Algèbre linéaire et Géométrie

Andreas Stahel

12 novembre 2021

Table des matières

Chapitre 1

Nombres et démonstration

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques concepts mathématiques et une bonne idée d'un preuve. Vous ne devez pas trouver des nouveaux résultats et plutôt concentrer sur les nouveaux notions et structures. Dans ce chapitre on doit savoir les mots de clés élément, ensemble, ensemble vide, union, intersection et complément. On travaille avec des diagrammes de Venn.

1.1 définition, assomption, résultat, preuve

Dans cette section quelques notions sont fixées et illustrées avec des exemples. Les explications viens des livres [Solo90] et [Schw75].

1–1 Définition : En mathématique une **définition** est un accord sur la signification d'un terme. Les définition ne sont pas fait par hasard. Habituellement ils sont motivées par des expressions ou structures qu'on retrouve souvent. Une définition peut aussi servir comme abréviation pour une expression compliqué.

Voilà quelques examples simples.

1–2 Exemple :

1. Un nombre entier n est dit **diviseur** du nombre entier m, si il existe un nombre entier k tel que $m = n \cdot k$.
2. Un nombre $p > 1$ entier, positive est dit **nombre premier** si 1 et p sont les seuls diviseur.
3. Un triangle est dit **triangle isocèle** si deux côtés sont de la même longueur.
4. Un nombre entier est dit **nombre pair** si 2 est un diviseur du nombre.
5. Un nombre q est dit **nombre rationnel** si il peut être écrit dans la forme $q = \frac{a}{b}$, avec des nombres entiers a et $b \neq 0$.
6. On dit que une proposition A **implique** la proposition B ($A \Longrightarrow B$), si B est vrai sous condition que A est vrai. Ils n'est pas possible arriver à B faux et A vrai.
7. On dit que les propositions A et B sont équivalentes si A implique B et B implique A. Veut dire $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$.
8. La proposition A **et** B ($A \wedge B$) est vrai si, et seulement si A est vrai et B est vrai.
9. La proposition A **ou** B ($A \vee B$) et vrai si, et seulement si une (ou les deux) proposition de A et B est vraie.

$\diamondsuit$

1–3 Définition : Un **résultat** mathématique est une proposition vraie. Souvent on doit vérifier qu'un résultat est juste, veut dire on va **prouver** le résultat. Un résultat important est dit **théorème**. Des fois une démonstration d'un théorème est longe et compliquée, donc on la divise en plusieurs parties simples. Un tel résultat partiel est dit **lemme**. Il existe aussi des résultats fondamentales qui sont vrai par définition. On ne peut pas les prouver. Un tel résultat est dit **axiom**.

1–4 Exemple : Le résultat suivant est un axiom.
Pour chaque nombre naturel n il existe un prochain nombre, dit $n + 1$. $\diamondsuit$

On dit qu' Euclid a trouvé un **schéma de démonstration** très utile. Des fois les enseignants insiste trop sur ce schéma et donc il n'est pas très populaire. Mais c'est une bonne aide pour organiser une démonstration. Nous allons baser nos démonstrations sur le schéma de Euclid, sans toujours insister sur tout les détails.

Euclid utilisait sa structure suivante:

(a) **prémisse**

(b) **affirmation**

(c) **démonstration**

La fin d'une démonstration est indiquée par le symbole $\square$. La seule partie qui nous demande de „travailler“ est la troisième. Donc les deux premier ne sont pas tellement important. Mais l'expérience montre qu'il est préférable de formuler la prémisse et l'affirmation pour clarifier le travail à faire dans la démonstration.

Voilà quelques exemples comme illustration.

1–5 Résultat : *Pour chaque nombre pair n le nombre n^2 est aussi pair.*

Démonstration :

(a) **prémisse**: n est un nombre pair.

(b) **affirmation**: n^2 est un nombre pair.

(c) **démonstration**: A cause de la prémisse n est de la forme $n = 2 \cdot m$ pour un nombre entier m. Donc on a
$$n^2 = n \cdot n = (2 \cdot m) \cdot (2 \cdot m) = 4 \cdot m^2$$

Le nombre $2 \cdot m^2 = M$ est entier et donc n^2 est de la forme $2 \cdot M$ est donc n^2 est pair. $\square$

1–6 Théorème : *(théorème de Pythagoras)*
Dans un triangle droit avec longueurs des côtés a, b et c on sait que $a^2 + b^2 = c^2$. La longueur de l' hypoténuse est c.

Démonstration :

(a) **prémisse**: géométrie élémentaire et un triangle droit ABC, dont la côte c est opposée de l'angle droit.

(b) **affirmation**: $a^2 + b^2 = c^2$

(c) **démonstration**: regardons la figure 1.1. On peut boucher les quatre triangle du carré à gauche dans le carré à droit, sans changer l'aire. Donc les aires supplémentaires dans les deux carrés sont les mêmes. C'est le résultat à vérifier.

$\square$

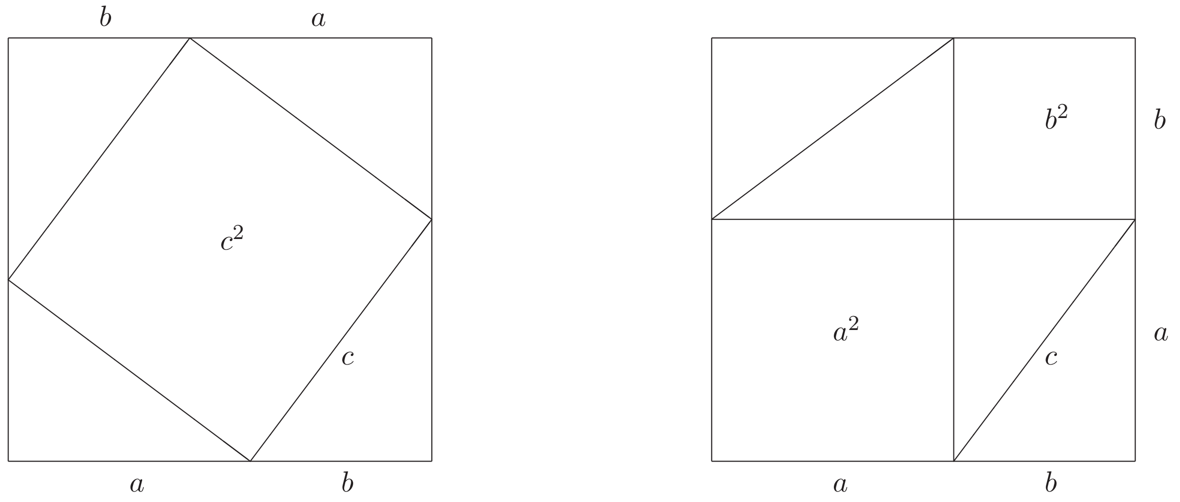


Figure 1.1: démonstration géométrique du théorème de Pythagore

Il y a des techniques différentes de démonstration à utiliser souvent.

- **démonstration directe** ou **démonstration constructive**
  Avec les prémisses on construit (calcule) l'affirmation, avec des arguments correctes. Cette façon de preuve peut être représenter par la graphique

  $$\text{prémisse} \quad \Longrightarrow A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P \Longrightarrow R \Longrightarrow \quad \text{affirmation}$$

  Des fois il est avantageux de travailler des deux côtés. Finalement on est obliger de vérifier la chaîne des implications. Les deux exemples dessus sont des démonstrations directes. La preuve du théorème d' Euclid (voir page 7: Il y a un nombre infini de nombre premier) peut être donnée par une construction.

- **démonstration indirecte** ou **démonstration par contradiction**
  Avec la prémisse A on doit vérifer le résultat B, donc on regarde l'implication

  $$A \Longrightarrow B$$

  Au lieu de ça on vérifie

  $$\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$$

  Cette implication est équivalent à l'implication originale. La méthode est illustrée par l'exemple simple ci–dessous.

  1. prémisse A: il pleut.
  2. affirmation B: la route est mouillée
  3. L'implication

     $$A \Longrightarrow B$$

     correspond à la phrase

     Si il pleut, la route est mouillée

     La deuxième implication

     $$\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$$

     corresponde à la phrase

     Si la route n'est pas mouillée, il ne pleut pas.

     Il est „évident“ que ces deux phrases sont équivalentes. Les démonstrations par contradiction se base sur cette idée.

Le théorème d' Euclid (page 7) est vérifier par une démonstration par contradiction. On suppose que le contraire de l'affirmation est vrai. Puis avec des arguments correctes et des calculations on arrive à un résultat qui est faux, une contradiction. Donc la supposition doit être fausse est le résultat originale est vrai. La démonstration que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel est donnée par contradiction.

- **démonstration par récurrence**
  Cette méthode de démonstration est présentée dans la section 1.4. La méthode n'est ni plus importante ni plus difficile que les autres, mais habituellement les étudiants doivent travailler un peu plus dur pour la maîtriser.

- **démonstration d'unicité**
  ce n'est pas une méthode de preuve mais plutôt un résultat typique. Souvent on cherche des solutions d'un problème et on trouve une solution. Puis on se demande s'il y a des autres solutions. On essaye de prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions. Comme exemple étudier l'algorithme de Euclid ci–dessous.

1–7 Résultat : *(algorithme de Euclid)*
Soient a et b deux nombres entiers, positives. Puis l'algorithme suivante donne le diviseur commun le plus grand possible t de ces deux nombres. Ce diviseur est unique. Examiner le schéma ci–dessous.

$$\begin{aligned}
a &= q_1\, b + r_1 && \text{avec } r_1 \neq 0 \text{ et } r_1 < b \\
b &= q_2\, r_1 + r_2 && \text{avec } r_2 \neq 0 \text{ et } r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3\, r_2 + r_3 && \text{avec } r_3 \neq 0 \text{ et } r_3 < r_2 \\
r_2 &= q_4\, r_3 + r_4 && \text{avec } r_4 \neq 0 \text{ et } r_4 < r_3 \\
& \vdots \\
r_{n-2} &= q_n\, r_{n-1} + r_n && \text{avec } r_n \neq 0 \text{ et } r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1}\, r_n + 0
\end{aligned}$$

Puis $t = r_n$ est le diviseur commun le plus grand possible de a et b. Dans ce schéma tous les nombres sont positives.

Dans les calculations ci–dessus on a utilisé un résultat sur la division de deux nombres positives. Ici nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat.

1–8 Lemme : *Soient a et b deux nombres entiers, strictement positives. Puis il existe deux nombres unique entier, tel que*

$$a = b \cdot q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

Démonstration : (de l'algorithme de Euclid)
A cause de l'inégalité $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0$ l'algorithme termine après moins que r_1 pas. Diviser la démonstration en multiples étapes.

1. Vérifier que t est un diviseur de a et b.
   Commençons dans la dernière ligne. Il est évident que t est un diviseur de r_{n-1}. A cause de l'avant-dernière ligne t divise r_{n-2} aussi. En travaillent de bas en haut on arrive finalement à la conclusion que t divise a et b.

2. Vérifier qu'il n'y a pas de diviseur plus grand.
   Soit $s \geq t$ un autre diviseur de a et b. Donc (première ligne) s divise r_1. A cause de la deuxième ligne s est un diviseur de r_2. Répéter le schéma de haut en bas pour arriver l̀a conclusion, que s est un diviseur de $r_n = t$. Donc on a $s = t$.

3. démonstration unicité
   Soit u un autre diviseur commun le plus grand possible. Puis on trouve une des trois situations suivantes:
   (a) $u < t$, puis u n'est pas le diviseur commun **le plus grand possible**.
   (b) $u > t$, puis u n'est pas un diviseur **commun** de a et b (voir pas 2 de la démonstration).
   (c) $u = t$ est donc le seul cas possible.

   Donc t est le **p**lus **g**rand **c**ommun **d**iviseur, bref le **pgcd**.

$\square$

1–9 Exemple : Chercher le pgdc de 693 et 147.

$$\begin{aligned} 147 &= 0 \cdot 693 + 147 \\ 693 &= 4 \cdot 147 + 105 \\ 147 &= 1 \cdot 105 + 42 \\ 105 &= 2 \cdot \ \ 42 + 21 \\ 42 &= 2 \cdot \ \ 21 + 0 \end{aligned}$$

Le pgcd de 693 et 147 est 21. $\diamondsuit$

1.2 systèmes des nombres

En mathématique on travaille souvent avec des nombres et il y a des types différentes. Tous les types (sauf $\mathbb{C}$) peuvent être illustrés sur un **axe de coordonnées**.

1–10 Définition :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ nombres naturelles
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ nombres entiers
- $\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}$ avec $\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$ nombres rationnels
- $\mathbb{R}$ nombres réels
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ nombres irrationnels
- $\mathbb{C}$ nombres complexes

1–11 Résultat : *On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et tous ces sous-ensembles sont des sous-ensembles strictes, veut dire il y a des nombres rationnels qui ne sont pas des nombres réels.*

Il est facile de trouver des exemples pour ce résultat.

1–12 Définition : Un ensemble A de nombres est dit **fermé** sous une opération, si l'application de cette opération produit toujours des résultats dans l'ensemble A.

1–13 Exemple :

- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ sont fermés sous l'opération addition.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ ne sont pas fermés sous l'opération soustraction.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ sont fermés sous l'opération multiplication.
- Les nombres naturelles $\mathbb{N}$ ne sont pas fermés sous l'opération division.
- Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction et multiplication.
- Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ ne sont pas fermés sous l'opération division.
- Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction, multiplication et division.
- Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés sous l'opération de calculer des racines, par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Les nombres réels $\mathbb{R}$ sont fermés sous les opérations addition, soustraction, multiplication, division et calculer des racines des nombres positive.
- Les nombres réels $\mathbb{R}$ ne sont pas fermé sous l'opérations „résoudre des équation polynômials". Par exemple il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 + 1 = 0$. Cette restriction est la raison d'être des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- Les nombres complexes $\mathbb{C}$ sont fermés sous les opération addition, soustraction, multiplication et division. Chaque équation polynômiale en $\mathbb{C}$ a une solution en $\mathbb{C}$ (**théorème fondamentale de l'algèbre**).

♢

Quelques-uns de ces résultat sont vérifiés en classe.

1.2.1 nombres rationnels et représenation décimales

1–14 Théorème : *Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme d'une fraction décimale finie ou périodique. Réciproquement toute fraction décimale finie ou périodique se transforme en fraction de deux nombres entiers.*

Démonstration : Utiliser deux idées simples pour vérifier cette caractérisation des nombres rationnels.

division élementaire

```
214 : 7  = 30.571428571428571428571428571428...
  40
   50
    10
     30
      20
       60
        40
         50
          ..
           ..
```

Après chaque pas de cette division il reste un nombre plus petit que 7, donc seulement les restes 0,1,2,3,4,5,6 sont possibles. Après moins que 6 pas on arrive à un reste de 0 (fraction décimale finie) ou on retrouve un reste et donc la fraction devient périodique.

Un argument similaire montre que pour chaque nombre rationnel a/b on arrive à une représentation décimale finie (reste 0) ou périodique avec période plus petit que $b-1$.

Il nous reste à vérifier que chaque fraction décimale finie ou périodique peut être écrit comme fraction de deux nombres entiers. Comme illustration regarder x donné par $27.12\overline{123}$

```
1000 x = 27121.23123123123123123...        |+
     x =    27.12123123123123123123...     |-
-------------------------------------------
 999 x = 27094.11
```

Donc on sait que $x = 2709411/99900$ et x est dans la forme d'une fraction. La même idée peut être utilisée pour des fraction décimales périodiques. □

1–15 Exemple : Avec la caractérisation des nombres rationnels ci–dessus on peut aussi donner la représentation d'un nombre irrationnel.

$$0.101101110111101111101111110111111110\ldots$$

♢

1–16 Théorème :

(a) Entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

(b) Entre deux nombres irrationnels il y a toujours un nombre rationnel.

Démonstration : Avec la caractérisation ci–dessus on peut construire de tels nombres, voir problèmes 1–16 et 1–17. □

1.2.2 nombres premiers

1–17 Définition : Un nombre $p > 1$ entier, positive est dit **nombre premier** si 1 et p sont les seuls diviseurs.

1–18 Exemple : Voilà quelques nombres premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, \ldots$ ♢

1–19 Lemme : *Chaque nombre naturel peut être écrit comme produit des nombres premiers, Cette factorisation est unique.*

1–20 Exemple : $99 = 3 * 3 * 11$ ou $99'999 = 3 * 3 * 41 * 271$ ♢

1–21 Théorème : *(Euclid)*
Il y a un nombre infini de nombres premiers.

Démonstration : par contradiction.
Supposition: le résultat est faux, donc il y a un nombre fini n de nombre premiers.

Donc on peut numéroter **tous** les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_n$ et puis calculer le nouveau nombre

$$P = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Calculer la factorisation en nombres premiers q_j du nombre $Q = P + 1$

$$Q = P + 1 = \prod_{j=1}^{m} q_j$$

et puis regarder q_1. La division de Q par p_k donne un reste de 1, donc q_1 ne se trouve pas dans les „vieux" nombres premiers et on en a trouvé un nouveau. Donc il y a au moins $n + 1$ nombres premiers. C'est une contradiction avec la supposition.

Donc il y a un nombre infini de nombres premiers. □

La démonstration ci–dessus contiens un algorithme pour construire des nombres premiers. Cette algorithme est très **inefficace**. Pour trouver des nombres premiers il vaut mieux d'utiliser le *crible d'Eratosthénes*. Voilà quand même une illustration.

p_1=2	a_1=2	$+1 = 3$	
p_2=3	a_2=$2 \cdot 3$	$+1 = 7$	
p_3=7	a_3=$2 \cdot 3 \cdot 7$	$+1 = 43$	
p_4=43	a_4=$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$	$+1 = 1807$	$= 13 \cdot 139$
p_5=13	a_5=$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13$	$+1 = 23479$	$= 53 \cdot 443$
p_6=53	a_6=$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 13 \cdot 53$	$+1 = 1244335$	$= 5 \cdot 248861$
p_7=5	....	....	....

1–22 Exemple : Il ne suffit pas de vérifier une affirmation pour quelques exemples. La formule

$$n^2 + n + 41$$

donne des nombres premiers pour $n = 1, 2, \ldots, 39$, mais il y a aussi des valeurs de n pour lesquelles on arrive à des nombres non premiers. ♢

1–23 Théorème : *$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*

Démonstration : Démonstration par contradiction.

Supposition: $x = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $x \cdot x = 2$

Chercher la factorisation de a et b

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

A cause de $x \cdot x = 2$ on sait que

$$p_1 p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 \ldots p_n p_n = 2 q_1 q_1 q_2 q_2 q_3 q_3 \ldots q_m q_m \qquad .$$

A gauche de cette signe d'égalité on trouve un nombre paire de facteurs 2, mais a droite un nombre impaire de facteurs 2. Donc on a deux factorisations différentes du même nombre. C'est une contradiction avec le lemme ci–dessus. Donc la supposition doit être fausse et on sait que $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit comme fraction de deux nombres entiers. □

L'idée de la démonstration ci–dessus est utile pour examiner des autres nombres et décider s'ils sont rationnels ou irrationnels. Voir les problèmes 1–8, 1–11, 1–9, 1–12, 1–13 et 1–14.

1.2.3 nombres réels

1–24 Définition :

- Un ensemble A de nombres est dit **majoré** s'il y a un nombre z tel que $x \leq z$ pour tout $x \in A$.
- Le nombre z s'appelle **majorant** de A.
- Un majorant z_0 de A est appelé **borne supérieur** de A ou **suprémum** si tout autre majorant z est supérieur ou égal a z_0.
- Un ensemble A de nombres est dit **minoré** s'il y a un nombre y tel que $y \leq x$ pour tout $x \in A$.
- Le nombre y s'appelle **minorant** de A.
- Un minorant y_0 de A est appelé **borne inférieur** de A ou **infimum** si tout autre minorant z est inférieur ou égal a y_0.
- L'ensemble A est dit **borné** s'il y a un majorant et un minorant.
- $A = [a, b]$ est appelé **intervalle fermé** et on a $x \in [a, b]$ si et seulement si $a \leq x \leq b$.
- $A = (a, b)$ est appelé **intervalle ouvert** et on a $x \in (a, b)$ si et seulement si $a < x < b$.

1–25 Résultat : *Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Puis on a les règles de calcul*

$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	*loi de commutativité*
$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	*loi d'assoziativité*
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	*loi de distributivité*

Il est difficile d'illustrer la différence entre les nombres rationnels (fractions des nombres entiers) et des nombres réels sur l'axe des nombres. Mais il y a des différences qui sont fondamentals pour l'analyse mathématique.

1–26 Théorème : *(Axiom de borne supérieur)*
Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (non vide) majoré possède un suprémum en $\mathbb{R}$. Tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ (non vide) minoré possède un infimum en $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il n'est pas **possible** de prouver cette propriété, cet un axiom. Cet axiom est équivalent au principe des emboîtements des intervalles (Postulat de Cantor–Dedekind). □

1–27 Exemple : L'axiom de borne supérieur est faux pour les nombres rationnels. Comme exemples regarder l'ensemble M de tous les nombres rationnels q tel que $q \cdot q < 2$. Cet ensemble est borné. Le candidat pour le suprémum est $\sqrt{2}$, qui n'est pas un nombre rationnel. Donc M n'as pas de suprémum en $\mathbb{Q}$. ♢

1–28 Définition : La **norme** (ou la **valeur absolu, le modulus**) d'un nombre réel donne la distance de 0 de ce nombre sur l'axe des nombres.

$$|a| = \begin{cases} a & : \quad a > 0 \\ -a & : \quad a < 0 \end{cases}$$

1–29 Résultat : *On peut vérifier que* ***l'inégalité triangulaire*** *est vrai.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1–30 Résultat : *(règles de calcul pour les inégalités)*

$$\begin{array}{ccc} a < b & \Longrightarrow & a + c < b + c \\ a < b\ ,\ c > 0 & \Longrightarrow & ac < bc \\ a < b\ ,\ c < 0 & \Longrightarrow & ac > bc \\ 0 < a < b & \Longrightarrow & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0 \\ a < b < 0 & \Longrightarrow & 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ ab = 0 & \Longrightarrow & a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{array}$$

1.3 symbole de sommation et produit

La somme des nombres réels $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ peut être écrit comme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad .$$

En général on écrit pour $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad .$$

Si $m > n$ on met

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad .$$

Avec $a_k = 1/k$ on arrive à la notation

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad .$$

Vérifier que

$$s_5 = 137/60 \qquad s_{10} = 2.928968\ldots \qquad .$$

Les calculatrices HP–48 calcule s_{10} par la commande

$$'\sum(K = 1, 10, 1/K)\,'$$

Donc la calculatrice peut vérifier que $s_{1000} = 7.485447\ldots$. Il est avantageux de ne pas faire cette calculation à la main

Dans l'exemple ci–dessus le nom de la variable temporaire k en $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ n'est pas important. On a en effet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \qquad .$$

Ce résultat peut être vérifié avec la calculatrice avec (pour $a_k = 1/k$ et $n = 7$)

$$\sum(k = 1, 7, 1/k) = \sum(j = 1, 7, 1/j) = \sum(k = 0, 6, 1/(k + 1)) \qquad .$$

Il est façile de voir que les règles suivantes sont justes

1–31 Résultat : *Considérer pour tout $k \in \mathbb{N}$ des nombres réels a_k et b_k, une constante c et des nombres entiers n, m, l, i, j tel que $m \leq n \leq l$*

(a)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

(b)

$$\sum_{k=m}^{n} (c a_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k$$

(c)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{l} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k$$

(d)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}$$

(e)

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$$

Pour des sommes on a (en général)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \cdot \sum_{k=m}^{n} b_k \neq \sum_{k=m}^{n} (a_k b_k) \qquad ,$$

Vérifier ce résultat par l'exemple

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \neq (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9})$$

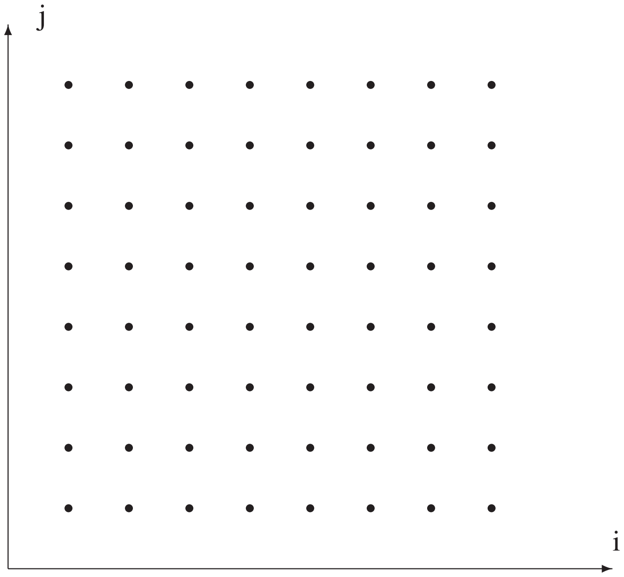


Figure 1.2: Illustration de la multiplication de deux sommes

1–32 Résultat : *Pour la multiplication de deux sommes on a*

$$(\sum_{k=m}^{n} a_k) \cdot (\sum_{k=m}^{n} b_k) = \sum_{k=m}^{n} (a_k \sum_{j=m}^{n} b_j) = \sum_{k=m}^{n} (b_k \sum_{j=m}^{n} a_j) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{j=m}^{n} (a_k b_j) \qquad .$$

Démonstration : Ce résultat est **illustré** par la figure 1.2. Le point dans la i–ième colonne et j-ième ligne correspond au terme $a_i \cdot b_j$ dans les sommes.

La somme

$$a_i \sum_{j=1}^{8} b_j$$

est calculé dans la colonne i et

$$b_j \sum_{i=1}^{8} a_i$$

dans la ligne j. L'expression

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} (a_i b_j)$$

correspond à la somme de tous les termes dans cette grille. Cette somme se calcule colonne après colonne ou ligne après ligne. Donc on obtient le formulet dans de l'affirmation. □

Pour la division de deux sommes il existe **pas** de formule simple.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k / \sum_{k=m}^{n} b_k = ?$$

1–33 Exemple : Comme exercice vérifier les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{3} n^2 = 14 \qquad \sum_{n=1}^{k} 2 = 2k$$

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 55 \qquad \sum_{n=1}^{k} k = k^2$$

$$\sum_{n=1}^{5} 2 = 10 \qquad \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

♢

1–34 Exemple : Utiliser

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

pour vérifier les résultats

(a)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(c)

$$\sum_{k=3}^{n+2} (k-2) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

♢

1–35 Résultat : *Pour la* ***somme géométrique*** *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

sous condition que $q \neq 1$.

Démonstration : Multiplication de la somme avec $(1-q)$ donne

$$(1-q)\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

et donc le résultat. □

1–36 Exemple : Pour un loto l'organisateur promet un prix de $1'000'000, à payer en 20 tranches de $50'000 à la fin des 20 années.

(a) Quelle somme doit l'organisateur mettre à coté aujourd'hui pour payer le prix? Calculer avec un taux d'intérêt der 5% .

(b) Quelle somme est à disposition du vainqueur au fin des 20 ans? Calculer aussi avec un taux d'intérêt de 5%

$\diamondsuit$

Solution : Mettre $a = \$50'000$ et $q = 1.05$.

(a) Dans une année la somme de l'organisateur gagne de l'intérêt et est donc a multiplier avec le facteur q. Donc on met nettement moins que $1'000'000 à côté.

- Pour le premier payement après une année l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q}$ à côté.
- Pour le deuxième payement après deux années l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^2}$ à côté.
- Pour le troisième payement après trois années l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^3}$ à côté.
- Pour le payement après n années l'organisateur doit mettre $\frac{a}{q^n}$ à côté.

Avec une sommation on arrive a une somme totale s.

$$s = \sum_{n=1}^{20} \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q} \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{q^n} = \frac{a}{q} \frac{1-(1/q)^{20}}{1-1/q} = \frac{a\,(1-(1/q)^{20})}{q-1} \approx \$623'110.52$$

(b) Avec des observations similaires on obtient

$$\sum_{n=0}^{19} a\, q^n = a\,\frac{1-q^{20}}{1-q} \approx \$1'653'298$$

Si l'organisateur paye immédiatement la somme totale et le vainqueur et seul à profiter de l'intérêt il aurait une somme très grande à disposition après 20 années.

$$20 \cdot a\, q^{20} \approx \$2'653'298$$

$\square$

1–37 Exemple : Considérer le nombre irrationnel

$$x = 0.1011011101111011111011111101111111 0\ldots$$

Avec la définition

$$a_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} (1+k)$$

x peut être approximé par

$$x \approx \sum_{n=1}^{m} \left(10^{-a_n} \sum_{j=1}^{n} 10^{j-1}\right)$$

pour m assez grand. $\diamondsuit$

Démonstration : Avec *Mathematica* ce résultat est illustré par les commandes

Mathematica

```
a[n_] := Sum[1+k,{k,1,n}]-1 ;
b[n_] := Sum[10^(j-1) ,{j,1,n}];
x[m_] := Sum[(10^(-a[n])) b[n] ,{n,1,m}];
N[x[5],80]
.
0.1011011101111011111
```

□

Soient $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ des nombres réels. Puis on écrit leur produit comme

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad .$$

En général on met pour $m \leq n$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \qquad .$$

Si $m > n$ on définie

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \qquad .$$

Comme exemple regarder les **factoriels**, donnés par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad .$$

1–38 Exemple : Pour des nombres entiers $0 < k < n$ on définie les **coefficients binomials** par les formules

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$

Pour que les règles de calcul sont plus simples on définie

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) := 0 \quad \text{pour} \quad k > n$$

Comme exemple calculer

$$\left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \prod_{j=1}^{2} \frac{7+1-j}{j} = 21$$

Ces coefficients sont importants pour les problèmes combinatoires et le triangle de Pascal (formule du binôm). ♢

1.4 démonstration par récurrence

Examiner pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une affirmation A_n. Comme exemple nous considérons

$$A_n : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Il est façile de vérifier que A_1, A_2 et même A_{10} sont vrai. Mais il existe un nombre infini de nombres naturels et donc on arrive pas a les examiner tout à la main. Pour prouver que A_n est vrai pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ on utilise le **principe d'induction mathématique** ou aussi dit **raisonnement par récurrence**.

1–39 Théorème : *Soit A_n une affirmation pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et*

1. *A_1 est vrai*
2. *Si A_n est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ puis A_{n+1} doit aussi être vrai.*

Le premier point est dit ***base de l'induction****, le deuxième est dit* ***pas d'induction****. Si les deux points sont vrais on sait que A_n est vrai pou tout $n \in \mathbb{N}$.*

Cette méthode de démonstration est visualisée par des dominos.

1–40 Exemple : Pour l'exemple dessus la base de l'induction est l'affirmation

$$A_1 : \qquad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}$$

et donc vrai.

Pour vérifier le pas de l'induction utiliser la prémisse

$$A_n : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

et vérifier la formule similaire pour A_{n+1}.

$$A_{n+1} : \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+1+1)}{2}$$

Utiliser les règles de calculs avec des sommes pour

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= n+1 + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

C'est affirmation A_{n+1}, qui est donc vrai.

Le principe d'induction implique maintenant que A_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♢

1–41 Exemple : Pour vérifier que

$$n < 2^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

utiliser la base d'induction $1 < 2^1 = 2$. Puis utiliser $n < 2^n$ pour vérifier

$$n + 1 < 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad ,$$

Donc le principe d'induction mathématique dit que l'inégalité est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♢

Il n'est pas nécessaire de toujours commencer avec $n = 1$. Utiliser une modification.

1–42 Théorème : *Soit A_n une affirmation pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixe avec*

1. *A_j est vrai*
2. *Si l'affirmation A_n est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq j$ puis A_{n+1} doit aussi être vrai.*

Si les deux points sont vrais on sait que A_n est vrai pour tout $n \geq j$.

1–43 Exemple : L'affirmation $2^n > n^3$ est faux pour $n = 1, \ldots, 9$. Elle est vraie pour $n = 10$, parce que $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$. Examiner le pas d'induction pour $n \geq 10$. Utiliser

$$n^3 < 2^n$$

et calculer

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 < 2^n + 3\,n^2 + 3\,n + 1$$

Une calculation a côté montre que pour $n \geq 10$

$$3\,n^2 + 3\,n + 1 < 3\,n^2 + 3\,n^2 + n^2 = 7\,n^2 < n^3 < 2^n$$

Combiner les deux inégalités pour arriver à

$$(n+1)^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Donc le principe d'induction implique l'affirmation. $\diamondsuit$

1–44 Exemple : Il y a des affirmations qui sont correctes pour beaucoup de valeurs possibles de n, mais ne pas pour tous les valeurs de n. Comme exemple examiner les nombres pseudo–premier:

$$A_n \qquad : \qquad \text{Si } 2^{n-1} = 1 \bmod n, \text{ puis } n \text{ est un nombre premier}$$

D'abord examiner cette affirmation pour quelques valeurs petits de n

n	2^{n-1}	$2^{n-1} \bmod n$	n premier	A_n
2	2	0	oui	correct
3	4	1	oui	correct
4	8	0	non	correct
5	16	1	oui	correct
7	64	1	oui	correct
9	256	4	non	correct
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
340	grand	8	non	correct

Mais pour $n = 341 = 11 \cdot 31$ on trouve $2^{340} = 1 \bmod 341$. Donc l'affirmation A_{341} est fausse. Il n'est pas possible de prouver A_n par une démonstration par récurrence. $\diamondsuit$

1–45 Résultat : *(formule du binôm)*
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^k$$

Démonstration : Pour $n = 1$ le résultat est évident et la base de l'induction est donnée.

$$(1+x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k = \binom{1}{0} 1 + \binom{1}{1} x = 1 + x$$

pas d'induction:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\
&= (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) x^j + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1}
\end{aligned}$$

En problème 1–26 vérifier (par récurrence) que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

et donc

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$\square$

Voilà une autre version de récurrence.

1–46 Théorème : *Examiner pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une affirmation A_n*

1. *A_1 est vrai.*
2. *Si A_k est vrai pour tout $k \leq n$, puis A_{n+1} est vrai.*

Si les deux points ci–dessus sont satisfaits l'affirmation A_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Entre les problèmes et exercices vous trouvez beaucoup d'exemples de démonstration par récurrence.

1.5 problèmes

1.5.1 problèmes avec des nombres

• Problème 1–1:
Enlever les parenthèses

(a) $(a+2)(7-b)$

(b) $(a+b)^3$

(c) $20x-((4x+2y)+(6x-y))$

(d) $45a-(50a-(10a-(3b+4c)+(6b-5c)))$

(e) $(a+b)(c+d-e)$

(f) $(a+b)(a-b)$

(g) $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

(h) $(x^4+b^4)^3$

• Problème 1–2:
Simplifier les fractions.

(a) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$

(b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

(c) $a\div\frac{c}{d}$

(d) $\frac{c}{d}\div a$

(e) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

(f) $\dfrac{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

(g) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2$

(h) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{1+\frac{a+1}{a-1}}$

• Problème 1–3:
Trouver la représentation comme fractions décimales des nombres $7/13$ et $1212/19$.

• Problème 1–4:
Prouver que $x=321.012\overline{012}$ est un nombre rationnel et trouver la représentation correspondante.

• Problème 1–5:
Examiner les nombres ci–dessous et décider s'ils sont rationnel ou irrationnel.

$$13.13 \qquad 27.12\overline{123} \qquad 1.12112111211112111112\ldots$$

• Problème 1–6:
Vérifier que si $x\in\mathbb{Q}$ et $s\in\mathbb{Q}$ puis on sait que $x\cdot s\in\mathbb{Q}$.

• Problème 1–7:
Vérifier que si $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $s\in\mathbb{Q}$ puis on sait que $x\cdot s\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

• Problème 1–8:
Montrer que x n'est pas rationnel, si $x\cdot x=3$.

• Problème 1–9:

Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{13}\notin\mathbb{Q}$

Prouver que $\sqrt[3]{13}\notin\mathbb{Q}$

• **Problème 1–10:**
Prouver que $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}$.

• **Problème 1–11:**
Montrer que x n'est pas rationnel, si $x \cdot x \cdot x = 2$.

• **Problème 1–12:**
Prouver que pour tout nombre premier p le nombre $\sqrt{p}$ est irrationnel.

• **Problème 1–13:**
Considérer deux nombres premiers p_1 et p_2. Prouver que le nombre $\sqrt{p_1\, p_2}$ est rationnel si et seulement s'il est entier.

• **Problème 1–14:**
Examiner l'affirmation suivant.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Soit vous prouvez l'affirmation ou vous trouvez un contre–exemple.

• **Problème 1–15:**
Re écrire comme fraction des nombres entiers.

(a) $0.37\overline{37}$

(b) $0.143456456\overline{456}$

(c) $1.\overline{5379}$

• **Problème 1–16:**
La fraction décimale de $\sqrt{2}$ commence avec les chiffres

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480 7\ldots$$

(a) Trouver un nombre rationnel simples (x_1), plus petite que $\sqrt{2}$, tel que la différence de $\sqrt{2}$ est plus petite que 10^{-8}.

(b) Trouver un nombre rationnel simples (x_1), plus grand que $\sqrt{2}$, tel que la différence de $\sqrt{2}$ est plus petit que 10^{-8}.

• **Problème 1–17:**
Considérer les deux nombres rationnels $x_1 = 10.12345432$ et $x_2 = 10.12345433$.

(a) Trouver deux nombres y_1 et y_2, irrationnels et simples, qui sont entre x_1 et x_2.

(b) Trouver un nombre rationnel entre y_1 et y_2.

• **Problème 1–18:**
La représentation d'un nombre z est donné par $z = 1.a_1a_2a_3a_4\ldots$ veut dire

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, 10^{-k}$$

On sait que

$$0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \frac{1}{1.a_1a_2a_3a_4\ldots}$$

(a) Trouver la valeur exacte de z.

(b) Prouver que $z \notin \mathbb{Q}$.

• Problème 1–19:

(a) Le nombre $x = 2.116161\overline{16}$ peut être écrit comme fraction de deux nombres entiers. Trouver cette fraction.

(b) Calculer a et b.

$$\sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) = a + b\,x$$

(c) Calculer d'une façon exacte

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)}$$

• Problème 1–20:

(a) Trouver la longueur de la période de la représentation décimale du nombre $\frac{7}{13}$.

(b) Écrire le nombre x ci-dessous comme fraction de deux nombres entiers.

(c) Indiquer (avec $\times$) les nombres z qui sont élément des domaines de nombres données.

$$x = 43.12468246824682\overline{2468}$$

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$					
$1.31\overline{31}$					
$\sqrt{361}$					
π					
$\sqrt{20}$					
$\sqrt{-16}$					

1.5.2 problèmes avec des sommes et produits

• Problème 1–21:
Utiliser le symbole $\sum$ pour la somme des carrés des premiers 17 nombres. Calculer cette somme avec une calculatrice programmable.

• Problème 1–22:
Calculer

$$a = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n^2} \qquad e = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=5}^{k} 1$$

$$b = \sum_{h=1}^{5} (h-1) \qquad f = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} 1$$

$$c = \sum_{s=0}^{4} (s+2) \qquad g = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} k$$

$$d = \sum_{s=-4}^{4} (s+2) \qquad h = \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{k} j$$

• **Problème 1–23:**
Écrire la produit des nombres pairs entre 1 et 48 avec le symbole $\prod$.

• **Problème 1–24:**
Écrire la produit des nombres impairs entre 1 et 48 avec le symbole $\prod$.

• **Problème 1–25:**
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

Calculer les expressions suivantes

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 \qquad b = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} k \right)$$

$$c = \sum_{j=1}^{3} \left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j \right) \qquad d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k$$

• **Problème 1–26:**
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten, dass für $1 \leq k \leq n$ die Beziehung

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

richtig ist.

• **Problème 1–27:**
Écrire les expressions a et b à l'aide des symbole de sommation et produit. Calculer les valeurs de c et d d'une façon exacte, sans utiliser la calculatrice.

$$a = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} \qquad b = 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 45$$

$$c = \sum_{k=1}^{9} (10-k) \cdot 10^{k-1} \qquad d = \prod_{k=1}^{3} \sum_{j=-k}^{k} |j|$$

• **Problème 1–28:**
Écrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul symbol de somme ou produit ($\sum$, $\prod$).

$$a = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 33$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 \\ c &= \frac{17!}{6!} \\ d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} \\ e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+37) \end{aligned}$$

double somme

1.5.3 démonstration par récurrence

• Problème 1–29:
Utiliser une démonstration par récurrence pour prouver la **somme géométrique**

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

si $q \neq 1$.

Pour les problèmes ci–dessous réécrire les formules avec le symbole de sommation et puis prouver les affirmations (source [Swok92]).

• Problème 1–30:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$2+4+6+\ldots+2n = n\,(n+1)$$

• Problème 1–31:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1+4+7+10+\ldots+(3n-2) = \frac{n\,(3n-1)}{2}$$

• Problème 1–32:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

• Problème 1–33:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n-1} = 1+(n-1)\,2^n$$

• Problème 1–34:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

• Problème 1–35:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

• Problème 1–36:
Utiliser récurrence pour prouver que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\,(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

• Problème 1–37:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $1+2n\leq 3^n$.

• Problème 1–38:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ 3 est un diviseur de n^3-n+3.

• Problème 1–39:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ 3 est un diviseur de n^2+n.

• Problème 1–40:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ 3 est un diviseur de 5^n-1.

• Problème 1–41:
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ 9 est un diviseur de $10^{n+1}+3\cdot 10^n+5$.

• Problème 1–42:
L'expression a^n-b^n peut être diviser par $(a-b)$.
Tip: $a^{k+1}-b^{k+1}=a^k\,(a-b)+(a^k-b^k)b$.

• Problème 1–43:
L'expression $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ peut être diviser par $(a+b)$.

• Problème 1–44:
Réécrire avec le symbole $\sum$ et puis prouver

(a)

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

(b)

$$y_n=\frac{1}{a\cdot(a+b)}+\frac{1}{(a+b)\cdot(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+n\cdot b-b)\cdot(a+n\cdot b)}$$

• Problème 1–45:
Une suite est donnée par

$$a_1=1\qquad a_{n+1}=4\cdot a_n+4^n$$

Prouver que $a_n=n\cdot 4^{n-1}$.

• Problème 1–46:
Chercher et prouver une formule pour la somme des n premiers nombres impairs.

Pour les problèmes ci–dessous il faut d'abord trouver le nombre le plus petit, tel que l'inégalité est juste. Puis prouver par récurrence l'affirmation.

• Problème 1–47:
Beweisen Sie die Ungleichung
$$n + 12 < n^2$$
mittels Induktion.

• Problème 1–48:
Beweisen Sie die Ungleichung
$$n^2 + 18 < n^3$$
mittels Induktion.

• Problème 1–49:
Beweisen Sie die Ungleichung
$$5 + \log_2 n < n$$
mittels Induktion.

• Problème 1–50:
Beweisen Sie die Ungleichung
$$10^n \leq n^n$$
mittels Induktion.

• Problème 1–51:
Beweisen Sie die Ungleichung
$$2^n \leq n!$$
mittels Induktion.

• Problème 1–52:
Behauptung: Alle Frauen der Welt haben dieselbe Augenfarbe.
Démonstration : Numeriere alle Frauen und benutze vollständige Induktion.

- Verankerung: Eine Frau hat dieselbe Augenfarbe. Klar!
- Induktionsschritt $n \to n+1$:
  Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n Frauen dieselbe Augenfarbe, ebenso die zweite bis (n+1)–ste Frau. Somit haben die erste und (n+1)–ste Frau dieselbe Augenfarbe.

□

Das Resultat ist offensichtlich falsch. Was ist falsch am Beweis?

• Problème 1–53:
Prouver l'inégalité de Bernoulli
$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \quad \text{pour tout} \quad x \geq -1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$
Expliquer pourquoi on a besoin de la condition $x > -1$.

• Problème 1–54:
Soit / Setzen Sie
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$$

(a) Réécrire s_4 sans le symbole $\sum$.
Schreiben Sie s_4 ohne das Symbol $\sum$.

(b) Prouver par récurrence / Beweisen Sie mittels Induktion $s_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

1.5.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 1–5 : Rationnl, rationnel, irrationnel.

Solution pour problème 1–9 : Démonstration par contradiction.

Supposition: $x = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $x \cdot x \cdot x = 13$
Chercher la factorisation de a et b

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \qquad b = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m \qquad .$$

A cause de $x \cdot x \cdot x = 13$ on sait que $a^3 = 13\, b^3$ et donc

$$p_1 p_1 p_1 \; p_2 p_2 p_2 \; p_3 p_3 p_3 \ldots p_n p_n p_n = 13 \; q_1 q_1 q_1 \; q_2 q_2 q_2 \; q_3 q_3 q_3 \ldots q_m q_m q_m \qquad .$$

A gauche de cette signe d'égalité on trouve un multiple de 3 de facteurs 13, mais à droite le nombre des facteurs 13 est un multiple de 3 plus 1. Donc on a deux factorisations différentes du même nombre. Donc la supposition doit être fausse et on sait que $\sqrt[3]{13}$ ne peut pas être écrit comme fraction de deux nombres entiers.

Solution pour problème 1–18 :

(a)

$$z - 1 = \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad z^2 - z - 1 = 0$$

und somit

$$z = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right)$$

Da offensichtlich $1 \leq z \leq 2$ gilt

$$z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(b)

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow 1 + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Solution pour problème 1–19 :

(a)

$$\begin{array}{rcr} 100\,x & = & 211.6161\overline{16} \\ x & = & 2.116161\overline{16} \\ \hline 99\,x & = & 209.500\overline{0} \end{array}$$

Somit gilt

$$x = \frac{209.5}{99} = \frac{2095}{990} = \frac{419}{198}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2}^{n} (1 + k\,x) &= (n+3) + x \sum_{k=-2}^{n} k \\ &= (n+3) + x\,\frac{(n+3)\,(n-2)}{2} \\ &= a + b\,x \end{aligned}$$

und somit $a = n + 3$ und $b = \dfrac{(n+3)\,(n-2)}{2}$.

(c)

$$\frac{\prod_{k=1}^{5}(2\,k)}{\prod_{j=1}^{3}(j+2)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5} = 64$$

Solution pour problème 1–20 :

(a) Wegen $\frac{7}{13} = 0.\overline{538461}$ ist die Länge der Periode 6.

(b) Wegen

$$10000\cdot x - x = 431246.8246824682\overline{2468} - 43.12468246824682\overline{2468} = 431203.7 = \frac{4312037}{10}$$

gilt

$$x = \frac{4312037}{99990}$$

(c)

z	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$-5/2$			$\times$	$\times$	$\times$
$1.31\overline{31}$			$\times$	$\times$	$\times$
$\sqrt{361}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
π				$\times$	$\times$
$\sqrt{20}$				$\times$	$\times$
$\sqrt{-16}$					$\times$

Solution pour problème 1–21 : 1785

Solution pour problème 1–22 : $a = 49/36$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 18$, $e = 6$, $f = 28$, $g = 140$, $h = 84$.

Solution pour problème 1–23 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2\,k) = 2^{24}\prod_{k=1}^{24} k = 2^{24}24!$$

Solution pour problème 1–24 :

$$\prod_{k=1}^{24}(2k-1) = \frac{48!}{2^k 24!}$$

Solution pour problème 1–25 :

(a) Alle Terme ausser dem Letzten heben sich weg.

$$a = \sum_{k=-19}^{20} 2\,k^3 = 2\cdot 20^3 = 16000$$

(b)

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} k\right) \\ &= (1) + (2) + (6) = 9 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} c &= \sum_{j=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{j} 2\,j\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{1} 2\right) + \left(\prod_{k=1}^{2} 4\right) + \left(\prod_{k=1}^{3} 6\right) \\ &= (2) + \left(4^2\right) + \left(6^3\right) = 2 + 16 + 216 = 234 \end{aligned}$$

(d) Arithmetische Summe

$$d = \sum_{k=0}^{n} 2\,k = 2\,\sum_{k=0}^{n} k = 2\,\frac{n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$$

Solution pour problème 1–26 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\,\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\,\left(\frac{(n-k+1)+k}{k\,(n-k+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Solution pour problème 1–27 :

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{31} = \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{2k+1} \\ b &= 12\cdot 15\cdot 18\cdot 21\cdot \ldots \cdot 45 = \prod_{k=4}^{15} (3\,k) \\ c &= \sum_{k=1}^{9} (10-k)\cdot 10^{k-1} \;=\; 123456789 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= \prod_{k=1}^{3}\sum_{j=-k}^{k}|j| \\ &= \left(\sum_{j=-1}^{1}|j|\right)\cdot\left(\sum_{j=-2}^{2}|j|\right)\cdot\left(\sum_{j=-3}^{3}|j|\right) \\ &= (1+0+1)\cdot(2+1+0+1+2)\cdot(3+2+1+0+1+2+3) \\ &= 2\cdot 6\cdot 12 = 144 \end{aligned}$$

Solution pour problème 1–28 :

$$\begin{aligned} a &= 3+6+9+12+15+\ldots+33 = \sum_{k=1}^{11} 3\,k \\ b &= \frac{1}{2}+1+2+4+8+\ldots+64 = \sum_{k=-1}^{6} 2^k \\ c &= \frac{17!}{6!} = \frac{\prod_{k=1}^{17} k}{\prod_{j=1}^{6} j} = \prod_{k=7}^{17} k \\ d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 24}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 24} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 23 = \prod_{k=0}^{11}(2\,k+1) \\ d &= \frac{24!}{2^{12}\cdot 12!} = \frac{1}{2^{12}}\prod_{k=13}^{24} k = \prod_{k=13}^{24}\frac{k}{2} \\ e &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+37) = \sum_{j=1}^{37}\left(\sum_{k=1}^{j} k\right) = \sum_{j=1}^{37}\frac{k\,(k+1)}{2} \end{aligned}$$

Solution pour problème 1–29 :

- Verankerung bei $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = 1+q = \frac{(1+q)\,(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q}$$

- Induktionsschritt von n zu $n+1$

  – Verwende :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  – Zu zeigen :

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

  – Rechnung :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–42 :

- Induktionsverankerung, $n = 1$:
  $a^1 - b^1$ ist offensichtlich durch $(a - b)$ teilbar.
- Induktionsschritt von n zu $n + 1$:
  Wir dürfen verwenden, dass $a^n - b^n$ durch $(a - b)$ teilbar ist, d.h.

  $$a^n - b^n = K\,(a-b)$$

  Zu zeigen ist, dass $a^{n+1} - b^{n+1}$ durch $(a - b)$ teilbar ist.

  $$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n\,(a-b) + (a^n - b^n)b \\ &= a^n\,(a-b) + K\,(a-b)\,b \\ &= (a-b)\,(a^n\ + K\,b) \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–44 : (a) $\frac{n}{n+1}$, (b) $\frac{n}{a(a+nb)}$

Solution pour problème 1–52 : Der Induktionsschritt von n=1 zu zu $n + 1 = 2$ ist falsch.

Solution pour problème 1–53 :

- Verankerung: für $n = 1$ ist $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ richtig
- Induktionsschritt $n \to n + 1$:
  - Verwende : $(1 + x)^n \geq 1 + n\,x$
  - Zu zeigen : $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\,x$
  - Rechnung :

    $$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n \\ &\geq (1+x)\,(1+n\,x) \quad \text{verwende Induktionsannahme und } 1-x>0 \\ &= 1+(n+1)\,x+x^2 \geq 1+(n+1)\,x \end{aligned}$$

Aufgrund der Prinzips der vollständigen Induktion ist die Behauptung somit verifiziert.

Solution pour problème 1–54 :

(a)

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{13}{8}$$

(b) Verankerung bei $n = 1 : s_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$. OK.
Induktionsschritt

$$s_{n+1} = s_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n^2}{2+n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

und mittles dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Beweis erbracht.

1.6 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les types différentes des nombres.
- maîtriser la connection entre nombres rationnels et fractions décimales.
- savoir pourquoi $\sqrt{13}$ n'est pas un nombre rationnel.
- savoir calculer avec les symbole de sommation et produit.
- savoir calculer des sommes arithmétiques et géométriques.
- connaître les structures générales des méthodes de démonstration.

Chapitre 2

Nombres complexes

Il existe des problèmes simples sans solutions réelle. Pour résoudre l'équation

$$z^2 - z + 4 = 0$$

on utilise la formule pour les solutions d'une équation quadratique

$$z_{1,2} = \frac{1}{2\,a}\,\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}\right) = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1-16}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1}$$

et donc cette équation n'a pas de solution réelle. Donc un a défini un nouveau type de nombre i tel que $i^2 = -1$ et puis

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\,i = x + i\,y \quad \text{avec} \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$$

2–1 Définition : Pour $x, y \in \mathbb{R}$ le nombre $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ est dit un **nombre complexe**. x est dit la **partie réelle** et y la **partie imaginaire** de z. Donc chaque nombre complexe z est représenté par un pair (x, y) de nombres réels. On écrit

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(a + i\,b) = a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(a + i\,b) = b$$

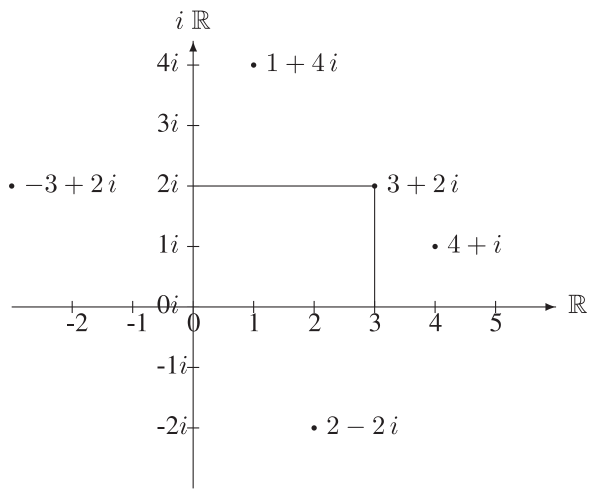


Figure 2.1: le plan des nombers complexe, representé par des points

On définit dans le plan un système cartésienne d'axes rectangulaires et on note les réels sur l'axe des x et les imaginaires sur l'axe des y en prenant i comme unité. Le nombre complexe $z = x + i\,y$ peut être ainsi représenté par le point Z dont les coordonnées sont (x, y), ou par le vecteur $\vec{z}$ joignant l'origine à ce point. Examiner Figure 2.1 et 2.2.

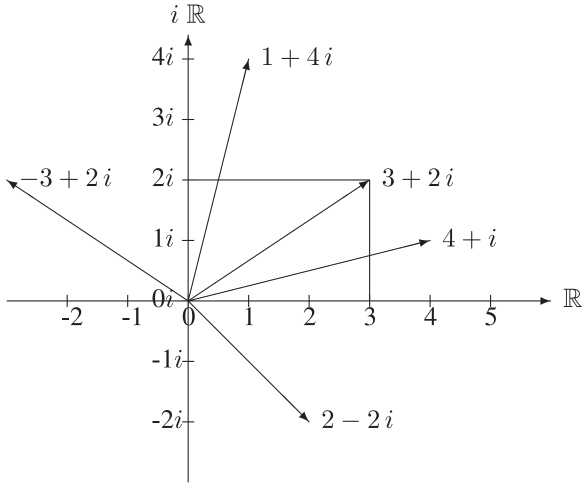


Figure 2.2: le plan des nombers complexes, representé par des vecteurs

2.1 définitions et opérations de base

2–2 Définition : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes avec

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + i\,y_2$$

Puis **l'addition** est donnée par

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i\;(y_1 + y_2)$$

En figure 2.3 vérifier que l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs avec les parties réelles et imaginaires comme composantes des vecteurs.

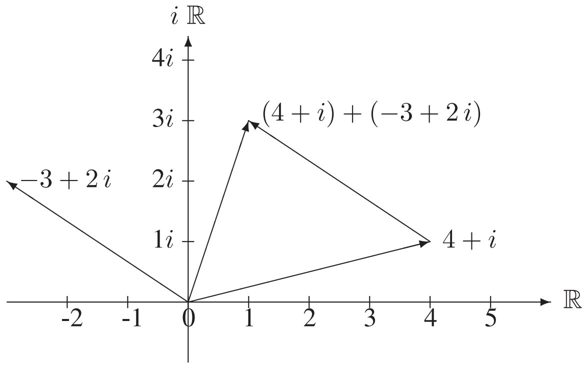


Figure 2.3: addition de deux nombres complexes

2–3 Définition : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes avec

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + i\, y_2$$

Puis la **multiplication** est donnée par

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\, y_1) \cdot (x_2 + i\, y_2) = (x_1\, x_2 - y_1 y_2) + i\ (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$

2–4 Exemple :

(a)

$$(1 - i\, 4) + (3 + 7\, i) = 4 + i\, 3$$

(b)

$$(1 - i\, 4) \cdot (3 + 7\, i) = (3 + 28) + i\ (7 - 12) = 31 - i\, 5$$

(c) Avec *Octave* on arrive à

Octave

```
(1-i)+(3+7*i)

ans =  4 + 6i
```

Octave

```
(1-i)*(3+7*i)

ans =  10 +  4i
```

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$ on arrive à

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}\, i)\ (x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\, i) \\
&= \left(x^2 - 2\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - i^2\ \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2\right) \\
&\quad + i\ \left((x - \frac{1}{2})\ \frac{\sqrt{15}}{2} - (x - \frac{1}{2})\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \\
&= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{15}{4}\right) + 0 = x^2 - x + 4
\end{aligned}$$

Voilà la fonction utilisée dans l'introduction de ce chapitre.

(e) Simplifier le calcul précédent: $(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}\, i)\ (x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\, i) \\
&= \left((x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{15}}{2}\, i\right)\ \left((x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{15}}{2}\, i\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\, i\right)^2 \\
&= \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{15}{4} = x^2 - x + 4
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2–5 Résultat : *Soit $z_i \in \mathbb{C}$. Puis on a les règles de calcul*

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$	*loi de commutativité*
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$	*loi d'assoziativité*
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	*loi de distributivité*

2–6 Exemple : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ chercher un nombre complexe $z = x + i\,y$ tel que $z \cdot (a + i\,b) = 1$.

Solution: Version 1:
Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} 1 + i\,0 &= z \cdot (a + i\,b) = (x + i\,y) \cdot (a + i\,b) \\ &= (x\,a - y\,b) + i\,(x\,b + y\,a) \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comparer partie réelle et imaginaire pour arriver à

$$\begin{array}{lll} x\,a & -y\,b & = 1 \\ x\,b & +y\,a & = 0 \end{array}$$

avec les solutions

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Version 2:
Si $z \cdot (a + i\,b) = 1$ on sait que

$$z = x + i\,y = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{1}{(a + i\,b)}\frac{(a - i\,b)}{(a - i\,b)} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\,\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

En effet on a trouvé le calcul pour la division des nombres complexes. On a diviser 1 par $a + i\,b$. ♢

2–7 Résultat : *Pour $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ on a*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$$

2–8 Définition : Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$. Puis le nombre complexe

$$\overline{z} = \overline{a + i\,b} = a - i\,b$$

est dit le **nombre (complexe) conjugué** et

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

est dit **norme** (ou son **module**).

