{1}{2} \nu = \frac{N}{2(b-a)}$ festgestellt werden.

1–43 Beispiel : In einer Datei **Einspeisung2014.csv** befindet sich die Daten für die eingespeisene Leistung eines Deutschen Netzbetreibers für das Jahr 2014 . Mit MATLAB oder Octave können die Daten eingelesen werden und die Graphik 1.37 erzeugt werden. Die Daten wurden mit einem Abstand von 15 Minuten erfasst.

- Als natürliche Zeiteinheit verwenden wir einen Tag.
- Die Messung hat 365 Tage gedauert und somit ist die künstliche “Periode” 365 Tage. Die Grundfrequenz ist folglich $\frac{1}{365 \text{ Tag}}$. Die Fourierreihe des Netzleistung $P(t)$ ist

$$P(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{n}{365} 2 \pi t \right)$$

oder für die DFT mit N Termen

$$P(t) \approx c_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N c_n \exp \left(i \frac{n}{365} 2 \pi t \right) \right)$$

- Aus den Werten $c_0 \approx 11.77$ und $c_1 \approx 0.703 - i 0.129 \approx 0.715 e^{-i 0.182}$ können wir die jährliche Variation durch eine Funktion approximieren.

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= c_0 + 2 \operatorname{Re} \left(c_1 \exp(i \frac{1}{365} 2\pi t) \right) \\
 &\approx 11.77 + 2 \operatorname{Re} \left(0.715 \exp(i (\frac{1}{365} 2\pi t - 0.182)) \right) \\
 &\approx 11.77 + 1.430 \cos(\frac{2\pi}{365} (t - 10.56))
 \end{aligned}$$

Diese Approximation ist auch in Abbildung 1.37 zu sehen.

- Das Abtastintervall von 15 Minuten führt zu $4 * 24 = 96$ Messungen pro Tag und somit ist die Abtastfrequenz 96/Tag.

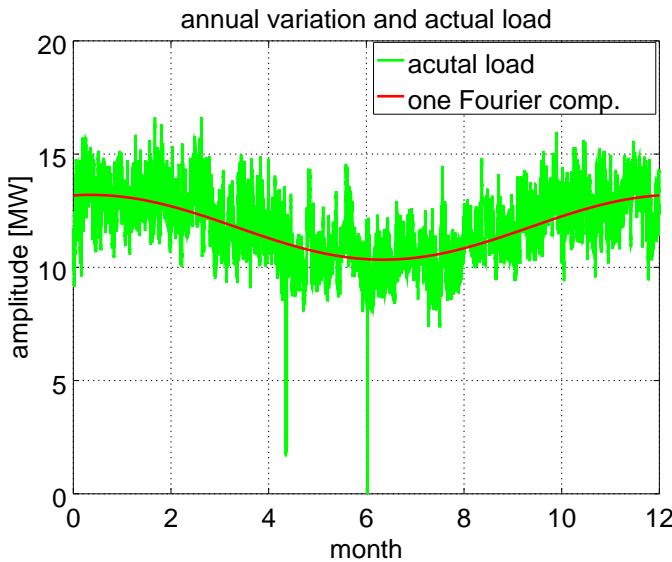


Abbildung 1.37: Netzlast über ein ganzes Jahr

Mittels DFT kann das Amplitudenspektrum in Abbildung 1.38 erzeugt werden. Die Amplitude kann als Funktion der Frequenz (1.38(a)) oder als Funktion der Periode (1.38(b)) dargestellt werden.

Es ist klar ersichtlich, dass erhebliche Beiträge mit Perioden 1 Tag, 12 Stunden, 8 Stunden und 6 Stunden vorkommen. Nun versuchen wir die täglichen Variationen zu untersuchen.

- Da die Grundfrequenz $\frac{1}{365 \text{ Tag}}$ ist, hat der Beitrag $c_{365} \exp(i \frac{365}{365} 2\pi t)$ eine Periode von einem Tag. Wegen $c_{365} \approx -0.13642 + i 0.19249 \approx 0.236 e^{i 2.187}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 P_{365}(t) &= 2 \operatorname{Re} (c_{365} \exp(i 2\pi t)) \\
 &\approx +2 \operatorname{Re} (0.236 \exp(i (2\pi t + 2.187))) \\
 &\approx 0.472 \cos(2\pi (t + 0.348))
 \end{aligned}$$

Wegen $0.348 \text{ Tag} \approx 8.35 \text{ Stunden} \approx 8 \text{ h } 21 \text{ min}$ deutet das auf eine tägliche Variation mit Amplitude 0.47 und einem Maximum ca um 15.39 hin. Das ist in Abbildung 1.39 klar ersichtlich.

- Mit dem selben Verfahren kann man die Beiträge mit Periode 24 h und 12 h untersuchen.

$$2 \operatorname{Re} (c_{365} \exp(i 2\pi t) + c_{730} \exp(i 2\pi 2t))$$

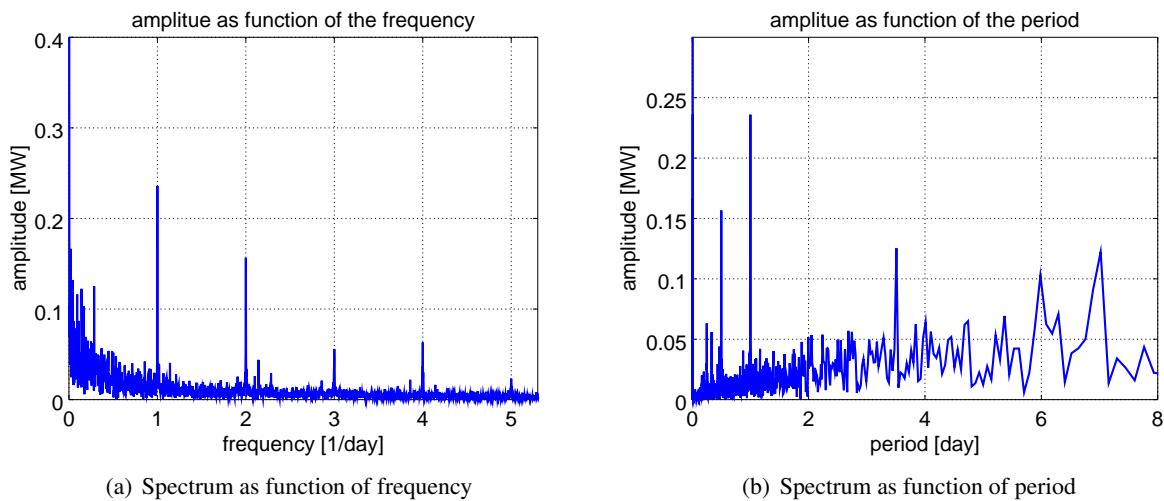


Abbildung 1.38: Amplitudenspektrum der Netzlast

oder auch die Perioden 24, 12, 8 und 6 h.

$$2 \operatorname{Re} (c_{365} \exp(i 2 \pi t) + c_{730} \exp(i 2 \pi 2 t) + c_{1095} \exp(i 2 \pi 3 t) + c_{1460} \exp(i 2 \pi 4 t))$$

In Abbildung 1.39 kann die Verteilung der Netzlast über einen Tag recht gut rekonstruiert werden.

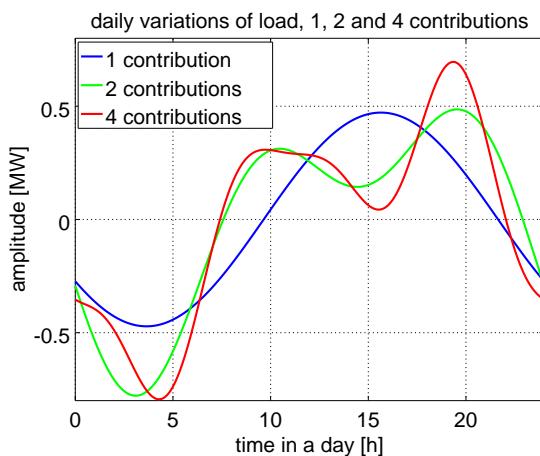


Abbildung 1.39: Variation der Netzlast über einen Tag

Die obigen Ideen sind im MATLAB/Octave Code `Netzlast.m` implementiert.

Netzlast.m

```
% read the data, skip the first 4 lines and the first 2 columns
% the missing hour for the day light saving time was added by hand
data = dlmread('Einspeisung2014.csv',';',5,3);
Last = data(:,1); % extract the load only
% display the basic data, with a monthly timescale
figure(1)
month = linspace(0,12,length(Last));
plot(month,Last)
xlabel('month'); ylabel('load [MW]')
```

```
% apply fft, use one day as time unit
% sampling frequency is 24*4=96
% the "period" is 365 days and thus the fundamental frequency 1/365
% the sampling frequency is 4*24 = 96, i.e. 96 samples per day
c = fft>Last)/length>Last);
freq = [0:length>Last)-1]/365; % frequency in days, display up to 5 days
figure(2); plot(freq,abs(c))
axis([0 5.3 0 0.4]); xlabel('frequency [1/day]'); ylabel('amplitude [MW]')
title('amplitue as function of the frequency')

% convert to periods
figure(3); plot(1./freq,abs(c))
xlabel('period [day]'); ylabel('amplitude [MW]')
axis([0 8 0 0.3])
title('amplitue as function of the period')

% pick the signal with a period of one day, phase shift in hours
nc1 = 365+1;
absval_phase1 = [2*abs(c(nc1)) angle(c(nc1))/(2*pi)*24]

% pick the signal with a period of a half day or 12 h
% thus 2*365 the fundamental frequency
nc2 = 2*365+1;
absval_phase2 = [2*abs(c(nc2)) angle(c(nc2))/(2*pi)*24]

% plot the daily variations, two contributions
t = linspace(0,24,2001);
daily1 = 2*real(c(nc1)*exp(i*t/12*pi));
figure(4); plot(t,daily1,'b')
axis([0 24 -0.8 0.8])
xlabel('time in a day [h]'); ylabel('amplitude [MW]')
title('daily variations of load, period 24 h')

% examine two and four Fourier contributions
daily2 = 2*real(c(nc1)*exp(i*t/12*pi) + c(nc2)*exp(i*t/6*pi));
daily4 = 2*real(c(nc1)*exp(i*t/12*pi) + c(nc2)*exp(i*t/6*pi)...
    +c(3*365+1)*exp(i*t/4*pi) + c(4*365+1)*exp(i*t/3*pi));
figure(14); plot(t,daily1,'b',t,daily2,'g',t,daily4,'r')
axis([0 24 -0.8 0.8])
xlabel('time in a day [h]'); ylabel('amplitude [MW]')
title('daily variations of load, 1, 2 and 4 contributions')
legend('1 contribution','2 contributions','4 contributions','location','northwest' )

% plot the annual variations, two contributions
anual = real(c(1)+2*c(2)*exp(i*month/6*pi));
figure(1); plot(month,Last,'g',month,anual,'r')
legend('acutal load','one Fourier comp.')
xlabel('month'); ylabel('amplitude [MW]')
title('annual variation and actual load')
```

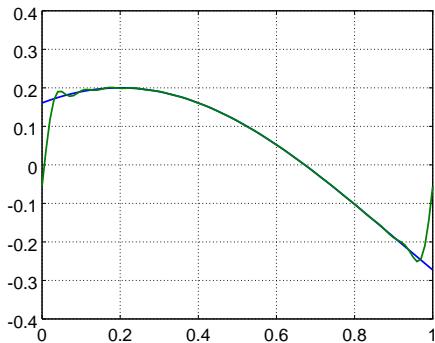
Die Übungsaufgaben 1–38 und 1–39 sind ähnlich zu diesem Beispiel. ◇

Die folgenden Beispiele illustrieren einige Effekte von Fourierreihen und DFT.

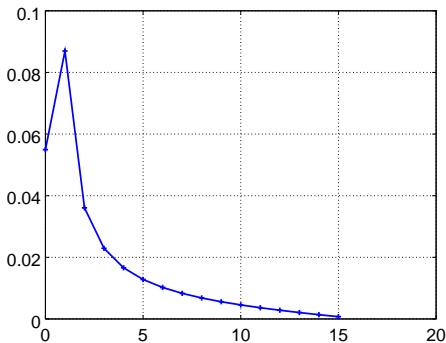
1–44 Beispiel : In Abbildung 1.40(a) sehen Sie die Funktion

$$f(t) = e^{-(t-0.2)^2} - 0.8 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

und die Fourierapproximation mit $2^5 = 32$ Abtastwerten. Die ursprüngliche Funktion und die Fourierapproximation stimmen sehr gut überein, ausser bei $t = 0$ und 1 . Der grosse Unterschied am Rand wird erzeugt durch die künstlich gegebene Periode von 1 . In 1.40(b) ist das Amplitudenspektrum zu sehen. \diamond



(a) Funktion und Fourier Approximation



(b) Amplitudenspektrum der Funktion

Abbildung 1.40: Fourierapproximation und Amplitudenspektrum

1–45 Beispiel : In Abbildung 1.41 sehen Sie die Funktionen

$$f(t) = \sin(6t) \quad \text{und} \quad g(t) = \sin(6.1t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi$$

und die Fourierapproximation mit $2^6 = 64$ Abtastwerten und die beiden Amplitudenspektren. Funktionen und Fourierapproximationen sind kaum unterscheidbar. Es ist deutlich zu sehen wie die π -periodische Funktion $\sin(6t)$ zu einem einzigen von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten führt, aber die **nicht π -periodische** Funktion $\sin(6.1t)$ ein ausgeschmiertes Spektrum liefert. Durch das beschränkte Messintervall $[0, \pi]$ wird der periodischen Funktion eine Fensterfunktion aufgezwungen, und dadurch das Signal ausgeschmiert. Dieser Effekt kann teilweise kontrolliert werden, siehe Aufgabe 1–48 \diamond

1–46 Beispiel : In Abbildung 1.42 sehen Sie die Amplitudenspektren der Funktion

$$f(x) = \sin(26x) + \cos(40x)$$

auf den Intervallen $[0, \pi]$ und $[0, 1.01\pi]$ mit $2^6 = 64$ Abtastwerten. \diamond

1–47 Beispiel : Man weiss, dass ein Signal aus periodischen Signalen mit Frequenzen $\nu \leq 5$ Hz zusammengesetzt ist. Zu bestimmen sind die exakten Frequenzen und Amplituden der Teilsignale. Spezielle Beachtung soll der Länge T des Messintervalls und der Abtastfrequenz gewidmet werden.

Lösung : Da Frequenzen bis zu 5 Hz auftreten können muss die Abtastfrequenz grösser als 10 Hz sein. Da die Phasenverschiebung nicht bestimmt werden muss, interessieren wir uns nur für das Amplitudenspektrum.

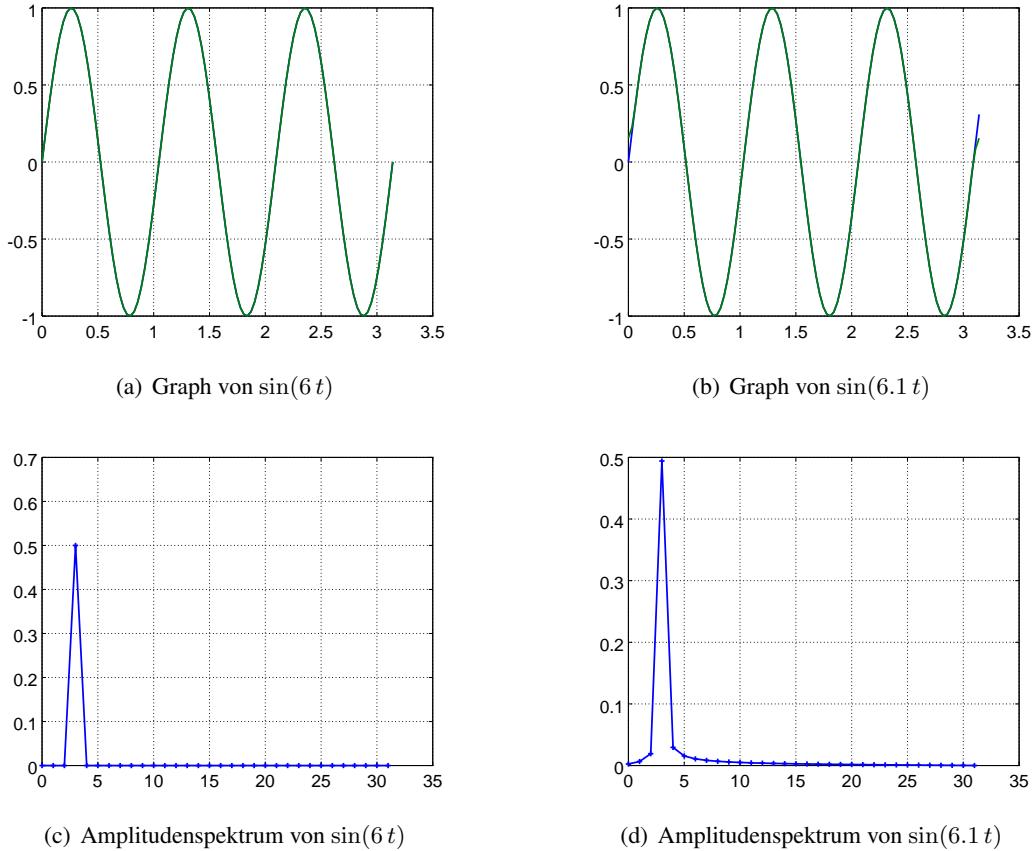
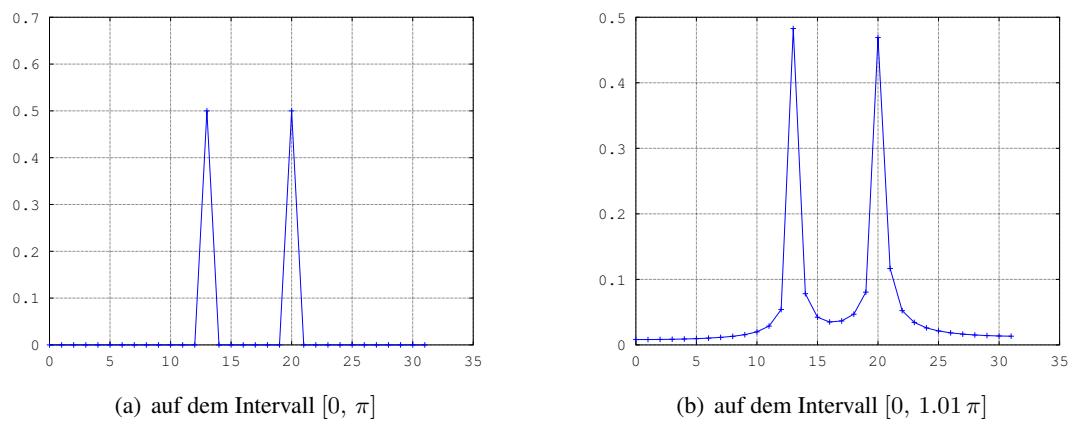
1. $T = 3$

Bei $2^6 = 64$ Abtastpunkten haben wir eine Abtastfrequenz von $\frac{64}{3}$ und sind somit auf der „sicheren“ Seite. Sei

$$\omega = \frac{2\pi}{3}$$

Die Abbildung 1.43 zeigt, dass das Amplitudenspektrum Maximas hat bei $n = 4$ und 7 mit Werten von 0.48 und 0.43. Das würde zu einem Signal der folgenden Form führen.

$$f(t) \approx 0.96 \cos(4\omega t + \delta_4) + 0.86 \cos(7\omega t + \delta_7)$$

Abbildung 1.41: Trigonometrische Funktionen auf $[0, \pi]$ und ihr AmplitudenspektrumAbbildung 1.42: Amplitudenspektrum von $\sin(26t) + \cos(40t)$ auf verschiedenen Intervallen

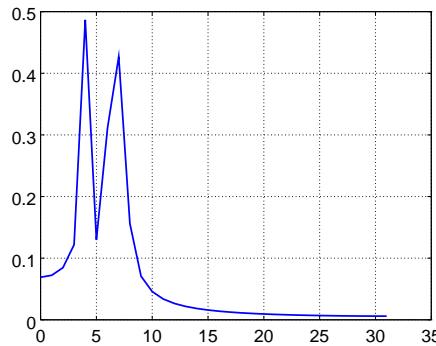


Abbildung 1.43: Amplitudenspektrum mit $T = 3$ und 2^6 Abtastwerten

Eine Erhöhung der Anzahl der Abtastwerte (Frequenz) ändert das Resultat nicht. Das zu kurz gewählte Zeitfenster erlaubt es nicht die drei Frequenzen klar aufzulösen (Faltungssatz).

Ein möglicher Octave Code für die obigen Berechnungen und Abbildung 1.43 ist hier gezeigt.

Octave

```
%> sampling frequency at least 10 Hz
T = 3; % at least 30 points
N = 2^6;
Ndisp = N/2; % display only half of the spectrum
%%% end of input
dt = T/N;
t = 0:dt:T-dt;
y = FourierFunction(t); % call the given function
c = abs(fft(y))*2/N;
freq = 1/T*[0:N-1];

plot(freq(1:Ndisp),c(1:Ndisp))
grid on
xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('Amplitude');
```

2. $T = 30$

Damit die Abtastfrequenz nun grösser als 10 Hz ist, benötigen wir mindestens 300 Abtastwerte. Eine Rechnung mit $2^9 = 512$ Werten führt auf die Abbildung 1.44(a) und

$$\omega = \frac{2\pi}{30}$$

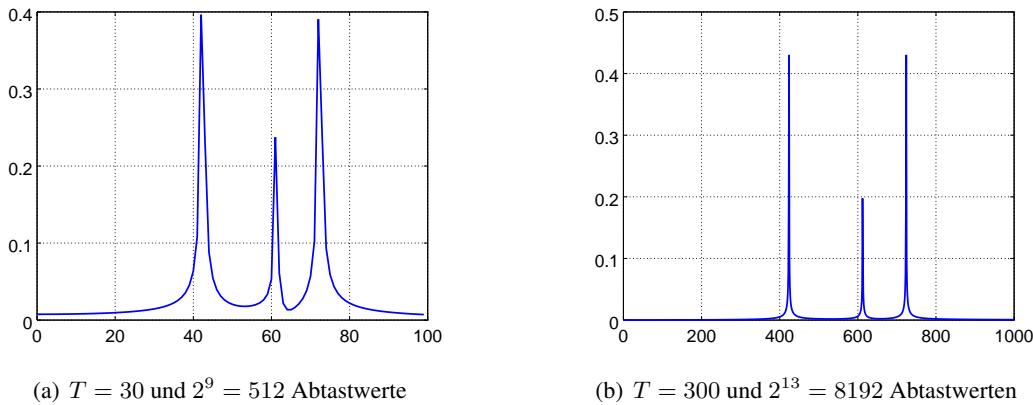
Die drei Frequenzen sind erkennbar, aber noch deutlich ausgeschmiert. Eine genaue Untersuchung der Graphik oder der Zahlenwerte ergibt

n=	42	61	72
Frequenz ≈	1.40	2.03	2.40
c _n ≈	0.40	0.24	0.39

Das führt auf die Approximation (falls wir nur drei Signale berücksichtigen)

$$f(t) \approx 0.80 \cos(1.40 \cdot 2\pi t + \delta_{42}) + 0.48 \cos(2.03 \cdot 2\pi t + \delta_{61}) + 0.78 \cos(2.40 \cdot 2\pi t + \delta_{72})$$

Eine Erhöhung der Anzahl der Abtastwerte (Frequenz) ändert das Resultat auch hier nicht.

Abbildung 1.44: Amplitudenspektrum für verschiedene Werte von T und n 3. $T = 300$

Damit die Abtastfrequenz nun grösser als 10 Hz ist, benötigen wir mindestens 3000 Abtastwerte. Eine Rechnung mit $2^{13} = 8192$ Werten führt auf die Abbildung 1.44(b). Eine genaue Untersuchung der Graphik oder der Zahlenwerte ergibt

n=	424	612	724
Frequenz \approx	1.41	2.04	2.41
$ c_n \approx$	0.43	0.20	0.43

Das führt auf die Approximation (falls wir nur drei Signale berücksichtigen)

$$f(t) \approx 0.86 \cos(1.41 \cdot 2\pi t + \delta_{424}) + 0.40 \cos(2.03 \cdot 2\pi t + \delta_{612}) + 0.86 \cos(2.41 \cdot 2\pi t + \delta_{724})$$

Keine der obigen Rechnungen liefert eine ausserordentlich gute Approximation der „richtigen“ Funktion

$$f(t) = \cos(\nu_1 2\pi t) + 0.5 \sin(\nu_2 2\pi t) + \sin(\nu_3 2\pi t + 0.8)$$

wobei

$$\nu_1 = 1.41234, \quad \nu_2 = 2.041234, \quad \nu_3 = 2.41234$$

FourierFunction.m

```
function res = FourierFunction(t)
    n1 = 1.41234; n2 = 2.041234; n3 = 2.41234;
    res = cos(n1*2*pi*t)+0.5*sin(n2*2*pi*t)+sin(n3*2*pi*t+0.8);
endfunction
```

Falls wir wissen, dass genau drei Signale im Gesamtignal stecken, so können wir annehmen, dass die schnell abfallenden Terme nahe bei einer Spitze im Amplitudenspektrum zu dieser Frequenz gehören. Bei vielen Anwendungen ist das Quadrat der Amplitude proportional zur Energie. Nun berechnet man die Gesamtenergie aller Terme mit der Frequenz nahe genug bei der zu untersuchenden Spitze. Dazu ist die Summe der Quadrate der Koeffizienten zu bilden und anschliessend die Wurzel zu ziehen. Berücksichtigt man je 40 Frequenzen auf jeder Seite der drei Spitzen, so erhalten wir die Approximation

$$f(t) \approx 0.9986 \cos(1.41 \cdot 2\pi t + \delta_{424}) + 0.4997 \cos(2.03 \cdot 2\pi t + \delta_{612}) + 0.9987 \cos(2.41 \cdot 2\pi t + \delta_{724})$$

Die Amplituden sind nun sehr genau rekonstruiert.

Statt des obigen (heuristisch motivierten) Rechentricks kann man auch versuchen die Faltung durch die Fensterfunktion rückgängig zu machen. Dies führt aber in der Regel zu erheblichen numerischen Problemen, siehe auch Abschnitt 1.8.4. \square

◊

1.10.2 Trigonometrische Interpolation durch Zero-Padding

Eine Funktion f wird auf dem Intervall $[0, T]$ diskretisiert an den Stellen $t_j = j \frac{T}{N}$, wobei $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Die Anzahl N der Abtastwerte ist vorzugsweise eine 2-er Potenz. Das erzeugt den Vektor

$$\vec{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T.$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten der DFT sind gegeben durch $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\omega k j} \quad \text{wobei } k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Die Fourier Interpolation

$$f_{Four}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i t \omega k}$$

stimmt an den Abtastwerten t_j mit der ursprünglichen Funktion überein, d.h. $f(t_j) = f_{Four}(t_j)$. Wegen

$$\exp(i t_j \omega (N - k)) = \exp(i j \frac{T}{N} \frac{2\pi}{T} N) \exp(-i t_j \omega k) = \exp(-i t_j \omega k)$$

reproduziert auch die Darstellung

$$f_{Four}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} c_k e^{i t \omega k} + \sum_{k=1}^{N/2-1} c_{N-k} e^{-i t \omega k} + c_{N/2} \frac{1}{2} (e^{i t \omega \frac{N}{2}} + e^{-i t \omega \frac{N}{2}}) \quad (1.6)$$

die ursprüngliche Funktion an den Abtaststellen. Für reelle Funktion gilt $c_{N-k} = \overline{c_k}$ und somit $c_{N/2} \in \mathbb{R}$. Mit $c_k = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{Four}(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} (a_k - i b_k) (\cos(t \omega k) + i \sin(t \omega k)) \right) + c_{N/2} \cos(t \omega \frac{N}{2}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_k \cos(t \omega k) + b_k \sin(t \omega k) + c_{N/2} \cos(t \omega \frac{N}{2}) \end{aligned}$$

Das ist eine Interpolation durch trigonometrische Funktionen. Man könnte diese Formel direkt in Octave/MATLAB implementieren, es ist aber oft effizienter FFT mit Zero-Padding zu arbeiten.

In der Gleichung (1.6) kann man ablesen wie die Koeffizienten c_k in die neue Darstellung einzubauen sind.

1. Erzeuge den neuen Vektor der Fourier-Koeffizienten mit $N_{neu} > N$ Einträgen. Zu Beginn sind alle Koeffizienten 0 .
2. Kopiere die ersten $\frac{N}{2}$ Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_{N/2-1}$ in die ersten $\frac{N}{2}$ Positionen.
3. Kopiere die letzten $\frac{N}{2} - 1$ Koeffizienten $c_{N/2+1}, c_{N/2+2}, \dots, c_{N-2}, c_{N-1}$ in letzten $\frac{N}{2} - 1$ Positionen.
4. Je die Hälfte des Koeffizienten $c_{N/2}$ ist zu kopieren an die Position $\frac{N}{2}$ und die Position $N_{neu} - \frac{N}{2}$.

Die Konstruktion ist graphisch dargestellt In Abbildung 1.45. Sie stellt sicher, dass für reelle Funktionen die notwendigen Bedingungen $c_{N_{neu}-k} = \overline{c_k}$ auch erfüllt sind. Durch eine inverse FFT des neuen Spektrums kann nun die trigonometrischen Interpolation berechnet werden.

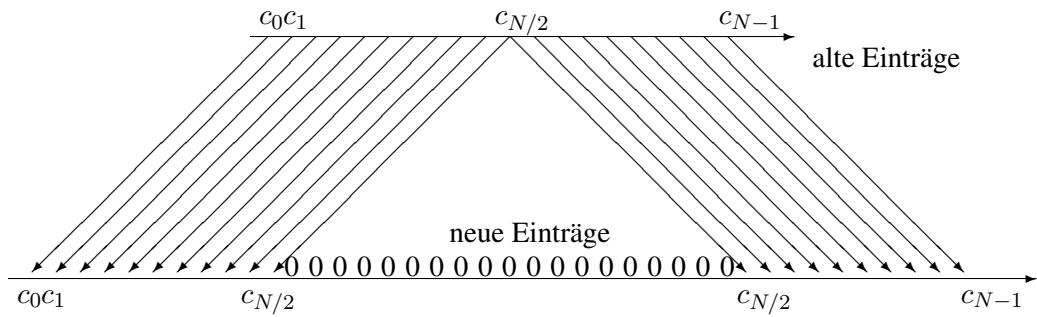


Abbildung 1.45: Zero-Padding der Fourier Koeffizienten

Mit Octave ist das obige Verfahren illustriert durch den Code und die resultierende Figur 1.46. Die gegebenen Daten Werte sind 0, ausser an einer Stelle ($t = 0.5$) ist der Wert 1 gegeben. Zwischen den Data Punkten werden je 7 (Padding=8) neue Punkte durch eine trigonometrische Interpolation eingefügt.

ZeroPadding.m

```
N = 2^4;      %% number of data points
Padding = 8;  %% factor of additioal interpolation points
s = zeros(N,1); s(N/2+1) = 1;
t = linspace(0,1-1/N,N);

s_fft = fft(s);
s_fft_p = zeros(N*Padding,1); t_p = linspace(0,1-1/(N*Padding),N*Padding);
s_fft_p(1:N/2) = s_fft(1:N/2); s_fft_p(N*Padding-N/2+1:N*Padding) = s_fft(N/2+1:N);
s_fft_p(N*Padding-N/2+1) *= 0.5; s_fft_p(N/2+1) = s_fft(N/2+1)*0.5;
s_p = ifft(s_fft_p)*Padding;

figure(1)
plot(t_p,s_p,'-k',t,s,'*r')
xlabel('t'); legend('interpolation','data'); ylim([-0.3 1.1])
```

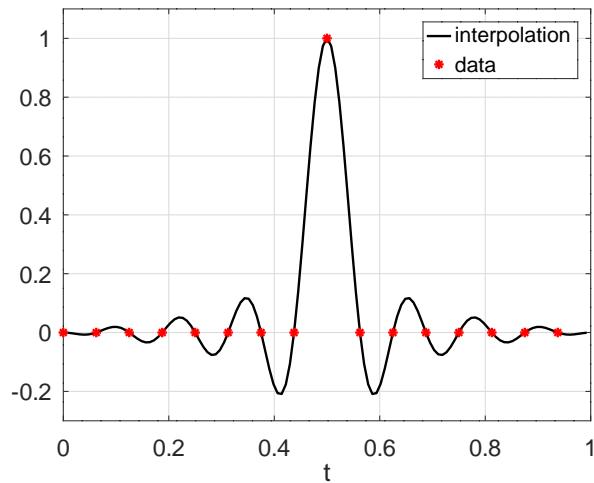


Abbildung 1.46: Trigonometrische Interpolation durch Zero-Padding

Auf den ersten Blick scheint Zero-Padding die Auflösung zu verbessern, da die Funktionswerte für mehr t -Werte bestimmt werden. Es handelt sich aber um eine Interpolation, d.h. keine neue Information ist verfügbar. Der selbe Effekt ist auch beobachtbar wenn die gemessenen Daten durch Zero-Padding erweitert werden, in der falschen Hoffnung auf eine bessere Spektalauflösung.

1.10.3 Kurbeltrieb

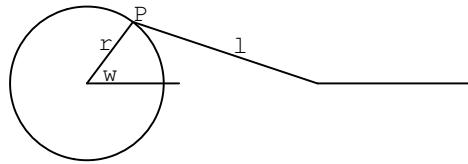


Abbildung 1.47: Ein einfacher Schubkurbeltrieb

Betrachten Sie die Anordnung in Abbildung 1.47 eines Schubkurbeltriebes. Die Lage des rechten Endes kann als Funktion des Winkels w bestimmt werden. Als Koordinatenursprung verwenden wir den Mittelpunkt der Kreisscheibe. Wir verwenden die Bezeichnungen.

- r Radius des Rades
- l Länge des Verbindungsstabes
- z Abstand des Verbindungspunktes vom Ursprung
- x, y Koordinaten von P
- w Winkel zwischen der x -Achse und der Verbindungsgeraden vom Ursprung zu P

Einfache geometrische Überlegungen führen zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} (z - r \cos w)^2 + r^2 \sin^2 w &= l^2 \\ z^2 - 2rz \cos w + r^2 &= l^2 \\ z = r \cos w + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 w} &= r \cos w + l \sqrt{1 - (\frac{r}{l})^2 \sin^2 w} \end{aligned}$$

Nun können wir mit *Mathematica* z als Funktion von w aufzeichnen. Der Graph sollte mit einer ungestörten cos-Kurve verglichen werden.

Octave

```
1; % assure script file
function res = z(r,l,w)
    res = r*cos(w) + sqrt(l^2-r^2*sin(w).^2);
endfunction

w = linspace(0,4*pi); r = 1; l = 3;
plot(w,z(r,l,w),'wheel;',w,r*cos(w)+l,'cos;');
xlabel('angle'); ylabel('distance');
```

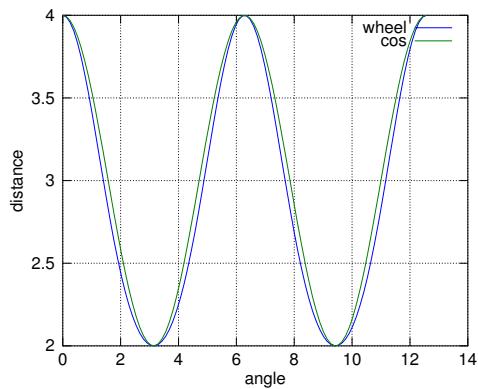
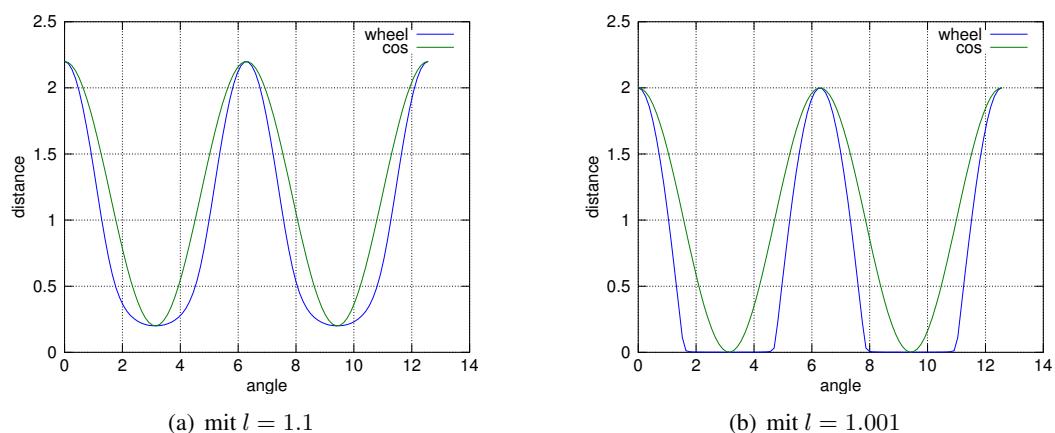
Im Graphen in Abbildung 1.48 wurde $r = 1$ und $l = 3$ gewählt. Für diese Wahl von Daten ist die Abweichung von einer cos-Kurve minimal. Reduzieren wir auf $l = 1.2$, so wird der Unterschied deutlicher (Abbildung 1.49).

Octave

```
w = linspace(0,4*pi); r = 1; l = 1.2;
plot(w,z(r,l,w),'wheel;',w,r*cos(w)+l,'cos;');
xlabel('angle'); ylabel('distance');
```

Es können auch Graphen von unrealistischen Situationen erzeugt werden, eine solche ist rechts in Abbildung 1.49 gezeigt.

Octave

Abbildung 1.48: Schubkurbeltrieb mit $r = 1$ und $l = 3$ Abbildung 1.49: Schubkurbeltrieb mit $r = 1$ verschiedenen Werten von l

```
w = linspace(0,4*pi); r = 1; l = 1.001;
plot(w,z(r,l,w)', 'wheel', 'w, r*cos(w)+l, 'cos;');
xlabel('angle'); ylabel('distance');
```

Dreht das obige Rad mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω , so ist der Winkel gegeben durch $w = \omega t$. Somit gilt für die Lage des am Gestänge befestigten Kolbens

$$z(t) = r \cos(\omega t) + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\omega t)}$$

und die entsprechende Beschleunigung ist

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} z(t) = -r \omega^2 \cos(\omega t) + l \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\omega t)}$$

Die entsprechenden Kräfte auf die Umgebung sind proportional zur Beschleunigung. Deshalb sind die Amplituden der Oberschwingungen in dieser Funktion von praktischem Interesse. Es besteht die Möglichkeit die Fourierkoeffizienten direkt zu bestimmen. Das führt zu Integralen die nur numerisch zu berechnen sind. Wir schlagen hier einen etwas anderen Weg ein und betrachten die Taylorentwicklung

$$\sqrt{1-s} \approx 1 - \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} - \frac{s^3}{16}$$

Also gilt für

$$\lambda = \frac{r}{l} \ll 1$$

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2(\omega t) - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4(\omega t) - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6(\omega t)$$

In den weiteren Rechnungen berücksichtigen wir nur die ersten drei Terme und verwenden die trigonometrischen Identitäten.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha)) , \quad \sin^4 \alpha = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha))$$

Das führt zu

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) - \frac{1}{8} \lambda^4 \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2\omega t) + \cos(4\omega t))$$

oder auch

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3\lambda^4}{64} + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16}\right) \cos(2\omega t) - \frac{\lambda^4}{64} \cos(4\omega t)$$

Die zweite Ableitung bezüglich t dieses Ausdrucks ist gegeben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \approx -\omega^2 \lambda^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right) \cos(2\omega t) + \omega^2 \frac{\lambda^4}{4} \cos(4\omega t)$$

Also gilt für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} a(t) &= -r \omega^2 \cos(\omega t) + l \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2(\omega t)} \\ &\approx l \omega^2 \left(-\lambda \cos(\omega t) - \lambda^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right) \cos(2\omega t) + \frac{\lambda^4}{4} \cos(4\omega t)\right) \end{aligned}$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als die ersten Terme einer Fourierreihe

$$a(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_4 \cos(4\omega t) + \dots$$

so gilt für $\lambda \ll 1$

$$\frac{r}{l} = \lambda \approx \frac{a_2}{a_1}$$

Der folgende Octave-Code bestimmt die Beschleunigung $a(t)$ als zweite Ableitung und zeichnet dann die ersten 10 Terme des Fourierspektrums auf.

```
w = linspace(0,4*pi,1024); r = 1; l = 3;
signal = diff(z(r,l,w),2);
spectrum = abs(fft(signal));
figure(2)
plot(0:9,spectrum(1:10),'*')
```

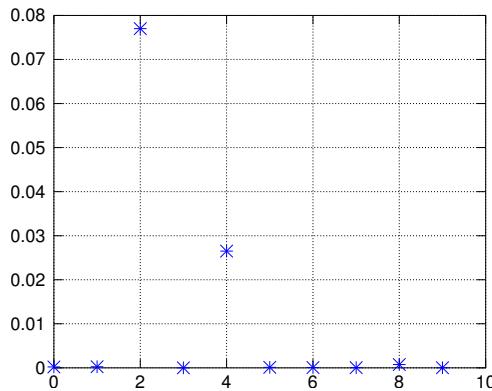


Abbildung 1.50: Fourier-Spektrum der Beschleunigung eines Kurbeltriebs

In einem Labor würden die Abtastwerte natürlich nicht berechnet, sondern durch eine Messung bestimmt, um dann mittels FFT das Verhältnis l/r abzuschätzen. Im Spektrum kann auch abgelesen werden, welcher Anteil von Kräften durch die (meist störenden) Oberschwingungen übertragen wird.

1.10.4 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor¹⁰ ist ein Mass für den Oberschwingungsanteil eines Signal. Übergibt man einem idealen Verstärker ein Signal der Form $\sin(\omega t)$, so erwartet man $A \sin(\omega t + \delta)$ als Antwort. Bei realen Verstärkern erhält man aber ein Signal $f(t)$ mit der selben Periode und der Fourierentwicklung

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Die Zahl k

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}}$$

heisst **Klirrfaktor** des Verstärkers und entspricht dem Anteil der Oberschwingungen am Gesamtsignal. Es kann auch die Zahl

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}}{|c_1|}$$

verwendet werden, für kleine Klirrfaktoren ist der Unterschied minimal.

¹⁰en français: facteur de distortion

1–48 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir einen Verstärker, der nur Signale bis zu einer gewissen Amplitude verarbeiten kann. Für grössere Signale sei er in Sättigung. Als Eingangssignal wird eine reine Sinusfunktion verwendet. Die Fourierreihe dieser Funktion ist bestimmt durch $a_n = 0$, $b_1 = 1$ und $b_n = 0$ für $n \neq 1$. Der Klirrfaktor dieses Signals ist 0. Diese Funktion wird nun oben und unten abgeschnitten. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten ist in Aufgabe 1–32 beschrieben. Für ungerade Funktionen ($a_n = 0$) kann der Klirrfaktor auch mittels

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} |b_n|^2}}{|b_1|}$$

berechnet werden.

- Wird die sin–Funktion bei $\pm \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - 0.3))$ abgeschnitten, so ergeben sich die Koeffizienten b_n
- 0.989 , 0 , 0.0104 , 0 , -0.00900 , 0 , 0.00708 , 0 , -0.00497 , ...

und somit ein Klirrfaktor von

$$k \approx \frac{\sqrt{0.0104^2 + 0.009^2}}{0.989} \approx 0.0167436$$

Der Graph der Funktion und das Amplitudenspektrum sind durch Figur 1.51 gegeben.

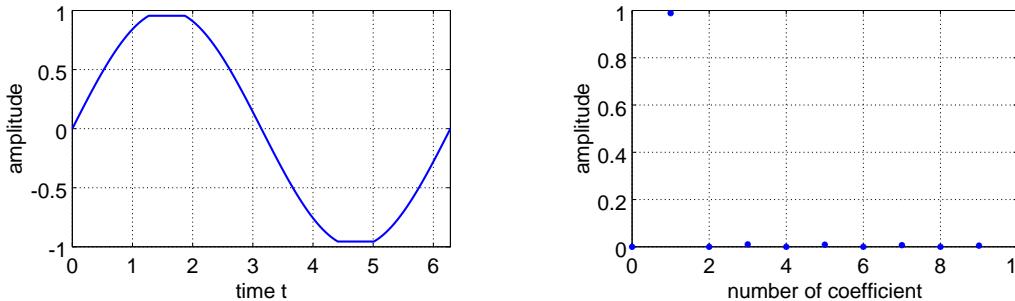


Abbildung 1.51: Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.017

- Wird die sin–Funktion bei $\pm \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - 0.5))$ abgeschnitten, so ergeben sich die Koeffizienten b_n
- 0.946 , 0 , 0.0410 , 0 , -0.0259 , 0 , 0.0107 , 0 , -0.00009 , ...

und somit ein Klirrfaktor von

$$k \approx \frac{\sqrt{0.0410^2 + 0.0259^2}}{0.946} \approx 0.0525$$

Der Graph der Funktion und das Amplitudenspektrum sind durch Figur 1.52 gegeben.

- Wird die sin–Funktion bei $\pm \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - 0.8))$ abgeschnitten, so ergeben sich die Koeffizienten b_n
- 0.809 , 0 , 0.109 , 0 , -0.0192 , 0 , -0.0164 , 0 , -0.00597 , ...

und somit ein Klirrfaktor von

$$k \approx \frac{\sqrt{0.109^2 + 0.0192^2}}{0.809} \approx 0.138$$

Der Graph der Funktion und das Amplitudenspektrum sind durch Figur 1.53 gegeben.



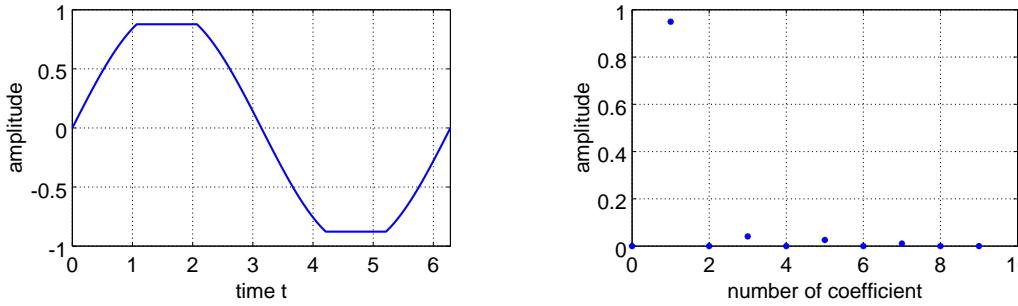


Abbildung 1.52: Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.05

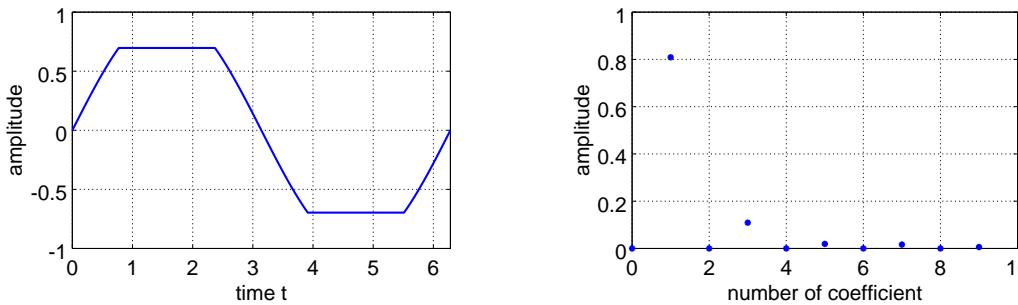


Abbildung 1.53: Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.138

1.10.5 DFT in two dimensions and a low pass image filter

Recap of 1D DFT

For a given vector $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ in the time domain ($f_k = f(k \Delta x)$) we compute the DFT coefficients $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$ and reconstruct the original function by

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i \frac{2\pi}{N} n k} \quad \text{and} \quad f_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{+i \frac{2\pi}{N} n k}$$

For real signals we have $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ and the aliasing effect examined in Section 1.9.4 leads to $y_n = \bar{y}_{N-n}$.