2–9 Exemple : Pour $z = 1 - i\,3$ on a $\overline{z} = \overline{1 - i\,3} = 1 + i\,3$ et $|z|^2 = 1^2 + 3^2$ et donc $|z| = \sqrt{10}$. ♢

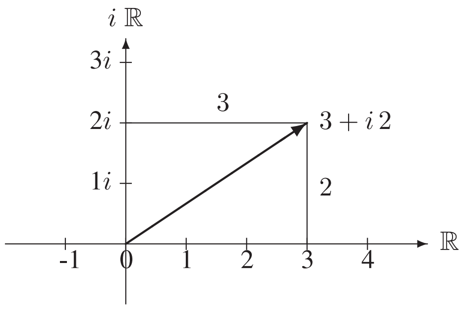


Figure 2.4: norme d'un nombre complexe

2–10 Résultat : *En figure 2.4 vérifier que la norme $|z|$ d'un nombre complexe correspond à la longueur du vecteur. Utiliser le théorème de Pythagore.*

2–11 Résultat : *Soit $z_i \in \mathbb{C}$. Puis on a les résultat simples et importants*

$$\begin{aligned}
\overline{z}_1 + \overline{z}_2 &= \overline{z_1 + z_2} \\
\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 &= \overline{z_1 \cdot z_2} \\
\frac{1}{\overline{z}} &= \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \\
z + \overline{z} &= 2 \,\mathrm{Re}\, z \\
z - \overline{z} &= i\,2 \,\mathrm{Im}\, z \\
z \cdot \overline{z} &= |z|^2
\end{aligned}$$

Démonstration : Calculs simples. □

2–12 Lemme : *Pour tout nombres $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

Démonstration : Regarder

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2$$

et donc

$$2\,x\,y \leq x^2 + y^2$$

□

2–13 Résultat : *Inégalité du triangle pour des nombres complexes.*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Démonstration : Version analytique:
Examiner le carré de chaque côté de l'inégalité. Soit $z_1 = a_1 + i\,b_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$ et donc

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 &= a_1^2 + b_1^2 \\
|z_2|^2 &= a_2^2 + b_2^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}(\,|z_1|+|z_2|\,)^2 &= |z_1|^2+2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2\\ &= a_1^2+b_1^2+2\,\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}+a_2^2+b_2^2\end{aligned}$$

Pour la somme z_1+z_2 on trouve

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |\,(a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2)\,|^2\\ &= (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\\ &= (a_1^2+2\,a_1a_2+a_2^2)+(b_1^2+2\,b_1b_2+b_2^2)\end{aligned}$$

Donc on remplace l'inégalité originale

$$|z_1+z_2|^2 \leq (\,|z_1|+|z_2|\,)^2$$

par l'inégalité équivalente

$$2\,a_1a_2+2\,b_1b_2 \leq 2\,\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

ou

$$a_1a_2+b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

Cette inégalité est vraie si

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2 \leq \left(a_1^2+b_1^2\right)\,\left(a_2^2+b_2^2\right)$$

Puis on applique des transformations suivantes

$$\begin{aligned}(a_1a_2+b_1b_2)^2 &\leq \left(a_1^2+b_1^2\right)\,\left(a_2^2+b_2^2\right)\\ a_1^2a_2^2+2\,a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2 &\leq a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2\\ 2\,a_1a_2b_1b_2 &\leq a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2\end{aligned}$$

Puis utiliser le lemme précédant avec $x=a_1b_2$ et $y=a_2b_1$ pour vérifier que cette inégalité est vraie. $\square$

Démonstration : Version géométrique:
Pour un triangle avec les longueurs de côtés a, b et c on a toujours $a+b\geq c$ et donc Figure 2.5 montre que $|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$. $\square$

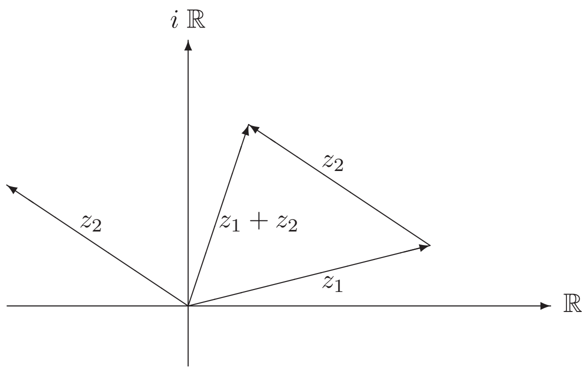


Figure 2.5: inégalité du triangle $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

2.2 coordonnées polaires

Un nombre complexe $x = x + i\,y$ peut aussi être donné par son norme $|z|$ et son **argument** $\varphi = \arg z$, caractérisé par

$$\tan\varphi = \tan\arg z = \tan(\arg(x + i\,y)) = \frac{y}{x}$$

et z est donné par

$$z = x + i\,y = |z|\ (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

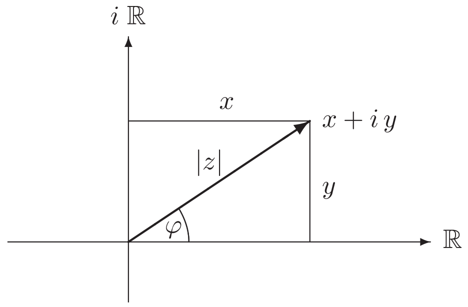


Figure 2.6: norme et argument d'un nombre complexe

On aimerait bien utiliser $\arg z = \arctan y/x$ pour $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, mais cette formule peut être fausse. Le problème vient de l'équation $\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. If faut d'abord choisir les angles φ à regarder et puis trouver la formule pour $\arg z$ dans chaque quadrant du plan complexe. Par définition la fonction $\arctan x$ rend un résultat entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Pour définir la fonction $\arg z$ deux possibilités sont utilisées souvent: $0 \leq \arctan z < 2\,\pi$ et $-\pi < \arctan z \leq \pi$ (voir tableau 2.1).

$z = x + i\,y$	$0 \leq \arg z < 2\,\pi$	$-\pi < \arg z \leq \pi$
$x > 0$ et $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$
$x = 0$ et $y > 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = \frac{\pi}{2}$
$x < 0$ et $y \geq 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$
$x < 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + \pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} - \pi$
$x = 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \frac{3\,\pi}{2}$	$\arg(x + i\,y) = -\frac{\pi}{2}$
$x > 0$ et $y < 0$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x} + 2\,\pi$	$\arg(x + i\,y) = \arctan\frac{y}{x}$

Tableau 2.1: Deux définitions de la fonction $\arg z$

2–14 Remarque : Dans quelques langues de programmation il y a des commandes pour calculer l'angle entre l'axe des x et un vecteurs (x, y). Cette commande **utilise** la fonction $\arctan$. Voir tableau 2.2 pour les modification en *Mathematica* et *Octave*. Ces modifications demande deux arguments au lieu d'un argument.

$\diamondsuit$

Octave

```
octave:1> help  atan2
atan2 is a builtin function

atan2 (Y, X): atan (Y / X) in range -pi to pi
```

Mathematica

```
?ArcTan
.
ArcTan[z] gives the inverse tangent of z. ArcTan[x, y] gives the inverse
   tangent of y/x where x and y are real, taking into account which
   quadrant the point (x, y) is in.
```

Tableau 2.2: Modifications de la fonction $\arctan$

2.3 multiplication des nombres complexes

2–15 Résultat : *Soit*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + i\,y_1 = |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \\ z_2 &= x_2 + i\,y_2 = |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Puis

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Donc la norme d'un produit de deux nombres est donnée par le produit des normes des nombres et l'argument est donnée comme somme des deux arguments.

Démonstration : Utiliser les théorèmes d'additions des fonctions trigonométriques.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) \cdot\ (\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i\ (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Le résultat ci–dessus s'applique aussi au produits de multiples nombres et on obtient

$$\begin{aligned} \left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| &= \prod_{j=1}^{n} |\,z_j\,| \\ \arg\left(\prod_{j=1}^{n} z_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \arg\ z_j \end{aligned}$$

et on arrive à l'interprétation suivant de la multiplication des nombres complexes.

2–16 Résultat : *Considérer le nombre $a + i\,b \in \mathbb{C}$ comme vecteur et multiplier ce nombre avec $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$. L'effet sur le nombre $a + i\,b$ est:*

1. *allonger le „vecteur" (a, b) par le facteur $|z|$.*
2. *rotation du résultat de l'opération précédant par l'angle $\arg z$.*

2–17 Exemple : Considérer le „triangle“ avec les coins $3+i$, $5+4\,i$ et $1+i3$. Une multiplication de ce triangle par $z=(1+i)/2$ donne le deuxième triangle en figure 2.7. On a $\arg z=\pi/4$ et $|z|=1/\sqrt{2}$, donc vous trouvez une rotation par 45° et une compression par un facteur $1/\sqrt{2}$. ♢

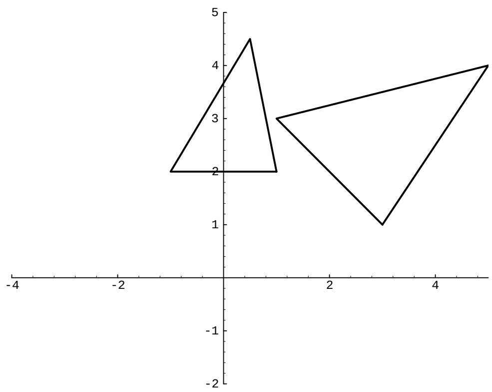


Figure 2.7: rotation d'un triangle

2.4 formule d' Euler et représentation exponentielle

La formule pour l'argument d'un produit des nombres ressemble à une propriété de la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} \exp\left(x_1+x_2\right) &= \exp x_1\cdot\exp x_2 \\ \exp\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) &= \prod_{j=1}^{n}\exp\,x_j \end{aligned}$$

et donc il y a des connections entre nombres complexes et la fonction exponentielle.

2–18 Définition : (Formule d'Euler)
Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ on met

$$e^{i\,\alpha}=\cos\,\alpha+i\,\sin\,\alpha$$

Le théorème de Pythagore montre que

$$\begin{aligned} \left|e^{i\,\alpha}\right| &= \left|\cos\,\alpha+i\,\sin\,\alpha\right| \\ &= \sqrt{\cos^2\,\alpha+\sin^2\,\alpha}=1 \end{aligned}$$

2–19 Exemple : Vérifier que

$$\begin{aligned} e^{i\,\pi} &= \cos\,\pi+i\,\sin\,\pi=-1 \\ e^{i\,\pi/2} &= \cos\,\frac{\pi}{2}+i\,\sin\,\frac{\pi}{2}=i \\ e^{i} &= \cos\,1+i\,\sin\,1 \\ e^{i\,(x+2\,\pi)} &= e^{i\,x} \end{aligned}$$

La fonction $f\,(x)=e^{i\,x}$ est 2π–périodique. ♢

2–20 Résultat : *Un nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être écrit dans la forme*

$$\boxed{z = |z| \; e^{i \arg z}}$$

Démonstration : Vérifier que

$$\arg \left(|z| \; e^{i \arg z} \right) = \arg e^{i \arg z} = \arg z$$

et

$$\left| \, |z| \; e^{i \arg z} \, \right| = |z| \; \left| e^{i \arg z} \right| = |z| \cdot 1$$

Donc arguments et normes des deux nombres z et $|z| \exp(i \, \arg z)$ coïncident et les nombres ont égaux. □

2–21 Remarque : Pour $a \, , \, b \in \mathbb{R}$ on met $z = e^{a+i\,b}$ et puis

$$z = e^{a+i\,b} = e^{a} \cdot e^{i\,b} = |z| \cdot e^{i \arg z}$$

Donc $|z| = e^a$ et $\arg z = b + k \, 2 \, \pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. ♢

2–22 Exemple : Un nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être représenté dans des formes différentes

1. $z = a + i\,b$
2. comme pair de nombres réels (a, b)
3. avec norme et argument
4. dans la forme exponentielle $z = \exp\left(\ln |z| + i \, \arg z\right)$

$z \in \mathbb{C}$	pair de $\mathbb{R}$	norme/argument	forme exponentielle
$z = 1 + i$	$(1, 1)$	$\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ et $\arg z = \frac{\pi}{4}$	$z = \exp\left(\ln \sqrt{2} + i \, \frac{\pi}{4}\right)$
$z = 1$	$(1, 0)$	$\lvert z\rvert = 1$ et $\arg z = 0$	$z = \exp\left(0 + i\,0\right) = \exp 0$
$z = -i\,3$	$(0, -3)$	$\lvert z\rvert = 3$ et $\arg z = -\frac{\pi}{2}$	$z = \exp\left(\ln 3 - i \, \frac{\pi}{2}\right)$
$z = 3 - i\,4$	$(3, -4)$	$\lvert z\rvert = 5$ et $\arg z = -\arctan \frac{4}{3}$	$z = \exp\left(\ln 5 - i \, \arctan \frac{4}{3}\right)$

♢

Les résultats ci–dessous montrent que l'identité $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ est aussi vrai pour la fonction exponentielle complexe.

2–23 Résultat : *Pour $\alpha \, , \, \beta \in \mathbb{R}$ on a*

$$e^{i\,(\alpha+\beta)} = e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta}$$

Démonstration : Les calculs sont très similaires au calculs dans la démonstration pour la multiplication de deux nombres complexes.

$$\begin{aligned}
e^{i\,\alpha} \cdot e^{i\,\beta} &= (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha) \cdot (\cos\,\beta + i\,\sin\,\beta) \\
&= (\cos\,\alpha \cos\,\beta - \sin\,\alpha \sin\,\beta) + i\,(\cos\,\alpha \sin\,\beta + \cos\,\beta \sin\,\alpha) \\
&= \cos\left(\,\alpha + \,\beta\right) + i\,\sin\left(\,\alpha + \,\beta\right) \\
&= e^{i\,(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

□

2–24 Résultat : *Pour des nombres complexes $z_j \in \mathbb{C}$ on a*

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp z_1 \cdot \exp z_2 \\ \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) &= \prod_{j=1}^{n} \exp\, z_j \end{aligned}$$

Comme conséquence simple on arrive à

2–25 Résultat : *Pour des nombres complexes $z_j \in \mathbb{C}$ on a*

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|\; e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} \\ \prod_{j=1}^{n} z_j &= \left(\prod_{j=1}^{n} |z_j|\right) \cdot \exp\left(i\, \sum_{j=1}^{n} \arg\, z_j\right) \end{aligned}}$$

2–26 Résultat : *(formule de DeMoivre [1])*
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = |z|\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$ on a

$$z^n = |z|^n\,(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha))$$

Démonstration :

$$(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^n = \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{i\alpha\,n} = \cos(n\alpha) + i\,\sin(n\alpha)$$

□

2–27 Exemple : Utiliser la formule du binôme et de DeMoivre avec $n = 3$ et obtenir

$$\begin{aligned} (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha + 3\,(i)^2\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + (i)^3\,\sin^3\,\alpha \\ &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha - i\,\sin^3\,\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha + i\,\left(3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha\right) \\ (\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^3 &= \cos(3\alpha) + i\,\sin(3\alpha) \end{aligned}$$

Comparer partie réelle et imaginaire pour conclure

$$\begin{aligned} \cos(3\,\alpha) &= \cos^3\alpha - 3\,\cos\,\alpha\,\sin^2\,\alpha = \cos\,\alpha\,(\cos^2\alpha - 3\sin^2\,\alpha) \\ \sin(3\,\alpha) &= 3\,\cos^2\,\alpha\,\sin\,\alpha - \sin^3\,\alpha = \sin\,\alpha\,(3\,\cos^2\,\alpha - \sin^2\,\alpha) \end{aligned}$$

♢

2.5 raçines des nombres complexes

[1] Abraham DeMoivre (1667–1754), mathématicien français. Il a contribué au statistique, probabilité et trigonométrie

2–28 Exemple : Pour $z = 1 + i$ chercher z^1, z^3 et z^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution: Pour trouver $z^3 = z \cdot z \cdot z$ il faut multiplier les normes et multiplier l'argument par 3. Donc

$$z^3 = |z|^3 \, e^{i\,3\,\arg z} = \sqrt{2}^3 \, e^{i\,3\,\frac{\pi}{4}}$$

On a aussi

$$z^n = |z|^n \, e^{i\,n\,\arg z} = \sqrt{2}^n \, e^{i\,n\,\frac{\pi}{4}}$$

♢

2–29 Exemple : Résoudre l'équation

$$z^5 = 32$$

Si on insiste sur $z \in \mathbb{R}$ il y a une seule solution $z_1 = 2$. Utiliser les nombres complexes et

$$\begin{aligned} \left|z^5\right| &= |z|^5 = 32 \\ \arg\, z^5 &= 5\,\arg z = 0 + k\,2\,\pi \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc on obtient les conditions

$$\begin{aligned} |z| &= 2 \\ \arg z &\in \frac{2\,\pi}{5}\,\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc on a cinq solutions différentes

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,e^{i\,0} \\ z_2 &= 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_3 &= 2\,e^{i\,2\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_4 &= 2\,e^{i\,3\,\frac{2\pi}{5}} \\ z_5 &= 2\,e^{i\,4\,\frac{2\pi}{5}} \end{aligned}$$

Les solutions sont sur un cercle de rayon 2 et les différences des arguments sont des multiples de $\frac{2\pi}{5}$ veut dire de $\frac{360°}{5}$. Mais il n'y a pas d'autres solutions, par exemples

$$\begin{aligned} z_6 &= 2\,e^{i\,5\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,2\,\pi} = z_1 \\ z_7 &= 2\,e^{i\,7\,\frac{2\pi}{5}} = 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{5}} = z_2 \end{aligned}$$

♢

2–30 Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$ on met

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\varphi}$$

et $\varphi \geq 0$ est le plus petit angle tel que

$$n\,\varphi = \arg z + k\,2\,\pi \quad \text{pour un} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pour beaucoup des exemples on a donc

$$\arg\,\sqrt[n]{z} = \varphi = \frac{\arg z}{n}$$

2–31 Résultat : *Soit $Z \in \mathbb{C}$ et $Z \neq 0$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$ les n solutions de l'équation*

$$z^n = Z$$

sont données par

$$z_i = \sqrt[n]{|Z|}\; e^{\frac{i}{n}\arg(Z)}\; e^{i\,k\,\frac{2\pi}{n}} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Les solutions sont sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$ et les différences des arguments sont des multiples de $\frac{2\pi}{n}$ veut dire de $\frac{360°}{n}$.

2–32 Exemple : Résoudre $z^3 = i$.

Solution: On a $\arg i = \pi/2$ et donc

$$(i)^{1/3} = 1\; e^{i\,\frac{\pi}{6}}$$

Puis

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\ z_2 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{i\,\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} \\ z_3 &= e^{i\,\frac{\pi}{6}}\,e^{i\,\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{9\pi}{6} + i\,\sin\frac{9\pi}{6} = 0 - i \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.6 impédance complexe

Considérer un courant alternatif $I(t) = I_0\,\sin(\omega t)$. Donc la fréquence est $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Puis examiner un circuit avec résistances, condensateur et inductance. Pour ces élément on trouve la tension $V(t)$ comme

$$\begin{aligned} V(t) &= R\,I_0\,\sin(\omega t) && \text{résistance } R \\ V(t) &= \frac{-1}{\omega\,C}\,I_0\,\cos(\omega t) && \text{capacité } C \\ V(t) &= \omega\,L\,I_0\,\cos(\omega t) && \text{inductance } L \end{aligned}$$

Examiner les figures 2.8, 2.9 et 2.10.

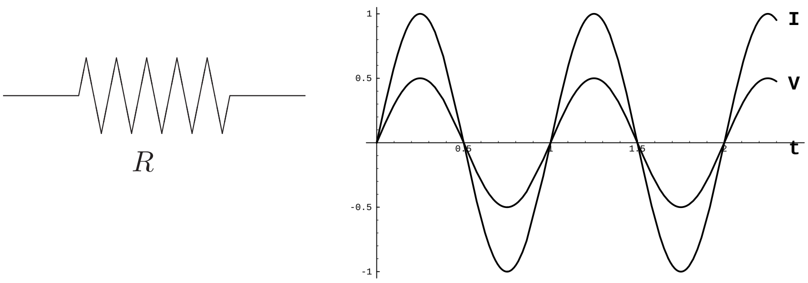


Figure 2.8: courant et tension pour une résistance R

Avec la fonction exponentielle complexe $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ on obtient $\sin\alpha = \operatorname{Im} e^{i\alpha}$. On voit que

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha+\pi/2)} \quad \text{et} \quad -\cos\alpha = \sin(\alpha - \pi/2) = \operatorname{Im} e^{i(\alpha-\pi/2)}$$

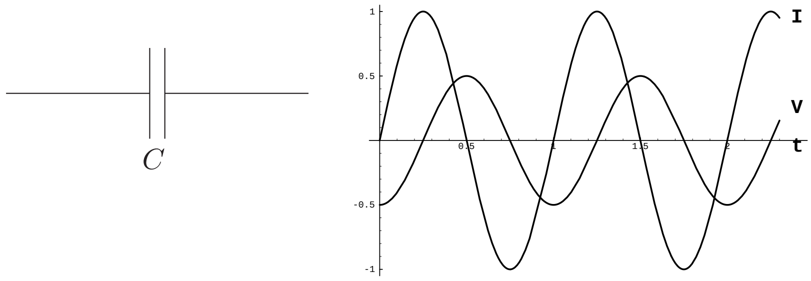


Figure 2.9: courant et tension pour une capacité C

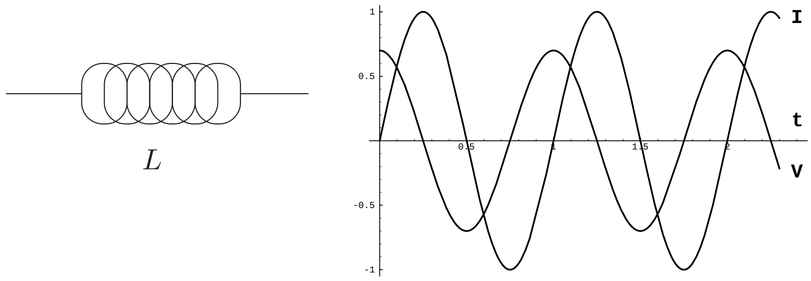


Figure 2.10: courant et tension pour une inductance L

et donc

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,\omega t}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} V(t) &= R\,I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,\omega t} && \text{résistance } R \\ V(t) &= \frac{1}{\omega\,C}\, I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,(\omega t - \pi/2)} && \text{capacité } C \\ V(t) &= \omega\,L\,I_0 \ \mathrm{Im}\, e^{i\,(\omega t + \pi/2)} && \text{inductance } L \end{aligned}$$

Utiliser $e^{-i\,\pi/2} = -i = 1/i$ et $e^{i\,\pi/2} = i$ pour vérifier que les parties réelles des expressions ci–dessous coïncident avec les expressions ci–dessus.

$$\begin{aligned} V(t) &= R\,I(t) && \text{résistance } R \\ V(t) &= \frac{1}{i\,\omega\,C}\, I(t) && \text{capacité } C \\ V(t) &= i\,\omega\,L\,I(t) && \text{inductance } L \end{aligned}$$

Avec les formules ci–dessus la définition de l'**impédance complexe** est naturelle

$$\begin{aligned} Z &= R && \text{résistance } R \\ Z &= \frac{1}{i\,\omega\,C} && \text{capacité } C \\ Z &= i\,\omega\,L && \text{inductance } L \end{aligned}$$

L'impédance complexe Z joue la rôle de la résistance R dans la loi de Ohm $U = R\,I$ pour un courant alternatif et des résistances, capacitances et inductances et les courants et tensions complexes

$$U(t) = Z\,I(t)$$

La vraie tension et courant sont donnés comme partie réelle ou imaginaire des expression complexes.

2–33 Exemple : (élément LRC)
Mettre trois éléments en série (voir figure 2.11) et appliquer un courant

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \operatorname{Im} e^{i \omega t}$$

La tension (complexe) sur les trois éléments est donné par

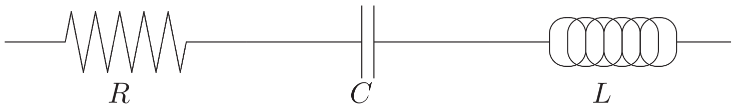


Figure 2.11: élément LRC

$$V(t) = (R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L)\, I(t) = Z\, I(t)$$

L'**impédance** est

$$|Z| = \left|R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega C} + \omega L\right)^2}$$

et la **phase** ϕ par

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

Puis on arrive à la tension réelle

$$V(t) = \operatorname{Im}(Z\, I(t)) = I_0\, |Z| \operatorname{Im} e^{i(\omega t + \phi)} = I_0\, |Z| \sin(\omega t + \phi)$$

Considérer

$$\begin{aligned} I(t) &= = I_0 \sin(\omega t) \\ V(t) &= = I_0\, |Z| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Donc l'impédance $|Z|$ est un facteur d'amplification et $\phi = \arg Z$ est la phase. L'impédance dépend de ω

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega C} + \omega L\right)^2}$$

et on obtient la valeur minimal si

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Veut dire pour

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

Pour cette fréquence l'amplitude de la tension est maximale et la phase est zéro. ♢

2–34 Exemple : Examiner le circuit en figure 2.12. On peut calculer avec des impédances comme avec des résistances, mais avec des nombres complexes. L'impédance complexe Z est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/(i\omega C)} = \frac{1}{R} + i\omega C \\ Z &= \frac{R}{1 + i\omega R C} = \frac{R}{1 + (\omega R C)^2}\,(1 - i\omega R C) \end{aligned}$$

et donc

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}} \quad \text{et} \quad \arg Z = \tan\phi = -\omega R C$$

♢

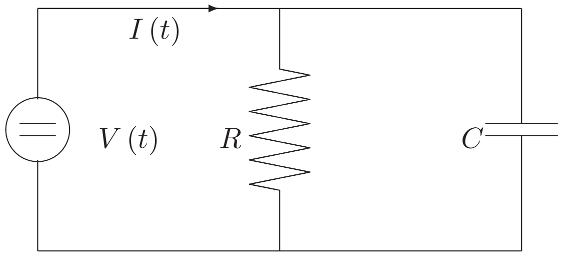


Figure 2.12: résistance et capacitance en parallel

2.7 problèmes

• **Problème 2–1:**
Pour $a = 3 + i\,2$ et $b = 4 - i$ calculer $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b , b/a, $|a|$, $|b|$, $|a \cdot b|$ et $|a + b|$.

• **Problème 2–2:**
Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$

(a) $z + (1 - i) = 3 + 2\,i$

(b) $-5\,z = 5 + 10\,i$

(c) $(i - z) + (2\,z - 3\,i) = -2 + 7\,i$

• **Problème 2–3:**
Soient $z_1 = 2 + 3\,i$, $z_2 = -2 + 3\,i$, $z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4}$. Calculer les expressions suivantes **exactes** et simplifier.

(a) $|\,z_1 + z_2\,|$

(b) $z_1 \cdot z_2$

(c) $z_1 \cdot z_3$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

• **Problème 2–4:**
Pour chaque souproblème trouver $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 et z_2^2

(a) $z_1 = 3\,i$ et $z_2 = 1 - i$

(b) $z_1 = 4 + 6\,i$ et $z_2 = 2 - 3\,i$

(c) $z_1 = \frac{1}{3}\,(2 + 4\,i)$ et $z_2 = \frac{1-5\,i}{2}$

• **Problème 2–5:**
Résoudre

$$z^2 + 2\,z + 2 = 0$$

et vérifier votre solution.

• **Problème 2–6:**
Résoudre

$$2\,z^2 - 2\,z + 2 = 0$$

et vérifier votre solution.

• **Problème 2–7:**
Calculer i^{123443} **sans** calculatrice.

• **Problème 2–8:**
Résoudre pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} i\,z_1 & - & i\,z_2 & = & -2 \\ 2\,z_1 & + & z_2 & = & i \end{array}$$

• **Problème 2–9:**
Résoudre pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} z_1 & + & z_2 & = & 2 \\ z_1 & - & z_2 & = & i\,2 \end{array}$$

• **Problème 2–10:**
Dans le plan complexe dessiner tous les nombres z tel que $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Im}\, z$.

• **Problème 2–11:**
Dans le plan complexe dessiner tous les nombres z tel que $|\,\mathrm{Re}\, z| > |\,\mathrm{Im}\, z|$.

• **Problème 2–12:**
Trouver tous les solution de $z^4 = 1$ et dessiner ces solutions dans un plan complexe.

• **Problème 2–13:**
Trouver tous les solution de $z^3 = -8$ et dessiner ces solutions dans un plan complexe.

• **Problème 2–14:**

(a) Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \cdot z_2$ d'une façon **exacte** (sans calculatrice).

(b) Soit $G \subset \mathbb{C}$ le deuxième quadrant dans le plan complexe, c.-à-d. les nombres $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avec $x < 0$ et $y > 0$. Calculer les racines de tous ces nombres en G et dessiner ce nouveau domaine.

• **Problème 2–15:**

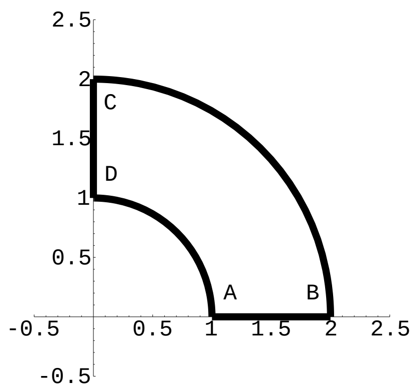
(a) Soit $z_1 = 1 - i\,3$ et $z_2 = e^{i\,3\pi/2}$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ et $\sqrt{z_2}$ d'une façon **exacte** (sans calculatrice).

(b) Soit $G \subset \mathbb{C}$ le troisième quadrant dans le plan complexe avec norme plus petit que 2, c.-à-d. les nombres $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ avec $x < 0$ et $y < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 2^2$. Calculer les racines de tous ces nombres en G et dessiner cette nouveau domaine.

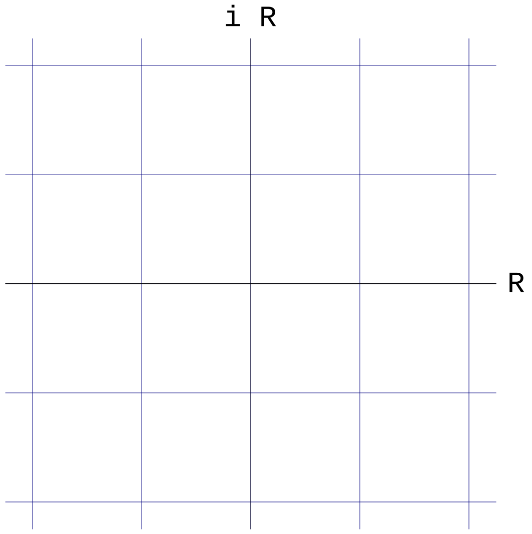
• **Problème 2–16:**
Examiner la section de l'anneau ci-dessous avec les quatres points A, B, C et D dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Chaque point $z \in \mathbb{C}$ est transformé par une application complexe $z \mapsto f(z)$. Esquisser les images de la section de l'anneau. Indiquer les images des points A, B, C et D.

(a) pour $f(z) = z^2$, c'est-à-dire $z \mapsto z^2$

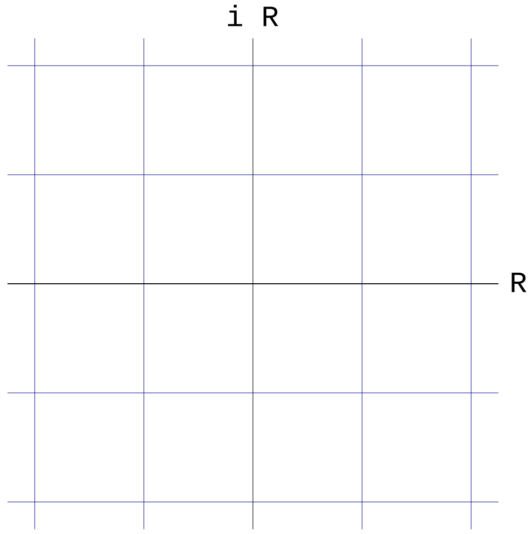
(b) pour $f(z) = 1/z^2$, c'est-à-dire $z \mapsto \frac{1}{z^2}$



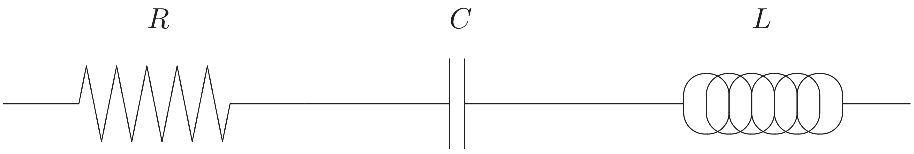
(a)



(b)



• Problème 2–17:
Mettre trois éléments en série. Les valeurs de R, C et L sont données.

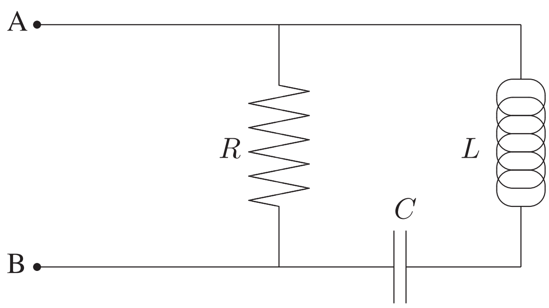


(a) Trouver l'impédance complexe Z comme fonction de ω.

(b) Pour quel valeur de ω ce circuit rend une déphasage de 0?

(c) Pour quel valeur de ω l'impédance $|Z|$ est minimale? Trouver cette valeur minimale.

• Problème 2–18:
Examiner le circuit ci–dessous et trouver l'impédance Z entre les points A et B. Rendre le résultat dans la forme $Z = R_{eq} + i\,\omega\,L_{eq}$. Tip: trouver d'abord $\frac{1}{Z}$.

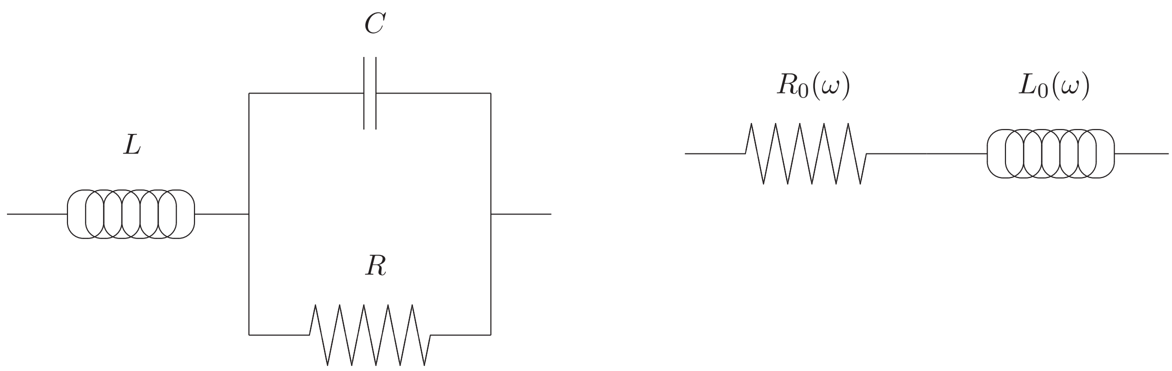


• Problème 2–19:
Examiner le circuit ci-dessous (à gauche) et trouver l'impédance Z. Pour un courrant alternativ avec fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ le circuit peut être remplacé par deux élements en série: une résistance $R_0(\omega)$ et une bobine avec inductance $L_0(\omega)$.

(a) Calculer $Z(\omega)$

(b) Calculer $R_0(\omega)$

(c) Calculer $L_0(\omega)$



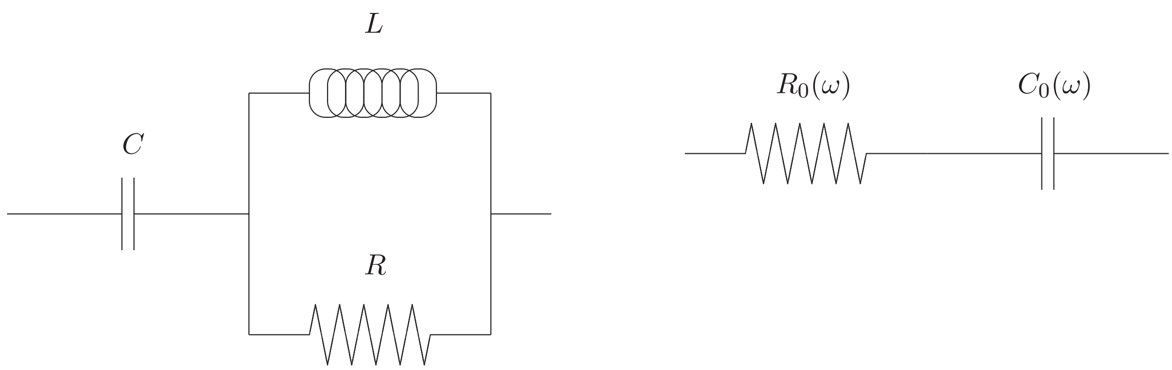
• Problème 2–20:
Examiner le circuit ci-dessous (à gauche) et trouver l'impédance Z. Pour un courrant alternativ avec fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ le circuit peut être remplacé par deux élements en série: une résistance $R_0(\omega)$ et une capacité $C_0(\omega)$.

(a) Calculer $Z(\omega)$

(b) Calculer $R_0(\omega)$

(c) Calculer $C_0(\omega)$

Tip: $Z = R$, $Z = \frac{1}{i\,\omega\,C}$, $Z = i\,\omega\,L$



• Problème 2–21:
Exprimer $\cos(4\,\alpha)$ en terme de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$. Trouver et prouver cette identité.
Tip: formule de Euler et

$$(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 + 4\,x\,y^3 + y^4$$

• Problème 2–22:

(a) Utiliser deux fois l'équation

$$1 - e^{i\,k} = e^{i\,\frac{k}{2}}\,\left(e^{-i\,\frac{k}{2}} - e^{i\,\frac{k}{2}}\right) = -2\,i\,e^{i\,\frac{k}{2}}\,\sin(\frac{k}{2})$$

avec des valeurs différentes de k, pour réécrire la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\alpha}$$

comme fraction de deux termes simples. Le dénominateur doit être réel.

(b) À l'aide du résultat (a) trouver la formule

$$\sin\,\alpha + \sin\,(2\,\alpha) + \sin\,(3\,\alpha) + \ldots + \sin\,(n\,\alpha) = \frac{\sin\,(\frac{n}{2}\alpha)\ \sin\,(\frac{n+1}{2}\,\alpha)}{\sin\,(\frac{\alpha}{2})}$$

2.7.1 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 2–2 : $z = 2 + 3\,i$, $z = -1 - 2\,i$ et $z = -2 + 9\,i$

Solution pour problème 2–3 :

$$z_3 = \sqrt{8}\,e^{i\,\pi/4} = 2\,\sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 2\,(1+i) = 2 + 2\,i$$

(a)

$$|\,z_1 + z_2\,| = |\,6\,i\,| = 6$$

(b)

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3\,i)\,(-2 + 3\,i) = -13$$

(c)

$$z_1 \cdot z_3 = \ldots = -2 + 10\,i$$

(d)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3\,i)\,(-2-3\,i)}{(-2+3\,i)\,(-2-3\,i)} = \frac{5-12\,i}{13}$$

Solution pour problème 2–4 :

(a) $z_1 \cdot z_2 = 3 + 3\,i$, $z_1^2 = -9$ et $z_2^2 = -2\,i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 26$, $z_1^2 = -20 + 48\,i$ et $z_2^2 = -5 - 12\,i$

(c) $z_1 \cdot z_2 = \frac{11-33\,i}{3}$, $z_1^2 = \frac{4}{9}\,(-3 + 4\,i)$ et $z_2^2 = -6 - i\,\frac{5}{2}$

Solution pour problème 2–5 : $-1 + i$ et $-1 - i$

Solution pour problème 2–6 : $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution pour problème 2–7 : $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, et donc $i^{4\,k} = 1$ pour $k \in \mathbb{N}$. Puis

$$i^{123443} = i^{123440} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$$

Solution pour problème 2–8 : $z_1 = i$ et $z_2 = -i$

Solution pour problème 2–9 : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

Solution pour problème 2–10 : Demi–plan au dessous la droite à $45°$ par l'origine, sans la droite.

Solution pour problème 2–11 : Une cône ouvert vers la droite et la gauche.

Solution pour problème 2–12 : $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ et $z_4 = -i$.

Solution pour problème 2–13 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ z_2 &= -2 \\ z_3 &= 2\,(\cos\frac{5\,\pi}{3} + i\sin\frac{5\,\pi}{3}) = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–14 :

(a) Wegen

$$z_2 = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

gilt

$$z_1 + z_2 = 2 + 2\,i$$

und

$$z_1 \cdot z_2 = -i\,(2 + 3\,i) = 3 - 2\,i$$

(b) Der zweite Quadrant besteht aus allen komplexen Zahlen mit beliebigen Beträgen und Argumententen zwischen $\pi/2$ und π. Durch das Bestimmen der Wurzel werden diese Argumente halbiert und man erhält somit Argumente zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$. Als neuer Bereich entsteht somit der Teil des ersten Quadranten oberhalb der $45°$–Geraden.

Solution pour problème 2–15 :

(a) Wegen

$$z_2 = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

gilt

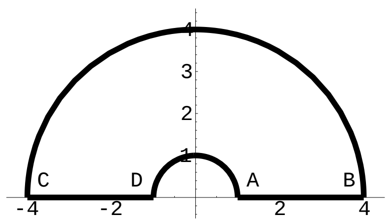
$$z_1 + z_2 = 1 - 4\,i \quad , \quad z_1 \cdot z_2 = -i\,(1 - 3\,i) = -3 - i \quad \text{und} \quad \sqrt{z_2} = \sqrt{-i} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} = e^{i\,3\pi/4}$$

(b) Der dritte Quadrant besteht aus allen komplexen Zahlen mit beliebigen Beträgen und Argumenten zwischen π und $3\,\pi/2$. Durch das Bestimmen der Wurzel werden diese Argumente halbiert und man erhält somit Argumente zwischen $\pi/2$ und $3\,\pi/4$. Als neuer Bereich entsteht somit der Teil des zweiten Quadranten oberhalb der $45°$–Geraden, d.h. Argumente zwischen $\pi/2 = 90°$ und $3\,\pi/4 = 135°$. Aus den Beträgen ist die Würzel zu ziehen, somit liegen die neuen Beträge zwischen 0 und $\sqrt{2}$.

Solution pour problème 2–16 :

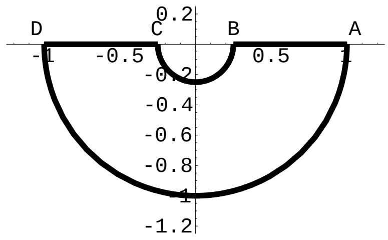
(a) Die Abbildung $z \mapsto z^2$ hat die folgenden Effekte:

- die Beträge werden quadriert, weil $|z^2| = |z|^2$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 4.
- die Argumente werden verdoppelt, weil $\arg z^2 = 2\,\arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $\pi/2$.



(b) Die Abbildung $z \mapsto 1/z^2$ hat die folgenden Effekte:

- die inversen Beträge werden quadriert, weil $|1/z^2| = |z|^{-2}$. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem inneren Kreis (Radius 1) auf dem Kreis mit Radius 1. Somit liegen die Bilder der Punkte auf dem äusseren Kreis (Radius 2) auf dem Kreis mit Radius 1/4.
- die Argumente wechseln das Vorzeichen und werden verdoppelt, weil $\arg 1/z^2 = -2\, \arg z$. Somit gehen die Winkel neu von 0 bis zu π, statt von 0 bis zu $-\pi/2$.



Solution pour problème 2–17 :

(a)

$$Z = R + \frac{1}{i\,\omega\,C} + i\,\omega\,L = R + i\,\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)$$

(b) Die Phasenverschiebung ist gegeben durch das Argument von Z

$$\tan\arg Z = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}}{R}$$

Somit ist $\arg Z = 0$ falls

$$\begin{aligned} \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{1}{L\,C} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{L\,C}} \end{aligned}$$

(c) Der erste Term der Impedanz

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right)^2$$

ist unabhängig von ω. Deshalb wird $|Z|$ ist minimal, falls der zweite Term Null ist, d.h. für

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,C}}$$

Der minimale Wert ist offensichtlich gegeben durch R .

Solution pour problème 2–18 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\,\omega\,L + 1/(i\,\omega\,C)} = \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{-\omega^2\,CL + 1} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{i\,\omega\,C}{1 - \omega^2\,CL} = a + i\,b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \frac{\omega^2\,C^2}{(1-\omega^2\,CL)^2}}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1-\omega^2\,CL}\right) \\ &= \frac{R^2\,(1-\omega^2\,CL)^2}{(1-\omega^2\,CL)^2 + R^2\omega^2\,C^2}\,\left(\frac{1}{R} - \frac{i\,\omega\,C}{1-\omega^2\,CL}\right) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{R^2\,(1-\omega^2\,CL)^2}{(1-\omega^2\,CL)^2+R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{1}{R} \\ L_{eq} &= -\frac{R^2\,(1-\omega^2\,CL)^2}{(1-\omega^2\,CL)^2+R^2\omega^2\,C^2}\,\frac{C}{1-\omega^2\,CL} \end{aligned}$$

Solution pour problème 2–19 :

(a) Der Widerstand R und die Kapazität C sind parallel geschaltet. Die Induktivität L ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= i\,\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R}+i\,\omega\,C} = i\,\omega L + \frac{R}{1+i\,\omega\,RC} \\ &= i\,\omega L + \frac{R\,(1-i\,\omega\,RC)}{1+\omega^2\,(RC)^2} = \frac{R}{1+\omega^2\,(RC)^2} + i\,\omega\,\left(L - \frac{R^2C}{1+\omega^2\,(RC)^2}\right) \\ &= R_0(\omega) + i\,\omega\,L_0(\omega) \end{aligned}$$

(b)

$$R_0(\omega) = \frac{R}{1+\omega^2\,(RC)^2}$$

(c)

$$L_0(\omega) = L - \frac{R^2C}{1+\omega^2\,(RC)^2}$$

Solution pour problème 2–20 :

(a) Der Widerstand R und die Induktivität L sind parallel geschaltet. Die Kapazität C ist dann in Serie geschaltet.

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{i\,\omega\,L}} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R}{i\,\omega\,L+R} = \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R\,(R-i\,\omega\,L)}{(i\,\omega\,L+R)\,(R-i\,\omega\,L)} \\ &= \frac{1}{i\,\omega C} + \frac{i\,\omega\,L\,R^2+\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2} = \frac{\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2} + \frac{1}{i\,\omega}\left(\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\,L\,R^2}{R^2+\omega^2\,L^2}\right) \\ &= R_0(\omega) + \frac{1}{i\,\omega\,C_0(\omega)} \end{aligned}$$

(b) Bestimmt durch den Realteil von $Z(\omega)$

$$R_0(\omega) = \frac{\omega^2\,L^2\,R}{R^2+\omega^2\,L^2}$$

(c) Bestimmt durch den Imaginärteil von $Z(\omega)$

$$C_0(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{\omega^2\,L\,R^2}{R^2+\omega^2\,L^2}} = \frac{C\,(R^2+\omega^2\,L^2)}{(R^2+\omega^2\,L^2)-\omega^2\,L\,R^2\,C} = \frac{C\,(R^2+\omega^2\,L^2)}{R^2+\omega^2\,L\,(L-R^2\,C)}$$

Für extreme Werte von ω können der Ersatzwiderstand und die Ersatzkapazität approximiert werden.

ω	$R_0(\omega)$	$\approx 1/C_0(\omega)$
sehr klein	≈ 0	$\frac{1}{C}$
sehr gross	$\approx R$	$\approx \frac{1}{C} - \frac{R^2}{L}$

Solution pour problème 2–21 :

$$\begin{aligned}\cos(4\,\alpha) + i\ \sin(4\,\alpha) &= e^{i\,4\,\alpha} = \left(e^{i\,\alpha}\right)^4 = (\cos(\alpha) + i\ \sin(\alpha))^4 \\ &= \cos^4\ \alpha + i\ 4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha \\ &\quad -i\,4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\ &= \cos^4\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha + \sin^4\ \alpha \\ &\quad +i\ \left(4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha\right)\end{aligned}$$

Nun ist nur der Realteil zu berücksichtigen und man erhält.

$$\cos(4\,\alpha) = \cos^4\ \alpha - 6\ \cos^2\ \alpha\ \sin^2\ \alpha + \sin^4\ \alpha$$

Aus dem Imaginärteil könnte man auch ablesen, dass

$$\sin(4\,\alpha) = 4\ \cos^3\ \alpha\ \sin\ \alpha - 4\cos\ \alpha\ \sin^3\ \alpha$$

Solution pour problème 2–22 :

(a) Es handelt sich um eine geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

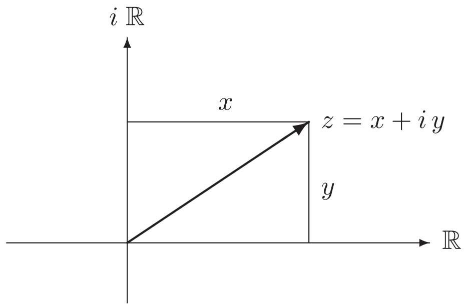
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{i\,n\,\alpha} = \frac{1 - e^{i\,(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\,\alpha}} = \frac{-2\,i\ e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{-2\,i\ e^{i\,\frac{\alpha}{2}}\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{n+1}{2}\,\alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{e^{i\,\frac{\alpha}{2}}\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{e^{i\,\frac{n}{2}\,\alpha}\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\end{aligned}$$

(b) Der Imaginärteil der obigen Formel liefert das gewünschte Resultat.

2.8 formulaire pour les nombres complexe

2.8.1 définitions de base

$z = x+iy = re^{i\varphi}$ avec un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$
et des nombres réels $x, y, r, \varphi \in \mathbb{R}$.
x est la partie réelle de z.
y est la partie imaginaire de z.
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la norme de z.
φ est l'argument de z si $\tan\varphi = y/x$.
$i = \sqrt{-1}$ et $i^2 = -1$.



2.8.2 propriétés et règles de calcul

$z = |z|e^{i\varphi} = |z|\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$
$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ avec un nombre réel λ.
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$1/z = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
$z_1/z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\bar{z} = z^* = x - iy$ est le complexe conjugué de z
$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $e^{2\Pi i} = 1,$ $e^{Pii} = -1$
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
$e^{iny} = (\cos y + i\sin y)^n = \cos(ny) + i\sin(ny)$
Les solutions de $z^n = 1$ sont données par $z_k = e^{i2\Pi\frac{k}{n}}$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.9 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître les connections entres les nombres réels et complexes.
- maîtriser les opérations élémentaire avec des nombres complexes, d'une façon algebraique et géométrique.
- connaître les notations des impédances complexes pour résistance, capacité et inductance.

Chapitre 3

Vecteurs et matrices

3.1 introduction

Dans ce chapitre on introduit des vecteurs et des matrices avec les opérations arithmétiques. Les applications des vecteurs et matrices vont suivre dans les chapitres suivants. Plus tard on va examiner les aspect géometriques des vecteurs.

3.2 vecteurs

Un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et aussi dit un **scalaire**. Toutes opérations dans ce chapitre peuvent être fait avec des scalaires complexes $\alpha \in \mathbb{C}$. On y renonce.

3–1 Définition : Un **vecteur** $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ consiste de n scalaires $v_i \in \mathbb{R}$. Représenter des vecteurs comme colonne des nombres.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Les scalaires v_i sont aussi dit **composantes** du vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

3–2 Exemple : Voilà quelques vecteurs en $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.314 \\ -47 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

♢

Dans ce cours on travaille presque exclusivement avec des vecteurs de colonne, mais il existe des situations pour lesquelles les vecteurs de ligne seront plus pratiques.

3–3 Définition : Si on transforme un vecteur de colonne dans un vecteur de ligne on parle du **vecteur transposé** et on écrit $\vec{a}^T$ ou $\vec{a}^*$.

3–4 Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1\,,\,2\,,\,3) \quad \text{et} \quad (0.2\,,\,-2\,,\,3\,,\,0)^T = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

♢

3.2.1 addition et multiplication avec un scalaire

3–5 Définition :

- On fait l'**addition** de deux vecteurs en faisant l'addition composante par composante. On a donc

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i = a_i + b_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n$$

ou aussi

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- Un vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ est **multiplié par un scalaire** $\alpha \in \mathbb{R}$ en multipliant chaque composante par α. On a donc

$$\vec{b} = \alpha\,\vec{a} \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_i = \alpha\,a_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n$$

ou aussi

$$\vec{b} = \alpha\,\vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,a_1 \\ \alpha\,a_2 \\ \vdots \\ \alpha\,a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Observer qu'on peut seulement appliquer l'addition pour des vecteurs de largeur identique.

3–6 Résultat : *Les règles de calcul pour de nombres rends directement quelques règles de calcul pour des vecteurs.*

$\vec{a} + \vec{b}$	$=$	$\vec{b} + \vec{a}$	*loi de commutativité*
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	$=$	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	*loi d'assoziativité*
$\alpha\,(\vec{a} + \vec{b})$	$=$	$\alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$	*loi de distributivité*
$(\alpha + \beta)\,\vec{a}$	$=$	$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$	*loi de distributivité*

3–7 Exemple : Les exemples simple ci–dessous montrent qu'il n'y a pas de surprises pour l'addition des vecteurs et la multiplication avec des scalaires.

(a)

$$7\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\14\\7\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

(c)

$$7\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 1-3\cdot 0\\7\cdot 2-3\cdot 1\\7\cdot 3-3\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\\27\end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\quad\text{ne pas définit}$$

$\diamondsuit$

3–8 Exemple : La majorité des nouvelles calculatrices de poche sait calculer avec des vecteurs et matrices. C'est votre tache d'utiliser les calculatrices d'une façon efficace et raisonnable. Utiliser *Octave* pour l'exemple précédente.

Octave

```
3*[3; 2; 1]
[2; -1] + [4; 0] - [1; 1]
7*[1; 2; 3] - 3*[0; 1; -2]
[2; -1] + [ 1; 0; 2]
```

Octave va calculer et afficher les trois premiers résultats et puis montrer un message d'erreur pour le quatrièm calcul. $\diamondsuit$

3.2.2 la norme d'un vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs

La notion de longueur d'un vecteur dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$ s'applique aussi aux vecteurs $\vec{a}\in\mathbb{R}$.

3–9 Définition : La **norme** d'un vecteur $\vec{a}\in\mathbb{R}$ est donnée par

$$\|\vec{a}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\quad\text{ou}\quad\|\vec{a}\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

3–10 Exemple : On obtient

$$\|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\|^2 = 1^2+3^2 = 10 \quad \text{ou} \quad \|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\| = \sqrt{10}$$

♢

3–11 Définition : On peut multiplier deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Le résultat est un scalaire en $\mathbb{R}$ et cette opération est dit **produit scalaire** des deux vecteurs. On utilise

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \vec{a}^T\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i\,b_i$$

Si le contexte du problème indique que seulement un produit scalaire est possible on ose simplifier la notation et écrire

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i\,b_i$$

3–12 Théorème : *On a les règles de calcul suivantes*

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$	*loi de commutativité*
$(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$	*pour* $\lambda\in\mathbb{R}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	*loi de distributivité*
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}$ *orthogonal à* $\vec{b}$	*orthogonalité*
$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle\vec{a}\,,\,\vec{a}\rangle} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$	

3–13 Résultat : *Pour toutes vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ *on a l'inégalité de* ***Cauchy*** *et* ***Schwarz***

$$|\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

Démonstration : Si un des deux vecteurs est $\vec{0}$ puis le résultat est évidant. Pour des vecteurs quelconques $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ choisissons

$$\alpha = \sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}} \quad \text{et} \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}} = \frac{\pm 1}{\alpha}$$

Le signe de β est déterminé par le signe de $-\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle$. Puis on utilise l'inégalité

$$\begin{aligned}
0 &\le \|\alpha\,\vec{a}+\beta\vec{b}\|^2 = \langle\alpha\,\vec{a}+\beta\vec{b}\,,\,\alpha\,\vec{a}+\beta\vec{b}\rangle\\
&= \alpha^2\,\|\vec{a}\|^2 + 2\,\alpha\,\beta\,\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle + \beta^2\|\vec{b}\|^2\\
&= \|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\| \pm 2\,\frac{\alpha}{\alpha}\,\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle + \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\\
&= 2\,\|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\| - 2\,|\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle|
\end{aligned}$$

pour conclure

$$|\langle\vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

□

Pour des vecteurs en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on sait que

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\ \cos\angle(\vec{a}\,\vec{b})$$

pour des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ on **définit** l'angle γ entre les vecteurs par l'équation

$$\cos\gamma = \frac{\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

Si $\vec{n}$ est un vecteur de longueur 1 puis on trouve

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\|\cos\,\angle(\vec{a},\vec{n})$$

La Figure 3.1 montre pourquoi $\vec{a}\cdot\vec{n}$ est dit la **composante de** $\vec{a}$ **dans la direction de** $\vec{n}$. On parle de la **projection** de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$. Ce résultat est utile pour beaucoup d'applications. Examiner problème 3–3 (page 88).

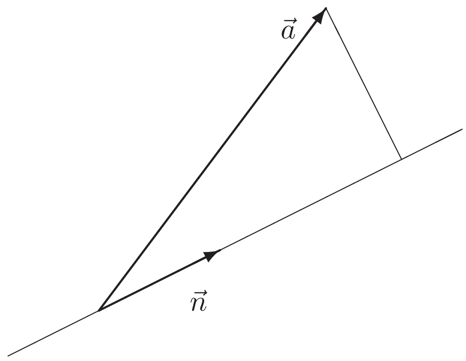


Figure 3.1: composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$

3.2.3 le produit vectorielle en $\mathbb{R}^3$

Le produit **scalaire** de deux vecteurs rend un scalaire comme résultat. Le **produit vectorielle** de deux vecteurs rend un vecteur comme résultat. Observer que cette construction est seulement possible en $\mathbb{R}^3$.

3–14 Définition : Pour les coordonnées cartésienne on trouve

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix}$$

3–15 Résultat :
Pour deux vecteurs $\vec{a}\,,\,\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ le produit vectorielle $\vec{a}\times\vec{b}$ est un vecteur caractérisé par

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\ \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

(2) $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont perpendiculaire à* $\vec{a}\times\vec{b}$

(3) *les vecteurs* $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{a}\times\vec{b}$ *forme un* ***système droit***

L'angle doit être entre 0 *et* π .

3–16 Résultat : *Pour deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ on arrive à*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{ aire du parallélogramme}$$

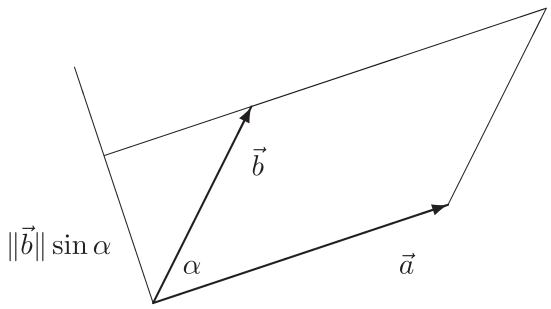


Figure 3.2: produit vectorielle et parallélogramme

Démonstration : Figure 3.2 montre que la hauteur du parallélogramme est donné par $h = \|\vec{b}\| \sin \alpha$ et donc l'aire du parallélogramme est égal au produit de hauteur et largeur

$$\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin \alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

□

3–17 Résultat : *Les règles de calcul du produit vectorielle montrent que pour des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve des règles suivantes.*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \, \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *ou* $\vec{b} = \vec{0}$ *ou* $\vec{a}$ *est parallèle à* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(loi de distributivité)*

3–18 Remarque : Utilisant la notation d'une **déterminante** il existe une aide mémoire pour le produit vectorielle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \, (a_2 \, b_3 - a_3 \, b_2) + \vec{e}_y \, (a_3 \, b_1 - a_1 \, b_3) + \vec{e}_z \, (a_1 \, b_2 - a_2 \, b_1)
\end{aligned}$$

Figure 3.3 peut aider pour mémoriser. ♢

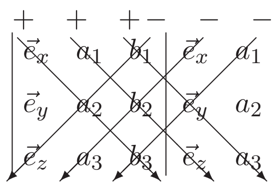


Figure 3.3: aide mémoire pour le produit vectorielle

3–19 Exemple : On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-3) - 4\cdot 1 \\ -2\cdot(-3) + 4\cdot 0.5 \\ 2\cdot 1 - (-3)\cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer avec *Octave*.

Octave

```
a=[2;-3;4]
b=[0.5;1;-3]
cross(a,b)
-->
ans =
   5.0000
   8.0000
   3.5000
```

♢

3.3 matrices

Dans cette section nous examinons des matrices et les opérations arithmétiques de base.

3.3.1 définition et opération de base

3–20 Définition : Une **matrice** de largeur $n \times m$ consiste de n lignes et m colonnes des nombres. On écrit $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ ou

$$\mathbf{A} = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Si le nombre des lignes est égal au nombe des colonnes on parle d'une **matrix carrée**.

- On peut additionner des matrices de largeur identiques et on le fait élément par élément.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ c_{i,j} &= a_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

  Évidemment cette opération est commutative, veut dire $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. On ne peut **pas** additionner des matrices de largeur différente.

- On peut multiplier une matrice $\mathbf{A}$ avec un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ en multipliant chaque élément avec λ.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda\,\mathbf{A} \\ c_{i,j} &= \lambda\, a_{i,j} \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

3–21 Remarque : Un **vecteur de colonne** avec n composantes peut être regarder comme matrice de largeur $n \times 1$. Un **vecteur de ligne** avec m composantes peut être regarder comme matrice de largeur $1 \times m$. Puis les définitions d'addition des vecteurs et matrices coïncident. ♢

3–22 Exemple : Pour les 2×3 matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ \pi & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$3\,\mathbf{A} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3\,\pi & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

♢

3–23 Exemple : Examiner les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Puis on trouve

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Les operations $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ et $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ **ne sont pas définit**. ♢

3.3.2 multiplication des matrices

3–24 Définition : La **multiplication** des matrices n'est pas autant simple que l'addition. Le produit d'une matrice $n \times m$ $\mathbf{A}$ avec une matrice $m \times k$ $\mathbf{B}$ rend une matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ de largeur $n \times k$. La nombre k des colonnes de $\mathbf{A}$ doit être égal au nombre k des lignes de $\mathbf{B}$. Les composantes du résultat sont données par

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \cdot b_{l,j}$$

Il y a des façons différentes de mémoriser cette formule.

- Pour obtenir $c_{i,j}$ (ligne i et colonne j-te) du produit $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ calculer le produit de la i-ième ligne de $\mathbf{A}$ (comme vecteur) avec la j-ième colonne de $\mathbf{B}$.