2D DFT

We take the 1D DFT and assume that the original function depends on two variables $f_{k,l} = f(k \Delta t, l \Delta \tau)$ instead of $f_k = f(k \Delta t)$. The basic idea is to use a 1D DFT for each value of the second variable, i.e. define a new function $a_n(l \Delta \tau)$ as the Fourier coefficients of the original function f in the first direction

$$a_n(l \Delta \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_{k,l} e^{-i \frac{2\pi}{N} n k} \quad \text{and} \quad f_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(l \Delta \tau) e^{+i \frac{2\pi}{N} n k}$$

This new function $a_n(l \Delta \tau)$ we represent as a DFT in the second direction

$$a_n(l \Delta \tau) = \sum_{m=0}^{M-1} y_{n,m} e^{+i \frac{2\pi}{M} m l}$$

where the Fourier coefficients are given by

$$y_{n,m} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} a_n(l \Delta \tau) e^{-i \frac{2\pi}{M} m l} \quad \text{DFT in second direction}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_{k,l} e^{-i \frac{2\pi}{N} n k} \right) e^{-i \frac{2\pi}{N} m l}$$

These are the 2D DFT coefficients. Now we combine the above formulas for to reconstruct the original function

$$f_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(l \Delta \tau) e^{+i \frac{2\pi}{N} n k} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{M-1} y_{n,m} e^{+i \frac{2\pi}{N} m l} \right) e^{+i \frac{2\pi}{N} n k}$$

Image filtering with a lowpass filter

Using FFT we can write an image as sum of periodic signal with different frequencies. Then we can filter high or low frequencies. As an example we examine the image in Figure 1.55(a). First load the image, convert it to a grayscale image and display the result.

Octave

```
pkg load image
imfinfo("Lenna.jpg")
im = imread("Lenna.jpg");
imG = rgb2gray(im); % convert to a grayscale image
figure(1)
imshow(imG) % display the result
```

Then we apply the two dimensional FFT with the help of the command `fft2()` and choose the number of frequencies to keep by `n=40`. This corresponds to a perfect low-pass filter. Due to the symmetries in the FFT of real valued signals and images we have to keep the lowest n frequencies **and** the highest $n - 1$ frequencies and thus 4 blocks of the FFT of the image are copied into the FFT of the filtered image. This algorithm is visualized in Figure 1.54. Observe that the code below uses block operations instead of multiple loops. This is for speed reasons.

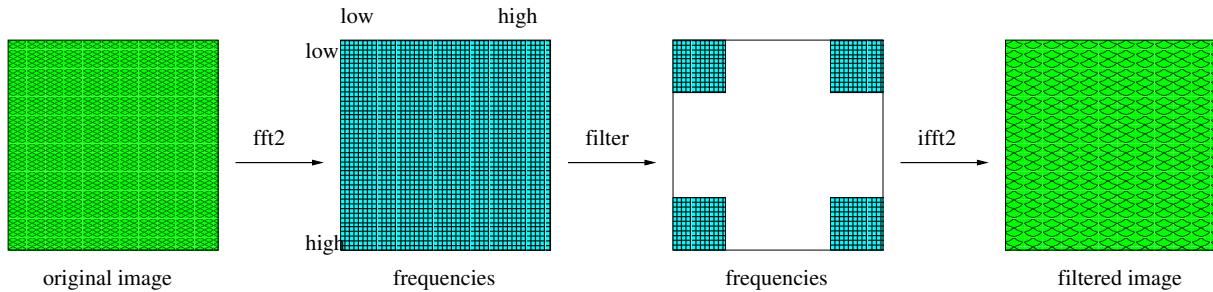


Figure 1.54: Apply a low pass filter to an image, based on FFT

Octave

```
imFFT = fft2(im2double(imG)); % convert to floating numbers and apply FFT
n = 40 % number of frequencies to keep
[nx,ny] = size(imFFT) % size of the image, and FFT
imFilter = zeros(nx,ny); % zero matrix
imFilter(1:n+1,1:n+1) += imFFT(1:n+1,1:n+1); % block top left
imFilter(1:n+1,ny-n+1:ny) += imFFT(1:n+1,ny-n+1:ny); % block top right
imFilter(nx-n+1:nx,1:n+1) += imFFT(nx-n+1:nx,1:n+1); % block bottom left
imFilter(nx-n+1:nx,ny-n+1:ny) += imFFT(nx-n+1:nx,ny-n+1:ny); % block bottom right
```

Finally we apply the inverse FFT by `ifft2()` and keep the real part only. Then we display the filtered image, as shown in Figure 1.55(b).

Octave

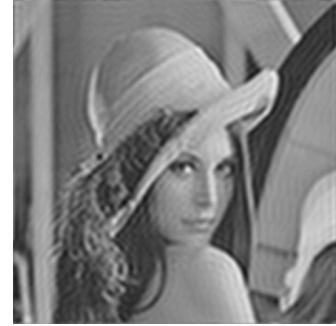
```

newIm = real(ifft2(imFilter));           % apply inverse FFT
figure(2)
imshow(newIm)                          % display the filtered image
imwrite(newIm,'LennaFiltered.png');    % save the filtered image

```



(a) original image



(b) with low pass filter

Figure 1.55: Original image of Lenna, and with a lowpass filter by FFT

The four sections in the filtered FFT image, i.e. in the frequency space, in Figure 1.54 are not independent. Only two off the blocks need to be stored. As example we consider rows and columns 2, 3, 479 and 480 of the DFT matrix generated by the 480×480 picture in Figure 1.55(a), separated by zeros. Observe that the top left and bottom right section are conjugate complex, as are top right and bottom left. This is caused by the aliasing examined in Section 1.9.4.

Octave

```

Octave
disp('compare the four corners of the FFT2 image')
real_part = real([imFFT(2:3,2:3) [0;0] imFFT(2:3,ny-1:ny);
                 0 0 0 0;
                 imFFT(nx-1:nx,2:3) [0;0] imFFT(nx-1:nx,ny-1:ny)]);
imaginary_part = imag([imFFT(2:3,2:3) [0;0] imFFT(2:3,ny-1:ny);
                       0 0 0 0;
                       imFFT(nx-1:nx,2:3) [0;0] imFFT(nx-1:nx,ny-1:ny)]);
-->
compare the four corners of the FFT2 image
real_part =
-5.4738e+03 -3.8136e+03 0 -1.2282e+03 1.2203e+02
-9.4636e+02 2.3009e+03 0 -2.4954e+03 2.8289e+03
0 0 0 0
2.8289e+03 -2.4954e+03 0 2.3009e+03 -9.4636e+02
1.2203e+02 -1.2282e+03 0 -3.8136e+03 -5.4738e+03

imaginary_part =
5.4842e+03 2.6081e+02 0 1.5409e+03 3.2594e+03
-4.6333e+02 -1.5687e+03 0 -6.0580e+02 -2.1084e+02
0 0 0 0
2.1084e+02 6.0580e+02 0 1.5687e+03 4.6333e+02
-3.2594e+03 -1.5409e+03 0 -2.6081e+02 -5.4842e+03

```

This allows to reduce storage considerably. For the above 480×480 picture we kept 40 frequencies in either direction. Thus we have to store $2 \times (41^2 + 40^2)$ complex coefficients, i.e. 13'124 floating point numbers. This has to be compared with the $480^2 \approx 230'000$ pixels informations for the original picture.

1.11 Fourier Series and Boundary Value Problems

1.11.1 Fourier Sin Series of function $f(x) = 1$

We want to write a function $f(x)$ for $0 \leq x \leq L$ as a sum or series of sin functions, such that the function vanishes at $x = 0$ and $x = L$. Thus if we use $\sin(n \frac{\pi}{L} x)$ this property will be satisfied. Thus we need constants b_n such that

$$f(x) \approx \sum_n b_n \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

Thus we use a **Fourier Sin Series** on the intervall $[0, L]$ and the coefficients b_n are given by

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n \frac{\pi}{L} x) dx$$

As an example we consider the constant function $f(x) = 1$ and find

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L 1 \sin(n \frac{\pi}{L} x) dx = \frac{2}{L} \frac{-L}{n\pi} \cos(n \frac{\pi}{L} x) \Big|_0^L \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left(\cos(n \frac{\pi}{L} L) - 1 \right) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \end{aligned}$$

Thus we find

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{3} \sin(3 \frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{5} \sin(5 \frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{7} \sin(7 \frac{\pi}{L} x) + \dots \right)$$

This purely mathematical results will now be used to examine solutions of heat and wave equations.

1.11.2 1D Static Heat Equation

To a beam of length L energy will be added along the beam, described by a function $f(x)$ for $0 \leq x \leq L$. The temperature $u(x)$ along the beam will satisfy the differential equation below. The endpoints are kept at a fixed temperature $u(0) = u(L) = 0$.

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= f(x) \quad \text{for } 0 < x < L \\ u(0) &= u(L) = 0 \end{aligned}$$

This boundary value problem can be solved for different types of functions $f(x)$.

1. case: $f(x) = \sin(n \frac{\pi}{L} x)$ with $n \in \mathbb{N}$

Since $\frac{d^2}{dx^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x) = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x)$ we find the solution

$$u(x) = \frac{L^2}{\alpha n^2 \pi^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

The boundary conditions $u(0) = u(L) = 0$ are satisfied.

2. case: $f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n \frac{\pi}{L} x)$

Using the previous result and superposition we find the solution

$$u(x) = \sum_{n=1}^N b_n \frac{L^2}{\alpha n^2 \pi^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

3. case: $f(x) = 1$

We combine the results from the above sections to write down a solution formula.

$$u(x) = \frac{4L^2}{\alpha\pi^3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{3^3} \sin\left(3\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{5^3} \sin\left(5\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{7^3} \sin\left(7\frac{\pi}{L}x\right) + \dots \right)$$

Find the results of an approximation with 6 nonzero contributions in Figure 1.56.

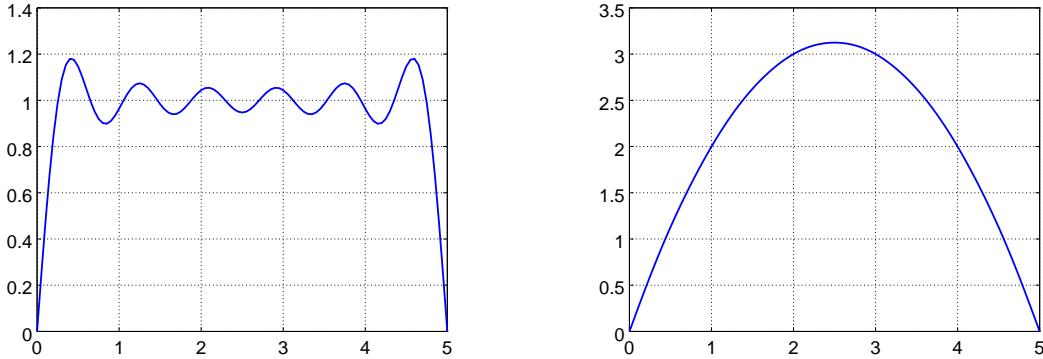


Figure 1.56: Fourier approximation of the function $f(x) = 1$ and a solution of the static heat equation

For the maximal temperature at the midpoint $x = \frac{L}{2}$ we obtain¹¹

$$\begin{aligned} u(L/2) &= \frac{4L^2}{\alpha\pi^3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3^3} \sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5^3} \sin\left(5\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{7^3} \sin\left(7\frac{\pi}{2}\right) + \dots \right) \\ &= \frac{4L^2}{\alpha\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right) \approx \frac{4L^2}{\alpha\pi^3} 0.97 \end{aligned}$$

and we see that a longer bar will be hotter at the center because of the factor L^2 .

Since

$$u'(x) = \frac{4L}{\alpha\pi^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{7^2} \cos\left(7\frac{\pi}{L}x\right) + \dots \right)$$

we find

$$u'(0) = \frac{4L}{\alpha\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{4L}{\alpha\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{L}{2\alpha}$$

and thus the slope and heat flux through the boundary increase linearly with respect to L . This can be confirmed with a conservation of energy argument.

1.11.3 1D Dynamic Heat Equation

A beam of length L has a given initial temperature $u(0, x) = f(x)$. We want to examine the temperature as a function of time t . The partial differential equation to be solved is

$$\begin{aligned} \dot{u}(t, x) &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad \text{for } 0 < x < L \quad \text{and } t > 0 \\ u(t, 0) &= u(t, L) = 0 \quad \text{for } t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) \quad \text{for } 0 < x < L \end{aligned}$$

This boundary value problem can be solved for different types of functions $f(x)$.

¹¹One can show that

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}$$

1. case: $f(x) = \sin(n \frac{\pi}{L} x)$ with $n \in \mathbb{N}$

Since

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x) &= -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x) \\ \frac{d}{dt} \exp(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t) &= -\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \exp(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t)\end{aligned}$$

we find the solution

$$u(t, x) = \exp(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t) \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

The boundary conditions $u(0) = u(L) = 0$ and the initial condition $u(t, x) = \sin(n \frac{\pi}{L} x)$ are satisfied.

2. case: $f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n \frac{\pi}{L} x)$

Using the previous result and superposition we find the solution

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^N b_n \exp(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t) \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

Thus the solution consist of exponentially decaying components with exponents $-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$.

3. case: $f(x) = 1$

We use the Fourier series

$$\begin{aligned}f(x) &= u(0, x) = 1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{3} \sin(3 \frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{5} \sin(5 \frac{\pi}{L} x) + \frac{1}{7} \sin(7 \frac{\pi}{L} x) + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1) \frac{\pi}{L} x)}{2k+1}\end{aligned}$$

and the above to find the solution

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp(-\alpha \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{L^2} t) \sin((2k+1) \frac{\pi}{L} x)$$

As time t gets larger the first contribution of this series will dominate and we find an approximate solution

$$u(t, x) \approx \frac{4}{\pi} \exp(-\alpha \frac{\pi^2}{L^2} t) \sin(\frac{\pi}{L} x)$$

Thus we conclude that for large L the solution converges to 0.

A solution using 6 nonzero contributions is shown in Figure 1.57. At the time slice $t = 0$ along the back edge the roughness of the approximation of the initial value $u(0, x) = 1$ is clearly visible. At time $t = 3$ along the front edge the dominating contribution $\sin(\frac{\pi}{L} x)$ is evident.

1.11.4 2D Static Heat Equation

If a rectangular plate ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$) is uniformly heated and the boundary is kept at temperature $u = 0$ we have to solve the boundary value problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= -1 \quad \text{for } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq B \\ u &= 0 \quad \text{on boundary}\end{aligned}\tag{1.7}$$

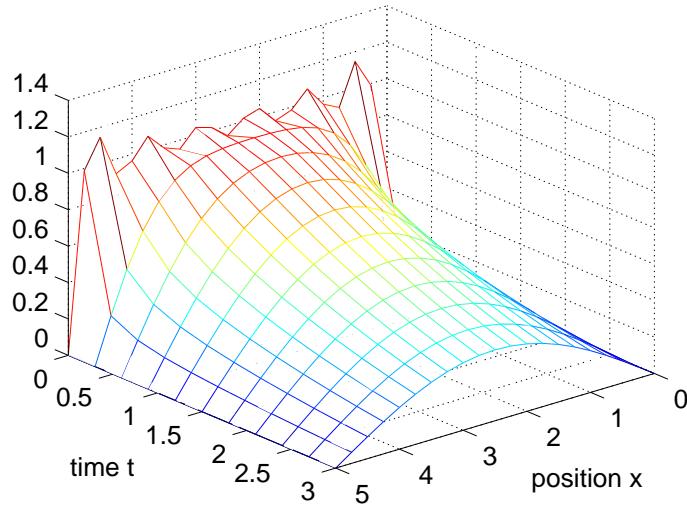


Figure 1.57: Fourier approximation of a solution of the dynamic heat equation

using again the same Fourier Sin series twice we can write¹²

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 = \left(\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \right) \cdot \left(\frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)}{2l+1} \right) \\ &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \cdot \frac{\sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)}{2l+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16/\pi^2}{(2k+1)(2l+1)} u_{2k+1,2l+1}(x,y) \end{aligned}$$

Each of the functions $u_{k,l}(x,y)$ satisfies the boundary conditions and it is an exercise in derivatives to verify that

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{k,l}(x,y) &= -\left(k \frac{\pi}{L}\right)^2 u_{k,l}(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{k,l}(x,y) &= -\left(l \frac{\pi}{B}\right)^2 u_{k,l}(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{k,l}(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{k,l}(x,y) &= -\left(\left(k \frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(l \frac{\pi}{B}\right)^2\right) u_{k,l}(x,y) \\ &= -\lambda_{k,l} u_{k,l}(x,y) \end{aligned}$$

Thus the function $u_{k,l}(x,y) = \sin(k \frac{\pi}{L}x) \cdot \sin(l \frac{\pi}{B}y)$ is an eigenfunction for the boundary value problem (1.7) with eigenvalue $\lambda_{k,l} = (k \frac{\pi}{L})^2 + (l \frac{\pi}{B})^2$.

The above approximation with 6 nonzero terms in each variable (thus a total of 36 contributions) is shown in Figure 1.58(a).

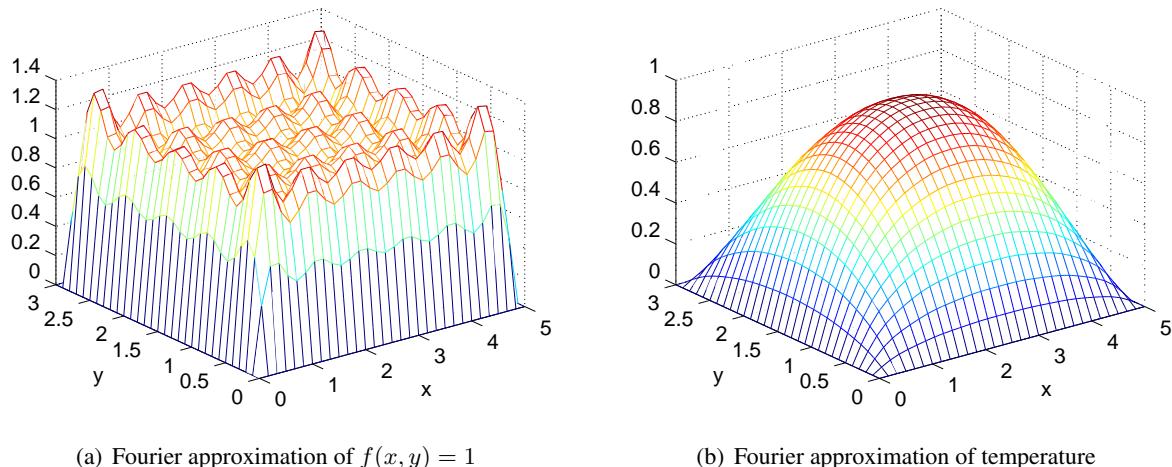
Now let

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1,2l+1}} \frac{16/\pi^2}{(2k+1)(2l+1)} u_{2k+1,2l+1}(x,y)$$

and we conclude

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k,l}}{\lambda_{k,l}} \frac{16/\pi^2}{(2k+1)(2l+1)} u_{k,l}(x,y) = -1$$

¹²We knowingly ignore possible convergence problems of this double series.

Figure 1.58: Fourier approximation of the function $f(x, y) = 1$ on a rectangle and the resulting temperature

This formula may be used to generate approximate solution of the static heat equation, as seen in Figure 1.58(b)

1.11.5 2D Dynamic Heat Equation

A rectangular plate ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$) has a given initial temperature $u(0, x, y) = f(x, y) = 1$. The boundary is kept at temperature $u = 0$ and we have to solve the boundary value problem

$$\begin{aligned}\dot{u}(t, x, y) &= \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y) \right) \quad \text{within rectangle} \\ u(t, x, y) &= 0 \quad \text{on boundary} \\ u(0, x, y) &= f(x, y) = 1 \quad \text{within rectangle}\end{aligned}$$

This boundary value problem can be solved for different types of initial functions $f(x, y)$. Using the previous results

$$\begin{aligned}\lambda_{k,l} &= \left((2k+1) \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left((2l+1) \frac{\pi}{B} \right)^2 \\ u_{k,l}(x, y) &= \frac{16}{\pi^2} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \cdot \frac{\sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)}{2l+1} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{k,l}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{k,l}(x, y) &= -\lambda_{k,l} u_{k,l}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(-\alpha \lambda_{k,l} t) &= -\alpha \lambda_{k,l} \exp(-\alpha \lambda_{k,l} t)\end{aligned}$$

we verify that the function

$$\exp(-\alpha \lambda_{k,l} t) \cdot u_{k,l}(x, y)$$

solves the above boundary value problem with initial condition $f(x, y) = u_{k,l}(x, y)$. Since

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16/\pi^2}{(2k+1)(2l+1)} u_{2k+1,2l+1}(x, y)$$

we find that

$$u(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \exp(-\alpha \lambda_{2k+1,2l+1} t) \frac{16/\pi^2}{(2k+1)(2l+1)} u_{2k+1,2l+1}(x, y)$$

$\lambda_{k,l}$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.4914	4.7813	10.2644	17.9407	27.8104
$k = 2$	2.6758	5.9656	11.4487	19.1251	28.9947
$k = 3$	4.6497	7.9395	13.4227	21.0990	30.9686
$k = 4$	7.4132	10.7030	16.1862	23.8625	33.7321
$k = 5$	10.9662	14.2561	19.7392	27.4156	37.2852
$k = 6$	15.3089	18.5987	24.0818	31.7582	41.6278
$k = 7$	20.4410	23.7309	29.2140	36.8904	46.7600

Table 1.2: Eigenvalues of $-(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ on rectangular domain with $L = 5$ and $B = 3$

is a solution of the boundary value problem with initial condition $u(0, x, y) = 1$. We observe again that the solution consists of multiple components converging exponentially to 0. The exponents are determined by the values of $\lambda_{k,l}$ shown in Table 1.2¹³ for a rectangular plate with $0 \leq x \leq L = 5$ and $0 \leq y \leq B = 3$. The corresponding mode has the form

$$\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x) \cdot \sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)$$

i.e. $(2k+1)$ arcs of a sin function in x direction and $(2l+1)$ arcs of a sin function in y direction. The time behavior is given by the exponential function $e^{-\alpha \lambda_{2k+1,2l+1} t}$.

1.11.6 Vibrating String

A horizontal string of length L has a given initial vertical displacement $u(0, x) = f(x)$. We want to examine the displacement as a function of time t . The partial differential equation to be solved is

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t, x) &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad \text{for } 0 < x < L \quad \text{and } t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 \quad \text{for } t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) = 1 \quad \text{for } 0 < x < L \\ \dot{u}(0, x) &= 0 \quad \text{for } 0 < x < L\end{aligned}$$

where the constant α contains the physical information on density and horizontal tension. We quietly ignore the fact that the initial condition is physically impossible.

1. case First examine the function $f(x) = \sin(n \frac{\pi}{L} x)$. Then we seek a solution of the form

$$u(t, x) = h(t) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

Verify that the boundary conditions $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ are satisfied and

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin(n \frac{\pi}{L} x) = \lambda_n \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

Thus we may call $\sin(n \frac{\pi}{L} x)$ an **eigenfunction** of the operator $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ with **eigenvalue** $\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2}$. For the above partial differential equation we obtain

$$\ddot{u}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

¹³The table contains all eigenvalues, but since the Fourier sin series of the function $f(x) = 1$ contains only the odd contribution, only a part of the eigenvalues will be used to solve this steady state heat problem.

$$\begin{aligned}\ddot{h}(t) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} x) &= \alpha h(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(n \frac{\pi}{L} x) \\ &= -\alpha n^2 \frac{\pi^2}{L^2} h(t) \sin(n \frac{\pi}{L} x) \\ \ddot{h}(t) &= -\alpha n^2 \frac{\pi^2}{L^2} h(t) = -\alpha \lambda_n h(t)\end{aligned}$$

This ordinary differential equation has the general solution

$$h(t) = A \cos(\sqrt{\alpha \lambda_n} t) + B \sin(\sqrt{\alpha \lambda_n} t)$$

Using the initial conditions $u(0, x) = \sin(n \frac{\pi}{L} x)$ and $\dot{u}(0, x) = 0$ we find $A = 1$ and $B = 0$ and thus have the solution

$$u(t, x) = \cos(\sqrt{\alpha \lambda_n} t) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} x) = \cos(\sqrt{\alpha} \frac{n \pi}{L} t) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} x)$$

2. case If $f(x) = 1$ we use the Fourier Sin series

$$\begin{aligned}f(x) = 1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{3} \sin(3\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{5} \sin(5\frac{\pi}{L}x) + \frac{1}{7} \sin(7\frac{\pi}{L}x) + \dots \right)\end{aligned}$$

and the above to find the solution

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos\left(\sqrt{\alpha} \frac{(2k+1)\pi}{L} t\right) \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{L} x\right)$$

1.11.7 Vibrating Membrane

A rectangular membrane ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$) has a given initial vertical displacement $u(0, x, y) = f(x, y) = 1$. The boundary is kept fix at $u = 0$ and we have to solve the boundary value problem

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t, x, y) &= \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y) \right) \quad \text{within rectangle} \\ u(t, x, y) &= u(t, x, y) = 0 \quad \text{on boundary} \\ u(0, x, y) &= f(x, y) = 1 \quad \text{within rectangle} \\ \dot{u}(0, x, y) &= 0 \quad \text{within rectangle}\end{aligned}$$

As in the previous example we first use eigenfunctions and eigenvalues.

$$\begin{aligned}\phi_{n,m}(x, y) &= \sin(n \frac{\pi}{L} x) \cdot \sin(m \frac{\pi}{B} y) \\ -\frac{\partial^2 \phi_{n,m}(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_{n,m}(x, y)}{\partial y^2} &= \left(n^2 \frac{\pi^2}{L^2} + m^2 \frac{\pi^2}{B^2} \right) \phi_{n,m}(x, y) \\ &= \lambda_{n,m} \phi_{n,m}(x, y)\end{aligned}$$

and the eigenfunction $u_{n,m}$ vanishes on the boundary of the rectangle, i.e. satisfies the boundary condition. For an initial condition $f(x, y) = \phi_{n,m}(x, y)$ we find the solution

$$u(t, x, y) = \cos(\sqrt{\alpha \lambda_{n,m}} t) \cdot \phi_{n,m}(x, y) = \cos(\sqrt{\alpha \lambda_{n,m}} t) \cdot \sin(n \frac{\pi}{L} x) \cdot \sin(m \frac{\pi}{B} y)$$

To examine the initial condition $u(0, x, y) = 1 = f(x, y)$ we use the double Fourier series

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \right) \cdot \left(\frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)}{2l+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x)}{2k+1} \cdot \frac{\sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y)}{2l+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)(2l+1)} \phi_{(2k+1),(2l+1)}(x, y) \end{aligned}$$

Then we find the solution

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)(2l+1)} \cos(\sqrt{\alpha \lambda_{(2k+1),(2l+1)}} t) \cdot \phi_{(2k+1),(2l+1)}(x, y) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{\alpha \lambda_{(2k+1),(2l+1)}} t)}{(2k+1)(2l+1)} \cdot \sin((2k+1)\frac{\pi}{L}x) \cdot \sin((2l+1)\frac{\pi}{B}y) \\ \lambda_{(2k+1),(2l+1)} &= (2k+1)^2 \frac{\pi^2}{L^2} + (2l+1)^2 \frac{\pi^2}{B^2} \end{aligned}$$

We quietly ignored the fact that the initial condition is physically impossible. Find the occurring frequencies in Table 1.2.

1.12 Aufgaben

• **Aufgabe 1–1:**

Untersuchen Sie das statische Wärmeleitungsproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für/pour} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{und/et} \quad u(-\pi) = u(\pi) = 0$$

- (a) Erraten Sie die Lösung für $f(x) = \sin(n x)$.
 (b) Verwenden Sie die untenstehende Fourierreihe um das Problem mit $f(x) = x$ zu lösen.

$$x = 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{\sin(6x)}{6} + \dots \right)$$

• **Aufgabe 1–2:**

Betrachten Sie die Funktion $g(x) = e^x$ und $f(x) = a x^2 + b x + c$ auf dem Intervall $[0, 1]$

- (a) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten der beiden Funktionen, abhängig von den Parametern a , b und c .
 (b) Setzen Sie $a = 0$, d.h. es werden nur noch Geraden untersucht statt Parabeln. Wie sind die Parameter b und c zu wählen, sodass die beiden Funktionen möglichst gut übereinstimmen?
 Die Rechnungen dieser Teilaufgabe sind etwas schwieriger.

• **Aufgabe 1–3:**

Gegeben sind zwei Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{20} A_n \sin(n x) \quad \text{und/et} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{20} B_m \sin(m x) \quad \text{für/pour} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

durch die Vektoren

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{20})^{tr} \quad \text{und/et} \quad \vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{20})^{tr}$$

- (a) Stellen Sie die Integrale auf um den Korrelationskoeffizienten C dieser beiden Funktionen zu bestimmen.
 (b) Finden Sie eine einfache Formel für C als Funktion der beiden Vektoren \vec{A} und \vec{B} . Hierzu sind die Integrale der ersten Teilaufgabe auszurechnen.

• **Aufgabe 1–4:**

Unten sehen Sie die Graphen von vier Funktionen. Somit gibt es insgesamt 6 Korrelationskoeffizienten dieser Funktionen. Berechnen Sie alle 6 Koeffizienten exakt.

Examiner le problème de conduction de chaleur statique suivant.

(a) Deviner la solution pour $f(x) = \sin(n x)$.

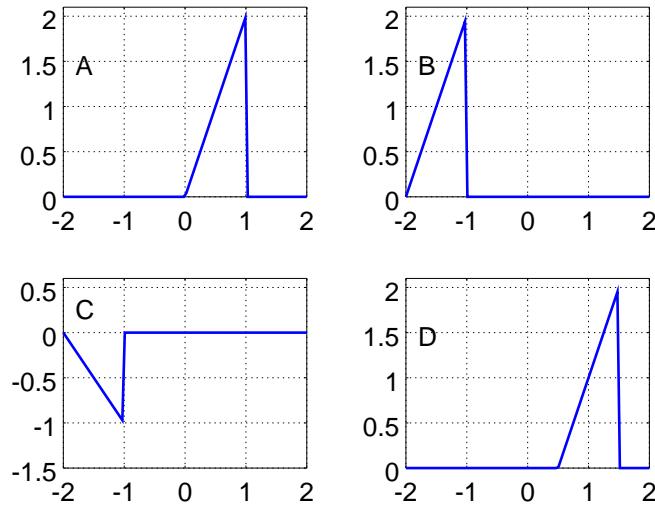
(b) Utiliser la série de Fourier ci-dessous pour trouver la solution pour $f(x) = x$.

On a deux fonctions

données par les vecteurs

- (a) Donner les intégrales pour calculer le coefficient de corrélation C de ces deux fonctions f et g .
 (b) Trouver une formule simple pour C comme fonction des deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} . Pour y arriver calculer les intégrales en (a).

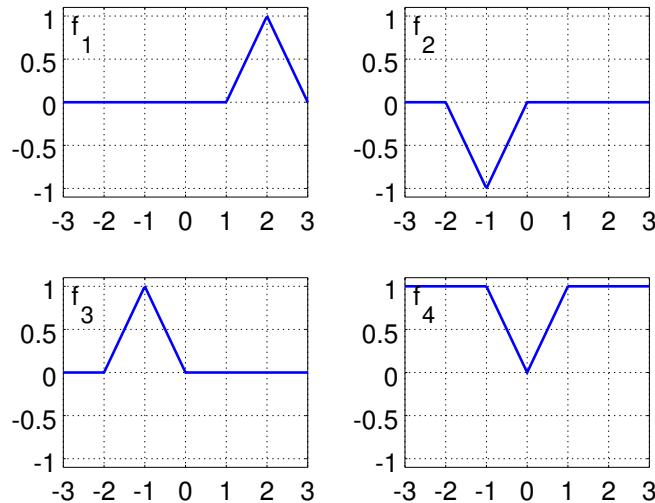
Ci-dessous trouver les graphes de quatre fonctions. Donc il y a 6 coefficients de corrélation pour ces fonctions. Calculer ces 6 coefficients d'une façon exacte.



• Aufgabe 1–5:

Unten sehen Sie die Graphen von vier Funktionen. Somit gibt es insgesamt 6 Korrelationskoeffizienten dieser Funktionen. Entscheiden Sie welcher Koeffizient der Grösste sein wird und berechnen Sie ihn exakt.

Ci-dessous trouver les graphes de quatre fonctions. Donc il y a 6 coefficients de corrélation pour ces fonctions. Décider lequel sera le plus grand et calculer la valeur exacte de ce coefficient.



• Aufgabe 1–6:

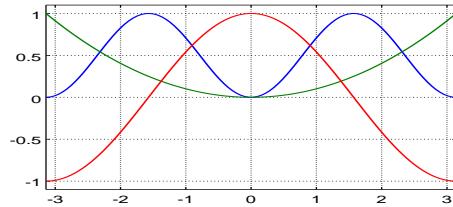
Examiner les coefficients de corrélation des fonctions montrées ci-dessous. Les fonctions sont définie sur l'intervalle $-\pi \leq t \leq \pi$.

- Trier par largeur les valeurs des coefficients de corrélation $K_{f,g}$, $K_{f,h}$ et $K_{g,h}$. Tuyau: ne pas calculer.
- Calculer le plus grand de ces coefficients.

Untersuchen Sie die Korrelationskoeffizienten der untenstehenden Funktionen. Die Funktionen sind auf dem Intervall $-\pi \leq t \leq \pi$ definiert..

- Sortieren Sie die drei Korrelationskoeffizienten $K_{f,g}$, $K_{f,h}$ und $K_{g,h}$ der Grösse nach. Tipp: nicht rechnen.
- Berechnen Sie den Grössten der drei Koeffizienten.

$$\begin{aligned}f(t) &= \sin^2(t) \\g(t) &= \frac{1}{\pi^2} t^2 \\h(t) &= \cos(t)\end{aligned}$$



• **Aufgabe 1–7:**

Untersuchen Sie die zwei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.21906 \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ -0.44925 \end{pmatrix}$$

und den Vektor $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$.

- (a) Zeige, dass die zwei Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 orthonormal sind.
- (b) Finde den optimalen Wert des Parameters λ_1 , sodass der Abstand von \vec{a} zu $\lambda_1 \vec{b}_1$ minimal wird. Bestimme den Abstand.
- (c) Finde die optimalen Werte der Parameter μ_1 und μ_2 , sodass der Abstand von \vec{a} zu $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2$ minimal wird. Bestimme den Abstand.

• **Aufgabe 1–8:**

Untersuchen Sie die zwei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ z \end{pmatrix}$$

und den Vektor $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.

- (a) Bestimmen Sie $x > 0$ und z , sodass die beiden Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 orthonormal sind.
- (b) Finde den optimalen Wert des Parameters λ_1 , sodass der Abstand von \vec{a} zu $\lambda_1 \vec{b}_1$ minimal wird. Bestimme den Abstand.
- (c) Finde die optimalen Werte der Parameter μ_1 und μ_2 , sodass der Abstand von \vec{a} zu $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2$ minimal wird. Bestimme den Abstand.

• **Aufgabe 1–9:**

Untersuchen Sie die drei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.21906 \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ -0.44925 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0.48802 \\ -0.76235 \\ 0.42504 \end{pmatrix}$$

Examiner les deux vecteurs

et le vecteur $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$.

- (a) Montrer que les deux vecteurs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 sont orthonormales.
- (b) Trouver la valeur optimale du paramètre λ_1 , telles que la distance entre \vec{a} et $\lambda_1 \vec{b}_1$ soit minimale. Calculer la distance.
- (c) Trouver les valeurs optimales des paramètres μ_1 et μ_2 , tels que la distance entre \vec{a} et $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2$ soit minimale. Calculer la distance.

Examiner les deux vecteurs

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ z \end{pmatrix}$$

et le vecteur $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$.

- (a) Trouver les valeurs de $x > 0$ et z , tel que les deux vecteurs \vec{b}_1 et \vec{b}_2 sont orthonormales.
- (b) Trouver la valeur optimale du paramètre λ_1 , telles que la distance entre \vec{a} et $\lambda_1 \vec{b}_1$ soit minimale. Calculer la distance.
- (c) Trouver les valeurs optimales des paramètres μ_1 et μ_2 , tels que la distance entre \vec{a} et $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2$ soit minimale. Calculer la distance.

Examiner les trois vecteurs

und den Vektor $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$. Beachten Sie, dass die Vektoren in der vorangehenden Aufgabe verwendet wurden.

- (a) Zeige dass die drei Vektoren \vec{b}_i orthonormal sind.
- (b) Finde die optimalen Werte der Parameter μ_1, μ_2 und μ_3 , sodass der Abstand von \vec{a} zu $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \mu_3 \vec{b}_3$ minimal wird. Bestimme den Abstand.

• **Aufgabe 1–10:**

Untersuchen Sie die Funktion $f(t) = t$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und die drei Funktionen $b_1(t) = c_1$, $b_2(t) = c_2 \cos(\pi t)$ und $b_3(t) = c_3 \cos(3\pi t)$.

- (a) Bestimmen Sie c_1, c_2, c_3 , sodass $\|b_i(t)\| = 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $b_i(t)$ orthonormal sind.
- (b) Suchen Sie den Parameter $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $\lambda_1 b_1(t)$ einen minimalen Abstand von der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ hat.
- (c) Suchen Sie die Parameter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $\lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ einen minimalen Abstand von der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ hat.
- (d) Suchen Sie die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $\lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) + \lambda_3 b_3(t)$ minimalen Abstand von der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ hat.

Diese Aufgabe verwendet Ideen von Beispiel 1–7, siehe Seite 29.

• **Aufgabe 1–11:**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \pi^2 - x^2$ auf dem Intervall $[0, \pi]$. Diese Funktion ist durch andere Funktionen $g(x)$ zu approximieren, wobei der Approximationsfehler

$$\int_0^\pi |f(x) - g(x)|^2 dx$$

minimal sein soll. Die in dieser Aufgabe zu berechnenden Integrale können auch numerisch bestimmt werden.

- (a) Bestimmen Sie die Konstante B in der Funktion $g(x) = B \cos x$, sodass der obige Ausdruck minimal wird.
- (b) Bestimmen Sie die Konstanten k_0, k_1 und k_2 in $g(x) = k_0 + k_1 \cos(x) + k_2 \cos(2x)$, sodass der obige Ausdruck minimal wird.

• **Aufgabe 1–12:**

et le vecteur $\vec{a} = (1, 1, 1)^T$. Observer que les vecteurs sont utilisés dans le problème précédent.

- (a) Montrer que les trois vecteurs \vec{b}_i sont orthonormales.
- (b) Trouver les valeurs optimales des paramètres μ_1, μ_2 et μ_3 , telles que la distance entre \vec{a} et $\mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2 + \mu_3 \vec{b}_3$ soit minimale. Calculer la distance.

Examiner la fonction $f(t) = t$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et les trois fonctions $b_1(t) = c_1$, $b_2(t) = c_2 \cos(\pi t)$ et $b_3(t) = c_3 \cos(3\pi t)$.

- (a) Trouver les valeurs de c_1, c_2, c_3 , telles que $\|b_i(t)\| = 1$. Montrer que les trois fonctions $b_i(t)$ sont orthogonales.
- (b) Trouver le paramètre $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, tel que la distance de la fonction $\lambda_1 b_1(t)$ de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ soit minimale.
- (c) Trouver les paramètres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tels que la distance de la fonction $\lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ soit minimale.
- (d) Trouver les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que la distance de la fonction $\lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) + \lambda_3 b_3(t)$ de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ soit minimale.

Ce problème utilise des idées de l'exemple 1–7, voir page 29.

Examiner la fonction $f(x) = x(1 - x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette fonction doit être approximée par une autre fonction $g(x)$, tel que l'erreur

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

soit minimal.

- (a) Trouver la constante A dans la fonction $g(x) = A \sin \pi x$, telle que l'expression ci-dessus est minimal.
- (b) Trouver les constantes a_0 , a_1 et b_1 en $g(x) = a_0 + a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x$, telles que l'expression ci-dessus est minimal.

Vous pouvez rendre des résultats numériques pour les intégrales à calculer dans ce problème.

• Aufgabe 1-13:

Der Graph der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ -a & \text{falls } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

ist zu zeichnen und dann periodisch fortzusetzen. Anschliessend kann die Fourierreihe der Funktion bestimmt werden.

• Aufgabe 1-14:

Ordnen Sie jeder der fünf untenstehenden Funktionen die zugehörige Fourier Reihe zu. Schreiben Sie Ihr Resultat in die Tabelle.

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x(1 - x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Diese Funktion ist durch andere Funktionen $g(x)$ zu approximieren, wobei der Approximationsfehler

minimal sein soll.

- (a) Bestimmen Sie die Konstante A in der Funktion $g(x) = A \sin \pi x$, sodass der obige Ausdruck minimal wird.
- (b) Bestimmen Sie die Konstanten a_0 , a_1 und b_1 in $g(x) = a_0 + a_1 \cos 2\pi x + b_1 \sin 2\pi x$, sodass der obige Ausdruck minimal wird.

Die in dieser Aufgabe zu berechnenden Integrale können auch numerisch bestimmt werden.

Pour les cinq fonctions ci-dessous trouver la série de Fourier. Mettre votre réponse dans le tableau.

Funktion / fonction		Reihe / série
F1	Fourier Reihe von $f(x) = x$ auf $[-\pi, +\pi]$	
F2	Fourier Reihe von $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ auf $[-\pi, +\pi]$	
F3	Fourier Sinus Reihe von $f(x) = 1$ auf $[0, 1]$	
F4	Fourier Reihe von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, +\pi]$	
F5	Fourier Reihe von $f(x) = 1 - 2 x $ auf $[-1, +1]$	

Hier sind die Fourier Reihen:

$$S1: f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \cos(n x)}{n^2}$$

$$S2: f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{2n-1}$$

$$S3: f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

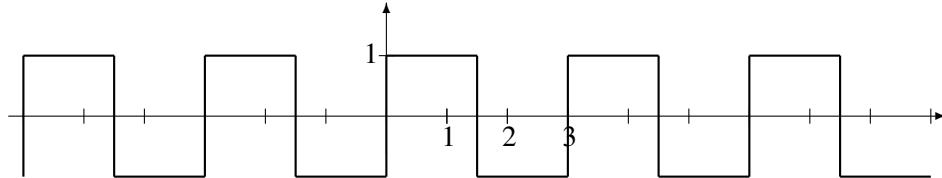
Voilà les séries de Fourier:

$$S4: f(x) \sim \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}$$

$$S5: f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

• Aufgabe 1–15:

Untersuchen Sie die Fourier-Reihe der untenstehenden Funktion $f(t)$.



- (a) Finden Sie die exakten Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n in möglichst einfacher Form.
- (b) Finden Sie die Fourierreihe der Funktion.
- (c) Die Funktion $f(t) = I(t)$ steht für einen Strom durch einen Widerstand R und somit ist die während einer Periode T erzeugte Energie E_0 gegeben durch das untenstehende Integral. Welcher prozentuale Anteil dieser Energie wird durch den harmonischen Schwingungsanteil mit der Grundfrequenz erzeugt?

$$E_0 = \int_0^T R I(t)^2 dt = \int_0^3 R 1 dt = 3R$$

• Aufgabe 1–16:

On donne la fonction périodique de période 2π Gegeben sei die 2π -periodische Funktion

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{4} \quad -\pi \leq t < \pi$$

- (a) Calculer la série de Fourier de f . Calculer d'une façon exacte.

Indication: Noter que $f''(t) = f(t)$. Effectuer deux intégrations par parties. Pas besoin de calculer la valeur $a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$.

- (b) Trouver les valeurs numériques de a_{13} et b_{13} .
- (c) Utiliser la série de Fourier ci-dessus pour déterminer la valeur de s .

Examiner la série de Fourier de la fonction $f(t)$ ci-dessous.

- (a) Trouver des formules exactes pour les coefficients a_n et b_n sous la forme la plus simple possible.
- (b) Donner la série de Fourier de cette fonction.
- (c) La fonction $f(t) = I(t)$ représente un courant à travers une résistance R est donc l'énergie E_0 générée pendant une période T est donnée par l'intégrale ci-dessous. Quel pourcentage de cette énergie est produit par la contribution harmonique de la fréquence de base?

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

• Aufgabe 1–17:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier Sinus-Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der obigen Approximation durch 2 Terme (von Null verschieden) auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 6$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen der obigen Approximation durch 20 Terme auf dem Intervall $-2 \leq x \leq 6$.

Aufgabe 1–18:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

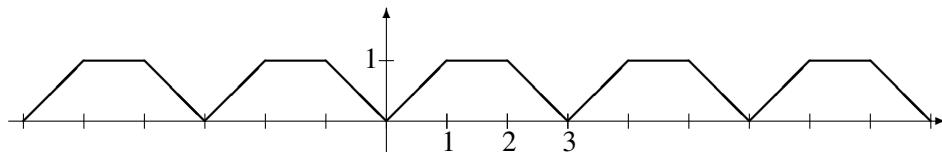
(b) Bestimmen Sie die Fourier–Sinus Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

(c) Bestimmen Sie die Fourier–Cosinus Reihe. Die Rechnungen sind zu zeigen.

Tipp: zuerst zeichnen, dann rechnen.

Aufgabe 1–19:

Untersuchen Sie die Fourier–Reihe der unten stehenden Funktion



(a) Finden Sie die exakten Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n in möglichst einfacher Form.

(b) Bestimmen Sie a_0 , a_{17} und b_{17} exakt.

Aufgabe 1–20:

Untersuchen Sie die Fourier Reihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq |t| \leq 4 \\ 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion ist rechts dargestellt.

Examiner la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Donner la série de Fourier Sinus. Montrer les calculs.

(b) Esquisser le graphe de l'approximation der Fourier Sinus avec 2 termes (différentes de zéro) sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 6$.

(c) Esquisser le graphe de l'approximation der Fourier Sinus avec 20 termes sur l'intervalle $-2 \leq x \leq 6$.

Examiner la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

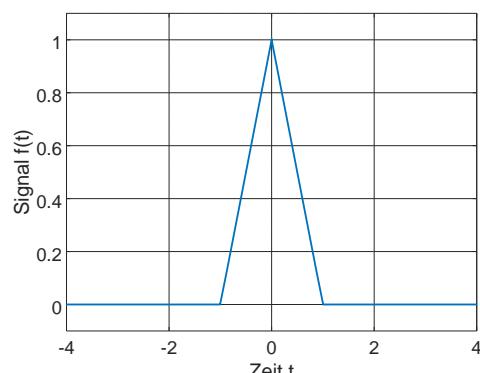
(a) Donner la série de Fourier. Montrer les calculs.

(b) Donner la série de Fourier Sinus. Montrer les calculs.

(c) Donner la série de Fourier Cosinus. Montrer les calculs.

Tip: d'abord esquisser, puis calculer.

Examiner la série de Fourier de la fonction ci-dessous.

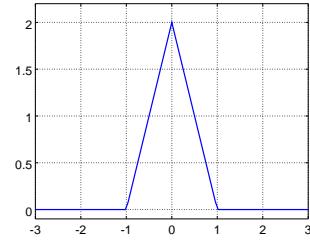


- (a) Bestimmen Sie die exakten Resultate für die Koeffizienten a_n und b_n . Das Resultat ist so weit wie möglich zu vereinfachen.
- (b) Schreiben Sie die ersten vier von Null verschiedenen Terme an. Hier genügt es vier signifikante Stellen für die Koeffizienten zu verwenden.
- (c) Bestimmen Sie den komplexen Koeffizienten c_5 exakt und den numerischen Wert mit 4 signifikanten Stellen.

• **Aufgabe 1–21:**

Die rechtsstehende Funktion hat eine Periode von $T = 6$.

- (a) Bestimmen Sie die Integrale für die reellen Fourierkoeffizienten a_n und b_n der Funktion für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie a_9 und b_9 .
- (b) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_9 und c_{-9} der Funktion.
- (c) Die Funktion wird verschoben, sodass die Spitze neu bei $t = -2$ liegt. Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten \tilde{c}_9 und \tilde{c}_{-9} der verschobenen Funktion.

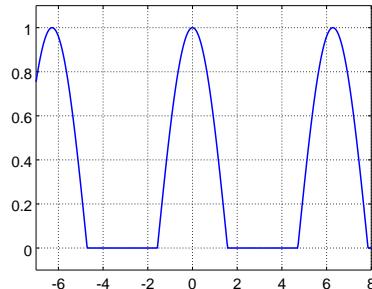


• **Aufgabe 1–22:**

Untersuchen Sie die Fourier Reihe der rechtsstehenden Funktion $f(t)$.

$$f(t) = \max\{\cos(t), 0\}$$

Examiner la série de Fourier de la fonction $f(t)$ qui est donnée par le graphe à droite.



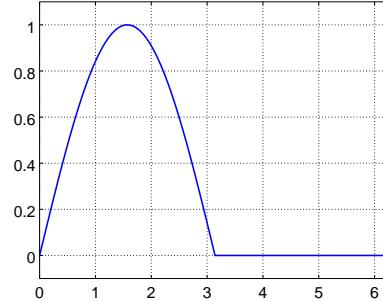
- (a) Schreiben Sie die Integrale an für die Fourierkoeffizienten a_n und b_n .
- (b) Bestimmen Sie die exakten Werte von a_0 , a_1 und b_n .
- (c) Bestimmen Sie den Wert von a_8 numerisch.
- (d) Bestimmen Sie die Fourier–Reihe der Funktion. Mindestens die ersten vier, von Null verschiedenen Terme sind anzugeben.
- (a) Donner les intégrales pour les coefficients de Fourier a_n et b_n .
- (b) Déterminer les valeurs exactes de a_0 , a_1 et b_n .
- (c) Déterminer la valeur numérique de a_8 .
- (d) Donner la série de Fourier de la fonction. Donner au moins quatre termes, différents de zéro.

• **Aufgabe 1–23:**

Untersuchen Sie die Fourier–Sinus Reihe der rechtsstehenden Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$.

$$f(t) = \max\{\sin(t), 0\}$$

Examiner la série de Fourier–Sinus la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(0, 2\pi)$. Trouver le graphe à droite.



- (a) Schreiben Sie die Integrale an für die Koeffizienten b_n .
- (b) Bestimmen Sie die exakten Werte von b_n .
- (c) Bestimmen Sie die Fourier–Sinus Reihe der Funktion. Mindestens die ersten vier von Null verschiedenen Terme sind anzugeben.

• **Aufgabe 1–24:**

Unten sehen Sie den Graphen der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $(-2, 2)$.

- (a) Schreiben Sie das Integral für den Koeffizienten b_n der Fourier Reihe dieser Funktion an. Berechnen Sie das Integral.
- (b) Schreiben Sie das Integral für den Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihe dieser Funktion an. Berechnen Sie das Integral.
- (c) Berechnen Sie die exakten Werte von c_8 , c_9 , a_8 und a_9 .

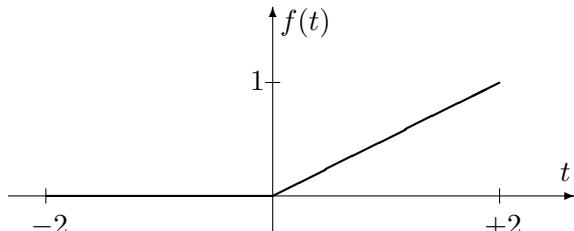
Verwenden Sie den Taschenrechner.

- (a) Donner les intégrales pour les coefficients b_n .
- (b) Déterminer les valeurs exactes de b_n .
- (c) Donner la série de Fourier–Sinus de la fonction. Donner au moins quatre termes, différents de zéro.

Ci-dessous trouver le graphe de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(-2, 2)$.

- (a) Donner l'intégrale pour le coefficient b_n de la série de Fourier de cette fonction. Calculer cette intégrale.
- (b) Donner l'intégrale pour le coefficient c_n de la série complexe Fourier de cette fonction. Calculer cette intégrale.
- (c) Calculer c_8 , c_9 , a_8 et a_9 d'une façon exacte.

Utiliser la calculatrice.



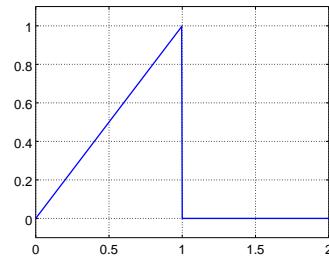
• **Aufgabe 1–25:**

Eine Funktion $f(t)$ ist zu untersuchen auf dem Intervall $(0, 2)$. Unten sehen Sie den Graphen der Funktion.

- (a) Schreiben Sie das Integral für den Koeffizienten b_n der Fourier–Sinus Reihe dieser Funktion an.
- (b) Schreiben Sie das Integral für den Koeffizienten a_n der Fourier–Cosinus Reihe dieser Funktion an.
- (c) Schreiben Sie das Integral für den Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihe dieser Funktion an.
- (d) Berechnen Sie c_{13}

Examiner une fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(0, 2)$. Ci-dessous trouver le graphe de cette fonction.

- (a) Donner l'intégrale pour le coefficient b_n de la série de sinus Fourier de cette fonction.
- (b) Donner l'intégrale pour le coefficient a_n de la série de cosinus Fourier de cette fonction.
- (c) Donner l'intégrale pour le coefficient c_n de la série complexe Fourier de cette fonction.
- (d) Calculer c_{13}



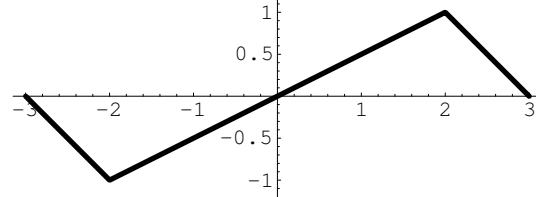
• Aufgabe 1–26:

Unten sehen Sie den Graphen der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $(-3, 3)$. Die Funktion ist periodisch mit Periode 6.

- (a) Geben Sie möglichst einfache Formeln an um die Koeffizienten a_n und b_n der Fourier Reihe dieser Funktion zu berechnen.
- (b) Bestimmen Sie a_4 , b_4 und c_4 möglichst effizient.
- (c) Die neue Funktion $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ ist stückweise stetig mit Periode 6. Bestimmen Sie den komplexen Fourierkoeffizienten \tilde{c}_4 der Fourierreihen von $g(t)$ möglichst effizient.

Le graphe de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $(-3, 3)$ est montré ci-dessous. La fonction est périodique de période 6 .

- (a) Donner des formules les plus simples possibles pour calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de cette fonction.
- (b) Trouver les valeurs de a_4 , b_4 et c_4 d'une façon efficace.
- (c) La nouvelle fonction $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ est continue par morceau de période 6 . Déterminer le coefficient de Fourier \tilde{c}_4 de cette fonction d'une façon efficace.



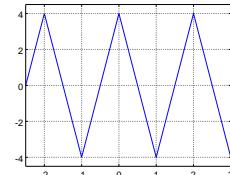
• Aufgabe 1–27:

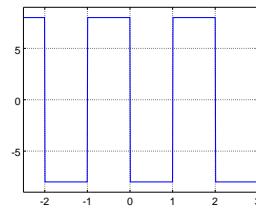
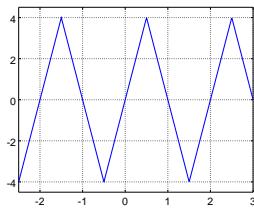
Die Fourierreihe der rechtsstehenden 2-periodischen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

La série de Fourier de la fonction à droite est donnée par

$$f(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x\pi)}{(2k+1)^2}$$

- (a) Finden Sie die komplexen Koeffizienten c_7 , c_8 und c_{-17} .
- (b) Finden Sie die Fourierreihe der unten links stehenden Funktion $g(x)$.
- (c) Finden Sie die Fourierreihe der unten rechtsstehenden Funktion $h(x)$.
- (a) Trouver les coefficients c_7 , c_8 et c_{-17} de la série de Fourier complexe.
- (b) Trouver la série de Fourier de la fonction $g(x)$ ci-dessous à gauche.
- (c) Trouver la série de Fourier de la fonction $h(x)$ ci-dessous à droite.





• Aufgabe 1–28:

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(t) = \sin(t/2)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Verwenden Sie

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

- (a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n und b_n exakt, soweit möglich.
- (b) Berechnen Sie die Werte von a_7 und b_7 .
- (c) Skizzieren Sie den Graphen der Fourierapproximation mit 50 Termen auf dem Intervall $[-5, 6]$.

• Aufgabe 1–29:

Die Fourier-Sin-Reihe der Funktion $f(t) = 1$ auf dem Intervall $(0, \pi)$ ist gegeben durch

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$$

- (a) Skizzieren Sie die Approximation durch die ersten 10 Terme auf dem Intervall $[-5, 10]$.
- (b) Geben Sie die Fourier-Sinus Reihe der Funktion $g(t) = 5$ auf dem Intervall $(0, 2)$ an.
- (c) Geben Sie die Fourier Reihe der untenstehenden Funktion $h(t)$ an.

Tip: denken, nicht rechnen.

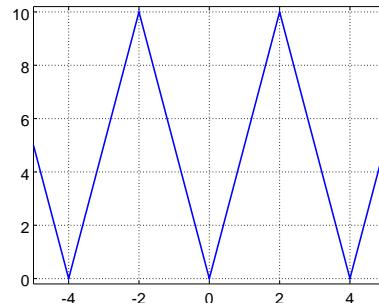
Examiner la série de Fourier de la fonction $f(t) = \sin(t/2)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Utiliser

- (a) Déterminer les coefficients a_n et b_n d'une façon exacte, si possible.
- (b) Trouver les valeurs de a_7 et b_7 .
- (c) Esquisser le graphe de l'approximation de Fourier avec 50 termes sur l'intervalle $[-5, 6]$.

La série sinus de Fourier de la fonction $f(t) = 1$ sur l'intervalle $(0, \pi)$ est donnée par

- (a) Esquisser l'approximation par les premiers 10 termes de la série sur l'intervalle $[-5, 10]$.
- (b) Donner la série sinus de Fourier de la fonction $g(t) = 5$ sur l'intervalle $(0, 2)$.
- (c) Donner la série de Fourier de la fonction $h(t)$ ci-dessous.

Tip: réfléchir, ne pas calculer.



• Aufgabe 1–30:

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(t) = t^2 - \pi^2 \quad \text{auf } -\pi < t < \pi$$

- (a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(t)$.
- (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ableitung $f'(t)$.
- (c) Bestimmen Sie die Fourierreihe der zweiten Ableitung $f''(t)$.
- (d) Verifizieren Sie, dass die Fourierreihe der Ableitungen mit den Ableitungen der Fourierreihe übereinstimmen.
- (e) Wieso ist die obige Eigenschaft falsch bei $t = \pm\pi$?

• **Aufgabe 1–31:**

Betrachten Sie die 2π –periodische Fortsetzung der Funktion

Regarder l'extension 2π –périodique de la fonction

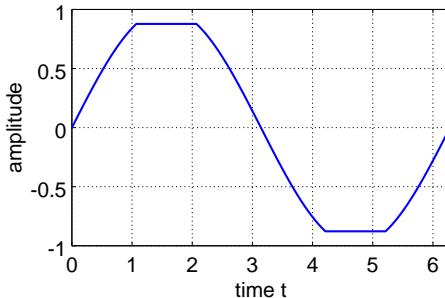
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls/pour } -\pi < x \leq 0 \\ \sin(\frac{x}{2}) & \text{falls/pour } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie $f(x)$ und die 20. Fourierapproximation $f_{20}(x)$ für $-4 \leq x \leq 10$.
- (b) Schreiben Sie die Integrale an um a_n und b_n zu berechnen.
- (c) Berechnen Sie a_0 und a_7 .
- (a) Dessiner la fonction $f(x)$ et l'approximation de Fourier $f_{20}(x)$ pour $-4 \leq x \leq 10$.
- (b) Trouver les intégrales pour calculer a_n et b_n .
- (c) Calculer a_0 et a_7 .

• **Aufgabe 1–32:**

Für eine Konstante $h = \sin(\pi/2 - d)$ wird die Sinusfunktion oben und unten auf dieser Höhe abgeschnitten. Es ergibt sich eine neue Funktion $f(t)$. Die Situation für $d = 0.5$ ist unten gezeigt.

Pour une constante $h = \sin(\pi/2 - d)$, on coupe le graphe de la fonction $\sin t$ en haut et en bas à cette hauteur. On obtient une nouvelle fonction $f(t)$. La situation $d = 0.5$ est montrée ci-dessous.

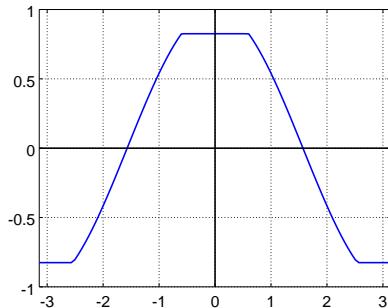


Untersuche die Fourierreihe dieser Funktion $f(t)$.

- (a) Berechnen Sie die Werte von a_n exakt.
- (b) Geben Sie das Integral an um b_n zu berechnen.
- (c) Bestimmen Sie die b_7 und c_7 numerisch für $d = 0.5$.
- (d) Zeige mit Hilfe von Symmetrie, dass $b_2 = 0$.
- (a) Trouver les valeurs de a_n exactes.
- (b) Donner une intégrale pour déterminer b_n .
- (c) Trouver les valeurs de b_3 et c_3 numériquement pour $d = 0.5$.
- (d) À l'aide d'une symétrie, vérifier que $b_2 = 0$.

• **Aufgabe 1–33:**

Für eine Konstante $h = \cos(d)$ wird die Cosinusfunktion oben und unten auf dieser Höhe abgeschnitten. Es ergibt sich eine neue Funktion $f(t)$. Die Situation für $d = 0.6$ ($\cos(0.6) \approx 0.83$) ist unten gezeigt.



Pour une constante $h = \cos(d)$ on coupe le graphe de la fonction $\cos t$ en haut et en bas sur cette hauteur. On obtiens une nouvelle fonction $f(t)$. La situation $d = 0.6$ ($\cos(0.6) \approx 0.83$) est montrée ci-dessous.

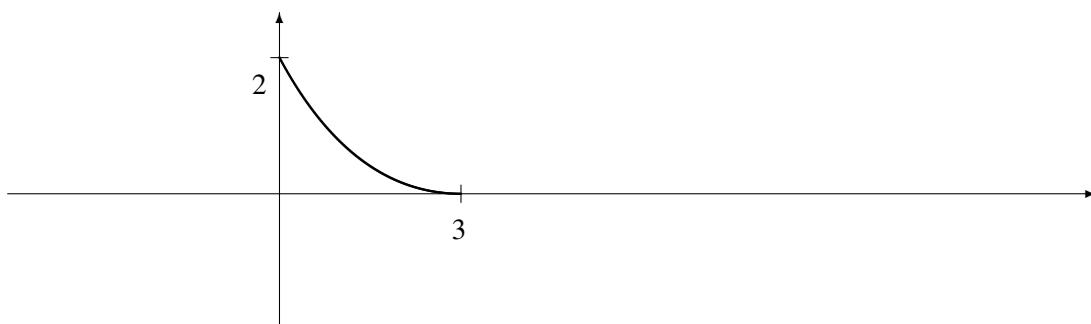
Untersuche die Fourierreihe dieser Funktion $f(t)$.

- (a) Berechnen Sie die Werte von b_n und a_0 exakt.
- (b) Geben Sie das Integral an, um a_n zu berechnen.
- (c) Bestimmen Sie die a_7 und c_7 numerisch für $d = 0.6$.
- (d) Zeige mit Hilfe von Symmetrie, dass $a_2 = 0$.

Aufgabe 1–34:

Eine Funktion auf dem Intervall $[0, 3]$ ist gegeben durch die untenstehenden Graphen. Es gilt $f(t) = \frac{2}{9}(t-3)^2$.

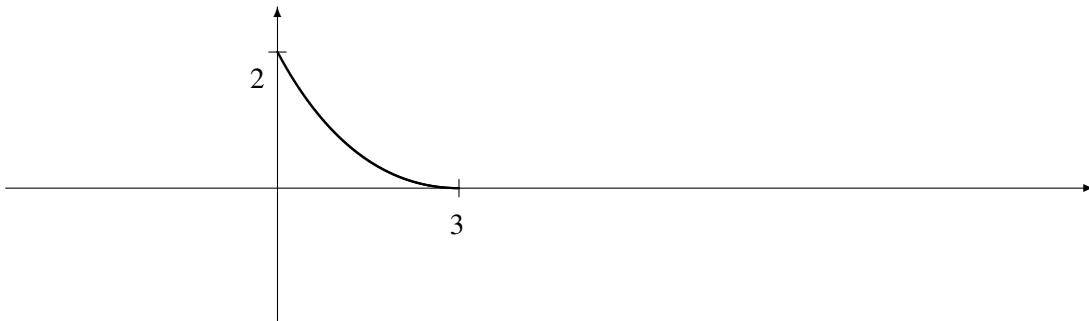
- (a) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourierreihe mit 10 Termen.



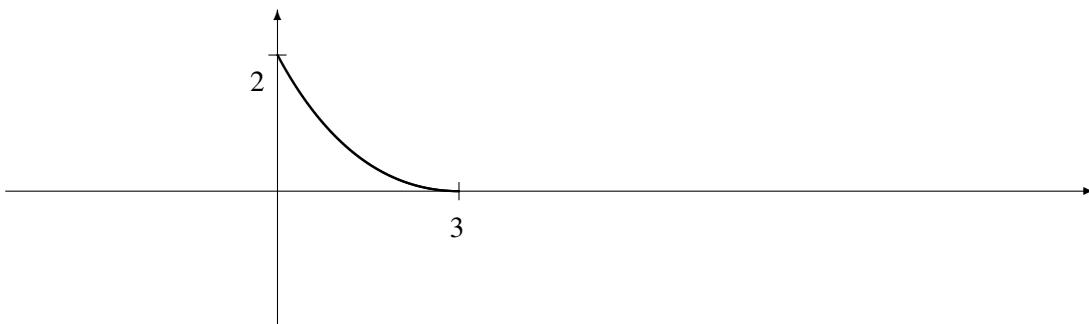
- (b) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier-Sinus-Reihe mit 10 Termen.

Examiner la série de Fourier de cette fonction $f(t)$.

- (a) Trouver les valeurs exactes de b_n et a_0 .
- (b) Donner une intégrale pour déterminer a_n .
- (c) Trouver les valeurs de a_7 et c_7 numériquement pour $d = 0.6$.
- (d) Vérifier, à l'aide d'une symétrie que $a_2 = 0$.



- (c) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier–Cosinus–Reihe mit 10 Termen.



- (d) Finden Sie den Koeffizienten c_0 Fourierreihe.

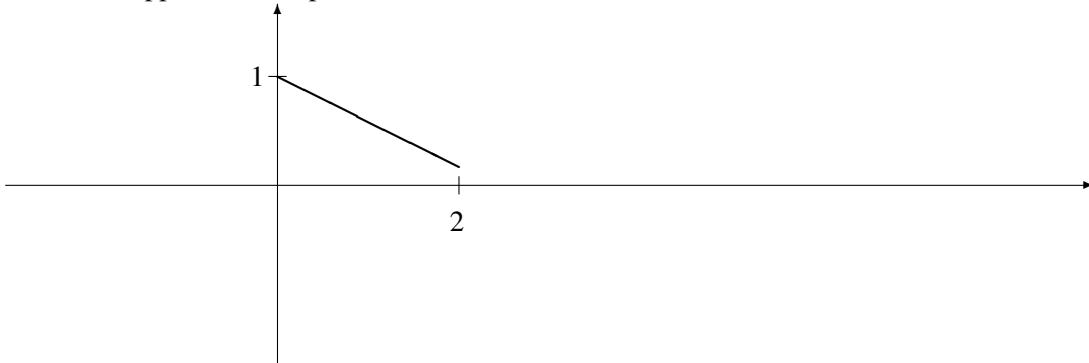
Aufgabe 1–35:

Eine Funktion auf dem Intervall $[0, 2]$ ist gegeben durch die untenstehenden Graphen. Es gilt $f(t) = 1 - 0.45t$.

Une fonction sur l'intervalle $[0, 2]$ est donnée par les graphes ci-dessous. On sait que $f(t) = 1 - 0.45t$.

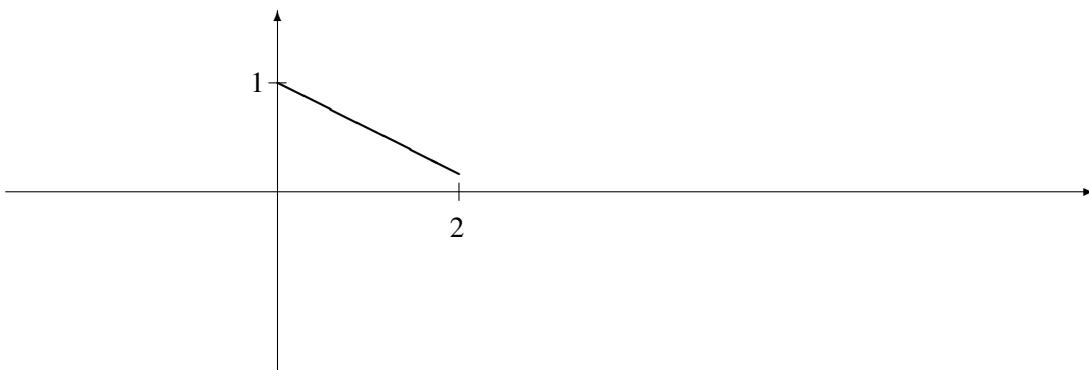
- (a) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourierreihe mit 10 Termen.

Dessiner l'approximation par une série de Fourier avec 10 termes.

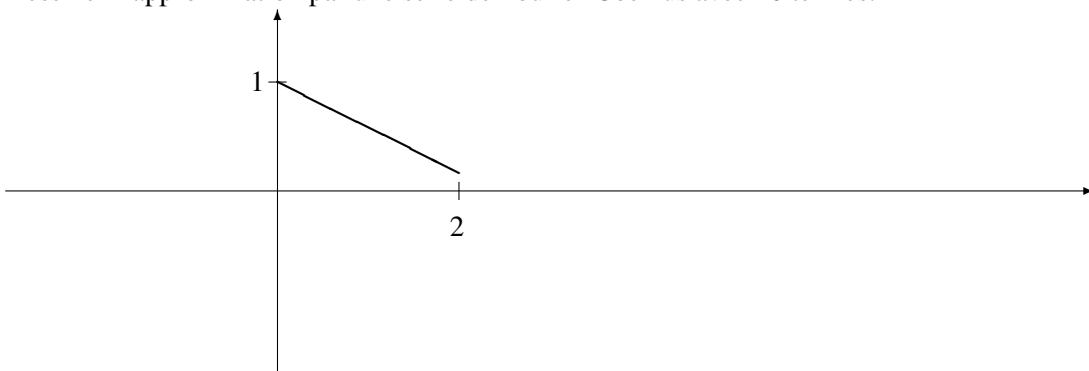


- (b) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier–Sinus–Reihe mit 10 Termen.

Dessiner l'approximation par une série de Fourier-Sinus avec 10 termes.



- (c) Skizzieren Sie die Approximation durch eine Fourier–Cosinus–Reihe mit 10 Termen.
Dessiner l'approximation par une série de Fourier-Cosinus avec 10 termes.



- (d) Finden Sie den Koeffizienten c_0 der Fourierreihe. (ohne lange Rechnung!)
Trouver le coefficient c_0 de la série de Fourier. (sans calcul long!)

• Aufgabe 1–36:

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x) = x \quad \text{für/pour} \quad 0 \leq x \leq 2$$

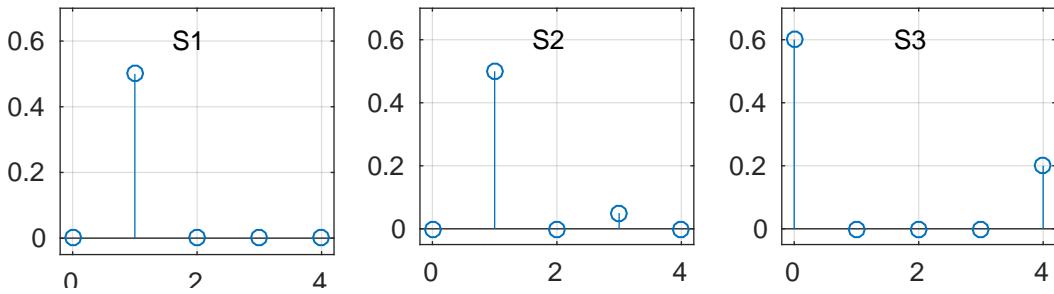
- | | |
|---|---|
| (a) Geben Sie das Integral an, um den Koeffizienten c_n der komplexen Fourierreihe zu bestimmen. | (a) Trouver l'intégrale pour le coefficient c_n de la série de Fourier complexe de la fonction ci-dessus. |
| (b) Berechnen Sie das obige c_n . | (b) Calculer la valeur de c_n . |
| (c) Bestimmen Sie dann die Fourier–Sinus–Reihe der obigen Funktion. | (c) Trouver la série de Fourier–Sinus de la fonction ci-dessus. |
| (d) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf dem Intervall $[-2, 2]$ mit Hilfe der obigen Resultate. | (d) Trouver la série de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ à l'aide des résultats au-dessus. |

• Aufgabe 1–37:

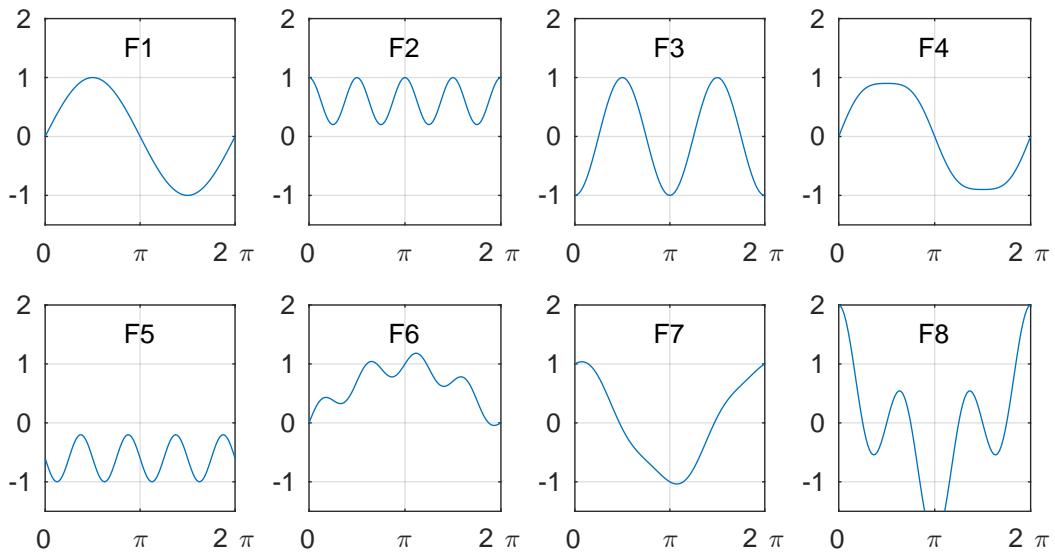
Die Fourierreihe jeder reellen, 2π -periodischen Funktion ist gegeben durch.

$$f(t) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{+int}$$

Zu jedem der untenstehenden Amplitudenspektren S_i ($|c_n|$ als Funktion von n) gehören eine oder mehrere der Funktionen F_j .



Es kann in der untenstehenden Figur Funktionen F_j haben, deren Spektrum nicht gezeigt ist. Zu bestimmen sind **alle** passenden Paare.



• Aufgabe 1–38:

Das Bundesamt für Umwelt misst die Temperatur der Aare bei Brügg alle 10 Minuten. Für den Monat August 2013 erhält man die untenstehende Graphik mit 4464 Messpunkten. Mit Hilfe einer Fourieranalyse können die Schwankungen innerhalb eines Tages untersucht werden.

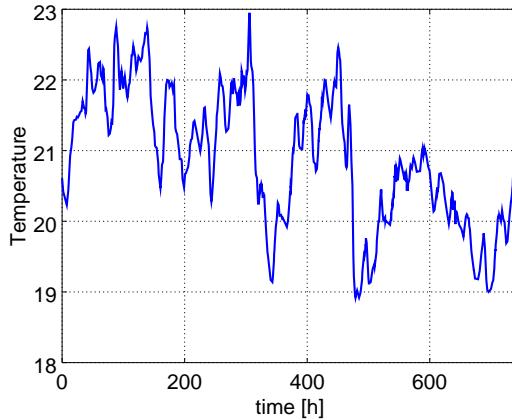
- Welcher komplexe Fourierkoeffizient c_n enthält die Information über die Schwankungen mit einer Periode von 24 h ? Zeigen Sie wie n zu bestimmen ist.
- Bei korrekt gewähltem n erhält man $c_n = -0.016118 + i 0.127044$. Zeichnen Sie mit dieser Information den Graphen der Schwankungen mit Periode 24 h für die Zeiten $0 \leq t \leq 24$ h .
- Zu welcher Tageszeit wird die Maximaltemperatur erreicht?

Diese Aufabe ist ähnlich zu Beispiel 43.

L'office fédéral de l'environnement mesure la température de l'Aare chez Brügg toutes les 10 minutes. Pour le mois d'août 2013 on obtient le graphique ci-dessous avec 4464 points de mesure. À l'aide d'une analyse de Fourier on examine les oscillations dans une journée.

- Quel coefficient de Fourier complexe c_n contient l'information pour les oscillations avec une période de 24 h ? Montrer comment déterminer la valeur de n .
- Pour la bonne valeur de n on obtient $c_n = -0.016118 + i 0.127044$. Utiliser cette information pour esquisser les oscillations avec période 24 h pour les temps $0 \leq t \leq 24$ h .
- À quelle heure du jour observe-t-on la température maximale ?

Ce problème est similaire à l'exemple 43.



• **Aufgabe 1–39:**

Das Bundesamt für Meteorologie und Klimatologie (MeteoSchweiz) erfasst seit 1864 die monatliche Durchschnittstemperatur an verschiedenen Orten in der Schweiz, z.B. in Zollikofen. Somit hat man für die 152 vollständigen Jahre 1864–2015 genau $N = 12 \cdot 152 = 1824$ Datenpunkte. Mit Hilfe einer Fourierreihe können die jährlichen Schwankungen untersucht werden.

- Welcher komplexe Fourierkoeffizient c_n enthält die Information über die Schwankungen mit einer Periode von einem Jahr. Zeigen Sie wie n zu bestimmen ist.
- Bei korrekt gewähltem n erhält man $c_n = -4.66386 + i 0.12835$. Zeichnen Sie mit dieser Information den Graphen der **Schwankungen** mit Periode 1 Jahr für die Zeiten $0 \leq t \leq 360$ Tage. Arbeiten Sie mit 12 Monaten zu je 30 Tagen.
- An welchen Tagen ist typischerweise die höchste Temperatur zu erwarten?

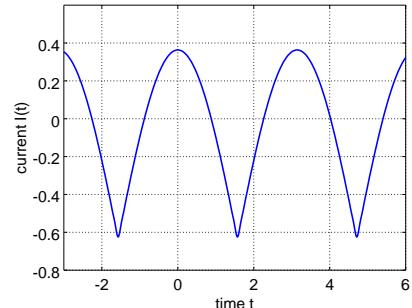
Diese Aufabe ist ähnlich zu Beispiel 43.

• **Aufgabe 1–40:**

Der Strom durch einen Widerstand R ist gegeben durch die Funktion $I(t) = |\cos t| - \frac{2}{\pi}$. Die Spannung ist $U(t) = R \cdot I(t)$ und die Momentanleistung ist $P(t) = U(t) \cdot I(t)$.

$$\begin{aligned} I(t) &= |\cos(t)| - \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(+\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} - \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4 \cos(2n t)}{\pi (2n-1) (2n+1)} \end{aligned}$$

Le courant $I(t) = |\cos t| - \frac{2}{\pi}$ passe dans une résistance R . La tension est donnée par $U(t) = R \cdot I(t)$ et la puissance instantanée est donnée par $P(t) = U(t) \cdot I(t)$.



(a) Bestimmen Sie die Periode T und die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von $I(t)$. Schreiben Sie die komplexe Fourierreihe von $I(t)$ an.

(b) Stellen Sie ein Integral auf, um die geleistete Arbeit A über eine Periode zu bestimmen. Bestimmen Sie anschliessend den Wert des Integrals. Es sind die ersten 3 Terme der reellen Fourierreihe zu verwenden.

• Aufgabe 1–41:

An einem Widerstand R wird eine Spannung $U(t)$ gemessen. Es handelt sich um eine 4-periodische Sägezahnspannung, deren Fourierreihe gegeben ist durch

$$U(t) \sim \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(1\omega t)}{1} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} - \frac{\sin(6\omega t)}{6} + \dots \right)$$

wobei $\omega = \frac{\pi}{2}$. Strom und Leistung an diesem Widerstand werden mit den Grundformeln $U = RI$ und $P = UI$ bestimmt.

(a) Stellen Sie ein Integral auf, um die geleistete Arbeit A über eine Periode der Länge 4 zu bestimmen. Bestimmen Sie anschliessend den Wert des Integrals.

(b) Berechnen Sie die geleistete Arbeit, falls in der obigen Fourierreihe nur die ersten vier Terme berücksichtigt werden. Wie gross ist der prozentuale Fehler durch das Weglassen der weiteren Terme?

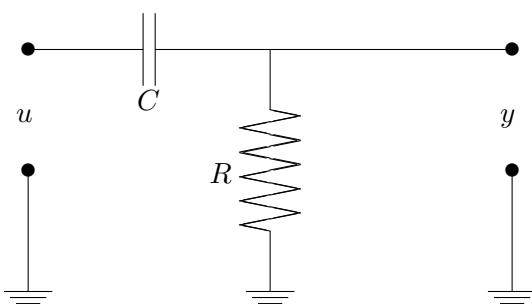
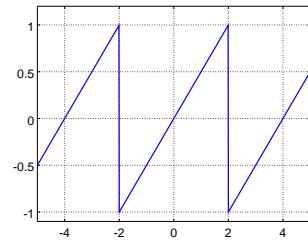
Tip: es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

• Aufgabe 1–42:

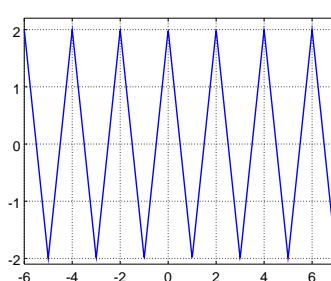
Ein Hochpass-Filter ist gegeben durch die nebenstehende Figur und die Gleichung

$$C \frac{d}{dt} (u - y) = \frac{y}{R}$$

Cette équation et la figure de droite correspondent à un filtre électronique passe-haut.



Die Eingangsspannung $u(t)$ ist gegeben durch den Graphen.
La tension d'entrée $u(t)$ est donnée par le graphe ci-dessous.



(a) Finden Sie die Fourierreihen von $u(t)$ und $\dot{u}(t)$.
Trouver la série de Fourier pour $u(t)$ et $\dot{u}(t)$.

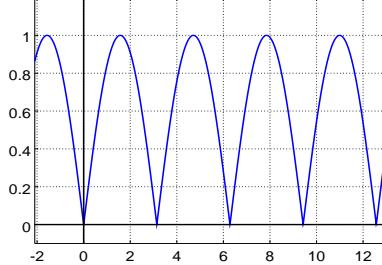
(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ausgangsspannung $y(t)$.
Trouver la série de Fourier pour la tension de sortie $y(t)$.

• Aufgabe 1–43:

Die Fourierreihe der Funktion $f(t) = |\sin t|$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} \end{aligned}$$

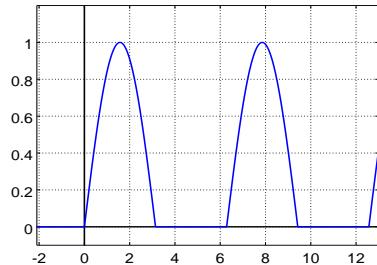
La série de Fourier de la fonction $f(t) = |\sin t|$ est donnée par



Der Graph der Funktion $h(t)$ ist rechts gezeigt.

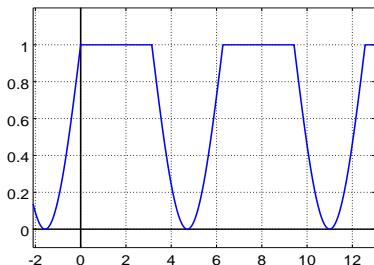
$$h(t) = \frac{1}{2} (\sin t + |\sin t|)$$

A droite trouver le graphe de la fonction $h(t)$.



- (a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe der Funktion $g(t) = |\cos t|$.
(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $h(t)$.
(c) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe der untenstehenden Funktion $u(t)$.

- (a) Trouver la série de Fourier complexe de la fonction $g(t) = |\cos t|$.
(b) Trouver la série de Fourier réelle de la fonction $h(t)$.
(c) Trouver la série de Fourier complexe de la fonction $u(t)$ ci-dessous.

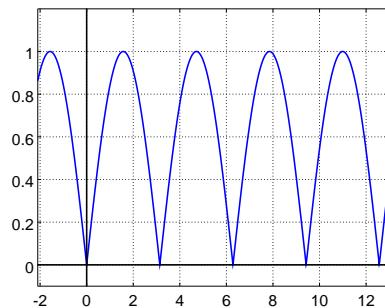


• Aufgabe 1–44:

Die Fourierreihe der Funktion $u_{in}(t) = |\sin t|$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{in}(t) &\sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} \end{aligned}$$

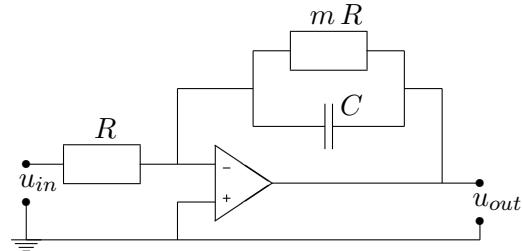
La série de Fourier de la fonction $u_{in}(t) = |\sin t|$ est donnée par



Für eine (idealisierte) Operationsverstärkerschaltung und komplexe Eingangssignale der Form $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ gilt die Beziehung

$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out} \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

Pour un circuit avec OpAmp et des signaux d'entrée complexes $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ on sait que



Diesem Schaltkreis wird nun ein periodisches Eingangssignal $u_{in}(t)$ der obigen Form eingegeben.

- (a) Bestimmen Sie den Fourierreihenfaktor c_0 von $u_{in}(t)$ mit Hilfe eines Integrals.
- (b) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $u_{out}(t)$.
- (c) Sei $m = 5$ und $RC = 2$. Die Funktion $u_{out}(t)$ beinhaltet auch ein Teilsignal mit Periode $\pi/4$. Schreiben Sie dieses in der Form $A \cos(\omega t + \delta)$.

• Aufgabe 1–45:

Für eine (idealisierte) Operationsverstärkerschaltung und komplexe Eingangssignale der Form $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ gilt die Beziehung

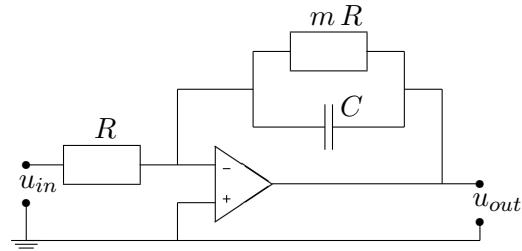
$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out} \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

Diesem Schaltkreis wird nun ein periodisches Eingangssignal der untenstehenden Form eingegeben.

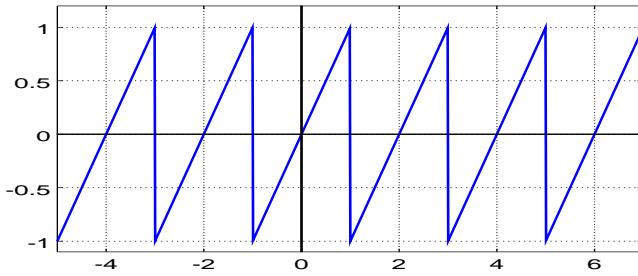
On applique un signal d'entrée périodique $u_{in}(t)$, donné dans la figure ci-dessus.

- (a) Trouver le coefficient de Fourier c_0 de $u_{in}(t)$ à l'aide d'une intégrale.
- (b) Trouver la série de Fourier du signal de sortie $u_{out}(t)$.
- (c) Soit $m = 5$ et $RC = 2$. La fonction $u_{out}(t)$ possède une composante de période $\pi/4$. Écrire cette composante dans la forme $A \cos(\omega t + \delta)$.

Pour un circuit avec OpAmp et des signaux d'entrée complexes $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ on sait que



On applique un signal d'entrée périodique, donné dans la figure ci-dessous.



(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Eingangssignals $u_{in}(t)$.

(b) Sei $m = 5$ und $RC = 2$. Das Ausgangssignal $u_{out}(t)$ beinhaltet auch ein Teilsignal mit Periode $1/2$. Bestimmen Sie dessen Amplitude.

Aufgabe 1-46:

Für eine (idealisierte) Operationsverstärkerschaltung und komplexe Eingangssignale der Form $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ gilt die Beziehung

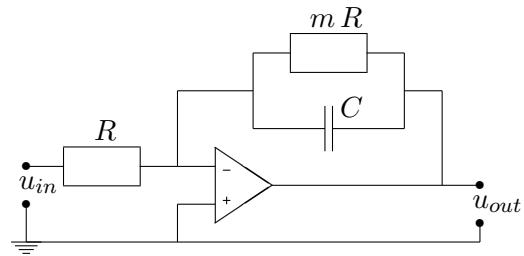
$$\frac{u_{in}}{R} = -u_{out} \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right)$$

Diesem Schaltkreis wird nun ein periodisches Eingangssignal der untenstehenden Form eingegeben.

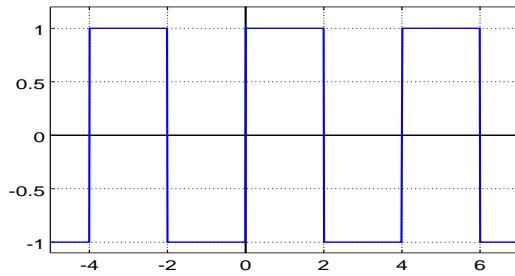
(a) Trouver la série de Fourier du signal d'entrée $u_{in}(t)$.

(b) Soit $m = 5$ et $RC = 2$. Le signal de sortie $u_{out}(t)$ possède une composante de période $1/2$. Calculer l'amplitude de cette composante.

Pour un circuit avec OpAmp et des signaux d'entrée complexes $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ on sait que



On applique un signal d'entrée périodique, donné dans la figure ci-dessous.



(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Eingangssignals $u_{in}(t)$, reell oder komplex.

(b) Bestimmen Sie die Fourierreihe des Ausgangssignals $u_{out}(t)$, reell oder komplex.

(c) Die Funktion $u_{out}(t)$ beinhaltet ein Teilsignal mit Periode $4/7$. Bestimmen Sie dessen Amplitude. Verwenden Sie die numerischen Werte $m = 10$ und $RC = 2$.

(a) Trouver la série de Fourier du signal d'entrée $u_{in}(t)$, réelle ou complexe.

(b) Trouver la série de Fourier du signal de sortie $u_{out}(t)$, réelle ou complexe.

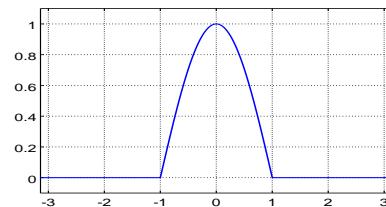
(c) La fonction $u_{out}(t)$ possède une composante de période $4/7$. Calculer l'amplitude de cette composante. Utiliser les valeurs numériques $m = 10$ et $RC = 2$.

• Aufgabe 1–47:

Untersuchen Sie Fensterfunktionen auf dem festen Intervall $[-\pi, \pi]$. Das Fenster besteht aus einem Bogen einer Cosinus–Funktion der Breite 2α . Die Periode ist immer 2π . Der Fall $\alpha = 1$ ist unten gezeigt. Die Fourierkoeffizienten für $\alpha = 1$ sind

$$c_n = \frac{2 \cos n}{\pi^2 - 4n^2}$$

Examiner des fonctions de fenêtre sur l'intervalle fixe $[-\pi, \pi]$. La fenêtre est donnée par une boucle d'une fonction cosinus de largeur 2α . La période est 2π . Voir la situation pour $\alpha = 1$ ci-dessous. Les coefficients de Fourier pour $\alpha = 1$ sont



- (a) Finden Sie das Integral, um die obigen Koeffizienten c_n zu bestimmen, d.h. $\alpha = 1$.
- (b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten für beliebige Werte von $0 < \alpha < \pi$.
- (c) Finden Sie die komplexe Fourierreihe für den Fall $\alpha = 2$.

• Aufgabe 1–48:

Examiner la série de Fourier de l'extension 2π –périodique de la fonction de fenêtre

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour/falls } -b < t < b \\ 0 & \text{pour/falls } |t| \geq b \end{cases}$$

- (a) Trouver la série de Fourier.
- (b) Esquisser le spectre d'amplitudes $h(n)$ comme fonction de n (numérotation des coefficients).
- (c) Déterminer la distance du premier zéro de h et puis montrer que le produit de la largeur du maximum principal avec la largeur du fenêtre $2b$ est constante.

• Aufgabe 1–49:

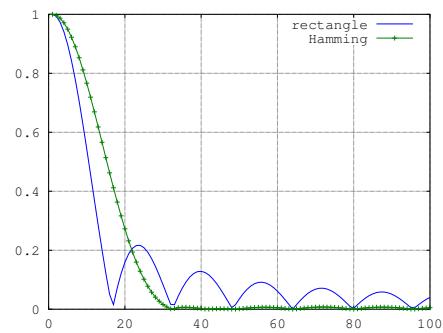
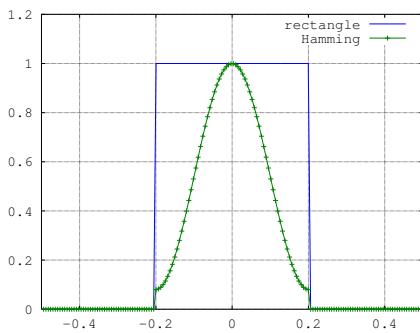
Eine Funktion besteht aus zwei Teilsignalen mit klar definierten Frequenzen. Das ideale Amplitudenspektrum ist unten gezeigt. Beim Messen muss eine Fensterfunktion (Rechteck oder Hamming) berücksichtigt werden.