- Utiliser le schéma de **Falk** montrer en Figure 3.4. Suivant les flèches multiplier les nombres en $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et puis additionner. Pour les nombres des lignes et colonnes on trouve

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ n\times m & \cdot & m\times k & \longrightarrow & n\times k \end{array}$$

- Le schéma de Falk met en évidance q'on peut calculer une composante $c_{i,j}$ de $\mathbf{C}$ sans calculer tous les nombres du produit $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

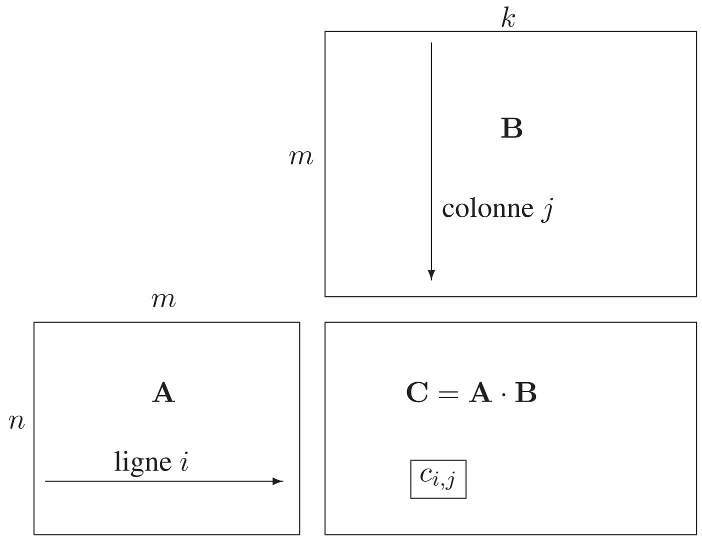


Figure 3.4: multiplication de deux matrices, schéma de Falk

3–25 Exemple : Multiplier la matrice $\mathbf{A}$ de largeur 3×2 avec la matrice $\mathbf{B}$ de largeur 2×3 rend une matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ de largeur 3×3–Matrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cdot 1-3\cdot 4 & 2\cdot 2-3\cdot 5 & 2\cdot 3-3\cdot 6 \\ 1\cdot 1+0\cdot 4 & 1\cdot 2+0\cdot 5 & 1\cdot 3+0\cdot 6 \\ -2\cdot 1-1\cdot 4 & -2\cdot 2-1\cdot 5 & -2\cdot 3-1\cdot 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -10 & -11 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & -9 & -12 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Avec *Octave* on calcul directement avec des matrices. Le programme est très similaire à `MATLAB`, dont le nom se base sur **Mat**rix **Lab**oratory.

Octave

```
A=[2,-3;1, 0; -2;-1]; B=[1,2,3; 4,5,6];
A*B
-->
ans =
  -10  -11  -12
    1    2    3
   -6   -9  -12
```

Pour cet exemple on peut aussi calculer le produit $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ et le résultat est une matrice de largeur 2×2.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou avec *Octave*

Octave

```
B*A
-->
ans =
   -2   -6
    1  -18
```

Cet exemple simple met en évidance que la multiplication des matrices **n'est pas commutative**. ♢

3–26 Définition : A partir d'une matrice $n \times m$ $\mathbf{A}$ on construit la **transposée de la matrice** $\mathbf{A}^T$ en utilisant les lignes de $\mathbf{A}$ comme colonnes en $\mathbf{A}^T$ et les colonnes de $\mathbf{A}$ comme lignes en $\mathbf{A}^T$. La première ligne de $\mathbf{A}$ devient la première colonne de $\mathbf{A}^T$. Donc $\mathbf{A}^T$ est de largeur $m \times n$. On utilise les notations $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{tr} = \mathbf{A}'$.

3–27 Exemple : Pour la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

la transposée de la matrice est donnée par

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{tr} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

♢

3–28 Exemple : La transposé d'un vecteur de colonne est un vecteur de ligne. On peut donc écrire le produit scalaire comme produit des matrices dans la forme

$$\langle \vec{x}\,,\,\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\cdot\vec{y} = (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + \ldots + x_n\,y_n$$

Les notations ne sont pas toujours utilisées d'une façon 100% correcte. Il faut aussi tenir compte du context du problème pour reconnaître les calculs corrects.

Comme conséquence simple on arrive aussi à

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + x_3\,x_3 + \ldots + x_n\,x_n = \vec{x}^T\cdot\vec{x} = \langle \vec{x}\,,\,\vec{x}\rangle$$

Cet exemple montre aussi que la multiplication des matrices n'est pas commutative.

$$\vec{y}\cdot\vec{x}^T = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\cdot(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 & \ldots & y_1x_n\\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 & \ldots & y_2x_n\\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 & \ldots & y_3x_n\\ & \vdots & & & \vdots\\ y_nx_1 & y_nx_2 & y_nx_3 & \ldots & y_nx_n\end{bmatrix}$$

♢

3–29 Exemple : Multiplier une $n\times m$ matrice $\mathbf{A}$ avec un vecteurs $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ en regardont le vecteur comme matrice de largeur $m\times 1$. Examiner l'exemple ci–dessous.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 0\\ 0\cdot 2-2\cdot 1+7\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ -2\end{pmatrix}$$

♢

3–30 Exemple : On peut réécrire un système des équations linéaires à l'aide d'une matrice et une multiplication d'une matrice avec un vecteur. Examiner l'exemple

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,x & +1\,y & +2\,z & = & 9\\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1\\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0\end{array}$$

pour les trois unconnues x, y und z. Réécrire dans la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

avec les notations

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

on arrive à

$$\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

Il s'agit d'une application très importante des matrices. Le nombre des lignes en $\mathbf{A}$ correspond au nombre des équations à résoudre et le nombre des colonne représente le nombre des inconnues. ♢

Un système des équations linéaire, inhomogène

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+ & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1\\
a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3+ & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2\\
a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3+ & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+a_{m3}\,x_3+ & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & b_m
\end{array}$$

pour les n inconnues peut être réécrit comme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n}\\ & \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

3.3.3 matrice inverse et systèmes des équations linéaires

3–31 Définition : Une matrice de largeur $n\times n$ avec des nombres 1 dans la diagonal et des zéros hors de la diagonale est dit **matrice d'unité**. On utilise les notations $\mathbb{I}_n=\mathbf{E}_n$. Pour tout vecteur $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ on a $\mathbb{I}_n\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

3–32 Exemple :

$$\mathbb{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad\mathbb{I}_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

♢

3–33 Définition : Soit $\mathbf{A}\in\mathbb{M}^{n\times n}$ une matrice de largeur $n\times n$.

- La matrice $\mathbf{A}$ est dit inversible à gauche si il existe une matrice $\mathbf{B}\in\mathbb{M}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{BA}=\mathbb{I}_n$.
- La matrice $\mathbf{A}$ est dit inversible à droite si il existe une matrice $\mathbf{C}\in\mathbb{M}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{AC}=\mathbb{I}_n$.
- Une matrice $\mathbf{B}\in\mathbb{M}^{n\times n}$ de largeur $n\times n$ avec

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbb{I}_n\quad\text{et}\quad\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbb{I}_n$$

  est dit la **matrice inverse** de $\mathbf{A}$ est $\mathbf{A}$ est dit **inversible**. On écrit $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. On a donc deux conditions.

3–34 Lemme : *Soit* $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}$ *une matrice inversible .*

- *Si* $\mathbf{BA} = \mathbf{AC} = \mathbb{I}_n$ *puis* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$*. Par conséquence* $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$*.*
- *Pour une matrice* $\mathbf{A}$ *inversible il existe une, et une seule, matrice inverse.*
- *On a* $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

Démonstration :

- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{C}$
- Soient $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ deux matrices inverses de la matrice $\mathbf{A}$. Puis on utilise l'équation $\mathbb{I}_n = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ et on peut multiplier de la gauche par $\mathbf{C}$ pour arriver à
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\mathbb{I}_n = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbb{I}_n\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}$$
- Conséquence directe de
$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}_n$$

□

3–35 Exemple : Verifier que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

sont des matrices inverses. ♢

3–36 Résultat : *Pour une matrice* $\mathbf{A}$ *inversible on peut résoudre le système des équations linéaires*

$$\mathbf{A}\cdot\vec{x} = \vec{b}$$

Multiplier l'equation par $\mathbf{A}^{-1}$ *de la gauche pour arriver à*

$$\vec{x} = \mathbb{I}_n\cdot\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\vec{b}$$

La valeur du résultat ci–dessus est plutôt théorique que pratique. Pour les problèmes appliqués il est rarement nécessaire de trouver la matrice inverse. On peut résoudre les systèmes linéaireS d'une façon plus efficace, veut dire avec moins de calculs. La différence importe pour des systèmes grands. On va examiner ces algorithmes en chapitre 6.

3–37 Résultat : *Si* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont des matrices inversibles de largeur identiques, puis* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *est une matrice inversible et on trouve*

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$$

Pour calculer l'inverse d'un produit des matrices on peut multiplier les inverses des matrices individuelles, mais dans l'ordre inverse.

Démonstration : Utiliser la définition de matrice inverse. Les calculs ci–dessous vérifient le résultat.

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbb{I}_n\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbb{I}_n \\ (\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbb{I}_n\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbb{I}_n\end{aligned}$$

□

3–38 Résultat : *Pour une matrice* $\mathbf{A}$ *carrée et inversible on touve*

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

Démonstration : Avec la définition de matrice inverse on arrive à

$$\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_N^T = \mathbb{I}_n$$

□

3–39 Résultat : *(règles de calcul)*
Pour des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *on trouve les règles de calcul suivantes:*

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{A}+\mathbf{B} & = & \mathbf{B}+\mathbf{A} & \textit{commutativité de l'addition} \\
\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) & = & (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} & \textit{assoziativité de l'addition} \\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) & = & (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} & \textit{assoziativité de la multiplication} \\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) & = & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} & \textit{loi de distributivité} \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} & = & \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1} & \\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T & = & \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T & \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T & = & \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T & \\
\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} & = & \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T &
\end{array}$$

Les règles ci–dessus sont correctes, sous condition que les opérations sont bien définit.

3–40 Exemple : Le système des equations linéaires

$$\begin{array}{rrrl}
1\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 = & 7 \\
2\,x_1 & +0\,x_2 & -1\,x_3 = & -1 \\
-2\,x_1 & +1\,x_2 & +2\,x_3 = & 2
\end{array}$$

peut être réécrit dans la forme

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puis la solution est donnée par

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Une autre façon d'écrire ce système est par transposition.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

veut dire dans la forme

$$\vec{x}^T \cdot \mathbf{A}^T = \vec{b}^T$$

A partir de cette forme on arrive à la solution par une multiplication de la droite par la matrice $(\mathbf{A}^T)^{-1}$.

$$\vec{x}^T = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^{-1} = \vec{b}^T \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}\right)^T$$

$\diamondsuit$

3–41 Exemple : À l'aide de *Octave* on obtient la matrice inverse du problème ci–dessus par

Octave

```
A=[1 3 4; 2 0 -1; -2 1 2];
Ainv=inv(A)
x=Ainv*[7;-1;2]
-->
Ainv =
   0.33333  -0.66667  -1.00000
  -0.66667   3.33333   3.00000
   0.66667  -2.33333  -2.00000

x =
   1.0000
  -2.0000
   3.0000
```

Pour résoudre le système linéaire il est plus efficace de diviser par la matrice $\mathbf{A}$ de la gauche, sans calculer la matrice inverse.

Octave

```
x=A\[7;-1;2]
-->
x =
   1
  -2
   3
```

$\diamondsuit$

3–42 Exemple : La calculatrice **HP-48** regarde tout vecteur comme vecteur de colonne, même si il est affiché comme vecteur de ligne. Mettre la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\vec{x}$ comme `[ 1 -2 3]` sur le stack et puis presser la touche de multiplication `*` pour arriver au résultat de la multiplication.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour insister à un vecteur de ligne il faut mettre `[[1 -2 3]]`.

Pour résoudre le système de l'exemple précédent mettre le vecteur $\vec{b}$ comme `[7 -1 2]` sur le stack, suivit par la matrice $\mathbf{A}$. Puis on peu utiliser la touche de division pour obtenir le vecteur de solution $\vec{x}$. Mettre la matrice $\mathbf{A}$ sur le stack et presser `1/x` pour calculer la matrice inverse. $\diamondsuit$

3–43 Définition : Pour une matrice carrée de largeur $n \times n$ la **trace** est donné comme somme des nombres dans la diagonale de la matrice, veut dire

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

En allemand on utilise le mot ‘Spur’.

3–44 Exemple :

$$\text{Spur} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

♢

3.4 un exemple mécanique

La question suivante (Figure 3.5) est posée dans le cours mécanique de Bernard Schmutz. On peut trouver la réponse à l’aide d’un système de six équations linéaires pour six inconnues. Malheureusement nous avons pas (encore) tout les méthodes mathématiques et physiques à disposition pour la solution complet. Voilà les faits qui manquent:

- Pour deux vecteurs dans l’espace $\mathbb{R}^3$ on peut trouver le produit vectorielle. Le résulta sera un vecteur donné par

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\vec{r}$ le vecteur de connexion d’un point de référence à un point d’attaque pour une force $\vec{F}$. Puis le moment de cette force par rapport au point de référence est

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

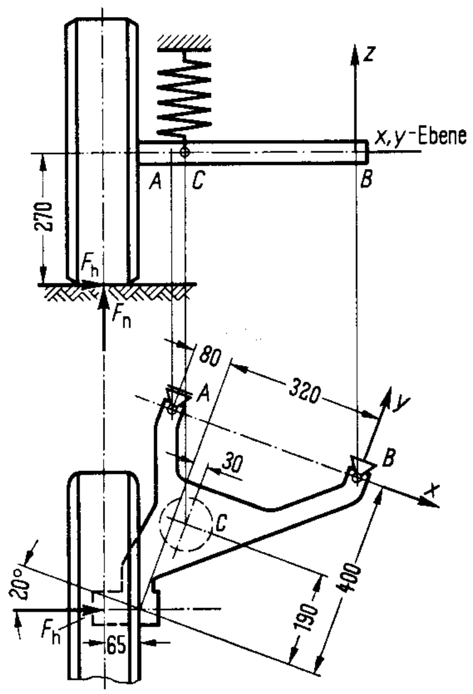
- Pour un système mécanique en équilibre la somme de toutes les forces externes doit être zéro.
- Pour un système mécanique en équilibre la somme de tous les moments externes doit être zéro. On peut choisir le point de référence.

Tous les data sont données en unités SI. Les data géométriques de la suspension arrière sont données par les vecteurs

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -0.32 - 0.065\,\cos(20^\circ) \\ -0.4 - 0.065\,\sin(20^\circ) \\ -0.27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.38108 \\ -0.42223 \\ -0.27000 \end{pmatrix}$$



La figure ci-contre est une représentation simplifiée d'une suspension arrière de voiture à bras oscillante incliné.
Le palier A est glissante dans la direction x. Le palier B est une routule.
Au passage d'une courbe, la bande de roulement agit avec une force $\vec{F}$ sur la roue: sa composante nornale vaut $F_n = 6.4$ kN et sa composante tangentielle (force d'adhérence) vaut $F_h = 3.8$ kN.
On demande d'évaluer les réactions des paliers $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ ainsi que la force de ressort $\vec{F}_C$.

Figure 3.5: une suspension arrière

Les forces connues sont

$$\vec{F}_h = \begin{pmatrix} 3.8\ \cos(20^\circ) \\ 3.8\ \sin(20^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{F}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

A trouver sont les vecteurs de force

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix}$$

Mettre tout les inconnues dans un vecteur $\vec{u}$.

$$\vec{u} = (F_{Cz}\, ,\, R_{Ay}\, ,\, R_{Az}\, ,\, R_{Bx}\, ,\, R_{By}\, ,\, R_{Bz})^T$$

Utilisons que la somme des forces vaut zéro et écrire en plusieurs façon.

- Avec des vecteurs on arrive à

$$\vec{F}_h + \vec{F}_n + \vec{F}_C + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

- Réécrire en utilisant des composantes.

$$\begin{pmatrix} 3.8\ \cos(20^\circ) \\ 3.8\ \sin(20^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est favorable d'isoler toutes les inconnues d'une côté.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3.8\,\cos(20^\circ) \\ 3.8\,\sin(20^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

- Puis réécrire en utilisant la notation d'une matrice.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.8\,\cos(20^\circ) \\ -3.8\,\sin(20^\circ) \\ -6.4 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Dans une deuxième phase calculons les moments par rapport au point de référence B. Utiliser le produit vectorielle.

- $$\vec{BA} \times \vec{R}_A = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +0.4\,R_{Az} \\ -0.4\,R_{Ay} \end{pmatrix}$$

- $$\vec{BC} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} -0.29 \\ -0.21 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.21\,F_{Cz} \\ +0.29\,F_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{BD} \times (\vec{F}_h + \vec{F}_n) \approx \begin{pmatrix} -0.38108 \\ -0.42223 \\ -0.27000 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3.5708 \\ 1.2997 \\ 6.4000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.3514 \\ 1.4748 \\ 1.0124 \end{pmatrix}$$

La somme des trois moments doit être zéro. Écrire des façon différentes.

- Avec des vecteurs ou composante par composante.

$$\begin{aligned} \vec{BA} \times \vec{R}_A + \vec{BC} \times \vec{F}_C &= -\vec{BD} \times (\vec{F}_h + \vec{F}_n) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +0.4\,R_{Az} \\ -0.4\,R_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.21\,F_{Cz} \\ +0.29\,F_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix} &\approx -\begin{pmatrix} -2.3514 \\ 1.4748 \\ 1.0124 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Comme système des équations linéaires.

$$\begin{bmatrix} -0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.29 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Pour résoudre il faut d'abord combiner les deux systèmes (3.1) et (3.2) dans un seul système de six équations pour les six inconnues.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.29 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.8 \cos(20^\circ) \\ -3.8 \sin(20^\circ) \\ -6.4 \\ +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3.57083 \\ -1.29968 \\ -6.4 \\ +2.3514 \\ -1.4748 \\ -1.0124 \end{pmatrix}$$

Calculer la solution à l'aide d'un outil adapté au tache (*Octave*, HP, TI, ...). Le résultat est

$$\begin{pmatrix} F_{Cz} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -11.19714 \\ 2.53100 \\ 4.43093 \\ -3.57083 \\ -3.83068 \\ 0.36621 \end{pmatrix}$$

Donc on a trouvé toutes les forces.

$$\vec{F}_C \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11.197 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_A \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 2.531 \\ 4.431 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{R}_B \approx \begin{pmatrix} -3.571 \\ -3.831 \\ 0.366 \end{pmatrix}$$

3.5 régression linéaire

Comme prochaine application on va examine la **régression linéaire**.

3–45 Exemple : Une droite de la forme $y = a_0 + a_1\,x$ devrait passer par les trois points $(1,1)$, $(2,3)$ et $(4,0)$. On ne va pas obtenir une droite qui passe par les trois points d'une façon exacte. Donc on calcule les trois distances verticales des points de la droite.

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0 + a_1\,x_1 - y1 = a_0 + a_1 \cdot 1 - 1 \\ r_2 &= a_0 + a_1\,x_2 - y2 = a_0 + a_1 \cdot 2 - 3 \\ r_3 &= a_0 + a_1\,x_3 - y3 = a_0 + a_1 \cdot 4 - 0 \end{aligned}$$

Puis on demande que la somme des carrées des trois distances soit minimale. Examiner

$$\begin{aligned} F = r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 &= 3\,a_0^2 + a_1^2\,(1^2 + 2^2 + 4^2) + a_0\,a_1\,2\,(1+2+4) - \\ &\quad -a_0\,2\,(1+3+0) - a_1\,2\,(1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 0) + (1^2 + 3^2 + 0^2) \\ &= 3\,a_0^2 + 21\,a_1^2 + 14\,a_0\,a_1 - 8\,a_0 - 14\,a_1 + 10 \end{aligned}$$

Pour que cette déviation quadratique soit minimale[1] il faut que les dérivées par rapport à a_0 et a_1 soient zéro.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, F}{\partial a_0} &= 6\,a_0 + 14\,a_1 - 8 = 0 \\ \frac{\partial\, F}{\partial a_1} &= 14\,a_0 + 42\,a_1 - 14 = 0 \end{aligned}$$

Écrire ce système dans la forme

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 14 & 42 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

pour trouver la solution

$$a_0 = 2.5 \quad \text{et} \quad a_1 = -0.5$$

Puis on a trouvé la droite $y = 2.5 - 0.5\,x$ qui passe le mieux possible par les trois points. ♢

La méthode de l'exemple précédent ne dépends pas des valeurs numériques. À l'aide des matrices réécrire les calculs.

3–46 Exemple : Une droite de la forme $y = a_0 + a_1\,x$ devrait passer par quelques points (x_i, y_i). Chercer a_0 et a_1 tel que

$$y_i = a_0 + a_1\,x_i \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n$$

À l'aide des matrices et vecteurs on écrit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\,\vec{a}$$

Pour $n > 2$ on ne peut pas satisfaire toutes ces équations. Donc on demande, que la longueur du vecteur de résidue soit minimale.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a}$$

Donc on examine l'expression

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\|^2 &= \langle \vec{r}\,,\, \vec{r}\rangle = \vec{r}^T \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot (\vec{y} - \mathbf{X}\,\vec{a}) \\ &= \vec{y}^T \cdot \vec{y} - (\mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot \vec{y} - \vec{y}^T \cdot (\mathbf{X}\,\vec{a}) + (\mathbf{X}\,\vec{a})^T \cdot (\mathbf{X}\,\vec{a}) \\ &= \|\vec{y}\|^2 - \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \vec{y} - \vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} + \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{y}\|^2 - 2\,\vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} + \vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

[1] On parle aussi de la méthode des moindres carrés.

Pour que cette expression soit minimale, il faut que la dérivée par rapport aux composantes de $\vec{a}$ soit zéro. Examinons ces contributions l'une après l'autre.

$$\begin{aligned}
\vec{y}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} &= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n y_i \;,\; \sum_{i=1}^n y_i\, x_i \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= a_0 \sum_{i=1}^n y_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i\, x_i
\end{aligned}$$

Pour examiner $\vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a}$ écrire le produit des matrices

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_i & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On arrive à

$$\begin{aligned}
\vec{a}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{a} &= (a_0\,,\, a_1) \cdot \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= (a_0\,,\, a_1) \cdot \begin{pmatrix} a_0\, n + a_1\, \sum_{i=1}^n x_i \\ a_0\, \sum_{i=1}^n x_i + a_1\, \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \\
&= a_0^2\, n + 2\, a_0\, a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_1^2 \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Examinons les dérivées par rapport à a_0 et a_1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \|\vec{r}\|^2}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^n y_i + 2\, a_0\, n + 2\, a_1 \sum_{i=1}^n x_i \\
\frac{\partial\, \|\vec{r}\|^2}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^n y_i x_i + 2\, a_0 \sum_{i=1}^n x_i + 2\, a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Mettre ces deux expressions à zéro rend un systèmes des équations linéaires pour les inconnues a_0 et a_1.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{pmatrix}$$

À l'aide de la matrice $\mathbf{X}$ réécrire ce system dans la forme

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \vec{a} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

Pour des points (x_i, y_i) connus on peut résoudre ce système. $\diamondsuit$

La situation ci–dessus est rencontré assez fréquemment et donc on a introduit les notations

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

et le système est réécrit dans la forme

$$\begin{bmatrix} n & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

À l'aide du Problème 3–12 on trouve une formule pour la solution.

$$\begin{aligned} \Delta &= n \cdot S_{xx} - S_x^2 \\ a_0 &= \tfrac{1}{\Delta}\,(S_{xx} S_y - S_x S_{xy}) \\ a_1 &= \tfrac{1}{\Delta}\,(n \cdot S_{xy} - S_x S_y) \end{aligned}$$

Ces formules sont façile à programmer et donc on peut déterminer la droite de régression pour des points donnés.

Dans l'exemple 3–45 on a

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\mathbf{X}^T \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est donné par

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On retrouve les calculs de l'exemple 3–45.

La méthode de régression linéaire n'est pas limitéa à des droites de régression. L'exemple précédent est q'un cas spécial de la situation suivante:

3–47 Résultat : *(régression linéaire)*
Pour une matrice $\mathbf{X}$ *de largeur* $n \times m$ *et un vecteur* $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *chercher un vecteur* $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ *tel que la longueur du vecteur redidu* $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ *soit minimal. Utiliser*

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \vec{a} - \vec{y}$$

Trouver la solution $\vec{a} \in \mathbb{R}$ *comme solution du système de* m *équations linéaires*

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) \cdot \vec{a} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

Avec ce résultat on peut trouver la parabole qui passe le mieux possible par des points donnés.

3–48 Exemple : Une parabole $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ doit passer par les quatre points $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ et $(4, 5)$. Donc on demande que la somme des carrés des quatre distances verticales soit minimale.

$$r_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Avec la notation des matrices on demande que la longueur du vecteur $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

soit minimale. Donc on trouve la situation du résultat précédent et on tombe sur un système de trois équations pour trois inconnues.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc la parabole optimale est

$$y\,(x) = 2.5 + 0.6\,x + 0\,x^2$$

C'est par hasard qu'on tombe effectivement sur une droite. A cause de la symétrie des points donnés on sait que la parabole doit passer par le point $(2.5\,,\,4.0)$.

En *Octave* utiliser la commande `LinearRegression()`[2].

Octave

[2] À trouver sur la page web de l'auteur de ces notes.

```
x=[1;2;3;4];
F=[ones(size(x)),x,x.^2]
p=LinearRegression(F,y)
-->
p =
   2.5000e+00
   6.0000e-01
  -2.2204e-16
```

Trouver une vérification visule en Figure 3.6, générée par le code ci–dessous.

Octave

```
yFit=F*p;
plot(x,y,'*',x,yFit)
axis([0 5 2 6])
```

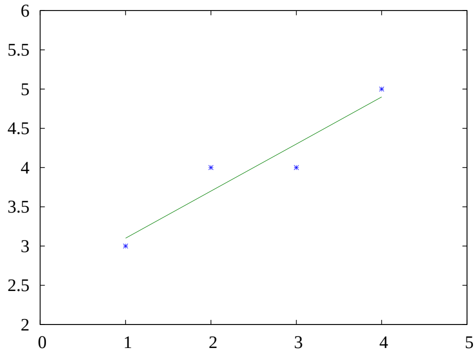


Figure 3.6: une parabole de regression

$\diamondsuit$

3.6 optique géométrique

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

Tous les rayons de lumière vont de gauche a droite. On ne regarde que les rayons proche à l'axe et avec des angles petits. Comme exemples, examinons les éléments optiques suivants.

1. Un chemin libre de longueur s.
2. une lentille convexe avec longueur focale f. Pour une lentille concave choisir la longueur focale f négative.
3. Un solide sphérique de rayon R. Choisir R positif si la surface se boucle contre la direction du trait, R est négatif si la surface se boucle dans la direction du rayon incident.
4. Un plan orthogonal à l'axe optique avec des indices de réfractions différentes.

- Le premier exemple est la situation d'un chemin libre en Figure 3.7. À l'aide de trigonométrie on arrive à
$$y_2 = y_1 + s\,\tan\alpha \approx y_1 + s\,\alpha$$
L'angle ne change pas et on obtient
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + s\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$
On obtient une des matrices en Tableau 3.1.

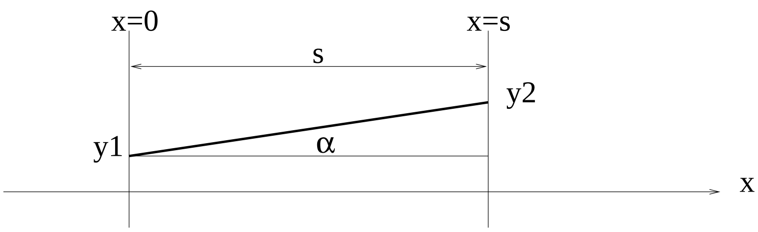


Figure 3.7: rayon dans un chemin libre

- L'élément lentille sera examiné en exemple 3–49.
- pour un plan avec des indices de réfractions différentes (voire Figure 3.8) on utilise le loi de réfraction
$$n_1\,\sin\alpha_1 = n_2\,\sin\alpha_2$$
A cause des petits angles on obtient
$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1$$
La position verticale du rayon ne change pas et donc
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{n_1}{n_2}\,\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

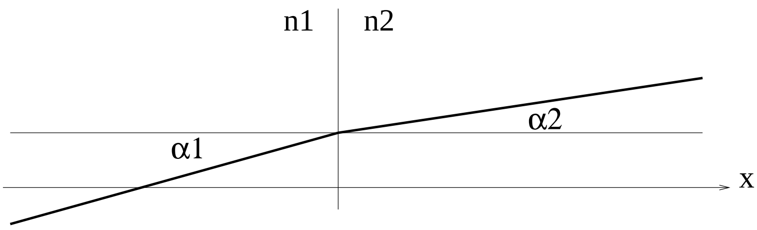


Figure 3.8: rayon par un plan de refraction

On arrive alors aux matrices de transfert du Tableau 3.1. Les sections 4 et 5 en [StanMeieFalc96] expliquent comment multiplier les matrices des éléments de bas pour traiter des systèmes optiques plus compliqués et comment tirer de l'information des éléments de cette matrice du système.

description	matrice
distance parcourir s	$T\,(s) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
lentille convexe, longueur focale f	$L\,(f) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
solide sphérique, rayon R indices de réfraction: à gauche n_1, à droite n_2	$S\,(R, n_1, n_2) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2\,R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
plan, indices: à gauche n_1, à droite n_2	$S_\infty\,(n_1, n_2) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Tableau 3.1: Quelques matrices de transfert de l'optique géométrique

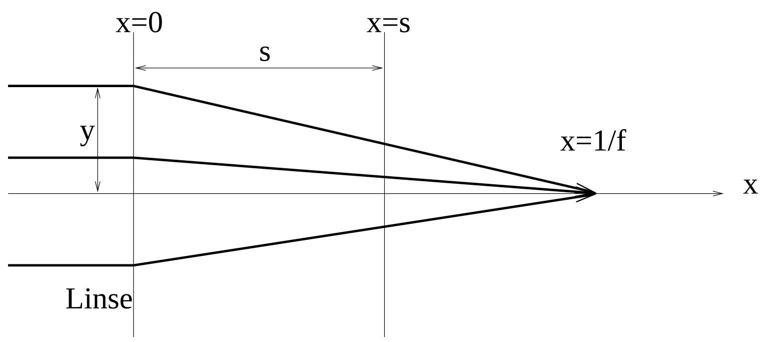


Figure 3.9: rayon par une lentille

3–49 Exemple : Des rayons proche à l'axe optique tombent sure une lentille avec longueur focale f. Après la lentille le rayon va parcourir une distance libre de longueur s. La situation est esquissée en Figure 3.9.

Parce-que les rayons proche à l'axe sont parallèles à l'axe on utilise $\alpha = 0$ et arrive à une distance y_n et un angle α_n, donné par

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_n \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{L}(f) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -y/f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y - s\,y/f \\ -y/f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on arrive à une nouvelle distance $y - s\,y/f$ et l'angle est maintenant $-y/f$. En mettant $s = f$ on arrive à la distance $y - f\,y/f = 0$ et donc les rayons sont focalisés à une distance horizontale f de la lentille. Figure 3.9 confirme le résultat. ♢

3–50 Exemple : Dans une situation simple on a un objet de largeur 2 cm et un écran à une distance de 50 cm . Une lentille de longueur focale f se trouve à une distance de x cm de l'objet. Des rayons de lumière passent de l'objet à l'écran par la lentille. L'image de l'objet est inversée et a une largeur de 40 cm .

(a) Trouver la matrice de transfert $\mathbf{M}(x, f)$ de ce système optique.

(b) expliquer pourquoi la matrice $\mathbf{M}(x, f)$ doit être de la forme donnée ci–dessous, c'est–à–dire $A = -20$ et $B = 0$.

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Utiliser le théorème des multiplication des déterminants et $B = 0$ pour montrer que $D = 1/A$.

(d) Trouver $\frac{x}{f}$ à l'aide de $D = -1/20$. Puis trouver x à l'aide de $B = 0$

Solution:

(a) La matrice est construit par

$$\begin{aligned}
\text{total} &= \text{lentille à parois} \cdot \quad \text{lentille} \quad \cdot \text{objet à lentille} \\
\mathbf{M}(x, f) &= \quad \mathbf{T}(50 - x) \quad \cdot \quad \mathbf{L}(f) \quad \cdot \quad \mathbf{T}(x) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50 - x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc il faut examiner la matrice suivante.

$$\mathbf{M}(x, f) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50 - x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(b) Pour que l'image soit focalisée il faut que $B = 0$. Si $B \neq 0$ les rayons sortant du même point avec des angles α différentes, ne vont pas arrivés au même point au parois. Pour que l'image soit inversée et agrandit par un facteur de 20 il faut $A = -20$. Traduit en formule on obtient

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

La première ligne de ce système est

$$A\,2 + B\,\alpha = -40$$

Pour que ca soit correct pout tout valeur de α il faut $A = -20$ et $B = 0$.

(c) Utilisez $\det \mathbf{T}(s) = 1$ et $\det \mathbf{L}(f) = 1$ pour trouver

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}(x,f) &= \det(\mathbf{T}(50-x))\ \det(\mathbf{L}(f))\ \det(\mathbf{T}(x)) = 1 \\ \det\, \mathbf{M}(x,f) &= A\,D - B\,C = A\,D = 1 \\ D &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

(d)
- Avec $D = 1/A = -1/20$ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20} &= 1 - \frac{x}{f} \\ \frac{x}{f} &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

- Avec $B = 0$ on touve

$$\begin{aligned} 0 &= x + (50-x)\ (1 - \frac{x}{f}) \\ 0 &= x - (50-x)\ \frac{1}{20} \\ 20\,x &= 50 - x \\ x &= \frac{50}{21} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3–51 Exemple : This example is taken from [GerrBurc75, p 43].
The left end of a long plastic rod of refraction index 1.56 is ground and polished to a convex (outward) spherical surface of radius 2.8 cm . An object 2 cm tall is located in the air and on the axis at a distance of 15 cm from the vertex. Find position x and size of the image inside the rod. The situation is shown in figure 3.10

Solution: As the ray of light travels from left to right is passes three different elements:

1. a distance of 15 cm
2. the curved surface, determined by the rod
3. a distance of x cm

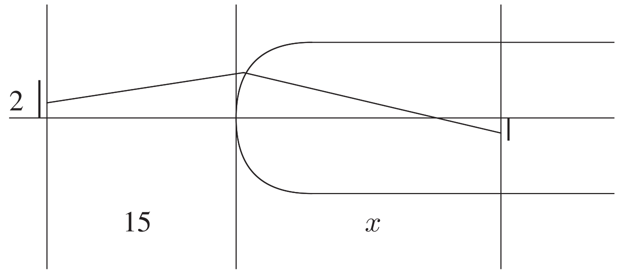


Figure 3.10: spherical rod, used as a lense

Thus the first matrix to be multiplied is the transfer by the distance 15 cm. This leads to the following calculations. It might help to read the operations from right to left since the vector is multiplied by the matrices in that order. This is also the order in which the ray passes the optic elements.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{image} & & \text{distance } x & & \text{spherical surface} & & \text{distance 15} & & \text{original} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(R,n_i,n_a) & \cdot & \mathbf{T}(15) & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_a-n_i}{n_i\,R} & \frac{n_a}{n_i} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.56}{1.56\cdot 2.8} & \frac{1}{1.56} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{array}$$

By multiplying the matrices we obtain

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-0.128\,x & 15-1.282\,x \\ -0.128 & -1.128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-0.128\,x)\,y_{init} + (15-1.282\,x)\,\alpha_{init} \\ -0.128\,y_{init} - 1.128\,\alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If the image has to show at a distance x from the spherical surface, then all rays leaving at height y_{init} have to arrive at the same level y_{end}, independent on the initial angle α_{init}. This leads to the condition, that the number in the top right corner of the matrix has to vanish, i.e.

$$15 - 1.282\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 11.7$$

Thus the image will show at a distance of 11.7 cm. To find the size of the image we have to compute the result if we set $y_{init} = 2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.128 & -1.282 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.256 - 1.282\,\alpha_{init} \end{pmatrix}$$

Thus the image has size 1 cm and is inverted.

◊

3–52 Exemple : The above example may be solved with the help of *Octave*.

- First define the functions to compute the transfer matrices.
- Define a function $f(x)$ to compute the expression in the top right corner of the matrix, as function of the distance x .
- Examine values for the distances x and generate a plot.

Octave

```
1; % assure script file

function res=T(s)
  res=[1,s;0,1];
endfunction

function res=L(f)
  res=[1,0;-1/f,1];
endfunction

function res=S(r,n1,n2)
  res=[1,0;(n1-n2)/(n2*r),n1/n2];
endfunction

function y=f(x)
  M=T(x)*S(2.8,1,1.56)*T(15);
  y=M(1,2);
endfunction

x= 5:1:20; y=x;

for k=1:length(x)
  y(k)=f(x(k));
endfor

plot(x,y)
grid on
```

Using the hint by the resulting graphic we conclude that $f(x)$ is an affine function and thus we can compute its zero easily. Using this zero x_0 we can then compute the size of the resulting image.

Octave

```
x0=-f(0)/(f(1)-f(0))
M=T(x0)*S(2.8,1,1.56)*T(15)
M*[2;0]
```

For other examples we will not end up with an affine function and there will be no easy solution formula. In this case we may use the command `fsolve()` to determine solutions of nonlinear equations. Only one line of code will change.

Octave

```
x0=fsolve('f',10)
```

♢

3–53 Exemple : Des rayons lumineux parallèles passent par une sphère (rayon $r = 1$ cm) dont l'indice de réfraction est $n = 1.4$. Tous les rayons sont proche de l'axe de la sphère. Trouver une esquisse en Figure 3.11.

(a) Trouver la matrice de transfert $\mathbf{M}(x)$ de ce système optique.

(b) A quelle distance x de la boule se trouve le foyer?

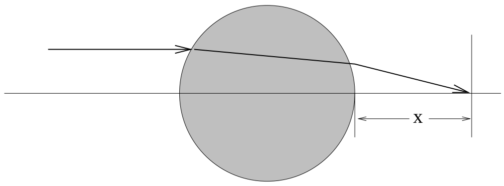


Figure 3.11: rayon par une boulle

Solution: Le rayon lumineuse va parcourir les objets suivantes:

1. surface d'une boule avec $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1.4$, $R = 1$
2. chemin libre de longueur 2 cm.
3. deuxième surface d'une boule avec $n_1 = n = 1.4$, $n_2 = 1$, $R = -1$
4. chemin libre de longueur x cm.

Utilisez multiplications des matrices pour combiner les objets optiques.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{total} & = & \text{chemin } x & \cdot & \text{deuxième surface} & \cdot & \text{boule} & \cdot & \text{première surface} \\
\mathbf{M}(x) & = & \mathbf{T}(x) & \cdot & \mathbf{S}(-1,1,n) & \cdot & \mathbf{T}(2) & \cdot & \mathbf{S}(1,n,1) \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-1} & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n}-1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 0.429 & 1.426 \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0.429-0.571\,x & 1.426+0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

(a) On obtient

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(x) \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.429-0.571\,x & 1.426+0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

(b) Pour que les rayons sot focalisés il faut que le nombre à gauche en haut dans la matrice soit zéro. Dans ce cas les valeurs de y dans l'image de dépendent pas des valeurs de y à gauche. Pour que les rayons à gauche soit parallèls à l'axe il faut $\alpha_{init} = 0$. Donc le nombre à droite en haut dans la matrice M importe pas. Puis on arrive à

$$0.429 - 0.571\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.75 \text{ cm}$$

Trouver cette exemple en [GerrBurc75]. ♢

3.7 problèmes

• Problème 3–1:
Apprendre à utiliser votre calculatrice pour des opérations avec des vecteurs et matrices.

3.7.1 vecteurs

• Problème 3–2:
Sont deux vecteurs donnés, $\vec{a} = (3,1)$ et $\vec{b} = (2,-1)$. Calculer

(a) $\vec{a} + \vec{b}$.

(b) $\vec{a} - 3\,\vec{b}$.

(c) $1.5\,\vec{b} - \frac{1}{3}\,\vec{a}$.

(d) $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$.

(e) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(f) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{a}$.

(g) $\vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{a})$.

(h) l'angle α entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

• Problème 3–3:
Touver la composante d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteur.

(a) Calculer la composante du vecteurs $\vec{a} = (1,3)^T$ dans la direction du vecteur $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.

(b) Calculer la composante du vecteurs $\vec{a} = (1,3)^T$ dans la direction du vecteur $\vec{b} = (1,2)^T$.

• Problème 3–4:
Trouver un vecteur de longueur 1, tel qu'il est perpendiculaire au vecteur $(2,3)$.

• Problème 3–5:
Etant donnés les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculer

$$\begin{array}{llllllll} \text{(a)} & \vec{a} + \vec{b} & \text{(b)} & |\vec{a} - 2\vec{b}| & \text{(c)} & 3\vec{a} + 4\vec{b} & \text{(d)} & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \text{(e)} & \vec{a} \times \vec{b} & \text{(f)} & \vec{b} \times \vec{a} & \text{(g)} & \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle & \text{(h)} & \vec{a} \times \vec{a} \end{array}$$

• Problème 3–6:
Soit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les expressions suivantes, si c'est possible.

$$\begin{array}{llllllll} \text{(a)} & \vec{a} + 3\,\vec{b} & \text{(b)} & 3\,\vec{a} \cdot \vec{b} & \text{(c)} & \vec{b} \times \vec{b} & \text{(d)} & \vec{c} \times \vec{d} \\ \text{(e)} & (\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e} & \text{(f)} & \vec{c} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{e}) & \text{(g)} & (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} & & \end{array}$$

• Problème 3–7:
Utiliser quelques exemples pour vérifier que le produit véctorielle n'est pas assoziativ.

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$$

• Problème 3–8:
Déterminer l'angle α entre les deux vecteurs suivants:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3.7.2 matrices

• Problème 3–9:
Etant donné les vecteurs et matrices

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculer

(a) $2\,\vec{a} - \vec{b}$	(b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	(c) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$	(d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
(e) $\mathbf{A} \cdot \vec{b}$	(f) $\mathbf{B} \cdot \vec{a}$	(g) $\langle \vec{a} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle$	(h) $\vec{a} \times \vec{b}$

• Problème 3–10:
Pour les deux matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix}$$

on sait que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Calculer $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

• Problème 3–11:
Untersuchen Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie (falls möglich)

(a) $\mathbf{D}+\mathbf{E}$

(b) $\mathbf{D}-\mathbf{E}$

(c) $5\,\mathbf{A}$

(d) $-7\,\mathbf{D}$

(e) $2\,\mathbf{B}-\mathbf{C}$

(f) $-3\,(\mathbf{D}+2\,\mathbf{E})$

(g) $\mathbf{D}^T+\mathbf{D}$

(h) $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$

(i) trace $\mathbf{D}$

(j) $4\,\text{trace}\,(7\,\mathbf{B})$

(k) $2\,\mathbf{A}^T+\mathbf{C}$

(l) $(\mathbf{D}-\mathbf{E})^T$

(m) $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T$

(n) trace $(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}^T)$

• Problème 3–12:
Verifizieren Sie, dass für eine 2×2–Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit $a\,d-b\,c\neq 0$ die inverse Matrix gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a\,d-b\,c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

• Problème 3–13:
Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

3.7.3 régression

• Problème 3–14:
Examiner les points (x_i,y_i) ci dessous et essayer de mettre une parabole par ces points le plus proche possible (régression linéaire).

$$(x_1,y_1)=(1,1)\quad,\quad(x_2,y_2)=(3,0)\quad,\quad(x_3,y_3)=(4,2)\quad,\quad(x_4,y_4)=(5,5)$$

(a) Trouver un système des équations linéaires pour les coefficients de la parabole.

(b) Trouver la parabole.

• Problème 3–15:
Examiner les points (x_i,y_i) ci dessous et essayer de mettre une droite (resp. une parabole) par ces points le plus proche possible (régression linéaire).

$$(x_1,y_1)=(0,3)\quad,\quad(x_2,y_2)=(1,3)\quad,\quad(x_3,y_3)=(3,4)\quad,\quad(x_4,y_4)=(4,5)\quad,\quad(x_5,y_5)=(5,6)$$

(a) Trouver l'équation de la droite.

(b) Trouver un système des équations linéaires pour les coefficients de la parabole.

(c) Trouver la parabole.

• Problème 3–16:
Untersuchen Sie die vier Punkte $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$ und $(4,0)$.

(a) Finden Sie eine Gerade, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

(b) Finden Sie eine Parabel, die so gut wie möglich durch diese Punkte geht.

• Problème 3–17:
Pour calibrer des nouveaux instruments il faut souvent mesurer une largeur physique avec deux instruments différents.

- une premier mesure avec l'instrument à calibré rends des valeurs y_i
- une deuxième mesure avec l'instrument de référence rends des valeurs x_i

A trouver la valeur optimale du facteur α tel que $y = \alpha\, x$, respectivement $y_i \approx \alpha\, x_i$. Utiliser une régression linéaire pour montrer que la valeur optimale est donnée par

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\, y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

• Problème 3–18:
Une courbe de la forme ci–dessous doit passer par les points $P_i = (x_i, y_i)$ donnés le plus proche possible, veut dire

$$\|\vec{r}\|^2 = \sum_{k=1}^5 r_k^2 = \sum_{k=1}^5 \left(f\,(x_k) - y_k\right)^2 \quad \text{minimal}$$

avec

$$f\,(x) = A\,\cos x + B\,\sin x + C$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_5 = \begin{pmatrix} \pi \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

Écrire le vecteur résiduel dans la forme

$$\vec{r} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \vec{y}$$

(a) Trouver un système de trois équations linéaires pour les constantes A, B et C.

(b) Calculer A, B et C.

3.7.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 3–3 :

(a) Le vecteur $\vec{b}$ et normalisé.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,\sqrt{2}$$

La composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{b}$ a donc la longueur $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\,\sqrt{2}$

(b) Le vecteur $\vec{b}$ n'est pas normalisé. On trouve

$$\|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

Alors il faut diviser $\vec{b}$ par $\sqrt{5}$ pour obtenir une longueur de 1.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$$

La composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{b}$ a donc la longueur $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Solution pour problème 3–6 :

(a)

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$3\,\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$$

(c)

$$\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$$

(d)

$$\vec{c} \times \vec{d} = \quad \text{ne pas définit}$$

(e)

$$(\vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\vec{c} \cdot (\vec{d} \cdot \vec{e}) = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \quad \text{ne pas définit}$$

Solution pour problème 3–8 : $\alpha = 112.6^\circ$.

Solution pour problème 3–9 :

(a) $2\,\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -3$

(c) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A} \cdot \vec{b} =$ nicht definiert

(f) $\mathbf{B} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(g) $\langle \vec{a} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

(h) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Solution pour problème 3–10 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & -2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\,y + 2\,z & -3 - 2\,x \\ 4\,y & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} x\,y + 2\,z &= 1 \\ -3 - 2\,x &= -9 \\ 4\,y &= 4 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht ablesen, dass $y = 1$, $x = 3$ und $z = -1$. Nun führt eine einfache Matrizenmultiplikation zum Resultat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -11 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 3–12 : Nachrechnen, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}_2$ und $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{I}_2$.

Solution pour problème 3–13 : Es gilt

$$\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

und

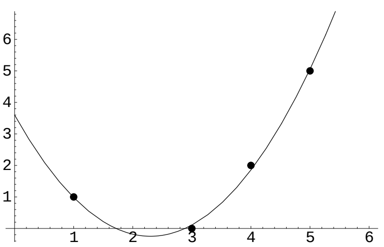
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbb{I}_n^T = \mathbb{I}_n$$

Somit ist die gewünschte Eigenschaft gezeigt.

Solution pour problème 3–14 : Dies ist ein mit linearer Regression zu lösendes Problem. Für die Parabel

$$y(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2$$

sind die Parameter c_i so zu bestimmen, dass die Abweichung der Parabel von den Punkten minimal wird. Dies ist durch die folgende Graphik illustriert. Die Matrix **X** muss für die Rechnung verwendet werden.



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

(a) Das zu lösende Gleichungssytem ist

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 4 & 13 & 51 \\ 13 & 51 & 217 \\ 51 & 217 & 963 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 34 \\ 158 \end{pmatrix}$$

(b) Die Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.60000 \\ -3.34545 \\ 0.72727 \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Parabel

$$y(x) = 3.60000 - 3.34545\,x + 0.72727\,x^2$$

Solution pour problème 3–15 : Dies ist ein mit linearer Regression zu lösendes Problem. Die zu lösenden linearen Gleichngssysteme sind von der Form

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \vec{c} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

(a) Für die Regressionsgerade erhalten wir

$$y = c_1 + c_2\,x \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

und somit das System

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 51 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 65 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$y(x) = 2.62791 + 0.60465\,x$$

(b) Für die Regressionsparabel erhalten wir

$$y = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

und somit das lineare Gleichungssystem $\mathbf{X}^T \mathbf{X}\,\vec{c} = \mathbf{X}^T\,\vec{y}$, wobei

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 51 \\ 13 & 51 & 217 \\ 51 & 217 & 963 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}^T \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 21 \\ 65 \\ 296 \end{pmatrix}$$

(c) Die Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = 2.964286 - 0.040584\,x + 0.131494\,x^2$$

Solution pour problème 3–16 :

(a)

$$y(x) = 5 - 0.9\,x$$

(b)

$$y(x) = -1.25 + 5.35\,x - 1.25\,x^2$$

Solution pour problème 3–17 : Zu minimieren ist der Betrag des Residualvektors $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{y} - \alpha\,\vec{x}$$

Somit wird aus der Matrix $\mathbf{X}$ in Resultat 3–47 ein Vektor $\vec{x}$ und zu lösen ist die Gleichung

$$\left(\vec{x}^T \cdot \vec{x}\right)\,\alpha = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

oder auch

$$S_{xx}\,\alpha = S_{xy}$$

Somit ist die Lösung

$$\alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\,y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Nun kann auch noch die Standardabweichung σ_α des optimalen Parameters geschätzt werden. Hierzu muss zuerst die Standardabweichung der y–Werte geschätzt werden durch

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha\,x_i)^2$$

Dann folgt mit Hilfe der Rechenregeln für Varianzen (Quadrate der Standardabweichungen)

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{S_{xx}^2}\sum_{i=1}^2 x_i^2\,\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i^2}{S_{xx}^2}\,\sigma_y^2 = \frac{1}{S_{xx}}\,\sigma_y^2$$

Für den Spezialfall von konstanten Werten $x_i = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1}{n\,x}\sum_{i=1}^n y_i \\ \sigma_\alpha &= \frac{1}{x\,\sqrt{n}}\,\sigma_y\end{aligned}$$

Solution pour problème 3–18 : In den Spalten der Matrix $\mathbf{X}$ stehen die $\cos$- und $\sin$–Werte der x–Koordinaten, ergänzt durch eine Spalte von Einsen.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} - \vec{y} \\ &= \begin{bmatrix}\cos 0 & \sin 0 & 1\\ \cos 1 & \sin 1 & 1\\ \cos\pi/2 & \sin\pi/2 & 1\\ \cos 2 & \sin 2 & 1\\ \cos\pi & \sin\pi & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0.4\\0.45\\-0.5\\-1.4\\-3.4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos 1 & \sin 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos 2 & \sin 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.45 \\ -0.5 \\ -1.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}$$

(a) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \cdot \vec{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2.4651 & 0.0762475 & 0.124155 \\ 0.0762475 & 2.53490 & 2.75077 \\ 0.124155 & 2.75077 & 5.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.62574 \\ -1.39435 \\ -4.45 \end{pmatrix}$$

(b) Das führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.92044 \\ 1.01667 \\ -1.49701 \end{pmatrix}$$

3.8 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- savoir calculer avec des vecteurs d'une façon fiable et rapide: addition, multiplication avec scalaire, produit scalaire et produit vectorielle.
- savoir calculer avec des matrices d'une façon fiable et rapide: addition et multiplication.
- maîtriser les règles de calcul pour vecteurs et matrices.
- savoir utiliser une matrice inverse.
- savoir résoudre un problème de régression linéaire simple.
- savoir utiliser des matrices pour des problèmes simples de l'optique géométrique.

Chapitre 4

Vecteurs

4.1 introduction

Dans les sciences et techniques des *scalaires* et des *vecteurs* sont souvent importants. Une scalaire est donnée par un nombre. On a des exemples physique: masse, température, rapidité, épaisseur d'une mure ou pression d'air. Pour que un vecteur est déterminé if faut no seulement savoir sa longueur mais aussi sa direction. Des exemples typiques sont: force, vitesse ou un champs électrique. Les vecteurs sont souvent utilisés pour des structures mathématiques: CAD, infographie, résoudre des systèmes des équations linéaires, statique, équations différentielles. En chapitre 3 on a contruit des vecteurs a l'aide des propriétées algébraiques, dans se chapitre on ulilise de la géometrie pour examiner des vecteurs.

Quelques résultats et exemples dans ce chapitre sont base sur le livre [Bach71].

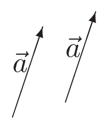
4–1 Définition : Des **vecteurs** sont des objets donnés par une longueur et une direction. Il doit être évident avec quel type de vecteur on travaille, des vecteurs dans un plan, dans espace ou dans une autre structure. Pour indiquer un vecteur dans sa notation on met une petite flèche au–dessus du symbole pour le vecteur.

$$\vec{a}, \quad \vec{A}, \quad \overrightarrow{AB}$$

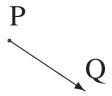
La longueur d'un vecteur $\vec{a}$ est dite **norme** de $\vec{a}$ et est notée par $\|\vec{a}\|$.

4–2 Résultat : *Deux vecteurs sont dites* ***égaux*** *si ils ont les mêmes longueurs et directions.*

Donc deux vecteurs coïncide si une translation parallèle permet de boucher un vecteur sur l'autre.



Graphiquement un représente un vecteur avec une flèche de longueur et direction donné. Observer que deux vecteurs avec des point initiales et finales peuvent bien être identique.



Un vecteur peut être donné par un point initial et un point final. Utiliser la notation $\vec{PQ}$ pour cette vecteur.

Le vecteur **zéro** $\vec{0}$ est un vecteur spécial avec longueur 0. C'est le seul vecteur sans direction.

4–3 Définition : Deux vecteurs sont dites **parallèles** si ils ont des directions égales ou exactement opposées.

Les vecteurs en Figures 4.1 sont parallèles.

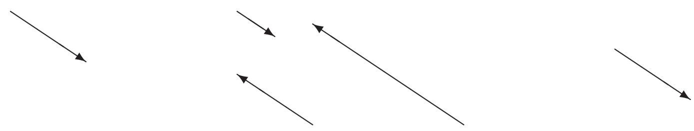


Figure 4.1: vecteurs parallèles

4.2 opérations avec des vecteurs

Le but de cette section est d'expliquer les opérations de base avec des vecteurs.

1. addition des vecteurs
2. soustraction des vecteurs
3. multiplication d'un vecteurs avec un nombre

4.2.1 addition des vecteurs

4–4 Définition : L'addition de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est caractérisé par la description suivante:

Appliquer une translation parallèlle au vecteur $\vec{b}$ jusque le point final de $\vec{a}$ coïncide avec le point initial du vecteurs $\vec{b}$. Le vecteur $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ a le point initial de $\vec{a}$ comme point initial et le point final coïncide avec le point final de $\vec{b}$.

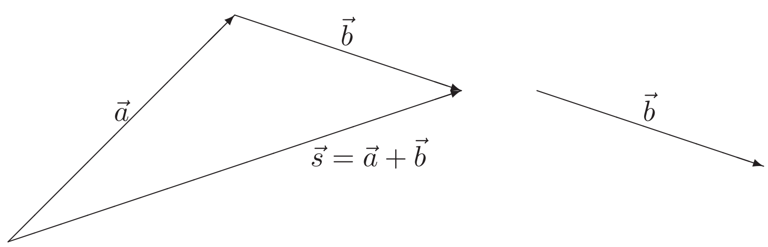


Figure 4.2: somme des vecteurs

4–5 Résultat : *Utiliser des graphiques pour vérifier les règles de calcul suivantes:*

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$		*loi de commutativité*
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$		*loi d'assoziativité*

4–6 Résultat : *inégalité du triangle*
A l'aide d'un triangle avec les trois cotés $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} + \vec{b}$ on vois que

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

4.2.2 soustraction des vecteurs

Avec un raisonnement géométrique il est évidant que pour chaque vecteur $\vec{a}$ il existe exactement un vecteur $\vec{b}$ tel que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Le nouveau vecteur $\vec{b}$ a la même longueur que $\vec{a}$ et la direction est opposée. Ce vecteur est dit **vecteur inverse** et on utilise la notation $-\vec{a}$.

La soustraction des vecteurs et l'opération inverse á l'addition, donc on trouve

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$$

4–7 Définition : La difference des verteurs $\vec{a}-\vec{b}$ est caractérisée par

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Le vecteur $-\vec{b}$ est le vecteur inverse de $\vec{b}$.

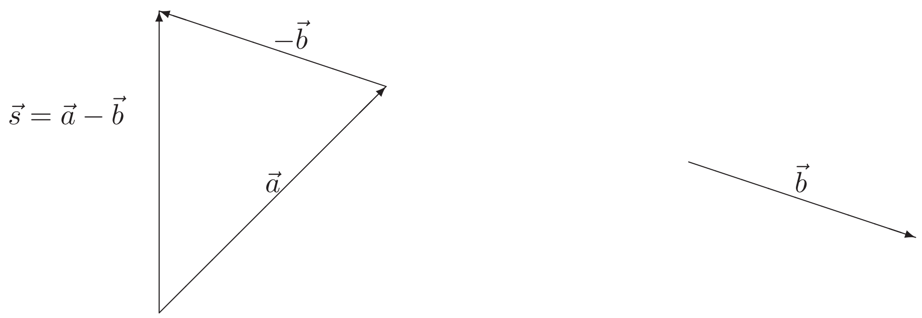


Figure 4.3: difference des vecteurs

4–8 Résultat : *Le vecteur de la somme $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ et la difference $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ sont visualisées dans un parallélogramme avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme cotés, voir Figure 4.2.2.*

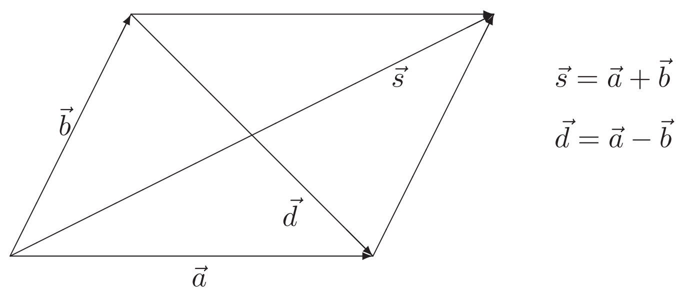


Figure 4.4: parallélogramme des vecteurs

4.2.3 multiplication d'un vecteurs avec un nombre

4–9 Définition : En multiplicatient d'un vecteurs $\vec{a}$ avec un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ on arrive á un vecteurs $\vec{b} = \lambda\,\vec{a}$ avec les propriétés suivantes:

1. la longueur de $\vec{b}$ est donnée par la multiplication de $|\lambda|$ avec la longueur $\|\vec{a}\|$ de $\vec{a}$.

$$\|\vec{b}\| = \|\lambda\,\vec{a}\| = |\lambda|\;\|\vec{a}\|$$

2. si $\lambda > 0$ puis le vecteur $\vec{b}$ a la même direction que $\vec{a}$ et si $\lambda < 0$ la direction de $\vec{b}$ est opposée de la direction de $\vec{a}$.

Utiliser une graphique pour vérifier les résultats et règles de calculs suivantes.

4–10 Théorème : *Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèle si il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\,\vec{a} = \vec{b}$.*

4–11 Résultat : *Sont $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs et $\lambda\;,\;\gamma \in \mathbb{R}$ des nombres.*

$$\begin{aligned} 2\,\vec{a} &= \vec{a} + \vec{a} \\ (-1)\cdot\vec{a} &= -\vec{a} \\ \lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b} \\ (\lambda + \gamma)\,\vec{a} &= \lambda\vec{a} + \gamma\vec{a} \end{aligned}$$

4.2.4 vecteurs et points

Examiner un plan ou l'espace. Un point arbitraire peut être identifié avec un vecteur. Le point P est représenté par le vecteurs de l'origine á ce point. Cette identifications est souvent utilisée et on parle du point P ou du vecteur $\vec{P}$. Une meilleur notation est donnée par $\overrightarrow{OP}$.

4.3 vecteurs dans le plan

Dans cette section nous examinons des vecteurs dans un plan et des application dans le plan.

4.3.1 coordonnées cartésienne

Dans un plan on choisit l'origine 0 et puis on choisit deux directions spéciales $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$ et $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$. On demande que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et les deux directions sont orthogonales. Examiner cette situation en Figure 4.5 dans un plan. Le vecteur $\vec{e}_x$ (resp. $\vec{e}_y$) est dit **vecteur d'unité de coordonnée** dans la direction x (resp. direction y).

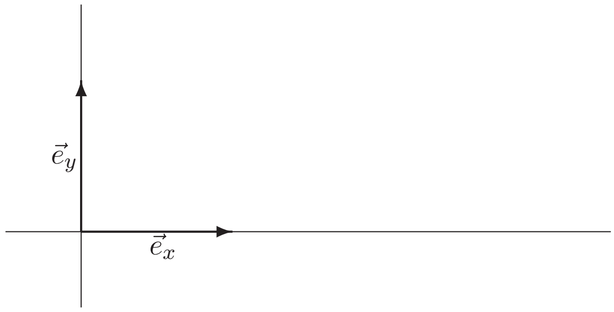


Figure 4.5: plan certesienne avec vecteurs d'unité de coordonnée

Examiner un vecteur „quelconque“ $\vec{a}$ dans ce plan. Pour l'exemple en Figure 4.6 trouver

$$\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y \qquad .$$

Si l'identité ci–dessus est correcte on peut construire le vecteur $\vec{a}$ à partir du pair des nombres $(3\,,\,2)$. Donc il existe un lien entre le vecteur $\vec{a}$ et les nombres $(3\,,\,2)$.

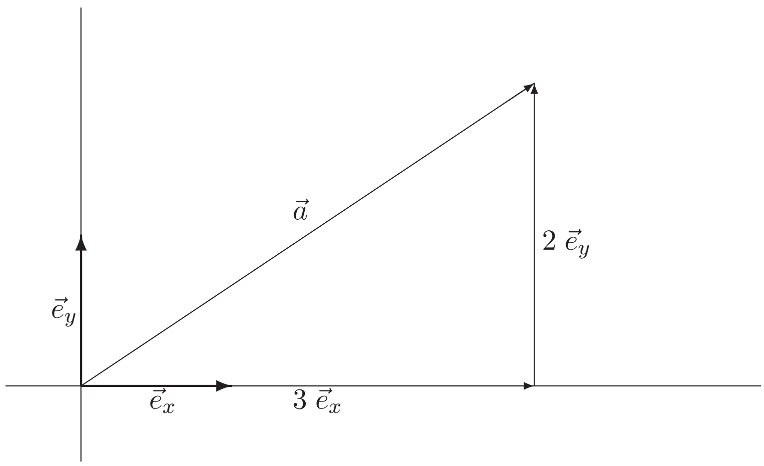


Figure 4.6: représentation cartésienne d'un vecteur

La Figure 4.6 montre que chaque vecteur $\vec{a}$ dans ce plan peut être écrit dans la forme

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Donc les vecteurs dans ce plan sont identifiés par des pairs des nombres réels.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2$$

Les nombres a_i sont dites les **coordonnés** du vecteurs $\vec{a}$ et les vecteurs $a_i\,\vec{e}_i$ sont dites les **composantes** du vecteur. Cette représentation est dit **représentation cartésienne**.

Pour les vecteurs d'unité des coordonnés $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on trouve

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3.2 opérations avec les représentation cartésienne

Considerer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Examiner les opération de base avec des vecteurs. Il est important de visualiser ces règles de calcul et les interprétations géométrique.

4–12 Résultat :

- *addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

- *multiplication avec un scalaire*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda\,\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \end{pmatrix}$$

- *longueur d'un vecteur*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Utiliser quelques exemples pour vérifier que tout règle de calcul pour les vecteurs de la section précédente reste correcte.

4.3.3 applications

centre de gravité d'un système des points de masse

Examinons un système de n masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dans le plan. Les positions des points est donnés par des vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$. Puis la masse totale M est

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Le centre de gravité S est donné par

$$\vec{r}(S) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

4–13 Exemple : Examiner un hexagone équilatéral avec un cion qui manque. Trouver le centre de gravité. ♢

balance des forces

Examiner un problème simple, mais important en statique: à un point on applique des forces différentes $\vec{F}_i$. Trouver la force totale $\vec{F}_R$.

Des forces sont (comme les vecteurs) déterminés par leur largeur (longueur) et leur direction. L'addition des forces correspond à l'addition des vecteurs. Donc on trouve

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_k$$

4–14 Exemple :

Les forces sont donnés par la table à droite.

Trouver largeur et direction de la force totale $\vec{F}_R$.

	direction	largeur
$\vec{F}_1$	$30°$	2
$\vec{F}_2$	$90°$	1
$\vec{F}_3$	$-30°$	-2
$\vec{F}_4$	$45°$	2.5

♢

4–15 Exemple : Une sculpture de masse 200 kg est suspendue par deux câbles à des angles de $40°$ (droite) et $50°$ (gauche). Déterminer les forces sur les câbles.

Solution:

1. Dessiner une graphique avec les trois forces à tenir compte.
2. Les directions de ces forces sont connues, comme la largeur d'une de ces forces.
3. Donner deux équations pour les deux largeurs inconnues des forces.
4. Résoudre ces équations.
5. Vérifier le résultat.

♢

4.3.4 le produit scalaire

Pour beaucoup des application on utilise des liens entre les longueurs et l'angle entre deux vecteurs.

4–16 Définition : Le **produit scalaire** de deux vecteurs est donné par la définition

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{si} \quad \|\vec{a}\|\neq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{b}\|\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

On utilise les notations

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

Le produit scalaire est aussi dit **produit interieur** et rend un nombre comme résultat. Pour des vécteurs spécials $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on trouve

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1 \quad \text{et} \quad e_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = 0$$

Pour tout vecteur on a

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

et

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2$$

Si $\vec{n}$ est un vecteur de longueur 1 puis on trouve

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = \|\vec{a}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{n})$$

La Figure 4.7 montre pourquoi $\vec{a}\cdot\vec{n}$ est dit la **composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$** . On parle de la **projection** de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$. Cette résultat est utile pour beaucoup des applications. Examiner Problème 3–3 (page 88).

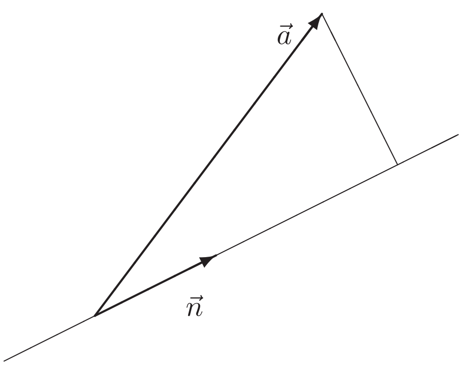


Figure 4.7: Composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{n}$

4–17 Théorème : *On a les règles de calcul suivantes*

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} & \textit{loi de commutativité}\\
(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b})=\lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \textit{pour}\quad \lambda\in\mathbb{R}\\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} & \textit{loi de distributivité}\\
\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\ \textit{orthogonal à}\ \vec{b} & \textit{orthogonalité}\\
\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} &
\end{array}$$

Avec le résultat ci–dessus on verifie le théorème suivant.

4–18 Théorème :

1.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$$

2.

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

3.

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}$$

si $\|\vec{a}\|\neq 0$ *et* $\|\vec{b}\|\neq 0$.

4. Le vecteur $\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\end{pmatrix}$ *est orthogonal au vecteur* $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$.

4–19 Résultat : *Soit* $\vec{n}$ *est un vecteur de direction, c.-à-d.* $\|\vec{n}\|=1$. *Un vecteur quelconque* $\vec{a}$ *peut être décomposé dans un vecteurs parallèle à* $\vec{n}$ *et une composante orthogonale.*

$$\begin{array}{rcl}\vec{a}&=&\vec{a}_\perp+\vec{a}_\|\\ \vec{a}_\|&=&(\vec{a}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\end{array}$$

4–20 Exemple : (Théorème d'addition de la fonction $\cos$)
Soit deux vecteurs donnés par

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{r}_1=\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$$

Puis les deux vecteurs ont longueurs 1 et il y a un angle de $\alpha-\beta$ entre les vecteurs. Donc on trouve

$$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=\|\vec{r}_1\ \|\vec{r}_2\|\ \cos{(\alpha-\beta)}=\cos{(\alpha-\beta)}$$

Mais un a aussi

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ sin\beta$$

Les deux résultats doivent être égaux et donc

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$

♢

4.4 équations des droites dans le plan

Dans cette section nous examinons des façons différentes de donner une droite dans le plan. Quelques-uns des ces méthodes utilises des vecteurs.

4.4.1 forme générale d'une équation d'une droite

Soit $A, B, C \in \mathbb{R}$ des nombres quelconques. Puis tous les points (x, y) dans le plan tel que

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

forme une droite, caractérisé par les trois nombres A, B, C .

Si les trois nombres sont connus, puis c'est facile d'esquisser la droite en utilisent les points d'intersection avec les deux axes. Sur l'axe des x on a $y = 0$ et donc la valeur de x est donné par l'équation

$$A\,x + C = 0 \quad .$$

D'une façon similaire on arrive à $y = -C/B$ pour la veleur de y sur l'axe des y .

4–21 Exemple : Esquisser la droite

$$2x - 3y + 6 = 0$$

dans un système des coordonnées cartésienne. ♢

4–22 Résultat : *Dans la forme générale de l'équation d'une droite on peut reconnaître quelques cas spéciales*

- *Si $A = 0$ puis la droite est parallèle à l'axe des x .*
- *Si $B = 0$ puis la droite est parallèle à l'axe des y .*
- *Si $C = 0$ puis la droite passe par l'origine.*

4–23 Exemple : Dans un plan esquisser tous les points (x, y) pour lesquels

$$2x - 3y \leq 6 \qquad .$$

♢

4–24 Exemple : Touver une graphique pour l'ensemble des solutions du système suivante.

$$\begin{array}{rcl} x-y & > & -1 \\ 2x-3y & \leq & 6 \\ x & > & 0 \\ y & > & 0 \end{array}$$

♢

4.4.2 forme standard d'une équation d'une droite

Une droite dans une système des coordonnées cartésienne (xy) peut être donnée par l'**ordonnée** a et la **pente** m.

$$y = a + m\,x$$

Une droite dans la forme générale avec $B \neq 0$

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

peut être écrit dans la forme standard

$$y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}\,x$$

Observer que des droites verticales ($B = 0$) n'ont pas de représentation standard.

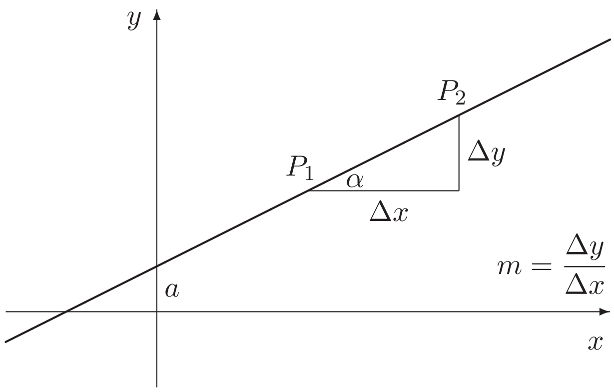


Figure 4.8: Deux points déterminent une droite

Deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ sont donnés. Les points déterminent une seule droite et on peut trouver le secteurs a et la pente m. Examiner deux équations pour les deux inconnues a et m.

$$\begin{array}{rl} y_1 = & m\,x_1 + \quad a \\ y_2 = & m\,x_2 + \quad a \end{array}$$

Soustraire les deux équations pour arriver à

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

À l'aide de une des équations on peut déterminer la valeur de a. En Figure 4.8 trouver aussi que

$$\tan\alpha = m \qquad .$$

4.4.3 forme point–pente de l'équation d'une droite

D'une droite g on connaît un point $P_1 = (x_1, y_1)$ et la pente m, ou l'angle α. Donc la droite est déterminée. Pour écrire la droite dans la forme standard il manque l'ordonnée. En utilisant (x_1, y_1) dans l'équation on arrive à

$$y_1 = m\,x_1 + a$$

ou

$$a = y_1 - m\,x_1 \qquad .$$

4–25 Exemple : Une droite avec pente $m = 1.5$ passe par le point $(3, -1)$. Trouver les deux point d'intersection avec les axes.

Solution: Le point $(3, -1)$ se trouve sur la droite et donc on utilise $y = m\,x + a$ pour arriver à

$$-1 = 1.5 \cdot 3 + a \qquad ,$$

et donc $a = -5.5$. L'équation de la droite est

$$y = 1.5\,x - 5.5$$

L'ordonnée sur l'axe des y est -5.5. Pour trouver l'abscisse sur l'axe des x il faut que $y = 0$ et puis on peut résoudre pour x. Le résultat est $x = 11/3$. ♢

4.4.4 forme deux points de l'équation d'une droite

D'une droite g on connaît deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$. Donc la droite est déterminée. Pour trouver la pente m on utilise

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

et puis on peut continuer avec la méthode pour la forme point–pente.

4–26 Exemple : Examiner la droite qui passe par les points $P_1 = (2, -3)$ et $P_2 = (-1.5, 1)$.

Solution: Pour la pente m on arrive à

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{1 - (-3)}{-1.5 - 2} = \frac{-4}{3.5} = \frac{-8}{7}$$

Puis l'équation

$$\begin{aligned} y_1 &= \; m\,x_1 + \; a \\ -3 &= \; \tfrac{-8}{7}\,2 + \; a \end{aligned}$$

va rendre $a = -5/7$ et on a trouvé l'équation dans la forme standard

$$y = \frac{-8}{7}\,x - \frac{5}{7} \qquad .$$

Vérifier le résultat en utilisant les deux points donnés. ♢

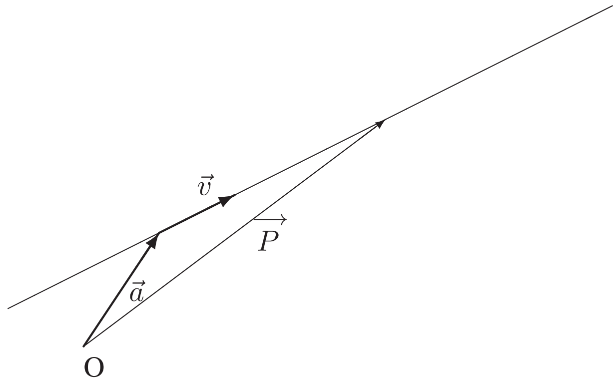


Figure 4.9: Forme paramétrique d'une droite

4.4.5 forme paramétrique de l'équation d'une droite

Une droite g peut être donnée par un point sur la droite et la direction. Des vecteurs représentent le point et la direction, voire Figure 4.9. Un **paramètre** t est utiliser pour parcourir la droite. Un point P fait partie de la droite si le vecteur de l'origine au point est de la forme

$$\overrightarrow{P} = \vec{a} + t\vec{v} \quad \text{für ein} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si t varie en tout R puis on va couvrir toute la droite.

Les opérations ci–dessus peuvent être écrit avec des coordonnées cartésienne.

$$\vec{P} = \vec{a} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + t\,v_1 \\ a_2 + t\,v_2 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

4–27 Exemple : La droite g est donnée par le point initiale $\vec{a}$ et le vecteur de direction $\vec{v}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Puis tous les points de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\begin{array}{rl} x & = 2 + t\,2.5 \\ y & = -3 - t\,3 \end{array} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

se trouve sur la droite. Donc le point $x = 0$, $y = 1$ ne fait pas partie de la droite, mais le point $x = 7$, $y = 9$ se trouve sur la droite ($t = 2$). ♢

4–28 Exemple : Si une droite est caractérisée par deux points P et Q il est très facile de trouver une forme paramétrique. Choisir un des points comme vecteur de départ et le vecteur de connection comme direction.

$$\vec{P} + t\,\overrightarrow{PQ}$$

Pour trouver la droite qui passe par les points $P = (1, 2.5)$ et $Q = (-2, 4.5)$ utiliser le vecteurs initial $\vec{a}$ et la direction $\vec{v}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 4.5-2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Donc une forme paramétrique de la droite est donnée par

$$\begin{aligned} x &= 1 - t\,3 \\ y &= 2.5 + t\,2 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour arriver à la forme standard il faut éliminer le paramètre t. La première équation implique $t = (1-x)/3$ et donc

$$y = 2.5 + 2\,t = 2.5 + 2\,(1-x)/3 = \frac{-2}{3}\,x + \frac{19}{6}$$

♢

Observer qu'il existe plusieurs forme paramétrique d'une seule droite, mais une seule forme standard.

4.4.6 forme Hessienne de l'équation d'une droite

Une droite est déterminée par un point (vecteur de position $\vec{a}$) et un **vecteur normale** $\vec{n}$ qui est perpendiculaire (orthogonale) à la direction de la droite. Voir Figure 4.10. Pour que le point $\vec{P}$ est sur la droite le vecteur de connection de $\vec{a}$ à $\vec{P}$ doit être orthogonal à $\vec{n}$, veut dire

$$\begin{aligned} (\vec{P} - \vec{a}) &\perp \vec{n} \\ (\vec{P} - \vec{a}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{n} &= \vec{P} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Pour la deuxième ligne utiliser que deux vecteurs sont perpendiculaire si (et seulement si) le produit scalaire est zéro.

Si les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{n}$ sont connues on peut trouver l'équation de la droite.

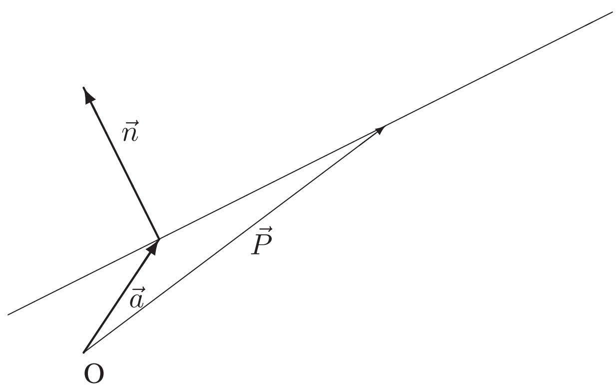


Figure 4.10: Une droite donnée par un point $\vec{a}$ et un vecteur normal $\vec{n}$

4–29 Exemple : Une droite g passe par le point $Q = (-2, 3)$ et le vecteur $\vec{n} = (1, 3)$ est perpendiculaire à g. Trouver l'équation de la droite dans la forme standard.

Solution: Suivant la formule ci–dessus le point (x, y) fait partie de la droite si et seulement si l'équation

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

est satisfaite. Donc on arrive à

$$x + 2 + 3\,y - 3 \cdot 3 = 0$$

ou

$$y = \frac{1}{3}\,(-x + 7) = \frac{-1}{3}\,x + \frac{7}{3}$$

$\diamondsuit$

Si une droite est donnée par le vecteur $\vec{n}$, la nombre d et l'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = d$$

avec $\|\vec{n}\| = 1$, on parle de **forme hessienne normale** de l'équation de la droite. En coordonnées cartésienne on arrive à

$$n_1\,x + n_2\,y = d \quad \text{avec} \quad n_1^2 + n_2^2 = 1$$

La distance de l'origin d'une droite g (donnée dans la forme hessiene) est $|d|$. La droite coupe le plan en deux demi plans. Si le vecteurs normale $\vec{n}$ montre dans le demi plan qui contient l'origin puis on trouve $d > 0$.

4–30 Exemple : Écrire la droite

$$y = 2\,x - 0.5$$

dans la forme hessienne.

Solution:

$$\begin{aligned} y - 2\,x &= -0.5 \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-0.5}{\sqrt{5}} \\ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{-0.5}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4.4.7 distance d'un point à une droite

Une des applications de la forme hessienne de l'équation d'une droite est une méthode pour trouver la distance d'un point $\vec{P} = (x, y)$ de la droite g, donnée par $\vec{n} = (n_1, n_2)$ et d.

L'expression

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = x\,n_1 + y\,n_2$$

correspond à la composante de $\vec{P}$ dans la direction de $\vec{n}$. Si $\vec{P}$ est sur la droite, puis cette expression est égal à la distance d. Une graphique simple montre que

$$f\,(x, y) = \vec{P} \cdot \vec{n} - d = x\,n_1 + y\,n_2 - d$$

correspond à une **distance orientée** du point à la droite.

Si d et $f(x, y)$ un le même signe puis l'origine et le point $\vec{P} = (x, y)$ se trouve de la même coté de la droite.

4.4.8 point d'intersection et angle d'intersection de deux droites

Soit deux droites g_1 et g_2 données par

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & y = a_1 + m_1\,x \\ g_2 : \quad & y = a_2 + m_2\,x \end{aligned}$$

avec $m_1 \neq m_2$.

Le **point d'intersection** est déterminé par la condition que les deux équations doivent être satisfait à la fois. Donc on arrive aux deux équations

$$\begin{aligned} y - m_1\,x &= a_1 \\ y - m_2\,x &= a_2 \end{aligned}$$

pour les deux inconnues x et y. Parce que $m_1 \neq m_2$ il existe une seul solution de ces équations. Soustraire les équation pour arriver à

$$(m_2 - m_1)\,x = a_1 - a_2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a_1 - a_2}{m_2 - m_1}$$

Cette valeur de x et une des deux équations sont utilisés pour trouver la valeur de y. Multiplier la première équations avec m_2, la deuxième avec m_1, puis soustraire pour obtenir

$$(m_2 - m_1)\,y = m_2 a_1 - m_1 a_2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{m_2 a_1 - m_1 a_2}{m_2 - m_1}$$

Si $m_1 = m_2$, puis les deux droites sont parallèles et if faut différencier deux cas différentes:

- Si les ordonnées sont différentes les droites sont différentes et il n'y a pas de point d'intersection.
- Si les ordonnées sont égals puis les droite coïncides et il existe infiniment des points d'intersection.

4–31 Résultat : *Examiner les point d'intersection de deux droites*

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & y = a_1 + m_1\,x \\ g_2 : \quad & y = a_2 + m_2\,x \end{aligned}$$

puis les comportements suivantes sont possibles.

pente	*ordonnées*	*nombre des points d'intersection*
$m_1 \neq m_2$		*un seul*
$m_1 = m_2$	$a_1 \neq a_2$	*pas de point*
$m_1 = m_2$	$a_1 = a_2$	*infiniment*

Pour les angles des deux droites on trouve

$$\tan\alpha_i = m_i$$

Si les droites sont ni parallèle, ni perpendiculaire, puis une figure simple montre que l'angle γ entre les droites est caractérisé par

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$$

Donc on arrive à

$$\tan\gamma = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

et

$$\tan\gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Si les droites ne sont pas perpendiculaire puis on trouve $1 + m_1 m_2 \neq 0$.

À un point d'intersection de deux droites il existe quatre angles, dont deux différentes. La formule ci–dessus rend l'angle utilisé pour tourner (avec orientation positive) la droite avec pente m_1 jusqu'à les deux pentes coïncides.

4.5 équations des cercles

4–32 Définition : Un cercle de **rayon** R et **centre** au point $\vec{M}$ consiste de tous les points tel que

$$\left\|\vec{x} - \vec{M}\right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{M}\right) = R^2$$

En multipliant on arrive à une équation quadratiques pour le vecteur $\vec{x}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Utiliser les coordonnées cartésiennes $\vec{M} = (u, v)$ pour le centre $\vec{M}$ et on arrive à l'équation

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2$$

4–33 Exemple : L'équation

$$x^2 + y^2 - 4\,x + 6\,y - 3 = 0$$

a un cercle comme ensemble de solution. Compléter les carrées pour arriver à

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + 4 + y^2 + 6\,y + 9 &= 3 + 4 + 9 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Donc c'est un cercle de rayon 4 et centre $(2, -3)$. ♢

4–34 Exemple : Trouver les points d'intersection du cercle (centre $(0, -2)$, rayon 5) avec la droite $x - 2\,y + 1 = 0$.

Solution: D'abord examiner l'équation du cercle.

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \end{aligned}$$

Il faut combiner les deux équations et puis résoudre le système des deux équations. Utiliser la droite pour conclure que $x = 2\,y - 1$. Puis l'équation du cercle devient une équation quadratique pour la variable y

$$\begin{aligned} (2\,y-1)^2 + y^2 + 4\,y - 21 &= 0 \\ 5\,y^2 + (4-4)\,y - 21 + 1 &= 0 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$$

avec les deux solutions $y_{1,2} = \pm 2$. Donc on trouver les valeurs de $x_{1,2} = 2\,y_{1,2} - 1 = \pm 4 - 1$ et on a trouvé les deux points d'intersection $(3\,,\,2)$ et $(-5\,,\,-2)$. La Figure 4.11 confirme le résultat.

Mathematica sait résoudre ce problème.

Mathematica

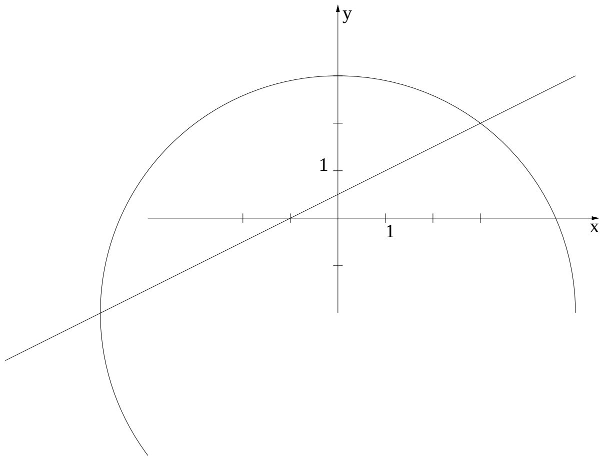


Figure 4.11: Intersection d'un cercle avec une droite

```
Solve[{x^2+y^2+4*y-21 == 0 , x-2*y+1 == 0} , {x,y}]
.
{{x -> -5, y -> -2}, {x -> 3, y -> 2}}
```

♢

4–35 Exemple : Examiner deux cercles avec centre $\vec{M}_1 = (2, 1)$ et rayon $r_1 = 2$, respectivement $\vec{M}_2 = (0, -2)$ et $r_2 = 3$. Trouver les points d'intersections.

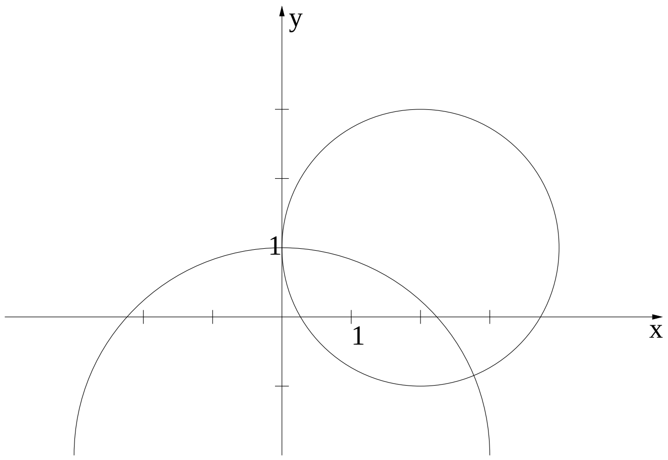


Figure 4.12: Intersection de deux cercles

Solution: If faut résoudre les deux équations des cercles pour les variables x et y.

$$\begin{array}{rcrcl} (x-2)^2 & + & (y-1)^2 & = & 2^2 \\ x^2 & + & (y+2)^2 & = & 3^2 \end{array}$$

Soustraction des deux équations élimine tous les termes quadratiques et on arrive à

$$\begin{array}{rcrcl} -4\,x+4 & + & (-6\,y+1-4) & = & 4-9 \\ -4\,x & - & 6\,y & = & -6 \end{array}$$

Donc les deux points d'intersection se trouve sur une droite $x = -\frac{3}{2}\,y + \frac{3}{2}$. Utiliser cette information dans la deuxième équation des cercles pour trouver une équation quadratique pour l'inconnu y.

$$\begin{array}{cccccc} (-\frac{3}{2}\,y+\frac{3}{2})^2 & + & (y+2)^2 & & = & 3^2 \\ (3\,y-3)^2 & + & 4\,(y+2)^2 & & = & 4\cdot 9 \\ 13\,y^2 & -2\,y & -11 & & = & 0 \end{array}$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$y_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{2^2 + 4\cdot 13\cdot 11}}{26} = \frac{+2\pm 24}{26} = \begin{cases} 1 \\ \frac{-11}{13} \end{cases}$$

À l'aide de l'équation de la droite on trouve les valeurs de x et donc on a les deux points d'intersection $(0,1)$ et $(\frac{36}{13}, \frac{-11}{13})$. $\diamondsuit$

4–36 Exemple : Examiner tout les points $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ dont les distances des points fixes $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ ont un rapport fixe λ. Montrer que ces points forme un cercle, le cercle de **Apollonius**.

Solution: Les deux distances d_i sont données par

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) \\ d_2^2 &= (\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \end{aligned}$$

Le rapport des deux distances est dit λ et donc on a les équations suivantes.

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \lambda^2\, d_2^2 \\ (\vec{x}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_1) &= \lambda^2\,(\vec{x}-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x}-\vec{r}_2) \\ \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{r}_1\cdot\vec{x} + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 &= \lambda^2\,\left(\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{r}_2\cdot\vec{x} + \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2\right) \\ (1-\lambda^2)\,\vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,(\vec{r}_1 - \lambda^2\,\vec{r}_2)\cdot\vec{x} + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 - \lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 &= 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\,\vec{M}\cdot\vec{x} + \vec{M}\cdot\vec{M} - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est un cercle avec les data

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{1-\lambda^2}\,\left(\vec{r}_1 - \lambda^2\,\vec{r}_2\right) \\ R^2 &= \vec{M}\cdot\vec{M} - \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 - \lambda^2\,\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2}{1-\lambda^2} \end{aligned}$$

Le cas spécial $\lambda = 1$ ne obtient pas de cercle mais une droite, la **médiatrice**. Le calcul ci–dessus rend l'équation de cette droite [1]

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{x} + d = -2\,(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{x} + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 &= 0 \\ (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{x} - \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Alors le centre $\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$ des deux points se trouve sur la droite et la direction est perpendiculaire au vecteur de connection $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. $\diamondsuit$

[1] Utiliser $(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2) = \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 + -\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 + \vec{r}_2\cdot\vec{r}_1 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 = \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2$.

4–37 Exemple : Un point $\vec{r}$ soit sur un cercle avec centre $\vec{M}$ et rayon R. Le vecteur $\vec{t}$ est un **vecteur tangent** au cercle au point $\vec{r}$. Donc le vecteur de connection du centre $\vec{M}$ au point $\vec{r}$ doit être perpendiculaire à $\vec{t}$. Alors on trouve

$$\vec{v} \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) = 0$$

Remplacer le vecteur $\vec{v}$ par un vecteur de connection $\vec{x} - \vec{r}$ d'un point arbitraire $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ au point $\vec{r}$ sur le cercle pour obtenir l'équation de la **tangente** du cercle au point $\vec{r}$.

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) = 0$$

♢

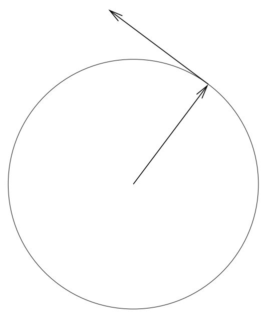


Figure 4.13: Tangente pour un cercle

4–38 Exemple : Soit $\vec{n}$ un vecteur de direction ($\|\vec{n}\| = 1$) et examiner un cercle de rayon R avec centre $\vec{M}$, donné par l'équation

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

La droite, donneée par la paramétrisation

$$\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{n} = t\,\vec{n}$$

a 0, 1 ou 2 points d'intersection avec le cercle. Si on trouve deux points ils sont caractérisés par l'équation quadratique

$$t^2\;\vec{n} \cdot \vec{n} - t\,2\,\vec{M} \cdot \vec{n} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Le paramètre t represente la distance des points de l'origin (utiliser la normalisation $\|\vec{n}\| = 1$). La formule de Viète implique que le produit des deux solutions t_1 et t_2 de l'équation

$$t^2 + b\,t + c = 0$$

est $t_1 \cdot t_2 = c$. Dans cette exemple on trouve

$$t_1\;t_2 = \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2$$

Cette largeur est dit **puissance** de l'origine par rapport au cercle et ne dépend pas du vecteur $\vec{n}$. On obtient le **théorème des sécantes**.

> Si deux sécantes se coupes hors du cercle, alors le produit des segments compris entre le point d'intersection des deux sécantes et les points d'intersections de chacune des sécantes avec le cercle et le même pour chaque sécante.

♢

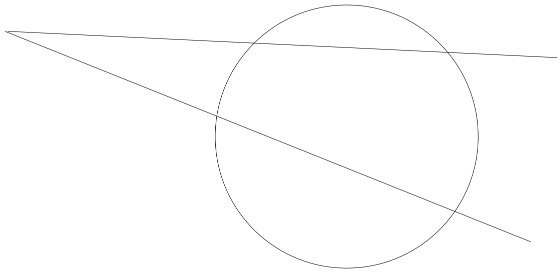


Figure 4.14: théorème des sécantes

4.6 vecteurs dans l'espace

Les vecteurs sont aussi considérés des objets dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Les idées des vecteurs dans le plan s'adapte facilement à cette nouvelle situation.

4.6.1 coordonnées cartésienne

Dans l'espace on choisit l'origine 0 et trois directions spéciales $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, tel que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et les trois directions sont perpendiculaires. Les trois vecteurs suit la **règle de la main droite**; veut dire l'identification suivant est possible sans casser des doigts.

$\vec{e}_x$	correspond au pouce de la main droit
$\vec{e}_y$	correspond au doigt de représentation de la main droit
$\vec{e}_z$	correspond au majeur de la main droit

On dit que

les vecteurs $\vec{e}_x\ ,\ \vec{e}_y\ ,\ \vec{e}_z$ forme un **système droit**

Examiner Figure 4.15 . Les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont dit des **vecteurs d'unité des coordonnées**.

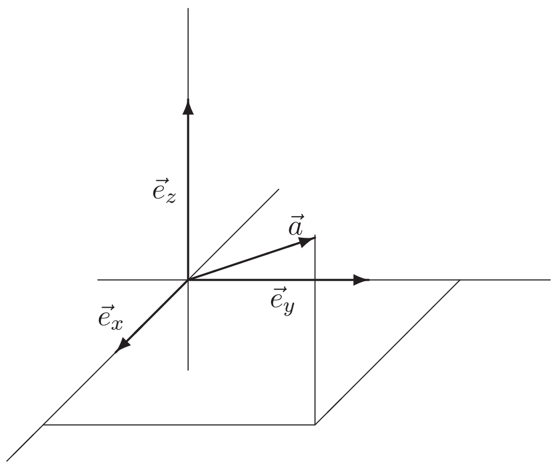


Figure 4.15: coordonnés certésienne en $\mathbb{R}^3$

Examiner un vecteur „arbitraire“ $\vec{a}$ dans l'espace. Pour l'exemple en Figure 4.15 on a

$$\vec{a} = 2\,\vec{e}_x + 1.5\,\vec{e}_y + 1\,\vec{e}_z \qquad .$$

Si la formule ci–dessus est donné il est façile de de construire le vecteurs $\vec{a}$. Donc le vecteur $\vec{a}$ correspond au triple des nombres $(2\,,\,1.5\,,\,1)$.

Figure 4.15 montre que chaque vecteur $\vec{a}$ peut être écrit dans la forme

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{a} = a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3}$$

Les nombres a_i sont dit les **coordonnées** du vecteur $\vec{a}$ et $a_i\,\vec{e}_i$ sont les **composantes** du vecteur. Cette représentation d'un vecteur par un triple des nombres est dit la **représentation cartésienne**.

Pour les vecteurs d'unité des coordonnées $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ on trouve

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.6.2 opérations avec des vecteurs

Considerer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Examiner les opération de base avec des vecteurs. Il est important de visualiser ces règles de calcul et les interprétations géométrique.

4–39 Résultat :

- *addition*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

- *multiplication avec un scalaire*

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \\ \lambda\,a_3 \end{pmatrix}$$

- *longueur d'un vecteur*

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tout règle de calcul de la section précédente est correcte. Vérifier à l'aide de quelques exemples.

4.6.3 le produit scalaire

Comme dans le plan le produit scalaire est caractérisé par la propriété

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) & \text{si} \quad \|\vec{a}\|\neq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{b}\|\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{b}\| = 0 \end{cases}$$

On utilise les notations

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

Pour les vecteurs spécials $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ on trouve

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0$$

Pour des vecteurs quelconques on arrive à

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{e}_x &= \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = a_1\\
\vec{a}\cdot\vec{e}_y &= \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = a_2\\
\vec{a}\cdot\vec{e}_z &= \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a_3
\end{aligned}$$

On a les règles suivantes

4–40 Théorème :

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} & \textit{loi de commutativité}\\
(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) & \textit{pour} \quad \lambda\in\mathbb{R}\\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} & \textit{loi de distributivité}\\
\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \textit{ orthogonal à } \vec{b} & \textit{orthogonalité}\\
\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} &
\end{array}$$

A l'aide du résultat ci-dessus on vérifie les formules suivantes.

4–41 Théorème :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3\\
\|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\\
\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|} \quad \textit{si } \|\vec{a}\|\neq 0 \textit{ et } \|\vec{b}\|\neq 0
\end{aligned}$$

4.6.4 le produit vectorielle

Le produit **scalaire** de deux vecteurs rend un scalaire comme résultat. Le **produit vectorielle** de deux vecteurs rend un vecteur comme résultat. Ce vecteur a les propriétés suivantes.

4–42 Définition :
Pour deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ le produit vectorielle $\vec{a} \times \vec{b}$ est un vecteur caractérisé par

(1) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$

(2) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonal à $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ forme un **système droit**

L'angle doit être entre 0 et π .

4–43 Exemple : Pour les vecteurs d'unités des coordonnées on trouve

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

♢

4–44 Résultat : *Pour deux vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ *on arrive à*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{ aire du parallélogramme}$$

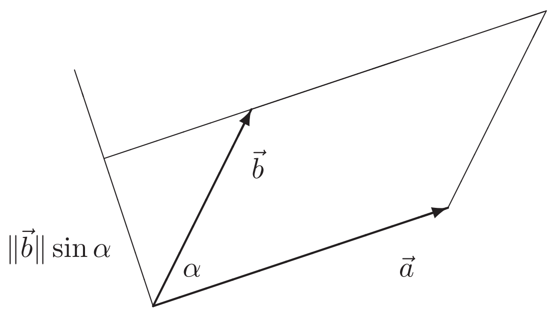


Figure 4.16: produit vectorielle et parallélogramme

Démonstration : Figure 4.16 montre que la hauteur du parallélogramme est donné par $h = \|\vec{b}\| \sin\alpha$ et donc l'aire du parallélogramme est égal au produit de hauteur et largeur

$$\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \sin\alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

□

4–45 Résultat : *La définition du produit vectorielle montre que pour des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve des règles suivantes.*

a) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

b) $\lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\, \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\, \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *ou* $\vec{b} = \vec{0}$ *ou* $\vec{a}$ *est perpendiculaire à* $\vec{b}$.

d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(loi de distributivité)*

Démonstration : Les preuves des résultats a), b) et c) sont des conséquences de la définition géométrique du produit vectorielle. Pour vérifier d) examinons d'abord le cas spécial $\vec{a} = \vec{e}_z$. Pour ce cas la troisième composante de $\vec{b}$ n'importe pas pour l'aire du parallélogramme généré par les vecteurs $\vec{e}_z$ et $\vec{b}$. Puis utiliser que le vecteur $\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec longueur identique. Les deux sont orthogonal à $\vec{e}_z$. Alors on arrive à

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec des arguments similaires on trouve

$$\vec{e}_z \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{e}_z \times \vec{b} + \vec{e}_z \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 - c_2 \\ b_1 + c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on vient de vérifier d), si $\vec{a} = \vec{e}_z$. Si la longueur de $\vec{a}$ n'est pas 1, puis multiplier tous les calculs ci–dessus par le facteur $\|\vec{a}\|$ pour vérifier d) . La définition géométrique du produit vectorielle ne dépend pas de l'orientation des vecteurs d'unités des coordonnées, alors on choisit le système tel que $\vec{e}_z$ montre dans la direction de $\vec{a}$. Donc les arguments ci–dessus sont applicables et on a vérifier le résultat d) . $\square$

4–46 Résultat : *Pour les coordonnées cartésienne on trouve*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$$

4–47 Remarque : Utilisant la notation d'une **déterminant** il existe une aide mémoire pour le produit vectorielle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_z & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \vec{e}_x \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} - \vec{e}_y \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} + \vec{e}_z \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

♢

Démonstration : Examiner d'abord l'expression

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \vec{e}_x \times (b_1\,\vec{e}_x + b_2\,\vec{e}_y + b_3\,\vec{e}_z) \\
&= b_1\,\vec{e}_x \times \vec{e}_x + b_2\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y + b_3\,\vec{e}_x \times \vec{e}_z = b_1\,\vec{0} + b_2\,\vec{e}_z - b_3\,\vec{e}_y \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Un calcul similaire pour les vecteurs $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_y$ et les règles de calcul rend

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1\,\vec{e}_x + a_2\,\vec{e}_y + a_3\,\vec{e}_z) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1\,\vec{e}_x \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_2\,\vec{e}_y \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + a_3\,\vec{e}_z \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

4–48 Exemple : (aire d'un triangle)
Si les trois coins d'un triangle sont donnés par les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ et $\vec{R}$, puis les trois cotés sont représentés par

$$\vec{a} = \vec{Q} - \vec{P} \quad , \quad \vec{b} = \vec{R} - \vec{Q} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \vec{P} - \vec{R}$$

L'aire du parallélogramme généré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donné par $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ et donc

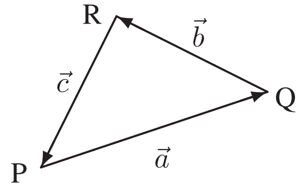


Figure 4.17: aire d'un triangle

$$\text{aire du triangle} \quad = \frac{1}{2}\;\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

Observer que la formula est applicable pour des triangle dans l'espace. On aurrait aussi put utiliser les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Alors

$$\text{aire du triangle} \quad = \frac{1}{2}\;\|\vec{b}\times\vec{c}\|$$

Évidemment les deux formules doivent rendre des résultats identiques. Pour vérifier utiliser

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &= \vec{0}\\
\vec{c} &= -\vec{a}-\vec{b}\\
\vec{b}\times\vec{c} &= \vec{b}\times\left(-\vec{a}-\vec{b}\right) = -\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}\\
&= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4–49 Exemple : Deux vecteurs sont parallèle si et seulement si le produit vectoriel est $\vec{0}$. Utiliser ce résultat pour examiner si trois points se trouve sur une droite. Examiner les points

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad,\quad\vec{Q}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{R}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Puis calculer les vecteurs

$$\vec{a}=\vec{Q}-\vec{P}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{b}=\vec{R}-\vec{P}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

et leur produit vectorielle

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot(-1)-\quad 2\cdot 1\\ 2\cdot 2\quad-(-4)\cdot(-1)\\ (-4)\cdot 1\quad-\quad(-2)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Puis les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles et les points se trouvent sur une droite. $\diamondsuit$

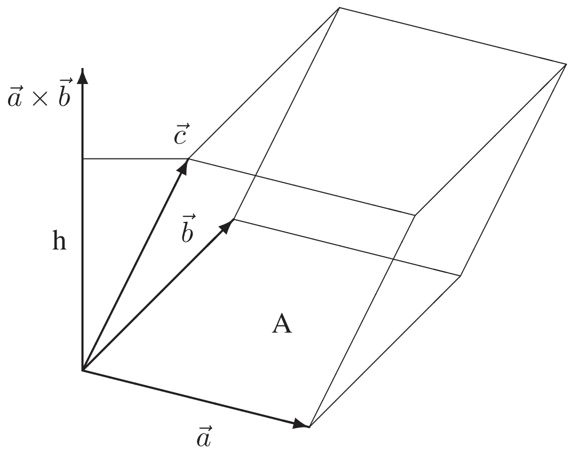


Figure 4.18: produit triple

4.6.5 produit triple

Examiner le volume du parallélépipède généré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, regarder Figure 4.18. L'aire de la base A est donnée par

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

et la hauteur h est déterminée par la composante de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{a} \times \vec{b}$. Trouver h à l'aide du produit scalaire

$$h = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \cdot \vec{c}$$

Donc le volume V et donné par le produit de l'aire de la base avec la hauteur.

$$V = A \cdot h = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \, \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Cette formule rend le **volume orienté** du parallélépipède généré par trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Si $V > 0$ les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ (dans cette ordre) forme un système droit. Si $V < 0$ les trois vecteurs forme un système gauche. Utiliser la notation

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Puisque le volume du parallélépipède ne dépend pas de l'ordre des vecteurs on arrive à

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right]$$

4–50 Résultat : *En utilisant la notation de la **déterminante** on peut reécrire le produit triple comme*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

4–51 Exemple : Ã l'aide du triple produit on peut décider si quatre points se trouve dans un plan. Comme exemple prendre les quatre points.

$$(5,2,1) \quad , \quad (-6,3,-2) \quad , \quad (2,5,2) \quad \text{et} \quad (0,0,-2)$$

Choisir le premier point comme point de départ et trouver les quatre vecteurs de différences.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les quatre point se trouve dans un plan si le volume V du parallélépipède généré par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est zéro. Pour trouver V utiliser le produit triple.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot (-3) - (-11) \cdot 1 \\ (-11) \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

et donc

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -50 - 40 + 90 = 0$$

Donc les quatre points se trouve dans un seul plan. Arriver au même résultat à l'aide de la déterminante

$$\det \begin{bmatrix} -11 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \ldots = 0$$