- (a) Donner l'intégrale pour calculer les coefficients ci-dessus, c'est-à-dire pour $\alpha = 1$.
- (b) Trouver les coefficient de Fourier pour des valeurs arbitraires de $0 < \alpha < \pi$.
- (c) Donner la série de Fourier complexe pour le cas $\alpha = 2$.

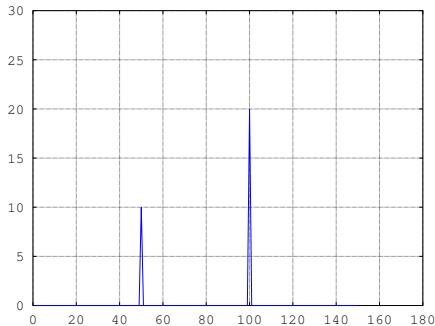
Untersuchen Sie die Fourierreihe der 2π –periodische fortgesetzten Fenster–Funktion

- (a) Bestimmen Sie die Fourierreihe.
- (b) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum $h(n)$ als Funktion von n (Numerierung der Koeffizienten).
- (c) Bestimmen Sie den Abstand der ersten Nullstelle von h und zeigen Sie anschliessend, dass das Produkt der Breite der Hauptmaximas und der Fensterbreite $2b$ konstant ist.

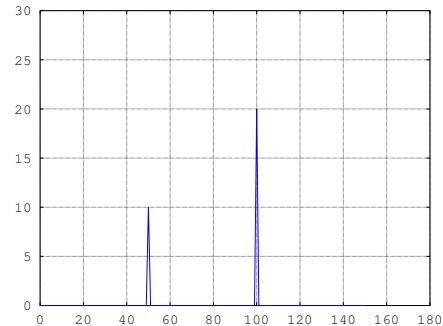
Une fonction est composée de deux signaux avec des fréquences bien définies. Le spectre des amplitudes idéales est montré en bas. Pour mesurer on doit tenir compte des effets des fonctions de fenêtre, rectangle ou Hamming.



- (a) Die obigen Graphen zeigen das Rechteck- und Hamming Fenster der Breite 0.4 und ihre zugehörigen Amplitudenspektren. Zeichnen Sie in der untenstehenden Figur links die effektiv gemessenen Spektren, mit verschiedenen Farben für das Rechteck und das Hamming–Fenster.
- (b) Wiederholen Sie die Teilaufgabe (a), aber mit Fenstern der Breite 0.8 . Verwenden Sie rechte Graphik.



- (a) Les graphiques ci-dessus montre les fonctions de fenêtre rectangulaire et de Hamming de largeur 0.4 et le spectre des amplitudes. Esquisser dans le graphique ci-dessous à gauche les spectres des fonctions mesurées. Utiliser des couleurs différentes pour le rectangle et le fenêtre de Hamming.
- (b) Répéter la partie (a), mais avec des fenêtres de largeur 0.8 . Utiliser la graphique à droite.



• Aufgabe 1–50:

Ein reelles Signal $f(t)$ wird während drei Sekunden gemessen, wobei 8192 Einzelmessungen gemacht werden. Anschliessend werden die komplexen Fourierkoeffizienten mittels FFT bestimmt.

- (a) Wie gross ist die grösste Frequenz für welche die Amplitude des zugehörigen Signals zuverlässig gemessen werden kann?
- (b) Welcher Koeffizient c_n liefert die Amplitude des Signalanteils mit einer Frequenz von ca. 100 Hz ?
- (c) Warum kann die Amplitude von Signalen mit einer Frequenz von wenigen Hz nur sehr ungenau bestimmt werden?

Pendant trois secondes on a mesuré 8192 valeurs d'un signal réel $f(t)$. Puis on a calculé les coefficients de Fourier complexes avec FFT.

- (a) Trouver la fréquence la plus grande possible, telle que l'amplitude du signal avec cette fréquence est calculée d'une façon fiable.
- (b) Quel coefficient c_n rend l'amplitude du signal avec la fréquence de ≈ 100 Hz ?
- (c) Pourquoi l'amplitude des signaux avec des fréquences basses (quelques Hz) ne peut pas être calculé d'une façon fiable?

• Aufgabe 1–51:

Ein Oszilloskop kann FFT mit $2^{10} = 1024$ Punkten durchführen. Um ein gegebenes Signal zu analysieren geht man folgendermassen vor:

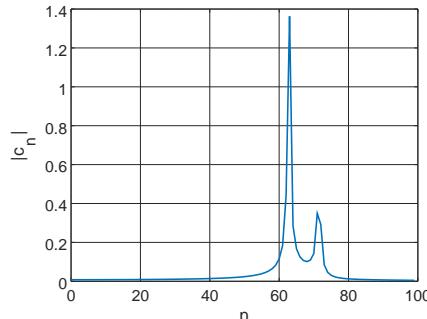
1. In 2.5 Sekunden 1025 Werte messen, der letzte wird eliminiert.
2. Die Koeffizienten c_n der diskreten Fourier Transformation bestimmen.
3. Den Betrag $|c_n|$ als Funktion von n auftragen.

Eine solche Messung ergab die untenstehende Figur.

Avec un Oscilloscope on peut analyser (par FFT) $2^{10} = 1024$ points à la fois. Pour analyser un signal donné on fait les opérations suivantes:

1. mesurer 1025 points en 2.5 secondes, éliminer le dernier point.
2. calculer les coefficients de Fourier c_n avec la transformation de Fourier discrète (DFT).
3. montrer la valeur absolue $|c_n|$ comme fonction de n .

On arrive à la figure ci-dessous.



(a) Offensichtlich sind im Signal zwei Teilsignale mit verschiedenen Frequenzen versteckt. Bestimmen Sie die beiden Frequenzen.

(b) Signale mit welcher Frequenz können mit der obigen Messanordnung im besten Fall noch erfasst werden?

(c) Für eine neue Messung soll die Intervalllänge von 2.5 Sekunden geändert werden, sodass höhere Frequenzen auch gefunden werden. Bis zu welcher Frequenz kann man höchstens messen, wobei die beiden obigen Frequenzen noch klar unterscheidbar sein müssen.

In dieser Aufgabe sind nur sehr wenige Rechnungen auszuführen, aber die Überlegungen müssen klar dokumentiert werden.

• Aufgabe 1–52:

Ein Signal wurde während $T = 0.25$ Sekunden an $N = 2^{12} = 4096$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 100 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 99$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

(a) Apparemment le signal contient deux signaux avec des fréquences différentes. Trouver ces deux fréquences.

(b) Quelle est la fréquence maximale que l'on peut mesurer d'une façon fiable avec l'arrangement donné en haut?

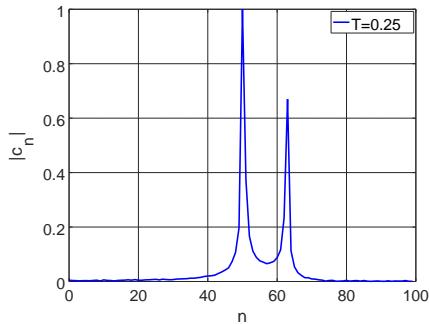
(c) Pour une nouvelle série de mesure on veut changer la longueur de l'intervalle de 2.5 secondes afin de pouvoir analyser des fréquences plus grandes. Quel est la fréquence maximale à être analyser si on doit être capable de distinguer les deux fréquences initiales?

Pour résoudre ce problème il y a très peu de calcul à faire. Mais donner une documentation claire du raisonnement.

On mesure un signal pendant $T = 0.25$ secondes avec $N = 2^{12} = 4096$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolues des premiers 100 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 99$). On arrive au graphique ci-dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

- (a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.
- (b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?
- (c) Ersetzen Sie auf der horizontalen Achse die Nummerierung n durch eine Frequenzskala (Einheit Hz).
- (d) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 2.5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Verwenden Sie ihre Frequenzskala der vorangehenden Teilaufgabe.

- (a) Déterminer les deux fréquences le plus précis possible.
- (b) Quelle fréquence maximale peut-on examiner avec la configuration ci-dessus?
- (c) Pour l'axe horizontal remplacer la numérotation avec n par une échelle des fréquences (unité Hz).
- (d) Réexaminer le signal identique avec $T = 2.5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans le graphique ci-dessous. Utiliser l'échelle des fréquences de la question précédente.



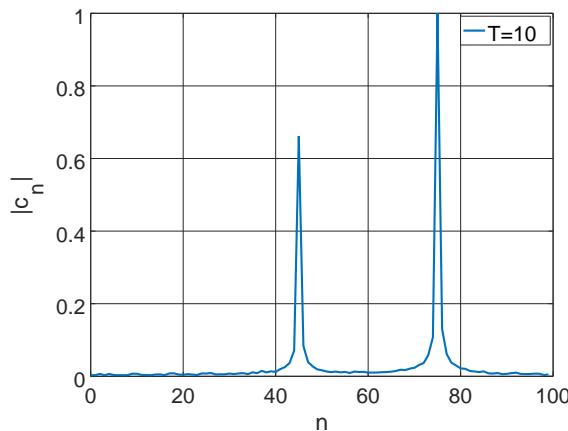
• Aufgabe 1–53:

Ein Signal wurde während $T = 10$ Sekunden an $N = 2^{12} = 4096$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 100 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 99$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

- (a) Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.
- (b) Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?
- (c) Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Welche maximale Frequenz kann mit dieser Konfiguration erfasst werden?

On mesure un signal pendant $T = 10$ secondes avec $N = 2^{12} = 4096$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolues des premiers 100 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 99$). On arrive au graphique ci-dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

- (a) Déterminer les deux fréquences le plus précis possible.
- (b) Quelle fréquence maximale peut-on examiner avec la configuration ci-dessus?
- (c) Réexaminer le signal identique avec $T = 5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans le graphique ci-dessous. Quelle fréquence maximale peut-on examiner avec cette nouvelle configuration?



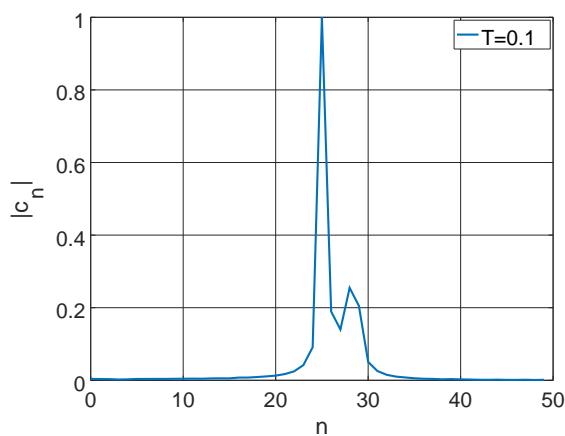
• Aufgabe 1–54:

Ein Signal wurde während $T = 0.1$ Sekunden an $N = 2^{10} = 1024$ Punkten regelmässig gemessen. Auf die Werte wurde der Befehl `fft()` angewandt und der Betrag der ersten 50 Koeffizienten ($|c_n|$ für $0 \leq n \leq 49$) ist unten gezeigt. Das Signal enthält zwei dominierende Beiträge mit festen Frequenzen.

- Bestimmen Sie die beiden Frequenzen möglichst genau.
- Welche maximale Frequenz kann mit der obigen Konfiguration untersucht werden?
- Ersetzen Sie auf der horizontalen Achse die Nummerierung n durch eine Frequenzskala (Einheit Hz).
- Das selbe Signal wird noch einmal gemessen, mit $T = 0.5$ und $n = 2^{14} = 16384$. Skizzieren Sie in der untenstehenden Graphik das zu erwartende Spektrum. Verwenden Sie ihre Frequenzskala der vorangehenden Teilaufgabe.

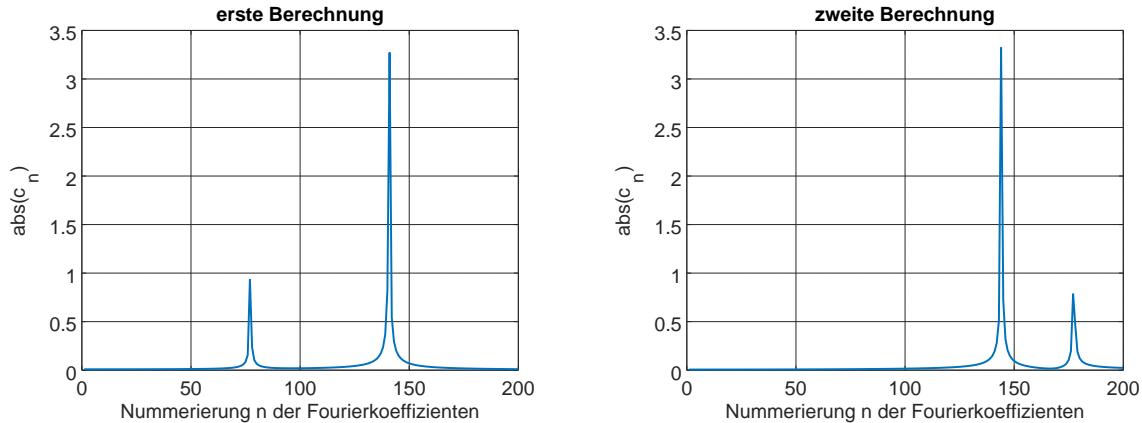
On mesure un signal pendant $T = 0.1$ secondes avec $N = 2^{10} = 1024$ points. Avec ces valeurs on appelle la commande `fft()` et puis on affiche les valeurs absolues des premiers 50 coefficients ($|c_n|$ pour $0 \leq n \leq 49$). On arrive au graphique ci-dessous. Le signal est composé de deux contributions avec des fréquences fixes.

- Déterminer les deux fréquences le plus précis possible.
- Quelle fréquence maximale peut-on examiner avec la configuration ci-dessus?
- Pour l'axe horizontal remplacer la numérotation par n avec une échelle des fréquences (unité Hz).
- Réexaminer le signal identique avec $T = 0.5$ et $n = 2^{14} = 16384$ points. Esquisser le spectre dans la graphique ci-dessous. Utiliser l'échelle des fréquences de la question précédente.



• Aufgabe 1–55:

Ein Ingenieur misst ein analoges Signal während 4 Sekunden an $2^{12} = 4096$ gleich verteilten Zeitpunkten. Auf das Resultat wendet er den FFT Algorithmus an und bestimmt den Betrag der Koeffizienten $|y_n| \approx |c_n|$ (Version aus Kurs) und stellt das Resultat graphisch dar. In einem ersten Versuch erhält er das Resultat unten links. Für eine zweite Messung **des selben Signals** verlängert er das Zeitintervall um 2.4% und verwendet erneut 2^{12} Messpunkte, mit dem Resultat unten rechts.



- (a) Bestimmen Sie Frequenz und Amplitude des grössten der beiden Beiträge möglichst genau.
- (b) Erklären Sie das (überraschende) Verhalten des zweiten, kleineren Beitrages und versuchen Sie die Frequenz zu bestimmen. Tipp: der zweite Beitrag hat eine deutlich höhere Frequenz, die kleiner ist als die doppelte Abtastfrequenz.

• Aufgabe 1–56:

Ein Ingenieur muss in einem Analogsignal die Amplituden der Beiträge mit 100 kHz und 100.1 kHz möglichst effizient bestimmen. Er misst das Signal während 0.01 Sekunden zu 2'000 gleichmässig verteilten Zeitpunkten. Dann wendet er den Befehl `fft()` an. Er kommt zu keinem brauchbaren Resultat.

- (a) Was muss er ändern?
- (b) Beschreiben Sie ein Vorgehen welches gute Resultate liefern kann und auch möglichst effizient ist. Begründen Sie die Modifikationen.
- (c) Welche Koeffizienten c_n (mit Ihrem Vorgehen) muss er bestimmen um die gewünschten Amplituden abzulesen.

• Aufgabe 1–57:

Untersuchen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) && \text{für/pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Für $f(x) = \sin(n\pi x)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = \frac{-1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x)$$

Un ingénieur analyse un signal analogique. Il doit déterminer les amplitudes des contributions avec des fréquences 100 kHz et 100.1 kHz d'une façon efficace. Il mesure le signal pendant 0.01 seconde pour 2'000 temps uniformément distribués, puis il utilise la commande `fft()`. Il n'arrive pas à un résultat utilisable.

- (a) Que doit-il modifier?
- (b) Décrivez une procédure qui peut donner des bons résultats et qui est aussi efficace. Justifiez les modifications.
- (c) Lesquelles des coefficients (avec votre procédure) c_n doit-il calculer pour obtenir les amplitudes des signaux avec les fréquences choisies.

Examiner l'équation différentielle

$$u''(x) = f(x) \quad \text{für/pour } 0 < x < 1$$

Pour $f(x) = \sin(n\pi x)$ la solution est donnée par

Finden Sie die Lösung der Gleichung für die Funktion $f(x) = 1$ mit Hilfe von Fourierreihen.

Tipp: zuerst Funktion f geeignet erweitern.

• **Aufgabe 1–58:**

Untersuchen Sie die dynamische Wärmeleitungs-gleichung. L und k sind Konstanten und die Funktion $f(x)$ sei gegeben.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, x) &= k^2 \frac{d^2}{dx^2} u(t, x) && \text{für } t > 0 \text{ und/et } 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) &= 0 && \text{für/pour } t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für/pour } 0 < x < L \end{aligned}$$

(a) Finden Sie die Lösung $u(t, x)$ für / Trouver la solution $u(t, x)$ si

$$f(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Tip: $u(t, x) = e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ für ein geeignetes λ_n . / pour un λ_n bien choisi.

(b) Finden Sie die Lösung $u(t, x)$ für / Trouver la solution $u(t, x)$ si

$$f(x) = 1$$

• **Aufgabe 1–59:**

Der Rand eines Stabes der Länge $L = 1$ wird auf konstanter Temperatur $u = 0$ gehalten und ist zur Anfangszeit $t = 0$ ist die Temperatur gegeben durch die Funktion $f(x)$. Die Temperatur $u(t, x)$ löst die folgende Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) && \text{für/pour } t > 0 \text{ und/et } 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = u(t, 1) &= 0 && \text{für/pour } t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für/pour } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(a) Finden Sie $u(t, x)$ falls $f(x) = \sin n\pi x$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(b) Die Fourierreihe der Funktion x auf dem Intervall $-\pi < x < \pi$ ist unten gegeben. Finden Sie eine Reihendarstellung von $u(t, x)$ falls $f(x) = x$.

Trouver la solution de l'équation pour la fonction $f(x) = 1$ à l'aide des séries de Fourier.

Tip: d'abord considérer une extension de f

Examiner l'équation de chaleur dynamique. L et k sont des constantes et la fonction $f(x)$ est donnée.

Les points limites d'une barre de longueur $L = 1$ a une température fixe de $u = 0$ et pour le temps initial $t = 0$ la température est donnée par la fonction $f(x)$. La température $u(t, x)$ satisfait l'équation différentielle suivante.

$$\begin{aligned} &\text{für/pour } t > 0 \text{ und/et } 0 < x < 1 \\ &\text{für/pour } t > 0 \\ &\text{für/pour } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(a) Trouver $u(t, x)$ pour $f(x) = \sin n\pi x$ avec $n \in \mathbb{N}$ donné.

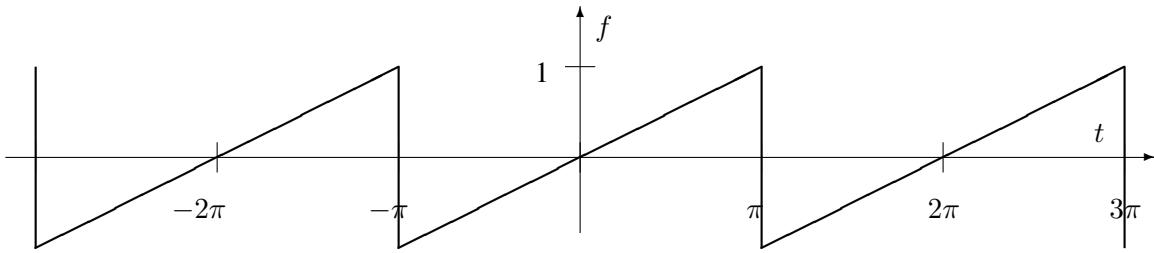
(b) La série de Fourier de la fonction x sur l'intervalle $-\pi < x < \pi$ est donnée ci-dessous. Trouver la solution $u(t, x)$ comme série, si on met $f(x) = x$.

$$x \sim \frac{2 \sin(x)}{1} - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \frac{2 \sin(4x)}{4} + \frac{2 \sin(5x)}{5} - \dots \quad \text{auf/pour } -\pi < x < \pi$$

• **Aufgabe 1–60:**

Untersuchen Sie die untenstehende, 2π -periodische Funktion $f(t)$.

Examiner la fonction ci-dessous avec période 2π .



- (a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t)$.
- (b) Skizzieren Sie den ersten Beitrag der Fourierreihe in der obigen Graphik.
- (c) Finden Sie die komplexe Fourierreihe einer Lösung der untenstehende Differentialgleichung (II). Verwenden Sie (I).

$$(I) : \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 49y(t) = e^{int} \implies y(t) = \frac{1}{49 - n^2 + i2n} e^{int}$$

$$(II) : \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 49y(t) = f(t) \implies y(t) = ?$$

• Aufgabe 1–61:

Untersuchen Sie 2π -periodische Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $f(t)$.

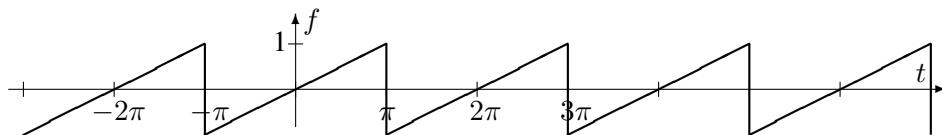
- (a) Trouver la série de Fourier réelle de cette fonction.
- (b) Esquisser le graphe de la première contribution de la série de Fourier dans le graphique ci-dessus.
- (c) Trouver la série de Fourier complexe d'une solution de l'équation différentielle (II) ci-dessous. Utiliser (I).

Examiner des solution de période 2π de l'équation différentielle pour des fonctions $f(t)$ différentes.

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 49y(t) = f(t)$$

- (a) Für $f(t) = e^{int}$ so gibt es eine 2π -periodische Lösung der Form $y_n(t) = K_n e^{int}$. Bestimmen Sie $K_n \in \mathbb{C}$.
- (b) Stellen Sie $y(t)$ als geeignete Reihe dar, falls die 2π -periodische Funktion $f(t)$ durch den untenstehenden Graphen gegeben ist.
Tipp: komplexe Fourierreihe von $f(t)$.
- (c) Die obige Lösung $y(t)$ enthält auch einen Anteil der Form $A \cos(7t + \phi)$. Bestimmen Sie die Amplitude A .

- (a) Pour $f(t) = e^{int}$ il existe une solution de période 2π de la forme $y_n(t) = K_n e^{int}$. Trouver $K_n \in \mathbb{C}$.
- (b) Écrire $y(t)$ comme série adaptée si la fonction périodique f est donnée par le graphe ci-dessous. Tip: série de Fourier complexe de la fonction $f(t)$.
- (c) La solution $y(t)$ ci-dessus contient une contribution de la forme $A \cos(7t + \phi)$. Trouver l'amplitude A .



• Aufgabe 1–62:

Untersuchen Sie die Rechnungen in Abschnitt 1.1.2 sorgfältig. Untersuchen Sie die Fourierreihen auf ihr Konvergenzverhalten. Lösen die angegebenen Lösungen tatsächlich die verlangte Differentialgleichung? (Ableiten von Fourierreihen)

• Aufgabe 1–63:

Untersuchen Sie die Rechnungen in Abschnitt 1.1.3 sorgfältig. Untersuchen Sie die Fourierreihen auf ihr

Konvergenzverhalten. Lösen die angegebenen Lösungen tatsächlich die verlangte Differentialgleichung? (Ableiten von Fourierreihen)

• **Aufgabe 1–64:**

Untersuchen Sie die Rechnungen in Abschnitt 1.1.4 sorgfältig. Untersuchen Sie die Fourierreihen auf ihr Konvergenzverhalten. Lösen die angegebenen Lösungen tatsächlich die verlangte Differentialgleichung? (Ableiten von Fourierreihen)

• **Aufgabe 1–65:**

Untersuchen Sie die Überlegungen, Rechnungen und Bilder in Abschnitt 1.1.5 sorgfältig. Sie sollten in der Lage sein diverse Effekte in Bild und Spektrum zu erklären.

1.12.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1–1 :

(a)

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin(n x)$$

(b)

$$\begin{aligned} x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n x)}{n} \\ u(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n(x)}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n x)}{n^3} \\ &= 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2 x)}{2^3} + \frac{\sin(3 x)}{3^3} - \frac{\sin(4 x)}{4^3} + \frac{\sin(5 x)}{5^3} - \frac{\sin(6 x)}{6^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–2 : Der Korrelationskoeffizient der beiden Funktionen sollte möglichst nahe bei 1 sein. Da er immer zwischen -1 und 1 liegt kann auch nach dem Maximum der Funktion gesucht werden, abhängig von den Parametern a , b und c .

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \int_0^1 (e^x)^2 dx = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ \|f\|^2 &= \int_0^1 (a x^2 + b x + c)^2 dx \\ &= \frac{a^2}{5} + \frac{a b}{2} + b c + c^2 + \frac{b^2 + 2 a c}{3} \end{aligned}$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) g(x) dx &= \int_0^1 (a x^2 + b x + c) e^x dx \\ &= e^x (a (x^2 - 2 x + 2) + b (x - 1) + c) \Big|_{x=0}^1 \\ &= e (a + c) - (a 2 - b + c) \\ &= -2 a + b - c + e (a + c) \end{aligned}$$

(a)

$$\text{corr}(f, g) = \sqrt{\frac{2}{e^2 - 1}} \sqrt{\frac{1}{\frac{a^2}{5} + \frac{a b}{2} + b c + c^2 + \frac{b^2 + 2 a c}{3}}} (-2 a + b - c + e (a + c))$$

(b) Mit $a = 0$ gilt

$$\text{corr}(f, g) = \sqrt{\frac{2}{e^2 - 1}} \sqrt{\frac{1}{bc + c^2 + \frac{b^2}{3}}} (b - c + e c)$$

Da wir nur an der Form der Funktion interessiert sind können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c = 1$ wählen. Vielfache der so erhaltenen Lösung sind auch Lösungen des Problems. Somit können wir auch das Maximum der Funktion

$$h(b) = \frac{(b - 1 + e)^2}{3b + 3 + b^2}$$

untersuchen. Ableiten und Nullsetzen führt auf die Gleichung

$$0 = \frac{\partial h}{\partial b} = \frac{1}{(3b + 3 + b^2)^2} (2(b - 1 + e)(3b + 3 + b^2) - (b - 1 + e)^2(3 + 2b))$$

Somit suchen wir Lösungen von

$$\begin{aligned} (b - 1 + e)(6b + 6 + 2b^2 - (3b - 3 + 3e + 2b^2 - 2b + 2eb)) &= 0 \\ (b - 1 + e)(6b + 6 + 2b^2 - 3b + 3 - 3e - 2b^2 + 2b - 2eb) &= 0 \\ (b - 1 + e)(b(5 - 2e) + 9 - 3e) &= 0 \end{aligned}$$

mit den beiden Lösungen

$$b_1 = 1 - e \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{9 - 3e}{2e - 5} \approx 1.936$$

Bei $b = 1 - e$ hat die Funktion $h(b)$ ein Minimum, statt einem Maximum. Somit hat die Gerade

$$y = 1 + 1.936 x$$

die zu e^x auf $[0, 1]$ ähnlichste Form.

Lösung zu Aufgabe 1–3 :

(a)

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx}{(\int_0^{2\pi} f^2(x) dx)^{1/2} (\int_0^{2\pi} g^2(x) dx)^{1/2}} = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|_2 \|g\|_2}$$

(b) Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= 0 \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \\ \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx &= \pi \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = \sum_{n=1}^{20} \sum_{m=1}^{20} \int_0^{2\pi} A_n \sin(nx) B_m \sin(mx) dx \\ &= \sum_{n=1}^{20} \int_0^{2\pi} A_n \sin(nx) B_n \sin(nx) dx = \pi \sum_{n=1}^{20} A_n B_n = \pi \vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \pi \vec{A} \cdot \vec{A} = \pi \|\vec{A}\|^2 \\ \langle g, g \rangle &= \pi \vec{B} \cdot \vec{B} = \pi \|\vec{B}\|^2\end{aligned}$$

und somit

$$C = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|_2 \|g\|_2} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|}$$

Lösung zu Aufgabe 1–4 : Für die Normen der Funktionen gilt

$$\|f_A\|^2 = \|f_B\|^2 = \|f_D\|^2 = \int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad \|f_C\| = \frac{1}{2} \|f_A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Die Korrelationskoeffizienten K_{AB} , K_{AC} , K_{BD} und K_{CD} sind alle 0, da das Produkt der beiden Funktionen überall 0 ist.
- Der Korrelationskoeffizient $K_{BC} = -1$ kann abgelesen werden, da $f_C(x) = \frac{-1}{2} f_B(x)$.
- Der Korrelationskoeffizient K_{AD} muss berechnet werden

$$\begin{aligned}\langle f_A, f_D \rangle &= \int_{-2}^2 f_A(x) \cdot f_D(x) dx = \int_{1/2}^1 2x \cdot (2x - 1) dx \\ &= \int_{1/2}^1 4x^2 - 2x dx = \left(\frac{4x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{x=1/2}^1 = \frac{5}{12} \approx 0.416667 \\ K_{AD} &= \frac{\langle f_A, f_D \rangle}{\|f_A\| \cdot \|f_D\|} = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{4/3} \cdot \sqrt{4/3}} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 4} = \frac{5}{16} = 0.3125\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–5 : Einige Korrelationskoeffizienten leicht angegeben werden, ohne zu rechnen.

- f_1 mit f_2 und f_1 mit f_3 : Korrelationskoeffizienten Null, da das Produkt der beiden Funktionen Null ist.
- Wegen $f_2 = -f_3$ ist der Korrelationskoeffizient dieser beiden Funktionen -1 .
- Der Korrelationskoeffizient von f_2 mit f_4 ist negativ, da die beiden Funktionen verschiedene Vorzeichen haben.
- Für den maximalen Wert kommen nur die Kombinationen f_1 mit f_4 und f_3 mit f_4 in Frage. Wegen $\|f_1\|_2 = \|f_3\|_2$ müssen nur die beiden Integrale

$$\int_{-3}^3 f_1(x) \cdot f_4(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-3}^3 f_3(x) \cdot f_4(x) dx$$

verglichen werden. Da die Funktion f_4 in Bereich $1 < x < 3$ grösser ist als im Bereich $-2 < x < 0$ wird der grösste Korellationskoeffizient mit f_1 und f_4 erreicht.

Nun zu den Rechnungen

$$\begin{aligned}\|f_1\|_2^2 &= \int_{-3}^3 f_1(x)^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ \|f_4\|_2^2 &= \int_{-3}^3 f_4(x)^2 dx = \int_{-3}^{-1} 1 dx + \int_{-1}^0 (-x)^2 dx + \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 1 dx \\ &= 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{14}{3} \\ \langle f_1, f_4 \rangle &= \int_{-3}^3 f_1(x) \cdot f_4(x) dx = \int_1^3 f_1(x) dx = 1\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{\langle f_1, f_4 \rangle}{\|f_1\|_2 \|f_4\|_2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{2 \sqrt{7}} = \frac{3 \sqrt{7}}{14} \approx 0.567$$

Lösung zu Aufgabe 1–6 :

- (a) Der Koeffizient $K_{f,g}$ ist positiv, wegen Symmetrie ist $K_{f,h} = 0$ und man kann auch ablesen, dass $K_{g,h} < 0$. Somit gilt

$$K_{g,h} < K_{f,h} = 0 < K_{f,g}$$

- (b) Zu bestimmen ist $K_{f,g}$

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4(t) dt = \frac{3\pi}{4} \approx 2.356 \\ \langle g, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^4} t^4 dt = \frac{2\pi}{5} \approx 1.257 \\ \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t) \frac{1}{\pi^2} t^2 dt = \frac{2\pi^2 - 3}{6\pi} \approx 0.888 \\ K_{f,g} &= \frac{\langle f, g \rangle}{\sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle}} \approx \frac{0.888}{\sqrt{2.356 \cdot 1.257}} \approx 0.516 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–7 :

- (a) Verifiziere

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad \text{falls } i \neq j \text{ und} \quad \|\vec{b}_i\|^2 = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle = 1$$

- (b) Durch Projektion auf den Vektor \vec{b}_1

$$\lambda_1 = \langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.21906 \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.21906 + 0.57836 + 0.78582 \approx 1.5832$$

erhält man

$$\|\vec{a} - \lambda_1 \vec{b}_1\| \approx 0.70239$$

- (c) Projektion auf die von \vec{b}_1 und \vec{b}_2 aufgespannte Ebene. Es gilt $\mu_1 = \lambda_1$ und

$$\mu_2 = \langle \vec{a}, \vec{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ -0.44925 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.84490 + 0.29038 - 0.44925 \approx 0.68603$$

und man erhält

$$\|\vec{a} - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2\| \approx 0.15070$$

Lösung zu Aufgabe 1–8 :

- (a) Damit der erste Vektor \vec{b}_1 Länge 1 hat muss gelten

$$1 = x^2 + 0.57836^2 + 0.78582^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{1 - 0.57836^2 - 0.78582^2} = \pm 0.21906$$

und somit $x \approx +0.21906$. Damit die beiden Vektoren orthogonal sind muss gelten

$$0 = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0.21906 \cdot 0.84490 + 0.57836 \cdot 0.29038 + 0.78582 z$$

und somit

$$z = -\frac{0.21906 \cdot 0.84490 + 0.57836 \cdot 0.29038}{0.78582} \approx -0.44925$$

Als Kontrolle kann $\|\vec{b}_2\| = 1$ berechnet werden.

- (b) Durch Projektion auf den Vektor \vec{b}_1

$$\lambda_1 = \langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.21906 \\ 0.57836 \\ 0.78582 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.21906 + 2 \cdot 0.57836 - 0.78582 \approx 0.58996$$

erhält man

$$\|\vec{a} - \lambda_1 \vec{b}_1\| \approx 2.3774$$

- (c) Projektion auf die von \vec{b}_1 und \vec{b}_2 aufgespannte Ebene. Es gilt $\mu_1 = \lambda_1$ und

$$\mu_2 = \langle \vec{a}, \vec{b}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.84490 \\ 0.29038 \\ -0.44925 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.84490 + 2 \cdot 0.29038 - 0.44925 \approx 1.8749$$

und man erhält

$$\|\vec{a} - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2\| \approx 1.4617$$

Lösung zu Aufgabe 1–9 :

- (a) Verifiziere

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0 \quad \text{falls } i \neq j \text{ und} \quad \|\vec{b}_i\| = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle = 1$$

- (b) Die Rechnungen sind analog zur vorangehenden Aufgabe mit identischem Resultat für μ_1 und μ_2 . Für μ_3 gilt analog

$$\mu_3 = \langle \vec{a}, \vec{b}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.48802 \\ -0.76235 \\ 0.42504 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.48802 - 0.76235 + 0.42504 \approx 0.15070$$

Der Abstand kann mit der Formel berechnet werden

$$\|\vec{a} - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2 - \mu_3 \vec{b}_3\| \approx 0$$

Da die drei linear unabhängigen Vektoren \vec{b}_i den Raum \mathbb{R}^3 aufspannen, kann der Vektor \vec{a} als Linear-kombination der \vec{b}_i geschrieben werden. Somit muss der minimale Abstand 0 sein.

Lösung zu Aufgabe 1–10 :

- (a) Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= \|b_1(t)\|^2 &= \int_0^1 c_1^2 dt = c_1^2 &\implies c_1 = 1 \\ 1 &= \|b_2(t)\|^2 &= \int_0^1 c_2^2 \cos^2(\pi t) dt = \frac{1}{2} c_2^2 &\implies c_2 = \sqrt{2} \\ 1 &= \|b_3(t)\|^2 &= \int_0^1 c_3^2 \cos^2(3\pi t) dt = \frac{1}{2} c_3^2 &\implies c_3 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

sind die drei Funktionen $b_1(t) = 1$, $b_2(t) = \sqrt{2} \cos(\pi t)$ und $b_3(t) = \sqrt{2} \cos(3\pi t)$ normiert. Wegen

$$\begin{aligned}\langle b_1(t), b_2(t) \rangle &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} \cos(\pi t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(\pi t) \Big|_{t=0}^1 = 0 \\ \langle b_1(t), b_3(t) \rangle &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{2} \cos(3\pi t) = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \sin(3\pi t) \Big|_{t=0}^1 = 0 \\ \langle b_2(t), b_3(t) \rangle &= \int_0^1 \sqrt{2} \cos(\pi t) \cdot \sqrt{2} \cos(3\pi t) = \dots = 0\end{aligned}$$

sind die drei Funktionen $b_1(t) = 1$, $b_2(t) = \sqrt{2} \cos(\pi t)$ und $b_3(t) = \sqrt{2} \cos(3\pi t)$ orthonormal.

- (b) Die Überlegungen und Rechnungen sind sehr ähnlich zu Teil (b) im Beispiel 1–6. Zu berechnen ist die Projektion der Funktion $f(t) = t$ auf die Funktion $b_1(t) = 1$. Wegen

$$\lambda_1 = \langle f(t), b_1(t) \rangle = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \frac{1}{2}$$

hat

$$t \approx \lambda_1 b_1(t) = \frac{1}{2}$$

minimalen Abstand von $f(t) = t$.

- (c) Die Überlegungen und Rechnungen sind sehr ähnlich zu Teil (b) im Beispiel 1–7. Zu berechnen ist die Projektion der Funktion $f(t) = t$ auf die Funktion $b_2(t) = \sqrt{2} \cos(\pi t)$. Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \langle f(t), b_2(t) \rangle = \int_0^1 t \sqrt{2} \cos(\pi t) dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 t \cos(\pi t) dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} (\cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t)) \Big|_{t=0}^1 = \frac{-2\sqrt{2}}{\pi^2} \approx -0.28658\end{aligned}$$

Somit ergibt

$$t \approx \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \approx \frac{1}{2} - 0.28658 \sqrt{2} \cos(\pi t) \approx \frac{1}{2} - 0.40528 \cos(\pi t)$$

den minimalen Abstand von $f(t) = t$.

- (d) Die Überlegungen und Rechnungen sind sehr ähnlich zu Teil (b) im Beispiel 1–7, allerdings mit drei Funktionen. Die Rechnungen sind hier noch einmal vollständig angegeben. Um die optimalen Werte von λ_1 , λ_2 und λ_3 zu bestimmen muss die Funktion

$$\begin{aligned}h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \|f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3\|^2 \\ &= \langle f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3, f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3 \rangle\end{aligned}$$

minimiert werden. Das führt auf die drei Bedingungen

$$\frac{d}{d\lambda_1} h = \frac{d}{d\lambda_2} h = \frac{d}{d\lambda_3} h = 0$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{d\lambda_1} h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= -\langle b_1, f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3 \rangle - \langle f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3, -b_1 \rangle \\ &= 2\lambda_1 \|b_1\|^2 - 2\langle f, b_1 \rangle + 2\lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle + 2\lambda_3 \langle b_1, b_3 \rangle \\ &= 2\lambda_1 - 2\langle f, b_1 \rangle + 0 \\ \lambda_1 &= \langle f, b_1 \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot b_1(t) dt = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{d}{d\lambda_2} h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= -\langle b_2, f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3 \rangle - \langle f - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3, b_2 \rangle \\
 &= 2\lambda_2 \|b_2\|^2 - 2\langle f, b_2 \rangle + 2\lambda_1\langle b_1, b_2 \rangle + 2\lambda_3\langle b_3, b_2 \rangle \\
 &= 2\lambda_2 - 2\langle f, b_2 \rangle + 0 \\
 \lambda_2 &= \langle f, b_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) b_2(t) dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^1 t \cos(\pi t) dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} (\cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t)) \Big|_{t=0}^1 \\
 &= \frac{-2\sqrt{2}}{\pi^2} \approx -0.28658
 \end{aligned}$$

und mit ähnlicher Rechnung

$$\lambda_3 = \langle f, \vec{b}_3 \rangle = \sqrt{2} \int_0^{\pi} 1 \cos(3\pi t) dt \approx -0.0318422$$

Somit hat die Funktion

$$\begin{aligned}
 t &\approx \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) + \lambda_3 b_3(t) \\
 &\approx \frac{1}{2} - 0.28658 \sqrt{2} \cos(\pi t) - 0.0318422 \sqrt{2} \cos(3\pi t) \\
 &\approx \frac{1}{2} - 0.40528 \cos(\pi t) - 0.045032 \cos(3\pi t)
 \end{aligned}$$

minimalen Abstand von $f(t) = t$.

Die obigen Rechnungen können mit Octave überprüft werden.

Octave

```

la1 = quad(@(t) (t), 0, 1)
la2 = quad(@(t) (t*cos(pi*t)), 0, 1)*sqrt(2)
la3 = quad(@(t) (t*cos(3*pi*t)), 0, 1)*sqrt(2)

t = linspace(0,1); f = t;
f3 = la1 + la2*sqrt(2)*cos(pi*t) + la3*sqrt(2)*cos(3*pi*t);

plot(t,f,t,f3)
xlabel('time t'); grid on

```

Lösung zu Aufgabe 1–11 : Die beste Approximation im L_2 Sinne, d.h. $\int |f(x) - g(x)|^2 dx$, durch trigonometrische Funktionen kann durch die Fourierformeln bestimmt werden. Da nur $\cos(nx)$ Terme verwendet werden ist die Funktion auf das symmetrische Intervall $[-\pi, +\pi]$ zu erweitern. Die Formel für die Funktion ändert bei diesem Beispiel nicht.

- (a) Fourier–Cosinus–Reihe auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, d.h. auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ erweitern, dann Fourier–Reihe bestimmen.

$$B = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(x) dx = \dots = 4$$

Somit gilt

$$\pi^2 - x^2 \approx 4 \cos(x)$$

Diese Approximation is miserabel.

- (b) Die gesuchte Lösung sind die ersten drei Terme der Fourier–Cosinus–Reihe der Funktion auf dem Intervall $[-\pi, +\pi]$. Den Vorfaktoren 2 oder $\frac{1}{2}$ bei a_0 ist spezielle Beachtung zu schenken. Die engültige Approximation muss den Mittelwert der Funktion enthalten als konstanten Term.

$$\begin{aligned}2 k_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) 1 \, dx = \dots = \frac{4\pi^2}{3} \approx 13.1595 \\k_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(x) \, dx = B = 4 \\k_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(2x) \, dx = -1\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\pi^2 - x^2 \approx k_0 + k_1 \cos(x) + k_2 \cos(2x) \approx 6.57974 + 4 \cos(x) - \cos(2x)$$

Octave

```
% with MATLAB replace the command quad() by integral()
a0 = quad(@(x)pi^2-x^2,-pi,pi)/(2*pi)
a1 = quad(@(x)(pi^2-x^2)*cos(x),-pi,pi)/pi
a2 = quad(@(x)(pi^2-x^2)*cos(2*x),-pi,pi)/pi
x = linspace(-5,10,201); y = a0 + a1*cos(x) + a2*cos(2*x);
plot(x,y,x,pi^2-x.^2)
legend('Fourier','\pi^2 - x^2'); axis([-5,10,-1,11])
-->
a0 = 6.5797
a1 = 4
a2 = -1
```

Lösung zu Aufgabe 1–12 :

- (a) Fourier–Sinus–Reihe auf dem Intervall $[0, 1]$, d.h. auf das Intervall $[-1, 1]$ erweitern, dann Fourier–Reihe bestimmen.

$$b_1 = 2 \frac{2}{2} \int_0^1 x(1-x) \sin(\pi x) \, dx = \dots = \frac{8}{\pi^3} \approx 0.258$$

Somit gilt

$$x(1-x) \approx \frac{8}{\pi^3} \sin(\pi x)$$

- (b) Die gesuchte Lösung sind die ersten drei Terme der Fourier–Reihe der Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$. Den Vorfaktoren 2 oder $\frac{1}{2}$ bei a_0 ist spezielle Beachtung zu schenken. Die engültige Approximation muss den Mittelwert der Funktion enthalten als konstanten Term.

$$\begin{aligned}2 a_0 &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \, dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{6} \\a_1 &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \cos(2\pi x) \, dx = \dots = -\frac{1}{\pi^2} \approx 0.101 \\b_1 &= \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \sin(2\pi x) \, dx = \dots = 0\end{aligned}$$

Somit gilt

$$x(1-x) \approx \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \cos(2\pi x)$$

Lösung zu Aufgabe 1-13 :

$$f(x) \sim \frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1-14 : Beobachtungen:

- Nur S1 hat c_0 verschieden von Null und nur F4 hat einen von Null verschiedenen Mittelwert. Damit muss F4 zu S1 passen.
- Die Funktionen F4 und F5 sind gerade und müssen somit zu cos-Termen führen. Damit muss F5 zu S4 passen.
- F3 und F5 haben Perioden von Länge 2 (F3 nach ungerader Erweiterung). Somit müssen in den Fourierreihen die Winkelgeschwindigkeiten Vielfache von π sein. Es kommen nur S2 und S4 in Frage. Damit muss F3 zu S2 passen.
- Nach ungerader Erweiterung von F3 unterscheiden sich F2 und F3 nur in der Periode. S2 und S3 unterscheiden sich nur in der Periode. Damit muss F2 zu S3 passen.
- Übrig geblieben ist noch das Paar F1 und S5.
- Nur die periodischen Erweiterungen von F4 und F5 haben keine Sprungstellen. Die Reihen S1 und S4 haben Terme $1/n^2$. Somit passen F4 und F5 zu S1 und S4 .

Funktion / fonction		Reihe / série
F1	Fourier Reihe von $f(x) = x$ auf $[-\pi, +\pi]$	S5
F2	Fourier Reihe von $f(x) = \text{sign}(x)$ auf $[-\pi, +\pi]$	S3
F3	Fourier Sinus Reihe von $f(x) = 1$ auf $[0, 1]$	S2
F4	Fourier Reihe von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, +\pi]$	S1
F5	Fourier Reihe von $f(x) = 1 - 2 x $ auf $[-1, +1]$	S4

Lösung zu Aufgabe 1-15 :

- (a) Die Periode der Funktion ist 3 und die Funktion ist ungerade. Somit gilt $a_n = 0$. Es ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$ und es gilt

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{3}t\right)$$

wobei für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{3} \int_{-3/2}^{3/2} f(t) \sin\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt = \frac{4}{3} \int_0^{3/2} 1 \sin\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt \\ &= \frac{4}{3} \left(-\frac{3}{n2\pi} \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) \right) \Big|_{t=0}^{3/2} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)2\pi}{3}t\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(2/3\pi t)}{1} + \frac{\sin(6/3\pi t)}{3} + \frac{\sin(10/3\pi t)}{5} + \frac{\sin(14/3\pi t)}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^T R |b_1 \sin(\frac{2\pi}{3}t)|^2 dt = R \int_0^T \frac{4^2}{\pi^2} \sin^2(\frac{2\pi}{3}t) dt = R \frac{3}{2} \frac{4^2}{\pi^2} \\ \frac{E_1}{E_0} &= \frac{4^2}{2\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0.81 \end{aligned}$$

Somit sind ca. 81% der Energie durch die Grundschwingung erzeugt.