Verifier le résultat avec *Mathematica*

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={-11,1,-3}
b={-3,3,1}
c={-5,-2,-3}
Cross[a,b]
Cross[a,b].c
```

♢

4–52 Résultat : *Le volume du tétraèdre avec les coins $\vec{0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est ègal à un sixième du volume du parallélépipède généré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Donc on trouve pour les volumes orientés.*

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{1}{6}\, \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \frac{1}{6}\, \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Démonstration : Pour vérifier cette identité examiner Figure 4.19. Le demi parallélépipède avec les coins ABCDEF consiste de trois pyramides. Les pyramides ABCD et DFEC ont des volumes identiques, comme les pyramides ABCD et BCDF . Pour vérifier trouver les bases avec aires identiques et les mêmes hauteurs. □

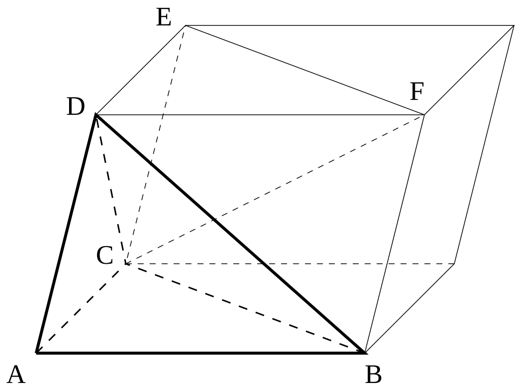


Figure 4.19: volume d'un tétraèdre

4–53 Exemple : Comme exemple prendre le tétraèdre avec les coins $\vec{0}$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit triple à l'aide de

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 24 + 24 = 48$$

L'ordre inhabituelle des vecteurs ne change que le signe du résultat, mais simplifie les calculs.

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6}\, V_{Spat} = \frac{48}{6} = 8$$

♢

4.7 équations des plans

4.7.1 forme générale d'une équation d'un plan

La forme générale d'une équation d'une droite est

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

avec des constantes réels a, b, c et d. Le plan E consiste de tous les points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que l'équation ci–dessus est satisfaite. Sur l'axe des x on a $y = z = 0$ et donc le point d'intersection avec l'axe des x est déterminé par l'équation $a\,x + d = 0$. On arrive à

$$\begin{aligned} x &= -\frac{d}{a} && \text{intersection sur l'axe des } x \\ y &= -\frac{d}{b} && \text{intersection sur l'axe des } y \\ z &= -\frac{d}{c} && \text{intersection sur l'axe des } z \end{aligned}$$

Si il n'y a pas de terme y dans l'équation ($b = 0$), puis la valeur de y n'importe pas pour vérifier si le point se trouve dans le plans. Alors le plan est parallèle à l'axe des y et typiquement il n'y a pas de point d'intersection avec cette axe.

Observer que le plan ci–dessus ne déterminé pas une équation. Pour un seul plan plusieurs équations différentes sont possibles. Les deuz équations

$$\begin{aligned} 1.5\,x - 2\,y + 4\,z + 7 &= 0 \\ -3\,x + 4\,y - 8\,z - 14 &= 0 \end{aligned}$$

rendent un seul plan (ensemble des solutions). Une équation peut être multipliée par une constante (ne pas zéro). Donc des quatre constantes a, b, c et d seulement trois sont des „vrais“ constantes. Un plan est déminé par trois points.

4–54 Exemple : Trouver l'équation d'un plan qui passe par les trois points

$$(1/2/-3) \quad , \quad (0/-4/0) \quad \text{et} \quad (3/-1/3)$$

Il est possible de trouver les valeurs des constantes. $\diamondsuit$

Solution : L'équation est de la forme

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

Utiliser les trois points donnés pour arriver à trois équations pour quatre inconnus[2].

$$\begin{array}{llllcl} a\,1 & +b\,2 & -c\,3 & +d & = & 0 \\ a\,0 & -b\,4 & -c\,0 & +d & = & 0 \\ a\,3 & -b\,1 & +c\,3 & +d & = & 0 \end{array}$$

On a trop de inconnus et donc „choisir“ $d = 4$. Puis la deuxième équation permet une solution avec des nombres entier et on arrive au système

$$\begin{array}{rrrl} a & +2\,b & -3\,c = & -4 \\ & -4\,b & = & -4 \\ 3\,a & -1\,b & +3\,c = & -4 \end{array}$$

La deuxième équation rend $b = 1$ et donc le système

$$\begin{array}{rr} a & -3\,c = -6 \\ 3\,a & +3\,c = -3 \end{array}$$

Addition des deux équations donne $a = -9/4$ et donc $3\,c = a + 6 = 15/4$. Puis on arrive à la solution

$$\frac{-9}{4}\,x + y + \frac{5}{4}\,z + 4 = 0$$

Pour obtenir des nobres entier multiplier l'équation avec 4

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Maintenant il est façile de trouver les intersections avec les axes.

$$\begin{array}{ll} x = +\dfrac{16}{9} & \text{intersection sur l'axe des } x \\ y = -\dfrac{16}{4} & \text{intersection sur l'axe des } y \\ z = -\dfrac{16}{5} & \text{intersection sur l'axe des } z \end{array}$$

$\square$

[2]Plus tard on va voir des méthodes systématique pour résoudre ce type de problème.

4–55 Définition : La **trace** un pln général

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

dans le plan des xy est la droite d'intersection des deux plans. Elle est caractérisé par la condition $z = 0$ (plan de sxy) et l'équation du plan ci–dessus. Donc on trouve

$$a\,x + b\,y + d = 0$$

4–56 Exemple : Les équations der trois traces du plan

$$7\,x - 3\,y + \pi\,z - 99 = 0$$

sont données par

$$\begin{array}{ll} \text{dans le plan } xy & +7\,x - 3\,y - 99 = 0 \\ \text{dans le plan } xz & +7\,x + \pi\,z - 99 = 0 \\ \text{dans le plan } yz & -3\,y + \pi\,z - 99 = 0 \end{array}$$

$\diamondsuit$

4.7.2 forme paramétrique de l'équation d'un plan

Un plan est déterminé par un point $\vec{p}$ dans le plan et deux vecteurs de directions $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Puis tous les points dans le plan E sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

ou bref

$$\vec{x} = \vec{p} + u\,\vec{a} + v\,\vec{b} \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Si les paramètres u et v atteinds tous les nombres réels on obtient tout le plan. Examiner Figure 4.20.

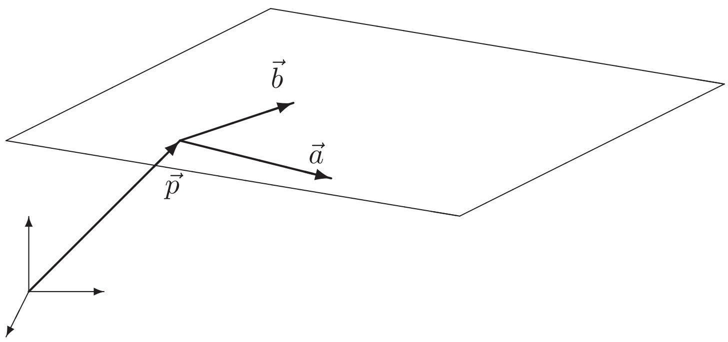


Figure 4.20: paramétrisation d'un plan

4–57 Exemple : Si l'origine (0/0/0) est dans un plan puis les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont parallèles au plan E. Une forme paramétrique du plan est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

ou en utilisant des composantes

$$\begin{aligned} x &= +3\,u - 5\,v \\ y &= -6\,u - 4\,v \\ z &= -10\,u - 2\,v \end{aligned}$$

Utiliser deux de ces trois équations pour éliminer les paramètres u et v

$$y - 2\,z = 14\,u + 0\,v \quad \text{et donc} \quad u = \frac{y - 2\,z}{14}$$

Addition du double de la première équation à la deuxième produit

$$2\,x + y = 0\,u - 14\,v \quad \text{et donc} \quad v = \frac{-2\,x - y - 2}{14}$$

Utiliser ces deux valeurs pour u et v dans la première équation pour obtenir une des forme standard de l'équation de ce plan.

$$14\,x = 3\ (y - 2\,z) - 5\ (-2\,x - y) = 10\,x + 8\,y - 6\,z$$

et puis

$$4\,x - 8\,y + 6\,z = 0$$

ou

$$2\,x - 4\,y + 3\,z = 0$$

$\diamondsuit$

4.7.3 vecteurs normales

Un plan E est déterminé par un point $\vec{p}$ dans le plan et un vecteur normale $\vec{n} \neq \vec{0}$. Le point $\vec{x} = \vec{p} + \vec{a}$ se trouve dans le plan si le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Examiner cette situation en Figure 4.21 pour trouver la condition

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{p}) &\perp \vec{n} \\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

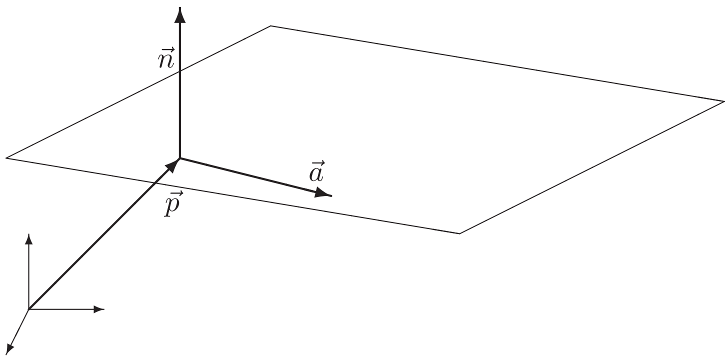


Figure 4.21: un plan, donné par un point et un vecteur normal

4–58 Exemple : Trouver le plan par le point $\vec{p}$, perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$, avec

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solution: Utiliser la condition ci–dessus et calculer les produit scalaire pour arriver à la forme générale de cette équation d'un plan.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ -x + 3\,y + 2\,z &= 2 + 21 + 0 = 23 \end{aligned}$$

♢

L'exemple ci–dessus montre que les coefficients a, b et c dans la forme générale

$$a\,x + b\,y + c\,z = -d$$

corresponds au vecteur normale

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -d = \vec{n} \cdot \vec{p}$$

4–59 Exemple : Si un plan est donné par un point $\vec{p}$ dans le plan et deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (parallèle au plan), puis un vecteur normale est donné par le produit véctorielle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Voir Figure 4.22.

Si le point $(3/2/1)$ se trouve dans le plan et le vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

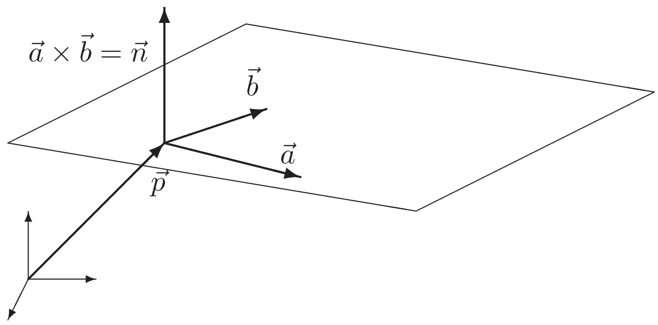


Figure 4.22: un plan, donnépar un point et deux vecteurs de direction

sont parallèle au plan E, puis un vecteur normale es donné par

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28\\56\\-42\end{pmatrix}=14\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Seulement la direction du vecteur normale est important (pour le moment) et donc on choisit des nombres plus simples $\vec{n}=(-2\,,\,4\,,\,-3)^T$ et on arrive à l'équation du plan

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{x} &= \vec{n}\cdot\vec{p}\\ \begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\ -2\,x+4\,y-3\,z &= -6+8-3=-1\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4–60 Exemple : Trouver l'équation du plan par les trois points

$$(1/2/-3)\quad,\quad(0/-4/0)\quad\text{et}\quad(3/-1/3)$$

Trouver la solution de cet exemple à page 128 avec une méthode différente.

Solution: Choisir le premier point comme point initial et puis deux vecteurs de direction sont donnés par les vecteurs de différences.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$$

Le produit vectorielle rend un vecteur normal

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27\\12\\15\end{pmatrix}$$

et donc une équation pour ce plan

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-27\\12\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-27\\12\\15\end{pmatrix}$$

ou

$$-27\,x + 12\,y + 15\,z = -48$$

Diviser par 3 pour obtenir

$$-9\,x + 4\,y + 5\,z + 16 = 0$$

Cette réponse coïncide avec la solution de l'exemple de page 128. $\diamondsuit$

4.7.4 forme Hessienne, distance d'un point du plan

Pour un vecteur normal $\vec{n}$ seulement la direction est important, donc on pout choisir sa longeur. Un bon choix est donné par la **normalisation** du vecteur normal à un **vecteur d'unité**, veut dire

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$$

Parce que la longueur de $\vec{n}$ est 1 le produit scalaire $\vec{p}\cdot\vec{n} = -d$ correspond à la composante de $\vec{p}$ dans la direction de $\vec{n}$, voir Figure 4.23. Ce nombre est la distance orienté de l'origine de ce plan.

$$n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z + d = 0$$

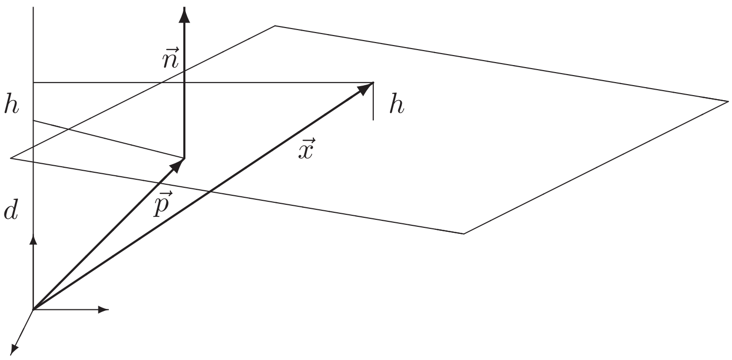


Figure 4.23: forme Hessienne de l'équation d'un plan

Pour un vecteur quelconque $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ le produit $\vec{x}\cdot\vec{n}$ rend la composante de $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{n}$. Donc l'expression

$$h = \vec{x}\cdot\vec{n} - d = \vec{x}\cdot\vec{n} - \vec{p}\cdot\vec{n} = (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}$$

correspond à la **distance orientée** du point $\vec{x}$ du plan. La distance géométrique est donnée par la valeur absolue de la distance orientée. Le signe indique de quel coté du plan se trouve le point. Si pour deux points on obtiens le même signe puis le points se trouve de la même coté.

Le vecteur

$$\vec{x}_p = \vec{x} - h\,\vec{n} = \vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}$$

correspond à la **projection orthogonale** du point $\vec{x}$ sur le plan. Pour vérifier cette résultat utiliser deux observation:

1. $\vec{x}_p$ se trouve dans le plan:
   Calculer la distance du point du plan par

$$\begin{aligned} \text{distance} &= \vec{x}_p\cdot\vec{n} - d = \vec{x}\cdot\vec{n} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ \vec{n}\cdot n - d \\ &= \vec{x}\cdot\vec{n} - (\vec{x}\cdot\vec{n} - d)\ 1 - d = 0 \end{aligned}$$

2. $\vec{x} - \vec{x}_p$ est perpendiculaire au plan
   A cause de
   $$\vec{x} - \vec{x}_p = \vec{x} - (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n}) = (\vec{x} \cdot \vec{n} - d)\ \vec{n}$$
   ce vecteur est un mutiple du vecteur normal $\vec{n}$ et donc orthogonal au plan.

4.8 équations des sphères

Une sphère (surface d'une boule) dans l'espace $\mathbb{R}^3$ correspond à un cercle en $\mathbb{R}^2$. Donc les idées, méthodes et résultats sont similaires.

4–61 Définition : Une sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R consiste de tous les points $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels
$$\left\| \vec{x} - \vec{M} \right\|^2 = \left(\vec{x} - \vec{M}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{M}\right) = R^2$$
Multiplier les expression dans les parenthèses pour obtenir une équation quadratique pour le vecteur $\vec{x}$.
$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$
Si le centre de la sphère est donné par $\vec{M} = (u, v, w)^T$ puis cette équation devient
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$$

4–62 Exemple : Soit $\vec{r}$ un point sur la sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R. Le vecteur $\vec{v}$ est un **vecteur tangent** si il est perpendiculaire au vecteur de connection de $\vec{M}$ au point $\vec{x}$. Donc la condition est
$$\vec{v} \cdot \left(\vec{r} - \vec{M}\right) = 0$$
Remplacer le vecteur $\vec{v}$ par un vecteur de connection $\vec{x} - \vec{r}$ d'un point arbitraire $\vec{x}$ avec le point $\vec{r}$ sur la sphère pour arriver à l'équation du **plan tangent** à cette sphère au point $\vec{r}$.
$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{M}) = 0$$

♢

4–63 Exemple : Le point $(3/2/1)$ se trouver sur une sphère avec centre $(5/1/3)$ et rayon 3. Trouver

(a) l'équation de cette sphére.

(b) l'équation du plan tangent pour ce point et sphère.

(c) la trace de ce plan dans le plan yz, veut dire $x = 0$.

Solution: L'éqiation de cette sphère est donné par
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 3^2$$

Mettre $(x,y,z) = (3,2,1)$ pour verifier que le point $(3/2/1)$ se trouver effectivement sur la sphère.

$$\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}\right) = 2^2+1+2^2 = 3^2$$

Le vecteur de connection du centre au point de contact est

$$\vec{r}-\vec{M} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

et donc l'équation du plan tangent est donné par

$$\begin{aligned}
(\vec{x}-\vec{r})\cdot\left(\vec{r}-\vec{M}\right) &= 0\\
\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0\\
\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0\\
-2\,x+6+y-2-2\,z+2 &= 0\\
-2\,x+y-2\,z &= -6
\end{aligned}$$

Mettre $(x,y,z) = (3,2,1)$ pour verifier que le point $(3/2/1)$ fait partie du plan.

$$-2\cdot 3+2-2 = -6$$

Pour trouver la trace de ce plan dans le plan $x=0$ on arriva à

$$y-2\,z = -6$$

À l'aide de *Mathematica* générer la Figure 4.24. Le code produit d'abord le plot pour la shpère et pius le plan tangent. Après les des graphiques sont combinées à l'aide du command `Show[]` dans une seule graphique.

Mathematica
```
Kugel[r_,phi_] := {5 + r Cos[phi] , 1+ r Sin[phi] ,3 -  Sqrt[9-r^2]}
KugelPlot=ParametricPlot3D[Kugel[r,phi],{r,0,3},{phi,0,2Pi}]
```

Mathematica
```
Ebene[x_,y_] := {x,y,(6-2x+y)/2}
EbenenPlot=ParametricPlot3D[Ebene[x,y],{x,0,5},{y,-3,3}]
```

Mathematica
```
Show[EbenenPlot,KugelPlot,ViewPoint -> {-20,-30,30}]
```

◊

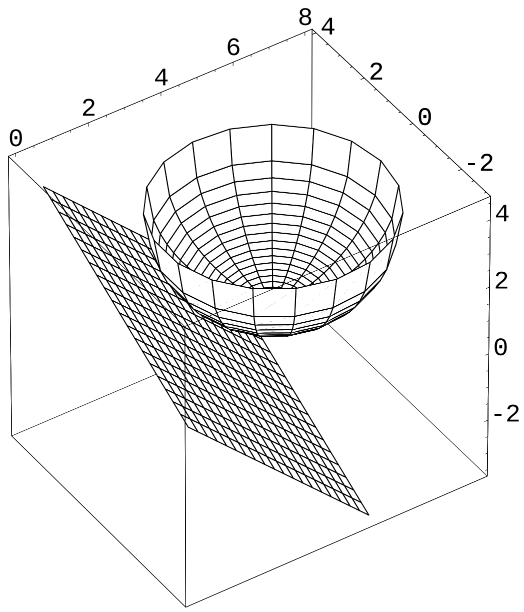


Figure 4.24: sphère et plan tangent

4–64 Exemple : Soit $\vec{n}$ un vecteur de direction avec $\|\vec{n}\| = 1$ et examier une sphère avec centre $\vec{M}$ et rayon R, donner par l'équation

$$\vec{x} \cdot \vec{x} - 2\,\vec{M} \cdot \vec{x} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

La doite donné par la paramétrisation

$$\vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{n}$$

a zéro, un ou deux points d'intersection avec la sphère. Ces point sont caractérisés par l'équation quadratique

$$t^2\;\vec{n} \cdot \vec{n} - t\;2\,\vec{M} \cdot \vec{n} + \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2 = 0$$

Les longueurs des secteur de l'origine au point d'intersection sont données par $|t_1$ et $|t_2|$, parce que $\|\vec{n}\| = 1$. Pour le produit des deux solution t_1 et t_2 de l'équation

$$t^2 + b\,t + c = 0$$

on trouve $t_1\,t_2 = c$ (Viète) et donc

$$t_1\;t_2 = \vec{M} \cdot \vec{M} - R^2$$

Cette valeur est indépendante du vecteur de direction $\vec{n}$.

Ce calcul montre que le **théorème des sécantes** de la géométrie dans le plan $\mathbb{R}^2$ est aussi correct pour des sphères dans l'espace $\mathbb{R}^3$. ♢

4.9 problèmes

4.9.1 opérations avec des vecteurs

• Problème 4–1:
Dessiner la droite

$$3x - 2y + 6 = 0$$

dans un systèm cartésienne. Trover la longeur des deux séction sur les axes.

• Problème 4–2:
Esquisser la droite

$$8x - y - 12 = 0$$

et decider si elle passe par les points $P_1 = (1.5, 0)$, $P_2 = (4, 4)$ et $P_3 = (3, 2)$.

• Problème 4–3:
Dessiner l'ensemble des solution du système des inégalités ci–dessous.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &\geq 0 \\ 3x - 2y - 9 &\leq 0 \\ x + y - 2 &\geq 0 \\ x &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

• Problème 4–4:
Dessiner l'ensemble des solution du système des inégalités ci–dessous.

$$\begin{aligned} x - 2y + 4 &\geq 0 \\ x + y - 2 &\geq 0 \\ x + 2y - 10 &\leq 0 \\ 3x - y - 9 &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

• Problème 4–5:
Démontrer que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 .$$

Tip: utiliser les définitions géométriques des produits scalaires et véctorielles.

4.9.2 droites et plans

• Problème 4–6:
Une droite passe par les points $(1.5\,,\,-2)$ et $(2\,,\,3)$. Trouver l'équation de la droite dans la forme standard et les deux intersections avec les axes.

• Problème 4–7:
Examiner le système des inégalités ci–dessous dans le plan xy.

(a) Écrire dans la forme standard des droites 1, 2 et 3.

(b) Esquisser l'ensemble des solutions.

(c) Trouver les coordonnés du point dans l'ensemble de solution avec la valeur y le plus grand possible.

1 :	$3\,y + x \leq 9$
2 :	au–dessous de la droite qui passe par le point $(1, 0)$ avec une pente de 2
3 :	au–dessus de la droite qui passe par les deux points $(2, 1)$ et $(8, 4)$

• Problème 4–8:
Examiner le système des inégalités ci–dessous dans le plan xy.

(a) Écrire dans la forme standard des droites 1, 2 et 3.

(b) Esquisser l'ensemble des solutions.

(c) Trouver les coordonnés du point dans l'ensemble de solution avec la valeur x le plus grand possible.

1 :	$y + \frac{x}{2} \leq 4$
2 :	au–dessous de la droite qui passe par le point $(1, 4)$ avec une pente de 3
3 :	au–dessus de la droite qui passe par les deux points $(3, 1)$ et $(7, 3)$
4 :	$x > 0$ et $y > 0$

• Problème 4–9:
Transformer l'éuqation de la droite $8x - 6y + 25 = 0$ dans la forme hessienne.

• Problème 4–10:
Quel est la distance des deux points $\vec{P} = (1, 3)$ et $\vec{Q} = (5, 2)$ de la droite $5x - 12y + 1 = 0$?

• Problème 4–11:
Trouver la forme standard d'une droite avec distance 2 de origine et la droite est perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = (1, -2)$.

• Problème 4–12:
Trouver la forme standard d'une droite avec distance 4 de origine et la droite est passe par le point $\vec{P} = (4, -2)$.

• Problème 4–13:
Deux droites sont donnés par les valeurs de m_1, m_2, a_1, a_2 et les équatiuons

$$y = m_1\,x + a_1 \quad \text{und} \quad y = m_2\,x + a_2$$

Trouver une conditions pour m_1 et m_2 tel que les deux droites sont perpendiculaire.
Tip: $\tan\alpha_1 = m_1$, $\tan\alpha_2 = m_2$ et $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$.

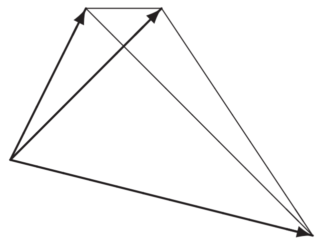
• Problème 4–14:
Deux droites sont perpendiculaire et se coupes dans le point $(-2, 1.5)$. L'ordonnée sur l'axe des y de la première droite est 2. Trouver l'équation de la deuxième droite dans la forme standard.

• Problème 4–15:
Déterminer l'angle entre les deux droites.

$$\begin{aligned} 2x - y - 3 &= 0 \\ x - 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

• Problème 4–16:
Rendre des résultats **exactes**. Travailler avec les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ -2\,\pi \end{pmatrix}$$



(a) Calculer

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} \quad , \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{et} \quad \vec{b}\times\vec{c}$$

(b) Trouver une équation d'une droite qui passe par le point $(2/2/0)$ et dont le vector de direction est orthogonal au vecteur $\vec{a}$.

(c) Trouver le volume du tétraèdre généré par les trois vecteurs.

• Problème 4–17:
On donne la droite

$$g:\ y = 3x + 1 \qquad .$$

Déterminer la droite qui est orthogonal par rapport á la droite g et qui passe par le point $(1, 4)$.

• Problème 4–18:
Déterminer le point d'intersection S du plan $x - y + 2z - 3 = 0$ avec la droite passant par les points $A(-1, 0, 4)$ et $B(1, 2, 0)$.

• Problème 4–19:
Etablir l'équation paramétrique de la droite d'intersection du plan

$$x - 2y + z = 0$$

avec le plan passant par les points $A(2, 3, 1),\ B(-3, 0, 2)$ et $C(1, 2, 3)$.

• Problème 4–20:
Etant donné le plan $\epsilon :\ x + 4y - 3z + 9 = 0$ et le point $P(0, -5, 5)$. Déterminer l'image $\overline{P}$ de P par rapport au plan ϵ.

• Problème 4–21:
Déterminer l'angle aigu entre les plans $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ et $3x - 2y - z + 4 = 0$.

• Problème 4–22:
De quels points sur la droite

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

apparaissent le segment de $A = (1, 0, 2)$ à $B(5, -4, 0)$ sous un angle droit ?

• Problème 4–23:

(a) Trouver l'équation du plan E avec vecteur normal $\vec{n} = (1\ ,\ -1\ ,\ 2)^T$ et une distance $\sqrt{6}$ de l'origine, qui se trouve au dessus du plan.

(b) Trouver une paramétrisation de la droite d'intersection du plan E ci–dessus et le plan $x + y + z = 2$.

• Problème 4–24:
Calculer l'aire du triangle $A(1,-1,3),\ B(2,1,3),\ C(4,1,-3)$.

• Problème 4–25:
Déterminer l'équation paramétrique de la droite passant par $P(1,0,3)$ et qui est orthogonal par rapport aux droites

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{s}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

• Problème 4–26:
Etant donné les deux plans $2x-y+3z+4=0,\ x+y-2z-3=0$ et le point $P(2,0,-1)$. Etablir l'équation paramétrique de la droite passant par P et qui est parallèle par rapport aux deux plans.

• Problème 4–27:
Démontrer que les points $A(-3,-7),\ B(-6,5)$ et $C(5,-39)$ se trouvent sur la même droite.

• Problème 4–28:
Vérifier que les quatres points sont das un seul plan.

(a)

$$(0,2,4)\quad,\quad(1,0,5)\quad,\quad(2,2,4)\quad \text{et}\quad (1,4,3)$$

(b)

$$(3,1,-4)\quad,\quad(-1,3,8)\quad,\quad(-2,-1,2)\quad \text{et}\quad (1,-1,-4)$$

• Problème 4–29:
Un plan passe par les trois points ci–dessous

$$A\,(0/3/2)\quad,\quad B\,(-2/3/0.5)\quad,\quad C\,(4/2/1)$$

(a) Trouver l'équation du plan.

(b) Trouver les longeurs des trois sections sur les axes.

(c) Trouver un vecteur normale du plan.

• Problème 4–30:
Calculer le volume des tétraèdres ci–dessous.

(a) A(2/3/3), B(4/-1/4), C(1/1/-2), D(5/1/0)

(b) A(0/2/3), B(-2/2/-1), C(4/-2/2), D(3/6/0)

(c) A(0/2/4), B(1/0/5), C(2/2/4), D(3/1/0)

• Problème 4–31:
Un cône avec sommet à l'origin et l'axe dans la direction du vecteur $\vec{d}$ est definie par la condition que l'angle α entre un vecteur $\vec{x}=(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3$ et $\vec{d}$ est fix.

Trouver l'équation du manteau du cône avec demi–angle d'ouverture $\alpha=30^\circ$ et l'axe dans la direction de $\vec{d}=(1,2,0)^T$. Le sommet est à l'origin. Exprimer l'équation en terme de x, y et z. Reécrice cette équation comme équation quadratique pour les variables.

• **Problème 4–32:**
Un tétraèdre est donné par les quatres sommets $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (2,3,0)$ et $P_3 = (4,4,1)$. Le quatrième sommet P_4 se trouve sur la droite

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Trouver la position exacte du quatrième sommet P_4 tel que le volume du tétraèdre est 10 .

• **Problème 4–33:**
Examiner les deux points $\vec{A} = (1,2,5)$ et $\vec{B} = (7,4,3)$ et la droite g donnée par la paramétrisation

$$g \ : \qquad \vec{x}\,(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Trouver un point $\vec{C}$ sur la droite g tel que le triangle ABC soit isocèle. ($AC = BC$).

(b) Calculer l'aire de ce triangle.

• **Problème 4–34:**
Un plan E et la doite g, donné par

$$g \ : \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -\pi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

n'ont pas de point d'intersection. Les points $P_1 = (1/2/-4)$ et $P_2 = (0/2/-1)$ se trouve dans le plan E. Trouver la forme Hessienne de l'équation de ce plan.

• **Problème 4–35:**
Un plan E est donné par $x + 2\,y + 2\,z = 27$. Trouver une forme paramétrique $\vec{r} + t\,\vec{a} + s\,\vec{b}$, tel que les trois vecteurs $\vec{r}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonals. De plus on demande que les longueurs de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égales à 1.

• **Problème 4–36:**
Un tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$ est donné par les points ci–dessous.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le volume du tétraèdre.

(b) Calculer la surface totale du tétraèdre.

4.9.3 cercles et boules

• **Problème 4–37:**
Déterminer le centre et le rayon du cercle qui passent par les points $A(6,-1)$ et $B(4,5)$ et dont le centre se trouve sur la droite ci–dessous.

$$g : \ 3x + 5y - 11 = 0$$

• Problème 4–38:
Etant donné deux points $A(0,0)$ et $B(5,0)$. Déterminer tous les points dont la distance de B et la double de la distance de A.

• Problème 4–39:
Etablir l'équation de la tangente au cercle K en point P :

(a) $K: \ x^2 + y^2 + 16x - 4y + 43 = 0, \ \ P(-5, y), \ y < 0;$

(b) $K: \ 4x^2 + 4y^2 + 24x + 16y + 27 = 0, \ \ P(-1.5, 0);$

• Problème 4–40:
Le cercle C avec centre $\vec{M} = (3\,,\,1)$ touche la droite $y = -1 - 2\,x$.

(a) Trouver l'équation du cercle.

(b) Trouver les points d'intersection du cercle C avec la droite $x + y = 4$.

• Problème 4–41:

(a) Trouver l'équation de la tangente d'un cercle avec centre $M\,(3/4)$ et par le point $P\,(2/1)$.

(b) Trover la distance de cette droite du point $Q\,(-2, 3)$.

• Problème 4–42:
Examiner un cercle avec centre au point $\vec{M} = (4, 2)$ et rayon $R = 3$.

(a) Trouver les points d'intersection avec la droite $y = 2\,x - 4$.

(b) Pour quels valeurs du paramètre λ la droite $y = 2\,x + \lambda$ est une tangente au cercle?

• Problème 4–43:
Déterminer les points d'intersection de la sphère avec le centre M et le rayon R avec la droite passant par A et B :

a) $M(0, 0, 0), \ R = 11, \ A(0, 6, 10), \ B(2, 6, 9);$

b) $M(6, -10, -9), \ R = 17, \ A(0, 5, 3), \ B(-7, 8, 3);$

• Problème 4–44:
Déterminer les équations des plans tangentes au sphère avec le centre $M(0, 0, 0)$ et le rayon $R = 3$ en points $P(2, y, 2)$.

• Problème 4–45:
Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par $P(2, -5, 3)$ et qui est parallèle par rapport au plan

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Problème 4–46:
Une boule en $\mathbb{R}^3$ est donnée par l'équation

$$x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 9 = 0$$

(a) Trouver le centre et le rayon de cette boule.

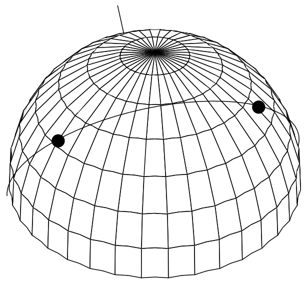
(b) Déterminer la distance du plan $x + y + 2z = 17$ de cette boule.

• Problème 4–47:
Une boule K de rayon $R = 6$ touche le plan $x - 2\,y + 2\,z - 1 = 0$ au point $x = 1$, $y = 3$ et $z =$? La boule est au–dessus du plan. Trouve un des points d'intersection de la boule K avec la droite g donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

• Problème 4–48:

Soit la demie sphère nord de la terre à droite avec un rayon $R = 6300$ km. On donne la position de la ville de Zürich (CH) et de Salt Lake City (USA) dans la table ci–dessous.



	latitude	longitude
Zürich	47°	$+8^\circ$
Salt Lake City	41°	-112°

La liaison la plus courte entre les deux villes à la surface de la terre est dans un plan qui passe par l'origine et les deux villes, c.-à.-d. suivant un grand cercle.

(a) Représenter les positions des deux villes par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée le long d'une droite.

(c) Trouver la distance entre les deux villes, mesurée à la surface de la terre.

(d) Trouver un vecteur normal du plan avec ce grand cercle.

(e) Trouver la latitude maximale sur le grand cercle entre les deux villes.

4.9.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 4–5 : Wegen

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|\;\cos\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\;\|\vec{b}\|^2\;\cos^2\alpha$$

und

$$\langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|\;\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \langle \vec{a}\,,\,\vec{b}\rangle^2 = \|\vec{a}\|^2\;\|\vec{b}\|^2\;\sin^2\alpha$$

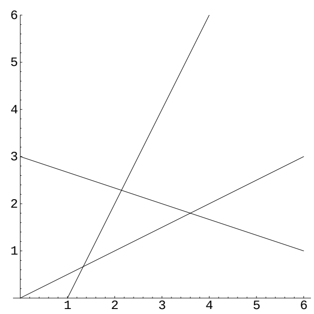
folgt die Behauptung aus dem Satz von Pythagoras.

Solution pour problème 4–7 :

(a)

Die Standardform einer Geradengleichung ist $y = a \cdot x + b$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Gerade 1} & : & y(x) \;=\; 3 - \dfrac{1}{3}\,x \\ \text{Gerade 2} & : & y(x) \;=\; -2 + 2\,x \\ \text{Gerade 3} & : & y(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\,x \end{array}$$



(b) Die Figur oben rechts zeigt die Graphen der drei Funktionen. Die gesuchte Lösungsmenge entspricht dem kleinen, geschlossenen Dreieck rechts.

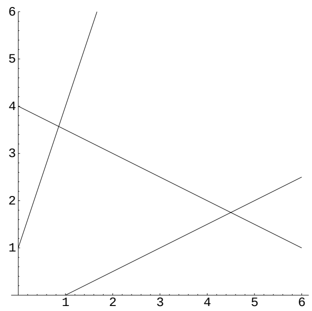
(c) In der Figur ist auch ablesbar, dass der am weitesten oben liegende Punkte (grösster Wert der y–Koordinate) gegeben ist als Schnittpunkt der Geraden 1 und 2. Die x–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden 1 und 3 ist gegeben als Lösung der Gleichung $3 - \frac{1}{3}\,x \;=\; -2 + 2\,x$. Das führt auf $\frac{7}{3}\,x = 5$ und somit $x = \frac{15}{7}$. Der y–Wert kann bestimmt werden mit Hilfe einer der beiden Geraden, z.B. $y = -2 + 2\,\frac{15}{7} = \frac{16}{7}$. Somit hat der gesuchte Punkte die Koordinaten $(x, y) = (\frac{15}{7}\,,\,\frac{16}{7})$.

Solution pour problème 4–8 :

(a)

La forme standard d'une équation d'une droite est $y = a \cdot x + b$.

$$\begin{array}{lcl} \text{droite } 1 & : & y(x) \;=\; 4 - \dfrac{1}{2}\,x \\ \text{droite } 2 & : & y(x) \;=\; 1 + 3\,x \\ \text{droite } 3 & : & y(x) \;=\; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,x \end{array}$$



(b) La graphique ci–dessus montre les graphes des trois fonctions. L'ensemble de solution correspond au petit triangle à droite.

Lire aussi dans la graphique que le point avec la composante x le plus grande est le point d'intersections des droites 1 et 3.

(c) La composante x de ce point d'intersection des droites 1 et 3 est solution de l'équation $4 - \frac{1}{2}\,x \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x$. On arrive à $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. La valeur de y peut être calculer à l'aide de une des deux droites, par exemple $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{9}{2} = \frac{7}{4} = 2.75$. Alors on obtiens les coordonnées $(x, y) = (4.5\,,\,2.75)$.

Solution pour problème 4–9 : $-0.8x + 0.6y - 2.5 = 0$.

Solution pour problème 4–10 : 2.31 et -0.15. Les signes différentes indiques que les deux points se trouve des cotées différentes de la droites.

Solution pour problème 4–11 : L'équation doit être de la forme

$$1\,x - 2\,y = d$$

Utiliser la forme hessienne pour déterminer la valeur de d.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{d}{\sqrt{5}}$$

On obtient

$$\frac{d}{\sqrt{5}} = \pm 2$$

avec les deux solutions

$$d = \pm 2\,\sqrt{5}$$

Alors l'équation de la droite est

$$1\,x - 2\,y = \pm 2\,\sqrt{5}$$

Solution pour problème 4–13 : $m_2 = -1/m1$

Solution pour problème 4–15 : $\gamma \approx 143.1°$.

Solution pour problème 4–16 :

(a)

$$\vec{a} + 3\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ \pi + 6 \end{pmatrix} \quad , \quad 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} = 4\,(e - \pi^2) \quad \text{et} \quad \vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} -2\,\pi \\ 2\,e - 4\,\pi \\ -e \end{pmatrix}$$

(b) Le vecteur de direction $\vec{d}$ de la droite doit être perpendiculaire à $\vec{a}$. Un choix simple est $\vec{d} = (-3, 2, 0)^T$. On arrive à la droite paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

Des autres solutions sont possibles.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \frac{1}{6}\,\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\,\pi \\ 2\,e - 4\,\pi \\ -e \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{6}\,\left|-16\,\pi + 6\,e - e\,\pi\right| \end{aligned}$$

Solution pour problème 4–17 : $x + 3y - 13 = 0$.

Solution pour problème 4–18 : $S(0, 1, 2)$;

Solution pour problème 4–19 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–20 : $\overline{P}(2, 3, -1)$.

Solution pour problème 4–21 : $78.6°$

Solution pour problème 4–22 : $P_1 = (2, -4, -1)$ et $P_2(4, 0, 3)$

Solution pour problème 4–23 :

(a) Verwende die Hessesche Normalenform um den Abstand zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}\cdot\vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\sqrt{6} \\ x - y + 2\,z &= \pm 6 \end{aligned}$$

Damit der Ursprung oberhalb der Ebene liegt, muss der Wert von z bei $x = y = 0$ negativ sein. Somit ist die Ebenengleichung $x - y + 2\,z = -6$.

(b) Zu bestimmen sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & -6 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Mit Hilfe von erweiterten Matrizen erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1/2 & 4 \end{array}\right]$$

Wähle $z = t$ als Parameter und man erhält $y = 4 + z/2 = 4 + t/2$ und $x = -6 + y - 2z = -6 + 4 + t/2 - 2t = -2 - \frac{3}{2}t$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–24 : 7

Solution pour problème 4–25 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–26 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–28 : Controller à l'aide de *Mathematica*.

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={0,2,4};
b={1,0,5};
c={2,2,2};
d={1,4,3};
Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
0
```

Solution pour problème 4–29 :

(a) Les vecteurs de connection des trois points sont

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors le vecteur normal du plan est donné par

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une solution pour l'équation du plan est donc

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} &= 0 \\ -1.5\,x - 8\,y + 2\,z &= -24 + 4 \\ 3\,x + 16\,y - 4\,z &= 40 \end{aligned}$$

(b) Les trois section sur les axes sont façile a trouver.

$$x_{sec} = \frac{40}{3} \quad , \quad y_{sec} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad z_{sec} = -10$$

(c) Trouver le vecteur normal ci–dessus, par exemple $\vec{n} = (3, 16, -4)^T$.

Mathematica

```
f[x_,y_,z_] := a x + b y + c z + d
Solve[ {f[0,3,2]==0,
        f[-2,3,1/2]==0,
        f[4,2,1]==0}] /. d -> 40
Solve::svars:
   Warning: Equations may not give solutions
     for all "solve" variables.
.
{{a -> -3, b -> -16, c -> 4}}
```

L'équation est

$$-3\,x - 16\,y + 4\,z + 40 = 0$$

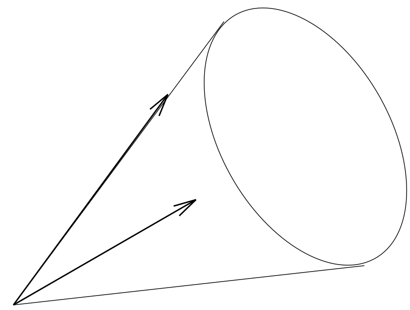
Solution pour problème 4–30 : Verifier à l'aide de *Mathematica*.

Mathematica

```
Needs["LinearAlgebra`CrossProduct`"]
a={2,3,3};
b={4,-1,4};
c={1,1,-2};
d={5,1,0};
1/6 Cross[b-a,c-a].(d-a)
.
12
```

Solution pour problème 4–31 :

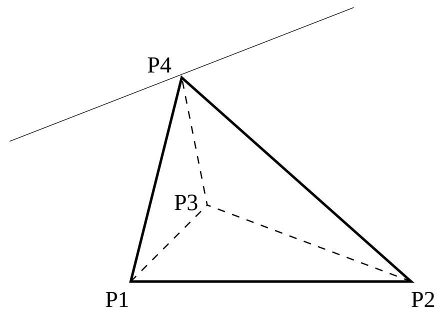
On trouve
$$\vec{x}\cdot\vec{d} = \|\vec{x}\|\;\|\vec{d}\|\;\cos\,\alpha$$
Utiliser $\vec{d} = (1,2,0)^T$, $\alpha = 30^\circ$ et cos $\alpha = \sqrt{3}/2$. Donc



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\sqrt{5}\;\frac{\sqrt{3}}{2}\\
x+2\,y &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\frac{\sqrt{15}}{2}\\
(x+2\,y)^2 &= \left(x^2+y^2+z^2\right)\;\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

On trouve une équation quadratique pour x, y et z.

Solution pour problème 4–32 :
Trouver le volume du tétraèdre à l'aide du triple produit.



$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\,\left[\vec{AB}\,,\,\vec{AC}\,,\,\vec{AD}\right]\\
&= \frac{1}{6}\,\left(\vec{AB}\times\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}
\end{aligned}$$

Choisir le point D sur cette droite, tel que $V = 10$. On arrive à une équation pour le paramètre t.

$$6\,V(t) = \left(\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1\\ -1+t\\ 1+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ -2\\ -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ -1+t\\ 1+2t\end{pmatrix} = 2-6\,t$$

Alors l'équation à résoudre est
$$V = \frac{1}{3} - t = 10 \qquad\Longleftrightarrow\qquad t = -\frac{29}{3}$$

Le point P_4 sur la droite est donné par
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} - \frac{29}{3}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \frac{-29}{3}\\ \frac{-55}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -9.667\\ -18.333\end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–33 :

(a)

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\,(t)-\vec{A}\|^2 &= \|\vec{x}\,(t)-\vec{B}\|^2\\
(5+t\,4)^2+(7-t\,3)^2+(3+t\,5)^2 &= (-1+t\,4)^2+(5-t\,3)^2+(5+t\,5)^2\\
83+t\,2\cdot 14+t^2\,50 &= 51+t\,2\cdot 6+t^2\,50\\
t\,16 &= 51-83=-32\\
t &= -2
\end{aligned}$$

Utiliser $t=2$ en $\vec{x}(t)$ rend $\vec{C} = (-2\,,\,15\,,\,-2)$

(b) Trouver l'aire à l'aide du produit vectorielle.

$$(\vec{A}-\vec{C})\times(\vec{B}-\vec{C}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\text{aire} \quad = \frac{1}{2}\,\|(\vec{A}-\vec{C})\times(\vec{B}-\vec{C})\| \approx 6\sqrt{66} \approx 48.7$$

Solution pour problème 4–34 :

La droite g est parallèle au plan E, donc le vecteur de direction de la droite est aussi vecteur de direction du plan. Un deuxième vecteur de direction est donné par le vecteur de connection $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Alors on arrive au vecteur normal du plan

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point $\vec{P}$ fait partie du plan et alors

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 17$$

Une forme normale de l'équation du plan est

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 17 = 0$$

Pour la forme Hessienne il faut encore normaliser le vecteur $\vec{n}$.

$$\frac{3\,x + 9\,y + z - 17}{\sqrt{91}} = 0$$

Solution pour problème 4–35 : Un vecteur normal est donné par

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de location $\vec{r}$ dans le plan doit être un multiple du vecteur $\vec{n}$, parce qu'il est perpendiculaire au deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (graphique). Alors $\vec{r} = \lambda\,\vec{n}$. Utiliser cette condition dans l'équation du plan.

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = \lambda\vec{n}\cdot\vec{n} = \lambda\|\vec{n}\|^2 = \lambda\,9 = 27$$

On arrive à $\lambda = 3$ et $\vec{r} = (3, 6, 6)^T$.

Les deux vecteurs de direction $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaire à $\vec{n}$. Produire des tels vecteurs à l'aide du produit vectorielle.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\vec{b}_0 &= \vec{a} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Normalisez ces vecteurs.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{1}{\|\vec{a}_0\|}\,\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{b} &= \frac{1}{\|\vec{b}_0\|}\,\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors l'équation du plan est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'autres solutions sont possibles.

Solution pour problème 4–36 : Soit

$$\vec{a} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \vec{P}_4 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\text{Vol } = \frac{1}{6}\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$$

Alors le volume est 1, avec orientation négative du tétraèdre.

(b) Trouver les aires des quatre faces et puis additionner.

$$\begin{aligned}
\|\vec{a} \times \vec{b}\| &= 9 \\
\|\vec{a} \times \vec{c}\| &= \sqrt{5} \\
\|\vec{b} \times \vec{c}\| &= 2\sqrt{89} \\
\|(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\| &= 2\sqrt{35}
\end{aligned}$$

Addition et puis diviser par deux pour arriver à une aire de ≈ 20.9681 .

Solution pour problème 4–37 : $M(2,1),\ R=\sqrt{20}$;

Solution pour problème 4–38 : Cercle acvec le centre $M(-5/3,0)$ et le rayon $R=10/3$.

Solution pour problème 4–39 : a) $3x-4y+7=0$, b) $6x+8y+9=0$

Solution pour problème 4–40 :

(a) Der Radius R des Kreises ist gegeben als Abstand des Mittelpunktes von der Geraden. Um diesen zu bestimmen verwenden wir die Hesse'sche Normalenform und setzen dann die Koordinaten des Mittelpunktes ein.

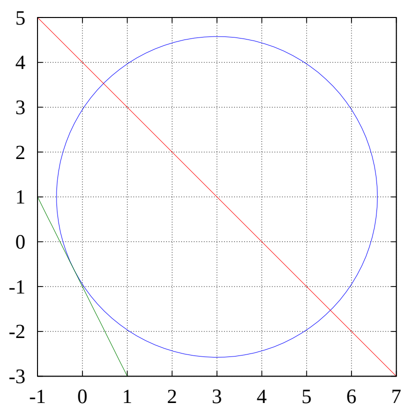
$$\begin{aligned} y+2\,x+1 &= 0\\ \frac{1}{\sqrt5}\,y+\frac{2}{\sqrt5}\,x+\frac{1}{\sqrt5} &= 0\\ \frac{1}{\sqrt5}\,1+\frac{2}{\sqrt5}\,3+\frac{1}{\sqrt5} &= \frac{8}{\sqrt5}=R\approx 3.58 \end{aligned}$$

Somit ist die Kreisgleichung

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &= R^2\\ (x-3)^2+(y-1)^2 &= \frac{64}{5} \end{aligned}$$

(b) Die Geradengleichun in der Form $y=4-x$ kann in der Kreisgleichung eingesetzt werden, dann kann man die quadratische Gleichung nach x auflösen.

$$\begin{aligned} (x-3)^2+(y-1)^2 &= \frac{64}{5}\\ (x-3)^2+(4-x-1)^2 &= \frac{64}{5}\\ (x-3)^2+(3-x)^2 &= \frac{64}{5}\\ (x-3)^2 &= \frac{32}{5}\\ x &= 3\pm\sqrt{\frac{32}{5}} \end{aligned}$$



Daraus können die y–Werte bestimmt werden durch $y=4-x=1\mp\sqrt{\frac{32}{5}}$ und wir finden die zwei Schnittpunkte

$$\begin{pmatrix}3+\sqrt{\frac{32}{5}}\\ 1-\sqrt{\frac{32}{5}}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}5.5298\\ -1.5298\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}3-\sqrt{\frac{32}{5}}\\ 1+\sqrt{\frac{32}{5}}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0.4702\\ 3.5298\end{pmatrix}$$

Die Rechnungen werden bestättigt durch die obenstehende Graphik.

Solution pour problème 4–41 :

(a)

$$\begin{aligned} (\vec x-\vec P) &\perp (\vec M-\vec P)\\ \begin{pmatrix}x-2\\ y-1\end{pmatrix} &\perp \begin{pmatrix}3-2\\ 4-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ x+3\,y-5 &= 0 \end{aligned}$$

(b) forme Hessienne $(1^2+3^2=10)$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\;(x+3\,y-5)=0$$

Utiliser $(x,y)=(-2,3)$ pour trouver la distance orintée.

$$\text{distance} \;=\; \frac{1}{\sqrt{10}}\;(-2+3\cdot 3-5)=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Solution pour problème 4–42 :

(a) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-4$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned} (x-4)^2+(y-2)^2 &= 9 \\ (x-4)^2+(2\,x-4-2)^2 &= 9 \\ (x^2-8\,x+16)+(4\,x^2-24\,x+36)-9 &= 0 \\ 5\,x^2-32\,x+43 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{32\pm\sqrt{32^2-20\cdot 43}}{10}=\frac{16\pm\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}1.91938\\ 4.48062\end{cases} \\ y_{1,2} &= 2\,x_{1,2}-4=\frac{12\pm 2\sqrt{41}}{5}\approx\begin{cases}-0.16125\\ 4.96125\end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $(x_1,y_1)\approx(1.91938\,,\,-0.16125)$ und $(x_2,y_2)\approx(4.48062\,,\,4.96125)$.

(b) Kreisgleichung ist $(x-4)^2+(y-2)^2=9$. Setz man die Geradengleichung $y=2\,x-\lambda$ ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für x.

$$\begin{aligned} (x-4)^2+(y-2)^2 &= 9 \\ (x-4)^2+(2\,x+\lambda-2)^2 &= 9 \\ (x^2-8\,x+16)+(4\,x^2+\lambda^2+4+4\,\lambda\,x-8\,x-4\,\lambda)-9 &= 0 \\ 5\,x^2+(4\,\lambda-16)\,x+\lambda^2-4\,\lambda+11 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gerade ist eine Tangente, falls die beiden Lösungen zusammenfallen. Somit muss die Diskriminate $(b^2-4\,a\,c)$ Null sein. Das ergibt eine quadratische Gleichung für den Parameter λ.

$$\begin{aligned} (4\,\lambda-16)^2-4\cdot 5\cdot(\lambda^2-4\,\lambda+11) &= 0 \\ 4\,\lambda^2+48\,\lambda-36 &= 0 \\ \lambda^2+12\,\lambda-9 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-12\pm\sqrt{144+36}}{2}=-6\pm\sqrt{45}\approx\begin{cases}-12.7082\\ +0.708204\end{cases} \end{aligned}$$

Solution pour problème 4–43 : a) $S_1(2,6,9),\ S_2(6,6,7)$ b) $S_1(7,2,3),\ S_2(14,-1,3)$

Solution pour problème 4–44 : $2x+y+2z-9=0$ et $2x-y+2z-9=0$

Solution pour problème 4–45 : $3x-5y-4z-19=0$

Solution pour problème 4–46 :

(a) Avec completion du carrée on transforme l'équation pour trouver les paramètre de la boule.

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 9 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 &= -9 + 2^2 + 3^2 = 4 \end{aligned}$$

Donce le centre est $\vec{M} = (2\,,\,-3\,,\,0)$ et la boule a un rayon de$R = \sqrt{4} = 2$.

(b) Dabord trouver la distance du centre de la boule du plan. Le vecteur normalisé du plan est

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Donc la forme Hessienne de l'équation du plan est

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,x + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y + \frac{2}{\sqrt{6}}\,z - \frac{17}{\sqrt{6}} = 0$$

Das distance orientée du centre $\vec{M}$ du plan est

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\,2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-3) + \frac{2}{\sqrt{6}}\,0 - \frac{17}{\sqrt{6}} = \frac{-18}{\sqrt{6}} = -3\,\sqrt{6}$$

Avec rayon $R = 2$ on arrive à la distance boule–plan $3\sqrt{6} - 2 \approx 5.34847$.

Solution pour problème 4–47 : La composante z du point de contacte est donnée par l'équation du plan: $1 - 6 + 2\,z - 1 = 0$, alors $z = 3$. Le vecteur de connection du point de contact au centre de la boule doit être un multiple du vecteur normal. Donner les coordonnées du centre à l'aide du vecteur $\vec{n} = (1\,,\,-2\,,\,2)^T$ normalisé. On obtient

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alors l'équation de la sphère est

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 6^2$$

Dans cette équation on utilise la peramétrisation de la droite pour arriver à

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 &= 6^2 \\ (t-3)^2 + (t+1)^2 + (6-2\,t-7)^2 &= 6^2 \\ (1+1+4)\,t^2 + (-6+2+4)\,t + 9 + 1 + 1 &= 36 \\ 6\,t^2 &= 25 \\ t &= \pm\frac{5}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Les deux point d'intersection sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \frac{5}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 4–48 : Die geographische Breite ist der Ergänzungswinkel auf 90° zum Winkel θ in Kugelkoordinaten.

(a) Mit leicht modifizierten Kugelkoordinaten ergibt sich für Zürich $\vec{Z}$ und Salt Lake City $\vec{S}$

$$\vec{Z} = R \begin{pmatrix} \cos 47^\circ \ \cos 8^\circ \\ \cos 47^\circ \ \sin 8^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4254.78 \\ 597.97 \\ 4607.53 \end{pmatrix} km$$

und

$$\vec{S} = R \begin{pmatrix} \cos 41^\circ \ \cos 112^\circ \\ -\cos 41^\circ \ \sin 112^\circ \\ \sin 47^\circ \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1781.13 \\ -4408.45 \\ 4133.17 \end{pmatrix} km$$

(b) der Abstand entlang einer Geraden ist gegeben durch

$$d_1 = \|\vec{Z} - \vec{S}\| \approx 7856.3 \text{ km}$$

(c) Um den Abstand entlang des Grosskreises zu bestimmen, muss zuerst der Winkel α zwischen den beiden Vektoren bekannt sein

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{Z}, \vec{S}\rangle}{\|\vec{Z}\| \ \|\vec{S}\|} \approx 0.222 \Longrightarrow \alpha \approx 1.346 \approx 77.15^\circ$$

Es gilt

$$d_2 = R\,\alpha \approx 8482.72 \text{ km}$$

Der Abstand entlang der Erdoberfläche ist grösser als entlang der Geraden.

(d) Ein Normalenvektor kann mit dem Vektorprodukt bestimt werden. Anschliessend kann der Vektor auch normalisiert werden.

$$\vec{n}_1 = \vec{S} \times \vec{Z} \approx \begin{pmatrix} -2.35126 \\ 2.66176 \\ 1.8258 \end{pmatrix} 10^7 \quad \text{oder} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -0.588792 \\ 0.666546 \\ 0.457209 \end{pmatrix}$$

(e) Untersuchen Sie die durch die z–Achse und den Normalenvektor $\vec{n}_2$ aufgespannte Ebene. Der Normalenvektor $\vec{n}_2$ schliesst mit der z–Achse den selben Winkel ein, der exakt die maximale geographische Breite angibt. Somit gilt

$$\text{maximale Breite } = \arccos 0.457 \approx 62.8^\circ$$

4.10 récapitulation

Après ce chapitre on doit

- maîtriser les opérations graphique avec des vecteurs.
- savoir calculer avec des vecteur d'une façon fiable et rapide: addition, multiplication avec scalaire, produit scalaire et produit vectorielle.
- savoir travailler avec des formes différentes des équations des droites.
- savoir travailler avec des formes différentes des équations des plans.
- maîtriser les traduction géométrie à algèbre pour droites, plans , cercles et boules.

Kapitel 5

Systeme von linearen Gleichungen

Als Arbeitsgrundlage für dieses Kapitel dient das erste Kapitel aus dem englischen Buch *Elementary Linear Algebra, Application Version* von Howard Anton und Chris Rorres ([AntoRorr91]). Diese Notizen sind zum grossen Teil diesem Buch entnommen.

5.1 Einführung zu Systemen von linearen Gleichungen

Die Gleichung einer Geraden in der xy–Ebene kann gegeben werden durch eine Gleichung

$$a_1\,x + a_2\,y = b$$

wobei die Werte von a_1, a_2 und b die Gerade bestimmen. Eine solche Gleichung heisst **lineare Gleichung** für die Variablen x und y. Analog ist eine **lineare Gleichung** für n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben durch

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + \ldots + a_n\,x_n = b$$

So kann eine Ebene im Raum beschrieben werden als lineare Gleichung für die Variablen x, y und z.

5–1 Beispiel : Das folgende sind lineare Gleichungen.

$$\begin{aligned} x + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3}\,x + 3\,z + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

♢

Zu beachten ist, dass in linearen Gleichungen keine Produkte, Brüche oder Potenzen (bezüglich der Variablen) vorkommen dürfen.

5–2 Beispiel : Das folgende sind **keine** linearen Gleichungen.

$$\begin{aligned} x^2 + 3\,y &= 7 \\ y &= \frac{1}{3\,x} + 3\,\sqrt{z} + 7 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_1\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

♢

5–3 Beispiel : Um alle Lösungen der linearen Gleichung

$$2\,x - 4\,y = \pi$$

für die Variablen x und y zu finden, kann man den Wert von x beliebig wählen. Wir setzen hier $x = t$. Dann kann der Wert von y aus der Gleichung bestimmt werden durch

$$y = \frac{1}{4}\;(2\,x - \pi) = \frac{1}{4}\;(2\,t - \pi)$$

Wir erhalten somit die **parametrisierten Lösungen** mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & \frac{2\,t-\pi}{4} \end{array} \qquad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

◇

Sind mehrere lineare Gleichungen miteinander zu untersuchen, so spricht man von einem **System von linearen Gleichungen**.

5–4 Beispiel : Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 & = & -1 \\ 3\,x_1 + x_2 + 9\,x_3 & = & -4 \end{array}$$

wird gelöst durch $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, da für diese Werte beide Gleichungen erfüllt sind.

Jedoch ist $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ keine Lösung, da nur die erste der beiden verlangten Gleichungen gelöst ist. ◇

5–5 Beispiel : Das System

$$\begin{array}{rcl} 2\,x - 3\,y & = & 1 \\ 3\,x + 2\,y & = & 8 \end{array}$$

von linearen Gleichungen wird gelöst durch $x = 2$ und $y = 1$. Die beiden Gleichungen entsprechen je einer Geraden in der Ebene. Der Punkt $(x, y) = (2, 1)$ entspricht somit dem Schnittpunkt der beiden Gleichungen. Dieser Ansatz erlaubt es zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten auch mittels eines graphischen Verfahrens zu lösen, indem zwei Geraden geschnitten werden. ◇

5–6 Beispiel : Das System

$$\begin{array}{rcl} 2\,x - 3\,y & = & 1 \\ 4\,x - 6\,y & = & 8 \end{array}$$

von linearen Gleichungen hat keine Lösung. Dies kann leicht eingesehen werden, falls man die erste Gleichung mit 2 multipliziert. Das führt auf das äquivalente System

$$\begin{array}{rcl} 4\,x - 6\,y & = & 2 \\ 4\,x - 6\,y & = & 8 \end{array}$$

Diese beiden Gleichung können nicht zusammen gelöst werden, dass sonst $2 = 8$ sein müsste. Die den Gleichungen entsprechenden Geraden sind parallel und haben keinen Schnittpunkt. ◇

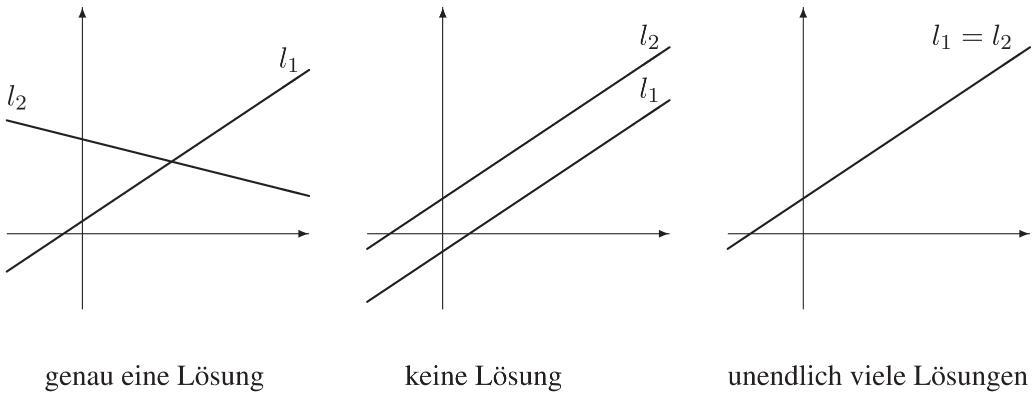


Abbildung 5.1: Lösungsverhalten von Systemen von Gleichungen

5–7 Definition : Ein System von linearen Gleichungen heisst **inkonsistent**, falls es keine Lösungen hat. Ein System von linearen Gleichungen, dass mindestens eine Lösung hat, heisst **konsistent**.

Sucht man den Schnittpunkt zweier Geraden in der Ebene, so sind drei verschiedene Verhalten möglich. Dies ist in Abbildung 5.1 illustriert.

1. Die Geraden sind nicht parallel und haben somit genau einen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **genau eine** Lösung. Das System ist konsistent.
2. Die Geraden sind parallel, liegen aber nicht aufeinender. Es gibt keinen Schnittpunkt. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **keine** Lösung. Das System ist inkonsistent.
3. Die Geraden sind parallel und sie liegen aufeinender. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das entsprechende System von linearen Gleichungen hat **unendlich viele** Lösungen. Das System ist konsistent.

Man wird nie ein System von linearen Gleichungen finden mit genau zwei Lösungen. Wir haben hier nur zwei Gleichungen für zwei Unbekannte untersucht, werden aber später sehen, dass dieses Resultat für beliebige Systeme von linearen Gleichungen richtig ist.

Ein System von linearen Gleichungen hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

5–8 Beispiel : Ebenen im Raum
Jede der drei Gleichungen des System

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

kann aufgefasst werden als eine Ebenengleichung im Raum $\mathbb{R}^3$. Ohne zu rechnen ist klar, dass folgenden Situationen auftreten können:

1. Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt. Es gibt genau eine Lösung. Das System ist konsistent.

2. Zwei der drei Ebenen sind parallel, aber sie sind nicht identisch. Es gibt somit keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.
3. Die Ebenen sind nicht parallel, aber je zwei dieser Ebenen bilden eine Schnittgeraden und diese sind parallel (Toblerone). Es gibt keine Lösung. Das System ist inkonsistent.
4. Zwei der Ebenen sind identisch, die dritte ist nicht parallel zu den ersten beiden. Es ergibt sich eine Schnittgerade, d.h. unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.
5. Die drei Ebenen sind identisch und die Lösungsmenge ist diese Schnittebene. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Das System ist konsistent.

$\diamondsuit$

5.2 Matrix–Darstellung und der Algorithmus von Gauss

5.2.1 Matrix–Darstellung eines linearen Gleichungssystems

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,x & +1\,y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

sind eigentlich nur die Zahlen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

relevant. Man spricht von der **Darstellung des Gleichungssystems durch eine erweiterte Matrix**. Die erste Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Variablen (hier x genannt). Die zweite Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Variablen (hier y genannt). Die dritte Spalte der Matrix enthält die Koeffizienten der dritten Variablen (hier z genannt). Einzig die letzte Spalte spielt eine besondere Rolle: sie enthält die Konstanten der Gleichungen. Die erste Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der ersten Gleichung, die zweite Zeile der Matrix enthält die Koeffizienten der zweiten Gleichung, u.s.w.

Nun werden wir solche Systeme von Gleichungen systematisch lösen. Dazu werden wir diese Systeme in äquivalente Systeme umformen. Dabei ist das Ziel ein elementar lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Wir verwenden die folgenden Grundoperationen:

- Eine Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren.
- Zwei Gleichungen austauschen.

Diese drei Grundoperationen verändern die Lösungsmenge des Systems nicht, sind also **Äquivalenztransformationen**. Um Schreibarbeit zu sparen werden wir die Operationen meist mit Hilfe der Matrix–Notation ausführen. Es ergeben sich die folgenden Zeilenoperationen:

- Eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren oder dividieren.
- Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren.
- Zwei Zeilen austauschen.

Nun wollen wir das Verfahren an einem Beispiel sorgfältig demonstrieren.

5–9 Beispiel : Als einführendes, typisches Beispiel untersuchen wir ein lineares System von 3 Gleichungen für drei Unbekannte (x, y und z). Statt planlos zu rechnen erstellen wir zuerst einen Plan:

1. Mit Hilfe der ersten Gleichung x aus der zweiten und dritten Gleichung eliminieren.
2. Mit Hilfe der (neuen) zweiten Gleichung y aus der dritten Gleichung eliminieren.
3. Die (neue) dritte Gleichung kann nun leicht nach z aufgelöst werden.
4. Der nun bekannte Wert von z und die zweite Gleichung ergeben y.
5. Die nun bekannten Werte von z und y und die erste Gleichung ergeben schliesslich den Wert von x.

Die obigen Rechnungen sind mit Hilfe von Äquivalenztransformationen auszuführen, da die Lösungsmenge nicht ändern darf. Nun untersuchen wir auch noch den Effekt dieser Operationen auf die entsprechende Darstellung des Systems durch eine erweiterte Matrix.

In der linken Spalte finden Sie Gleichungssysteme und die Beschreibung der Operationen. In der rechten Spalte werden die selben Operationen mit Hilfe der erweiterten Matrix ausgeführt.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 2-fache der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung subtrahieren

Das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das 3-fache der ersten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren

Das 3-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & 2\,y & -7\,z & = & -17 \\ & 3\,y & -11\,z & = & -27 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, dann dann das 3-fache der zweiten Gleichung von der dritten Gleichung subtrahieren

Die zweite Zeile mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren dann das 3-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & \frac{-1}{2}\,z & = & \frac{-3}{2} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung mit -2 multiplizieren

Die dritte Zeile mit -2 multiplizieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & \frac{-17}{2} \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Gleichung zur zweiten Gleichung addieren

Das 2-fache der dritten Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren

Das $\frac{7}{2}$-fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile addieren

Das 2-fache der dritten Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die zweite Gleichung von der ersten Gleichung subtrahieren

Die zweite Zeile von der ersten Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Die einzige Lösung

$$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3$$

ist nun leicht ablesbar. $\diamondsuit$

5.2.2 Treppengestalt, Verfahren von Gauss

Die Rechenschritte im vorangehenden Beispiel wurden natürlich nicht zufällig gewählt. Der bekannte Algorithmus von **Gauss–Jordan** wurde ausgeführt. Damit können die Lösungen von beliebigen linearen Gleichungssystemen untersucht werden. Wir werden nun dieses Verfahren etwas genauer unter die Lupe nehmen.

5–10 Definition : Eine Matrix ist in **Treppenform** falls:

- die erste von Null verschiedenen Zahl in jeder Zeile ist eine 1.
- Zeilen die ausschliesslich die Zahl 0 enthalten sind unten zu finden.
- je weiter unten die Zeile, desto weiter rechts die führende 1.
- unter einer „führenden 1“ stehen nur Zahlen 0 .

Eine Matrix ist in **reduzierter Treppenform** falls:

- die Matrix in Treppenform ist
- in jeder Spalte mit einer führenden 1 sind alle anderen Zahlen 0.

Ist die Matrix in reduzierter Treppenform, so stehen unter und über führenden Zahlen 1 nur Nullen.

5–11 Beispiel : Die folgenden Matrizen sind in Treppenform, aber nicht in reduzierter Treppenform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um diese Matrizen in reduzierte Treppenform zu bringen, müssen sie noch leicht modifiziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

♢

5–12 Bemerkung : Nun kann man in den Rechnungen in Beispiel 5–9 erkennen, dass die Matrix zuerst in Treppenform und anschliessend in reduzierte Treppenform transformiert wird. Bei all diesen Transformationen wird die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert (Äquivalenztransformationen).

Die folgenden Punkte in Beispiel 5–9 sind zu beachten:

1. Ist die Matrix in Treppenform, so kann das zugehörige System von Gleichungen „von unten nach oben“ aufgelöst werden.
2. Die vollständig reduzierte Matrix enthält nur die Zahlen 0, ausser in der Diagonalen, dort findet man die Zahlen 1 . Es ist die **Einheitsmatrix**.
3. Ist die Matrix vollständig reduziert, so ist das zugehörige System von Gleichungen bereits aufgelöst.

♢

Nun wollen wir einige Beispiel von Gleichungssystemen untersuchen.

5–13 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2\,y & +3\,z & = & 9 \\ & y & +9\,z & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Aus der letzten Zeile liest man ab, dass $z = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung sofort $y = 1$. Die erste Zeile ergibt anschliessend $x = 9 - 2\,y - 3\,z = 7$. Somit ist das System gelöst. Transformiert man das ursprüngliche System auf eine Matrix in reduzierter Treppenform, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 7 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist elementar ablesbar. ♢

5–14 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ & & z & +\pi\,u & = & 0 \\ & & & u & = & -3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Aufgrund der letzten Zeile gilt $u = -3$ und die zweite Gleichung ergibt $z = 0 - \pi\,u = 3\,\pi$. Die erste Gleichung kann nach x aufgelöst werden mit dem Resultat

$$x = 10 - 2\,y - 3\,z - 4\,u = 10 - 2\,y - 9\,\pi + 12$$

Er darf nicht erstaunen, dass drei Gleichungen für vier Unbekannt nicht eindeutig gelöst werden können. Wählt man $y = t$ als Parameter, so können alle Lösungen geschrieben werden in der Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 - 9\,\pi \\ 0 \\ 3\,\pi \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein identisches Lösungsverhalten kann auch bei vier Gleichungen für vier Unbekannte entstehen. Falls Sie nach der Reduktion auf Treppenform die Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vorfinden, so erhalten sie dieselben Lösungen. ♢

5–15 Beispiel : Das folgende Gleichungssystem führt zu einer Matrix in Treppengestalt.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +2\,y & +3\,z & +4\,u & = & 10 \\ 0\,x & +0\,y & +z & +\pi\,u & = & 0 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +u & = & -3 \\ 0\,x & +0\,y & +0\,z & +0\,u & = & 13 \end{array} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

Die vierte Gleichung ist nicht lösbar. Das System von vier Gleichungen für vier Unbekannte hat somit keine Lösungen. ♢

5.3 Lösen von linearen Gleichungssystemen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Form der Lösungen eines linearen Gleichungssystems leicht aus der auf Treppengestalt reduzierten erweiterten Matrix abgelesen werden kann. Es geht nicht darum viele, grosse Systeme mühsam von Hand aufzulösen. Später werden Sie Computer und Taschenrechner einsetzen, um solche Systeme effizient zu lösen. Sie sollten Sich auf die Struktur der zu verwendenden Algorithmen und die Interpretation der Resultate konzentrieren.

5.3.1 Gauss'sche Elimination

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass für eine Matrix in Treppengestalt die Lösungen des zugehörigen linearen Gleichungssystems leicht beschrieben werden können. Deshalb versuchen wir nun jede Matrix in Treppengestalt zu bringen, mit Hilfe von Äquivalenztransformationen. Dies wollen wir systematisch ausführen.

5–16 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Das führt auf eine erweiterte Matrixdarstellung.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -10 & 12 & 28 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & 12 & 28 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl ($\frac{1}{2}$), damit die erste Zahl 1 wird.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu gestartet werden mit der kleineren Matrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & +5 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & -5\,y & +6\,z & = & 14 \\ & y & -\frac{7}{2}\,z & = & -6 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

Diese System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{cccccccc} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

◇

5–17 Beispiel : Die Zeilenoperationen des oben ausgeführten Algorithmus von Gauss können auch in *Octave* oder `MATLAB` implementiert werden. Dazu sind zwei Befehle zu definieren:

- `SwapRows` um zwei Zeilen zu vertauschen.

SwapRows.m

```
function An=SwapRows(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:)=A(j,:);
  An(j,:)=A(i,:);
endfunction
```

- `Pivot` um eine Zahl zu 1 zu machen und die darunterstehenden Zahlen zu eliminieren.

Pivot.m

```
function An=Pivot(A,i,j)
  An=A;
  An(i,:) = An(i,:)/A(i,j);
  for k=i+1:size(A)(1)
      An(k,:) = An(k,:)-A(k,j)*An(i,:);
  endfor
endfunction
```

Der obenstehende Code ist nicht effizient implementiert und darf nur für Illustrationen und Verifikation von Aufgaben verwendet werden. Es gibt effiziente Implementierungen.

Nun kann das vorangehende Beispiel durchgerechnet werden.

Octave

```
### script file to test Gauss algorithm
A=[0 -2 7 12; 2 -10 12 28; 2 -5 -5 -1]
A=SwapRows(A,1,2)
A=Pivot(A,1,1)
A=Pivot(A,2,2)
A=Pivot(A,3,3)
```

◇

5–18 Theorem : *Gauss'sche Elimination*
Um die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems in Treppengestalt zu bringen kann systematisch vorgegangen werden.

1. *Finde die am weitesten links liegende Spalte, die nicht ausschliesslich die Zahl 0 enthält.*
2. *Die erste Zeile ist eventuell mit einer anderen Zeile zu vertauschen, damit die erste Zahl nicht 0 ist.*
3. *Multipliziere die erste Zeile mit einer geeigneten Zahl, damit die erste Zahl 1 wird.*
4. *Geeignete Vielfache der ersten Zeile sind von den anderen zu subtrahieren, damit alle Zahlen unterhalb der 1 zu 0 werden.*
5. *Nun kann die erste Zeile abgedeckt werden und das Verfahren neu (Schritt 2) gestartet werden mit der kleineren Matrix.*

Aufgabe 5–5 auf Seite 177 ist eine geeignete, einfache Übungsaufgabe.

5.3.2 Homogene Systeme

5–19 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben, so heisst

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & +a_{mn}\,x_n & = & 0
\end{array}$$

ein **homogenes System von linearen Gleichungen**. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten x_1, x_2, $\ldots$, x_n .

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & 0
\end{array}\right]$$

Da durch Zeilenoperationen die Null–Spalte rechts immer erhalten bleibt, ist es nicht unbedingt notwendig diese Spalte mitzuschreiben.

> Ein homogenes System von linearen Gleichungen kann immer gelöst werden, indem alle Variablen 0 gewählt werden.

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n} & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & 0 \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ ist die einzige Lösung.