Lösung zu Aufgabe 1-16 :

(a) Da f eine gerade Funktion ist gilt $b_n = 0$. Für a_n muss integriert werden. Für $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{4} \cos(nt) dt \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{4n} \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{4n} \sin(nt) dt \\ &= 0 + \frac{e^t - e^{-t}}{4n^2} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{4n^2} \cos(nt) dt \\ &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{4n^2} \cos(n\pi) - \frac{e^{-\pi} - e^\pi}{4n^2} \cos(-n\pi) - \frac{1}{n^2} \pi a_n \\ &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \pi a_n \end{aligned}$$

Das ist eine Gleichung für a_n

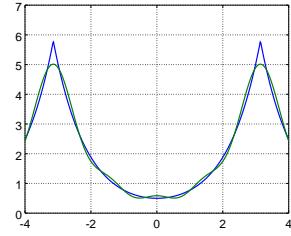
$$a_n = \frac{1}{\pi (1 + 1/n^2)} \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2n^2} (-1)^n = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi (n^2 + 1)} (-1)^n$$

Der Koeffizient a_0 ist leicht zu bestimmen.

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{4} dt = \frac{e^t - e^{-t}}{4} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$$

Da die 2π -periodische Erweiterung der Funktion f stetig ist, stimmen Fourierreihe und Funktion überein. Die Fourierreihe ist somit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{4} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \\ &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^\pi - e^{-\pi}) \cos(nt)}{2\pi (n^2 + 1)} \end{aligned}$$



Die Funktion und die Fourierapproximation (Summe bis $n = 4$) sind rechts gezeichnet.

(b) $b_{13} = 0$ und

$$a_{13} = -\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi (1 + 13^2)} = -\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{340\pi} \approx -0.021624$$

- (c) Aufgrund der obigen Rechnungen konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion $f(t)$. Für $t = 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(n^2 + 1)} (-1)^n \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} (-1)^n \right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} (-1)^n \right) \\ \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} (-1)^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1-17 :

- (a) • Durch eine zweifache partielle Integration kann eine Gleichung für

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx$$

erzeugt werden. Diese Gleichung kann aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n &= \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx \\ &= \sin(x) \sin(nx) \Big|_0^\pi - n \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx \\ &= 0 + n \cos(x) \cos(nx) \Big|_0^\pi + n^2 \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx \\ &= n((-1)^{n+1} - 1) + n^2 \frac{\pi}{2} b_n \\ \frac{\pi}{2} b_n &= \frac{n((-1)^n + 1)}{n^2 - 1} = \begin{cases} \frac{2n}{n^2 - 1} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $b_n = \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)}$ falls n gerade ist und wird haben die Fourier Sinus-Reihe

$$\cos(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \sin(2kx)}{4k^2 - 1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2 \sin(2x)}{3} + \frac{4 \sin(4x)}{15} + \frac{6 \sin(6x)}{35} + \frac{8 \sin(8x)}{63} + \dots \right)$$

- Der Koeffizient kann auch mit Hilfe des tabellierten Integrals

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C$$

bestimmt werden.

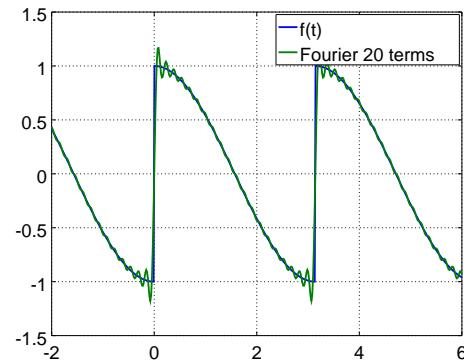
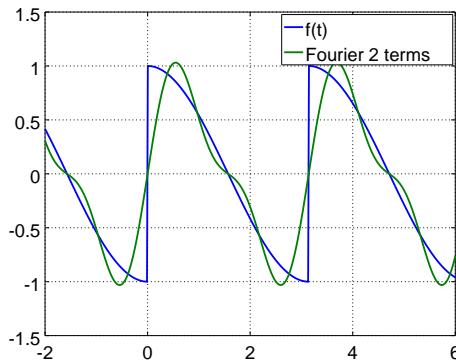
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n &= \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) dx = -\frac{\cos((n+1)x)}{2(n+1)} - \frac{\cos((n-1)x)}{2(n-1)} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{(n-1) \cos((n+1)\pi) + (n+1) \cos((n-1)\pi)}{2(n^2 - 1)} + \frac{(n-1) + (n+1)}{2(n^2 - 1)} \\ &= -\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} + \frac{n}{n^2 - 1} = \frac{n((-1)^n + 1)}{n^2 - 1} \end{aligned}$$

- Da die ungerade erweiterte Funktion auch π -periodisch ist, kann auch die folgende Formel verwendet werden.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \sin(2kx) dx = \dots = \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)}$$

In diesem Fall sind alle Koeffizienten von Null verschieden. Hier erscheinen nur alle obigen Koeffizienten mit geradem Index.

- (b) Das Segment der cos Kurve auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist ungerade und 2π -periodisch fortzusetzen. Die Approximation durch 2 Terme ist recht gut. Die Schnittpunkte mit der ursprünglichen Funktion sind illustrativ. Es sind nur wenige Oszillationen sichtbar.



- (c) Die Approximation durch 20 Terme ist sehr gut, aber das Phänomen von Gibbs ist zu zeichnen. Es sind viele Oszillationen sichtbar, mit kleinen Amplituden.

Octave

```

1; % assure a script file
function y = f(t)
    y = cos(mod(t,pi));
endfunction

t = linspace(-2,6,500); y = f(t);

function y = fFour(t)
    n = 20; % number of Fourier terms
    y = zeros(size(t));
    for k = 1:n
        y = y + 2*k*sin(2*k*t)/(4*k^2-1);
    endfor
    y = 4/pi*y;
endfunction

yFour = fFour(t);
plot(t,f(t),t,yFour)
legend('f(t)', 'Fourier 20 terms')

```

Lösung zu Aufgabe 1-18 :

- (a) Die π -periodisch fortgesetzte Funktion ist gerade und somit sind nur die a_n zu berechnen. Wegen der Periode π sind die auftretenden Terme $\cos(2x), \cos(4x), \cos(6x)\dots$ Wir erhalten die Reihe

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

Für die Lösung ist das folgende Integral zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(n2x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((1-2n)x) + \sin((1+2n)x) dx \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((1-2n)x)}{1-2n} + \frac{\cos((1+2n)x)}{1+2n} \right) \Big|_{x=0}^\pi \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((1-2n)\pi)}{1-2n} + \frac{\cos((1+2n)\pi)}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n} \right) \\
 &= -\frac{1}{\pi} ((-1)^{1+2n} - 1) \left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) \\
 &= +\frac{2}{\pi} \left(\frac{1+2n+1-2n}{(1-2n)(1+2n)} \right) = \frac{-4}{\pi(2n-1)(2n+1)} = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}
 \end{aligned}$$

Der Wert von a_0 ist unabhängig zu bestimmen.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{4}{\pi}$$

- (b) Die ungerade, 2π -periodische Fortsetzung der Funktion ist die sin-Funktion (auf ganz \mathbb{R}) und somit ist die Fourier-Sinus-Reihe gegeben durch $\sin x$.
- (c) Die gerade, 2π -periodische Fortsetzung der Funktion stimmt mit der π -periodischen Fortsetzung überein. Deshalb ist die Fourier-Cosinus-Reihe auch gegeben durch

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1-19 :

- (a) Die Periode der Funktion ist 3 und die Funktion ist gerade. Somit gilt $b_n = 0$. Es ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$ und es gilt

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right)$$

wobei für $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{3} \int_{-3/2}^{3/2} f(t) \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{3/2} f(t) \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt = \frac{4}{3} \left(\int_0^1 t \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt + \int_1^{3/2} 1 \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{3^2}{(n2\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{n2\pi}{3}\right) + \frac{n2\pi}{3} \sin\left(\frac{n2\pi}{3}\right) - 1 \right) + \left(\frac{3}{n2\pi} \sin\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) \Big|_1^{3/2} \right) \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left(\frac{3^2}{(n2\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{n2\pi}{3}\right) - 1 \right) \right) = \frac{12}{(n2\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{n2\pi}{3}\right) - 1 \right) \\
 &= \frac{3}{(n\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{n2\pi}{3}\right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Der Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ ist gleich dem Mittelwert der Funktion. Somit ist

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(k\pi)^2} \left(\cos\left(\frac{k2\pi}{3}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{k2\pi}{3}t\right)$$

(b)

$$a_0 = \frac{4}{3} , \quad a_{17} = \frac{-9}{2 \cdot 17^2 \pi^2} \approx -0.00157767 , \quad b_{17} = 0$$

Eine andere Lösungsviante kann auf der 3-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

aufbauen. Nun können drei Integrale bestimmt werden.

$$a_n = \frac{2}{3} \left(\int_0^1 t \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt + \int_1^2 1 \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt + \int_2^3 (3-t) \cos\left(\frac{n2\pi}{3}t\right) dt \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1–20 :

- (a) Die Funktion ist gerade und somit treten nur Cosinus Terme auf, d.h. $b_n = 0$. Die Periode ist $T = 8$ und somit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{8} \int_{-4}^{+4} f(t) \cos(n\frac{\pi}{4}t) dt \\ &= \frac{2 \cdot 2}{8} \int_0^1 (1-t) \cos(n\frac{\pi}{4}t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left((1-t) \frac{4}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{4}t) \Big|_{t=0}^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 (0-1) \sin(n\frac{\pi}{4}t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((1-t) \frac{4}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{4}t) - \frac{4^2}{n^2\pi^2} \cos(n\frac{\pi}{4}t) \right) \Big|_{t=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{4^2}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos(n\frac{\pi}{4}) \right) = \frac{8}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos(n\frac{\pi}{4}) \right) \end{aligned}$$

Für den Spezialfall a_0 erhalten wir

$$a_0 = \frac{2 \cdot 2}{8} \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{4}$$

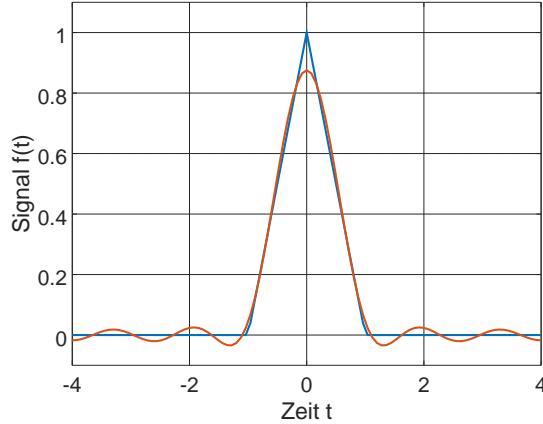
n	a_n	b_n
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{8}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	0
2	$\frac{2}{\pi^2}$	0
3	$\frac{8}{9\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	0
4	$\frac{8 \cdot 2}{16\pi^2}$	0
5	$\frac{8}{25\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	0
6	$\frac{8}{36\pi^2}$	0
\vdots	\vdots	\vdots

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{4}t) \\
 &\approx \frac{1}{8} + \frac{8}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{2}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{4}t\right) + \frac{8}{9\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + \frac{16}{16\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{4}t\right) + \dots \\
 &\approx 0.125 + 0.23741 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 0.20264 \cos\left(\frac{2\pi}{4}t\right) + 0.15375 \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + 0.10132 \cos\left(\frac{4\pi}{4}t\right) + \dots
 \end{aligned}$$

(c)

$$c_5 = \frac{1}{2} (a_5 - i b_5) = \frac{1}{2} a_5 = \frac{4}{25\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.027675$$



```
t = linspace(-4,,4,101);
f = (1-abs(t)).*(abs(t)<=1);
plot(t,f)
xlabel('Zeit t'); ylabel('Signal f(t)')
axis([-4 4 -0.1 1.1])
print -dpdfwrite OneMinusAbs.pdf
```

Lösung zu Aufgabe 1-21 :

(a) Da die Funktion gerade ist, gilt $b_n = 0$. Die Periode ist $T = 6$ und somit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$ und es ist $a_0 = \frac{1}{3}$. Für $n \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 f(x) \cos(n\omega t) dt = 2 \frac{2}{6} \int_0^1 (2 - 2t) \cos(n\omega t) dt \\
 &= \frac{8}{3} \left(\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} - \frac{\cos(n\omega t) + t \sin(n\omega t)}{n^2\omega^2} \right) \Big|_{t=0}^1 \\
 \text{verwende } \omega &= \frac{\pi}{3}, \quad \sin(n\omega) = \sin(n\frac{\pi}{3}) \quad \text{und} \quad \cos(n\omega) = \cos(n\frac{\pi}{3}) \\
 &= \frac{8}{3} \left(\frac{3 \sin(n\frac{\pi}{3})}{n\pi} - 9 \frac{\cos(n\frac{\pi}{3}) + \sin(n\frac{\pi}{3})}{n^2\pi^2} \right) \\
 a_9 &= 8 \left(\frac{\sin(9\frac{\pi}{3})}{9\pi} - 3 \frac{\cos(9\frac{\pi}{3}) + \sin(9\frac{\pi}{3})}{9^2\pi^2} \right) = \frac{8}{27\pi^2}
 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} c_9 &= \frac{1}{2} (a_9 - i b_9) = \frac{4}{27\pi^2} \\ c_{-9} &= \frac{1}{2} (a_9 + i b_9) = c_9 \end{aligned}$$

(c) In diesem Beispiel ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$ und statt der Funktion $f(t)$ wird die neue Funktion $g(t) = f(t + \tau) = f(t + 2)$ untersucht. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= e^{i\omega n\tau} c_n \\ \tilde{c}_9 &= e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 9 \cdot 2} c_9 = e^{i6\pi} c_9 = c_9 = \frac{4}{27\pi^2} \\ \tilde{c}_{-9} &= e^{-i6\pi} c_{-9} = \frac{4}{27\pi^2} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–22 :

(a) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) dt = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

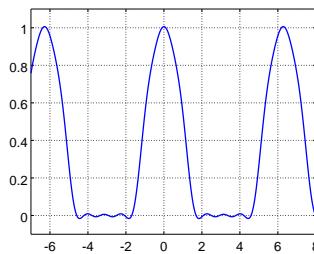
Da die Funktion $f(t)$ gerade ist gilt $b_n = 0$.

(c)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(nt) dt = \frac{-2 \cos(n\pi/2)}{(n^2 - 1)\pi} \\ a_8 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(8t) dt = \frac{-2}{(8^2 - 1)\pi} \approx -0.010105 \end{aligned}$$

(d) Die Funktion $f(t)$ wird durch vier Terme bereits recht gut approximiert, wie die untenstehende Graphik zeigt.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{2}{3\pi} \cos(2t) - \frac{2}{15\pi} \cos(4t) + \frac{2}{35\pi} \cos(6t) - \dots \\ &\approx 0.6366 + 0.5 \cos(t) + 0.2122 \cos(2t) - 0.0424 \cos(4t) + 0.0182 \cos(6t) - \dots \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 1–23 :**

(a) Zuerst ist ungerade zu erweitern und somit ist die Periode $T = 4\pi$ und man findet $\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

$$b_n = \frac{4}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin\left(\frac{n}{2}t\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin\left(\frac{n}{2}t\right) dt$$

(b) Mittels einer Integraltafel oder Taschenrechner erhält man

$$b_n = \frac{-4}{\pi(n^2 - 4)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{falls } n \neq 2 \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{2}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \\ &\approx \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2} \sin(t) + \frac{4}{5\pi} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{4}{21\pi} \sin\left(\frac{5}{2}t\right) + \frac{4}{45\pi} \sin\left(\frac{7}{2}t\right) - \dots \end{aligned}$$

```
N = 5; % number of terms
b = -4/pi./([1:N].^2-4).*sin([1:N]*pi/2); b(2) = 1/2;
t = linspace(-10,13);
f = zeros(size(t));
for n = 1:N
    f = f+ b(n)*sin(n/2*t);
end%for
plot(t,f)
axis([-10,13,-1.1 1.1])
```

Lösung zu Aufgabe 1–24 : Die Funktion $f(t)$ ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ t/2 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

und muss mit Periode 4 fortgesetzt werden.

(a) Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{4} t\right) dt = \frac{2}{4} \int_0^2 \frac{t}{2} \sin\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(b)

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-in\frac{2\pi}{4}t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{t}{2} e^{-in\frac{\pi}{2}t} dt \\
&= \frac{(1+in\pi)e^{-in\pi}-1}{2n^2\pi^2} = \frac{(1+in\pi)(-1)^n-1}{2n^2\pi^2} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(1+in\pi)-1}{2n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{(1+in\pi)(-1)-1}{2n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{in\pi}{2n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-2-in\pi}{2n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(c) Wegen $2c_n = a_n - i b_n$ gilt

$$\begin{aligned}
b_n &= -2 \operatorname{Im}(c_n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{-n\pi}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n\pi}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \\
a_n &= +2 \operatorname{Re}(c_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-2}{n^2\pi^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_8 &= \frac{i}{16\pi} \approx i 0.01989 & c_9 &= \frac{-2-i9\pi}{162\pi^2} \approx -0.00125 - i 0.01768 \\
a_8 &= 0 & a_9 &= \frac{-2}{81\pi^2} \approx -0.00250
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1-25 :(a) Die Funktion ist ungerade zu erweitern zur ungeraden Funktion f_u . Dadurch wird die Periode 4 und man erhält

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f_u(t) \sin(n \frac{2\pi}{4} t) dt = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 t \sin(n \frac{\pi}{2} t) dt = \int_0^1 t \sin(n \frac{\pi}{2} t) dt$$

(b) Die Funktion ist gerade zu erweitern zur geraden Funktion f_g . Dadurch wird die Periode 4 und man erhält

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f_g(t) \cos(n \frac{2\pi}{4} t) dt = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 |t| \cos(n \frac{\pi}{2} t) dt = \int_0^1 t \cos(n \frac{\pi}{2} t) dt$$

(c) Hier ist die Periode $T = 2$ und man erhält

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) e^{-in\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^{-in\pi t} dt$$

(d) Verwende $e^{-i13\pi} = -1$

$$\begin{aligned}
c_{13} &= \frac{1}{2} \int_0^1 t e^{-i13\pi t} dt \\
&= \left(t \frac{1}{-i26\pi} e^{-i13\pi t} \right) \Big|_{t=0}^1 - \frac{1}{-i26\pi} \int_0^1 1 e^{-i13\pi t} dt \\
&= \frac{1}{-i26\pi} e^{-i13\pi} - \left(\frac{1}{2(-i13\pi)^2} e^{-i13\pi t} \right) \Big|_{t=0}^1 \\
&= \frac{i}{26\pi} (-1) + \left(\frac{1}{2 \cdot 13^2 \pi^2} (-1 - 1) \right) \\
&= \frac{-i}{26\pi} - \frac{1}{169\pi^2} \approx -0.000599534 - i 0.0122427
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–26 :

- (a) Die Funktion ist ungerade mit Periode 6 und man erhält sofort $a_n = 0$ und das Integral

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{6} t\right) dt = \frac{4}{6} \int_0^3 f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{t}{2} \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right) dt + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-t) \sin\left(n \frac{\pi}{3} t\right) dt \end{aligned}$$

- (b) Wegen $a_4 = 0$ kann das obige Integral für $n = 4$ exakt oder numerisch bestimmt werden. Das Resultat ist

$$b_4 = \frac{9\sqrt{3}}{32\pi^2} \approx 0.0493575$$

Die komplexe Koeffizient ist nun gegeben durch

$$c_4 = \frac{1}{2} (a_4 - i b_4) = \frac{-i}{2} b_4 = -i \frac{9\sqrt{3}}{64\pi^2}$$

- (c) Der Term mit c_4 in der Fourierreihe von $f(t)$ ist gegeben durch

$$c_4 \exp(i \frac{4\pi}{3} t) = \frac{-i}{2} b_4 \exp(i \frac{4\pi}{3} t)$$

Somit lautet der Term mit der selben Frequenz in der Ableitung $g(t)$

$$i \frac{4\pi}{3} \frac{-i}{2} b_4 \exp(i \frac{4\pi}{3} t) = \frac{2\pi}{3} b_4 \exp(i \frac{4\pi}{3} t)$$

und der komplexe Fourier Koeffizient von $g(t)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}_4 = \frac{2\pi}{3} b_4 + i 0 = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \approx 0.103374$$

Dieser Koeffizient kann auch bestimmt werden durch Integrale

$$\begin{aligned} \tilde{c}_4 &= \frac{1}{6} \int_{-3}^{-2} -1 \exp(-i 4 \frac{\pi}{3} t) dt + \frac{1}{6} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \exp(-i 4 \frac{\pi}{3} t) dt + \frac{1}{6} \int_2^3 -1 \exp(-i 4 \frac{\pi}{3} t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{1}{2} \cos(4 \frac{\pi}{3} t) dt + \frac{1}{3} \int_2^3 -1 \cos(4 \frac{\pi}{3} t) dt \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–27 :

- (a) Da die Funktion gerade ist gilt sicher $b_n = 0$ und in der gegebenen Formel liest man ab, dass $a_n = 0$ falls n gerade und $a_n = \frac{32}{\pi^2 n^2}$ falls n ungerade. Wegen $2 c_n = a_n - i b_n$ gilt

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{16}{\pi^2 n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit ist $c_7 = \frac{16}{\pi^2 49}$, $c_8 = 0$ und $c_{-17} = \overline{c_{17}} = \frac{16}{\pi^2 17^2}$.

- (b) Die Funktion entsteht durch eine Verschiebung um $1/2$ nach rechts der gegebenen Funktion. Somit sind die neuen Fourierkoeffizienten

$$e^{-i n \pi \frac{1}{2}} c_n$$

und

$$f(x - 1/2) = g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i n \pi \frac{1}{2}} c_n e^{i n \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n e^{i n \pi x}$$

Da nur Koeffizienten c_n mit ungeradem Index von Null verschieden sind kann dies umgeschrieben werden zu (verwende $(-i)^{2k+1} = -i \cdot i^{2k} = i(-1)^{k+1}$)

$$f(x - 1/2) = g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} i(-1)^{k+1} c_{2k+1} e^{i(2k+1)\pi x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^{k+1} 16}{\pi^2 (2k+1)^2} e^{i(2k+1)\pi x}$$

Die reelle Fourierreihe ist etwas schwieriger zu konstruieren. Man könnte mit der ursprünglichen Formel starten und erhält

$$\begin{aligned} f(x - \frac{1}{2}) &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)(x-1/2)\pi)}{(2k+1)^2} = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x\pi - k\pi - \pi/2)}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x\pi - k\pi)}{(2k+1)^2} = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)x\pi)}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

- (c) Die Funktion h ist die Ableitung der Funktion f und die Fourierreihe von $h(x)$ konvergiert überall, ausser bei den Sprungstellen. Somit

$$h(x) \sim \frac{-32}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x\pi)}{2k+1}$$

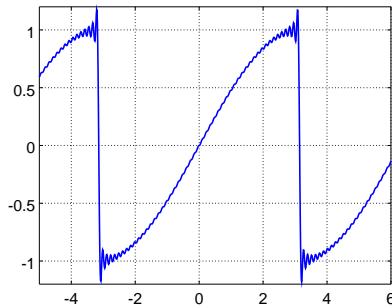
Lösung zu Aufgabe 1–28 :

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t/2) \cos(nt) dt = 0 \\ \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t/2) \sin(nt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((1/2-n)t) - \cos((1/2+n)t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((1/2-n)t)}{1/2-n} - \frac{\sin((1/2+n)t)}{1/2+n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin((1/2+n)\pi)}{1/2-n} - \frac{\sin((1/2+n)\pi)}{1/2+n} = \sin((1/2+n)\pi) \left(\frac{1}{1/2-n} - \frac{1}{1/2+n} \right) \\ &= \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) \left(\frac{2}{1-2n} - \frac{2}{1+2n} \right) = \cos(n\pi) \left(\frac{2(1+2n) - 2(1-2n)}{1-4n^2} \right) \\ &= \cos(n\pi) \left(\frac{8n}{1-4n^2} \right) = \frac{(-1)^n 8n}{1-4n^2} \end{aligned}$$

$$(b) a_7 = 0 \text{ und } b_7 = \frac{1}{\pi} \frac{-8 \cdot 7}{1-4 \cdot 49} = \frac{56}{195} \approx 0.0914.$$

- (c) In der Fourierreihe werden viele (50) Terme berücksichtigt. Somit wird die Funktion auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ sehr gut rekonstruiert. An den Stellen $\pm\pi$ tritt wegen der 2π -periodischen Fortsetzung eine Sprungstelle auf und das Phänomen von Gibbs wird sichtbar.

**Lösung zu Aufgabe 1–29 :**(a) ungerade Rechteck–Funktion, 2π –periodisch, Phänomen von Gibbs

(b) Umskalierung

$$g(t) = 5 f\left(\frac{\pi}{2} t\right) \sim 5 \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}t)}{2k+1}$$

(c) Wegen $h'(t) = g(t)$ kann die Reihe von $g(t)$ gliedweise integriert werden. Der konstante Anteil ist der Mittelwert der Funktion $h(t)$, d.h. 5. Man erhält

$$h(t) \sim 5 - 5 \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}t)}{2k+1} = 5 - \frac{40}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}t)}{(2k+1)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 1–30 :

(a)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - \pi^2) \sin(nt) dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - \pi^2) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{4}{n^2} \\ a_0 &= \frac{-4\pi^2}{3} \end{aligned}$$

und somit

$$f(x) \sim \frac{-2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nt)$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \sin(nt) dt = -(-1)^n \frac{4}{n} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \cos(nt) dt = 0 \end{aligned}$$

Man erhält die Reihe

$$f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n} \sin(nt)$$

(c) Die Fourierreihe von $f''(t) = 2$ ist die Funktion selbst.

(d) Vergleichen Sie die ersten drei Teilaufgaben.

Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar für $x \neq k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$f(t) = -\pi^2 + \int_0^t f'(\tau) d\tau \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Die Fourierreihe der Ableitung konvergiert gleichmässig auf Intervallen die kein Vielfaches von π enthalten. Deshalb kann die Reihe dort gliedweise integriert werden und stimmt mit der Funktion $f(t)$ überein. Da sowohl die Funktion als auch die Fourierreihe stetige Funktionen sind müssen sie auch an den isolierten Punkten $k\pi$ übereinstimmen. Somit hätte die Reihe von $f'(t)$ auch durch gliedweises Differenzieren erzeugt werden können.

Die erste Ableitung kann nicht auf der ganzen reellen Achse als Stammfunktion der zweiten Ableitung geschrieben werden.

$$f'(t) \neq c + \int_0^t f''(\tau) d\tau = c + \int_0^t -2 d\tau = c - 2t$$

Die Sprungstellen der Ableitung werden nicht korrekt erfasst. Dieses Problem äussert sich auch beim gliedweisen (formalen) Ableiten der Fourierreihe von f' . Man erwartet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f'(x) &\sim \frac{d}{dx} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n} \sin(n t) \right) \\ &\sim -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4 \cos(n t) \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert nicht gleichmässig und kann deshalb auch nicht gliedweise integriert werden um auf die Reihe von f' zu kommen. Eine Integration der Fourierreihe von $f''(t) = -2$ ergibt

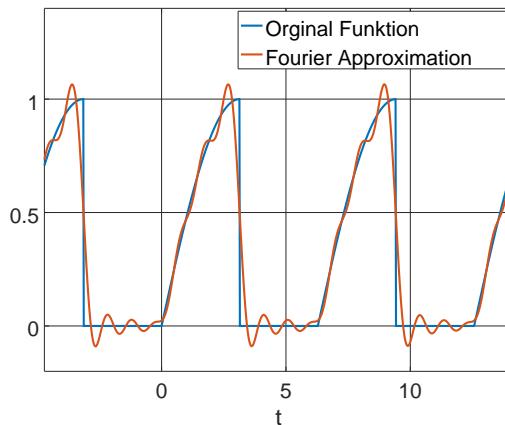
$$\int_0^t f''(\tau) d\tau = \int_0^t -2 d\tau = -2t$$

und dies ist **keine** Fourierreihe.

(e) Bei $t = \pm\pi$ konvergieren die Fourierreihe der Ableitung nicht gegen die Werte der Ableitung der Fourierreihe, da die periodische Fortsetzung der Ableitung dort Sprungstellen hat. Eine Beziehung zwischen der Fourierreihe der zweiten Ableitung und der (formalen) zweiten Ableitung der Fourierreihe ist nicht auszumachen.

Lösung zu Aufgabe 1–31 :

(a) Skizze der Funktion, wobei das Phänomen von Gibbs zu zeichnen ist.



(b)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin(nx) dx$$

(c)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) 1 dx = \frac{2}{\pi} \\ \pi a_7 &= \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx = \dots = \frac{-2}{195} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–32 :

- (a) Die periodische Erweiterung der Funktion ist ungerade, somit gilt $a_n = 0$.
- (b) Wegen $h = \sin(\pi/2 - d)$ gilt $d = \pi/2 - \arcsin(h)$. Die Knicke im Graphen der Funktion $f(t)$ sind bei $\pi/2 \pm d$ und $3\pi/2 \pm d$. Da die Periode 2π ist gilt $\omega = 1$ und somit

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2-d} \sin(t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2-d}^{\pi/2+d} h \sin(nt) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2+d}^{3\pi/2-d} \sin(t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{3\pi/2-d}^{3\pi/2+d} -h \sin(nt) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{3\pi/2+d}^{2\pi} \sin(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Da die Funktion $f(t)$ ungerade ist kann die Rechnung erheblich vereinfacht werden, indem das Integral von 0 bis π mit 2 multipliziert wird.

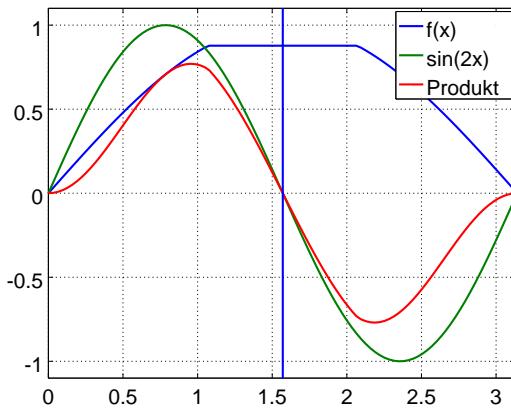
$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2-d} \sin(t) \sin(nt) dt + \int_{\pi/2-d}^{\pi/2+d} h \sin(nt) dt + \int_{\pi/2+d}^{\pi} \sin(t) \sin(nt) dt \right)$$

- (c) b_7 kann numerisch (TI/HP/Octave/MATLAB) bestimmt werden mit den Werten $d = 0.5$ und $h = \sin(\pi/2 - d) = 0.877583$. Man erhält $b_7 = 0.010743$. Der Koeffizient c_7 ist nun leicht zu bestimmen mittels

$$c_7 = \frac{1}{2} (a_7 - i b_7) = \frac{i}{2} b_7 = -i 0.0053713$$

- (d) Das Produkt der Funktionen $f(t)$ und $\sin(2t)$ ist zu integrieren über das Intervall $[0, \pi]$. Beziiglich der Achse $x = \pi/2$ ist $f(t)$ gerade und $\sin(2t)$ ungerade, das Produkt somit ungerade. Deshalb gilt

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(2t) dt = 0$$



Mit derselben Argumentation lässt sich zeigen, dass $b_n = 0$ falls n eine gerade Zahl ist.

Lösung zu Aufgabe 1-33 :

- (a) Die periodische Erweiterung der Funktion ist gerade, somit gilt $b_n = 0$. Der Mittelwert der Funktion ist 0 und somit $a_0 = 0$.
- (b) Wegen $h = \cos(d)$ gilt $d = \arccos(h)$. Die Knicke im Graphen der Funktion $f(t)$ sind bei $\pm d, \pi - d$ und $-\pi + d$. Da die Periode 2π ist gilt $\omega = 1$ und somit

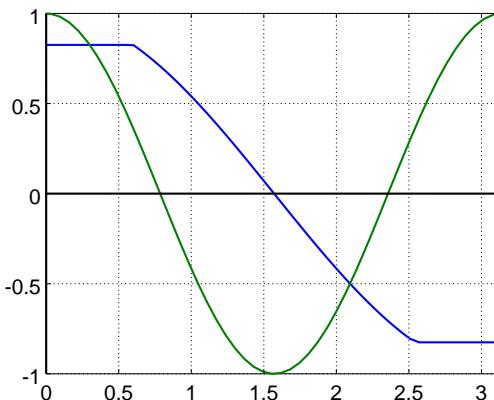
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^d h \cos(nt) dt + \frac{2}{\pi} \int_d^{\pi-d} \cos(t) \cos(nt) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi-d}^{\pi} -h \cos(nt) dt \end{aligned}$$

- (c) a_7 kann numerisch bestimmt werden mit $d = 0.6$ und $h = \cos(d) = 0.825336$. Man erhält $a_7 = -0.00461773$. Der Koeffizient c_7 ist nun leicht zu bestimmen mittels

$$c_7 = \frac{1}{2} (a_7 - i b_7) = \frac{1}{2} a_7 = -0.00230886$$

- (d) Das Produkt der Funktionen $f(t)$ und $\cos(2t)$ ist zu integrieren über das Intervall $[0, \pi]$. Bezuglich der Achse $x = \pi/2$ ist $f(t)$ ungerade und $\cos(2t)$ gerade, das Produkt somit ungerade. Deshalb gilt

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(2t) dt = 0$$



Mit derselben Argumentation lässt sich zeigen, dass $a_n = 0$ falls n eine gerade Zahl ist.

Lösung zu Aufgabe 1-34 :

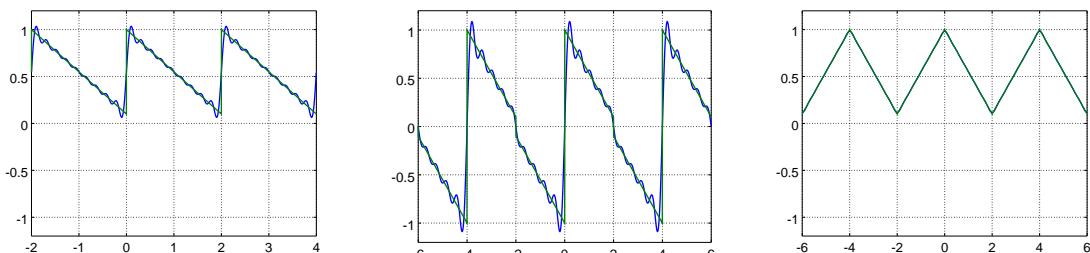
- (a) Zuerst 3-periodische Fortsetzung zeichnen, dann Phänomen von Gibbs berücksichtigen.
- (b) Zuerst ungerade fortsetzen auf $[-3, 3]$, dann 6-periodische Fortsetzung zeichnen, dann Phänomen von Gibbs berücksichtigen.
- (c) Zuerst gerade fortsetzen auf $[-3, 3]$, dann 6-periodische Fortsetzung zeichnen, **kein** Phänomen von Gibbs einzeichnen. Der Graph darf keine Ecken aufweisen, diese müssen abgerundet sein.
- (d) Der Wert von c_0 entspricht dem Mittelwert der Funktion und ist in diesem Beispiel $c_0 = \frac{2}{3}$. Die Rechnung ist

$$c_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{2}{9} (t-3)^2 dt = \frac{2}{27} \frac{1}{3} (t-3)^3 \Big|_{t=0}^3 = \frac{2}{27} \frac{1}{3} 27 = \frac{2}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 1-35 :

- (a) Zuerst 2-periodische Fortsetzung zeichnen, dann Phänomen von Gibbs berücksichtigen.
- (b) Zuerst ungerade fortsetzen auf $[-2, 2]$, dann 4-periodische Fortsetzung zeichnen, dann Phänomen von Gibbs berücksichtigen.
- (c) Zuerst gerade fortsetzen auf $[-2, 2]$, dann 4-periodische Fortsetzung zeichnen, **kein** Phänomen von Gibbs einzeichnen. Der Graph darf keine Ecken aufweisen, diese müssen abgerundet sein.
- (d) Der Wert von c_0 entspricht dem Mittelwert der Funktion und ist in diesem Beispiel

$$c_0 = \frac{1 + 0.1}{2} = 0.55$$



Lösung zu Aufgabe 1-36 :

- (a) Es ist $\omega = \frac{2\pi}{L} = \pi$ und somit

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-in\pi t} dt$$

- (b)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-in\pi t} dt = \frac{1}{2} e^{-in\pi t} \frac{-in\pi t - 1}{(-in\pi)^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^{-in\pi t} \frac{in\pi t + 1}{n^2\pi^2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2 n^2\pi^2} (in\pi 2 + 1 - 1) = \frac{i}{n\pi} \end{aligned}$$

- (c) Für die Fourier–Sinus–Reihe muss die Funktion ungerade auf das Intervall $[-2, 2]$ fortgesetzt werden. Nun ist $\omega = \pi/2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t \sin(n\pi t/2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{4 \sin(n\pi t/2)}{n^2\pi^2} - \frac{2t \cos(n\pi t/2)}{n\pi} \right) \Big|_{t=-2}^2 \\ &= \frac{-4}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Das führt auf die Reihe

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi t/2)}{1} - \frac{\sin(2\pi t/2)}{2} + \frac{\sin(3\pi t/2)}{3} - \frac{\sin(4\pi t/2)}{4} + \frac{\sin(5\pi t/2)}{5} - \dots \right)$$

- (d) Auf dem Intervall $[-2, 2]$ ist $\frac{1}{2}t^2$ eine Stammfunktion von t . Somit können wir die Fourierreihe gliedweise integrieren und erhalten die Reihe

$$C + \frac{8}{\pi^2} \left(-\frac{\cos(\pi t/2)}{1} + \frac{\cos(2\pi t/2)}{2^2} - \frac{\cos(3\pi t/2)}{3^2} + \frac{\cos(4\pi t/2)}{4^2} - \frac{\cos(5\pi t/2)}{5^2} + \dots \right)$$

Die Konstante $C = c_0$ muss mit dem Mittelwert der Funktion übereinstimmen und somit

$$C = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{2}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 1–37 :

$$S1 \leftrightarrow F1 , S2 \leftrightarrow F4, F7 , S3 \leftrightarrow F2, F5$$

Lösung zu Aufgabe 1–38 : Die Antwort basiert auf der Grundformel

$$f(t) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i n \omega t)$$

Die Messdauer ist 31 Tage (August) und somit ist die “Periode” $T = 31$ Tage. Mit der Zeiteinheit Tag gilt somit $\omega = \frac{2\pi}{31}$. Die Abtastfrequenz ist $24*6/\text{Tag} = 144/\text{Tag}$ und somit viel grösser als die zu untersuchende Frequenz von 1/Tag, d.h. wir sind klar auf der sicheren Seite.

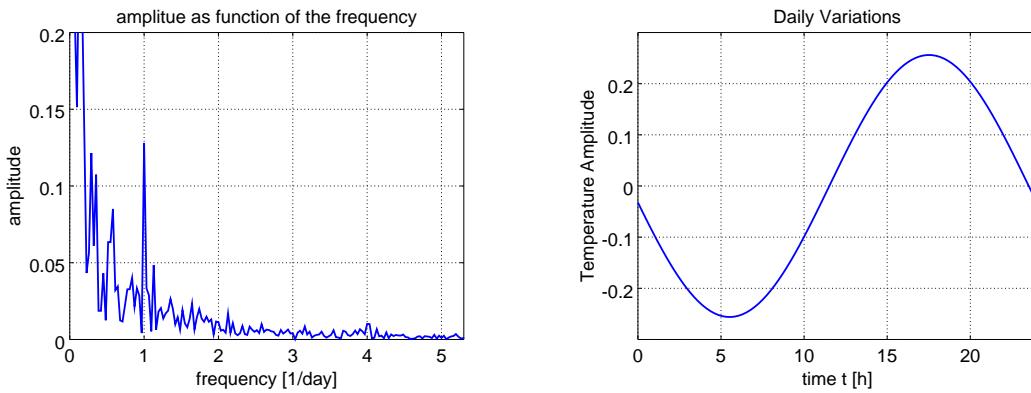
- (a) Die virtuelle Periode ist 31 Tage (ganzer August) und somit die Grundfrequenz $\frac{1}{31 \text{ Tag}}$. Die zu untersuchende Frequenz ist 1/Tag. Somit ist der gesuchte Koeffizient c_{31} , resp. $c(32)$ in MATLAB/Octave.

(b)

$$\begin{aligned} c_{31} &= -0.016118 + i 0.127044 = 0.12806 \cdot \exp(i 1.6970) \\ S_{31}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(c_{31} \exp(i 31 \frac{2\pi}{31} t) \right) = 2 \operatorname{Re} (0.12806 \exp(i (2\pi t + 1.6970))) \\ &= 0.25612 \cos(2\pi(t + 0.270)) \end{aligned}$$

Wegen $0.270 \text{ Tag} = 6.48 \text{ h} = 6 \text{ h } 29 \text{ min}$ wird das zu einer Cosinus Kurve mit Amplitude 0.256, die um 6 h 29 min nach links verschoben wird.

- (c) Die Maximaltemperatur wird ca. um 17:31 erreicht.



Lösung zu Aufgabe 1–39 : Die Antwort basiert auf der Grundformel

$$f(t) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i n \omega t)$$

Die Messdauer ist 152 Jahre und somit ist die “Periode” $T = 152$ Jahre. Mit der Zeiteinheit Jahr gilt somit $\omega = \frac{2\pi}{152}$. Die Abtastfrequenz ist 12/Jahr und somit deutlich grösser als die zu untersuchende Frequenz von 1/Jahr, d.h. wir sind klar auf der sicheren Seite.

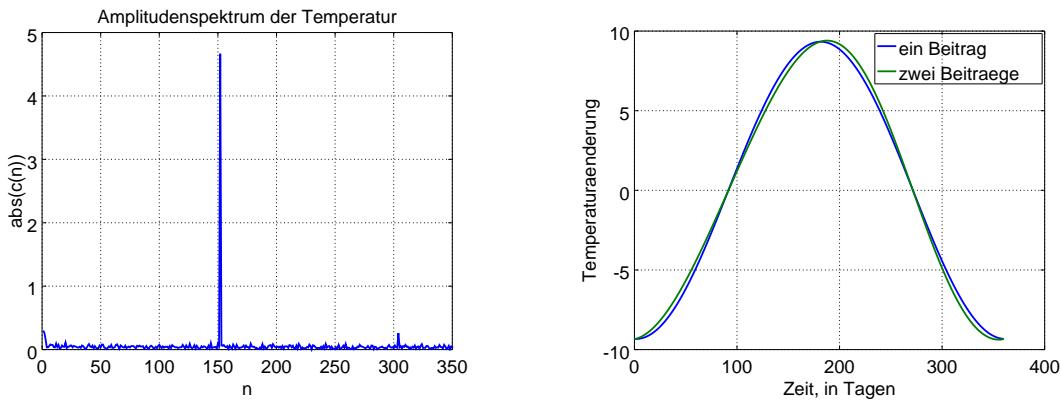
- (a) Die virtuelle Periode ist 152 Jahre und somit die Grundfrequenz $\frac{1}{152 \text{ Jahr}}$. Die zu untersuchende Frequenz ist 1/Jahr. Somit ist der gesuchte Koeffizient c_{152} , resp. $c(153)$ in MATLAB/Octave.
- (b) Wir geben t in Tagen an, d.h. $0 \leq t \leq 360$.

$$\begin{aligned} c_{152} &= -4.66386 + i 0.12835 = 4.6656 \cdot \exp(i 3.1141) \\ S_{152}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(c_{152} \exp(i 152 \frac{2\pi}{360 \cdot 152} t) \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(4.6656 \cdot \exp(i 3.1141) \exp(i \frac{2\pi}{360} t) \right) \\ &= 9.3312 \cos(3.1141 + \frac{2\pi}{360} t) = 9.3312 \cos(\frac{2\pi}{360} (t + 178.4)) \\ &= 9.3312 \cos(\frac{2\pi}{360} (t - 181.6)) \end{aligned}$$

Somit schwankt die Temperatur um $2 \cdot 9.3^\circ\text{C} = 18.6^\circ\text{C}$.

- (c) Die Maximaltemperatur wird ca. am Tage 181.5 erreicht, d.h. am 2. Juli. Da die monatlichen Durchschnittstemperaturen angegebenen sind, ist eine systematische Verschiebung von 15 Tagen “eingebaut” und wir erwarten die wärmsten Tage in der Mitte des Monats Juli.

Im untenstehenden Spektrum ist erkennbar, dass auch die Beiträge mit Periode 6 Monate, d.h. c_{304} , einen Betrag leistet. In der Graphik mit den Temperaturänderungen ist aber ersichtlich, dass dieser Beitrag klein ist.

**Lösung zu Aufgabe 1–40 :**

- Periode π , $\omega = 2$, $b_n = 0$, $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{(-1)^{n+1} 2}{\pi (2n-1)(2n+1)} \\ I(t) &\sim \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} c_n e^{i 2n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{\pi (2n-1)(2n+1)} \exp(i 2n t) \\ &\quad n \neq 0 \end{aligned}$$

- Verwende die Orthogonalität

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2n t) \cdot \cos(2k t) dt = \begin{cases} \pi/2 & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U(t) \cdot I(t) dt \\ &= \frac{4^2 R}{\pi^2} \int_0^\pi \left(-\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \cdot \left(-\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) dt \\ &= \frac{16 R}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos^2 2t}{(1 \cdot 3)^2} + \frac{\cos^2 4t}{(3 \cdot 5)^2} + \frac{\cos^2 6t}{(5 \cdot 7)^2} + \dots dt = \frac{16 R}{\pi^2} \left(\frac{\pi/2}{(1 \cdot 3)^2} + \frac{\pi/2}{(3 \cdot 5)^2} + \frac{\pi/2}{(5 \cdot 7)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{8 R}{\pi} \left(\frac{1}{(1 \cdot 3)^2} + \frac{1}{(3 \cdot 5)^2} + \frac{1}{(5 \cdot 7)^2} + \dots \right) = \frac{8 R}{\pi} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{1225} + \dots \right) \approx 0.29634 R \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–41 :

- (a) Es gilt $P(t) = U(t) I(t) = U^2(t)/R$. Verwende die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-2}^2 \sin(n \omega t) \sin(k \omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq k \\ 2 & \text{falls } n = k \end{cases}$$

um die folgenden Integrale zu bestimmen

$$A = \frac{1}{R} \int_{-2}^2 U^2(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{R\pi^2} \int_{-2}^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \right)^2 dt \\
&= \frac{4}{R\pi^2} \int_{-2}^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\omega t)}{k} \right) dt \\
&= \frac{4}{R\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-2}^2 \frac{\sin^2(n\omega t)}{n^2} dt \right) \\
&= \frac{8}{R\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{8}{R\pi^2} \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{4}{R\pi^2} \int_{-2}^2 \left(\sum_{n=1}^4 (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \right)^2 dt \\
&\vdots \\
&= \frac{8}{R\pi^2} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^2} = \frac{8}{R\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) \approx \frac{8}{R\pi^2} 1.42
\end{aligned}$$

Der relative Fehler ist gegeben durch

$$\frac{A - A_4}{A} = \frac{\frac{\pi^2}{6} - 1.42}{\frac{\pi^2}{6}} \approx 0.13$$

Somit ist der relative Fehler ca. 13%.