Es kann aber auch vorkommen, dass die letzte Zeile der erweiterten Matrix nur 0 enthält. Dann ist die letzte Variable frei wählbar, die anderen können daraus berechnet werden. Als Beispiel untersuchen wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

In entsprechenden Gleichungssystem für die Variablen x_1, x_2 und x_3 ist der Wert von $x_3 = t$ frei wählbar. Die Werte der anderen Variablen können dann bestimmt werden.

$$\begin{array}{rclcc} x_3 & = & t & = & t \\ x_2 & = & -e\,x_3 & = & -t\,e \\ x_1 & = & -5\,x_3 + 3\,x_2 & = & t\,(-5 - 3\,e) \end{array}$$

Alle Lösungen des entsprechenden Gleichungssystems sind somit parametrisiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 - 3\,e \\ -e \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Gibt es in der Treppenmatrix mehrere Zeilen von Nullen, so können auch mehrere Variablen frei gewählt werden. Es wird wiederum unendlich viele Lösungen geben, die als Funktion von mehreren Parametern geschrieben werden können. Um dies einzusehen kann folgendermassen vorgegangen werden:

1. Entferne die nur aus Nullen bestehenden Zeilen der reduzierten Matrix, sie beinhalten keinerlei Information über die Lösungen.

2. Alle Spalten des Gleichungssystems die **keine** führende 1 enthalten, sind auf die rechte Seite des Gleichungssystems zu schreiben. Sie werden zu Parametern der Lösungen.

3. Für gegebene Werte der Parameter kann nun nach den links gebliebenen Unbekannten aufgelöst werden.

Diese Schema können wir auf das vorangehende Beispiel anwenden. Die erweiterte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -3\,x_2 & +5\,x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +e\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Spalte der x_3 enthält keine führende 1, deshalb werden diese Terme nach rechts gebracht und $x_3 = t$ als Parameter gewählt.

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & -3\,x_2 & = & -5\,x_3 & = & -5\,t \\ & x_2 & = & -e\,x_3 & = & -e\,t \end{array}$$

Dieses System kann von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{array}{rrcc} x_1 & -3\,x_2 & = & (-5 - 3\,e)\,t \\ & x_2 & = & -e\,t \end{array}$$

Das führt auf die oben angeschriebenen Lösungen.

Die beiden Aufgaben 5–10 und 5–11 illustrieren dieses Verhalten.

Verschiedene Anzahl von Gleichungen und Unbekannten

Diese Situation unterscheidet sich nicht wesentlich von der obigen. Zusammenfassend kann für homogene Systeme von linearen Gleichungen festgehalten werden:

- Jedes homogene, lineare Gleichungssystem hat die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

- Steht in jeder Spalte der auf Treppenform reduzierten Matrix eine „führende 1“, so hat das System nur die triviale Lösung.

- Für jede Spalte ohne „führende 1" kann ein Parameter eingeführt werden und die unendlich vielen Lösungen damit konstruiert werden.

Die wesentliche Schwierigkeit ist es also, die Matrix auf Treppengestalt zu bringen.

5–20 Theorem : *Ein homogenes, lineares Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung ($\vec{x} = \vec{0}$). Entstehen bei der Reduktion auf Treppengestalt der erweiterten Matrix Spalten ohne „führende 1", so hat das System unendlich viele Lösungen. Diese können mit Hilfe der reduzierten Matrix berechnet werden.*

Als Konsequenz ergibt sich sofort, dass ein homogenes System mit mehr Unbekannten als Gleichungen unendlich viele Lösungen hat.

5.3.3 Inhomogene Systeme

5–21 Definition : Sind die Zahlen $a_{i,j}$ und b_i für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gegeben, so heisst

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & + a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + & \ldots & + a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + & \ldots & + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

ein **inhomogenes System von linearen Gleichungen**. Es muss mindestens eine der Zahlen b_i von Null verschieden sein. Es sind m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die zu diesem System gehörende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gleich viele Gleichungen und Unbekannte

Stimmen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten überein ($n = m$), so wird die auf Treppengestalt gebrachte Matrix meistens die folgende Form haben:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \end{array}\right]$$

d.h.

- O unterhalb der Diagonalen
- 1 entlang der Diagonalen
- beliebige Zahlen oberhalb der Diagonalen. Diese Zahlen werden üblicherweise nicht mit den ursprünglich dort stehenden Zahlen übereinstimmen.

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + & \ldots & +a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ x_2 + a_{23}\,x_3 + & \ldots & +a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ x_3 + & \ldots & +a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & = & b_n \end{array}$$

ist leicht von unten nach oben lösbar. Es gibt genau eine Lösung

5–22 Beispiel : Das Beispiel 5–16 auf Seite 164 ist

$$\begin{array}{rrrcr} & -2\,y & +7\,z & = & 12 \\ 2\,x & -10\,y & +12\,z & = & 28 \\ 2\,x & -5\,y & -5\,z & = & -1 \end{array}$$

Die entsprechende, auf Treppengestalt reduzierte Matrix ist (nach längerer Rechnung)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$\begin{array}{rcrrrcr} z & = & 2 & & & = & 2 \\ y & = & -6 & +\frac{7}{2}\,z & & = & 1 \\ x & = & 14 & -6\,z & +5\,y & = & 7 \end{array}$$

und führt auf die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

♢

5–23 Beispiel : Die zu untersuchende Situation ist in Abbildung 5.2 aufgezeigt. Die beiden Spannungen U_1 und U_2 sind gegeben, ebenso die drei Widerstände R_i. Zu bestimmen sind die drei Ströme I_i. Dieses Beispiel stammt aus dem Buch [LandHest92].

Lösung: Die Kirchhoff'sche Stromregel, angewandt auf den Knoten A ergibt

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

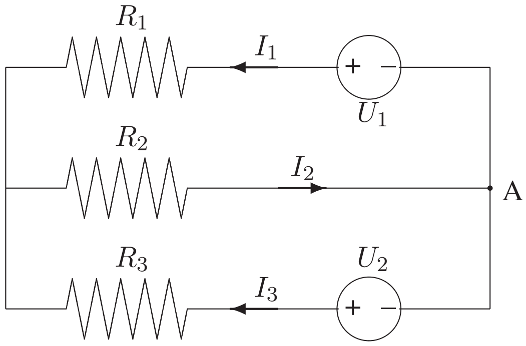


Abbildung 5.2: Ein einfaches elektrisches Netz

Die Spannungsregel, angewandt auf die obere und untere Stromschlaufe, ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} R_1\,I_1 + R_2\,I_2 &= U_1 \\ R_3\,I_3 + R_2\,I_2 &= U_2 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir drei lineare Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{ccccc} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 \\ R_1\,I_1 & +R_2\,I_2 & & = & U_1 \\ & R_2\,I_2 & +R_3\,I_3 & = & U_2 \end{array}$$

Für das Zahlenbeispiel $U_1 = 5\,V$, $U_2 = 18\,V$, $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$ und $R_3 = 12\,\Omega$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} I_1 & -I_2 & +I_3 & = & 0 \\ 8\,I_1 & +6\,I_2 & & = & 5 \\ & 6\,I_2 & +12\,I_3 & = & 18 \end{array}$$

Die erweiterte Matrix ist somit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right]$$

Nun bringen wir diese Matrix zuerst auf Treppengestalt, dann auf reduzierte Treppengestalt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 14 & -8 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -36 & -37 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{36} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{34}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{36} \end{array}\right]$$

Nun ist die eindeutig bestimmte Lösung $I_1 = \frac{-3}{36}\,A$, $I_2 = \frac{34}{36}\,A$ und $I_3 = \frac{37}{36}\,A$ leicht ablesbar. $\diamondsuit$

5–24 Beispiel : Ein Kreis mit Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2 &= 0 \\ x^2-2\,x\,x_0+y^2-2\,y\,y_0+M &= 0 \quad \text{wobei} \quad M=x_0^2+y_0^2-R^2 \end{aligned}$$

Sind nun drei Punkte (x, y) auf dem Kreis gegeben, so kann ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_0, y_0 und M aufgestellt werden. Geht der Kreis durch die Punkte $(0, 2)$, $(6, 2)$ und $(6, 4)$. Aus der Gleichung

$$x^2-2\,x\,x_0+y^2-2\,y\,y_0+M=0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 0^2-2\cdot 0\,x_0+2^2-2\cdot 2\,y_0+M &= 0 \\ 6^2-2\cdot 6\,x_0+2^2-2\cdot 2\,y_0+M &= 0 \\ 6^2-2\cdot 6\,x_0+4^2-2\cdot 4\,y_0+M &= 0 \end{aligned}$$

oder etwas systematischer

$$\begin{array}{cccccc} M & & -4\,y_0 & = & -4 \\ M & -12\,x_0 & -4\,y_0 & = & -40 \\ M & -12\,x_0 & -8\,y_0 & = & -52 \end{array}$$

mit der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right]$$

Hierbei wurde die Variable M absichtlich nach vorne geschoben, da eine Spalte von Zahlen 1 sehr günstig ist für das Verfahren von Gauss. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -12 & -4 & -40 \\ 1 & -12 & -8 & -52 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & -12 & -4 & -48 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -12 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Somit haben wir $M = 8$, $x_0 = 3$ und $y_0 = 3$. Es ist

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - M = 9 + 9 - 8 = 10$$

Der Kreis mit Radius $R = \sqrt{10}$ hat den Mittelpunkt bei $(3, 3)$. Eine einfache Skizze wird Sie problemlos davon überzeugen, dass die Zahlen richtig sind. $\diamondsuit$

5–25 Beispiel : Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so gibt es keinen Kreis durch diese drei Punkte. Das entsprechende lineare Gleichungssystem wird also keine Lösung haben. Als Beispiel kann ein Kreis gesucht werden durch die drei Punkte $(1, 3)$, $(-1, -3)$ und $(2, 6)$. Analog zum vorangehenden Beispiel erhalten wir ein Gleichungssystem für die Unbekannten M, x_0 und y_0.

$$\begin{aligned} M+1^2-2\cdot 1\,x_0+3^2-2\cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M+1^2+2\cdot 1\,x_0+3^2+2\cdot 3\,y_0 &= 0 \\ M+2^2-2\cdot 2\,x_0+6^2-2\cdot 6\,y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix ist.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right]$$

Die Reduktion auf Treppengestalt ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & 2 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & -12 & -40 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -30 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right]$$

Die dritte Gleichung des reduzierten Systems lautet somit

$$0\,M + 0\,x_0 + 0\,y_0 = 30$$

und es ist offensichtlich das diese Gleichung nicht gelöst werden kann. Das ursprüngliche System hat somit **keine Lösung**. ♢

5–26 Beispiel : Hat die durch das Verfahren von Gauss reduzierte Matrix die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

so steckt in der letzten Zeile keinerlei Information über die Gleichung. Das entsprechende System lautet

$$\begin{array}{cccccc} x & -2\,y & -6\,z & = & -10 \\ & y & -3\,z & = & 7 \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{cccccc} x & -2\,y & = & -10 & +6\,z \\ & y & = & 7 & +3\,z \end{array}$$

Es ist offensichtlich, dass $z = t$ ein freier Parameter ist. Es gibt somit unendlich viele Lösungen. Durch auflösen von oben nach unten erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= +2\,y - 10 + 6\,t = 2\,(7 + 3\,t) - 10 + 6\,t = 4 + 12\,t \\ y &= 7 + 3\,t \\ z &= t \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Geometrisch kann diese Situation entstehen, falls sich drei Ebenen im Raum in einer Geraden schneiden.

Das entsprechende homogene System von Gleichungen führt auf die reduzierte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des inhomogenen Systems kann also geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** $(4\,,\,7\,,\,0)^T$ und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Diese Struktur ist nicht zufällig, sondern gilt für beliebige Systeme vom linearen Gleichungen. ♢

Die vorangehenden Beispiele führen auf das folgende Resultat.

5–27 Theorem : *Ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte hat normalerweise genau eine Lösung. Es gibt Spezialfälle ohne Lösungen, oder mit unendlich vielen Lösungen. Die auf Treppengestalt reduzierte Matrix gibt Auskunft über das Verhalten.*

1. *Befinden sich auf der Diagonalen der reduzierten Matrix nur Zahlen 1, so hat das System genau eine Lösung.*

2. *Ist die Diagonale nicht mit Zahlen 1 belegt, so gibt es eine (oder mehrere) Zeilen nur mit Nullen im linken Teil. Diese Zeilen sind zu untersuchen.*

   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ eine von Null verschiedene Zahl, so hat das System keine Lösung.*
   - *Finden Sie rechts in einer „Nullzeile“ auch die Zahl Null, so hat das System unendlich viele Lösungen.*
   - *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems kann geschrieben werden als Summe einer **partikulären Lösung** und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems.*

In allen obigen Fällen können die Lösungen durch auflösen „von unten nach oben“ bestimmt werden.

Unter- und über–bestimmte Gleichungssysteme

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Unbekannte als Gleichungen, so ist nicht zu erwarten, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Da die entstehende Matrix breiter ist als hoch, wird es Spalten geben ohne „führende 1“. Somit wird das System unendlich viele, oder keine Lösungen haben.

5–28 Beispiel : Ein System von drei Gleichungen für vier Unbekannte kann also unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier zwei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

  Die Lösungen erhält man durch auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2\,x_2 & +4\,x_4 & = & \pi & -3\,x_3 \\ & x_2 & +0\,x_4 & = & 10 & +7\,x_3 \\ & & x_4 & = & -8 & \end{array}$$

  Hierbei kann der Parameter $x_3 = t \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Die der dritten Zeile entsprechende Gleichung lautet

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 = -8$$

und kann somit sicher nicht gelöst werden. Es gibt keine x_i, sodass die Gleichung erfüllt ist.

$\diamondsuit$

Hat ein inhomogenes Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte, so wird es typischerweise keine Lösung geben. Es gibt aber Spezialfälle mit einer, oder sogar unendlich vielen Lösungen.

5–29 Beispiel : Ein System von vier Gleichungen für drei Unbekannte kann unendlich viele oder keine Lösung haben. Hier drei Beispiele, wobei die Reduktion auf Treppengestalt bereits durchgeführt wurde.

- keine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

- genau eine Lösung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- unendlich viele Lösungen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\diamondsuit$

Das Verhalten der Lösungen von unter- und überbestimmten Gleichungssystemen kann somit auch durch das Theorem 5–27 beschrieben werden.

5–30 Bemerkung :

- Es gibt mehrere systematische Verfahren (Algorithmen) um Systeme von linearen Gleichungen zu untersuchen. Bisher haben wir nur den Algorithmus von Gauss (oder Gauss–Jordan) vorgestellt. Es ist bei weitem der wichtigste Algorithmus. Er führt direkt auf die im nächsten Kapitel vorgestellte **LU–Zerlegung** einer Matrix.
- Für grosse Systeme von Gleichungen ist es wesentlich eine geeignete **Pivot–Strategie** zu wählen, damit die Resultate auch zuverlässig sind. Im hier gegebenen Rahmen müssen wir das Problem der numerischen Stabilität ignorieren.
- Für spezielle Matrizen (symmetrische, schwach besetzt, Bandstruktur, u.s.w.) gibt es spezielle, effizientere Verfahren.

$\diamondsuit$

5.4 Aufgaben

• Aufgabe 5–1:
Bestimmen Sie graphisch die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

• Aufgabe 5–2:
Untersuchen Sie das Gleichungssystem mit geometrischen Methoden.

$$\begin{array}{rcl} x &+& 2\,y = 2 \\ -2\,x &+& a\,y = b \end{array}$$

(a) Für welchen Wert von a hat das System genau eine Lösung?

(b) Für welche Werte von a und b hat das System keine Lösung?

(c) Für welche Werte von a und b hat das System unendlich viele Lösungen?

• Aufgabe 5–3:
Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 &+& i\,z_2 &+& 2\,z_3 &=& c_2 \\ 2\,i\,z_1 &+& z_2 &+& c_1\,z_3 &=& 0 \\ 4\,i\,z_1 &+& 5\,z_2 &+& z_3 &=& i \end{array}$$

• Aufgabe 5–4:
Von einer Parabel der Form

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

ist bekannt, dass sie durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) geht. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die drei Unbekannten a, b und c. Verifizieren Sie, dass die erweiterte Matrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

• Aufgabe 5–5:
Stellen Sie das folgende Gleichungssystem durch einer erweiterte Matrix dar.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2\,z & = & 9 \\ 2\,x & +4\,y & -3\,z & = & 1 \\ 3\,x & +6\,y & -5\,z & = & 0 \end{array}$$

Anschliessend ist die Matrix auf Treppengestalt zu bringen und die Lösung des Gleichungssystems zu finden.

• Aufgabe 5–6:
Zeigen Sie, dass die reduzierte Treppenform einer Matrix

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]$$

gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

falls $a\,d - c\,d \neq 0$.

• Aufgabe 5–7:
Bringen Sie die Matrix auf Treppengestalt

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

ohne Brüche zu verwenden.

• Aufgabe 5–8:
Die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Finden Sie ein solches System von **drei** Gleichungen.

• Aufgabe 5–9:
Eine Ebene E geht durch die drei Punkte $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$ und $(0, 3, 0)$. Stellen Sie das Gleichungssystem auf für die Parameter a, b und c in der Ebenengleichung

$$z = a\,x + b\,y + c$$

(a) Finden Sie das Gleichungssystem.

(b) Schreiben Sie das System mit Hilfe einer erweiterten Matrix.

(c) Reduzieren Sie die Matrix auf Treppengestalt und finden Sie die Lösung.

• **Aufgabe 5–10:**
Wie ist im Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +a\,x_3 & = & 0 \\ & 2\,x_2 & +4\,x_3 & = & 0 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & +10\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

der Parameter a zu wählen, damit das System mehrere Lösungen hat? Bestimmen Sie anschliessend alle Lösungen.

• **Aufgabe 5–11:**
Die erweiterte Matrix des folgenden Gleichungssystem ist bereits in Treppenform.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & +0\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(a) Finden Sie ein System von 4 linearen Gleichungen, dass zum obigen System äquivalent ist, aber keine Zeile von Nullen enthält.

(b) Setzen Sie $x_2 = t$ und $x_4 = s$ und geben Sie alle Lösungen dieses Systems von Gleichungen an in der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 5–12:**

Im folgenden Gleichungssystem sind die Werte der Konstanten a und b, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

(a) Bestimmen Sie die Werte von a und b.

(b) Geben Sie alle Lösungen des Systems an.

Pour le système des équations ci–dessous les constantes a et b sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Déterminer les valeurs de a et b.

(b) Trouver toutes les solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 6\,y & + & a\,z & = & b \\ 2\,x & + & 7\,y & + & 6\,z & = & 1 \\ 2\,x & + & 8\,y & + & 7\,z & = & 0 \end{array}$$

• **Aufgabe 5–13:**

L'équation d'un cercle est

Eine Kreisgleichung hat die Form

$$a\,(x^2 + y^2) + b\,x + c\,y + d = 0$$

Ce cercle passe par les points

Dieser Kreis geht durch die Punkte

$$P_1 = (5/3) \quad , \quad P_2 = (-2/2) \quad \text{et/und} \quad P_3 = (-1/3)$$

(a) Trouver un système d'équations pour les coefficients a, b, c et d.

(b) Écrire ce système sous la forme d'une matrice augmentée.

(c) Transformer cette matrice sous la forme d'une échelle. Tous les nombres doivent être des nombres entiers.

(d) Donner une formule explicite pour calculer **toutes** les solutions de ce système; pas besoin de calculer les solutions.

(a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die Koeffizienten a, b, c und d.

(b) Schreiben Sie dieses Gleichungssytem in der Form einer erweiterten Matrix.

(c) Bringen Sie die Matrix in Treppengestalt. Hierbei sollen alle Zahlen ganz sein.

(d) Geben Sie eine Formel um **alle** Lösungen des Gleichungssystems auszurechnen. Es ist nicht notwendig die Lösungen auszurechnen.

• Aufgabe 5–14:

Lösen Sie das komplexe Gleichungssystem mit dem Algorithmus von Gauss. Die Zwischenresultate müssen angegeben werden.

Résoudre le système d'équations linéaires complexes à l'aide de l'algorithme de Gauss. Donner les résultats intermédiaires.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & i \\ 2+i & 1+4i & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i \\ 5+i \\ 3+9i \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 5–15:

Im folgenden komplexen Gleichungssystem sind die Werte der komplexen Konstanten c_1 und c_2, so dass dieses System unendlich viele Lösungen hat.

Pour le système des équations complexes ci–dessous les constantes complexe c_1 et c_2 sont tel que le système a infiniment de solutions.

(a) Bestimmen Sie die Werte von c_1 und c_2.

(b) Geben Sie **eine** Lösung des Systems an.

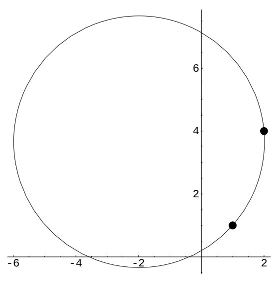
(a) Déterminer les valeurs de c_1 et c_2.

(b) Trouver **une** solution du système.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & 0 \\ -2\,i\,z_1 & + & z_2 & + & c_1\,z_3 & = & c_2 \\ -4\,i\,z_1 & + & 2\,z_2 & + & z_3 & = & i \end{array}$$

• Aufgabe 5–16:

Ein Kreis mit Radius $R = 4$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wird gestützt in den zwei Punkten $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Finden Sie die y–Koordinate des höchsten Punktes des Kreises.
Un cercle avec rayon $R = 4$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est supporté par les deux points $P_1 = (1/1)$ und $P_2 = (2/4)$. Trouver la coordonnée y du point le plus haut du cercle.



• Aufgabe 5–17:

Eine Kugel mit Radius $R = 3$ im Raum $\mathbb{R}^3$ wird gestützt in den drei Punkten

$$P_1 = (0/0/0) \quad , \quad P_2 = (2/1/0) \quad \text{und} \quad P_3 = (0/2/1)$$

Zu bestimmen ist der Mittelpunkt der Kugel.

• Aufgabe 5–18:
Für welche Werte von λ hat das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

$$\begin{array}{ccc} (3-\lambda)\,x & +3\,y & = & 0 \\ x & +(2-\lambda)\,y & = & 0 \end{array}$$

5.4.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 5–1 : Es sind zwei Geraden mit Steigungen ± 1 zu zeichnen. der Schnittpunkt ist bei $(x,y)=(3,1)$.

Lösung zu Aufgabe 5–2 :

(a) Die Geraden sind parallel falls $a=-4$. Für $a\neq -4$ gibt es somit genau einen Schnittpunkt.

(b) Für $a=-4$ erhalten wir das System

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2\,y = 2 \\ -2\,x & - & 4\,y = b \end{array}$$

Die beiden Geraden liegen übereinander falls auch $b=-4$. Somit gibt es keine Lösungen bei $a=-4$ und $b\neq -4$.

(c) Es gibt unendlich viele Lösungen bei $a=-4$ und $b=-4$.

Lösung zu Aufgabe 5–3 : Verwende erweiterte Matrizen und Reduktion auf Treppengestalt. Verwendet man die Zahl 1 in der ersten Zeile und Spalte um die erste Spalte zu reduzieren, so erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 2\,i & 1 & c_1 & 0 \\ 4\,i & 5 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 9 & 1-8\,i & i-i\,4\,c_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 1+4\,i-3\,c_1 & i+2\,i\,c_2 \end{array}\right]$$

Man kann auch zuerst die dritte Zeile vereinfachen, mit Hilfe der zweiten, dann sind die Rechnungen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 2\,i & 1 & c_1 & 0 \\ 4\,i & 5 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 3 & 1-2\,c_1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 1+4\,i-3\,c_1 & i+i\,2\,c_2 \end{array}\right]$$

Die Endmatrix hat eine identische Struktur.

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat müssen in der dritten Zeile Nullen stehen und somit muss $c_1=\frac{1+4\,i}{3}$ und $c_2=-1/2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & c_2 \\ 0 & 3 & c_1-4\,i & -i\,2\,c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 2 & -1/2 \\ 0 & 3 & \frac{1+4\,i}{3}-4\,i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & + & i\,z_2 & + & 2\,z_3 & = & \frac{-1}{2} \\ & & 3\,z_2 & + & (\frac{1+4\,i}{3} - 4\,i)\,z_3 & = & i \end{array}$$

Die dritte Variable $z_3 \in \mathbb{C}$ kann frei gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicher $z_3 = 0$. Dann liest man ab, dass

$$z_2 = \frac{i}{3} \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{1}{2} - i\,z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{6}$$

Lösung zu Aufgabe 5–5 : Die erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Nach dem Anwenden des Algorithmus von Gauss ergibt sich

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & + & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

und die eindeutig bestimmte Lösung ist

$$(x, y, z) = (1\,,\,2\,,\,3)$$

Lösung zu Aufgabe 5–7 : Ein möglicher Rechnungsweg ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–8 : Offensichtlich kann $z = t$ als Parameter gewählt werden. Die folgende reduzierte Matrix ergibt die gewünschten Lösungen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nun können (bei Bedarf) noch einige Zeilenoperationen ausgeführt werden

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & -39 & 13 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Ein passendes Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rrrcr} 13\,x & & -39\,z & = & 13 \\ & -2\,y & -4\,z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & -2 \end{array}$$

Zu dieser Aufgabe gibt es viele verschiedene richtige Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 5–9 :

(a)

$$\begin{array}{rrrcr} 1\,a & +2\,b & +c & = & 3 \\ -2\,a & +3\,b & +c & = & 4 \\ 0\,a & +3\,b & +c & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Die Rechnungen (ohne Zeilenvertauschen) ergeben die reduzierte Matrix

Mathematica

```
mat={{1,2,1,3},{-2,3,1,4},{0,3,1,0}}
mat=Pivot[mat,1,1]
mat=Pivot[mat,2,2]
mat=Pivot[mat,3,3]
```

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Einsetzen „von unten nach oben“ ergibt die eindeutig bestimmte Lösung

$$c = 15 \quad , \quad b = -5 \quad \text{und} \quad a = -2$$

Die Ebenengleichung ist somit

$$z = -2\,x - 5\,y + 15$$

Man sollte nun überprüfen, dass die Punkte $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 4)$ und $(0, 3, 0)$ tatsächlich auf dieser Ebene liegen.

Lösung zu Aufgabe 5–10 : Die Darstellung durch eine erweiterte Matrix und Reduktion auf Treppengestalt liefert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 10 - 3\,a & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 - 3\,a & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System unendlich viele Lösungen hat, darf die unterste Zeile nur 0 enthalten, d.h. $12 - 3\,a = 0$. Somit muss $a = 4$ sein. In der Lösung ist $x_3 = t$ frei wählbar. Es gilt $x_2 = -2\,x_3 = -2\,t$ und $x_1 = -x_2 - a\,x_3 = t\,(2-a)$. Somit sind alle Lösungen gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2-a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 5–11 :

(a) Ein einfaches Beispiel kann erzeugt werden, indem die erste Gleichung zur dritten und vierten addiert wird. anschliessend wird das doppelte der zweiten Zeile von der vierten subtrahiert. Eine Reduktion auf Treppengestalt mit dem Verfahren von Gauss wird das ursprüngliche System wieder herstellen.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0\,x_1 & +0\,x_2 & +x_3 & +4\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -9\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b) Das ursprüngliche System kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{array}{rrcrr} x_1 & +3\,x_3 & = & -x_2 & +x_4 \\ & x_3 & = & 0\,x_2 & -4\,x_4 \end{array}$$

In dieser Form ist offensichtlich, dass nach x_1 und x_3 aufgelöst werden kann. Mit $x_2 = t$ und $x_4 = s$ erhält man

$$\begin{array}{rrcrr} x_1 & +3\,x_3 & = & -t & +s \\ & x_3 & = & & -4s \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rcrr} x_1 & = & -t & -11\,s \\ x_3 & = & & -4s \end{array}$$

und somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–12 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & a & b \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 2 & 7-a & -b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a/2 & b/2 \\ 0 & 1 & 6-a & 1-b \\ 0 & 0 & a-5 & b-2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat muss $a = 5$ und $b = 2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & \frac{5}{2}\,z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

(b) Die dritte Variable $z = t \in \mathbb{R}$ kann frei gewählt werden. Dann liest man ab, dass $y = -1 - z = -1 - t$ und $x = 1 - 3\,y - \frac{5}{2}\,z = 1 + 3 + 3\,t - \frac{5}{2}\,t = 4 + \frac{1}{2}\,t$. Die Lösung ist somit eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$, parametrisiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5–13 :

(a)

$$\begin{aligned} a\,34 + b\,5 + c\,3 + d &= 0 \\ a\,8 - b\,2 + c\,2 + d &= 0 \\ a\,10 - b\,1 + c\,3 + d &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(c) Matrix auf Treppengestalt reduzieren.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to Z_2 - \frac{8}{34}\,Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - \frac{10}{34}\,Z_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{40}{34} & 2 - \frac{24}{34} & 1 - \frac{8}{34} & 0 \\ 0 & -1 - \frac{50}{34} & 3 - \frac{30}{34} & 1 - \frac{10}{34} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_2 \to 34\,Z_2 \\ Z_3 \to 34\,Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & -84 & 72 & 24 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to Z_3 - \frac{84}{108}\,Z_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 72 - \frac{84 \cdot 44}{108} & 24 - \frac{84 \cdot 26}{108} & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\,Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 108 \cdot 72 - 84 \cdot 44 & 108 \cdot 24 - 84 \cdot 26 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to 108\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 4080 & 408 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad Z_3 \to \frac{1}{408}\ Z_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -108 & 44 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(d) Der Wert von d kann frei gewählt werden. Aus dem obigen Gleichungssystem lassen sich dann der Reihe nach c, b und a bestimmen.

$$\begin{aligned} c &= \frac{-1}{10}\, d \\ b &= \frac{1}{108}\, (44\, c + 26\, d) \\ a &= \frac{-1}{34}\, (5\, b + 3\, c + d) \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Reduziert man die Matrix auf **untere Treppengestalt**, so werden die Zahlen und Rechnungen **viel einfacher**.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 34 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 - Z_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \qquad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1/6 \\ Z_2 \to -Z_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Hier kann a beliebig gewählt werden und dann die anderen Gleichungen bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} b &= -4\, a \\ c &= -b - 2\, a \\ d &= -3\, c + b - 10\, a \end{aligned}$$

Die beiden Lösungswege sind äquivalent.

Lösung zu Aufgabe 5–14 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ i & 3 & i & 5+i \\ 2+i & 1+4\,i & i & 3+9\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & -3+2\,i & -6-2\,i & -4-2\,i \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & -6-4\,i & 4-6\,i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5+3\,i \\ 0 & 3-2\,i & -2\,i & 8-4\,i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} z_1 & +2\,z_2 & +3\,z_3 & = & 5+3\,i \\ & (3-2\,i)\,z_2 & -2\,i\,z_3 & = & 8-4\,i \\ & & z_3 & = & i \end{array}$$

Dieses System kann nun leicht von unten nach oben aufgelöst werden

$$z_3 = i \quad , \quad z_2 = 2 \quad , \quad z_1 = 1$$

Lösung zu Aufgabe 5–15 : Mittels erweiterter Matrizen und Reduktion auf Treppengestalt erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2\,i & 1 & c_1 & c_2 \\ -4\,i & 2 & 1 & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & c_1+2\,i & c_2 \\ 0 & 0 & 1-2\,c_1 & i-2\,c_2 \end{array}\right]$$

(a) Damit das System unendlich viele Lösungen hat müssen in der dritten Zeile Nullen stehen und somit muss $c_1 = 1/2$ und $c_2 = i/2$ sein. Die reduzierte Matrix hat dann die Form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2\,i & 1/2+2\,i & i/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2+4\,i & 1+4\,i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Das entsprechende Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & + & z_2 & + & z_3 & = & 0 \\ & & (2+4\,i)\,z_2 & + & (1+4\,i)\,z_3 & = & i \end{array}$$

Die dritte Variable $z_3 \in \mathbb{C}$ kann frei gewählt werden. Die einfachste Wahl ist sicher $z_3 = 0$. Dann liest man ab, dass

$$z_2 = \frac{i}{2+4\,i} \quad \text{und} \quad z_1 = -z_2 = \frac{-i}{2+4\,i} = \frac{-i\,(2-4\,i)}{2^2+4^2} = \frac{-4-2\,i}{20}$$

Lösung zu Aufgabe 5–16 : 1. Lösungsmöglichkeit Die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt bei (u, v) ist

$$\begin{array}{rcl} (x-u)^2 + (y-v)^2 & = & R^2 \\ x^2 - 2\,x\,u + u^2 + y^2 - 2\,y\,v + v^2 & = & R^2 \\ -2\,x\,u - 2\,y\,v + u^2 + v^2 & = & R^2 - x^2 - y^2 \end{array}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen“ Unbekannten $M = u^2 + v^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u - 2\,y\,v + M = R^2 - x^2 - y^2$$

Wir kennen zwei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrcr} -2\,u & -2\,v & +M & = & 14 \\ -4\,u & -8\,v & +M & = & -4 \end{array}$$

Die entsprechende erweiterte Matrix ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 14 \\ -4 & -8 & 1 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 1 & 2 & \frac{-1}{4} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{+1}{4} & 8 \end{array}\right]$$

Die Variable M kann frei gewählt werden und wir erhalten dann

$$\begin{aligned} v &= 8 - \frac{1}{4}\,M \\ u &= -7 + \frac{1}{2}\,M - v = -15 + \frac{3}{4}\,M \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen können nun in $M = u^2 + v^2$ eingesetzt werden und man erhält eine quadratische Gleichung für M.

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{-60 + 3\,M}{4}\right)^2 + \left(\frac{32 - M}{4}\right)^2 \\ 16\,M &= (9+1)\,M^2 - (360+64)\,M + 60^2 + 32^2 \\ 0 &= 10\,M^2 - 440\,M + 4624 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung kann gelöst werden mit den beiden Lösungen

$$M_{1,2} = \frac{2\,(55 \pm 3\,\sqrt{15})}{5}$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass der grössere der beiden möglichen Werte der Koordinate v zu wählen ist. Deshalb

$$v = 8 - \frac{1}{4}\,M = 8 - \frac{1}{4}\,\frac{2\,(55 - 3\,\sqrt{15})}{5} \approx 3.6619$$

Der höchste Punkt liegt um R höher als der Mittelpunkt, d.h. auf der Höhe $h \approx 7.6619$. Es gilt (ohne Rechnung) $u \approx -1.98569$.

2. Lösungsmöglichkeit Der Mittelpunkt der Kreises muss auf der Mittelsenkrechten der beiden Punkte liegen. Eine Parametrisierung dieser Geraden ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt muss einen Abstand von $R = 4$ vom Punkt $(1,1)$ haben. Das ergibt die Gleichung

$$16 = \left\| \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.5 - 3\,t \\ 1.5 + t \end{pmatrix} \right\|^2 = (0.5 - 3\,t)^2 + (1.5 + t)^2$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} 16 &= \frac{1}{4} - 3\,t + 9\,t^2 + \frac{9}{4} + 3\,t + t^2 \\ 0 &= 10\,t^2 + 104 - 16 = 10\,t^2 - 544 \\ t_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{54}{40}} = \pm\sqrt{\frac{27}{20}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Eine Zeichnung zeigt, dass die positive Lösung die Richtige ist und wir erhalten die Mitelpunktskoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.98569 \\ 3.6619 \end{pmatrix}$$

Der höchste Punkt ist noch um $R = 4$ nach oben verschoben und hat somit die Koordinaten $(-1.98569\,/\,7.6619)$.

Lösung zu Aufgabe 5–17 : Die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt bei (u, v, w) ist

$$\begin{aligned}(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 &= R^2\\ x^2 - 2\,x\,u + u^2 + y^2 - 2\,y\,v + v^2 + z^2 - 2\,z\,w + w^2 &= R^2\\ -2\,x\,u - 2\,y\,v - 2\,z\,w + u^2 + v^2 + w^2 &= R^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\end{aligned}$$

Dies ist **keine** lineare Gleichung, wegen den qudratischen Termen. Mit der „neuen" Unbekannten $M = u^2 + v^2 + w^2$ kann dies als lineare Gleichung für die Unbekannten u, v, w und M aufgefasst werden.

$$-2\,x\,u - 2\,y\,v - 2\,z\,w + M = R^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Wir kennen drei Punkte, welche diese Gleichung erfüllen und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrrcl} 0\,u & +0\,v & +0\,w & +M & = & 9\\ -4\,u & -2\,v & +0\,w & +M & = & 4\\ 0\,u & -4\,v & -2\,w & +M & = & 4\end{array}$$

Indem wir die erste Gleichung von der zweiten und dritten subtrahieren, wird daraus sofort ein System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{array}{rrrcl} 4\,u & +2\,v & & = & 5\\ & 4\,v & +2\,w & = & 5\end{array}$$

Dieses System hat bereits Dreiecksgestalt und kann von unten nach oben aufgelöst werden. Hierbei kann $w = t$ als freier Parameter gewählt werden.

$$\begin{aligned} v &= \frac{5}{4} - \frac{t}{2} = \frac{5-2\,t}{4}\\ u &= \frac{5}{4} - \frac{v}{2} = \frac{5}{4} - \frac{5-2\,t}{8} = \frac{5+2\,t}{8}\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\\ \frac{5}{4}\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{-2}{8}\\ \frac{-2}{4}\\ 1\end{pmatrix}$$

Dies ist offensichtlich die Parametrisierung einer Geraden im Raum. Ist die mögliche Lage aller Kugelmittelpunkte. Der Radius wird aber nicht 3 sein. Diese Gerade kann erzeugt werden als Schnittgerade der mittelsenkrechten Ebenen der drei gegebenen Punkte.

Diese Beziehungen können nun in der ersten Gleichung eingesetzt werden um den Mittelpunkt mit dem richtigen Radius zu finden.

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= M = 9\\ \frac{(5+2\,t)^2}{64} + \frac{(5-2\,t)^2}{16} + t^2 &= 9\\ 25 + 20\,t + 4\,t^2 + 4\,(25 - 20\,t + 4\,t^2) + 64\,t^2 &= 9\cdot 64\\ t^2\,(4 + 16 + 64) + t\,(20 - 80) + 25 + 100 - 9\cdot 64 &= 0\\ t^2\,84 - t\,60 - 451 &= 0\\ t_{1,2} = w_{1,2} &= \frac{1}{42}\left(15 \pm 4\sqrt{606}\right)\end{aligned}$$

Da die Kugel gestützt wird durch die drei Punkte, muss sie oberhalb der Punkte liegen. Somit kommt nur die positive Lösung von w in Frage und wir erhalten

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{42}\left(30 + \sqrt{606}\right) \approx 1.30041\\ v &= \frac{1}{42}\left(45 - 2\sqrt{606}\right) \approx -0.100813\\ w &= \frac{1}{42}\left(15 + 4\sqrt{606}\right) \approx 2.70163\end{aligned}$$

Die Aufgabe kann auch mit *Mathematica* gelöst werden

Mathematica

```
eq[x_,y_,z_] := (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 ==9
eq1=eq[0,0,0];
eq2=eq[2,1,0];
eq3=eq[0,2,1];
sol=Solve[{eq1,eq2,eq3}]
N[sol]
```

Lösung zu Aufgabe 5–18 : Die erweiterte Matrix und deren Reduktion auf Treppengestalt ergeben.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{3-\lambda} & 0 \\ 0 & \left(2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}\right) & 0 \end{array}\right]$$

Damit das System nichttriviale Lösungen hat, muss die zweite Zeile nur aus Nullen bestehen, d.h.

$$2-\lambda-\frac{3}{3-\lambda}$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$(2-\lambda)\,(3-\lambda)-3=\lambda^2-5\,\lambda+3=0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\,\left(5\pm\sqrt{25-12}\right)$$

Diese beiden Werte $\lambda_{1,2}$ heissen auch Eigenwerte der Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5.5 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Systeme von zwei und drei linearen Gleichungen geometrisch intepretieren können.
- Systeme von linearen Gleichungen von Hand und mit geeigneten Hilfsmitteln zuverlässig lösen können.
- den Gauss'schen Algorithmus gut verstehen.
- das Verhalten von Lösungen von homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen beschreiben können.

Kapitel 6

Matrizen und die LU–Zerlegung

6.1 Elementaroperationen und die LU–Zerlegung

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren kennen lernen um lineare Gleichungssysteme zu lösen oder inverse Matrizen effizient zu bestimmen. Die vorgestellten Verfahren bilden die Grundlage für die in Taschenrechnern oder Mathematikprogrammen verwendeten Verfahren.

6.1.1 Elementaroperationen und Elementarmatrizen

6–1 Definition : Es gibt drei Typen von **elementaren Zeilenoperationen**:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl c, wobei $c \neq 0$.
2. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
3. Vertauschen von zwei Zeilen.

Analog können elementare Spaltenoperationen festgelegt werden.

6–2 Definition : Eine **Elementarmatrix** entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ durch eine elementare Zeilen/Spalten–Operation.

6–3 Theorem :

- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Zeilen**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $E\,A$ aus der Matrix A durch die selbe **Zeilen**operation.*
- *Entsteht eine Elementarmatrix E durch eine elementare **Spalten**operation aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$, dann entsteht die Matrix $A\,E$ aus der Matrix A durch die selbe **Spalten**operation.*

$$\begin{array}{llcll} \mathbb{I}_n \longrightarrow E & \text{durch eine Zeilenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow E\,A & \text{durch dieselben Zeilenop.} \\ \mathbb{I}_n \longrightarrow E & \text{durch eine Spaltenop.} & \Longrightarrow & A \longrightarrow A\,E & \text{durch dieselben Spaltenop.} \end{array}$$

6–4 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann die dritte Zeile oder Spalte einer Matrix mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 18 \\ 7 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

6–5 Beispiel : Die Matrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entsteht aus $\mathbb{I}_3$ durch eine elementare Zeilen- oder Spalten-Operation und ist somit eine Elementarmatrix. Mit ihrer Hilfe kann das (-2)–fache der dritten Zeile zur ersten Zeile addiert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

oder das (-2)–fache der ersten Spalte zur dritten Spalte addiert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$\diamondsuit$

6–6 Beispiel : Elementarmatrizen können sehr leicht invertiert werden, indem man die entsprechenden Zeilen (oder Spalten) Operationen wieder rückgängig macht. Hier einige Beispiele

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fast alle Elementarmatrizen sind invertierbar. Einzig falls eine Zeile (oder Spalte) mit Null multipliziert wird, kann die Operation nicht rückgängig gemacht werden. $\diamondsuit$

In Aufgabe 6–1 ist zu zeigen, dass eine Dreiecksmatrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Dadurch lassen sich Dreicksmatrizen auch leicht invertieren.

6–7 Beispiel : Permutationsmatrizen
Ensteht eine Elementarmatrix durch Vertauschen zweier Zeilen (oder) Spalten, so heisst sie auch **Permutationsmatrix**. Zwei Beispiele von elementaren Permutationsmatrizen sind

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P_1 entsteht durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile (oder Spalte). P_2 entsteht durch Vertauschen der zweiten und vierten Zeile (oder Spalte).

Elementare Permutationsmatrizen sind leicht invertierbar: die inverse Matrix ist gegeben durch die Matrix selbst. Mit den obigen beiden Beispielen gilt

$$P_1 \cdot P_1 = \mathbb{I}_4 \quad \text{und} \quad P_2 \cdot P_2 = \mathbb{I}_4$$

Auch wenn mehrere Vertauschungen ausgeführt werden spricht man von Permutationsmatrizen. So ist

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Permutationsmatrix, aber keine Elementarmatrix. Eine beliebige Permutationsmatrix P ist charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften.

- Alle Einträge in P sind 1 oder 0.
- In jeder Zeile befindet sich genau eine Zahl 1 .
- In jeder Spalte befindet sich genau eine Zahl 1 .

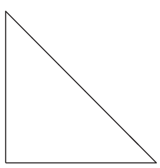
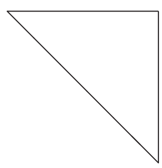
Man kann zeigen, dass jede Permutationsmatrix aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ erzeugt werden kann durch mehrere Zeilenvertauschungen (siehe Aufgabe 6–2). ♢

6.1.2 Die LU–Zerlegung löst Gleichungssysteme

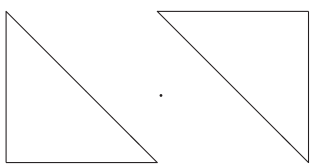
Im vorangehenden Kapitel wurden Systeme von linearen Gleichungen mit Hilfe von elementaren Zeilenoperationen gelöst. Nun wird aufgezeigt, dass dieser Prozess zur Zerlegung einer Matrix als Produkt von zwei Dreiecksmatrizen führt. Wir werden zuerst aufzeigen, dass damit das lineare Gleichungssystem so gut wie gelöst ist. Als Konsequenz des letzten Abschnittes kann die **LU–Zerlegung** einer Matrix besprochen werden. In Programmbibliotheken ist dieses Verfahren oft implementiert. So finden Sie zum Beispiel in [Pres92] und [Pres86] Pascal und C Programme.

Die LU–Zerlegung (manchmal auch LR–Zerlegung) einer quadratischen Matrix ist die bekannteste Form einer Zerlegung. Man schreibt die Matrix A als Produkt einer Links–Matrix L mit einer Rechts–Matrix U. Ist diese Zerlegung geglückt, so kann ein Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ leicht gelöst werden. Diese Tatsache kann graphisch illustriert werden:

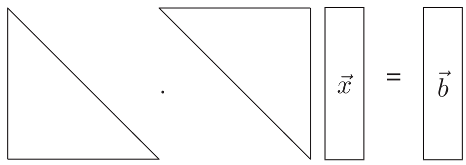
L und U sind Dreiecksmatrizen, alle Zahlen in der Matrix, ausserhalb eines Dreiecks, sind Null.

L =  und U = 

Wegen $A = L\,U$ gilt

A = 

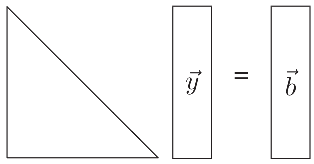
Das System $A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = \vec{b}$ entspricht der Graphik



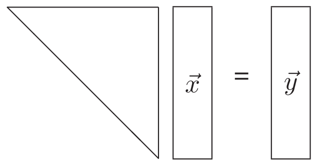
Das Gleichungssystem wird nun in zwei Schritten bearbeitet

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} L\,\vec{y} & = & \vec{b} \\ U\,\vec{x} & = & \vec{y} \end{array}$$

Zuerst wird das Gleichungssystem $L\,\vec{y} = \vec{b}$ von oben nach unten nach $\vec{y}$ aufgelöst (Vorwärtseinsetzen).



Anschliessend kann $U\,\vec{x} = \vec{y}$ von unten nach oben nach $\vec{x}$ aufgelöst werden (Rückwärtseinsetzen).



Aufgrund der obigen Erläuterungen sollte klar sein, dass mit Hilfe der LU–Zerlegung Systeme von linearen Gleichungen gelöst werden können. In nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie diese Zerlegung konstruiert werden kann.

6.1.3 LU–Zerlegung und der Algorithmus von Gauss

Bringen Sie eine Matrix mit Hilfe des Algorithmus von Gauss auf Treppengestalt, so führen Sie unbewusst eine LU–Zerlegung durch. Wir ignorieren das (eventuell notwendige) Vertauschen von Zeilen und illustrieren das Verfahren anhand eines Beispiels aus [AntoRorr91, p. 443]. Berücksichtigt man das Pivotieren, was für grosse Matrizen unumgänglich ist, so sind zusätzlich noch Permutationsmatrizen zu berücksichtigen.

Wir untersuchen als typisches Beispiel ein System mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Wollen wir diese Matrix auf Treppengestalt reduzieren, so können die folgenden Elementarschritte ausgeführt werden

1. erste Zeile durch 2 dividieren
2. das 3–fache der ersten Zeile zur zweiten addieren
3. das 4–fache der ersten Zeile von der dritten subtrahieren
4. das 3–fache der zweiten Zeile zur dritten addieren
5. die dritte Zeile durch 7 dividieren

Diese Schritte sind in der linken Spalte der Figur 6.1 illustriert. Rechts finden Sie die Matrizen um die Elementaroperationen durch Matrizenmultiplikationen auszuführen.

Die Zeilenoperationen in Figur 6.1 werden wir nun mit Hilfe von Multiplikationen von Elementarmatrizen interpretieren. Wir schreiben die Matrix A künstlich als Produkt $A = \mathbb{I}_3 \cdot A$ und fügen zwischen die beiden Faktoren

Reduktion auf Treppengestalt	Elementarmatrix der Zeilenoperation	Inverse Matrix der Elementarmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad Z_1 \leftarrow \tfrac{1}{2}\, Z_1$$

$$\downarrow \qquad E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad Z_2 \leftarrow Z_2 + 3\, Z_1$$

$$\downarrow \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad Z_3 \leftarrow Z_3 - 4\, Z_1$$

$$\downarrow \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad Z_3 \leftarrow Z_3 + 3\, Z_2$$

$$\downarrow \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad Z_3 \leftarrow \tfrac{1}{7}\, Z_3$$

$$\downarrow \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \qquad E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbildung 6.1: Beispiel einer LU–Zerlegung einer Matrix

Terme $\mathbb{I}_3 = E_i^{-1} \cdot E_i$ ein. Der Faktor E_i wirkt als Zeilenoperation auf den rechten Faktor, der Term E_i^{-1} wirkt als Spaltenoperation auf den linken Faktor.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1^{-1} \cdot E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} \cdot E_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} \cdot E_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4^{-1} \cdot E_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad E_5^{-1} \cdot E_5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \cdot \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Matrix A zerlegt als

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

6.1.4 Bestimmen der inversen Matrix

Bei der Zerlegung von $A = L \cdot U$ wurden Zeilenoperationen ausgeführt, indem die Matrix A von links mit Elementarmatrizen multipliziert wurde. Die selben Operationen können auch mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ ausgeführt werden. Das führt zu

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I} \\
E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I} \\
U \cdot A^{-1} &= E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Die obere Dreiecksmatrix U kann durch drei weitere Elementaroperationen auf die Einheitsmatix reduziert werden, d.h.

$$E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot U = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{I} \cdot A^{-1} = E_8 \cdot E_7 \cdot E_6 \cdot E_5 \cdot \ldots E_2 \cdot E_1$$

Indem die selben Zeilenoperationen nicht nur auf A, sondern auch auf der Einheitsmatrix ausgeführt werden, entsteht die inverse Matrix A^{-1}. Nun können wir in der obigen Formel für A^{-1} einen Algorithmus ablesen um die inverse Matrix zu berechnen:

1. Starte mit der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.
2. Während der LU–Zerlegung der Matrix A ist jede Zeilenoperation auch auf die obige Matrix anzuwenden.
3. Nach der LU–Zerlegung ist die Rechtsmatrix U durch Zeilenoperationen auf Diagonalgestalt zu bringen und die passenden Operationen sind auf die obige Matrix anzuwenden.
4. Als Resultat entsteht die inverse Matrix A^{-1} in der rechten Hälfte der erweiterten Matrix.

Dieses Verfahren kann mit Hilfe einer erweiterten Matrix noch geschickt dargestellt werden. Im hier untersuchten Beispiel ergeben sich die folgenden Rechnungen. Mit den zur Verfügung stehenden modernen Hilfsmitteln wird man kaum mehr in die Lage kommen viele solche Rechnungen von Hand ausführen zu müssen. Trotzdem ist es nützlich zu wissen, worauf zugrundeliegende Algorithmen aufbauen. Deshalb sei hier ein Beispiel mit allen Rechendetails vorgeführt. Bestimmt wird die inverse Matrix von

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{2}\,Z_1 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_2 + 3\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 - 4\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 + 3\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{7}\,Z_3 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_2 - 3\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \qquad Z_1 - 3\,Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-16}{14} & \frac{+3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{14} & \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -16 & 6 & 16 \\ 6 & -4 & -6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

6–8 Theorem : *Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (gleichwertig):*

(a) A ist invertierbar.

(b) Das lineare Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Die Matrix A kann geschrieben werden als Produkt zweier Dreiecksmatrizen $A = L\,U$. In den Diagonalen der Matrizen L und U sind alle Einträge von Null verschieden.

(d) Die Matrix A ist zeilenäquivalent zur Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.

Beweis : Wir zeigen eine geschlossene Implikationskette $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Da A invertierbar ist, gibt es eine inverse Matrix A^{-1} mit $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathbb{I}_n$. Ist nun $\vec{x}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$ so kann diese Gleichung von links mit A^{-1} multipliziert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A\,\vec{x} &= A^{-1}\,\vec{0} \\ \mathbb{I}_n\,\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Somit hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Da das System $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die Lösung $\vec{0}$ hat, kann der Gauss–Algorithmus vollständig ausgeführt werden und A wird also in die Form $A = L\,U$ umgeschrieben.

$(c) \Longrightarrow (d)$ Die Dreiecksmatrizen L und U können je als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden, und somit auch $A = L\,U$.

$(d) \Longrightarrow (a)$ A kann als endliches Produkt von invertierbaren Elementarmatrizen geschrieben werden, d.h.

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=1}^{m} E_i$$

Die einzelnen Elementarmatrizen sind offensichtlich invertierbar und wir können die obige Gleichung der Reihe nach von links mit den Matrizen E_1^{-1}, E_2^{-1}, $E_3^{-1} \ldots E_m^{-1}$ multiplizieren

$$\begin{aligned} E_1^{-1} \cdot A &= E_1^{-1} \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = E_2 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=2}^{m} E_i \\ E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_3 \cdot E_4 \cdot \ldots \cdot E_m = \prod_{i=3}^{m} E_i \\ E_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= E_m \\ E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot A &= \mathbb{I}_n \end{aligned}$$

Multipliziert man A der Reihe nach von rechts mit $E_m^{-1}, E_{m-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$ so ergibt sich mit einer sehr ähnlichen Rechnung

$$A \cdot E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Deshalb ist die inverse Matrix gegeben durch

$$A^{-1} = E_m^{-1} \cdot \ldots \cdot E_2^{-1} \cdot E_1^{-1}$$

□

In der Definition der inversen Matrix A^{-1} werden die **beiden** Eigenschaften

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n$$

verlangt. Mit Hilfe des obigen Theorems kann man zeigen, dass eine der beiden genügt.

6–9 Satz : *Sei A eine $n \times n$–Matrix und B eine Matrix gleicher Grösse. Dann gilt*

(a) *Gilt $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.*

(b) *Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ so ist A invertierbar und $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ und $B = A^{-1}$.*

Beweis :

(a) Wir zeigen dazu zuerst, dass A invertierbar ist. Sei $\vec{x}$ eine Lösung von $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Dann multiplizieren wir diese Gleichung von links mit B und erhalten $B \cdot A\,\vec{x} = B\,\vec{0}$ und somit erhalten wir wegen $B \cdot A = \mathbb{I}_n$ auch $\mathbb{I}_n\,\vec{x} = \vec{0}$. Deshalb hat $A\,\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Aufgrund des vorangehenden Theorems ist die Matrix A invertierbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \mathbb{I}_n \\ B \cdot A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I}_n \cdot A^{-1} \\ B &= A^{-1} \end{aligned}$$

(b) Wir müssen noch zeigen, dass $B \cdot A = \mathbb{I}_n$. Gilt $A \cdot B = \mathbb{I}_n$, so ist aufgrund des Beweises des ersten Teils B invertierbar und $B^{-1} = A$. Nun können wir die Gleichung $A \cdot B = \mathbb{I}_n$ von rechts mit A multiplizieren und erhalten $B \cdot A = B \cdot B^{-1} = \mathbb{I}_n$. Damit erfüllt B beide Eigenschaften der inversen Matrix von A und es gilt also $A^{-1} = B$

□

6.1.5 Lösen von Gleichungssystemen, Rechenaufwand

Ist nun ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte.

$$A\,\vec{x} = \vec{b}$$

zu lösen, so löst man die beiden einfach lösbaren Systeme (Dreicksmatrizen)

$$\begin{aligned} L\,\vec{y} &= \vec{b} \\ U\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

und es gilt

$$A\,\vec{x} = L\,U\,\vec{x} = L\,\vec{y} = \vec{b}$$

d.h. wir haben das ursprüngliche System in zwei Schritten gelöst. Das Lösen der Gleichung $L\,\vec{y} = \vec{b}$ heisst auch **Vorwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „oben nach unten" durch Einsetzen gelöst werden. Das Lösen der Gleichung $U\,\vec{x} = \vec{y}$ heisst auch **Rückwärtseinsetzen**, die Gleichungen können von „unten nach oben" durch Einsetzen gelöst werden.

Nun versuchen wir den Rechenaufwand für diese Operationen abzuschätzen. Eine **Operation** soll hierbei aus einer Multiplikation und einer Addition bestehen. Wir versuchen ein System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte zu lösen. Geht man den Algorithmus von Gauss Zeile für Zeile durch, so kann die Anzahl der notwendigen Operationen für die LU–Zerlegung gezählt werden, ebenso beim Vor- und Rückwärtseinsetzen.

Lösen einer einzelnen Gleichung

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.
   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ Operationen ausgeführt werden.

   Als Rechenaufwand für $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6} \approx \frac{1}{3}\,n^3$$
2. Vorwärtseinsetzen $L\,\vec{y} = \vec{b}$: Aufwand für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$
3. Rückwärtseinsetzen $U\,\vec{x} = \vec{y}$: Aufwand für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^2$$

Ist n gross, so ist offensichtlich $n^3 \gg n^2$ und nur der Aufwand für die Zerlegung ist erheblich. Müssen mehrere Gleichungssysteme mit der selben Matrix A aber verschiedenen Vektoren $\vec{b}$ gelöst werden, so muss die Zerlegung $A = L\,U$ nur einmal bestimmt werden. Der Aufwand pro zusätzlich zu lösendes Gleichungssystem ist in etwa n^2. Terme der Ordnung n^2 können für $n \gg 1$ vernachlässigt werden und man erhält:

> Um ein System von n linearen Gleichungen mit Hilfe der LU–Zerlegung zu lösen benötigt man ca. $\frac{1}{3}\,n^3$ Operationen.

Berechnen der inversen Matrix

Will man die inverse Matrix bestimmen, so kann auch das Schema der LU–Zerlegung verwendet werden. Das Schema muss aber mit der um eine Einheitsmatrix erweiterten Matrix ausgeführt werden.

1. Berechnen der Zerlegung $A = L\,U$.
   - Um mit Hilfe der ersten Zeile in der ersten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-1)^2$ und $n-1$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen zweiten Zeile in der zweiten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-2)^2$ und $2\,(n-2)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Um mit Hilfe der neuen dritten Zeile in der dritten Spalte der Matrix A Nullen zu erzeugen müssen $(n-3)^2$ und $3\,(n-3)$ Operationen ausgeführt werden.
   - Die obigen Schritte werden bis zur letzten Zeile durchgeführt.

   Als Rechenaufwand für die erste Phase des Invertierens einer $n \times n$–Matrizen A erhalten wir für grosse Werte von n
   $$\sum_{k=1}^{n} ((n-k)^2 + k\,(n-k)) = \sum_{k=1}^{n} n\,(n-k) = \frac{n^2\,(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$
2. Beim Rückwärtseinsetzen arbeiten wir von unten nach oben.
   - Um alle Zahlen ganz rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-1)\,(n+1)$ Operationen.

- Um alle Zahlen in der zweiten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-2)\,(n+1)$ Operationen.
- Um alle Zahlen in der dritten Spalte von rechts rechts zu Null zu setzen braucht es $(n-3)\,(n+1)$ Operationen.
- Der Prozess muss bis zur obersten Zeile fortgesetzt werden.

$$(n+1)\,\sum_{k=1}^{n}(n-k) \approx (n+1)\,\frac{n^2}{2} \approx \frac{1}{2}\,n^3$$

Insgesamt sind also ca. n^3 Operationen notwendig, um eine $n \times n$–Matrix zu invertieren. Um anschliessend ein Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, kann der Vektor $\vec{b}$ mit A^{-1} multipliziert werden. Das benötigt ca. n^2 Operationen.

	LU–Zerlegung	A^{-1} bestimmen
Grundaufwand	$\frac{1}{3}\,n^3$	n^3
Zusätzlicher Aufwand um ein System$A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen	n^2	n^2

Tabelle 6.1: Vergleich von LU–Zerlegung und Matrizeninversion

Tabelle 6.1 zeigt, dass die LU–Zerlegung effizienter ist um ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, als das Berechnen der inversen Matrix A^{-1}.

Computer	Anzahl FLOP pro Sekunde
NeXT (68040/25MHz)	1.0 M
HP 735/100	10.0 M
SUN Sparc ULTRA 10 (440MHz)	50.0 M
Pentium III 800 (zu wenig Cache)	50.0 M
Pentium III 800 (in Cache)	185.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (zu wenig Cache)	370.0 M
Pentium 4 2.6 GHz (in Cache)	450.0 M

Tabelle 6.2: Rechenleistung einiger CPU

In Tabelle 6.2 finden Sie eine Zusammenstellung von Rechenleistungen einiger CPU's für Probleme vom Typ "Matrix invertieren". Aufgrund dieser Tabelle kann leicht die Rechenzeit abgeschätzt werden um ein System von n linearen Gleichungen zu lösen. Die Zahlen in Tabelle 6.3 können Ihnen einen Hinweis geben welche Grössenordnung Sytem auf einem gegebenen Rechener gelöst werden kann.