Lösung zu Aufgabe 1–42 :

- (a) Die Funktion $\dot{u}(t)$ kann auch durch 2-periodische Erweiterung der Funktion $-4 \operatorname{sign} x$ vom Intervall $[-1, 1]$ auf \mathbb{R} erzeugt werden. Aus einer Tabelle kann man die Fourierreihe

$$\dot{u}(t) = \frac{-16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\pi t)$$

ablesen. Die ersten paar Terme sind somit

$$\dot{u}(t) = \frac{-16}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \dots \right)$$

Ebenso könnte man die allgemeine Formel

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \dot{u}(t) \sin(n\omega t) dt$$

einsetzen ($\omega = 2\pi/T = \pi$), um zu

$$b_n = 2 \frac{2}{2} \int_0^1 (-4) \sin(n\pi t) dt = \frac{8}{n} (\cos(n\pi) - \cos 0) = \begin{cases} \frac{-16}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gelangen. Die Fourierreihe von $u(t)$ kann auch direkt bestimmt werden oder durch Integration der Reihe von $\dot{u}(t)$. Der Mittelwert $c_0 = 0$ kann leicht abgelesen werden.

$$u(t) = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} \cos(\pi t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\pi t) + \dots \right)$$

(b) Die Gleichung kann auch als

$$\dot{y} + \frac{1}{RC} y = \dot{u}(t)$$

geschrieben werden. Die komplexe Gleichung

$$\dot{y} + \frac{1}{RC} y = e^{i\omega t}$$

hat die partikuläre, komplexe Lösung

$$y(t) = \frac{1}{i\omega + 1/(RC)} e^{i\omega t} = \frac{RC}{i\omega RC + 1} e^{i\omega t}$$

Also wird die reelle Gleichung

$$\dot{y} + \frac{1}{RC} y = \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\pi t) = \frac{1}{2n+1} \operatorname{Imag} e^{i(2n+1)\pi t}$$

gelöst durch

$$y_n(t) = \operatorname{Imag} \frac{1}{2n+1} \frac{RC}{i(2n+1)\pi RC + 1} e^{i(2n+1)\pi t}$$

und wir haben die Fourierreihe für die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \frac{-16}{\pi} \operatorname{Imag} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{RC}{i(2n+1)\pi RC + 1} e^{i(2n+1)\pi t}$$

Das ist eine komplexe Fourierreihe der partikulären Lösung. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems konvergiert exponentiell gegen 0 und wir brauchen sie hier nicht anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 1–43 :

(a) Die Funktion $|\cos t|$ entsteht aus $|\sin t|$ durch eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} |\cos t| &= |\sin(t + \frac{\pi}{2})| = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ik(t+\frac{\pi}{2})}}{4k^2 - 1} \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\pi} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} \end{aligned}$$

(b) Elementare Addition der gegebenen Information.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2} (\sin t + |\sin t|) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} + \sin t - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \end{aligned}$$

(c) Die komplexe Fourierreihe von $h(t)$ ist gegeben durch

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(-i \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} \right)$$

Die Funktion $u(t)$ entsteht aus $h(t)$ durch

1. Phasenverschiebung um π

2. Ändern des Vorzeichens

3. Addition von 1

und somit

$$\begin{aligned}
 u(t) &= 1 - h(t - \pi) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(i \frac{e^{i(t-\pi)} - e^{-i(t-\pi)}}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ik(t-\pi)}}{4k^2 - 1} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(-i \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1} \right) \\
 &= 1 - i \frac{e^{it} - e^{-it}}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ikt}}{4k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1-44 :

(a)

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_{in}(t) 1 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{2}{\pi}$$

(b) Die Periode von $u_{in}(t)$ ist π und somit die Darstellung als Fourierreihe von der Form

$$u_{in}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}$$

Aufgrund der Angaben in der Aufgabe haben wir die Fourerkoeffizienten

$$c_n = \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)}$$

Für $u_{in}(t) = e^{i\omega t}$ gilt aufgrund der Angaben in der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{in}}{R} &= -u_{out} \left(\frac{1}{mR} + i\omega C \right) \\
 u_{in} &= -u_{out} \left(\frac{R}{mR} + i\omega RC \right) = -u_{out} \frac{1 + i\omega m RC}{m} \\
 u_{out} &= \frac{-m}{1 + i\omega m RC} u_{in}
 \end{aligned}$$

Wir haben die folgenden Transfers von Eingangs- zu Ausgangsfunktionen

$$\begin{aligned}
 u_{in}(t) &\longrightarrow u_{out}(t) \\
 e^{i\omega t} &\longrightarrow \frac{-m}{1 + i\omega m RC} e^{i\omega t} \\
 e^{i2nt} &\longrightarrow \frac{-m}{1 + imRC 2n} e^{i2nt} \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt} &\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{-m}{1 + imRC 2n} e^{i2nt} \\
 u_{out}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{-m}{1 + imRC 2n} e^{i2nt}
 \end{aligned}$$

- (c) Für ein Signal mit Periode $\pi/4$ muss die Winkelgeschwindigkeit durch $\omega = \frac{2\pi}{\text{Periode}} = 8$ gegeben sein, d.h. in diesem Beispiel muss $n = 4$ sein. Die entsprechenden Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{-m}{1 + imRC2n} = \frac{-2}{\pi(4 \cdot 16 - 1)} \frac{-5}{1 + i10 \cdot 8} = \frac{+10}{63\pi(1 + i10 \cdot 8)} \\ &\approx 7.89 \cdot 10^{-6} - i6.3147 \cdot 10^{-4} = 6.315 \cdot 10^{-4} e^{-i1.558} \\ c_{-4} &= \overline{c_4} \approx 6.315 \cdot 10^{-4} e^{+i1.558} \end{aligned}$$

und der $\pi/4$ -periodische Beitrag ist somit

$$\begin{aligned} c_4 e^{+i8t} + c_{-4} e^{-i8t} &\approx 6.315 \cdot 10^{-4} e^{i(8t - 1.5583)} + 6.315 \cdot 10^{-4} e^{-i(8t - 1.5583)} \\ &= 2 \cdot 6.315 \cdot 10^{-4} \cos(8t - 1.5583) = 0.00126 \cos(8t - 1.5583) \end{aligned}$$

Das Resultat kann auch bestimmt werden mittels

$$2 \operatorname{Re}(c_4 e^{+i8t}) = 2 \operatorname{Re}(6.315 \cdot 10^{-4} e^{-i1.5583+i8t}) = 1.263 \cdot 10^{-3} \cos(8t - 1.5583)$$

Lösung zu Aufgabe 1–45 :

- (a) Die komplexen Fourierkoeffizienten des Eingangssignals sind gegeben durch

$$2c_n = \int_{-1}^1 t e^{-in\pi t} dt = \frac{-t}{in\pi} e^{-in\pi t} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{in\pi} \int_{-1}^1 e^{-in\pi t} dt = 2 \frac{(-1)^n i}{n\pi} + 0$$

und offensichtlich $c_0 = 0$. Somit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{in}(t) &= c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi t} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n\pi} e^{in\pi t} \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n\pi} (\cos(n\pi t) + i \sin(n\pi t)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi t) \end{aligned}$$

In Formelsammlungen kann dieses Resultat auch direkt abgelesen werden.

- (b) Es ist geschickter mit komplexen Signalen weiterzuarbeiten. Für $u_{in}(t) = e^{in\pi t}$ gilt

$$u_{out}(t) = \frac{-m}{1 + imRCn\pi} e^{in\pi t}$$

Durch die Summenbildung erhalten wir für die oben gegebenen Signale $u_{in}(t)$ und $u_{out}(t)$

$$\begin{aligned} u_{in}(t) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi t} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi t} \\ u_{out}(t) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-m}{1 + imRCn\pi} c_n e^{in\pi t} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-m}{1 + imRCn\pi} \frac{i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi t} \end{aligned}$$

Für ein Signal mit Periode $1/2$ muss die Winkelgeschwindigkeit durch $\omega = \frac{2\pi}{\text{Periode}} = 4\pi$ gegeben sein, d.h. in diesem Beispiel muss $n = 4$ sein. Somit ist die Amplitude gegeben durch

$$\text{Amplitude} = 2 \left| \frac{(-1)^4 i}{4\pi} \frac{-m}{1 + imRC4\pi} \right| = 2 \left| \frac{1}{4\pi} \frac{5}{1 + i5 \cdot 2 \cdot 4\pi} \right| \approx 0.0063$$

Lösung zu Aufgabe 1–46 :

- (a) Das Signal ist 4-periodisch und somit ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Die komplexen Fourierkoeffizienten des Eingangssignals sind gegeben durch

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \text{sign}(t) e^{-in\pi/2t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 e^{-in\pi/2t} dt - \frac{1}{4} \int_{-2}^0 e^{-in\pi/2t} dt \\ &= \frac{2}{-i4n\pi} e^{-in\pi/2t} \Big|_0^2 - \frac{2}{-i4n\pi} e^{-in\pi/2t} \Big|_{-2}^0 \\ &= \frac{i}{2n\pi} (e^{-in\pi} - 1) + \frac{i}{2n\pi} (e^{in\pi} - 1) = \frac{i}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

und aufgrund des Mittelwertes der Funktion ist $c_0 = 0$. Somit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{in}(t) &\sim c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi/2t} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1) e^{in\pi/2t} \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi/2t)}{1} + \frac{\sin(3\pi/2t)}{3} + \frac{\sin(5\pi/2t)}{5} + \frac{\sin(7\pi/2t)}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

Als alternative Lösung kann auch verwendet werden, dass die Funktion ungerade ist und somit $a_n = 0$. Die Koeffizienten b_n sind durch ein Integral zu bestimmen.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 \text{sign}(t) \sin(n\pi/2t) dt = \int_0^2 \sin(n\pi/2t) dt \\ &= \frac{-2 \cos(n\pi/2t)}{n\pi} \Big|_{t=0}^2 = \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir auch mit dieser Rechnung

$$u_{in}(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi/2t)}{1} + \frac{\sin(3\pi/2t)}{3} + \frac{\sin(5\pi/2t)}{5} + \frac{\sin(7\pi/2t)}{7} + \dots \right)$$

In Formelsammlungen kann dieses Resultat auch direkt abgelesen werden.

- (b) Es ist geschickter mit komplexen Signalen weiterzuarbeiten. Für $u_{in}(t) = e^{in\pi/2t}$ gilt

$$u_{out}(t) = \frac{-m}{1 + imRCn\pi/2} e^{in\pi/2t}$$

Durch die Summenbildung erhalten wir für das oben gegebene $u_{in}(t)$ das komplexe Signal

$$u_{out}(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{-m}{1 + imRCn\pi/2} e^{in\pi/2t} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i((-1)^n - 1)}{n\pi} \frac{-m}{1 + imRCn\pi/2} e^{in\pi/2t}$$

- (c) Für ein Signal mit Periode 4/7 ist die Frequenz $\frac{7}{4}$ und somit muss die Winkelgeschwindigkeit gegeben sein durch $\frac{7}{4} \cdot 2\pi$. Das ist der Fall für

$$n \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2} \pi \quad \Rightarrow \quad n = 7$$

d.h. in diesem Beispiel muss $n = 7$ sein. Mit $RC = 2$ ist die Amplitude nun gegeben durch

$$\text{Amplitude} = 2 \left| c_7 \frac{-m}{1 + imRC7\pi/2} \right| = 2 \frac{2}{7\pi} \left| \frac{10}{1 + i7 \cdot 200\pi/2} \right| = \frac{4}{7\pi} \left| \frac{10}{1 + i70\pi} \right| \approx 8.27 \cdot 10^{-3}$$

Lösung zu Aufgabe 1–47 :

- (a) Die Funktion $f(x)$ ist nur auf dem Intervall $-1 < x < 1$ von Null verschieden. Dort ist sie gegeben durch $f(x) = \cos(x \frac{\pi}{2})$. Somit erhält man

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \cos(x \frac{\pi}{2}) e^{-inx} dx = \frac{2 \cos n}{\pi^2 - 4n^2}$$

- (b) Nun ist die Funktion $g(x) = \cos(x \frac{\pi}{2\alpha}) = f(x/\alpha)$ ist auf dem Intervall $-\alpha < x < \alpha$ von Null verschieden

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(x \frac{\pi}{2\alpha}) e^{-inx} dx \\ &\quad \text{mit Substitution } s = x/\alpha, \quad dx = \alpha ds \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^1 \cos(s \frac{\pi}{2}) e^{-in\alpha s} ds = \alpha \frac{2 \cos(n\alpha)}{\pi^2 - 4\alpha^2 n^2} \end{aligned}$$

Die Berechnung des letzten Integrals stimmt mit dem Integral für c_n fast überein. Für die Schlussformel kann in der gegebenen Formel für c_n der Term n durch $n\alpha$ ersetzt werden.

- (c) Setze $\alpha = 2$ in der allgemeinen Formel für eine komplexe Fourierreihe.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4 \cos(2n)}{\pi^2 - 16n^2} e^{-inx}$$

Lösung zu Aufgabe 1–48 :

- (a) Da die Funktion symmetrisch ist gilt $b_n = 0$ und wir haben

$$a_0 = \frac{2b}{\pi}$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \cos(nx) dx \\ &= \frac{\sin(nx)}{n\pi} \Big|_{x=-b}^b = \frac{2 \sin(nb)}{n\pi} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Fouriereihe

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) = \frac{b}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(nb)}{n\pi} \cos(nt)$$

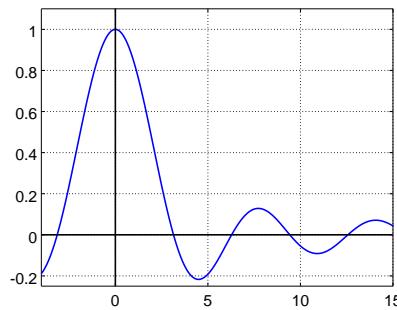
- (b) Zu zeichnen ist die Funktion

$$h(n) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nb)}{n}$$

beziehungsweise der Betrag dieser Funktion. Die Graphik ist vergleichbar zur Funktion

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$

deren Graph sie unten sehen



- (c) Die erste Nullstelle von $\text{sinc } x$ ist bei $x = \pi$ und somit ist die erste Nullstelle der Funktion $h(n)$ bei $n = \frac{\pi}{b}$. Die Breite des Hauptmaximas (Nullstelle zu Nullstelle) ist somit $\frac{2\pi}{b}$ und wir haben

$$\text{Breite des Hauptmaximas} \cdot \text{Fensterbreite} = \frac{2\pi}{b} \cdot 2b = 4\pi$$

Lösung zu Aufgabe 1–49 : Faltung des Amplitudenspektrums der Fenster mit dem Signal

- (a) Breite der Fenster 0.4

- Rechteck: ca. 30 Einheiten breit (Minimum zu Minimum), erhebliche Nebenmaxima
- Hamming: ca. 60 Einheiten breit, (fast) keine Nebenmaxima

- (b) Breite der Fenster 0.8, somit halbe Breite der Peaks. Die Peaks bleiben gleich hoch.

Siehe auch Abbildung 1.34 auf Seite 64.

Lösung zu Aufgabe 1–50 :

- (a) Die Abtastfrequenz ist $\frac{8192}{3}$ Hz ≈ 2731 Hz. Die messbaren Frequenzen dürfen höchstens halb so gross sein, d.h. ≤ 1365 Hz.
- (b) Die Grundfrequenz ist $1/3$ Hz. Diese Frequenz muss mit 300 multipliziert werden um auf die gewünschten 100 Hz zu kommen. Somit liefert $|c_{300}|$ die gesuchte Amplitude.
- (c) Signalanteile mit tiefen Frequenzen durchlaufen in 3 sec nur wenige volle Schwingungen. Deshalb wird der Einfluss des „Abschneidens“ nach exakt 3 sec erheblich sein.

Lösung zu Aufgabe 1–51 :

- (a) Das erste Maximum ist bei $n = 63$, das zweite bei $n = 71$. Die Intervalllänge von 2.5 Sekunden führt zu einer Grundfrequenz von

$$\nu_0 = \frac{1}{2.5 \text{ s}} = 0.4 \text{ Hz}$$

Die beiden Frequenzen sind die entsprechenden Vielfachen dieser Grundfrequenz, d.h.

$$\begin{aligned}\nu_1 &= 63 \cdot 0.4 \text{ Hz} = 25.2 \text{ Hz} \\ \nu_2 &= 71 \cdot 0.4 \text{ Hz} = 28.4 \text{ Hz}\end{aligned}$$

- (b) Die höchste erfassbare Frequenz ist die halbe Abtastfrequenz (Shannon)

$$\nu_{\max} = \frac{1}{2} \frac{1024}{2.5 \text{ s}} = 204.8 \text{ Hz}$$

Somit können Signale mit einer Frequenz grösser als 200 Hz sicher nicht erfasst werden.

- (c) Messen während einer gewissen Zeit entspricht dem Multiplizieren mit einer Fensterfunktion. Der Effekt der Fensterfunktion mit Breite 2.5 Sekunden ist in der gegebenen Abbildung sichtbar. Verkürzt man das Messfenster um einen Faktor, so wird die Breite der „Ausschmierung“ um den selben Faktor vergrössert. Die beiden Extrema haben einen Abstand von 8 Einheiten. Die volle Breite der beiden Peaks ist ca. 5 Einheiten. Somit dürfen die Signal nur um einen Faktor $8/5 = 1.6$ breiter werden. Deshalb darf das Messintervall um den Faktor 1.6 verkleinert werden, die höchste messbare Frequenz steigt somit um den Faktor 1.6 an. Somit können Signale bis zu ca. 300 Hz erfasst werden, indem man nur noch 1.56 Sekunden misst.

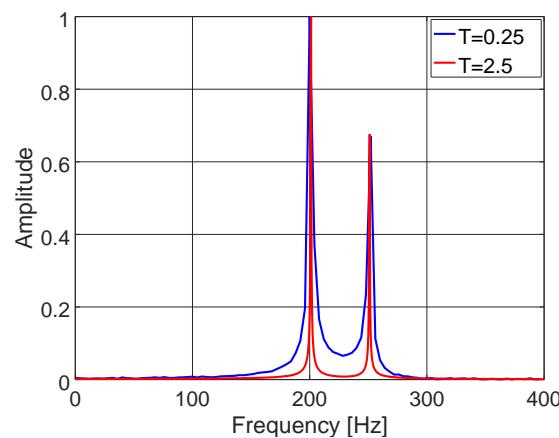
Die Zahlenwerte in dieser Aufgabe können durchaus etwas variieren. Um die Graphik zu erzeugen wurde die Funktion

$$f(t) = 3 * \sin(25.1 \cdot 2\pi t) - \cos(28.6 \cdot 2\pi t)$$

verwendet.

Lösung zu Aufgabe 1–52 :

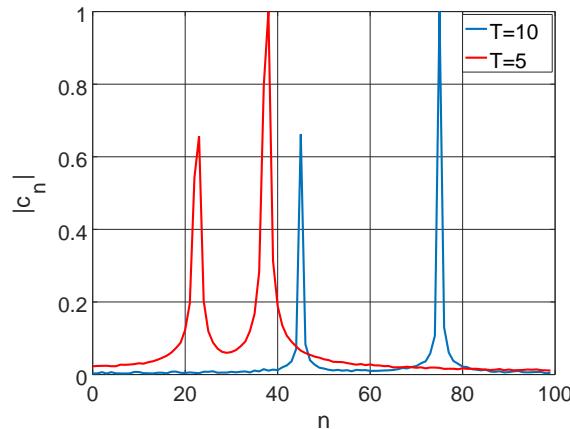
- (a) In der Graphik liest man ab, dass die maximalen Werte bei $n_1 = 50$ und $n_2 = 62$ liegen. Da die Periode $T = 0.25$ ist gilt für die Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T} = 4$. Somit ist die erste Frequenz circa 200 Hz und die zweite 250 Hz .
- (b) Die Abtastfrequenz ist $\frac{N}{T} = \frac{4096}{0.25} = 16384 \approx 16$ kHz. Es können Signale bis zur halben Abtastfrequenz untersucht werden, d.h. bis maximal 8 kHz .
- (c) Wegen $f = n * \frac{1}{T} = 4 * n$ läuft die Skala nun von 0 zu 400 Hz.
- (d) Es wird das selbe Signal gemessen und somit werden die Hauptfrequenzen auf der Frequenzskala nicht verschoben. Der Einfluss der Faltung mit der Fensterfunktion muss untersucht werden. Durch das längere Messintervall wird der Ausschmierfeffekt durch die Fensterfunktion erheblich reduziert (Faktor 10) und somit müssen die beiden Maximas erheblich schmäler werden und besser getrennt, aber an der selben Stelle auf der Frequenzskala.



Lösung zu Aufgabe 1–53 :

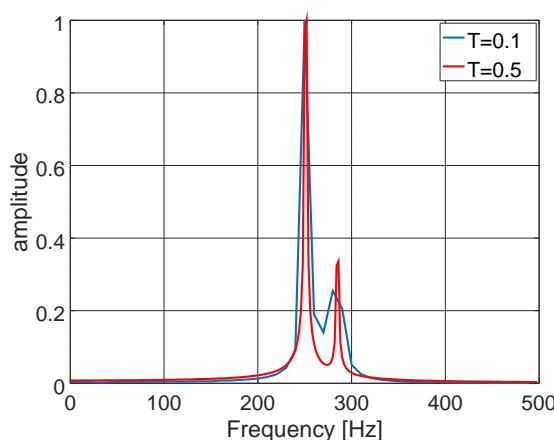
- (a) In der Graphik liest man ab, dass die maximalen Werte bei $n_1 = 45$ und $n_2 = 75$ liegen. Da die Periode $T = 10$ ist gilt für die Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T} = 0.1$. Somit ist die erste Frequenz circa 4.5 Hz und die zweite 7.5 Hz .
- (b) Die Abtastfrequenz ist $\frac{N}{T} = \frac{4096}{10} \approx 410$. Es können Signale bis zur halben Abtastfrequenz untersucht werden, d.h. bis 200 Hz .

- (c) Die Periode wurde halbiert und somit die Grundfrequenz verdoppelt. Somit müssen die neuen Maximas bei $\frac{45}{2}$ und $\frac{75}{2}$ liegen. Das kürzere Messintervall führt auch zu breiteren Maximas, aufgrund der Faltung mit der Fourierreihe der Fensterfunktion. Die Lösung ist in der untenstehenden Graphik enthalten. Die halbe Abtastfrequenz ist hier gegeben durch $\frac{1}{2} \cdot \frac{16384}{5} \approx 1638$ Hz .



Lösung zu Aufgabe 1–54 :

- (a) In der Graphik liest man ab, dass die maximalen Werte bei $n_1 = 25$ und $n_2 = 28$ liegen. Da die Periode $T = 0.1$ ist gilt für die Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T} = 10$. Somit ist die erste Frequenz circa 250 Hz und die zweite 280 Hz .
- (b) Die Abtastfrequenz ist $\frac{N}{T} = \frac{1024}{0.1} = 10240 \approx 10$ kHz. Es können Signale bis zur halben Abtastfrequenz untersucht werden, d.h. bis 5 kHz .
- (c) Wegen $f = n * \frac{1}{T} = 10 * n$ läuft die Skala nun von 0 zu 500 Hz.
- (d) Die Lage der Hauptfrequenzen wird sich auf der Frequenzskala nicht verschieben. Der Einfluss der Faltung mit der Fensterfunktion muss untersucht werden. Durch das längere Messintervall wird Ausschmiereffekt durch die Fensterfunktion erheblich reduziert und somit müssen die beiden Maximas schmäler werden und besser getrennt, aber an der selben Stelle auf der Frequenzskala.



Lösung zu Aufgabe 1–55 :

- (a) Die Grundfrequenz ist $\frac{1}{T} = \frac{1}{4}$ Hz. Die Spitze ist bei $n \approx 141$, was zu einer Frequenz von $f_1 \approx \frac{141}{4} = 35.25$ Hz führt. Die Höhe des Peaks ist $h \approx 3.4$. Somit ist die Amplitude dieses Beitrag ca.

$2 \cdot 3.4 = 6.8$. Bei der zweiten Berechnung ist die Spitze bei $n \approx 144$ und die Grundfrequenz ist $\frac{1}{1.024 \cdot 4}$. Somit ist die geschätzte Frequenz $f_1 \approx \frac{144}{1.024 \cdot 4} \approx 35.16$ Hz konsistent mit der ersten Schätzung. Die Höhe der grösseren Peaks wird sicher unterschätzt durch die obigen Rechnung, wegen des Fenster-Effekts.

- (b) Das kleinere Signal scheint die Frequenz zu wechseln, dies ist aber ein durch Aliasing erzeugtes Artefakt. Das durch FFT bestimmte Spektrum der DFT ist periodisch, mit der Abtastfrequenz als Periode. Frequenzen die grösser sind als die Abtastfrequenz erscheinen noch einmal im Spektrum, aber mit kleinerer Frequenz.

- Die erste Abtastfrequenz ist $f_{A1} = \frac{N}{T} = \frac{4096}{4} = 1024$ Hz. Die effektive Frequenz ist grösser als diese Abtastfrequenz, d.h. $f_2 = f_{A1} + \Delta f_{A1}$. Für die erste Messung ist das kleinere Maximum bei $n_2 \approx 77$ und somit gilt

$$f_2 \approx 1024 + \frac{77}{4} = 1043.25 \text{ Hz}$$

- Die zweite Abtastfrequenz ist $f_{A2} = \frac{f_{A1}}{1.024} = 1000$ Hz. Für die zweite Messung ist das kleinere Maximum bei $n_2 \approx 177$ und somit gilt

$$f_2 \approx 1000 + \frac{177}{4 \cdot 1.024} \approx 1043.21 \text{ Hz}$$

Somit sind die beiden Resultate konsistent.

Formal ist das Gleichungssystem

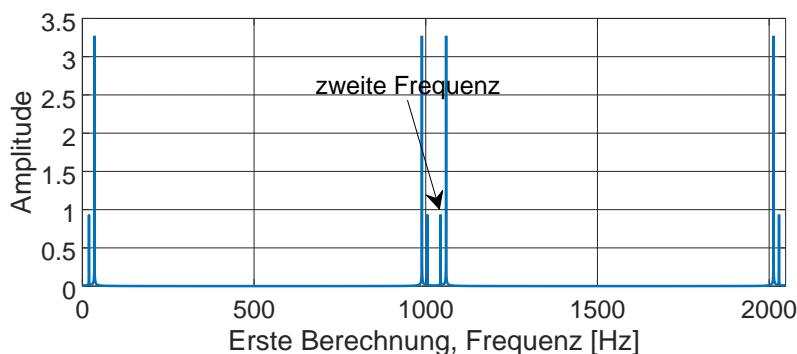
$$\begin{aligned} f_2 - M_1 1024 &= \frac{77}{4} \\ f_2 - M_2 1000 &= \frac{177}{4 \cdot 1.024} \end{aligned}$$

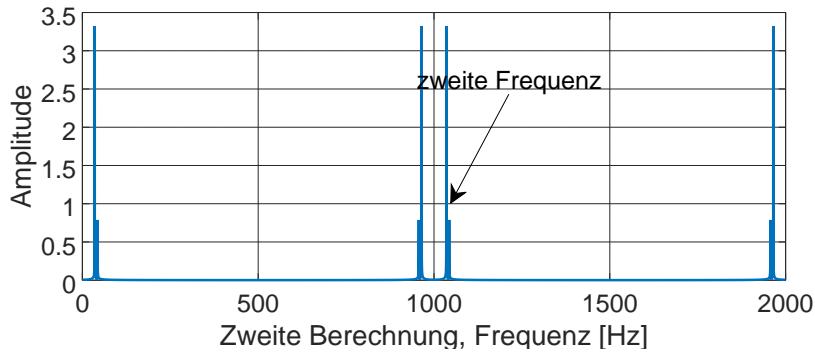
aufzulösen nach $f_2 \in \mathbb{R}_+$ und $M_i \in \mathbb{N}$. Da man aber weiß, dass die Frequenz kleiner ist als die doppelte Abtastfrequenz, so muss $M_1 = M_2 = 1$ sein.

Zu Ihrer Information: das effektiv verwendete Signal für die Simulation ist

$$f(t) = 7 \sin(35.2 \cdot 2\pi t) + 2 \sin(1043.3 \cdot 2\pi t)$$

Die untenstehenden Graphiken zeigen die beiden berechneten Spektren mit Frequenzen bis zur doppelten Abtastfrequenz. Die markierte zweite Frequenz bleibt an der selben Stelle, bei 1043.3 Hz .





Lösung zu Aufgabe 1–56 : Ursache der Probleme:

- Seine Abtastfrequenz ist 200 kHz und somit nicht deutlich mehr als das doppelte der zu untersuchenden Frequenzen, Stichwort Nyquist. Die Abtastfrequenz sollte mindestens 300 kHz sein.
- Seine Grundfrequenz ist 100 Hz. Somit wird sein Signal als Summe von Signalen mit ganzzahligen Vielfachen dieser Frequenz geschrieben. Er wird die beiden Beiträge mit 100 kHz und 100.1 kHz nicht deutlich unterscheiden können. Bei einer Messdauer von $T = 0.1$ Sekunden ist die Grundfrequenz 10 Hz und somit sind die beiden zu untersuchenden Frequenzen um 10 Punkte (d.h. 100 Hz) getrennt. Es ist eventuell möglich sie zu unterscheiden.
- Um FFT effizient einzusetzen ist es viel besser 2^N Punkte zu messen, wobei N geeignet zu wählen ist.
- Er verwendet `fft()` obwohl er nur die Amplituden zweier bekannter Frequenzen benötigt. Das Verfahren von Goertzel ist effizienter. Damit ist es nicht mehr notwendig 2^N Punkte zu wählen.

Eine mögliche Lösung:

- (a) Höhere Abtastfrequenz, längeres Messintervall und entweder 2^N Punkte oder Goertzel.
- (b) Messintervall der Länge $T = 0.1$ Sekunden und $2^{15} = 32768$ Punkte wählen. Goertzel verwenden.
- (c) Wegen $10000 \cdot 10 \text{ Hz} = 100 \text{ kHz}$ muss er c_n mit $n = 10'000$ bestimmen und wegen $10010 \cdot 10 \text{ Hz} = 100.1 \text{ kHz}$ auch c_n mit $n = 10'010$.

Lösung zu Aufgabe 1–57 : Falls $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$ ist die Gleichung gelöst durch

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x)$$

Somit ist eine Fourier–Sinus–Reihe der Funktion $f(x) = 1$ auf dem Intervall gesucht.

Die Funktion $f(x)$ muss zuerst **ungerade** erweitert werden auf das Intervall $-1 < x < 1$. Die Fourierrekoeffizienten $a_n = 0$ verschwinden. Die Werte von b_n sind gegeben durch

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 = \frac{-2}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(1\pi x)}{1} + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \frac{\sin(7\pi x)}{7} + \dots \right)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$u(x) = \frac{-4}{\pi} \left(\frac{\sin(1\pi x)}{1\pi^2} + \frac{\sin(3\pi x)}{3^3\pi^2} + \frac{\sin(5\pi x)}{5^3\pi^2} + \frac{\sin(7\pi x)}{7^3\pi^2} + \dots \right)$$

oder mit formal korrekter Notation

$$u(x) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^3}$$

Lösung zu Aufgabe 1–58 :

(a) Die als Tipp gegebene Funktion ist in die Differentialgleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ u_t(t, x) &= -\lambda_n e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = -\lambda_n u(t, x) \\ u_{xx}(t, x) &= \frac{-n^2\pi^2}{L^2} e^{-\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{-n^2\pi^2}{L^2} u(t, x) \\ \lambda_n &= k^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{Differentialgleichung} \\ u_n(t, x) &= \exp\left(-\frac{k^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

(b) Eine Fourier–Sinus–Reihe der Funktion 1 auf dem Intervall $[0, L]$ verwenden.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L 1 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \frac{-2}{L} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \Big|_0^L \\ &= \frac{-2}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Somit ist $b_n = 0$ falls n eine gerade Zahl ist und $b_n = \frac{4}{n\pi}$ für ungerade n und es gilt ($n = 2j + 1$)

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L} x\right)}{2j+1} \quad \text{für } 0 < x < L$$

Nun ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung gegeben durch die Reihe

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_{2j+1}(t, x)}{2j+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L} x\right)}{2j+1} \exp\left(-\frac{k^2(2j+1)^2\pi^2}{L^2} t\right)$$

Lösung zu Aufgabe 1–59 :

(a) Ansatz

$$u(t, x) = T(t) \cdot \sin n\pi x$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \\ \dot{T}(t) \cdot \sin n\pi x &= -(n\pi)^2 T(t) \cdot \sin n\pi x \\ \dot{T}(t) &= -(n\pi)^2 T(t) \\ T(t) &= T(0) e^{-(n\pi)^2 t} \\ u(0, x) &= \sin n\pi x \quad \text{deshalb } T(0) = 1 \\ u(t, x) &= e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \end{aligned}$$

Durch Einsetzen kann diese Lösung kontrolliert werden.

- (b) Die gegebene Fourierreihe ist auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ konstruiert, wir benötigen Sie aber auf dem Intervall $[-1, 1]$. Durch eine Umskalierung kann das gewünschte Resultat erzeugt werden.

$$\begin{aligned} x &\sim \frac{2 \sin(x)}{1} - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \frac{2 \sin(4x)}{4} + \frac{2 \sin(5x)}{5} - \dots \\ &\quad \text{Ersetze } x \text{ durch } \pi x. \text{ Falls } -\pi < \pi x < \pi \text{ dann ist } -1 < x < 1. \\ \pi x &\sim \frac{2 \sin(\pi x)}{1} - \frac{2 \sin(2\pi x)}{2} + \frac{2 \sin(3\pi x)}{3} - \frac{2 \sin(4\pi x)}{4} + \frac{2 \sin(5\pi x)}{5} - \dots \\ x &\sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{2 \sin(\pi x)}{1} - \frac{2 \sin(2\pi x)}{2} + \frac{2 \sin(3\pi x)}{3} - \frac{2 \sin(4\pi x)}{4} + \frac{2 \sin(5\pi x)}{5} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(n\pi x)}{n} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Superposition kann nun aus der vorangehenden Teilaufgabe die Lösungsformel angegeben werden.

$$u(t, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(n\pi x)}{n} e^{-(n\pi)^2 t}$$

Lösung zu Aufgabe 1–60 :

- (a) Die Funktion $f(t) = \frac{t}{\pi}$ auf $-\pi < t < \pi$ ist ungerade und somit sind alle $a_n = 0$. Die b_n sind zu bestimmen.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cos(nt)}{n} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{2\pi \cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1} 2}{\pi n} \end{aligned}$$

und somit

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(1t)}{1} - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + \frac{\sin(5t)}{5} - \dots \right)$$

- (b) Der Graph von $\frac{2}{\pi} \sin(x) \approx 0.636 \sin(t)$. Nullstellen und Amplitude können leicht korrekt gezeichnet werden. Mit der Graphik kann auch das Resultat der vorangehenden Rechnung überprüft werden

- (c) Hier ist es einfacher, mit der komplexen Reihe zu rechnen. Da die reellen Koeffizienten bereits bekannt sind ist keine Integralberechnung notwendig.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = i \frac{(-1)^n}{\pi n} \\ f(t) &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} i \frac{(-1)^n}{\pi n} e^{int} \\ y(t) &\sim \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{i}{49 - n^2 + i 2n} \frac{(-1)^n}{\pi n} e^{int} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1–61 :

- (a)

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{int} \\ y(t) &= K_n e^{int} \\ \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 49y(t) &= K_n e^{int} (-n^2 + i 2n + 49) = e^{int} \\ K_n &= \frac{1}{49 - n^2 + i 2n} \end{aligned}$$

(b) Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{\pi} t$ auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} t e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{t e^{-int}}{-in} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} 1 e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} - \frac{(-\pi) e^{+in\pi}}{-in} + 0 \right) \\ &= \frac{i}{2\pi n} ((-1)^n - (-1)(-1)^n) = \frac{i(-1)^n}{\pi n} \end{aligned}$$

Der Wert von $c_0 = 0$ ist separat zu berechnen.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} t \sim \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{i(-1)^n}{\pi n} e^{int}$$

Verwende die Linearität, Superposition und die Lösung der ersten Teilaufgabe um die Lösung anzuschreiben.

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} K_n c_n e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{49 - n^2 + i2n} \frac{i(-1)^n}{\pi n} e^{int}$$

(c) Der Term $A \cos(7t + \phi)$ ist enthalten in

$$K_{-7} c_{-7} e^{-i7t} + K_{+7} c_7 e^{+i7t} \quad \text{oder} \quad 2 \operatorname{Re}(K_7 c_7 e^{i7t})$$

Wegen

$$y(t) = K_0 c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} K_n c_n e^{int}$$

ist die Amplitude gegeben durch

$$A = 2 |K_7 c_7| = 2 \left| \frac{1}{49 - 7^2 + i2 \cdot 7} \frac{i(-1)^7}{\pi 7} \right| = 2 \frac{1}{14} \frac{1}{\pi 7} = \frac{1}{49\pi} \approx 6.5 \cdot 10^{-3}$$

Die Rechnung mit der komplexen Fourierreihe ist sicher die einfachste Lösung der obigen Aufgabe. Falls auf einer reellen Rechnung insistiert wird, so können aus c_n die Koeffizienten a_n und b_n bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} t &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{\pi n} e^{int} \\ a_n &= 2 \operatorname{Re} c_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = -2 \operatorname{Im} c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \\ \frac{1}{\pi} t &\sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \end{aligned}$$

1.13 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- wissen was Korrelation von zwei Funktionen bedeutet und auch berechnen können.
- die Idee der Fourierreihen (Approximation durch trigonometrische Funktionen) erklären können.
- die grundlegenden Eigenschaften der Fourierreihen kennen.
- Fourier-, Fourier–Cosinus und Fourier–Sinus–Reihen von einfachen Funktionen bestimmen können.
- komplexe Fourierreihen bestimmen können.
- mit Fourier–Reihen rechnen können.
- mit den Begriffen Amplitudenspektrum, FFT und Faltung vertraut sein.
- Anwendungen der Fourier–Reihen und Faltung als solche erkennen und die Rechnungen (mit Hilfe von geeigneten Werkzeugen) ausführen können.

Chapter 2

Fouriertransformation

Im vorangehenden Kapitel haben wir Fourier-Reihen von **periodischen** Funktionen untersucht. Die Resultat lassen sich nicht übertragen auf nichtperiodische Funktionen. In realen Anwendungen werden aber die meisten Funktion nicht periodisch sein. Deshalb ist es erstrebenswert möglichst viele Ideen und Resultate zu übertragen.

2.1 Von Fourier-Reihen zu Fourier-Integralen

In diesem Abschnitt wird ein heuristischer Übergang von Fourier-Reihen zu Fourierintegralen vorgestellt. Es soll als Motivation für die Transformationsformeln dienen.

Für eine $2T$ -periodische Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[-T, T]$ sind die komplexen Fourier-Koeffizienten gegeben durch

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau$$

und die ursprüngliche Funktion kann mit $\omega = \frac{\pi}{T}$ dargestellt werden durch die Reihe

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Nun untersuchen wir das Verhalten der obigen Darstellungen für $T \rightarrow \infty$. Dazu sei die Funktion f ursprünglich nicht periodisch, aber wir schränken sie auf das Intervall $[-T, T]$ ein und erweitern dann periodisch. Das Vorgehen wird durch Abbildung 2.1 illustriert.

Wir setzen

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2T}, \quad \sigma = n \Delta\sigma = \frac{n}{2T} \quad \text{und} \quad n\omega = 2\pi\sigma = 2\pi n \Delta\sigma$$

Nun können die beiden obigen Formeln auch kompakter geschrieben werden als

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^T f(\tau) e^{-i2\pi\sigma\tau} d\tau \right) e^{i2\pi n \Delta\sigma t} \Delta\sigma$$

Die Reihe berechnet eine numerische Approximation eines uneigentlichen Integrales mit Hilfe der Stützpunkte $n\Delta\sigma$. Für $T \rightarrow \infty$ rücken diese immer näher zusammen und wir erhalten für „schöne“ Funktionen f

$$f(t) \sim \int_{\sigma=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i2\pi\sigma\tau} d\tau \right) e^{i2\pi\sigma t} d\sigma$$

Diese heuristischen Überlegungen führen auf die Definition der Fouriertransformation. Es sollte keine Überraschung sein, dass sich viele Eigenschaften der Fourier-Reihen auf die Fourier-Transformation übertragen.

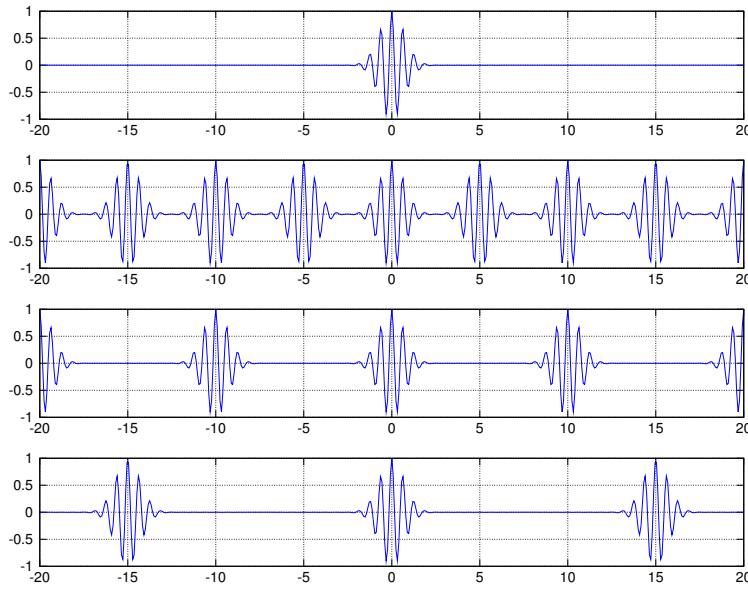


Figure 2.1: Eine lokalisierte Funktion und ihre periodischen Fortsetzungen mit Perioden 5, 10 und 15

2.2 Definition und Eigenschaften der Fouriertransformation

2.2.1 Definition

2-1 Definition : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst die neue Funktion

$$\mathcal{F}[f](\nu) = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2 \pi \nu t} dt$$

die **Fouriertransformation** von f . Viele Funktion können dargestellt werden mit Hilfe der Fouriertransformation durch

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu$$

Das ist die **Fourierrücktransformation**. Die beiden Transformationen unterscheiden sich lediglich durch das Vorzeichen in der komplexen Exponentialfunktion.

Die „beliebige“ Funktion $f(t)$ kann als uneigentliches Integral von periodischen Funktion $e^{i 2 \pi \nu t}$ mit Frequenz ν und Amplitude $F(\nu)$ geschrieben werden.

Es gibt auch andere Definitionen der Fouriertransformation. Insbesondere kann der Faktor 2π , der hier im Exponenten auftaucht auch an anderen Stellen erscheinen. Das Minus-Zeichen in der Exponentialfunktion kann auch von der Transformation auf die inverse Transformation verschoben werden.

Man spricht auch von einer **Fourier-Korrespondenz** und schreibt kurz

$$f(t) \quad \circ \bullet \quad F(\nu).$$

Die **inverse Fourier-Transformation** einer Funktion $F(\nu)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu.$$

2–2 Beispiel : Wir untersuchen die Rechtecksfunktion der Breite $2b$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases}.$$

Die Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2 \pi \nu t} dt \\ &= \int_{-b}^{b} e^{-i 2 \pi \nu t} dt \\ &= \frac{1}{-i 2 \pi \nu} e^{-i 2 \pi \nu t} \Big|_{-b}^b = \frac{i}{2 \pi \nu} (\cos(2 \pi \nu t) - i \sin(2 \pi \nu t)) \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b). \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation $F(\nu)$ ist also eine Funktion vom Typ $\frac{\sin a \nu}{\nu}$, wobei die beiden ersten Nullstellen bei $\nu = \pm \frac{1}{2b}$ liegen. Das Produkt der Breite $2b$ des Fensters und der „Breite“ der Transformation sind also konstant: je breiter das Fenster $f(t)$, desto schmäler die Transformation $F(\nu)$.

Die Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion kann durch die folgenden Zeilen von Octave–Code verifiziert werden. Die Fouriertransformierte $F(\nu)$ und das rekonstruierte Signal (numerische Integration) sehen Sie in Abbildung 2.2. Deutlich zu erkennen ist auch hier das Phänomen von Gibbs. Die Rechnungen wurden für den Fall $b = 2$ ausgeführt.

FourierRect.m

```

function y = fsinc(nu)
    b = 2;
    y = sin(b*2*pi*nu) ./ (nu*pi);
endfunction

nu = linspace(-1,pi,500);
figure(1)
plot(nu,fsinc(nu)) % plot the Fourier transform
xlabel('frequency \nu')
axis([-1 pi, -1 4.5])

t = linspace(-4,6.0034,200); ft = t;

for ii = 1:length(t) % compute the inverse of the Fourier transform
    % ft(ii) = real(quad(@(nu)exp(i*2*pi*nu*t(ii))*fsinc(nu),-5,5,1e-5,0));
    ft(ii) = quad(@(nu)cos(2*pi*nu*t(ii)).*fsinc(nu),-5,5,1e-5,0);
endfor

figure(2)
plot(t,ft) % plot of the reconstructed function
xlabel('time t')
axis([-4,6,-0.2,1.2])

```

◇

2.2.2 Konvergenz

Bei Fourierreihen stellte sich das Problem der Konvergenz, da beim Auswerten der Reihe mehr und mehr Terme berücksichtigt werden. Die selbe Frage stellt sich auch bei Fouriertransformationen, da das un-

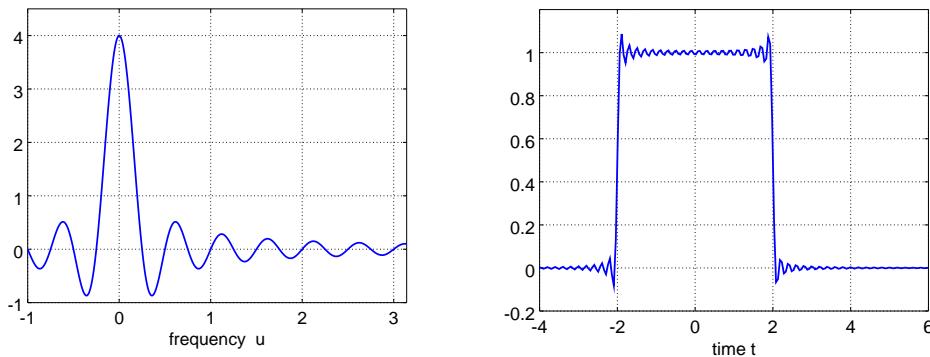


Figure 2.2: Fouriertransformation eines Rechtecksignals und Rekonstruktion des Signals

eigentliches Integral als Grenzwert definiert ist. Existiert das uneigentliche Integral, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\nu = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{M} \dots d\nu .$$

2–3 Satz : Sind eine Funktion $f(t)$ und ihre Ableitung $f'(t)$ stückweise stetig auf jedem beschränkten Intervall und existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

so existiert auch das uneigentliche Integral

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu$$

für alle Werte von $t \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion $f(t)$ stetig, so gilt das Gleichheitszeichen. An den Sprungstellen der Funktion $f(t)$ konvergiert das Fourierintegral gegen den Mittelwert der rechts- und linksseitigen Grenzwertes. Das Phänomen von **Gibbs** tritt auch hier auf.