Anzahl Gleichungen	Anzahl Operationen	Rechenzeit für 10 M Flop CPU
n	$\frac{1}{3}\,n^3$	$\frac{1}{3}\,n^3\;10^{-7}$ sec
10	333	0.03 msec
100	$3.33 \cdot 10^5$	3 msec
1000	$3.33 \cdot 10^8$	3 sec
10000	$3.33 \cdot 10^{11}$	50 min

Tabelle 6.3: Rechenzeit um ein lineares System zu lösen

6.1.6 Speicheraufwand und Code in **MATLAB**

Um für eine $n \times n$–Matrix A die Zerlegung $A = L \cdot U$ zu speichern ist nur eine $n \times n$–Matrix nötig, da man weiss, dass die obere Hälfte von L und die untere Hälfte von U mit Nullen gefüllt sind. Auf der Diagonalen von U findet man nur Zahlen 1. Diese Information kann bereits während der Rechnung ausgenutzt werden um Speicherplatz zu sparen.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix}$$

Die obige Notation muss folgendermassen gelesen werden

$$\begin{bmatrix} 2\backslash 1 & 3 & 1 \\ -3\backslash 0 & 1\backslash 1 & 3 \\ 4\backslash 0 & -3\backslash 0 & 7\backslash 1 \end{bmatrix} \quad \text{entspricht} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Im Verlaufe des Reduktionsprozesses werden also in der zu zerlegenden Matrix A die Einträge modifiziert, so dass zum Schluss alle Information über die LR–Zerlegung in A enthalten ist. Der untenstehende `MATLAB`–Code (tatsächlich wurde die `MATLAB`–Clone OCTAVE verwendet) führt die Rechnungen aus. Es ist zu beachten, dass alle Rechnungen „innerhalb“ der Matrix A ausgeführt werden.

Octave

```
function res = ludemo(A)
%  res  = ludemo(A) if A is a square matrix
%  performs the LU decomposition of the matrix A
%  !!!!!!!!!!! NO PIVOTING IS DONE !!!!!!!!!!!!!!!!
%  this is for instructional purposes only
%  the computation are done without creating new matrices
%  the matrix A is used to store L and U
%  the upper matrix is to be found strictly above the diagonal
%  and diagonal elements are 1, you may call
%     U=triu(res,1)+eye(3)
%  the lower matrix is to be found on and below the diagonal
%  you may call
%     L=tril(res)
%   you should then obtain A = L U

% a test on the dimensions
[n,m] = size(A);
if (n!=m)
  error ("ludemo: matrix has to be square ")
endif

% perform the decomposition
for k=1:n-1
  if ( A(k,k) == 0) error ("ludemo: division by 0") endif
  A(k,k+1:n) = A(k,k+1:n)/A(k,k);
  for j=k+1:n
     A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(k,k+1:n)*A(j,k);
  endfor
endfor

% return the result
```

```
res=A;
endfunction
```

Die untenstehende Help–Seite von Matlab (orginal) zeigt, dass auch bei Berücksichtigung der Permutationen keine gravierenden Änderungen auftreten.

Matlab

```
LU     Factors from Gaussian elimination.
       [L,U] = LU(X) stores a upper triangular matrix in U and a
       "psychologically lower triangular matrix", i.e. a product
       of lower triangular and permutation matrices, in L , so
       that X = L*U.

       [L,U,P] = LU(X) returns lower triangular matrix L, upper
       triangular matrix U, and permutation matrix P so that
       P*X = L*U.

       By itself, LU(X) returns the output from LINPACK'S ZGEFA routine.
```

6.2 Matrix Operationen mit dem HP 48

Dieser Taschenrechner beherrscht alle Grundoperationen mit Vektoren und Matrizen. Für eine Einführung ist das Handbuch zu konsultieren.

6.2.1 Lösen von Gleichungssystemen

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,x_1 \quad +3\,x_2 \quad +4\,x_3 &= 7 \\ 2\,x_1 \quad +0\,x_2 \quad -1\,x_3 &= -1 \\ -2\,x_1 \quad +1\,x_2 \quad +2\,x_3 &= 2 \end{aligned}$$

kann durch

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Der HP kann dieses System lösen, indem der Vektor $\vec{b}$ als `[7 -1 2]` auf den Stack gelegt wird, dann die Matrix **A** und anschliessend wird mit der Divisionstaste $\boxed{\div}$ die Lösung $\vec{x}$ bestimmt. Legt man eine Matrix **A** auf den Stack und drückt dann die Taste `1/x`, so wird die Matrix invertiert. Die inverse Matrix kann mit dem Vektor $\vec{b}$ multipliziert werden mit dem Resultat $\vec{x}$.

6.2.2 Matrix–Zerlegungen

Auf den neueren Modellen der Taschenrechner HP 48 sind einige Befehle für Matrixzerlegungen (**Faktorisierung**) installiert. Ziel dieser Notiz ist es diese zu erläutern und mit Beispielen zu illustrieren. Sie finden diese Befehle via Menues durch `MTH` `MATR` `FACTR`. Um die Übersichtlichkeit etwas zu verbessern wurden alle Resultate gerundet.

LU–Zerlegung

Im Kurs wird die LU–Zerlegung einer Matrix besprochen. Sie entspricht dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Verfahrens von Gauss. Auf dem Taschenrechner erhalten Sie diese Faktorisierung mit Hilfe der Taste `LU`. Die LU–Zerlegung kann nur von einer quadratischen Matrix bestimmt werden.

Mit Hilfe der LU–Zerlegung können auch nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme untersucht werden.

6–10 Beispiel : Als Beispiel untersuchen wir die Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Legt man diese Matrix auf den Stack und wendet den Befehl `LU` an, so erhalten Sie drei Matrizen als Resultat zurück:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1.14286 & 1.2857 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix}$$

Es gilt

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

In den Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{U}$ stecken die Zeilenoperation des Verfahrens von Gauss und in $\mathbf{P}$ die eventuell notwendigen Zeilenvertauschungen. Da bei der Matrix $\mathbf{L}$ unten rechts eine 0 steht ist $\det \mathbf{A} = 0$ und ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ nicht eindeutig lösbar. Man untersucht stattdessen die zwei einfach lösbaren Systeme

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,\vec{y} &= \mathbf{P} \cdot \vec{b} \\ \mathbf{U}\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,\vec{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L}\,\vec{y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}\,\vec{b} = \vec{b}$$

Als Beispiel untersuchen wir den Vektor $\vec{b} = (1, 2, 4)^T$. Es ist

$$\mathbf{P}\,\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit wird aus der Gleichung $\mathbf{L}\,\vec{y} = \mathbf{P}\,\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0.85714 & 0 \\ 4 & 0.42857 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses System versucht man von oben nach unten zu lösen und erhält sofort

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{7} \\ y_2 &= \frac{1}{0.85714}\,(1 - y_1) = \frac{1}{0.85714}\,\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Aber die dritte Gleichung lautet

$$4\,y_1 + 0.42857\,y_2 = 2$$

Diese Gleichung ist falsch (y_1 und y_2 sind bereits bekannt). Die Gleichung wäre dann gelöst, wenn in der zweiten Komponente des Vektors $\vec{b}$ statt der 2 die „richtige“ Zahl stehen würde. Man kann also mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{L}$ herausfinden für welche speziellen Vektoren das System $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung hat, obwohl $\det \mathbf{A} = 0$. Man kann auch ablesen, wie diese Lösungen aussehen. ♢

LQ–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ dargestellt durch

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}$$

Hierbei ist $\mathbf{P}$ eine $m \times m$–Permutationsmatrix, $\mathbf{L}$ eine $m \times n$ untere Dreiecksmatrix und $\mathbf{Q}$ eine orthogonale $n \times n$–Matrix. Lösungen von $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\,\vec{y} &= \mathbf{P} \cdot \vec{b} \\ \mathbf{Q}\,\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

untersucht. Da die Matrix $\mathbf{Q}$ orthogonal ist, ist das System $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$ für beliebige Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Eine wesentliche Eigenschaft von orthogonalen Matrizen ist $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ und somit kann $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$ leicht durch $\vec{x} = \mathbf{Q}^T\,\vec{y}$ gelöst werden. Das wesentliche Verhalten von Lösungen von $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ wird bestimmt durch das erste Gleichungssystem.

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung können auch über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

6–11 Beispiel : Wir untersuchen die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix entspricht einem System von zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten und man kann deshalb keine eindeutige Lösung erwarten. Mit Hilfe von $\boxed{\texttt{LQ}}$ erhält man

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix}$$

es gilt $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}$, d.h.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

und statt des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

untersucht man

$$\begin{bmatrix} 4.583 & 0 & 0 \\ 3.273 & -1.813 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} -0.218 & 0.436 & 0.873 \\ -0.946 & -0.315 & -0.079 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das erste Gleichungssystem für y_1, y_2 und y_3 lautet

$$\begin{array}{rrr} 4.583\,y_1 & +0\,y_2 & +0\,y_3 = b_2 \\ 3.273\,y_1 & -1.813\,y_2 & +0\,y_3 = b_1 \end{array}$$

Somit sind y_1 und y_2 eindeutig bestimmt, die dritte Variable y_3 aber bleibt frei wählbar. Mit Hilfe von

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sind nun alle Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems beschrieben. ♢

6–12 Beispiel : Der Nullraum der Matrix $\mathbf{A}$ ist gegeben durch die Lösungen des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Mit Hilfe der LQ–Zerlegung kommt man auf die zwei Gleichungssysteme $\mathbf{L}\,\vec{y} = \vec{0}$ und $\mathbf{Q}\,\vec{x} = \vec{y}$. Die Zerlegung des vorangehenden Beispiels führt also auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrr} 4.583\,y_1 & +0\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \\ 3.273\,y_1 & -1.813\,y_2 & +0\,y_3 = 0 \end{array}$$

Die Lösungen sind Vielfache der Vektors $\vec{y}_h = (0,0,1)^T$. Alls Lösungen des Systems $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$ sind somit Vielfache des Vektors

$$\vec{x}_h = \mathbf{Q}^T\,\vec{y}_h = \begin{bmatrix} -0.218 & -0.946 & 0.241 \\ 0.436 & -0.315 & -0.843 \\ 0.873 & -0.079 & 0.482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.241 \\ -0.843 \\ 0.482 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{x}_h$ bildet eine Basis von $\ker A$. ♢

6–13 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der drei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

für die zwei Unbekannten x_1 und x_2 untersucht man nun

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0.2 & 1.4 \\ -2.8 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Der wesentliche Unterschied ist die Zahl 0 oben rechts in der Matrix $\mathbf{L}$ und die Permutation der Komponenten von $\vec{b}$. Aus den ersten beiden Gleichungen $-5\,y_1 = b_3$ und $0.2\,y_1 + 1.4\,y_2 = b_1$ können y_1 und y_2 berechnet werden. Nun gibt es genau einen zugelassenen Wert für b_2 so dass die dritte Gleichung $-2.8\,y_2 + 0.4\,y_2 = b_2$ gelöst wird. Dieses Verhalten sollte keine Überraschung sein für ein überbestimmtes Gleichungssystem. ♢

QR–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$$

Hierbei ist P eine $n \times n$–Permutationsmatrix, R eine $m \times n$ obere Dreiecksmatrix und Q eine orthogonale $m \times m$–Matrix. Lösungen von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ werden anschliessend durch Studium von $\vec{x} = P\,\vec{z}$ und $A\,P\,\vec{z} = Q \cdot R\,\vec{z} = \vec{b}$ ersetzt.

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{Q}\,\vec{y} & = & \vec{b} \\ \mathbf{R}\,\vec{z} & = & \vec{y} \\ \vec{x} & = & \mathbf{P}\,\vec{z} \end{array}$$

Da die Matrix $\mathbf{Q}$ orthogonal ist, ist $\vec{y}$ ergeben durch $\vec{y} = \mathbf{Q}^T\,\vec{b}$. Da $\mathbf{R}$ eine Rechtsmatrix ist kann das zweite Gleichungssystem von unten nach oben aufgelöst werden. Von der Lösung $\vec{z}$ kommt man durch Permutationen zu $\vec{x} = \mathbf{P}\,\vec{z}$ zum Lösungsvektor.

Auch mit Hilfe der QR–Zerlegung können über- und unterbestimmte Gleichungssyteme untersucht werden.

6–14 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels $\boxed{\texttt{QR}}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Statt der zwei Gleichungen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

für die drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 berechnet man zuerst

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

d.h. man löst $\mathbf{Q}\vec{y} = \vec{b}$ durch $\vec{y} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b} = \mathbf{Q}^T\vec{b}$. Dann untersucht man die beiden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

d.h $\mathbf{R}\vec{z} = \vec{y}$. In diesem System ist z_3 frei wählbar. z_1 und z_2 können als Funktion von z_3 angegeben werden. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\,\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

können wir x_2 frei wählen und dann x_3 und x_1 als Funktion x_2 angeben.

Für $\vec{b} = (1\,,\,2)^T$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und aus

$$\begin{bmatrix} -5 & 0.2 & -2.8 \\ 0 & 1.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} -5\,z_1 &= 1 - 0.2\,z_2 - 2.8\,z_3 \\ 1.4\,z_2 &= -2 + 0.4\,z_3 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{5}\,(1 - 0.2\,x_1 - 2.8\,x_2) \\ x_1 &= \frac{1}{1.4}\,(-2 + 0.4\,x_2) \end{aligned}$$

♢

Singulärwert–Zerlegung

Hier wird eine $m \times n$–Matrix A dargestellt durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}$$

Hierbei ist **U** eine orthogonale $m \times m$–Matrix, **V** eine orthogonale $n \times n$–Matrix und **D** eine $m \times n$–Matrix die nur in der Diagonale von 0 verschiedene Zahlen enthält.

6–15 Beispiel : Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mittels `SVD`

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix}$$

Da nur in der Diagonalen Zahlen auftreten wird nur der Vektor mit den Diagonalelementen als Resultat ausgegeben. Ist man nur an diesen Werten interessiert, so kann der Befehl `SVL` verwendet werden. Die Matrizen U und V werden dann nicht bestimmt. Mit `SVD` erhält man auch noch

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.621 & -0.7833 \\ 0.7833 & 0.621 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.736 & 0 & 0 \\ 0 & 1.448 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.028 & 0.490 & 0.871 \\ -0.970 & -0.223 & 9.418 \\ 0.241 & -0.843 & 0.482 \end{bmatrix}$$

♢

6.2.3 Weitere Matrizen–Befehle

Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix kann durch den Befehl `det` bestimmt werden.

Rang einer Matrix

Der Rang[1] einer Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen). Diese ganze Zahl kann mit dem Befehl `RANK` bestimmt werden. Der Rang der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ist 2. Der Rang der erweiterten Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

[1]Die Dokumentation zu diesem Befehl im „Benutzerhandbuch, Serie HP 48 G, 1. Ausgabe“ ist falsch. Der Fehler ist teilweise auf eine (falsche) Übersetzung des Wortes „Eigenvalue“ zu „Einzelwert“ zurückzuführen. Zudem ist für nichtquadratische Matrizen die Berechnung via Eigenwerte nicht anwendbar.

ist 3. So sieht man, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 1 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung hat.

Spaltennorm

Um die Spalten–Maximum–Norm einer Matrix zu bestimmen, muss für jede Spalte die Summe der Beträge gebildet werden. Der maximale Wert dieser Spaltensummen liefert die Norm. `CNRM` steht für „Column–NoRM“. Für die obige Matrix $\mathbf{A}$ ist die Spaltennorm 18.

Zeilennorm

Diese Rechnung ist analog zur obigen Spaltennorm, aber es wird mit Zeilen gerechnet. `RNRM` steht für „Row–NoRM“. Für die obige Matrix $\mathbf{A}$ ist die Zeilennorm 24.

Konditionierungszahl

Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist die Konditionierungszahl gegeben durch das Produkt der Spaltennorm von $\mathbf{A}$ und der Spaltennorm der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$. Die Konditionierungszahl gibt an wieviele Stellen Genauigkeit beim Lösen eines Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ verloren gehen können. Sind vom Vektor $\vec{b}$ n Stellen bekannt, so kann man sich bei $\vec{x}$ auf $n - \log(\text{cond}\,\mathbf{A})$ Stellen verlassen. `COND` steht für „CONDition number“.

Eigenwerte, Eigenvektoren

Im Menue `MTH` `MATR` befinden sich die beiden Befehle `EGVL` (EiGenVaLue) und `EGV` (EiGenVector) um Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen Matrizen zu bestimmen. Als Beispiel kann die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

untersucht werden. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 \approx 16.12 \quad , \quad \lambda_2 \approx -1.117 \quad \text{und} \quad \lambda_0 = 0$$

Die Eigenvektoren erhält man als Spalten des HP–Resultates. Sie sind in diesem Beispiel

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.283 \\ 0.642 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.110 \\ -0.779 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Wie die untenstehende Rechnung mit *Octave* (oder `MATLAB`) zeigt, sind die Eigenvektoren nicht eindeutig bestimmt. Sie können mit beliebigen Faktoren gestreckt werden.

Octave

```
[v,d]=eig([1 2 3; 4 5 6;7 8 9])
-->
v =

   0.231971   0.785830   0.408248
   0.525322   0.086751  -0.816497
   0.818673  -0.612328   0.408248

d =
```

```
16.11684    0.00000    0.00000
 0.00000   -1.11684    0.00000
 0.00000    0.00000   -0.00000
```

Nullraum einer Matrix

Der Nullraum (Kern) einer Matrix $\mathbf{A}$ entspricht den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$. Für quadratische Matrizen bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 eine Basis des Kerns. Für nichtquadratische Matrizen $\mathbf{A}$ lässt sich $\ker \mathbf{A}$ mit Hilfe der LQ–Zerlegung bestimmen (siehe Beispiel auf Seite 206).

6.3 Aufgaben

6.3.1 LU–Zerlegung und Elementaroperationen

• **Aufgabe 6–1:**
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

als Produkt von drei Elementarmatrizen geschrieben werden kann in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$$

Bestimmen Sie anschliessend $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe der Inversen der Elementarmatrizen und Matrizenmultiplikationen.

• **Aufgabe 6–2:**
Zeigen Sie, dass die Permutationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

als Produkt von elementaren Permutationsmatrizen geschrieben werden kann. Bestimmen Sie anschliessend $\mathbf{P}^{-1}$.

• **Aufgabe 6–3:**
In den untenstehenden Matrizen sind alle Werte $k_i \neq 0$. Bestimmen Sie die inversen Matrizen dieser Matrizen.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 6–4:

Bestimmen Sie die inverse Matrix der folgenden Matrix mit Hilfe von Zeilenoperationen. Alle Zwischenrechnungen sind zu zeigen.

Trouver la matrice inverse de la matrice ci–dessous. Montrer tous les calculs intermédiaires.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

• Aufgabe 6–5:

Soit donné le système d'équations pour x, y et z.

Gegeben ist das Gleichungssystem für x, y und z.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned}$$

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$ il existe une solution. Calculer x, y et r.

(b) Soit $q = 2$. Decider pour quel valeur de r il y a infiniment de solutions et trouver ces solutions.

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ gibt es eine Lösung. Berechnen Sie x, y und r.

(b) Sei $q = 2$. Für welche Werte von r gibt es unendlich viele Lösungen? Finden Sie diese.

• Aufgabe 6–6:

Die LU–Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ liefert

La décomposition LU d'une matrice $\mathbf{A}$ rend

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$

(b) Bestimmen Sie $\ker \mathbf{A}$

(c) Finden Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

(a) Calculer $\det(\mathbf{A})$

(b) Déterminer $\ker \mathbf{A}$

(c) Trouver la solution généralle du système des équations linéaires

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 22 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–7:

La commande `LU(A)` d'une calculatrice rend le résultat ci–dessous.

Der Befehl `LU(A)` eines Taschenrechners liefert das untenstehende Resultat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et/und} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver $\mathbf{A}$.

(b) Déterminer toutes les solutions $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ du système des équations linéaires ci–dessous.

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–8:

Eines der möglichen vier Produkte $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ ist die LU–Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$.

(a) Bestimmen Sie alle Einträge von $\mathbf{A}$.

(b) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$.

Un des quatres produits possible $\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{R}_j$ correspond à la factorisation LU de la matrice $\mathbf{A}$

(a) Trouver tous les nombres en $\mathbf{A}$.

(b) Trouver le vecteur de solution $\vec{x}$.

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–9:

Für eine Matrix

Pour une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

gilt

on a

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbf{A}$ **exakt**.

(b) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf für die vier Koeffizienten der Matrix $\mathbf{A}$.

(a) Trouver $\mathbf{A}$ d'une façon **exacte**.

(b) Chercher un système des équations linéaires pour les quatres coefficients de la matrice $\mathbf{A}$.

• Aufgabe 6–10:
Untersuchen Sie die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(b) Wir verlangen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Stellen Sie ein System von 4 Gleichungen auf für die Unbekannten a, b, c und d. Stellen Sie dieses System mit Hilfe einer 4×4–Matrix dar.

(c) Bringen Sie diese Matrix auf Treppengestalt.

• Aufgabe 6–11:

On sait que le système ci–dessous a au moins une solution.

Man weiss, dass das untenstehende System mindestens eine Lösung hat.

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} = \vec{b}$$

(a) Trouver la valeur de q.

(b) Donner tous les solutions du système homongène.

(c) Donner tous les solutions du système inhomongène.

(a) Bestimmen Sie den Wert von q.

(b) Finden Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

(c) Finden Sie alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems.

• Aufgabe 6–12:

Soit

Sei

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Il existe une valeur de α, tel que la matrice $\mathbf{A}(\alpha)$ n'est pas inversible. trouver cette valeur.

(b) Avec la valeur de α trouver ci–dessus, trouver tous les solutions de l'équation lineaire $\mathbf{A}(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Trouver toutes les solutiones du système suivant, d'une façon exacte.

(a) Es gibt einen Wert von α, sodass die Matrix $\mathbf{A}(\alpha)$ nicht invertierbar ist. Finden Sie diesen Wert.

(b) Für den oben gefundenen Wert von α sind alle Lösungen der linearen Gleichung $\mathbf{A}(\alpha)\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen.

(c) Finden Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems. Die Lösungen müssen exakt sein.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Aufgabe 6–13:

Untersuchen Sie die Matrix

Examiner la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(a) Finden Sie eine LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$, wobei in der Diagonalen von $\mathbf{U}$ nur die Zahlen 1 zu finden sind.

(b) Finden Sie eine LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$, wobei in der Diagonalen von $\mathbf{L}$ nur die Zahlen 1 zu finden sind.

Diese Aufgabe zeigt, dass es verschiedene Formen von LU-Zerlegungen gibt, die aber alle dem selben Zweck dienen.

(a) Trouver une décomposition LU de $\mathbf{A}$, tel-que dans la diagonal de $\mathbf{U}$ on ne trouve que la nombre 1.

(b) Trouver une décomposition LU de $\mathbf{A}$, tel-que dans la diagonal de $\mathbf{L}$ on ne trouve que la nombre 1.

Ce problème montre qu'il y a des décompositions differentes. Mais le but des calculations ne change pas.

• Aufgabe 6–14:

Untersuchen Sie das Gleichungssystem

Examiner le système des éqations

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & +2\,x_2 & & +3\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Der Befehl **LU**, angewandt auf die Matrix

La commande **LU**, appliquée sur la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt

rend

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und/et} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystem mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{U}$. Die Rechnungen sind ohne Taschenrechner auszuführen.

Trouver toutes les solutions de ce système à l'aide des matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$. Travailler sans calculatrice.

• Aufgabe 6–15:

Un système de n équations linéaires est représenté par les matrices augmentées ci–dessous. Compter la nombre des multiplications nécessaires pour résoudre le système, veut dire transformer dans la forme à droite. Une division correspond à une multiplication. N'echanger pas des lignes. Montrer vos explications.

Ein System von n linearen Gleichungen ist dargestellt durch die untenstehenden, erweiterten Matrizen. Bestimmen Sie die Anzahl der notwendigen Multiplikationen um die Systeme zu lösen, d.h. in die rechtsstehende Form zu transformieren. Verwenden Sie keine Zeilenvertauschungen. Eine Division zählt als Multiplikation. Zeigen Sie ihre Erklärungen.

(a) 4 Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

(b) n Gleichungen/équations

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & -1 & & & & & 1 \\ -2 & 4 & -1 & & & & 2 \\ & -2 & 4 & -1 & & & 3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -2 & 4 & -1 & n-1 \\ & & & & -2 & 4 & n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & a_1 \\ & 1 & & & & & a_2 \\ & & 1 & & & & a_3 \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & & a_{n-1} \\ & & & & & 1 & a_n \end{array}\right]$$

6.3.2 Lösungen zu einigen Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 6–1 :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es gilt} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

Wegen

$$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1)^{-1} \\ &= \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1} \cdot \mathbf{E}_3^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6–2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$$

Lösung zu Aufgabe 6–3 :

(a)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{-1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & \frac{-1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–4 : Rechnen mit Hilfe einer erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_1 + Z_2 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 - Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_3 + 2\,Z_2 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_2 - 5\,Z_3 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad Z_1 - 4\,Z_3 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad Z_1 - Z_2 \to Z_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Somit gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–5 :

(a) Pour $z = 3$ et $q = 1$

$$\begin{aligned} x - y + 3 &= 3 \\ r\,x - y - 3 &= 1 \\ 2\,x + y - 12 &= -3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ r\,x - y &= 4 \\ 2\,x + y &= 9 \end{aligned}$$

Addition de la première ligne à la troisième, et soustraction de la deuxiṁe on arrive à

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ (r-1)\,x &= 4 \\ 3\,x &= 9 \end{aligned}$$

Donc $x = 3$ et $r - 1 = \frac{4}{3}$, $r = \frac{7}{3}$ et $y = x = 3$.

(b) Matrice augmente et transformation dans la forme d'une échelle. Mettre $q = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ r & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_2 - r\,Z_1 \to Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 2 & 1 & -4 & -6 \end{array}\right] \quad Z_3 - 2\,Z_1 \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \\ 0 & 3 & -6 & -12 \end{array}\right] \quad Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & r-1 & -1-r & 1-3\,r \end{array}\right] \quad Z_3 - \frac{Z_2\,(r-1)}{3} \to Z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3+r & -3+r \end{array}\right]$$

Pour $r = 3$ on arrive donc à

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

et le système a infiniment de solutions, donné par

$$z = t \quad , \quad y = -4 + 2\,z = -4 + 2\,t \quad \text{et} \quad x = 3 + y - z = 3 - 4 + 2\,t - t = -1 + t$$

Reécrit comme paramétrisation d'une droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–6 : Man kann direkt mit der LU–Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ arbeiten. Es ist nicht notwendig (und führt zu Mehrarbeit) die Matrix $\mathbf{A}$ zu bestimmen.

(a) Determinantenmultiplikationssatz

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = -12 \cdot 0 = 0$$

(b) $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{0}$ genau dann wenn $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0}$ und $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$

$$\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y & = & 2\,z \\ x & = & -2\,y - 3\,z = -7\,z \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Eine partikuläre Lösung ist zu bestimmen. Löse zuerst $\mathbf{L}\,\vec{r} = \vec{b}$ mit Hilfe der erweiterten Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & -18 \\ 1 & -2 & -2 & 22 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Somit ist $(r, s, t)^T = (6\,,\,-8\,,\,0)^T$ die einzige Lösung. Nun ist $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{r}$ zu lösen. Man erhält

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hier ist z frei wählbar. Mit $z = 0$ erhält man $y = -8$ und $x = 6 - 2\,y - 3\,z = 22$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6–7 :

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Das System $\mathbf{A}\ \vec{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$ kann ersetzt werden durch die beiden Dreieck-Systeme $\mathbf{L}\ \vec{y} = \vec{0}$ und anschliessend $\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{y}$.

- Das die Matrix $\mathbf{L}$ in der Diagonalen keine Nullen hat erhalten wir für das System $\mathbf{L}\ \vec{y} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{y} = \vec{0}$.
- Somit ist $\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$ genauer zu untersuchen. Dieses System kann von oben nach unten aufgelöst werden.

$$\mathbf{U}\ \vec{x} = \vec{0}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste und letzte Zeile diese Systems ergeben sofort $x_1 = x_4 = 0$ Da in der dritten Zeile keine führende 1 steht kann der Parameter $t = x_3$ frei gewählt werden. Die zweite Gleichung liefert anschliessend

$$2\,x_2 + 1\,x_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{1}{2}\,x_3 = -\frac{1}{2}\,t$$

Als Lösungsmenge erhalten wir eine Gerade in $\mathbb{R}^4$

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6–8 :

(a) Nur eine der vier möglichen Matrizenmutilpikationen liefert die Zahl 4 an der richtigen Stelle. Folgliuch gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor $\vec{x}$ ist als Lösung eines linearen Gleichugssystems gegeben. Er kann durch verschiedene Rechnungen bestimmt werden:

- $$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Wegen $\mathbf{A} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{R_2}$ kann zuerst $\mathbf{L}_1\ \vec{y} = \vec{b}$ und anschliessend $\mathbf{R}_2\ \vec{x} = \vec{y}$ gelost werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2\,y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 \\ -3 + 2\,x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von MATLAB oder *Octave* die folgenden Zeilen bestätigen das Resultat.

Octave
```
L1=[1 0 0;2 1 0;0 0 2]
R1=[2 2 2; 0 2 -2;0 0 2]
L2=[2 0 0;-2 1 0;0 0 1]
R2=[1 2 3; 0 1 -2;0 0 1]

A=L1*R2

b=A\[1;-1;2]
```

Lösung zu Aufgabe 6–9 :

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}e & \pi\\ 2 & 3\end{bmatrix}\\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}e & \pi\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix}^{-1}\\
&= \begin{bmatrix}e & \pi\\ 2 & 3\end{bmatrix}\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-5\,e-3\,\pi & 2\,e+\pi\\ -19 & 7\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Einer der möglichen Lösungswege ist

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e & \pi\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a+3\,b & -2\,a-5\,b\\ c+3\,d & -2\,c-5\,d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e & \pi\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

Dies kann auch geschrieben werden als

$$\begin{array}{rrrrcl}
a & +3\,b & & & = & e\\
-2\,a & -5\,b & & & = & \pi\\
 & & c & +3\,d & = & 2\\
 & & -2\,c & -5\,d & = & 3
\end{array}$$

Dies ist ein lineraes Gleichungssystem für die vier Unbekannten a, b, c und d.

Lösung zu Aufgabe 6–10 :

(a)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix}a-b & 4\,a+b\\ c-d & 4\,c+d\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a+4\,c & b+4\,d\\ -a+c & -b+d\end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}
a-b &= a+4\,c\\
4\,a+b &= b+4\,d\\
c-d &= -a+c\\
4\,c+d &= -b+d
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrrrl} & -b & -4\,c & & =0 \\ 4\,a & & & -4\,d & =0 \\ +a & & & -d & =0 \\ & +b & +4\,c & & =0 \end{array}$$

Das führt auf die Matrizennotation

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & +4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somit können die Werte von c und d frei gewählt werden und man kann daraus a und b bestimmen.

$$a = d \quad \text{und} \quad b = -4\,c$$

Dieses homogene System von vier linearen Gleichungen hat somit unendlich viele Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 6–11 : Erweiterte Matrix auf Treppengestalt bringen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & -7 & q \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & q-15 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-12 \end{array}\right]$$

Somit ist das ursprüngliche System äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ q-12 \end{pmatrix}$$

(a) Damit das System lösbar ist muss $q = 12$ sein.

(b) $x_2 = t$ und $x_4 = s$ sind frei wählbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 = -s \\ x_1 &= -3\,x_2 + 2\,x_4 = -3\,t + 2\,s \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{x}_h = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) eine partikuläre Lösung kann mit Hilfe der speziellen Wahl $x_2 = x_4 = 0$ bestimmt werden als

$$x_3 = 3 \quad \text{und} \quad x_1 = 5$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle [LandHest92, p 364]

Lösung zu Aufgabe 6–12 :

(a) Bei der Reduktion auf Treppengestalt ergeben sich die fogenden erweiterten Matrizen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1-\frac{\alpha}{2} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\alpha}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Die Matrix ist nicht invertierbar, falls in der letzten Zeile alle Eintäge 0 sind. Das führt auf die Bedingung $\alpha = 4$.

(b) Das System

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist zu lösen. Die dritte Zeile ist eine Linearkombination der ersten beiden. Deshalb können wir nur die ersten beiden Gleichungen untersuchen und kommen somit auf

$$\begin{array}{rrcr} 2\,x & +0\,y & = & -4\,z \\ 1\,x & -2\,y & = & 0\,z \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = -2z$ und aus der zweiten $y = \frac{1}{2}\,x = -z$. Somit ist der Lösungsraum gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2\,z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) Von oben nach unten auflösen führt auf

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–13 : Die beiden Resultate wurden ohne Permutationen erzeugt.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 9.9 & 0 \\ 5 & -0.5 & 8.98990 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.02020 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.050505 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 0 & 9.9 & -0.2 \\ 0 & 0 & 8.98990 \end{bmatrix}$$

Taschenrechner erzeugen in der Regel nur eines der beiden Resultate. Wegen

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{L}\cdot\mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{L}^T = \mathbf{L}_1\cdot\mathbf{R}_1$$

erhalten Sie aus der LU–Zerlegung der Transponierten $\mathbf{A}^T$ das andere Resultat. Werden auch Zeilenpermutationen verwendet, so wird das übersetzen schwieriger.

Lösung zu Aufgabe 6–14 : Zuerst $\mathbf{L}\,\vec{y} = \vec{b}$ lösen, dann $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von oben nach unten auflösen

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= -1 + y_1 = -3 \\ y_3 &= 0 - y_1 + \frac{1}{4}\,y_2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nun kann das System $\mathbf{U}\,\vec{x} = \vec{y}$ untersucht werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

x_4 kann frei gewählt werden. Setzt man $x_4 = 0$ so kann das System von unten nach oben aufgelöst werden mit dem Resultat

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-3 - 3\,x_3) = 0 \\ x_1 &= -2 - 2\,x_2 - 3\,x_3 = 1 \end{aligned}$$

Somit haben wir eine partikuläre Lösung

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen setzt man $x_4 = t$ und löst von unten nach oben auf.

$$\begin{aligned} x_3 &= -t \\ x_2 &= \frac{1}{4}\,(-7\,t - 3\,x_3) = -t \\ x_1 &= -4\,t - 2\,x_2 - 3\,x_3 = t \end{aligned}$$

und somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 6–15 :

(a) Zu zählen sind Multiplikationen (Multiplikation=Division)

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 2 Divisionen um 1 entlang der Diagonalen zu erzeugen
   - 2 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile darunter zu erzeugen und den erweiterten Teil der Matrix zu behandeln. Für die letzte Zeile ist nur eine Division notwendig.
   - Total: $(4-1)\,(2+2)+1 = 13$ Multiplikationen

   Das Zwischenresultat ist eine Matrix mit 0 unterhalb der Diagonalen, 1 entlang der Diagonalen und Zahlen in der ersten, oberen Nebendiagonalen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & c_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right]$$

2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen. Operationen pro Zeile
   - 1 Multiplikation+Addition um die Zahl in der Zeile oberhalb der Diagonalen zu Null setzen. Die Operation muss nur im erweiterten Teil effektiv ausgeführt werden.
   - Die unterste Zeile muss nicht bearbeitet werden
   - Total: 3 Multiplikationen

Insgesamt 16 Multiplikationen

(b) Zu zählen sind Multiplikationen

1. Von oben nach unten 1 entlang der Diagonalen, Nullen darunter erzeugen.
   Total: $(n-1)\,(2+2)+1 = 4\,n-3$ Multiplikationen
2. Von unten nach oben Nullen oberhalb der Diagonalen erzeugen.
   Total: $n-1$ Multiplikationen

Insgesamt werden $5\,n-4$ Multiplikationen benötigt.

6.4 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Matrizenoperationen schnell und zuverlässig ausführen können.
- Elementarmatrizen erkennen und mit ihnen rechnen können.
- Gleichungssysteme mit Dreiecksmatrizen schnell und zuverlässig (von Hand) lösen können.
- die engen Beziehungen zwischen Elementarmatrizen, LU–Zerlegung und dem Verfahren von Gauss kennen.
- die inversen Matrizen von 3×3 und 4×4–Matrizen auch von Hand ausführen können.
- alle obigen Rechnungen schnell und zuverlässig mit Ihrem Taschenrechner ausführen können.
- auch spezielle Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner lösen können: Stichwort Faktorisierungen.

Chapitre 7

Determinanten

7.1 Einführung

In diesem Abschnitt wird die Bedeutung der Determinante von 2×2 und 3×3 Matrizen für Gleichungssysteme, Flächen- und Volumenberechnung erklärt. Für 3×3–Determinanten wird die Methode des Entwickelns entlang einer Zeile eingeführt. Das führt auf die Berechnungsformel der Determinante einer quadratischen Matrix beliebiger Grösse.

7.1.1 Determinante einer 2×2–Matrix

Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

Für Konstanten a, b, c und d kann das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a\,x & + & b\,y & = & 1 \\ c\,x & + & d\,y & = & 0 \end{array}$$

gelöst werden, indem die erste Zeile mit d und die zweite mit $-b$ multipliziert wird

$$\begin{array}{ccccc} a\,d\,x & + & b\,d\,y & = & d \\ -b\,c\,x & - & b\,d\,y & = & 0 \end{array}$$

Durch Addition erhält man daraus

$$x = \frac{d}{a\,d - c\,b} \quad \text{und} \quad y = \frac{-c}{a\,d - c\,b}$$

Der Nenner $a\,d - c\,b$ entsteht aus der entsprechenden Matrix durch eine Subtraktion des Produktes von Diagonalelementen. Das führt auf die Definition der **Determinante** einer 2×2–Matrix.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\,d - c\,b$$

2×2–Determinanten und Flächen von Parallelogrammen

Der Vektor $(d\,,\,-c)^T$ steht senkrecht auf $(c\,,\,d)^T$ und hat dieselbe Länge. Ist α der Winkel zwischen den Vektoren $(a\,,\,b)^T$ und $(c\,,\,d)^T$, so ist der Winkel zwischen den Vektoren $(a\,,\,b)^T$ und $(-d\,,\,c)^T$ gegeben durch $\frac{\pi}{2} - \alpha$ oder $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Wegen

$$\begin{aligned} a\,d - c\,b &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| (\mp 1)\, \sin(\alpha) \end{aligned}$$

ist der Wert der Determinante gleich dem (orientierten) Flächeninhalt des durch $(a\,,\,b)^T$ und $(-d\,,\,c)^T$ aufgespannten Parallelogramms. Diese Tatsache kann durch eine Zeichnung illustriert werden.

7.1.2 Determinante einer 3×3–Matrix

Lösen von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten

Der untenstehende *Mathematica*–Code bestimmt die x–Komponente der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mathematica

```
Factor[LinearSolve[
   {{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}},
    {1,0,0}][[1]]]
.
(-(a23 a32) + a22 a33) /

   (-(a13 a22 a31) + a12 a23 a31 + a13 a21 a32 -

     a11 a23 a32 - a12 a21 a33 + a11 a22 a33)
```

Man erkennt den Nenner

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Dieser Term entspricht der Determinante einer 3×3–Matrix und man schreibt

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Auch diese (kompliziertere) Formel für eine 3×3–Determinante kann durch ein Rechenschema mit Produkten entlang Diagonalen illustriert werden. Der ursprünglichen 3×3–Matrix werden rechts die beiden ersten Spalten nocheinmal angefügt. Dann werden sechs Diagonalprodukte gemäss dem Schema in Abbildung 7.1 addiert, bzw. subtrahiert. Dieser Rechentrick wird auch Regel von **Sarrus** genannt. Sie gilt nur für 3×3–Determinanten.

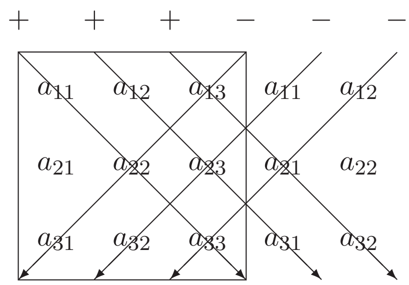


Figure 7.1: Berechnung einer 3×3–Determinante mit der Regel von Sarrus

3×3–Determinanten und Spatvolumen

Nun wollen wir diesen Ausdruck als Volumen interpretieren. Sei dazu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{33} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}\,(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}\,(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

Dies ist aber exakt das Resultat der obigen Determinantenrechnung. Im Kapitel über Vektoren haben wir gezeigt, dass dieses Spatprodukt dem (orientierten) Volumen des durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds entspricht. Somit **berechnet die Determinante das Volumen eines Spates**.

Die Determinante kann auch mit Hilfe eines anderen Rechenschemas bestimmt werden. Man verifiziert leicht, dass

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\ \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\ \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}\ (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}\ (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Dies ist die **Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile**. Die Zahlen $a_{1\,k}$ in der ersten Zeile werden multipliziert mit den vorzeichenbehafteten 2×2–Determinanten, die entstehen durch entfernen der ersten Zeile und der k–ten Spalte aus der ursprünglichen Matrix A. Das Vorzeichenschema kann dem folgenden Schachbrettmuster entnommen werden.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Eine elementare (längere) Rechnung zeigt, dass man auch nach der **zweiten Zeile entwickeln** kann und zum selben Resultat kommt.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= -a_{21}\ \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23}\ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= -a_{21}\ (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}\ (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \end{aligned}$$

Ebenso kann man nach der dritten Zeile entwickeln, oder auch nach einer der Spalten.

7–1 Exemple : Zu bestimmen ist die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Determinante wird mit einigen verschiedenen Rechenwegen bestimmt. Selbstverständlich muss das Resultat jedesmal dasselbe sein.

(a) Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned}\det A &= +1\ \det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} - 0\ \det\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\\ &= -6+0-8=-14\end{aligned}$$

(b) Entwicklung nach der dritten Spalte

$$\begin{aligned}\det A &= +2\ \det\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} - 3\ \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}\\ &= -8-6+0=-14\end{aligned}$$

(c) Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned}\det A &= -0\ \det\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix} + 0\ \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\\ &= -0+0-14=-14\end{aligned}$$

Nach kurzem Nachdenken sollte man feststellen, dass die dritte Variante am leichtesten zu berechnen war. ♢

7.1.3 Definition der Determinante einer $n \times n$– Matrix

Die obigen Überlegungen und das Beispiel führen auf die allgemeine Definition einer Determinante.

Sei A eine $n \times n$–Matrix, gegeben durch

$$A = (a_{i\,j})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,n}\\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n}\\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,n}\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n}\end{bmatrix}$$

7–2 Définition : Streicht man aus der ursprünglichen Matrix A die i–te Zeile und die j–te Spalte, berechnet die Determinante dieser $(n-1)\times(n-1)$–Untermatrix und multipliziert sie mit $(-1)^{i+k}$, so erhält man eine Zahl. Das Resultat $A_{i\,j}$ heisst **Adjunkte**, **algebraisches Komplement** oder auch **Kofaktor**.

Das Vorzeichenmuster $(-1)^{i+j}$ der Kofaktoren kann auch in der folgenden Matrix abgelesen werden

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1}\\ - & + & - & \cdots & (-1)^{n}\\ + & - & + & \cdots & (-1)^{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n} & (-1)^{n+1} & \cdots & + \end{bmatrix}$$

7–3 Définition : (Laplace'scher Entwicklungssatz)
Die Determinante einer $n \times n$–Matrix A kann durch Entwicklung nach der i–ten Zeile bestimmt werden.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\cdot A_{i\,j} = a_{i\,1}\cdot A_{i\,1} + a_{i\,2}\cdot A_{i\,2} + \ldots + a_{i\,n}\cdot A_{i\,n}$$

oder durch Entwicklung nach der j–ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}\cdot A_{i\,j} = a_{1\,j}\cdot A_{1\,j} + a_{2\,j}\cdot A_{2\,j} + \ldots + a_{n\,j}\cdot A_{n\,j}$$

Das Resultat ist unabhängig von der Auswahl der Zeile oder Spalte.

7–4 Remarque : Es sollte beachtet werden, dass diese Definition der Determinantenberechnung **rekursiv** ist. Um eine 5×5–Determinante zu bestimmen müssen 5 einzelne 4×4–Determinanten bestimmt werden. Für jede dieser 4×4–Determinanten sind je vier 3×3–Determinanten zu bestimmen ...

Dieser Algorithmus zur Berechnung von Determinanten darf unter keinen Umständen programmiert werden um Determinanten grosser Matrizen zu bestimmen. Der Rechenaufwand wird prohibitiv gross und die Resultate unzuverlässig. Bessere Verfahren basieren auf der LU–Zerlegung der Matrix. Die Determinanten kleiner Matrizen können von Hand durchaus mit diesem Entwicklungssatz bestimmt werden. ♢

7–5 Exemple : Die Determinante der folgenden Matrix wird mit Vorteil nach der ersten Zeile entwickelt. Ebenso verfährt man mit den Unterdeterminanten.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -37 & -2 & 0 & 0 \\ 13 & -13 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} &= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \\
&= 3 \cdot (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0 \\
&= 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} + 0 = -120
\end{aligned}$$

♢

7.2 Resultate

7.2.1 Transponierte Matrix

Da gemäss dem Laplace'schen Entwicklungssatz die Determinante einer Matrix A wahlweise nach einer Zeile oder Spalte entwickelt werden kann ist klar, dass die Determinante der Matrix A gleich der Determinanten der transponierten Matrix A^T ist.

$$\det A = \det A^T$$

7.2.2 Determinanten von Dreiecksmatrizen und Elementarmatrizen

Im Beispiel 7–5 wurde die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix bestimmt. Aufgrund der vielen Nullen war die Rechnung elementar. Die Idee lässt sich leicht auf beliebige, quadratische Matrizen übertragen und man erhält das folgende Resultat.

7–6 Résultat : *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gegeben durch das Produkt der Diagonalelemente.*

7–7 Exemple :

$$\det \begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 & 137 & e \\ 0 & -2 & \log 45 & 77 & 69 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = -6$$

♢

7–8 Résultat : *(Elementarmatrizen)*
Mit Hilfe des Entwicklungssatzes können auch die Determinanten der zu elementaren Zeilenoperationen gehörenden Matrizen leicht bestimmt werden. Diese Elementarmatrizen E entstehen aus der $n \times n$–Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ durch Ausführen der entsprechenden Zeilenoperation.

(a) *Multiplikation einer Zeile mit λ :* $\det E = \lambda$

(b) *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen :* $\det E = 1$

(c) *Vertauschen von zwei Zeilen :* $\det E = -1$.

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Auf Seite 227 haben wir gesehen, dass die Determinante der Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

auch als orientiertes Volumen des Tetraeders mit den erzeugenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgefasst werden kann. Genauer ist das Volumen des Tetraeders gleich einem Sechstel von $\det M$. In Abbildung 7.2 wird die obere Ecke in die Richtung des vorderen Vektors verschoben, genauer

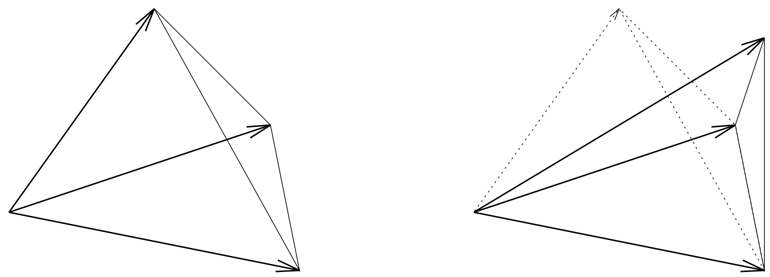


Figure 7.2: Zwei volumengleiche Spate

$$\begin{array}{ccc} \vec{a} & \longrightarrow & \vec{a} \\ \vec{b} & \longrightarrow & \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{a} \\ \vec{c} & \longrightarrow & \vec{c} \end{array}$$

Zu einem Vektor wird also ein Vielfaches eines anderen dazugezählt. Da die obere Ecke des Tetraeders in einer Ebene verschoben wird parallel zur Grundebene ändern sich weder Höhe noch Grundfläche. Somit bleibt das Volumen gleich und es gilt

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{a} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

Die Addition eines Vielfachen der ersten Zeile zur zweiten kann auch als Multiplikation von links mit der Elementarmatrix

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aufgefasst werden. Es ist $\det E = 1$ und somit

$$\det\,(\,E \cdot M\,) = \det\,E \cdot \det\,M$$

Vertauschen zweier Zeilen

Man kann auch verifizieren, dass durch das Vertauschen von zwei Vektoren nur die Orientierung des Volumens ändert und somit

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor

Streckt man einen Vektor des Spates um den Faktor λ, so wird die entsprechende Höhe um den selben Faktor gestreckt, die Grundfläche aber nicht verändert. Somit wird das Volumen mit λ multipliziert. Mit Hilfe einer Elementarmatrix kann man also schreiben

$$\begin{aligned} \det(\,E \cdot M\,) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda\, a_1 & \lambda\, a_2 & \lambda\, a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda\, \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \det E \cdot \det M \end{aligned}$$

Für 3×3–Matrizen haben wir somit für verschiedene Typen vom Operationen gezeigt, dass die Determinante eines Produktes als Produkt der Determinanten bestimmt werden kann. Dieses Resultat ist allgemein gültig (Theorem 7–9). Ein möglicher Beweis dieses Resultates beruht auf der Darstellung von beliebigen Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen und den obigen Überlegungen[1].

7.2.3 Multiplikationssatz

7–9 Théorème : *(Multiplikationssatz)*
Sind A und B zwei quadratische Matrizen gleicher Grösse, so ist auch das Produkt $A \cdot B$ eine Matrix gleicher Grösse. Es gilt

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

7–10 Résultat : *Für jede $n \times n$–Matrix gilt*

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det\, A$$

Démonstration : Das Resultat ist eine Konsequenz von Theorem 7–9, $\lambda \cdot A = \lambda \mathbb{I}_n \cdot A$ und

$$\det(\lambda\, \mathbb{I}_n) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^n$$

□

[1] Es ist nicht allzu schwer zu sehen, dass jede $n \times n$–Matrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Allerdings muss man dann Elementarmatrizen mit nur aus Nullen bestehenden Zeilen zulassen.

7–11 Exemple : Im vorangehenden Kapitel haben wir die LU–Zerlegung einer Matrix untersucht. Aus dieser Zerlegung lässt sich die Determinante leicht ablesen.

$$\begin{aligned} A &= L \cdot U \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \det\, A &= \det\, L \cdot \det U = 14 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dieser auf dem Verfahren von Gauss beruhende Rechentrick erlaubt es die Determinanten von grossen Matrizen schnell und zuverlässig (mit Hilfe von Computern) zu bestimmen. ♢

7–12 Théorème : *Der Einfluss von elementaren Zeilen- und Spalten–Operationen auf die Determinante lässt sich nun leicht nachvollziehen.*

(a) *Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit einer Zahl, so ist die Determinante mit der selben Zahl zu multiplizieren.*

(b) *Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.*

(c) *Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert die Determinante nicht.*

Wir haben auch gesehen, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn eine LU–Zerlegung möglich ist, wobei in den Diagonalen keine Nullen auftauchen dürfen. Das führt auf das folgende, einfach zu formulierende Resultat. Der praktische Nutzen ist nicht so gross wie es auf den ersten Blick erscheint. Um die Determinante zu bestimmen verwendet man die LU–Zerlegung der Matrix und somit ist bereits bekannt ob die Matrix invertierbar ist oder nicht.

7–13 Résultat : *Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$. *Dann gilt*

$$\det\,(A^{-1}) = \frac{1}{\det\, A}$$

Démonstration : Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden kann. Die Determinanten dieser Matrizen sind je von Null verschieden, somit auch das Produkt der Determinanten der Matrizen und wegen dem Multiplikationssatz gilt also $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \mathbb{I}_n \\ \det\,(A \cdot A^{-1}) &= \det\, \mathbb{I}_n = 1 \\ \det\,(A) \cdot \det\,(A^{-1}) &= = 1 \\ \det\,(A^{-1}) &= \frac{1}{\det\, A} \end{aligned}$$

□

7–14 Exemple : Im Allgemeinen ist

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B$$

Betrachten Sie hierzu das Beispiel

$$\det\, A = \det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = 14 \quad \text{und} \quad \det\, B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A + B) = \det \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} = 99$$

♢

7.3 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

7–15 Définition : Für eine $n \times n$–Matrix $A = (a_{i\,j})_{1 \le i,j \le n}$ ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\, \mathbb{I}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{1\,1} - \lambda & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} - \lambda & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} - \lambda & \cdots & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n} - \lambda \end{bmatrix}$$

ein Polynom vom Grad n (das **charakteristische Polynom**) und die Nullstellen heissen **Eigenwerte** der Matrix A.

7–16 Exemple : Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 14$$

und die beiden reellen Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{2}$$

♢

7–17 Exemple : Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 19$$

Diese Matrix hat keine reellen Eigenwerte, die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm i\,\sqrt{3}$$

♢

7.4 Aufgaben

• Problème 7–1:
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$$

• Problème 7–2:
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

• Problème 7–3:
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\det B \neq 0$ falls die drei Zahlen x, y und z verschieden sind.

• Problème 7–4:
Eine Parabel $y = a + b\,x + c\,x^2$ geht durch die drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3), wobei die drei Zahlen x_1, x_2 und x_3 verschieden sind. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die drei Unbekannten a, b und c und zeigen Sie, dass dieses eindeutig lösbar ist. Die Lösung ist nicht zu berechnen.

• Problème 7–5:
Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

• Problème 7–6:
Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

• Problème 7–7:
Überprüfen Sie den Determinantenmultiplikationssatz für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix}$$

indem Sie $\det A$, $\det B$, die Matrix $A \cdot B$ und $\det(A \cdot B)$ von Hand berechnen.

• Problème 7–8:
Bestimmen Sie den Wert der Determinante, indem Sie die Matrix zuerst mittels geeigneter Zeilenoperationen in Dreiecksgestalt bringen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

• Problème 7–9:
Bestimmen Sie mit Hilfe geeigneter Zeilenoperationen die Determinante von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

Tip: lassen Sie zuerst a_{32} „verschwinden“, dann a_{54}. Anschliessend a_{45} und a_{23}. Dann führen drei Zeilenvertauschungen auf das Resultat.

• Problème 7–10:
Untersuchen Sie für welche Werte von λ das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 3\,x & + & (4-\lambda)\,y & = & 0 \end{array}$$

nichttriviale Lösungen hat.
Tip: untersuchen Sie

$$\det\ A = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

als Funktion von λ.

• Problème 7–11:
Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

• Problème 7–12:

Untersuchen Sie die die $n \times n$–Matrix

Examiner la matrice $n \times n$

$$A\,(n) \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Es gilt

On a

$$\det A\,(1) = a \quad \text{und/et} \quad \det A\,(2) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 - b^2$$

(a) Berechnen Sie $\det A\,(3)$.

(b) Es gibt Zahlen c_1 und c_2 sodass die untenstehende Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Finden Sie c_1 und c_2.
Tip: zwei mal entwickeln nach geeigneten Zeilen oder Spalten.

(a) Calculer $\det A\,(3)$.

(b) Il existe des nombres c_1 et c_2 tel que la formule ci–dessous est juste pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver c_1 et c_2.
Tip: deux développement par rapport à des lignes ou columnes biens choisi.

$$\det\ A\,(n) = c_1\ \det\ A\,(n-1) + c_2\ \det A\,(n-2)$$

• Problème 7–13:

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

Trouver les valeurs des déterminantes suivantes

(a)

$$a = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$b = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \end{bmatrix}$$

(c)

$$c = \det \begin{bmatrix} n & n & n & n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix}$$

Tip: Subtrahieren Sie die zweite Zeile von der ersten, dann …

Tip: substraction de la deuxième ligne de la première, puis …

7.4.1 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 7–1 : $\det A = -23$ und $\det B = y - x$.

Solution pour problème 7–2 : Mit Hilfe einer Entwicklung nach der ersten Spalte (mehrmals) gilt

$$\det\ A = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 24$$

Solution pour problème 7–3 : $\det A = 13$ und $\det B = (y-x)\,(z-x)\,(y-z)$. Sind die drei Zahlen x, y und z verschieden , so ist offensichtlich $\det B \neq 0$.

Solution pour problème 7–4 :

$$\begin{aligned} a + b\,x_1 + c\,x_1^2 &= y_1 \\ a + b\,x_2 + c\,x_2^2 &= y_2 \\ a + b\,x_3 + c\,x_3^2 &= y_3 \end{aligned}$$

Die entsprechende Matrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der vorangehenden Aufgabe ist die Determinante dieser Matrix nicht Null, die Matrix somit invertierbar und das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Solution pour problème 7–5 :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} k & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = -2\,k + 20 \quad \text{und} \quad \det\, B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A+B) = \det \begin{bmatrix} k & -8 \\ 12 & k-2 \end{bmatrix} = k^2 - 2\,k + 96$$

Also erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \det\,(A+B) &= \det\, A + \det\, B \\ k^2 - 2\,k + 96 &= -2\,k + 20 + 28 \\ k^2 &= -48 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung und somit ist $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ für alle (reellen) Werte von k.

Solution pour problème 7–6 :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} k & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 2\,k - 20 \quad \text{und} \quad \det\, B = \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & k \end{bmatrix} = 28$$

aber

$$\det\,(A+B) = \det \begin{bmatrix} k & 0 \\ 12 & k+2 \end{bmatrix} = k^2 + 2\,k$$

Also erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} \det\,(A+B) &= \det\, A + \det\, B \\ k^2 + 2\,k &= 2\,k - 20 + 28 \\ k^2 &= 8 \\ k &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

Somit ist genau für zwei Werte von k die Bedingung $\det(A+B) = \det A + \det B$ erfüllt und für alle anderen falsch.

Solution pour problème 7–8 : Durch elementare Zeilenoperationen erhalten wir die Folge von Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_2/2}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Da zwei mal Zeilen vertauscht wurden hat die Determinante ihr Vorzechen zwei mal gewechselt und bleibt somit gleich.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 140$$

Solution pour problème 7–9 :

1. Vielfaches der ersten Zeile von der dritten subtrahieren: $a_{32} \to 0$

2. Vielfaches der dritten Zeile von der fünften subtrahieren: $a_{54} \to 0$
3. Vielfaches der sechsten Zeile von der vierten subtrahieren: $a_{45} \to 0$
4. Vielfaches der vierten Zeile von der zweiten subtrahieren: $a_{23} \to 0$

Das führt auf

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

Nun kann man die Zeilenpaare $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$ und $5 \leftrightarrow 6$ vertauschen und erhält

$$\det\, A = -a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}\, a_{56}\, a_{65}$$

Solution pour problème 7–10 : Ist $\det A \neq 0$ so ist die Matrix invertierbar und $(0,0)^T$ somit die einzige Lösung. Somit ist die Bedingung $\det A = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} &= (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 6 = 0 \\ \lambda^2 - 6\,\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}\,\left(6 \pm \sqrt{36-8}\right) = 3 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

Observation: Bei den beiden Lösungen $\lambda_{1,2}$ handelt es sich um die **Eigenwerte** der Matrix A und das Polynom $\lambda^2 - 6\,\lambda + 2$ heisst auch **charakteristisches Polynom** der Matrix.

Solution pour problème 7–11 : Mit Hilfe einer Entwicklung nach der ersten Spalte (mehrmals) gilt

$$\det\,(A - \lambda\, \mathbb{I}_5) = (1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$$

und die fünf Eigenwerte sind direkt ablesbar.

Solution pour problème 7–12 :

(a) Eine einfache Rechnung ergibt

$$\det A\,(3) = \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \ldots = a^3 - 2\,a\,b^2$$

(b) Zuerst entlang der ersten Spalte entwickeln

$$\det\, A\,(n) \quad = \quad a\,\det\, A\,(n-1) - b\det \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & a & b & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & b & a & b & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b & a & b \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

entlang der ersten Zeile entwickeln

$$\begin{aligned} &= a \det A(n-1) - b^2 \det \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & b & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix} \\ &= a \det A(n-1) - b^2 \det A(n-2) \end{aligned}$$

Solution pour problème 7–13 :

(a) Eine elementare Rechnung zeigt, dass $a = -8$.

(b) Vertauschen der ersten und dritten Zeile, und der zweiten und fünften Zeile ergibt

$$b = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 16 & 6 & 1998 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3 = 6\,\pi$$

(c) Der Reihe nach auszuführen

1. Subtrahieren Sie die zweite Zeile von der ersten.
2. Subtrahieren Sie die dritte Zeile von der zweiten.
3. Subtrahieren Sie die vierte Zeile von der dritten.

$$\begin{aligned} c &= \det \begin{bmatrix} n & n & n & n & n & \dots & n & n \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & 0 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & n & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\ 0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & n-2 & n & n & n & \dots & n & n \\
0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n
\end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & n-2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & n-3 & n & n & \dots & n & n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n & n & n \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n & n \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n
\end{bmatrix} \\
&\vdots \\
&= \det\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
n-1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & n-2 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & n-3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 3 & n-2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & n-1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & n
\end{bmatrix} = n\,!
\end{aligned}
$$

Chapitre 8

Lineare Strukturen

In diesem Kapitel werden vor allem Begriffe und Strukturen der linearen Algebra definiert und mit wenigen Beispielen illustriert. In diesem Kapitel werden Sie keine direkten Anwendungen finden.