2–4 Beispiel : Für das obige Beispiel eines Rechtecksignals haben wir die Transformation

$$F(\nu) = \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b)$$

erhalten. Nun versuchen wir die ursprüngliche Rechtecksfunktion zu rekonstruieren.

Als Hilfsresultate verwenden wir

- $\frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b) \sin(2 \pi \nu t)$ ist ungerade bezüglich des Argumentes ν und die scheinbare Polstelle bei $\nu = 0$ ist problemlos integrierbar, deshalb ergibt das Integral dieser Funktion über die reelle Achse den Wert 0.
- In guten Formelsammlungen finden Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a \quad \text{falls } a \neq 0$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b) \cos(2 \pi \nu t) d\nu \\
 &\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b) \sin(2 \pi \nu t) d\nu \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi \nu} \sin(2 \pi \nu b) \cos(2 \pi \nu t) d\nu + 0 \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu(b-t))}{\pi \nu} d\nu + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu(b+t))}{\pi \nu} d\nu \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu(t+b))}{\pi \nu} d\nu - \int_0^{\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu(t-b))}{\pi \nu} d\nu \\
 &= \frac{\operatorname{sign}(t+b)}{2} - \frac{\operatorname{sign}(t-b)}{2} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } |t| > b \\ \frac{1}{2} & \text{falls } |t| = b \\ 1 & \text{falls } |t| < b \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Somit wurde die ursprüngliche Funktion $f(t)$ rekonstruiert. \diamond

2–5 Satz : Parseval'sche Gleichung

Für $F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu.$$

Man kann zeigen, dass die Fouriertransformation für Funktionen in L_2 definiert ist, d.h. falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Die transformierte Funktion F ist auch in L_2 , d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu < \infty$.

2–6 Beispiel : Für das bereits untersuchte Beispiel eines Rechtecksignals gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-b}^b 1 dt = 2b$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2 \pi \nu b)}{\pi^2 \nu^2} d\nu = 2b.$$

Den Wert des uneigentlichen Integrales kann man einer Integraltafel entnehmen. \diamond

2.2.3 Cosinus und Sinus–Transformation

Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ nur für positive Argumente definiert, so kann sie auf die ganze reelle Achse fortgesetzt werden, durch eine gerade oder ungerade Erweiterung.

$$\begin{aligned}
 f_g(t) &= \begin{cases} f(t) & \text{für } t > 0 \\ f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases} \\
 f_u(t) &= \begin{cases} f(t) & \text{für } t > 0 \\ -f(-t) & \text{für } t < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Von diesen Funktionen kann nun die Fouriertransformation bestimmt werden. Das führt auf Cosinus- und Sinus-Transformation. Es ist zu beachten, dass die Definitionen noch um Faktoren modifiziert werden, damit die entstehenden Formeln etwas einfacher sind. Für Anwendungen ist die Fourier-Transformation klar wichtiger als die beiden trigonometrischen Transformationen. Deshalb werden wir uns fast ausschliesslich mit der Fourier-Transformation beschäftigen. Es ist aber offensichtlich, dass sich viele Resultate und Eigenschaften problemlos übertragen lassen.

Cosinus-Transformation

Die Fourier-Transformation der geraden Erweiterung heisst **Cosinus-Transformation** und es ergibt sich die folgende Integralformel.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_g](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-t) e^{-i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= - \int_{\infty}^0 f(s) e^{i2\pi\nu s} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) (e^{i2\pi\nu t} + e^{-i2\pi\nu t}) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt.\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass $F(\nu)$ eine gerade Funktion ergibt. Die ursprüngliche Funktion kann wieder rekonstruiert werden mit Hilfe der Rücktransformation

$$\begin{aligned}f(t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^0 F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu + \int_0^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= - \int_{\infty}^0 F(-s) e^{-i2\pi s t} ds + \int_0^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_0^{\infty} F(\nu) (e^{i2\pi\nu t} + e^{-i2\pi\nu t}) d\nu \\ &= 2 \int_0^{\infty} F(\nu) \cos(2\pi\nu t) d\nu.\end{aligned}$$

2-7 Definition : Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so berechnet sich die **Cosinus-Transformation** mit Hilfe der Formel

$$\mathcal{F}_C[f](\nu) = F_C(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt$$

Daraus kann die Funktion wieder rekonstruiert werden durch

$$f(t) \sim 2 \int_0^{\infty} F_C(\nu) \cos(2\pi\nu t) d\nu$$

Für eine gerade Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}_C[f]$.

Sinus–Transformation

Die Fourier–Transformation der ungeraden Erweiterung heisst **Sinus–Transformation** und es ergibt sich die folgende Integralformel.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_u](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 -f(-t) e^{-i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{\infty}^0 f(-s) e^{i2\pi\nu s} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(t) (e^{-i2\pi\nu t} - e^{i2\pi\nu t}) dt \\
 &= -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt
 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass $F(\nu)$ eine ungerade Funktion ergibt. Die ursprüngliche Funktion kann wieder rekonstruiert werden mit Hilfe der Rücktransformation

$$\begin{aligned}
 f(t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\
 &= \int_{-\infty}^0 F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu + \int_0^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\
 &= -\int_{\infty}^0 F(-s) e^{-i2\pi s t} ds + \int_0^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\
 &= \int_0^{\infty} F(\nu) (e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t}) d\nu \\
 &= 2i \int_0^{\infty} F(\nu) \sin(2\pi\nu t) d\nu.
 \end{aligned}$$

Da der Faktor i sowohl in der Transformation, als auch in der Rücktransformation auftaucht, kann er durch eine geeignete Definition eliminiert werden.

2–8 Definition : Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so berechnet sich die **Sinus–Transformation** mit Hilfe der Formel

$$\mathcal{F}_S[f](\nu) = F_S(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt.$$

Daraus kann die Funktion wieder rekonstruiert werden durch

$$f(t) \sim 2 \int_0^{\infty} F_S(\nu) \sin(2\pi\nu t) d\nu.$$

Für eine ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $i\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}_S[f]$, oder auch $\mathcal{F}[f] = -i\mathcal{F}_S[f]$.

Mit Hilfe der Identität

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} = f_g(t) + f_u(t)$$

kann eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden. Die Funktion f ist genau dann gerade, wenn $f_u = 0$, d.h. der ungerade Anteil verschwindet. Die Funktion f ist genau dann ungerade, wenn $f_g = 0$, d.h. der gerade Anteil verschwindet. Es gilt

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f_g] + \mathcal{F}[f_u] = \mathcal{F}_C[f_g] - i\mathcal{F}_S[f_u].$$

Für eine gerade Funktion f gilt somit

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f_g] + \mathcal{F}[0] = \mathcal{F}_C[f]$$

und für eine ungerade Funktion

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[0] + \mathcal{F}[f_u] = -i \mathcal{F}_S[f].$$

Es gibt also viele Verbindungen zwischen Fourier–Transformation und Cosinus– und Sinus–Transformation. Deshalb werden wir uns nur mit der Fourier–Transformation beschäftigen.

2.2.4 Elementare Eigenschaften

Aus der Definition der Fouriertransformation als Integral kann man sofort ablesen, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f+g] &= \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}[\lambda f] &= \lambda \mathcal{F}[f]\end{aligned}$$

Somit ist das Bestimmen der Fouriertransformation eine **lineare Operation**.

Die Tabelle 2.1 zeigt einige weitere elementare Eigenschaften der Fouriertransformation. Die Verifikation mit Hilfe von Integralen ist einfach. Drei Beispiele sind hier vorgerechnet.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(ct)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{Substitution } s = ct \\ &= \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi\nu s/c} ds = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\nu}{c}\right) \\ \mathcal{F}[f(t-a)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi\nu(s+a)} ds \\ &= e^{-i2\pi\nu a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi\nu s} ds = e^{-i2\pi\nu a} F(\nu) \\ \mathcal{F}[f'(t)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{partielle Integration} \\ &= f(t) e^{-i2\pi\nu t} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i2\pi\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= 0 + i2\pi\nu \mathcal{F}[f](\nu)\end{aligned}$$

2–9 Beispiel : Ist f_g eine gerade, reelle Funktion, so gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_g] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) (\cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) \cos(2\pi\nu t) dt + 0 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ist f_u eine ungerade, reelle Funktion, so gilt analog

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_u] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) (\cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)) dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) \sin(2\pi\nu t) dt + 0 \in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

	$f(t)$	$\circ \bullet$	$F(\nu)$
Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\circ \bullet$	$\alpha F(\nu) + \beta G(\nu)$
Streckung, Ähnlichkeit	$f(ct)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{ c } F\left(\frac{\nu}{c}\right)$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t-a)$	$\circ \bullet$	$e^{-i2\pi\nu a} F(\nu)$
Verschiebung im Frequenzbereich	$e^{i2\pi\nu t} f(t)$	$\circ \bullet$	$F(\nu - \Omega)$
Symmetrie, gerade Funktionen	$f(-t) = f(t)$	\iff	$F(-\nu) = F(\nu)$
Symmetrie, ungerade Funktionen	$f(-t) = -f(t)$	\iff	$F(-\nu) = -F(\nu)$
Konjugation	$\overline{f(t)}$	$\circ \bullet$	$\overline{F(-\nu)}$
Differentiation im Zeitbereich	$f'(t)$	$\circ \bullet$	$i 2\pi\nu F(\nu)$
Differentiation im Frequenzbereich	$-i 2\pi\nu f(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{d}{d\nu} F(\nu)$

Table 2.1: Eigenschaften der Fouriertransformation

Jede reelle Funktion f kann als Summe der Geraden und ungeraden Anteils geschrieben werden

$$\begin{aligned} f_g(t) &= \frac{1}{2} (f(t) + f(-t)) \\ f_u(t) &= \frac{1}{2} (f(t) - f(-t)) \\ f(t) &= f_g(t) + f_u(t) \end{aligned}$$

Somit gilt für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f_g + f_u] = \mathcal{F}[f_g] + \mathcal{F}[f_u] = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F.$$

Mit Ideen und Rechnungen dieser Art können mehrere reelle Funktionen parallel Fourier transformiert werden. Details wurden im Kapitel über Fourier-Reihen genauer erläutert. \diamond

2.2.5 Faltung

Für zwei gegebene Funktion $f(t)$ und $g(t)$ setzen wir

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

und erhalten

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \mathcal{F}[f * g](\nu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt \\ &\quad \text{Substitution } u = t - \tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu(u+\tau)} f(u) g(\tau) d\tau du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu u} f(u) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu \tau} g(\tau) d\tau \\ &= F(\nu) \cdot G(\nu). \end{aligned}$$

Für die obigen Rechnungen sind die Rechenregeln und Resultate über uneigentliche Integrale zu verwenden. Somit haben wir auch hier den **Faltungssatz** bewiesen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem Faltungssatz für periodische Funktionen und Vektoren, siehe Seite 59.

2–10 Satz : Faltungssatz

Sind f und g stückweise stetige, integrierbare Funktionen und existieren alle Fouriertransfrmatio-nen, so gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\nu) &= \mathcal{F}[f](\nu) \cdot \mathcal{F}[g](\nu) \\ (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\nu) &= \mathcal{F}[f \cdot g](\nu)\end{aligned}$$

oder mit der kompakteren Notation $F = \mathcal{F}[f]$ und $G = \mathcal{F}[g]$ auch

$$\mathcal{F}[f * g] = F \cdot G \quad \text{und} \quad F * G = \mathcal{F}[f \cdot g]$$

d.h. die Fouriertransformation (oder Rücktransformation) macht aus einer punktweisen Multiplikation eine Faltung.

Verwendet man in der Definition der Fouriertransformation andere Faktoren oder Exponenten, so können beim Faltungssatz Vorfaktoren auftauchen.

2–11 Lemma : Für zwei Funktionen f und g gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \overline{G(\mu)} d\mu$$

Beweis : Aufgrund des Faltungssatzes gilt (untersuche $\nu = 0$)

$$\begin{aligned}(F * G)(0) &= \mathcal{F}[f \cdot g](0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) G(0 - \mu) d\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{i 2 \pi 0 t} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) G(-\mu) d\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt.\end{aligned}$$

Verwenden wir in der obigen Gleichung die Eigenschaft $\overline{g(t)} \circ \bullet \overline{G(-\nu)}$, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) \overline{G(\mu)} d\mu.$$

□

Mit dem obigen Lemma kann man nun zeigen in welchem Sinne das Fourierintegral die best mögliche Approximation einer Funktion ist. Sei dazu f eine Funktion deren Fouriertransformation existiert. Nun ver suchen wir f zu approximieren durch ein Integral von komplexen Exponentialfunktionen (d.h. trigonometrischen Funktionen) deren Frequenz kleiner als eine gegebene Schranke Ω ist. Zugelassen zur Konkurrenz sind also Funktionen der Form

$$g(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\nu) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu.$$

Somit ist bereits klar, dass $g(t) \circ \bullet G(\nu)$. Die Funktion $G(\nu)$ ist nun so zu wählen, dass der Ausdruck

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt$$

minimal wird. Mit Hilfe des obigen Lemmas sieht man, dass

$$\begin{aligned}
 \|f - g\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - g(t)) \overline{(f(t) - g(t))} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (F(\nu) - G(\nu)) \overline{(F(\nu) - G(\nu))} d\nu \\
 &= \int_{-\infty}^{-\Omega} (F(\nu) - G(\nu)) \overline{(F(\nu) - G(\nu))} d\nu \\
 &\quad + \int_{\Omega}^{\infty} (F(\nu) - G(\nu)) \overline{(F(\nu) - G(\nu))} d\nu \\
 &\quad \int_{-\Omega}^{\Omega} (F(\nu) - G(\nu)) \overline{(F(\nu) - G(\nu))} d\nu \\
 &= \int_{-\infty}^{-\Omega} F(\nu) \overline{F(\nu)} d\nu + \int_{\Omega}^{\infty} F(\nu) \overline{F(\nu)} d\nu \\
 &\quad + \int_{-\Omega}^{\Omega} |F(\nu) - G(\nu)|^2 d\nu.
 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Integrale sind unabhängig von G . Das dritte Integral ist genau dann minimal, wenn es Null ist, d.h. $F(\nu) = G(\nu)$ für $-\Omega \leq \nu \leq \Omega$. Somit ist die Fouriertransformation die optimale Lösung.

2–12 Satz : Die Fouriertransformation liefert die best mögliche Approximation im oben spezifizierten L_2 -Sinn.

2.3 Delta–Funktionen und Fourierreihen

Für eine periodische Funktion $f(t)$ kann eine Fourierreihe angegeben werden, aber periodische Funktionen erfüllen die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ sicher nicht, da sie nicht gegen Null konvergierten für $|t| \rightarrow \infty$. Die Theorie der Fouriertransformation kann aber erweitert werden mit Hilfe von **Delta–Funktionen**. Im mathematischen Sinne sind Delta–Funktionen keine Funktionen, sondern Distributionen. Eine präzise Einführung in diese Theorie sprengt den Rahmen dieser Notizen bei weitem, deshalb werden einige Eigenschaften und Rechenregeln für Delta–Funktionen vorgestellt.

2–13 Definition : Die Deltafunktion $\delta(t - t_0)$ an der Stelle $t = t_0$ ist definiert durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

Diese Identität muss für beliebige, stetige Funktionen f gelten.

Aufgrund der obigen Definition kann man leicht einsehen, dass

$$e^{i 2 \pi \nu_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0) e^{i 2 \pi \nu t} d\nu = \mathcal{F}^{-1}[\delta(\nu - \nu_0)].$$

Aufgrund dieser Rechnung ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[e^{i 2 \pi \nu_0 t}](\nu) &= \delta(\nu - \nu_0) \\
 e^{i 2 \pi \nu_0 t} &\circledcirc \bullet \delta(\nu - \nu_0).
 \end{aligned}$$

Die Deltafunktion kann auch durch die obige Fouriertransformation charakterisiert werden.

Eine „beliebige“ T -periodische Funktion kann durch eine Fourierreihe dargestellt werden durch

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau.$$

Versuchen wir nun die Fouriertransformation dieser Funktion zu bestimmen mit Hilfe der Linearität und ignorieren wir Konvergenzprobleme, so erhalten wir

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\nu - \frac{n}{T})$$

In diesem unpräzisen Sinne kann man die Folge der Koeffizienten c_n der Fourierreihe mit der Reihe der Deltafunktion (die Fouriertransformation) identifizieren. Bei einer genaueren mathematischen Analyse dieser Problemstellung wird man auf einige interessante Fragestellungen stossen.

2–14 Beispiel : Fensterfunktion

Die periodische Funktion $f(t) = e^{i2\pi\nu_0 t}$ hat als Spektrum die Delta-Funktion $\delta(\nu - \nu_0)$. Nun untersuchen wir das Spektrum der selben Funktion, aber eingeschränkt auf das Intervall $-b \leq t \leq b$, d.h. wir multiplizieren die Funktion mit der Fensterfunktion $w(t)$.

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases} \\ g(t) = w(t) \cdot f(t) &= \begin{cases} e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases} \end{aligned}$$

Mit dem Faltungssatz erhalten wir nun

$$G(\nu) = \mathcal{F}[w(t) \cdot f(t)](\nu) = W(\nu) * F(\nu)$$

und somit benötigen wir die Fouriertransformation der Fensterfunktion $w(t)$.

$$\begin{aligned} W(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-b}^b e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \frac{1}{-i2\pi\nu} e^{-i2\pi\nu t} \Big|_{t=-b}^b = \frac{1}{-i2\pi\nu} (e^{-i2\pi\nu b} - e^{+i2\pi\nu b}) \\ &= \frac{-i2\sin(2\pi\nu b)}{-i2\pi\nu} = \frac{\sin(2\pi\nu b)}{\pi\nu} = 2b \frac{\sin(2\pi\nu b)}{2\pi\nu b} \end{aligned}$$

Durch einen Vergleich mit der Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ sieht man, dass diese Funktion ein Hauptmaximum der Höhe $2b$ hat mit einer Breite von $\frac{1}{b}$. Das Spektrum $\delta(\nu - \nu_0)$ der ursprünglichen Funktion ist nun mit dieser Funktion zu falten, d.h.

$$G(\nu) = (W * F)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2b \frac{\sin(2\pi(\nu-s)b)}{2\pi(\nu-s)b} \delta(s - \nu_0) ds = 2b \frac{\sin(2\pi(\nu - \nu_0)b)}{2\pi(\nu - \nu_0)b}.$$

Somit erhalten wir die Fouriertransformation $W(\nu)$, verschoben um ν_0 , d.h. $W(\nu - \nu_0)$. Das Beispiel sollte mit den Überlegungen in Abschnitt 1.8.4 (Seite 60) verglichen werden. Auch Aufgabe 1–48 widmet sich dem selben Themenkreis. \diamond

2.4 Applications of the Fourier Transformation

2.4.1 1D Dynamic Heat Equation on a Long Beam

In section 1.11.3 we examined a beam of length L with a given initial temperature $u(0, x) = f(x)$. Now we want to examine the temperature as a function of time t on a beam of infinite length. The partial differential equation to be solved is

$$\begin{aligned}\dot{u}(t, x) &= \alpha \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad t > 0 \\ u(0, x) &= f(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Since the beam has infinite length we have no boundary conditions. We examine even initial conditions $f(x)$ only.

1. case: $f(x) = \cos(2\pi\nu x)$

Since

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \cos(2\pi\nu x) &= -(2\pi\nu)^2 \cos(2\pi\nu x) \\ \frac{d}{dt} \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) &= -\alpha(2\pi\nu)^2 \exp((-\alpha(2\pi\nu)^2 t))\end{aligned}$$

find the solution

$$u_\nu(t, x) = \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) \cos(2\pi\nu x).$$

2. case: $f(x) = \int_{-M}^M b(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu$

Using the previous result and superposition we find the solution

$$u(t, x) = \int_{-M}^M b(\nu) \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

Thus the solution consist of an integral of exponentially decaying components.

3. case: $f(x) = 1$ on even interval

Let f be the characteristic function on the interval

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq b \\ 0 & \text{for } |x| > b \end{cases}.$$

The Fouriertransform is given by

$$F(\nu) = \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b)$$

and the inversion formula implies

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b) (\cos(2\pi\nu x) + i \sin(2\pi\nu x)) d\nu \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b) \cos(2\pi\nu x) d\nu.\end{aligned}$$

Combining the above results we obtain a solution formula

$$u(t, x) = \int_0^\Omega \frac{2}{\pi \nu} \sin(2\pi\nu b) \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

For $t > 0$ the function $\exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t)/\nu$ will converge rapidly to 0 as $\nu \rightarrow \infty$ and thus we may replace¹ the exact improper integral with an approximate, definite integral

$$u(t, x) \approx \int_0^\Omega \frac{2}{\pi \nu} \sin(2\pi\nu b) \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) \cos(2\pi\nu x) d\nu.$$

As an example we choose $\alpha = b = 1$ and $\Omega = 10$. Below find some code in *Octave* and the resulting Figure 2.3 showing the temperature profile at different times.

HeatBeam.m

```

1; % assure script file
function y = fff(nu,t,x)
    y = 2./ (pi*nu).*sin(2*pi*nu).*exp(-(2*pi*nu).^2*t).*cos(2*pi*nu*x);
endfunction

Nx = 51;
Nt = 6;
xx = linspace(0,5,Nx);
tt = linspace(0,5,Nt);
u = zeros(Nx,Nt);

for kx = 1:Nx
    for kt = 1:Nt
        u(kx,kt) = quad(@(nu) fff(nu,tt(kt),xx(kx)), 0, 10);
    endfor
endfor

figure(1);
plot(xx,u)
title("Temperature at times t = 0, 1, 2, 3, 4 and 5");
xlabel("Position");
grid on

```

For $x = 0$ we obtain

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \int_0^\Omega \frac{2}{\pi \nu} \sin(2\pi\nu b) \exp(-\alpha(2\pi\nu)^2 t) d\nu \\ &\quad \text{substitution } z = 2\pi\sqrt{\alpha t}\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{2 \cdot 2\pi\sqrt{\alpha t}}{\pi z} \sin\left(\frac{2\pi b}{2\pi\sqrt{\alpha t}}z\right) \exp(-z^2) \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha t}} dz \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{z} \sin\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha t}}z\right) \exp(-z^2) dz. \end{aligned}$$

Since

$$\int_0^\infty \frac{\sin(kz)}{z} e^{-z^2} dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2}\right)$$

¹With *Mathematica* this integral can be computed exactly, leading to

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{b-x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b+x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right)$$

but to compute the values of the error function $\operatorname{erf}(x)$ we need numerical algorithms!

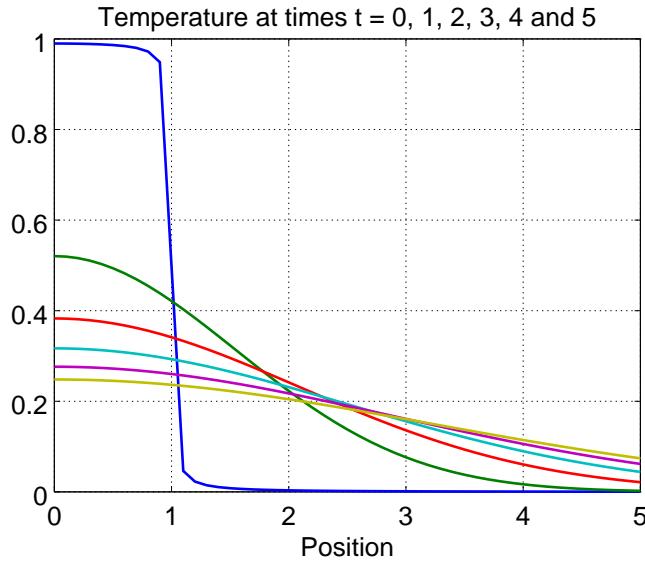


Figure 2.3: Temperature at different times

find

$$u(t, 0) = \operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{\alpha}t}\right).$$

If t is large then $\frac{k}{2} = \frac{b}{2\sqrt{\alpha}t}$ is small and we use the approximation $e^{-x^2} \approx 1$ and thus find

$$\operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{\alpha}t}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{\alpha}t}} e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b}{2\sqrt{\alpha}t} = \frac{b}{\sqrt{\pi\alpha}t}$$

and thus we conclude that the temperature at the midpoint $x = 0$ of the bar converges rather slowly to 0, i.e. like $1/\sqrt{t}$. Taking the logarithm find

$$\ln(u(t, 0)) \approx \ln \frac{b}{\sqrt{\pi\alpha}t} = \ln \frac{b}{\sqrt{\pi\alpha}} - \frac{1}{2} \ln(t)$$

and consequently we should find a straight line with slope $-\frac{1}{2}$ in a double logarithmic scale.

2.4.2 Heat Waves in Solids, Caused by Surface Temperature

We examine a solid with a planar surface at $x = 0$ and penetration depth $x > 0$. The surface is kept at a known temperature $f(t)$. The aim is to know the temperature within the solid. Examples of this type are the temperature profile in the earth surface, heated by annual or daily variations or thermal treatment of metal surfaces. The boundary value to be solved is

$$\begin{aligned} \dot{u}(t, x) &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad \text{for } x > 0 \quad \text{and } t \in \mathbb{R} \\ u(t, 0) &= f(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

We have to find bounded solutions.

Surface Temperature given by $\cos(\omega t)$

We examine complex solution of the form

$$u(t, x) = e^{i\omega t} e^{\lambda x}$$

for a $\lambda \in \mathbb{C}$ to be determined. We are aware that only the real part of the complex solution is physically relevant. Using the differential equation we find the condition

$$\begin{aligned} i\omega u(t, x) &= \alpha \lambda^2 u(t, x) \\ i\omega &= \alpha \lambda^2 \\ \lambda^2 &= i \frac{\omega}{\alpha} \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{i \frac{\omega}{\alpha}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}. \end{aligned}$$

The solution λ_1 has a positive real part and we find

$$u(t, x) = e^{i\omega t} e^{i\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} e^{\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} = e^{i(\omega t + \sqrt{\omega/(2\alpha)}x)} e^{\sqrt{\omega/(2\alpha)}x}.$$

This solution is not bounded as x increases and thus is not a physically relevant solution. The second value λ_2 has negative real part and we find

$$u(t, x) = e^{i\omega t} e^{-i\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} e^{-\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} = e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/(2\alpha)}x)} e^{-\sqrt{\omega/(2\alpha)}x}.$$

This leads to the real valued solution

$$u(t, x) = \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x) \exp(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x).$$

For this solution observe:

- At each depth x the temperature is a cos function with the same frequency as the surface temperature. The amplitude of the oscillations decays exponentially with exponent $\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$.
- There is a phase shift of $\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x$ at depth x . Examine the argument of the cos function. Since

$$\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}(\sqrt{2\alpha\omega}t - x)$$

we see that the local extrema are moving with a speed of $\sqrt{2\alpha\omega}$.

In [TikhSama63] we find numerical data for the yearly temperature variations at different depths in soil.

depth	m	0	1	2	3	4
amplitude	C°	19.5	11.5	6.8	4.2	2.6

Based on the analytical solution these points should be on an exponential curve and we can use linear regression to determine the exponent $k = -\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \approx -0.5$. At a depth of $x = 4$ we find an amplitude of $e^{-k4} \approx 0.13$ of the surface amplitude. Since $\frac{4k}{2\pi} \approx \frac{1}{3}$ there is a time lag of 4 months for the extremal temperatures.

To examine daily variations only the value of ω has to be adapted. Since $\sqrt{365} \approx 19$ we realize that the penetration depth of the daily temperature variations is smaller by a factor of 19 compared to the annual variations.

Surface Temperature Given by a Step Function

If the surface temperature is raised during a fixed time interval $-b \leq t \leq b$ we may describe the surface temperature by

$$f(t) = \begin{cases} U_0 & \text{for } |t| \leq b \\ 0 & \text{for } |t| > b \end{cases}.$$

The Fourier transform is given by

$$F(\nu) = \frac{U_0}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b)$$

and the inversion formula implies

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = 2 \int_0^{\infty} \frac{U_0}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b) \cos(2\pi\nu t) d\nu.$$

Since we can solve the above boundary value problem for cos function we now use superposition to give a solution formula

$$u(t, x) = 2U_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\nu b)}{\pi\nu} \cos(2\pi\nu t - \sqrt{\frac{\pi\nu}{\alpha}}x) \exp(-\sqrt{\frac{\pi\nu}{\alpha}}x) d\nu.$$

This improper integral can again be computed approximately and we find the temperature profiles (with respect to time) at different depths in Figure 2.4. The Octave code is shown below. The figure shows that the maximal temperature will be reached at later times the deeper we are into the solid.

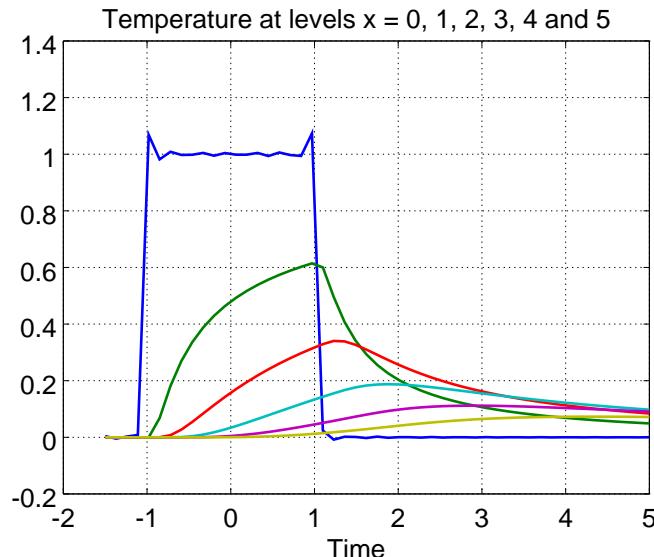


Figure 2.4: Temperature at different depth levels

SurfTemp.m

```

1; %% assure script file

function y = fff(nu,t,x)
    y = 2*sin(2*pi*nu)./(pi*nu).*exp(-sqrt(pi*nu)*x).*cos(2*pi*nu*t-sqrt(pi*nu)*x);
endfunction

Nx = 6;
Nt = 51;
xx = linspace(0,5,Nx);
tt = linspace(-1.5,5,Nt);
u = zeros(Nx,Nt);

for kx = 1:Nx
    for kt = 1:Nt
        u(kx,kt) = quad(@(nu) fff(nu,tt(kt),xx(kx)), 0, 20);
    endfor
endfor

```

```

endfor

figure(1);
plot(tt,u)
title("Temperature at levels x = 0, 1, 2, 3, 4 and 5");
xlabel("Time");
grid on

```

2.4.3 Heat Waves in Solids Caused by an Energy Flow

We reexamine the solid from the previous section. Instead of a known surface temperature $u(t, 0) = f(t)$ for all times $t > 0$ we assume that the energy flux is prescribed, i.e. a known amount of thermal energy is pumped into the solid. The boundary value problem to be solved is

$$\begin{aligned}\dot{u}(t, x) &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad \text{for } x > 0 \quad \text{and } t \in \mathbb{R} \\ -\frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) &= f(t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

We have to find bounded solutions.

Surface Flux given by $\cos(\omega t)$

We examine complex solution of the form

$$u(t, x) = c e^{i \omega t} e^{\lambda x}$$

for a $\lambda \in \mathbb{C}$ to be determined. We are aware that only the real part of the complex solution is physically relevant. The boundary condition at $x = 0$ leads to

$$-\lambda c e^{i \omega t} = f(t) = e^{i \omega t} \implies c = -\frac{1}{\lambda}.$$

Using the differential equation we find the condition

$$\begin{aligned}i \omega u(t, x) &= \alpha \lambda^2 u(t, x) \\ i \omega &= \alpha \lambda^2 \\ \lambda^2 &= i \frac{\omega}{\alpha} \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{i \frac{\omega}{\alpha}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} = \pm \sqrt{i} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}.\end{aligned}$$

The solution λ_1 has a positive real part and we find

$$u(t, x) = c e^{i \omega t} e^{i \sqrt{\omega/(2\alpha)} x} e^{\sqrt{\omega/(2\alpha)} x} = -\frac{1}{\lambda_1} e^{i(\omega t + \sqrt{\omega/(2\alpha)} x)} e^{\sqrt{\omega/(2\alpha)} x}.$$

This solution is not bounded as x increases and thus is not a physically relevant solution. The second value λ_2 has negative real part and

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{-\sqrt{2\alpha}}{(1+i)\sqrt{\omega}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} e^{+i3\pi/4} = -\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} e^{-i\pi/4}.$$

Thus we find

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= c e^{i\omega t} e^{\lambda_2 x} = -\frac{1}{\lambda_2} e^{i\omega t} e^{\lambda_2 x} \\
 &= -\frac{1}{\lambda_2} e^{i\omega t} e^{-i\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} e^{-\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} \\
 &= \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} e^{-i\pi/4} e^{i\omega t} e^{-i\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} e^{-\sqrt{\omega/(2\alpha)}x} \\
 &= \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/(2\alpha)}x - \pi/4)} e^{-\sqrt{\omega/(2\alpha)}x}.
 \end{aligned}$$

This leads to the real valued solution

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x - \frac{\pi}{4}) \exp(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x).$$

For this solution observe:

- At each depth x the temperature is a cos-function with the same frequency as the surface temperature. The amplitude of the oscillations decays exponentially with exponent $\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$.
- There is a phase shift of $\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x - \frac{\pi}{4}$ at depth x .

Surface Flux Given by a Step Function

If energy is pumped into the system by a pulse of length $2b$ we may use the step function

$$f(t) = \begin{cases} U_0 & \text{for } |t| \leq b \\ 0 & \text{for } |t| > b \end{cases}.$$

The Fouriertransform is given by

$$F(\nu) = \frac{U_0}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b)$$

and the inversion formula implies

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = 2 \int_0^{\infty} \frac{U_0}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b) \cos(2\pi\nu t) d\nu.$$

Since we can solve the above boundary value problem for cos-function we now use superposition to give a solution formula

$$u(t, x) = 2U_0 \sqrt{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\nu b)}{\pi\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \cos(2\pi\nu t - \sqrt{\frac{\pi\nu}{\alpha}}x - \frac{\pi}{4}) \exp(-\sqrt{\frac{\pi\nu}{\alpha}}x) d\nu.$$

This function has an integrable singularity at $\nu = 0$. The result in Figure 2.5 has to be compared with Figure 2.4.

Surfflow.m

```

1; %% assure script file

function y = fff(nu,t,x)
    y = sqrt(2)*sin(2*pi*nu)./(pi*nu).^(3/2).*exp(-sqrt(pi*nu)*x)...
        .*cos(2*pi*nu*t-sqrt(pi*nu)*x-pi/4);
endfunction

Nx = 6;
Nt = 51;

```

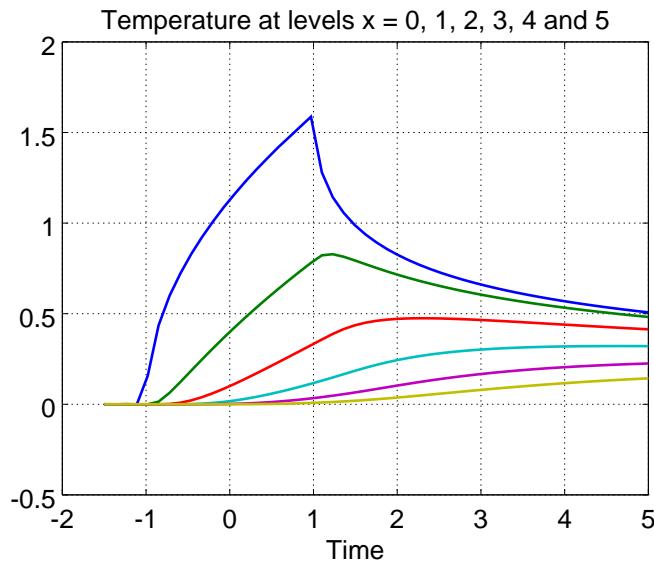


Figure 2.5: Temperature at different depth levels

```

xx = linspace(0, 5, Nx);
tt = linspace(-1.5, 5, Nt);
u = zeros(Nx, Nt);

for kx = 1:Nx
    for kt = 1:Nt
        u(kx, kt) = quad(@(nu) fff(nu, tt(kt), xx(kx)), 0, 20);
    endfor
endfor

figure(1);
plot(tt, u)
title("Temperature at levels x = 0, 1, 2, 3, 4 and 5");
xlabel("Time");
grid on

```

2.4.4 Solving a Wave Equation

The evolution of one dimensional waves with wave speed c is governed by the wave equation

$$\ddot{u}(t, x) = c^2 u''(t, x). \quad (2.1)$$

For given initial value and initial speed

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{and} \quad \dot{u}(0, x) = v(x)$$

the equation has a unique solution. To solve equation (2.1) we apply a Fourier transform with respect to the space variable x , i.e.

$$U(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-i 2 \pi \nu x} dx.$$

Using the computational rules for Fourier transforms the wave equation (2.1) is transformed into an ordinary differential equation

$$\ddot{U}(t, \nu) = -(2 \pi \nu c)^2 U(t, \nu). \quad (2.2)$$

For each value of ν this is a differential equations with solution

$$U(t, \nu) = A(\nu) e^{i 2 \pi \nu c t} + B(\nu) e^{-i 2 \pi \nu c t}.$$

Using the initial values we obtain

$$\begin{aligned} U(0, \nu) &= F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i 2 \pi \nu x} dx \\ \dot{U}(0, \nu) &= V(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i 2 \pi \nu x} dx. \end{aligned}$$

At time $t = 0$ we observe

$$\begin{aligned} U(0, \nu) &= A(\nu) + B(\nu) \\ \frac{d}{dt} U(t, \nu) &= i 2 \pi \nu c A(\nu) e^{i 2 \pi \nu c t} - i 2 \pi \nu c B(\nu) e^{-i 2 \pi \nu c t} \\ \frac{d}{dt} U(0, \nu) &= i 2 \pi \nu c A(\nu) - i 2 \pi \nu c B(\nu). \end{aligned}$$

This leads to a system of equations

$$\begin{aligned} A(\nu) + B(\nu) &= F(\nu) \\ A(\nu) - B(\nu) &= \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) \end{aligned}$$

with the solution

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \frac{1}{2} \left(F(\nu) + \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) \right) \\ B(\nu) &= \frac{1}{2} \left(F(\nu) - \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) \right). \end{aligned}$$

Thus find an explicit expression for the Fourier transform of the solution

$$\begin{aligned} U(t, \nu) &= \frac{1}{2} \left(F(\nu) + \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) \right) e^{i 2 \pi \nu c t} + \frac{1}{2} \left(F(\nu) - \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) \right) e^{-i 2 \pi \nu c t} \\ &= \frac{1}{2} F(\nu) (e^{i 2 \pi \nu c t} + e^{-i 2 \pi \nu c t}) + \frac{1}{2} \frac{1}{i 2 \pi \nu c} V(\nu) (e^{i 2 \pi \nu c t} - e^{-i 2 \pi \nu c t}). \end{aligned}$$

Now determine the inverse Fourier transform of this expression. Table 2.1 leads to²

$$\begin{aligned} e^{i 2 \pi \nu c t} F(\nu) &= \mathcal{F}[f(x + ct)] \\ e^{-i 2 \pi \nu c t} F(\nu) &= \mathcal{F}[f(x - ct)] \\ e^{i 2 \pi \nu c t} V(\nu) &= \mathcal{F}[v(x + ct)] \\ e^{-i 2 \pi \nu c t} V(\nu) &= \mathcal{F}[v(x - ct)]. \end{aligned}$$

For the remaining contribution we need another computational rule for Fourier transforms. Examine the function

$$h(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

²One may also use

$$\begin{aligned} e^{i 2 \pi \nu c t} F(\nu) &= e^{i 2 \pi \nu c t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i 2 \pi \nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i 2 \pi \nu (x - ct)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s + ct) e^{-i 2 \pi \nu (s)} ds = \mathcal{F}[f(x + ct)](\nu) \end{aligned}$$

and use the condition $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) d\tau = 0$ to conclude³

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \text{integration by parts} \\ &= \frac{1}{-i2\pi\nu} h(t) e^{-i2\pi\nu t} \Big|_{t=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{-i2\pi\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{h}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= 0 + \frac{1}{i2\pi\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \frac{1}{i2\pi\nu} V(\nu). \end{aligned}$$

Thus we find

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x v(s - ct) ds\right](\nu) &= \frac{1}{i2\pi\nu} \mathcal{F}[v(x - ct)](\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu} e^{-i2\pi\nu ct} V(\nu) \\ \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x v(s + ct) ds\right](\nu) &= \frac{1}{i2\pi\nu} \mathcal{F}[v(x + ct)](\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu} e^{i2\pi\nu ct} V(\nu) \\ \frac{1}{i2\pi\nu} V(\nu) (e^{i2\pi\nu ct} - e^{-i2\pi\nu ct}) &= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x v(s + ct) ds - \int_{-\infty}^x v(s - ct) ds\right](\nu) \\ &= \mathcal{F}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds\right](\nu). \end{aligned}$$

Now we can put the pieces of the puzzle together and find an explicit formula for the solution of the wave equation 2.1.

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds$$

This representation allows to identify right traveling waves, left traveling waves and the cone of dependence.

2.4.5 Fraunhofer Diffraction

As source for this section use [Stew87, Appendix C].

1D Fraunhofer diffraction

In section 1.1.6 (page 16) we examined a plane wave hitting on a wall with opening. The Fraunhofer diffraction pattern was determined with the help of the phase difference $d = x \sin \alpha \approx x \alpha$ and a linear superposition of the waves, see Figure 2.6.

$$I(\alpha) = \int_{\text{opening}} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} x \alpha} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} x \alpha} dx$$

where

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if wall open at height } x \\ 0 & \text{if wall closed at height } x \end{cases}.$$

Thus the diffraction pattern is the Fourier transform of the opening function $f(x)$.

³One may also apply the rule $\mathcal{F}[f'(t)](\nu) = i2\pi\nu F(\nu)$ to the function $h(t)$.

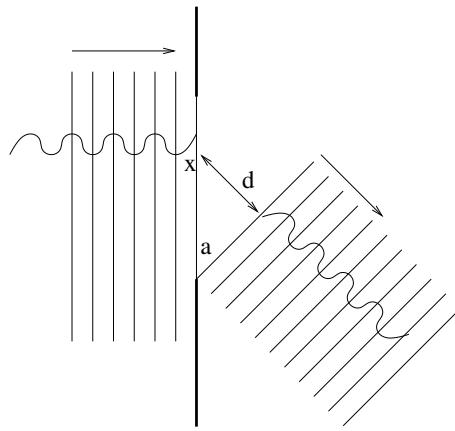


Figure 2.6: Fraunhofer diffraction

2D Fraunhofer diffraction

For a real, 2D wall we have to adapt Figure 2.6. The vertical position on the wall is given by x and the horizontal position by y . There are two angles to consider: α , the vertical deviation from the optical axis and β the horizontal deviation from the optical axis. Then we obtain a phase difference of

$$d = x \sin \alpha + y \sin \beta \approx x \alpha + y \beta$$

The opening in the wall is described by the function $f(x, y)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if wall open at position } (x, y) \\ 0 & \text{if wall closed at position } (x, y) \end{cases}.$$

For the diffraction pattern of the opening we find the amplitude

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\text{opening}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (x \alpha + y \beta)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (x \alpha + y \beta)} dx dy.$$

This is the 2D Fourier transform. The light intensity is given by $|I|^2(\alpha, \beta)$.

With the above it is not too difficult to determine the diffraction pattern for a rectangular opening $-a \leq x \leq +a$ and $-b \leq y \leq +b$.

2D radial diffraction

Assume the amplitude $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$ depends on the radius only. Then the resulting intensity will also depend on $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ only. Thus we compute $I(\alpha, 0)$

$$I(\alpha, 0) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\rho) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (\rho \cos \phi \alpha)} \rho d\phi d\rho = \int_0^\infty \rho f(\rho) \cdot \left(\int_0^{2\pi} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (\rho \cos \phi \alpha)} d\phi \right) d\rho.$$

Thus we examine the integral (set $z = \frac{2\pi}{\lambda} \rho \alpha$)

$$M(z) = \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \phi} d\phi = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(z \cos \phi) d\phi - i \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(z \cos \phi) d\phi = 2\pi J_0(z).$$

To find the above Bessel function as the result of the integral use tables of integrals, *Mathematica* or *Maple*. For the resulting amplitude obtain

$$I(\alpha) = 2\pi \int_0^\infty \rho f(\rho) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \alpha\right) d\rho.$$

This expression is called the Hankel transform of the function $f(r)$ and thus corresponds to the Fourier transform in a radially symmetric situation⁴. Instead of the orthonormal trigonometric functions (Fourier) one can use other sets of orthonormal function, e.g. Bessel functions.

2.5 Aufgaben

• Aufgabe 2–1:

Die Funktion $f(t)$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls/pour } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{falls/pour } t > 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie $F(\nu)$.

Examiner la fonction donnée par

Calculer $F(\nu)$.

• Aufgabe 2–2:

Die Gauss'sche Glockenkurve mit Standardabweichung σ ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

(a) Berechnen Sie $F(\nu)$.

(b) Verifizieren Sie, dass $F(\nu)$ fast eine Glockenkurve ist, bis auf eine fehlende Normierung. Zeigen Sie, dass das Produkt der Breiten von $f(t)$ und $F(\nu)$ unabhängig ist von σ .

La courbe de Gauss avec écart type σ est donnée par

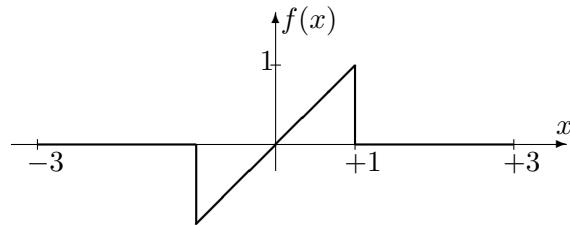
(a) Calculer $F(\nu)$.

(b) Vérifiez que $F(\nu)$ est une courbe de Gauss, sauf pour un facteur de normalisation. Vérifier que le produit des écart types de $f(t)$ et $F(\nu)$ ne dépend pas de σ .

• Aufgabe 2–3:

Untersuchen Sie die rechtsstehende Funktion. Der Wert ist $f(x) = x$ auf $[-1, 1]$ und Null ausserhalb dieses Intervalls.

Examiner la fonction montrée à droite. Calculer avec $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et zéro hors de l'intervalle.



(a) Examiner la fonction comme fonction périodique avec période 6. Trouver la série de Fourier.

(b) Mettez les valeurs de la fonction à zéro pour tout x hors de l'intervalle $[-1, 1]$. Puis on peut écrire la fonction comme intégral dans la forme montrée ci-dessous. Trouver la fonction $b(\nu)$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion als periodische Funktion mit Periode 6. Bestimmen Sie die Fourierreihe.

(b) Setzen Sie die Funktionswerte zu Null für alle x ausserhalb von $[-1, 1]$. Dann kann die Funktion als Integral geschrieben werden, in der untenstehenden Form. Bestimmen Sie die Funktion $b(\nu)$.

$$f(x) = \int_0^\infty b(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

⁴Make a plot of the function $\sqrt{r} J_0(r)$ to realize that there must be a connection to Fourier transforms.

Tip: Utiliser

$$\int x \sin(\alpha x) dx = \frac{\sin(\alpha x) - \alpha x \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C$$

• **Aufgabe 2–4:**

Verifizieren Sie die Rechenregel für Verschiebungen im Frequenzbereich

$$e^{i 2 \pi \Omega t} f(t) \quad \circ \bullet \quad F(\nu - \Omega)$$

mit Hilfe von Integralen.

• **Aufgabe 2–5:**

Ist f eine stetige, differenzierbare Funktion und die Ableitung f' Fourier-transformierbar, so gilt

$$f'(t) \quad \circ \bullet \quad i 2 \pi \nu F(\nu)$$

• **Aufgabe 2–6:**

(a)

Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Dreiecks-Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|/b & \text{falls/pour } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls/pour } |t| > b \end{cases}$$

Touver la transfomation de Fourier de la function triangle

(b)

Verifizieren Sie mit Hilfe von uneigentlichen Integralen die Beziehung

$$-i 2 \pi t f(t) \circ \bullet \frac{d}{d\nu} F(\nu)$$

Vérifier a l'aide des intégrales improches la règle

(c)

Bestimmen Sie mit Hilfe von uneigentlichen Integralen die Fouriertransformation der untenstehenden Funktion. Hierbei ist $\beta \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Das Resultat wird die Fouriertransformation F der ursprünglichen Funktion f enthalten.

$$e^{i \beta t} f(t)$$

Utiliser des intégrales improches pour calculer la transformati de Fourier de la fonction ci-dessous. $\beta \in \mathbb{R}$ est une constante et le résultat contien la transformation de Fourier $F(\nu)$ de la fonction $f(t)$.

• **Aufgabe 2–7:**

Sei f eine stückweise stetige Funktion die auf den Teilstücken stetig differenzierbar ist, mit Sprungstellen bei τ_k für $k = 1, 2, \dots, n$. Dann gilt

$$f'(t) \quad \circ \bullet \quad i 2 \pi \nu F(\nu) - \sum_{k=1}^n (f(\tau_k+) - f(\tau_k-)) e^{-i 2 \pi \tau_k}$$

Tip: partielle Integration auf den Teilintervallen $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

• **Aufgabe 2–8:**

Für „schöne“ Funktionen f gilt

$$i \frac{d}{d\nu} F(\nu) = 2 \pi \mathcal{F}[t f(t)](\nu)$$

• **Aufgabe 2–9:**

Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ mit Hilfe von Delta–Funktionen.

• **Aufgabe 2–10:**

Für eine reelle Funktion f gilt

Pour une fonction réelle f on a

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty \quad \text{und/et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Die trigonometrischen Fouriertransformationen sind gegeben durch die beiden Formeln

Les transformation trigonométrique de Fourier sont données par les formules

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S[f](\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\ \mathcal{F}_C[f](\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi\nu t) dt\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie dass / Montrer que

$$\mathcal{F}_S[f'](v) = -2\pi v \mathcal{F}_C[f](v)$$

(b) Finden (und beweisen) Sie eine ähnliche Formel für $\mathcal{F}_C[f']$.

Trouver (et prouver) une formule similaire pour $\mathcal{F}_C[f']$.

• **Aufgabe 2–11:**

In der untenstehenden Figur finden Sie das „exakte“ Amplitudenspektrum der Funktion $f(t) = \cos(30\omega t) + 0.5 \sin(22\omega t)$. Hierbei ist $\omega = 2\pi$.

Die Zeichnungen in dieser Aufgabe sind sehr sorgfältig zu erstellen.

(a) Dieses Signal wird gemessen für Zeiten $0 \leq t \leq 1$. Finden Sie die Fouriertransformation der entsprechenden Fensterfunktion $w(t)$.

(b) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum der Fensterfunktion in einer separaten Graphik. Die Skalen sind sorgfältig zu wählen.

(c) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum der gemessenen Funktion in der untenstehenden Graphik.

(d) Wie viele Messpunkte müssen in $0 \leq t \leq 1$ mindestens aufgenommen werden, damit das Signal rekonstruiert werden kann?

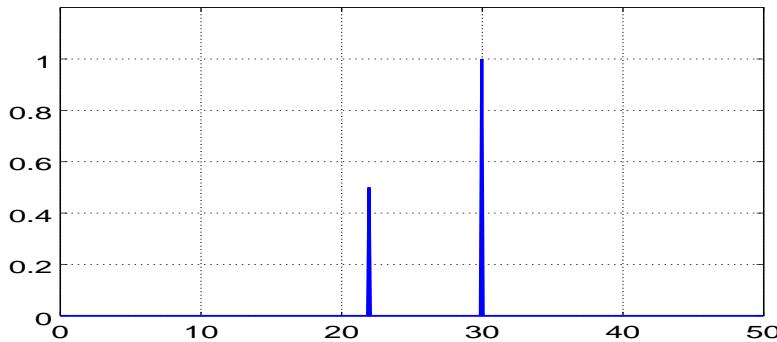
(e) Variieren Sie nun die Breite der Fensterfunktion. Wie lange muss mindestens gemessen werden, damit die beiden Frequenzen deutlich unterscheidbar sind? Die Antwort ist sorgfältig zu begründen.

Hinweis: Die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion der Breite $2b$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$G(\nu) = \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b)$$



• **Aufgabe 2–12:**

Die Funktion

$$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) && \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad x > 0 \\ u(t, 0) &= 0 && \text{für } t > 0 \\ u(0, x) &= \sin(\lambda x) && \text{für } x > 0\end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

statt der Funktion $\sin(\lambda x)$.

- (a) Finden Sie die Fourier–Sinus–Transformation F_S der Funktion $f(x)$, bezüglich der Raumvariablen x .
- (b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von sin–Funktionen.
- (c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t, x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.
- (d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 1.5$.

• **Aufgabe 2–13:**

Die Funktion

La fonction

$$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci-dessous.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) && \text{für/pour } t > 0 \quad \text{und/et} \quad x > 0 \\ u(t, 0) &= 0 && \text{für/pour } t \geq 0 \\ u(0, x) &= \sin(\lambda x) && \text{für/pour } x > 0\end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

Trouver la solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für/pour } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{für/pour } x > 4 \end{cases}$$

statt der Funktion $\sin(\lambda x)$.

- (a) Finden Sie die Fourier–Sin–Transformation F_S der Funktion $f(x)$.
- (b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von sin–Funktionen.
- (c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t, x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.
- (d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 4$.

• Aufgabe 2–14:

Die Funktion

$$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$$

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) && \text{für/pour } t > 0 \text{ und/et } x > 0 \\ u(t, 0) &= 0 && \text{für/pour } t \geq 0 \\ u(0, x) &= \sin(\lambda x) && \text{für/pour } x > 0 \end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 10 & \text{für/pour } 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{für/pour } x < 2 \text{ und/et } x > 5 \end{cases}$$

statt der Funktion $\sin(\lambda x)$.

au lieu de la fonction $\sin(\lambda x)$.

- (a) Trouver la transformation de Fourier Sinus F_S de la fonction $f(x)$.
- (b) Donner la fonction $f(x)$ comme intégrale des fonctions sin.
- (c) Trouver une intégrale pour la solution $u(t, x)$. Expliquer la méthode.
- (d) Déterminer la valeur numérique de la solution $u(t, x)$ pour $t = 0.5$ et $x = 4$.

La fonction

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci-dessous.

- (a) Finden Sie die Fourier–Sin–Transformation F_S der Funktion $f(x)$.
- (b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von sin–Funktionen.
- (c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t, x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.
- (d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 4$. (1 Punkt)

• Aufgabe 2–15:

Die Funktion

$$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x)$$

La fonction

löst die Wärmeleitungsgleichung (eine partielle Differentialgleichung)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) && \text{für/pour } t > 0 \quad \text{und/et } x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= \cos(\lambda x) && \text{für/pour } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Zu finden ist die Lösung der selben Differentialgleichung, aber mit der neuen Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für/pour } -5 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{für/pour } |x| > 5 \end{cases}$$

statt der Funktion $\cos(\lambda x)$.

est la solution de l'équation de conduction de chaleur ci-dessous.

$$\begin{aligned}&\text{für/pour } t > 0 \quad \text{und/et } x \in \mathbb{R} \\ &\text{für/pour } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Trouver la solution de cette équation différentielle avec la condition initiale

$$\begin{aligned}&\text{für/pour } -5 \leq x \leq 5 \\ &\text{für/pour } |x| > 5\end{aligned}$$

au lieu de la fonction $\cos(\lambda x)$.

- (a) Finden Sie die Fourier–Cos–Transformation F_C der Funktion $f(x)$.
- (b) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ als Integral von cos–Funktionen.
- (c) Finden Sie eine Integraldarstellung der Lösung $u(t, x)$. Die Überlegungen sind anzugeben.
- (d) Bestimmen Sie den numerischen Wert der Lösung zur Zeit $t = 0.5$ bei $x = 4$.

- (a) Trouver la transformation de Fourier Cosinus F_C de la fonction $f(x)$.
- (b) Donner la fonction $f(x)$ comme intégrale des fonctions cos.
- (c) Trouver une intégrale pour la solution $u(t, x)$. Expliquer la méthode.
- (d) Déterminer la valeur numérique de la solution $u(t, x)$ pour $t = 0.5$ et $x = 4$.

• Aufgabe 2–16:

In einem Tonsignal müssen Frequenzen bis zu 5'000 Hz erfasst werden. Zudem müssen Signale mit Frequenzen, die nur um 1 Hz voneinander abweichen zuverlässig erfasst werden (d.h. Unterscheidung ist möglich).

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Integralen die Fouriertransformation der Rechtecks–Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq b \\ 0 & \text{falls } |t| > b \end{cases}$$

- (b) Wie lange muss mindestens gemessen werden und wieviele Messpunkte sind zu wählen, damit die in der Aufgaben geforderten Anforderungen erfüllt werden können? Die Antwort ist zu begründen.
- (c) Ihr FFT–Programm kann (auf einem alten PC) in einer 1 Sekunde einen Vektor der Länge $2^{10} = 1024$ transformieren. Wie lange benötigt die Transformation eines Resultatvektors aus der vorangehenden Teilaufgabe?

2.5.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2–1 :

$$\begin{aligned}F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2 \pi \nu t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i 2 \pi \nu t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+i 2 \pi \nu)t} dt \\ &= \frac{-1}{1 + i 2 \pi \nu} e^{-(1-i 2 \pi \nu)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 + i 2 \pi \nu}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–2 :

(a) Durch Integration

$$\begin{aligned}
 F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2 \pi \nu t} dt = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sigma^2}\right) \exp(-i 2 \pi \nu t) dt \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2 \sigma^2}(t^2 + 2i \sigma^2 2 \pi \nu t)\right) dt \\
 &\quad t^2 + 2i \sigma^2 2 \pi \nu t = (t + i \sigma^2 2 \pi \nu)^2 - (i \sigma^2 2 \pi \nu)^2 \quad \text{quadratisch ergänzen} \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2 \sigma^2}(t + i \sigma^2 2 \pi \nu)^2\right) dt \exp\left(-\frac{1}{2 \sigma^2}(\sigma^2 2 \pi \nu)^2\right) \\
 &\quad \text{Substitution } s = t + i \sigma^2 2 \pi \nu \\
 &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2 \sigma^2} s^2\right) ds \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma^2 2 \pi \nu)^2\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{(\sigma^2 2 \pi)^2}{2} \nu^2\right)
 \end{aligned}$$

(b) Die Fouriertransformation $F(\nu)$ ist eine (nicht normalisierte) Glockenkurve bezüglich ν mit der Breite $b = \frac{1}{2 \pi \sigma}$. Somit gilt für das Produkt der Breiten

$$b \cdot \sigma = \frac{1}{2 \pi \sigma} \cdot \sigma = \frac{1}{2 \pi}$$

Lösung zu Aufgabe 2-3 :

(a) Diese erste Teilfrage sucht eine Fourierreihe und kann mit Hilfe der entsprechenden Techniken gelöst werden. Die Periode ist gegeben durch $T = 6$ und somit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$. Die Funktion ist ungerade und somit $a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 f(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{6} x\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x \sin\left(n \frac{\pi}{3} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{3} x\right) - n \frac{\pi}{3} x \cos\left(n \frac{\pi}{3} x\right)}{(n^2 \frac{\pi^2}{3})^2} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{2 \cdot 3}{\pi^2 n^2} (\sin(n \frac{\pi}{3}) - n \frac{\pi}{3} \cos(n \frac{\pi}{3})) \\
 &= \frac{6 \sin(n \frac{\pi}{3}) - n 2 \pi \cos(n \frac{\pi}{3})}{\pi^2 n^2}
 \end{aligned}$$

und somit

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{3} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \sin(n \frac{\pi}{3}) - n 2 \pi \cos(n \frac{\pi}{3})}{\pi^2 n^2} \sin\left(n \frac{\pi}{3} x\right)$$

Falls eine komplexe Fourierreihe gesucht wird, so berechnet man $c_0 = 0$ und für $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{6} \int_{-3}^{+3} f(x) e^{-i n \frac{\pi}{3} x} dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^{+1} x e^{-i n \frac{\pi}{3} x} dx \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{-i n \frac{\pi}{3}} x e^{-i n \frac{\pi}{3} x} \Big|_{x=-1}^{+1} - \frac{1}{-i n \frac{\pi}{3}} \int_{-1}^{+1} 1 e^{-i n \frac{\pi}{3} x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{-i n \frac{\pi}{3}} x e^{-i n \frac{\pi}{3} x} - \frac{1}{(-i n \frac{\pi}{3})^2} e^{-i n \frac{\pi}{3} x} \right) \Big|_{x=-1}^{+1} \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{i}{n \frac{\pi}{3}} x + \frac{1}{(n \frac{\pi}{3})^2} \right) e^{-i n \frac{\pi}{3} x} \Big|_{x=-1}^{+1} \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{i}{n \frac{\pi}{3}} x + \frac{1}{(n \frac{\pi}{3})^2} \right) (\cos(n \frac{\pi}{3} x) - i \sin(n \frac{\pi}{3} x)) \Big|_{x=-1}^{+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{6} \left(\frac{+i}{n \frac{\pi}{3}} \cos(n \frac{\pi}{3}) - \frac{i}{(n \frac{\pi}{3})^2} \sin(n \frac{\pi}{3} x) \right) \\
&= \frac{i}{n \pi} \cos(n \frac{\pi}{3}) - \frac{3i}{n^2 \pi^2} \sin(n \frac{\pi}{3} x) = i \frac{n \pi \cos(n \frac{\pi}{3}) - 3 \sin(n \frac{\pi}{3})}{n^2 \pi^2}
\end{aligned}$$

und es ergibt sich die komplexe Fouriereihe, mit anschliessenden Umformungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+i n \frac{\pi}{3} x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{n \pi \cos(n \frac{\pi}{3}) - 3 \sin(n \frac{\pi}{3})}{n^2 \pi^2} e^{+i n \frac{\pi}{3} x} \\
&= \sum_{n \neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{n \pi \cos(n \frac{\pi}{3}) - 3 \sin(n \frac{\pi}{3})}{n^2 \pi^2} \left(i \cos(n \frac{\pi}{3} x) - \sin(n \frac{\pi}{3} x) \right) \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi \cos(n \frac{\pi}{3}) - 3 \sin(n \frac{\pi}{3})}{n^2 \pi^2} \sin(n \frac{\pi}{3} x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \sin(n \frac{\pi}{3}) - 2 n \pi \cos(n \frac{\pi}{3})}{n^2 \pi^2} \sin(n \frac{\pi}{3} x)
\end{aligned}$$

- (b) Zu verwenden ist eine Fouriertransformation, oder Fourier–Sinus–Transformation. Zuerst wird die Rechnung mit Hilfe der Fouriertransformation gezeigt.

$$\begin{aligned}
F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i 2 \pi \nu x} dx = \int_{-1}^{+1} x (\cos(2 \pi \nu x) - i \sin(2 \pi \nu x)) dx \\
&= -i \int_{-1}^{+1} x \sin(2 \pi \nu x) dx = -i \frac{\sin(2 \pi \nu x) - 2 \pi \nu x \cos(2 \pi \nu x)}{(2 \pi \nu)^2} \Big|_{x=-1}^{+1} \\
&= -2 i \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(2 \pi \nu)^2}
\end{aligned}$$

Für die Rücktransformation gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i 2 \pi \nu x} d\nu \\
&= -2 i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(2 \pi \nu)^2} (\cos(2 \pi \nu x) + i \sin(2 \pi \nu x)) d\nu \\
&= -2 \cdot 2 i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(2 \pi \nu)^2} (+i \sin(2 \pi \nu x)) d\nu \\
&= \int_0^{+\infty} 4 \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(\pi \nu)^2} \sin(2 \pi \nu x) d\nu \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(\pi \nu)^2} \sin(2 \pi \nu x) d\nu
\end{aligned}$$

Somit ist die gesuchte Funktion

$$b(\nu) = \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(\pi \nu)^2}$$

Verwendet man die Fourier–Sinus–Transformation, so erhält man die identische Antwort durch

$$\begin{aligned}
F_S(\nu) &= \mathcal{F}_S[f(t)](\nu) = 2 \int_0^1 x \sin(2 \pi \nu t) dt = 2 \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(2 \pi \nu)^2} \\
f(t) &\sim 2 \int_0^{\infty} F_S(\nu) \sin(2 \pi \nu t) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{\sin(2 \pi \nu) - 2 \pi \nu \cos(2 \pi \nu)}{(\pi \nu)^2} \sin(2 \pi \nu t) d\nu
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–4 :

$$\mathcal{F}[e^{i 2 \pi \Omega t} f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i 2 \pi \Omega t} f(t) e^{-i 2 \pi \nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2 \pi (\nu - \Omega) t} dt = F(\nu - \Omega)$$

Lösung zu Aufgabe 2–5 : Da die Fouriertransformation der Funktion und der Ableitung existiert müssen die folgenden Grenzwerte richtig sein

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$$

Mit Hilfe einer partiellen Integration erhält man

$$\mathcal{F}[f'(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = i2\pi\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = i2\pi\nu F(\nu)$$

Lösung zu Aufgabe 2–6 :

(a) Mit der Definition der Fouriertransformation als Integral gilt

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi t \nu} dt \\ &= \int_{-b}^b f(t) (\cos(2\pi t \nu) - i \sin(2\pi t \nu)) dt \\ &= 2 \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b}\right) \cos(2\pi t \nu) dt \\ &= 2 \left(\frac{\sin(2\pi t \nu)}{2\pi\nu} - \frac{\cos(2\pi t \nu)}{b(2\pi\nu)^2} - \frac{t \sin(2\pi t \nu)}{b2\pi\nu} \right) \Big|_{t=0}^b \\ &= 2 \left(\frac{\sin(2\pi b \nu)}{2\pi\nu} - \frac{\cos(2\pi b \nu)}{b(2\pi\nu)^2} - \frac{b \sin(2\pi b \nu)}{b2\pi\nu} \right) + 2 \frac{1}{b(2\pi\nu)^2} \\ &= -\frac{\cos(2\pi b \nu)}{2b\pi^2\nu^2} + \frac{1}{b2\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\nu} F(\nu) &= \frac{d}{d\nu} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi t \nu} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\nu} e^{-2i\pi t \nu} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-2i\pi t) e^{-2i\pi t \nu} dt = -2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-2i\pi t \nu} dt \\ &= -2i\pi \mathcal{F}[tf(t)](\nu) \end{aligned}$$

(c)

$$\mathcal{F}[e^{i\beta t} f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t} f(t) e^{-2i\pi t \nu} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi t (\nu - \frac{\beta}{2\pi})} dt = F(\nu - \frac{\beta}{2\pi})$$

Lösung zu Aufgabe 2–7 : Da die Fouriertransformation der Funktion und der Ableitung existiert müssen die folgenden Grenzwerte richtig sein

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$$

Wir setzen (künstlich) $\tau_0 = -\infty$ und $\tau_{n+1} = \infty$. Mit Hilfe von partiellen Integrationen erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(t)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f'(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \left(f(t) e^{-i2\pi\nu t} \Big|_{t=\tau_k}^{\tau_{k+1}} + i2\pi\nu \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right) \\ &= i2\pi\nu F(\nu) - \sum_{k=1}^n (f(\tau_k+) - f(\tau_k-)) e^{-i2\pi\tau_k} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–8 : Durch Differenzieren des uneigentlichen Parameterintegrals erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\nu} F(\nu) &= \frac{d}{d\nu} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\nu} e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= -i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = -i2\pi \mathcal{F}[t f(t)](\nu)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–9 : Es gilt

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad \text{und} \quad \sin(\omega t) = \frac{-i}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Damit können die gewünschten Funktionen bestimmt werden, ohne Integrale zu berechnen.

$$\begin{aligned}e^{i2\pi\nu_0 t} &\circledcirc \bullet \delta(\nu - \nu_0) \\ e^{i\omega t} &\circledcirc \bullet \delta(\nu - \frac{\omega}{2\pi}) \\ \cos(\omega t) &\circledcirc \bullet \frac{1}{2} (\delta(\nu - \frac{\omega}{2\pi}) + \delta(\nu + \frac{\omega}{2\pi})) \\ \sin(\omega t) &\circledcirc \bullet \frac{-i}{2} (\delta(\nu - \frac{\omega}{2\pi}) - \delta(\nu + \frac{\omega}{2\pi}))\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–10 : Partielle Integration

(a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_S[f'](\nu) &= 2 \int_0^{\infty} f'(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= 2 f(t) \sin(2\pi\nu t) \Big|_{t=0}^{\infty} - 2\pi\nu 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= 0 - 0 - 2\pi\nu \mathcal{F}_C[f](\nu) = -2\pi\nu \mathcal{F}_C[f](\nu)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_C[f'](\nu) &= 2 \int_0^{\infty} f'(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= 2 f(t) \cos(2\pi\nu t) \Big|_{t=0}^{\infty} + 2\pi\nu 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= -2f(0) + 2\pi\nu \mathcal{F}_S[f](\nu)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2–11 : In diesem Beispiel ist die Breite der Fensterfunktion 1, d.h. $b = 0.5$. Deshalb ist

$$G(\nu) = \frac{1}{\pi\nu} \sin(\pi\nu)$$

- (a) Das effektive Fenster ist um 0.5 Einheiten nach rechts verschoben, d.h. $w(t) = g(t - 0.5)$. Mit Hilfe der Verschiebungsformel $f(t - a) \circledcirc \bullet e^{-2i\pi\nu a} F(\nu)$ gilt

$$W(\nu) = e^{-i\pi\nu} G(\nu) = e^{-i\pi\nu} \frac{1}{\pi\nu} \sin(\pi\nu) = \frac{1}{\pi\nu} (\cos(\pi\nu) - i \sin(\pi\nu)) \sin(\pi\nu)$$

Das Resultat kann auch direkt mittels Integration bestimmt werden

$$W(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-2i\pi t \nu} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 1 e^{-2i\pi t \nu} dt \\
&= \frac{e^{-2i\pi t \nu}}{-2i\pi \nu} \Big|_{t=0}^1 \\
&= \frac{e^{-2i\pi \nu}}{-2i\pi \nu} - \frac{1}{-2i\pi \nu} \\
&= \frac{i}{2\pi \nu} (\cos(2\pi\nu) - i \sin(2\pi\nu) - 1)
\end{aligned}$$

Obwohl die beiden Resultate verschieden aussehen, sind sie gleich. Mittels trigonometrischen Identitäten kann man die Ausdrücke umformen.

- (b) Der Betrag der komplexen Zahl $e^{-i\pi\nu}$ ist 1. Zu zeichnen ist also der Graph von

$$|W(\nu)| = |G(\nu)| = \left| \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right|$$

Die Höhe des Hauptmaximums ist 1. Die ersten Nullstellen liegen bei $\nu = \pm 1$.

- (c) Die gegebene Funktion $F(\nu)$ ist mit der Funktion $|G(\nu)|$ zu falten. Dadurch werden die klar ausgebildeten Spitzen „ausgeschmiert“. Die Spitzen sind nicht mehr so klar ausgebildet. Die neue Breite der Spitzen sollte etwa 2 Hz betragen, da mit der Fouriertransformation der Fensterfunktion der vorangehenden Teilaufgabe zu falten ist.
- (d) Da Frequenzen mit 30 Hz erfasst werden, muss **mindestens** mit 60 Hz abgetastet werden. Da nur Werte 2^n gut zu verarbeiten sind, sollten 128 oder mehr Punkte aufgenommen werden.
- (e) Die Fouriertransformation der wahren Funktion ist mit der Transformation der Fensterfunktion zu falten. Dadurch werden die Frequenzen ausgeschmiert. Da die beiden zu trennenden Frequenzen einen Abstand von 8 Hz haben, darf jede der beiden Spitzen um höchstens 4 Hz ausgeschmiert werden. Somit sollte die „Breite“ der Fouriertransformation der Fensterfunktion kleiner als 4 Hz sein. Die ersten beiden Nullstellen der Fensterfunktion des Fensters mit Breite $2b$ liegen bei $\nu = \pm \frac{1}{2b}$. Nehmen wir diese Grösse als Mass für die „Breite“ (etwas willkürlich), so muss also die Bedingung $4 > \frac{1}{2b}$ erfüllt sein. Das führt auf ein Messintervall der Länge $2b > \frac{1}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 2–12 :

- (a) Verwende die Definition auf Seite 181.

$$\begin{aligned}
F_S(\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi\nu x) dx = 2 \int_0^3 \sin(2\pi\nu x) dx \\
&= -2 \frac{\cos(2\pi\nu x)}{2\pi\nu} \Big|_{x=0}^3 = \frac{-1}{\pi\nu} (\cos(6\pi\nu) - 1)
\end{aligned}$$

- (b)

$$f(x) = 2 \int_0^\infty F_S(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu = \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(6\pi\nu) - 1}{\nu} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

- (c) Stichworte: Linearität und Superposition

Die folgende Tabelle zeigt die Lösung für zunehmend kompliziertere Anfangsbedingungen.

Anfangswert	$u(0, x)$	gelöst durch	$u(t, x)$
$\sin(\lambda x)$		gelöst durch	$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$
$\sin(2\pi\nu x)$		gelöst durch	$u(t, x) = e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x)$
$\sum_{k=1}^n c_k \sin(2\pi\nu_k x)$		gelöst durch	$u(t, x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-(2\pi\nu_k)^2 t} \sin(2\pi\nu_k x)$
$\int_0^\infty G(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu$		gelöst durch	$u(t, x) = \int_0^\infty G(\nu) e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$

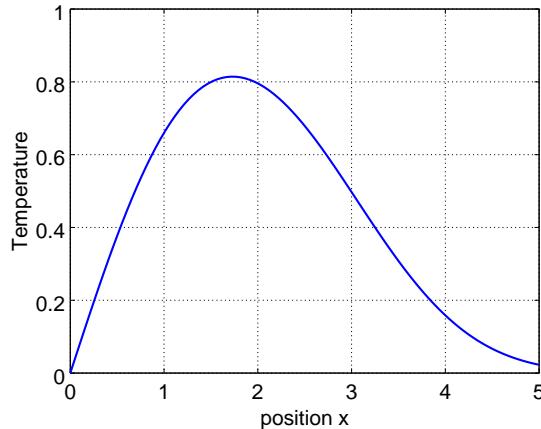
Für die gegebene Rechtecksfunktion $f(x)$ erhalten wir somit die Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(6\pi\nu) - 1}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

- (d) Der Term $e^{-4\pi^2\nu^2}$ wird für grosse Werte von ν sehr schnell klein. Deshalb kann das uneigentliche Integral ersetzt werden durch ein approximatives, eigentliches Integral.

$$\begin{aligned} u(0.5, 1.5) &= \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(6\pi\nu) - 1}{\nu} e^{-2\pi^2\nu^2} \sin(3\pi\nu) d\nu \\ &\approx \frac{-2}{\pi} \int_0^5 \frac{\cos(6\pi\nu) - 1}{\nu} e^{-2\pi^2\nu^2} \sin(3\pi\nu) d\nu \approx 0.80 \end{aligned}$$

In der untenstehenden Abbildung sehen Sie die Lösung $u(0.5, x)$. Zur Zeit $t = 0$ war die Temperatur für $0 \leq x \leq 3$ auf 1 gesetzt, für $x > 3$ gilt $u(0, x) = 0$. Für Zeiten $t > 0$ wird sich die Temperatur ausgleichen. Das Verhalten der Lösung ist qualitativ richtig.



Lösung zu Aufgabe 2–13 :

(a)

$$\begin{aligned} F_S(\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi\nu x) dx = 2 \int_0^4 \sin(2\pi\nu x) dx \\ &= -2 \frac{\cos(2\pi\nu x)}{2\pi\nu} \Big|_{x=0}^4 = \frac{1 - \cos(8\pi\nu)}{\pi\nu} \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = 2 \int_0^\infty F_S(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(8\pi\nu)}{\nu} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

(c) Stichworte: Linearität und Superposition

Die folgende Tabelle zeigt die Lösung für zunehmend kompliziertere Anfangsbedingungen.

Anfangswert	$u(0, x)$	gelöst durch	$u(t, x)$
$\sin(\lambda x)$		gelöst durch	$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$
$\sin(2\pi\nu x)$		gelöst durch	$u(t, x) = e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x)$
$\sum_{k=1}^n c_k \sin(2\pi\nu_k x)$		gelöst durch	$u(t, x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-(2\pi\nu_k)^2 t} \sin(2\pi\nu_k x)$
$\int_0^\infty G(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu$		gelöst durch	$u(t, x) = \int_0^\infty G(\nu) e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$

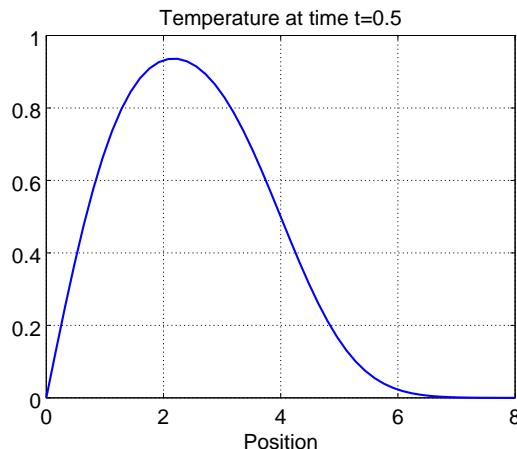
Für die gegebene Rechtecksfunktion $f(x)$ erhalten wir somit die Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(8\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

- (d) Der Term $e^{-4\pi^2\nu^2}$ wird für grosse Werte von ν sehr schnell klein. Deshalb kann das uneigentliche Integral ersetzt werden durch ein approximatives, eigentliches Integral.

$$\begin{aligned} u(0.5, 4) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(8\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 0.5} \sin(2\pi\nu 4) d\nu \\ &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{10} \frac{1 - \cos(8\pi\nu)}{\nu} e^{-2\pi^2\nu^2} \sin(8\pi\nu) d\nu \approx 0.4999 \end{aligned}$$

In der untenstehenden Abbildung sehen Sie die Lösung $u(0.5, x)$. Zur Zeit $t = 0$ war die Temperatur für $0 \leq x \leq 4$ auf 1 gesetzt, für $x > 4$ galt $u(0, x) = 0$. Für Zeiten $t > 0$ wird sich die Temperatur ausgleichen. Das Verhalten der Lösung ist qualitativ richtig.



Octave

```
Nx = 51; xx = linspace(0, 8, Nx); u = zeros(Nx, 1);

function y = fff(t, x, nu)
    y = 2./ (pi*nu).* (1-cos(8*pi*nu)).*exp(-(2*pi*nu).^2*t).*sin(2*pi*nu*x);
endfunction

for kx = 1:Nx
    t = 0.5;
    x = xx(kx);
    u(kx) = quad(@(nu) fff(t, x, nu), 0, 10);
endfor

plot(xx, u)
title("Temperature at time t=0.5");
xlabel("Position");

t = 0.5; x = 4;
U = quad(@(nu) fff(t, x, nu), 0, 10)
```

Lösung zu Aufgabe 2–14 :

(a)

$$\begin{aligned} F_S(\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi\nu x) dx = 2 \int_2^5 10 \sin(2\pi\nu x) dx \\ &= -20 \frac{\cos(2\pi\nu x)}{2\pi\nu} \Big|_{x=2}^5 = 10 \frac{\cos(4\pi\nu) - \cos(10\pi\nu)}{\pi\nu} \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = 2 \int_0^\infty F_S(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu = \frac{20}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(4\pi\nu) - \cos(10\pi\nu)}{\nu} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

(c) Stichworte: Linearität und Superposition

Die folgende Tabelle zeigt die Lösung für zunehmend kompliziertere Anfangsbedingungen.

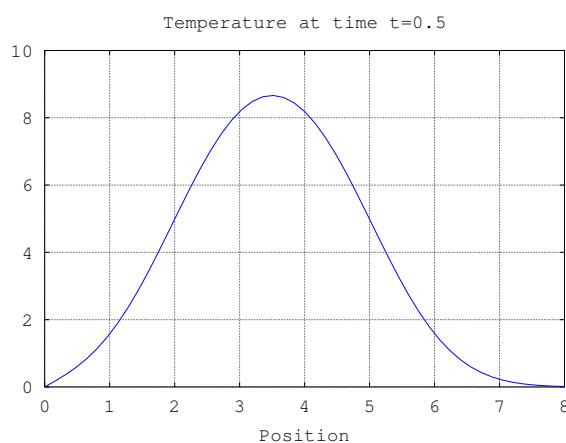
Anfangswert	$u(0, x)$	gelöst durch	$u(t, x)$
$\sin(\lambda x)$		gelöst durch	$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x)$
$\sin(2\pi\nu x)$		gelöst durch	$u(t, x) = e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x)$
$\sum_{k=1}^n c_k \sin(2\pi\nu_k x)$		gelöst durch	$u(t, x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-(2\pi\nu_k)^2 t} \sin(2\pi\nu_k x)$
$\int_0^\infty G(\nu) \sin(2\pi\nu x) d\nu$		gelöst durch	$u(t, x) = \int_0^\infty G(\nu) e^{-(2\pi\nu)^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$

Für die gegebene Rechtecksfunktion $f(x)$ erhalten wir somit die Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{20}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(4\pi\nu) - \cos(10\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

(d) Der Term $e^{-4\pi^2\nu^2}$ wird für grosse Werte von ν sehr schnell klein. Deshalb kann das uneigentliche Integral ersetzt werden durch ein approximatives, eigentliches Integral.

$$\begin{aligned} u(0.5, 4) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(4\pi\nu) - \cos(10\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 0.5} \sin(2\pi\nu 4) d\nu \\ &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{15} \frac{\cos(4\pi\nu) - \cos(10\pi\nu)}{\nu} e^{-2\pi^2\nu^2} \sin(8\pi\nu) d\nu \approx 8.1859 \end{aligned}$$

In der untenstehenden Abbildung sehen Sie die Lösung $u(0.5, x)$. Zur Zeit $t = 0$ war die Temperatur für $2 \leq x \leq 5$ auf 10 gesetzt. Für Zeiten $t > 0$ wird sich die Temperatur ausgleichen. Das Verhalten der Lösung ist qualitativ richtig.

Octave

```

Nx = 51; xx = linspace(0, 8, Nx); u = zeros(Nx, 1);

function y = fff(t, x, nu)
    y = 20 ./ (pi * nu) .* (cos(4 * pi * nu) - cos(10 * pi * nu)) .* ...
        exp(-(2 * pi * nu) .^ 2 * t) .* sin(2 * pi * nu * x);
endfunction

for kx = 1:Nx
    t = 0.5;
    x = xx(kx);
    u(kx) = quad(@(nu) fff(t, x, nu), 0, 15);
endfor

plot(xx, u)
title("Temperature at time t=0.5");
xlabel("Position");

t = 0.5; x = 4;
U = quad(@(nu) fff(t, x, nu), 0, 15)

```

Lösung zu Aufgabe 2-15 :

(a)

$$\begin{aligned}
 F_C(\nu) &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi\nu x) dx = 2 \int_0^5 \cos(2\pi\nu x) dx \\
 &= +2 \frac{\sin(2\pi\nu x)}{2\pi\nu} \Big|_{x=0}^5 = \frac{1}{\pi\nu} \sin(10\pi\nu)
 \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = 2 \int_0^\infty F_C(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(10\pi\nu)}{\nu} \cos(2\pi\nu t) d\nu$$

(c) Stichworte: Linearität und Superposition

Die folgende Tabelle zeigt die Lösung für zunehmend kompliziertere Anfangsbedingungen.

Anfangswert	$u(0, x)$	gelöst durch	$u(t, x)$
$\cos(\lambda x)$		gelöst durch	$u_\lambda(t, x) = e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x)$
$\cos(2\pi\nu x)$		gelöst durch	$u(t, x) = e^{-(2\pi\nu)^2 t} \cos(2\pi\nu x)$
$\sum_{k=1}^n c_k \cos(2\pi\nu_k x)$		gelöst durch	$u(t, x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-(2\pi\nu_k)^2 t} \cos(2\pi\nu_k x)$
$\int_0^\infty G(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu$		gelöst durch	$u(t, x) = \int_0^\infty G(\nu) e^{-(2\pi\nu)^2 t} \cos(2\pi\nu x) d\nu$

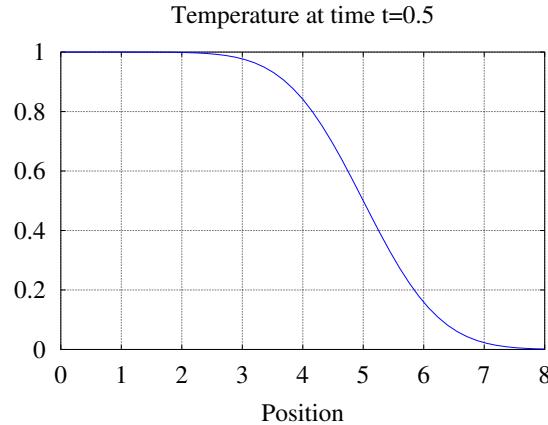
Für die gegebene Rechtecksfunktion $f(x)$ erhalten wir somit die Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(10\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 t} \cos(2\pi\nu x) d\nu$$

(d) Der Term $e^{-4\pi^2\nu^2}$ wird für grosse Werte von ν sehr schnell klein. Deshalb kann das uneigentliche Integral ersetzt werden durch ein approximatives, eigentliches Integral.

$$\begin{aligned}
 u(0.5, 4) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(10\pi\nu)}{\nu} e^{-4\pi^2\nu^2 0.5} \cos(2\pi\nu 4) d\nu \\
 &\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{10} \frac{\sin(10\pi\nu)}{\nu} e^{-2\pi^2\nu^2} \cos(8\pi\nu) d\nu \approx 0.84
 \end{aligned}$$

In der untenstehenden Abbildung sehen sie die Lösung $u(0.5, x)$. Zur Zeit $t = 0$ war die Temperatur für $0 \leq x \leq 5$ auf 1 gesetzt, für $x > 5$ galt $u(0, x) = 0$. Für Zeiten $t > 0$ wird sich die Temperatur ausgleichen. Das Verhalten der Lösung ist qualitativ richtig.



Octave

```

Nx = 51; xx = linspace(0,8,Nx); u = zeros(Nx,1);

function y = fff(t,x,nu)
    y = 2./ (pi*nu).*sin(10*pi*nu).*exp(-(2*pi*nu).^2*t).*cos(2*pi*nu*x);
endfunction

tic;
for kx = 1:Nx
    t = 0.5;
    x = xx(kx);
    u(kx) = quad(@(nu) (fff(t,x,nu)), 0, 10);
endfor

figure(1);
plot(xx,u)
title("Temperature at time t=0.5");
xlabel("Position");

t = 0.5; x = 4;
U = quad(@(nu) (fff(t,x,nu)), 0, 10)

```

Lösung zu Aufgabe 2-16 :

- (a) Die Fouriertransformation der Rechtecksfunktion der Breite $2b$ ist gegeben durch

$$G(\nu) = \frac{1}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu b)$$

- (b) Die Fouriertransformation der wahren Funktion ist mit der Transformation der Fensterfunktion zu falten. Dadurch werden die Frequenzen ausgeschmiert. Da die beiden zu trennenden Frequenzen einen Abstand von 1 Hz haben, darf jede der beiden Spitzen um höchstens 0.5 Hz ausgeschmiert werden. Somit sollte die „Breite“ der Fouriertransformation der Fensterfunktion kleiner als 0.5 Hz sein. Die ersten beiden Nebenmaxima der Fensterfunktion des Fensters mit Breite $2b$ liegen bei $\nu = \pm \frac{3}{4b}$. Nehmen wir diese Grösse als Mass für die „Breite“ (etwas willkürlich), so muss also die Bedingung $\frac{1}{2} > \frac{3}{4b}$ erfüllt sein. Das führt auf ein Messintervall mit $b > \frac{3}{2}$. Somit muss **mindestens 3 Sekunden lang gemessen** werden. Die Abtastfrequenz muss grösser als 10 KHz sein. Somit sind mindestens 30'000 Messpunkte erforderlich. **Mögliche Wahlen sind $2^{15} = 32'768$ oder $2^{16} = 65'536$ Messpunkte.**

(c) Der Rechenaufwand ist proportional zu $n \log_2 n$, d.h.

$$A(n) \approx c n \log_2 n$$

Mit Hilfe von $A(1024) = 1$ kann c bestimmt werden und man erhält

$$\begin{aligned} A(2^{15}) &= \frac{1}{1024 \cdot 10} 2^{15} \cdot 15 = 2^5 \frac{15}{10} = 48 \\ A(2^{16}) &= \frac{1}{1024 \cdot 10} 2^{16} \cdot 16 = 2^6 \frac{16}{10} = \frac{512}{5} = 102.4 \end{aligned}$$

Somit ist die notwendige Rechenzeit ca. 48 (resp. 102) Sekunden.

2.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- den Zusammenhang von Fourierreihen und Fouriertransformation verstehen.
- Fouriertransformationen von einfachen Funktionen bestimmen können.
- den Faltungssatz verstehen.

Literaturverzeichnis

- [CoolTuke65] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, 19:297–301, 1965.
- [Fowl75] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Holt, Rinehart and Winston, second edition, 1975. republished by Dover.
- [FrutNyff97] P. Frutig and E. Nyffenegger. Filterung von Hell-Dunkel-Streifen in Zielaufnahmen bei Anwesenheit von Kunstlicht. Master's thesis, Ingenieurschule Biel, 1997.
- [Jame02] J. James. *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 2002.
- [Oppe78] A. V. Oppenheim. *Applications of Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1978.
- [OppeScha89] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 1989.
- [Stew87] E. G. Steward. *Fourier Optics: An Introduction*. Ellis Horwood Limited, second edition, 1987. republished by Dover.
- [Stew13] I. Stewart. *Seventeen Equations that Changed the World*. Profile Books Limited, 2013.
- [TikhSama63] A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii. *Equations of Mathematical Physics*. Pergamon Press, 1963. republished by Dover.
- [Twom77] S. Twomey. *Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements*. Number 3 in Developments in Geomathematics. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. republished by Dover 1996.
- [Grun93] D. von Grünigen. *Digitale Signalverarbeitung*. AT Verlag, Aarau, 1993.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Verhalten eines Tiefpassfilters, Approximation durch Fouriersumme	7
1.2	Fourier–Lösung eines statischen Wärmeleitungsproblems	10
1.3	Bewegung einer eingespannten Saite	12
1.4	Bewegung einer eingespannten Saite, Wellenbewegung	13
1.5	Zielfilm, vor Bearbeitung	13
1.6	Signal im Zielfilm entlang einer Zeile	14
1.7	Spektrum des Signals im Zielfilm entlang einer Zeile	15
1.8	Amplitudenspektrum eines Zielfilms	16
1.9	Zielfilm, nach Bearbeitung	17
1.10	Fraunhofer Beugung an einem Doppelspalt	17
1.11	Fraunhofer Beugung	18
1.12	Fraunhofer Beugung am Doppelspalt	19
1.13	Fraunhofer Beugung am einfachen Spalt	20
1.14	Funktionen mit Korrelationskoeffizienten +0.45 und –0.88	21
1.15	Graph einer Korellationsfunktion	22
1.16	Ausschnitt aus einem Tonsignal	24
1.17	Autokorrelationskoeffizienten eines Tonsignals	25
1.18	Berührungslose Geschwindigkeitsmessung	25
1.19	Gemessene Intensitäten als Funktion der Zeit	25
1.20	Korrelationsfunktion der beiden Signale	26
1.21	Projektion auf einen eindimensionalen Raum	28
1.22	Projektion auf einen zweidimensionalen Raum	29
1.23	Fourierapproximation von $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$	36
1.24	Phänomen von Gibbs	37
1.25	Vergrößerung des Phänomens von Gibbs für $f(x) = \text{sign } x$	40
1.26	Graph einer Rechtecksfunktion	52
1.27	Amplitudenspektren der Funktion $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$	55
1.28	Intensitätsverteilung	55
1.29	Intensitätsverteilung mit zwei verschiedenen Filterfunktionen	56
1.30	Eine Rechteckfunktion und ihr Amplitudenspektrum	61
1.31	Amplitudenspektrum von $f(t)$ und $f(t) \cdot g(t)$	62
1.32	Mehrere Rechteckfunktionen und ihr Amplitudenspektrum	62
1.33	Einige Fensterfunktionen und Ihre Amplitudenspektren (Dezibel–Skala)	64
1.34	Amplitudenspektrum von $f(t)$, mit Rechteck- und Hamming–Fenster	64
1.35	Fourier Methoden	66
1.36	Vollständiges FFT–Spektrum der Funktion $f(x) = \text{sign } x$ auf $[-\pi, \pi]$	76
1.37	Netzlast über ein ganzes Jahr	78
1.38	Amplitudenspektrum der Netzlast	79
1.39	Variation der Netzlast über einen Tag	79
1.40	Fourierapproximation und Amplitudenspektrum	81

1.41 Amplitudenspektrum zweier sin–Funktionen	82
1.42 Amplitudenspektrum von $\sin(26t) + \cos(40t)$ auf verschiedenen Intervallen	82
1.43 Amplitudenspektrum mit $T = 3$ und 2^6 Abtastwerten	83
1.44 Amplitudenspektrum für verschiedene Werte von T und n	84
1.45 Zero–Padding der Fourier Koeffizienten	86
1.46 Trigonometrische Interpolation durch Zero–Padding	86
1.47 Ein einfacher Schubkurbeltrieb	87
1.48 Schubkurbeltrieb mit $r = 1$ und $l = 3$	88
1.49 Schubkurbeltrieb mit $r = 1$ verschiedenen Werten von l	88
1.50 Fourier-Spektrum der Beschleunigung eines Kurbeltriebs	90
1.51 Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.017	91
1.52 Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.05	92
1.53 Graph und Spektrum einer Funktion mit Klirrfaktor 0.138	92
1.54 Apply a low pass filter to an image, based on FFT	93
1.55 Original image of Lenna, and with a lowpass filter by FFT	94
1.56 Fourier approximation of the function $f(x) = 1$ and a solution of the static heat equation	96
1.57 Fourier approximation of a solution of the dynamic heat equation	98
1.58 Fourier approximation of the function $f(x, y) = 1$ on a rectangle and the resulting temperature	99
2.1 Eine lokalisierte Funktion und ihre periodischen Fortsetzungen mit Perioden 5, 10 und 15	176
2.2 Fouriertransformation eines Rechtecksignals und Rekonstruktion des Signals	178
2.3 Temperature at different times	189
2.4 Temperature at different depth levels	191
2.5 Temperature at different depth levels	194
2.6 Fraunhofer diffraction	197

Tabellenverzeichnis

1.1	Symmetrieeigenschaften der Fourierkoeffizienten	48
1.2	Eigenvalues of $-(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ on rectangular domain with $L = 5$ and $B = 3$	100
2.1	Eigenschaften der Fouriertransformation	183