8.1 Vektorraum

Die folgende (abstrakte) Definition eines Vektorraumes ist historisch gewachsen. Zuerst wurden viele Beispiele von Vektorräumen untersucht und anschliessend festgestellt das sie alle die selbe Struktur haben. Wir gehen hier den umgekehrten Weg: nach der Definition geben wir einige, teilweise bereits bekannte, Beispiele.

8–1 Définition : Ein (reeller) **Vektorraum** V ist eine Menge von Objekten (Vektoren) mit zwei Operationen **Addition** und **Multiplikation mit einem Skalar** mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{x} \in V, \vec{y} \in V \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V$
2. $\vec{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\,\vec{x} \in V$
3. Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{0} \in V$ mit $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in V$.
4. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten die Rechenregeln:
   (a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
   (b) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{y} + (\vec{x} + \vec{z})$
   (c) $\alpha\,(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\,\vec{x} + \alpha\,\vec{y}$
   (d) $(\alpha + \beta)\,\vec{x} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{x}$
   (e) $(\alpha\,\beta) \cdot \vec{x} = \alpha\,(\beta \cdot \vec{x})$
   (f) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

8–2 Exemple : Betrachten Sie Paare (x_1, x_2) von reellen Zahlen und untersuchen sie die folgendermassen definierten Operationen Addition und Multiplikation mit Skalar α:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \alpha\,x_1 \\ \alpha\,x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die so definierte Menge V von reellen Zahlenpaaren genügt allen verlangten Bedingungen in Definition 8–1. Somit haben wir einen Vektorraum. Es ist der wohlbekannte Vektorraum $\mathbb{R}^2$. ♢

8–3 Exemple : Verifizieren Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$ den Bedingungen in Definition 8–1 genügt. ♢

8–4 Définition : Die Menge $\mathbb{P}_n$ besteht aus allen Polynomen vom Grad kleiner oder gleich n mit den folgendermassen definierten Operationen:
Für Polynome f und g und Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x)\end{aligned}$$

d.h. punktweise Definition der Operationen.

8–5 Exemple : Zu zeigen ist, dass $\mathbb{P}_n$ mit diesen Operationen einen Vektorraum bildet.

Solution: Die Summe von zwei Polynomen vom Grad kleiner oder gleich n ergibt einen Polynom mit der selben Eigenschaft. Ebenso die Multiplikation eines Polynoms mit einer reellen Zahl. Somit sind die ersten beiden Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt. Der Nullvektor in $\mathbb{P}_n$ ist das Nullpolynom (d.h. $f(x) = 0$ für alle x). Aufgrund der punktweisen Definition der Rechenoperationen übertragen sich die Rechenregeln für Zahlen auf die Rechenregeln für Polynome und es sind somit alle Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt. $\mathbb{P}_n$ ist ein Vektorraum. ♢

8–6 Exemple : Die Menge aller stetigen Funktionen $C^0([0,1])$ auf dem Intervall $[0,1]$ bildet einen Vektorraum. Hierbei sind die Operationen punktweise definiert.

Solution: Summen und Vielfache von stetigen Funktionen sind wieder stetig und die Rechenregeln sind auch erfüllt. Somit sind alle Bedingungen in Definition 8–1 erfüllt und wir haben einen Vektorraum. ♢

8–7 Exemple : Sei V die Menge aller 2×3–Matrizen. Diese können addiert werden und auch mit (reellen) Zahlen multipliziert und es gelten die üblichen Rechenregeln. Somit haben wir auch hier einen Vektorraum. ♢

8–8 Définition : Eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraumes V heisst **(linearer) Teilraum**, falls

1. $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in U$
2. $\vec{x} \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\,\vec{x} \in U$

Man sagt, dass ein Teilraum **abgeschlossen** ist unter den Operationen Addition und Multiplikation mit einer Konstanten. Ein Teilraum ist selbst wieder ein Vektorraum. Setzt man $\alpha = 0$, so ist klar, dass $\vec{0} \in U$ sein muss.

8–9 Définition : Eine Teilmenge $W \subset V$ eines Vektorraumes heisst **affine Teilmenge** (auch **affiner Teilraum**), falls es einen Vektor $\vec{a} \in V$ gibt und einen linearen Teilraum $U \subset V$, so dass W entsteht durch verschieben des Teilraumes U um den Vektor $\vec{a}$.

8–10 Exemple : Jede durch den Ursprung gehende Gerade in der Ebene ist ein Teilraum. Nicht durch den Ursprung gehende Geraden bilden keinen Teilraum. Sie bilden einen affinen Teilraum. ♢

8–11 Exemple : Die xy–Ebene ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ♢

8–12 Exemple : Jede durch den Ursprung gehende Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein Teilraum. Nicht durch den Ursprung gehende Ebenen bilden keinen Teilraum. Sie bilden einen affinen Teilraum. ♢

8–13 Exemple : $\mathbb{P}_n$ ist ein Teilraum des Vektorraumes aller stetigen Funktionen $C^0(\mathbb{R})$. ♢

8–14 Théorème : ***(Lösungen von homogenen Gleichungssystemen)***
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Nun untersuchen wir

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\} = \ker A$$

d.h. die Lösungen eines linearen, homogenen Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten. Die Menge aller Lösungen $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dieser Teilraum heisst auch ***Kern*** *der Matrix A. Man schreibt $U = \ker A$.*

Die Menge der Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystem bilden **keinen Teilraum** (siehe Aufgabe 8–2). Sie bilden einen affinen Teilraum.

Démonstration : Es ist zu zeigen, dass Summen und Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind. Falls

$$A\,\vec{x} = \vec{0} \quad \text{und} \quad A\,\vec{y} = \vec{0}$$

dann gilt

$$A\,(\vec{x} + \vec{y}) = A\,\vec{x} + A\,\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A\,(\alpha\,\vec{x}) = \alpha\,A\,\vec{x} = \alpha\,\vec{0} = \vec{0}$$

□

8–15 Exemple : Sei die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\ker A$ besteht somit aus allen Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1\,x + 2\,y + 3\,z & = & 0 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z & = & 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z & = & 0 \end{array}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} 1\,x + 2\,y + 3\,z & = & 0 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z & = & 0 \\ 0\,x + 0\,y + 0\,z & = & 0 \end{array}$$

In diesem System ist $z \in \mathbb{R}$ frei wählbar, y und x können dann bestimmt werden. Wir erhalten die Lösungen

$$\begin{pmatrix} z \\ -2\,z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Vielfachen des Vektors $(1, -2, 1)^T$ bilden eine Gerade, den Teilraum $\ker A \subset \mathbb{R}^3$. ♢

8–16 Théorème : *(Lösungen von inhomogenen Gleichungssystemen)*
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Nun untersuchen wir die Lösungen eines linearen, inhomogenen Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten, d.h.

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

Es können verschiedene Fälle auftreten

- *Das System hat keine Lösung.*
- *Das System hat eine Lösung. Diese Lösung $\vec{x}_p$ heisst auch* ***partikuläre Lösung****.*
  Nun ist es auch möglich, dass dieses System noch mehrere Lösungen hat. Dazu muss das zugehörige homogene System
  $$A\,\vec{x} = \vec{0}$$
  mit der allgemeinen Lösung
  $$\vec{x}_h \in \ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\}$$
  betrachtet werden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist nun
  $$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$
  - *Hat das homogene System nur die triviale Lösung $\vec{0}$, so ist dass inhomogene System eindeutig lösbar.*
  - *Hat das homogene System nichttriviale Lösung $\vec{x}_h \neq \vec{0}$, so ist dass inhomogene System unendlich viele Lösungen.*

  Die Lösungsmenge eines inhomogenen, linearen Gleichungssystems bilden einen affinen Teilraum.

Démonstration : Das Beispiel

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

zeigt, dass es Gleichungssysteme ohne Lösung gibt. Falls das System nun eine Lösung $\vec{x}_p$ hat (eine partikuläre Lösung), so untersuchen wir neu das modifizierte Gleichungssystem für den Vektor $\vec{y}$.

$$A\,(\vec{y} + \vec{x}_p) = \vec{b}$$

Wegen $A\,\vec{x}_p = \vec{b}$ muss der „neue" unbekannte Vektor $\vec{y}$ die homogene Gleichung

$$A\,\vec{y} = \vec{0}$$

lösen. Somit ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ gegeben durch $\vec{y} \in \ker A$. Die Notation $\vec{y} = \vec{x}_h$ ist also angebracht.

- Hat das homogene System nur die triviale Lösung ($\ker A = \{\vec{0}\}$), so hat das inhomogene System die eindeutige Lösung $\vec{x}_p$.
- Hat das homogene System nichttriviale Lösungen $\vec{x}_h \in \ker A$, so ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems gegeben durch
  $$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$$

□

8.2 Lineare Kombinationen und lineare Abhängigkeit

8–17 Définition : Ein Vektor $\vec{y} \in V$ in einem Vektorraum V heisst **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ falls es Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\vec{x}_k = \lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\,\vec{x}_n$$

8–18 Définition : Die Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ heissen **linear abhängig** falls es Zahlen $\lambda_1,\ \lambda_2\ \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \vec{x}_k = \lambda_1\, \vec{x}_1 + \lambda_2\, \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\, \vec{x}_n$$

wobei nicht alle $\lambda_k = 0$ sein dürfen. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist eine (nichttriviale) Linearkombination der Vektoren.

Sind die Vektoren nicht linear abhängig, so sagt man, dass sie **linear unabhängig** sind.

8–19 Exemple : Der Vektor $\vec{y} = (4,4,3)^T$ ist eine Linearkombination der beiden Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

weil

$$3\,\vec{x}_1 - 0.5\,\vec{x}_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 6-2 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

♢

8–20 Résultat : *Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.*

Démonstration : Sind die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ linear abhängig, so gilt

$$\lambda_1\, \vec{x}_1 + \lambda_2\, \vec{x}_2 + \lambda_3\, \vec{x}_3 = \vec{0}$$

Hierbei ist einer der Koeffizienten $\lambda_k \neq 0$. Für die weitere Rechnung gehen wir davon aus, dass $\lambda_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\vec{x}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\, \vec{x}_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\, \vec{x}_3$$

Somit liegt $\vec{x}_2$ in der durch $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_3$ aufgespannten Ebene. □

8–21 Exemple : Die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, weil

$$3\,\vec{x}_1 - 0.5\,\vec{x}_2 - \vec{y} = \vec{0}$$

♢

Die obigen Beispiele illustrieren das folgende, einfache Resultat.

8–22 Résultat : *Die Vektoren $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren als Linearkombination der anderen geschrieben werden kann.*

Démonstration : Die Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \vec{x}_i = \vec{0}$$

wobei es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\lambda_k \neq 0$. Dann gilt

$$\vec{x}_k = \frac{-1}{\lambda_k} \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \lambda_i\, \vec{x}_i$$

Somit ist $\vec{x}_k$ als Linearkombination der anderen Vektoren geschrieben. □

8–23 Exemple : Untersuchen Sie die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Solution: Der Nullvektor $\vec{0}$ ist eine (nichttriviale) Linearkombination der drei Vektoren, falls es Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 gibt mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei mindestens eines der λ_k von Null verschieden sein muss. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die triviale $\lambda = \vec{0}$, diese ist aber hier nicht interessant. Das System hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante Null ist. Deshalb bestimmen wir diese.

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 0 + 4 \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 15 + 24 \neq 0$$

Deshalb hat dieses Gleichungssystem nur die triviale Lösung und die drei gegebenen Vektoren sind somit linear unabhängig. $\diamondsuit$

Das obige Beispiel kann analog für n Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ durchgerechnet werden und wir erhalten das folgende Resultat.

8–24 Résultat : *Die n Vektoren*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig wenn die Determinante der aus diesen Vektoren gebildeten quadratischen Matrix nicht Null ist, d.h.

$$\det\,[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n] = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

Das obige Resultat lässt sich nur anwenden, falls die Anzahl der Vektoren mit der Anzahl der Komponenten jedes Vektors übereinstimmt. Sonst wird die zu untersuchende Matrix nicht quadratisch und $\det A$ kann nicht berechnet werden.

8–25 Exemple : Untersuchen Sie die vier Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \pi \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Solution: Die selben Überlegungen wie im vorangehenden Beispiel führen auf die Bedingung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei mindestens eines der λ_k von Null verschieden sein muss. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & \pi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also vier Unbekannte aber nur drei Gleichungen. Das System muss also eine nichttriviale Lösung haben (ohne Rechnung). Somit sind die vier Vektoren linear abhängig.

Aufgrund dieser Überlegungen sollte klar sein, dass vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind. ♢

8–26 Exemple : Zu untersuchen sind die drei Polynome

$$P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + x + x^2$$

auf lineare Abhängigkeit im Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Solution: Zu finden sind Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 mit

$$\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Das führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 (1 + x + x^2) + \lambda_3 (2 + x + x^2) &= 0 \\ 1 (\lambda_2 + 2\lambda_3) + x (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x^2 (\lambda_2 + \lambda_3) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig, wenn die Terme in den drei Klammern je Null sind. Das führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3 &= 0 \\ 1\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 1\,\lambda_3 &= 0 \\ 0\,\lambda_1 + 1\,\lambda_2 + 1\,\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann auch mit Hilfe von Matrizen geschrieben werden als

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die triviale Lösung $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Damit die drei Polynome linear abhängig sind benötigen wir aber eine nichttriviale Lösung. Eine solche existiert genau dann wenn die Determinante der Matrix Null ist. Eine Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Somit hat das System nur die triviale Lösung und die drei Polynome sind linear unabhängig. ♢

8.3 Basis und Dimension eines Vektorraumes

8–27 Définition : Eine Menge $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ von Vektoren in einem Vektorraum V heisst **Basis** der Vektorraumes falls

1. die Vektoren $\vec{b}_k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ linear unabhängig sind.
2. jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination der $\vec{b}_k$ geschrieben werden kann.

Für einen Vektor $\vec{x} \in V$ gibt es also Zahlen c_k mit

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\vec{b}_k = c_1\,\vec{b}_1 + c_2\,\vec{b}_2 + \ldots + c_n\,\vec{b}_n$$

Die Zahlen c_k heissen **Koeffizienten** des Vektors $\vec{x}$ in der Basis B. Die Zahl n heisst **Dimension** des Vektorraumes V.

Die erste Bedingung verlangt, dass **nicht zu viele** Vektoren in der Basis sind. Hat man zu viele Vektoren, so werden Sie linear abhängig sein. Die zweite Bedingung verlangt, dass **nicht zu wenige** Vektoren in der Basis sind. Hat man zu wenig Vektoren, so kann nicht jeder Vektor als Linearkombination der Basiselemente geschrieben werden.

8–28 Exemple : Die drei Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des dreidimensionale Vektorraumes $\mathbb{R}^3$. Man spricht auch von der **Standardbasis** von $\mathbb{R}^3$. ♢

8–29 Exemple : Die vier Polynome

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = x^3$$

bilden eine Basis von $\mathbb{P}_3$. Die Dimension von $\mathbb{P}_3$ ist 4 . Man spricht auch von der **Standardbasis** von $\mathbb{P}_3$.
Démonstration : Es ist klar, dass jedes Polynom in $\mathbb{P}_3$ als Linearkombination von 1, x, x^2 und x^3 geschrieben werden kann. Der Identitätssatz für Polynome zeigt, dass

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

nur richtig ist falls

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Somit sind die obigen Polynome auch linear unabhängig und bilden eine Basis. □

♢

8–30 Exemple : Im Beispiel 8–23 haben wir gesehen, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, weil die Determinante der Matrix nicht Null ist.

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 39 \neq 0$$

Nun versuchen wir einen beliebigen Vektor $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_k$ zu schreiben, d.h.

$$c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

für die drei unbekannten Koeffizienten c_k. Da die Determinante nicht Null ist kann die Matrix invertiert werden und wir haben die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{y}$ kann als Linearkombination von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ geschrieben werden. Somit bilden die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. ♢

Die Rechnungen im obigen Beispiel können für beliebige Vektoren im Raum ausgeführt werden. Wir erhalten die folgende Charakterisierung einer Basis im Raum $\mathbb{R}^3$.

8–31 Exemple : Drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ in $\mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. ♢

Mit Hilfe von Resultat 8–24 und dem obigen Beispiel erhalten wir sofort das folgende Resultat.

8–32 Résultat : *Die n Vektoren*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^n$, wenn die linear unabhängig sind, d.h. wenn die Determinante der aus diesen Vektoren gebildeten quadratischen Matrix nicht Null ist.

Démonstration : Der Beweis basiert auf den selben Rechnungen wie das vorangehende Beispiel. Statt mit drei Vektoren muss nur mit n Vektoren operiert werden. □

Das obige Resultat ist nicht nur im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ gültig, sondern gilt in beliebigen Vektorräumen.

8–33 Théorème : *n Vektoren in einem n–dimensionalen Vektorraum bilden genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind.*

8–34 Exemple : Im Beispiel 8–30 haben wir gesehen, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ eine Basis bilden. Dazu haben wir aber auch noch die Standardbasis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist klar, dass ein Vektorraum verschiedene Basen haben kann.

In der Standardbasis gilt

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und in der „neuen“ Basis gilt

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Beziehung zwischen den Koeffizienten y_k in der Standardbasis und den Koeffizienten c_k in der „neuen“ Basis ist

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die obige Matrix beschreibt den **Basiswechsel**. Sind die Koeffizienten eines Vektors in einer Basis gegeben, so können mit Hilfe dieser Matrix (oder der Inversen) die Koeffizienten in der anderen Basis bestimmt werden. $\diamondsuit$

8–35 Exemple : Die Legendre–Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \end{aligned}$$

bilden eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_4$. Die Dimension von $\mathbb{P}_4$ ist 5.

Solution: Wir untersuchen zuerst die lineare Unabhängigkeit. Das führt auf die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{4} \lambda_k P_k(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist erfüllt falls

$$\lambda_0\, 1 + \lambda_1\, x + \lambda_2 \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) + \lambda_3 \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) + \lambda_4 \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung kann nach aufsteigenden Potenzen von x sortiert werden.

$$\left(\lambda_0 - \lambda_2 \frac{1}{2} + \lambda_4 \frac{3}{8}\right) + x\left(\lambda_1 - \lambda_3 \frac{3}{2}\right) + x^2\left(\lambda_2 \frac{3}{2} - \lambda_4 \frac{30}{8}\right) + x^3 \lambda_3 \frac{5}{2} + x^4 \lambda_4 \frac{35}{8} = 0$$

Damit das Polynom identisch mit Null ist müssen alle Koeffizienten Null sein. Das führt auf das folgende Gleichungssystem für $\vec{\lambda}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei steht $*$ für beliebige Zahlen. Aufgrund der Dreiecksstruktur der Matrix ist dieses System eindeutig gelöst durch die triviale Lösung $\vec{\lambda} = \vec{0}$. Somit sind diese Polynome linear unabhängig.

Um zu zeigen, dass ein beliebiges Polynom vom Grad 4

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

als Linearkombination der Legendre–Polynome geschrieben werden kann muss die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{4} c_k\,P_k(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

untersucht werden. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

und auch dieses System ist eindeutig lösbar. Somit bilden die obigen fünf Legendre–Polynome eine Basis in $\mathbb{P}_4$. $\diamondsuit$

8–36 Exemple : Die elementare Matrizenmultiplikation

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 7 & 10 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} x_3$$

zeigt, dass durch die Multiplikation mit dem Vektor $\vec{x}$ eine Linearkombination der Spalten der Matrix A gebildet wird. Daraus lässt sich ablesen, dass das System

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 7 & 10 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

genau dann lösbar ist, wenn $\vec{b}$ als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix A geschrieben werden kann. Diese Beobachtung führt auf die Definition des Spaltenranges und eine andere Formulierung für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems. $\diamondsuit$

8–37 Définition : Ist A eine $n \times m$–Matrix, so bildet die Menge aller Linearkombinationen der Spalten der Matrix einen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, den **Spaltenraum**. Man schreibt auch

$$\operatorname{span} A = \{\text{ Linearkombinationen der Spalten von } A\ \}$$

Die Menge aller Linearkombinationen der Zeile der Matrix bildet einen Teilraum von $\mathbb{R}^m$, den **Zeilenenraum**. Der **Spaltenrang** einer Matrix ist eine positive ganze Zahl, gegeben durch

$$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{span} A$$

Analog ist der **Zeilenrang** einer Matrix gegeben als Dimension des Zeilenraumes.

8–38 Résultat : *Man kann zeigen, dass für beliebige Matrizen*

$$\operatorname{rang} A = \text{ Spaltenrang von } A \ = \text{ Zeilenrang von } A$$

8–39 Résultat : *Für jede $n \times m$–Matrix gilt*

$$\operatorname{span} A = \operatorname{Image} A$$

d.h. die Menge aller Vektoren $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ für welche die Gleichung $A\,\vec{x} = \vec{y}$ eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ hat ist $\operatorname{span} A$.

Démonstration : Die Rechnungen im vorangehenden Beispiel können problemlos auf den allgemeinen Fall übertragen werden. □

8–40 Théorème : *Ein inhomogenes System von n Gleichungen ($\vec{b} \in \mathbb{R}^n$) für m Unbekannte ($\vec{x} \in \mathbb{R}^m$)*

$$A\,\vec{x} = \vec{b}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

d.h. die erweiterte Matrix hat den selben Rang wie die ursprüngliche Matrix.

Démonstration : Der Rang der Matrix A wird nicht erhöht durch das Anfügen der neuen Spalte, falls $\vec{b}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist, d.h. das System lösbar. □

Das folgende, elementare Resultat beschreibt das Verhalten von Zeilen- und Spaltenräumen unter Elementaroperationen. Die zugelassenen Elementaroperationen sind: Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten), Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer von Null verschiedenen Konstante.

8–41 Résultat : *Elementare Zeilenoperationen, angewandt auf eine Matrix A ändern den Zeilenraum nicht. Der Spaltenraum kann sich aber ändern.*

Elementare Spaltenoperationen, angewandt auf eine Matrix A ändern den Spaltenraum nicht. Der Zeilenraum kann sich aber ändern.

Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Dieses Reultat zeigt, dass die Zeilenoperationen des Verfahrens von Gauss den Rang einer Matrix nicht ändern.

8.4 Aufgaben

• Problème 8–1:
Zeigen Sie, dass die Polynome vom Grad gleich 3 **keinen** Vektorraum bilden.

• Problème 8–2:
Sei A eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$. Nun untersuchen wir die Menge

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\,\vec{x} = \vec{b} \in \mathbb{R}^n\}$$

d.h. die Lösungen eines linearen, **inhomogenen** Gleichungssystems mit n Gleichungen und m Unbekannten. Zeigen Sie, dass U **kein** Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist.

• Problème 8–3:
Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor und

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{a} = 0\}$$

die Menge aller Vektoren, die senkrecht stehen auf $\vec{a}$. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum ist.

• Problème 8–4:
Beschreiben Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= -1 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die Lösungsmenge auch geometrisch.

• Problème 8–5:
Untersuchen Sie die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= \alpha \end{aligned}$$

Für welche Werte von α ist dieses System lösbar?

• Problème 8–6:
Beschreiben Sie den Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= -1 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die Lösungsmenge auch geometrisch.

• Problème 8–7:
Finden Sie zuerst die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Probleme $A\,\vec{x} = \vec{b}$. Beschreiben Sie anschliessend die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Probleme $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Verwenden Sie Vektornotationen. (Quelle: [AntoRorr91, p. 212])

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3\,x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & - & 6\,x_2 & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & = & -1 \\ 2\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & = & 1 \\ 3\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & -3 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \\ 4\,x_1 & - & 7\,x_2 & & & - & 5\,x_4 & = & -5 \end{array}$$

• Problème 8–8:
Sei $\phi \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(x+\phi)$ als Linearkombination der beiden Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ geschrieben werden kann.

• Problème 8–9:
Examiner les polynômes

Untersuchen Sie die Polynome

$$p_1(x) = x^2 - 1 \quad , \quad p_2(x) = 1 + x + 2\,x^2 \quad , \quad p_3(x) = x - 3\,x^3$$

$$f(x) = \alpha + 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3$$

Il existe une valeur de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que le polynôme $f(x)$ ci–dessus est une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3.

(a) Trouver la valeur de α.

(b) Écrire f comme combinaison linéaire des polynômes p_i.

Es gibt einen Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ sodass das obige Polynom $f(x)$ eine Linearkombination der Polynome p_1, p_2 und p_3 ist.

(a) Bestimmen Sie den Wert von α.

(b) Schreiben Sie f als Linearkombination der Polynome p_i.

• Problème 8–10:
Die beiden folgenden Teilaufgaben haben sehr viel gemeinsam!

(a) Entscheiden Sie ob die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

(b) Entscheiden Sie ob die drei Polynome

$$P_1(x) = 2 - x + 4\,x^2 \quad , \quad P_2(x) = 3 + 6\,x + 2\,x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + 10\,x - 4\,x^2$$

in $\mathbb{P}_2$ linear abhängig sind.

• Problème 8–11:
Die beiden folgenden Teilaufgaben haben sehr viel gemeinsam!

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ eine Basis bilden und schreiben Sie den Vektor $\vec{y} = (0,1,0)^T$ als Linearkombination der $\vec{x}_i$.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Polynome

$$P_1(x) = 2 - x + 4\,x^2 \quad , \quad P_2(x) = 3 + 6\,x + 2\,x^2 \quad \text{und} \quad P_3(x) = 2 + 10\,x - 4\,x^2$$

in $\mathbb{P}_2$ eine Basis bilden und schreiben Sie das Polynom $f(x) = x$ als Linearkombination der $P_i(x)$.

• Problème 8–12:
Zeigen Sie, dass die drei stetigen Funktion

$$f_1(x) = e^x \quad , \quad f_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sinh x$$

linear abhängig sind.

• Problème 8–13:

Untersuchen Sie die drei folgenden Polynome im Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Examiner les trois polynômes ci–dessous.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 \quad , \quad f_2(x) = 1 + 2\,x + x^2 \quad \text{und/et} \quad f_3(x) = -1 + x + 3\,x^2$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Polynome linear unabhängig sind.

(a) Montrer que ces trois polynômes sont linéairement indépendent.

(b) Schreiben Sie $g(x) = 3\,x$ als Linearkombination der $f_i(x)$.

(b) Écrire $g(x) = 3\,x$ comme combinaison linéaire des $f_i(x)$.

• Problème 8–14:

(a) Entscheiden Sie, ob die Polynome p_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$.

(a) Decider si les polynômes p_i sont linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$.

$$p_1(x) = 1 + x \quad , \quad p_2(x) = x^3 - 13x \quad , \quad p_3(x) = 1 + 3\,x + x^3 \quad \text{und/et} \quad p_4(x) = 2\,x + 7\,x^3$$

(b) Für welchen Wert von a sind die Polynome f_i linear abhängig sind in $\mathbb{P}_3$?

(b) Pour quel valeur de a sont les polynômes f_i linéairement dépendents dans $\mathbb{P}_3$?

$$f_1(x) = 1 + x \quad , \quad f_2(x) = x^2 - 2\,x \quad , \quad f_3(x) = 1 + x^2 + x^3 \quad \text{und/et} \quad f_4(x) = 2\,x + a\,x^3$$

• Problème 8–15:

Zeigen Sie, dass die Polynome

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x-3)\,(x-1)\,(x+1) \\ P_2(x) &= x\,(x-1)\,(x+1) \\ P_3(x) &= x\,(x-3)\,(x+1) \\ P_4(x) &= x\,(x-3)\,(x-1) \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{P}_3$ bilden. Um schreiben Sie das Polynom $f(x) = 1 + x$ als Linearkombination der $P_i(x)$.

• Problème 8–16:

Zeigen Sie, dass die Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - 2 \\ P_2(x) &= (x-2)^2 \\ P_3(x) &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{P}_3$ bilden. Bestimmen Sie die Matrix die den Basiswechsel von der Standardbasis zur obigen Basis festlegt. Was hat diese Aufgabe mit dem grossen Horner–Schema zu tun?

8.4.1 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 8–1 : Die Summe zweier Polynome vom Grad 3 muss kein Polynom vom Grad 3 sein, der Grad kann kleiner werden. Ein mögliches Beispiel ist

$$(x^3 - x^2) + (x - x^3) = x^2 + x$$

Solution pour problème 8–2 : Damit U ein Teilraum wäre müssten Summen und Vielfache von Lösugen wieder Lösungen sind. Falls

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{und} \quad A\,\vec{y} = \vec{b}$$

gilt aber

$$A\,(\vec{x}+\vec{y}) = A\,\vec{x}+A\,\vec{y} = \vec{b}+\vec{b} = 2\,\vec{b} \neq \vec{b}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A\,(\alpha\,\vec{x}) = \alpha\,A\,\vec{x} = \alpha\,\vec{b}$$

Somit ist U kein Teilraum.

Solution pour problème 8–3 : Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in U, so gilt

$$\vec{x}\cdot\vec{a} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{y}\cdot\vec{a} = 0$$

somit gilt auch

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{a} &= \vec{x}\cdot\vec{a}+\vec{y}\cdot\vec{a} = 0\\ (\alpha\,\vec{x})\cdot\vec{a} &= \alpha\,(\vec{x}\cdot\vec{a}) = 0\end{aligned}$$

Also sind auch Summen und Vielfache von Vektoren in U wiederum in U, d.h. U ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Solution pour problème 8–4 : Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

Es gilt $\det a = 0$ und somit kann die Matrix nicht invertiert werden.

Zuerst sind die Lösungen homogenen Gleichungssystems zu untersuchen. $\ker A$ besteht aus allen Lösungen des Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1\,x+2\,y+3\,z &= 0\\ 4\,x+5\,y+6\,z &= 0\\ 7\,x+8\,y+9\,z &= 0\end{aligned}$$

und wurde in Beispiel 8–15 berechnet. Er besteht aus allen Punkten auf der Geraden

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 0\\ 7 & 8 & 9 & -1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -6 & -4\\ 0 & -6 & -12 & -8\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned}1\,x+2\,y+3\,z &= 1\\ 0\,x+1\,y+2\,z &= \frac{4}{3}\\ 0\,x+0\,y+0\,z &= 0\end{aligned}$$

Wir brauchen nur eine Lösung und wählen deshalb den einfachen Fall $z = 0$. Dann erhält man sofort $y = \frac{4}{3}$ und $x = 1-2\,y = \frac{-5}{3}$ Eine andere Wahl von z ist auch korrekt.

Nun kombiniert man die partikuläre Lösung des inhomogenen Systems mit der allgemeine Lösung des homogenen Systems und erhält alle Lösungen des ursprünglichen Systems

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \vec{x}_p+\vec{x}_h = \begin{pmatrix} -5/3\\ 4/3\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems können geometrisch als Schnittmenge von drei Ebenen in $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden. Die Schnittmenge besteht aus einer Geraden. Dies ist ein Spezialfall.

Solution pour problème 8–5 : Es gilt $\det A = 0$ und somit kann die Matrix nicht invertiert werden. Die Lösungen des homogenen Systems wurden in Aufgabe 8–4 bereits bestimmt und sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & \alpha \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -12 & \alpha-7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z &= \frac{4}{3} \\ 0\,x + 0\,y + 0\,z &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $\alpha = -1$. Dann erhält man Aufgabe 8–4

Solution pour problème 8–6 : Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist **nicht quadratisch** kann somit sicher nicht invertiert werden.

Durch den Algorithmus von Gauss kommt man auf die folgende Sequenz von erweiterten Matrizen für das inhomogene System

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1\,x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 0\,x + 1\,y + 2\,z &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist bereits in der Lösung von Aufgabe 8–4 vorgekommen. Man erhält die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 8–7 : Die Lösungen zu dieser Aufgaben können verschieden aussehen und trotzdem richtig sein.

(a)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_h = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_h = s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 8–8 :

$$\begin{aligned} \sin(x+\phi) &= \cos\phi\ \sin x + \sin\phi\ \cos x \\ &= \lambda_1\ \sin x + \lambda_2\ \cos x \end{aligned}$$

Solution pour problème 8–9 : Zu bestimmen sind die Koeffizienten λ_i, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1\, p_1(x) + \lambda_2\, p_2(x) + \lambda_3\, p_3(x) \\ \alpha + 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3 &= \lambda_1\,(x^2-1) + \lambda_2\,(1+x+2\,x^2) + \lambda_3\,(x-3\,x^3) \\ &= (-\lambda_1+\lambda_2) + (\lambda_2+\lambda_3)\,x + (\lambda_1+2\,\lambda_2)\,x^2 + (-3\,\lambda_3)\,x^3 \end{aligned}$$

Das ist genau dann der Fall wenn

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Diese System kann untersucht werden mit Hilfer einer erweiterten Matrix, die auf Treppengestalt zu reduzieren ist. Elementare Zeilenoperation führen zu den folgenden Zwischenresultaten.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3+\alpha \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3+\alpha \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{array}\right]$$

(a) Damit dieses System lösbar ist, muss $\alpha = -1$ sein.

(b) Dann erhält man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda_3 = 4/3$, $\lambda_2 = 2 - \lambda_3 = 2/3$ und $\lambda_1 = 1 + \lambda_2 = 5/3$. Somit ist

$$\frac{5}{3}\,(x^2-1) + \frac{2}{3}\,(1+x+2\,x^2) + \frac{4}{3}\,(x-3\,x^3) = f(x) = -1+2\,x+3\,x^2-4\,x^3$$

Solution pour problème 8–10 : Beide Teilprobleme führen exakt auf die selben Rechnungen. Zu untersuchen ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann die Determinante berechnen und erhält

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \ldots = -32 \neq 0$$

Somit sind die Vektoren (Polynome) linear unabhängig.

Solution pour problème 8–11 : Beide Teilprobleme führen exakt auf die selben Rechnungen. In Aufgabe 8–10 wurde bereits gezeigt, dass die Vektoren (Polynome) linear unabhängig sind. Mit Hilfe von Theorem 8–33 folgt daraus sofort, dass eine Basis vorliegt.

Um den Vektor (das Polynom) als Linearkombination zu schreiben muss man das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Da die Determinante nicht Null ist kann das System eindeutig gelöst werden und man erhält

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für die Polynome gilt entsprechend

$$x = -\frac{1}{2}\,(2-x+4\,x^2) + \frac{1}{2}\,(3+6\,x+2\,x^2) - \frac{1}{4}\,(2+10\,x-4\,x^2)$$

Solution pour problème 8–12 :

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\,e^{x} - \frac{1}{2}\,e^{-x}$$

Solution pour problème 8–13 : Zu untersuchen sind Linearkombinationen der drei Polynome, d.h.

$$\begin{aligned} c_1\,f_1(x) + c_2\,f_2(x) + c_3\,f_3(x) &= c_1\,(2+x-x^2) + c_2\,(1+2\,x+x^2) + c_3\,(-1+x+3\,x^2) \\ &= (2\,c_1+c_2-c_3) + x\,(c_1+2\,c_2+c_3) + x^2\,(-c_1+c_2+3\,c_3) \end{aligned}$$

(a) Man versucht das Nullpolynom als Linearkombination zu schreiben. Das führt auf

$$c_1\,f_1\,(x) + c_2\,f_2\,(x) + c_3\,f_3\,(x) = 0 \Longleftrightarrow A\,\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A = 3 \neq 0$ ist $\vec{c} = \vec{0}$ die einzige Lösung und somit sind die drei Polynome linear unabhängig.

(b) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$A\,\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System wird gelöst durch (Taschenrechner)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und somit gilt

$$c_1\,f_1\,(x) + c_2\,f_2\,(x) + c_3\,f_3\,(x) = -4\,(2 + x - x^2) + 5\,(1 + 2\,x + x^2) - 3\,(-1 + x + 3\,x^2) = 3\,x$$

Solution pour problème 8–14 :

(a) Immer linear abhängig, da der Term x^2 fehlt.

(b)

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -a & 2 & -a & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -a & 2 & -a \end{bmatrix} \\
&= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2+a & -a \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2+a & -a \end{bmatrix} \\
&= -(2\,a - 2 - a) = 2 - a
\end{aligned}$$

Somit sind die Polynome linear unabhängig für $a \neq 2$.

Chapitre 9

Lineare Abbildungen

9.1 Definition und einleitende Beispiele

9–1 Définition : Seien U und V zwei Vektorräume. Dann ist $F\ :\ U \longrightarrow V$ eine **lineare Abbildung**, falls

1. $F\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = F\,(\vec{u}_1) + F\,(\vec{u}_2)$
2. $F\,(\lambda\,\vec{u}) = \lambda\,F\,(\vec{u})$

Hierbei sind $\vec{u}_i \in V$ beliebige Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$.

9–2 Exemple : . Sei $F\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d.h. die beiden Komponenten werden vertauscht.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
F\,(\vec{x} + \vec{y}) &= F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= F\,(\vec{x}) + F\,(\vec{y})
\end{aligned}$$

und

$$F\,(\lambda\,\vec{x}) = F\left(\begin{pmatrix} \lambda\,x_1 \\ \lambda\,x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda\,x_2 \\ \lambda\,x_1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda\,F\,(\vec{x})$$

Somit liegt eine lineare Abbildung vor. Diese Abbildung entspricht geometrisch einer Spiegelung in der Ebene an der $45°$–Geraden $x_1 = x_2$. ♢

9–3 Résultat : *Für eine lineare Abbildung F muss $F\,(\vec{0}) = \vec{0}$ sein.*

Démonstration : Für einen beliebigen Vektor $\vec{u} \in U$ gilt

$$F\,(\vec{u}) = F\,(\vec{u} + \vec{0}) = F\,(\vec{u}) + F\,(\vec{0})$$

und durch Subtraktion von $F\,(\vec{u})$ erhalten wir die Behauptung. □

Für eine lineare Abbildung gilt $F\,(\vec{0}) = \vec{0}$. Es kann aber auch Vektoren $\vec{u} \neq \vec{0}$ geben mit $F\,(\vec{u}) = \vec{0}$. Die Menge dieser Vektoren bildet den **Kern** der Abbildung.

9–4 Définition : Seien U und V Vektorräume und $F\,:\,U \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Die Menge aller $\vec{u} \in U$ mit $F(\vec{u}) = \vec{0}$ heisst **Kern** der Abbildung F. Es wird auch der Begriff **Nullraum** verwendet.
$$\ker F = \{\vec{u} \in U \,|\, F(\vec{u}) = \vec{0} \in V\}$$
- Die Menge aller $\vec{v} \in V$ für die es ein $\vec{u} \in U$ gibt mit $F(\vec{u}) = \vec{v}$ heisst **Bild** der Abbildung F.
$$\text{Image}\, F = \{F(\vec{u}) \in v \,|\, \vec{u} \in U\}$$

9.1.1 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ und $n \times m$–Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times m$–Matrix und $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $\vec{y} = \mathbf{A}\,\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und es gelten die bekannten Rechenregeln

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= \mathbf{A}\,\vec{x}_1 + \mathbf{A}\,\vec{x}_2 \\ \mathbf{A}\,(\lambda\,\vec{x}) &= \lambda\,\mathbf{A}\,\vec{x} \end{aligned}$$

Somit ist $F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix A kann als lineare Abbildung aufgefasst werden. Mit Hilfe von Basisdarstellungen von linearen Abbildungen werden wir später zeigen, dass (fast) jede lineare Abbildung als Matrix aufgefasst werden kann.

9–5 Exemple : Mit der Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
erhalten wir
$$F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$
Somit erhalten wir die selbe lineare Abbildung wie im Beispiel 9–2. Man verifiziert, dass $\ker F = \{\vec{0}\}$ und $\text{Image}\, F = \mathbb{R}^2$. ♢

9–6 Exemple : Aus der Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
erhalten wir eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, mit
$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ y - z \end{pmatrix}$$
Um $\ker \mathbf{A}$ zu bestimmen muss das Gleichungssystem
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
gelöst werden. Hierzu setzt man geschickterweise den Algorithmus von Gauss ein (LU–Zerlegung). Da die Matrix bereits in zeilenreduzierter Form vorliegt, kann man leicht ablesen, dass z beliebig gewählt werden kann. Die Werte von y und x können als Funktion von z bestimmt werden als
$$y = z \quad \text{und} \quad x = -2\,y - 3\,z = -5\,z$$

Somit ist

$$\ker \mathbf{A} = \{\begin{pmatrix} -5\,z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

d.h. alle Vielfachen des Vektors $(-5,1,1)^T$. Da das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

für beliebige Werte von a und b gelöst werden kann gilt $\mathrm{Image}\,\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$, jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ kann durch die Abbildung $\mathbf{A}$ erreicht werden. ♢

9.1.2 Lineare Abbildungen angewandt auf Polynome

9–7 Exemple : Die Ableitung eines Polynomes in $\mathbb{P}_4$ ergibt wiederum in solches Polynom. Es gelten die bekannten Rechenregeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(f\,(x) + g\,(x)) &= \frac{d}{dx}\,f\,(x) + \frac{d}{dx}\,g\,(x) \\ \frac{d}{dx}\,(\lambda\,f\,(x)) &= \lambda\,\frac{d}{dx}\,f\,(x) \end{aligned}$$

Somit kann die Abbildung „Ableiten" $\frac{d}{dx}\,:\,\mathbb{P}_4 \longrightarrow \mathbb{P}_4$ als lineare Abbildung aufgefasst werden.

Die Ableitung einer Funktion f ist genau dann Null (als Funktion), wenn die Funktion $f\,(x)$ eine Konstante ist, d.h. $f \in \mathbb{P}_0$. Somit gilt

$$\ker \frac{d}{dx} = \mathbb{P}_0$$

Leiten wir ein Polynom in $\mathbb{P}_4$ ab, so erhalten wir ein Polynom von tieferem Grad, in $\mathbb{P}_3$. Jedes Polynom in P_3 kann als Ableitung eines Polynoms in $\mathbb{P}_4$ geschrieben werden. Somit haben wir

$$\mathrm{Image}\,\frac{d}{dx} = \mathbb{P}_3$$

♢

9–8 Exemple : Verwendet man die Standardbasis in $\mathbb{P}_4$ so können Polynome $f \in \mathbb{P}_4$ mit Vektoren $\vec{f} \in \mathbb{R}^5$ identifiziert werden.

$$f\,(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 \in \mathbb{P}_4 \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Die Ableitung f' eines solchen Polynoms kann auch mit einem neuen Vektor identifiziert werden

$$f'\,(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + 0\,x^4 \in \mathbb{P}_4 \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2\,a_2 \\ 3\,a_3 \\ 4\,a_4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Geht man vom Vektor $f \in \mathbb{R}^5$ aus, so kommt man mit Hilfe der obigen Konstruktion auf den Vektor $\vec{g} \in \mathbb{R}^5$. Man überprüft leicht, dass

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2\,a_2 \\ 3\,a_3 \\ 4\,a_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{f} \in \mathbb{R}^5$$

Somit kann das Ableiten des Polynoms $f\,(x)$ auch als Multiplikation des Vektors $\vec{f}$ mit der Matrix $\mathbf{A}$ aufgefasst werden. Das untenstehende Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} f\,(x) \in \mathbb{P}_4 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & f'\,(x) \in \mathbb{P}_5 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{f} \in \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \vec{g} \in \mathbb{R}^5 \end{array}$$

Der Kern der Matrix $\mathbf{A}$ ist gegeben durch alle Vielfachen des Vektors $(1, 0, 0, 0, 0)^T$ und das Bild als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathrm{Image}\,\mathbf{A}$ ist gegeben als Linearkombination der Spalten der Matrix $\mathbf{A}$. ♢

9.2 Lineare Abbildungen von der Ebene in die Ebene und 2×2–Matrizen

Nun untersuchen wir Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sehr sorgfältig. Obwohl alle Rechnungen nur für je zwei Komponenten ausgeführt werden lassen sich alle Ideen und Verfahren auf allgemeinere Situationen übertragen. Einzig die Matrizen werden grösser, die Bilder komplexer und die Rechnungen mühsamer.

9.2.1 Einführende Beispiele

Das folgende, wichtige Beispiel zeigt die geometrische Interpretation einer 2×2–Matrix als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Die (hier) einfache Illustration lässt sich auf komplexere Situationen übertragen. **Es ist wichtig anhand dieses Beispiels die Verbindung von Rechnung und geometrischer Interpretation gut zu verstehen**.

9–9 Exemple : Wir untersuchen die durch die Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung gegeben durch

$$\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Basisvektoren (der Standardbasis) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\,\vec{e}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

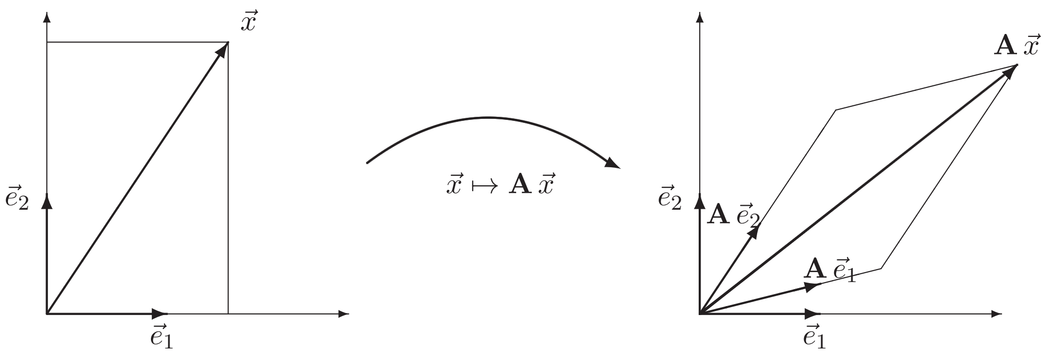


Figure 9.1: Lineare Abbildung, angewandt auf ein Rechteck

Somit finden Sie **in den Spalten der Matrix A die Bilder der Basisvektoren**. In Abbildung 9.1 finden Sie die Basisvektoren (links) und ihre Bilder (rechts).

Da die Abbildung linear ist gilt für den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.25 \end{pmatrix} = 1.5\,\vec{e}_1 + 2.25\,\vec{e}_2$$

die Beziehung

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \mathbf{A}\,(1.5\,\vec{e}_1 + 2.25\,\vec{e}_2) = 1.5\,\mathbf{A}\,\vec{e}_1 + 2.25\,\mathbf{A}\,\vec{e}_2 = 1.5\begin{pmatrix} 1 \\ 0.25 \end{pmatrix} + 2.25\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

Auch diese Beziehung ist Abbildung 9.1 illustriert. In Abbildung 9.2 sehen Sie ein gleichmässiges Gitter (links) in der Ebene und das selbe Gitter nachdem alle Punkte (Vektoren) mit der Matrix **A** multipliziert wurden. $\diamondsuit$

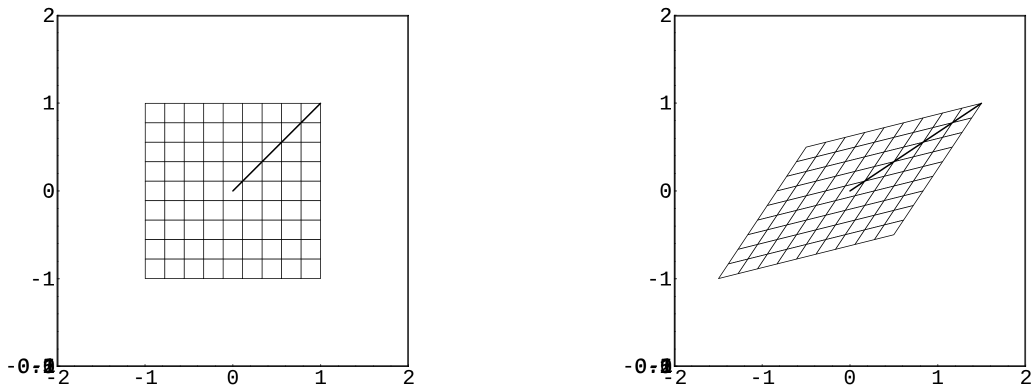


Figure 9.2: Gitter und Bild des Gitters in der Ebene

Die Figuren in Abbildung 9.2 wurden mit dem untenstehenden *Mathematica*–Code erzeugt.

Mathematica

```
Show[
ParametricPlot3D[{x,y,0},{x,-1,1},{y,-1,1},
  PlotPoints -> 10,
  PlotRange ->{{-2,2},{-2,2},{-1,1}},
  ViewPoint-> {0,0,100},
  Shading -> False,
  DisplayFunction -> Identity],
ParametricPlot3D[{t,t,0},{t,0,1},
```

```
  DisplayFunction -> Identity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Mathematica

```
matrix={{1,0.5,0},
        {0.25,0.75,0},
        {0,0,1}};
Show[
ParametricPlot3D[matrix.{x,y,0},{x,-1,1},{y,-1,1},
  PlotPoints -> 10,
  PlotRange ->{{-2,2},{-2,2},{-1,1}},
  ViewPoint-> {0,0,100},
  Shading -> False,
  DisplayFunction -> Identity],
ParametricPlot3D[matrix.{t,t,0},{t,0,1},
  DisplayFunction -> Identity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

9–10 Exemple : Von einer linearen Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sind die Bilder der beiden Standardbasisvektoren bekannt, nämlich

$$\vec{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist das Bild eines beliebigen Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Solution: Da

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2$$

und die Abbildung F linear ist gilt

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= F(x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2) \\ &= x_1\,F(\vec{e}_1) + x_2\,F(\vec{e}_2) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,x_1 - 1\,x_2 \\ 2\,x_1 - 1\,x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

Sind von einer linearen Abbildung die Bildvektoren der Basis bekannt, so kann die zugehörige Matrix konstruiert werden, indem die Bilder der Basisvektoren als Spalten der Matrix verwendet werden. Die Abbildung 9.3 zeigt, dass diese Abbildung das Gitter dreht und verzerrt. ♢

Die beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ erzeugen ein Einheitsquadrat in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Fläche 1. Werden sie durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

abgebildet, so wird aus dem Quadrat ein Parallelogramm, erzeugt durch die beiden Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

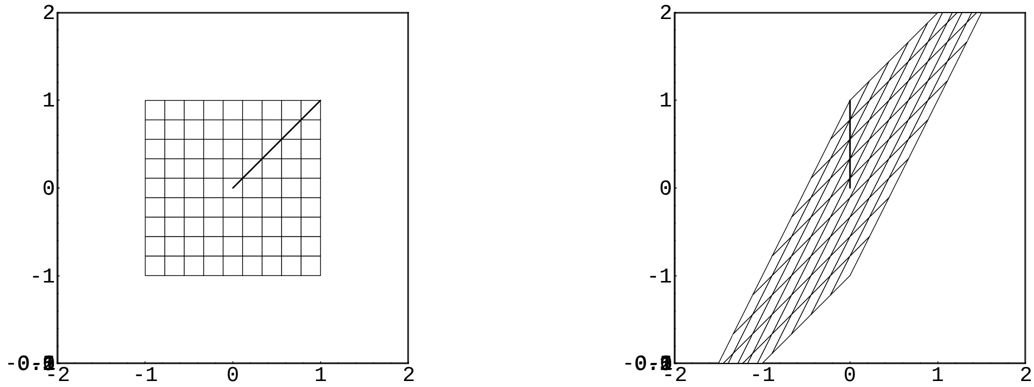


Figure 9.3: Drehen und Verzerren eines Gitters in der Ebene

Die Fläche dieses Parallelogramms ist gegeben durch

$$\det\ \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Der Faktor $\det \mathbf{A}$ gibt an um welchen **Faktor Flächen vergrössert werden durch die Abbildung**. Ist $\det \mathbf{A} < 0$, so wird die Orientierung geändert.

Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist beschrieben durch eine 2×2–Matrix, wobei die Bilder der Standardbasis in den Spalten der Matrix stehen. Es gibt aber noch viele andere Arten lineare Abbildungen zu beschreiben. Im Folgenden wird aus gegebenener Information über die lineare Abbildung die zugehörige Matrix berechnet oder aus der Matrix Information über die zugehörige lineare Abbildung extrahiert. Wir untersuchen

- Abbildung gegeben durch die Bilder der Standardbasisvektoren (siehe vorangehender Abschnitt).
- Abbildung gegeben durch die Bilder zweier beliebiger Vektoren.
- Abbildung gegeben durch zwei reelle Eigenvektoren und Eigenwerte.
- Drehungen in der Ebene.
- Abbildung gegeben durch eine symmetrische Matrix.
- Abbildung gegeben durch komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren.

Fast alle Untersuchungen werden wir später auf andere Fälle übetragen, z.B. Abbildung vom Raum $\mathbb{R}^3$ in den Raum $\mathbb{R}^3$.

9.2.2 Abbildung gegeben durch die Bilder zweier beliebiger Vektoren

Zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Somit kann jeder Vektor in $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden Vektoren geschrieben werden. Das Bild eines beliebigen Vektor unter einer linearen Abbildung kann somit als Linearkombination der Bilder der beiden Basisvektoren geschrieben werden. Daraus wird ersichtlich, dass eine lineare Abbildung vollständig bestimmt ist durch die Bilder einer Basis. Dieses Verhalten wird durch das folgende Beispiel illustriert.

9–11 Exemple : Von einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) weiss man, dass

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. man kennt die Bilder zweier Vektoren. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

Solution: Aus den beiden gegebenen Bedingungen folgt

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung kann von rechts mit der geeigneten inversen Matrix multipliziert werden um man erhält

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können mit Hilfe von

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kontrolliert werden.

Mit diesem Lösungsverfahren musste eine 2×2–Matrix invertiert werden. ♢

9–12 Exemple : Die vorangehende Aufgabe könnte auch mit einem anderen, allerdings ineffizienteren Verfahren gelöst werden. Zu finden ist eine Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt auf vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 1\,a_{11} & +2\,a_{12} = 3 \\ 1\,a_{21} & +2\,a_{22} = 4 \\ -1\,a_{11} & +1\,a_{12} = 2 \\ -1\,a_{21} & +1\,a_{22} = 0 \end{aligned}$$

oder mit Hilfe der Matrizennotation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir wie in der vorangehenden Aufgabe auch hier

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Mit diesem Lösungsverfahren musste ein System von vier Gleichungen gelöst werden. Das ist ein erheblich grösserer Aufwand als das Invertieren einer 2×2–Matrix. ♢

9–13 Résultat : *Es ist sehr einfach eine 2×2–Matrix zu invertieren, nämlich*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Die beiden Zahlen auf der Diagonalen werden vertauscht und die Vorzeichen der beiden Einträge in der Gegendiagonalen wechseln das Vorzeichen. Dazu kommt noch die Division durch die Determinate der Matrix.

Die folgende Rechnung mit *Mathematica* bestättigt das obige Resultat.

Mathematica

```
mat={{a,b},{c,d}};
Det[mat]*Inverse[mat] //MatrixForm
.
d    -b

-c   a
```

9.2.3 Abbildung gegeben durch zwei reele Eigenvektoren und Eigenwerte

9–14 Exemple : Von einer Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt, dass sie den Vektor $(1,3)^T$ um den Faktor 3 streckt und den Vektor $(4,1)^T$ am Ursprung spiegelt und seine Länge halbiert. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$. Eine Illustration dieser Abbildung finden Sie in Abbildung 9.4.

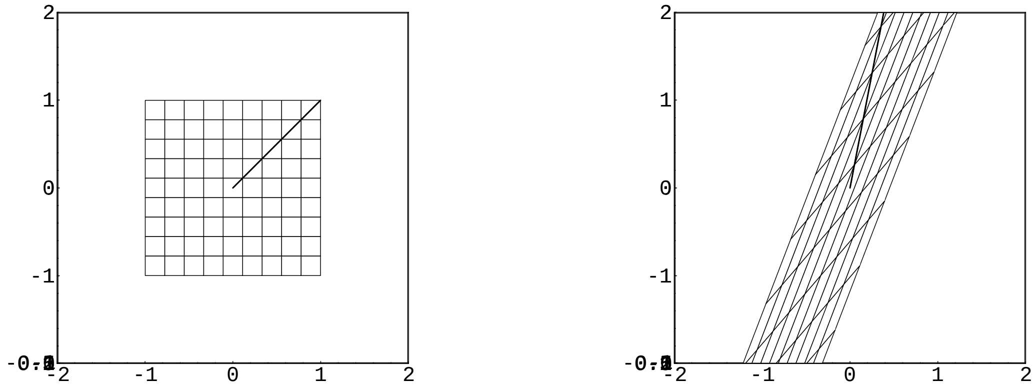


Figure 9.4: Gitter und ein durch lineare Abbildung verzerrtes Gitter in der Ebene

Solution: Aufgrund der obigen Beschreibung der Matrix $\mathbf{A}$ gilt

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

Somit sind die beiden gegebenen Vektoren **Eigenvektoren** der Matrix $\mathbf{A}$ und die Zahlen 3 und $\frac{-1}{2}$ sind **Eigenwerte**. Wie in den beiden vorangehenden Aufgaben sind die Bilder zweier linear unabhängiger Vektoren gegeben und die Matrix $\mathbf{A}$ ist zu bestimmen.

Statt einen Eigenvektor mit der Matrix $\mathbf{A}$ zu multiplizieren, kann man ihn auch mit dem entsprechenden Eigenwert multiplizieren ($\mathbf{A}\,\vec{e} = \lambda\,\vec{e}$). Durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

wird die erste Spalte mit drei multipliziert und die zweite mit $\frac{-1}{2}$. Somit gilt

$$\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

und deshalb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

Setzt man Zahlen ein so ergibt sich nach einigen Rechnungen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix}-18 & 28\\-21 & 73\end{bmatrix}$$

Die Überlegungen sind vergleichbar mit Beispiel 9–11. Der Faktor $\frac{1}{22}$ ist leicht zu finden wegen

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ein weiterer Faktor $\frac{1}{2}$ entsteht durch die Multiplikation mit der Diagonalmatrix. $\diamondsuit$

9–15 Exemple : Die lineare Abbildung $F\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im vorangehenden Beispiel war gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} -18 & 28 \\ -21 & 73 \end{bmatrix}$$

d.h. $F\,(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$. Die Spalten der Matrix beinhalten die Bilder der Standardbasisvektoren.

$$\begin{aligned} F\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -18 \\ -21 \end{pmatrix} \\ F\,(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 28 \\ 73 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Zahlen in der Matrix $\mathbf{A}$ sind somit eng an die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gebunden. Die beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig und bilden somit auch eine Basis in $\mathbb{R}^2$. Für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es Koeffizienten c_1 und c_2 mit

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + c_2\,\vec{v}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Angaben in der vorangehenden Aufgabe zeigen, dass

$$F\,(\vec{v}_1) = 3\,\vec{v}_1 \quad \text{und} \quad F\,(\vec{v}_2) = \frac{-1}{2}\,\vec{v}_2$$

und somit (Linearität)

$$\begin{aligned} F\,(\vec{x}) &= F\,(c_1 \vec{v}_1 + c_2\,\vec{v}_2) \\ &= c_1\,F\,(\vec{v}_1) + c_2\,F\,(\vec{v}_2) \\ &= c_1\,3\,\vec{v}_1 + c_2\,\frac{-1}{2}\,\vec{v}_2 \end{aligned}$$

Diese Zuordnung kann auch folgendermassen dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\,c_1 \\ \frac{-1}{2}\,c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Somit kann die selbe Abbildung F in der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dargestellt werden durch die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Die Verbindung der Matrix A zur Matrix D wird gegeben durch die Beziehung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$$

oder auch

$$\mathbf{D}=\left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2}\end{array}\right]=\mathbf{E}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$$

In den Spalten der Matrix $\mathbf{E}$ stehen die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Aufgrund dieser Beziehung sollte klar sein, weshalb die Matrix $\mathbf{E}$ den **Basiswechsel** beschreibt.

Dieselbe lineare Abbildung $F\ :\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ kann also zu verschiedenen Matrizendarstellungen führen. Das kann durch ein kommutatives Diagramm illustriert werden, siehe Abbildung 9.5. Für die Standardbasis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ erhalten wir die untere Hälfte der Diagramms, für die anderen Basis $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ erhalten wir die obere Hälfte. In der zweiten

$$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_2\end{array}\right) & \xrightarrow{\mathbf{D}} & \mathbf{D}\left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2\end{array}\right) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2 & & F\left(\vec{x}\right)=d_1\vec{v}_1+d_2\vec{v}_2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x}\in\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & F\left(\vec{x}\right)\in\mathbb{R}^2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2 & & F\left(\vec{x}\right)=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2 \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2\end{array}\right) & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbf{A}\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2\end{array}\right)
\end{array}$$

Figure 9.5: Darstellung einer Abbildung durch verschiedene Matrizen

Basis ist die Darstellungsmatrix $\mathbf{D}$ speziell einfach, es ist eine Diagonalmatrix. Dieser Spezialfall tritt ein, weil die Vektoren $\vec{v}_i$ Eigenvektoren der linearen Abbildung F sind. Der geometrische Effekte dieser Abbildung lässt sich so leicht erklären. $\diamondsuit$

9.2.4 Drehungen in der Ebene

9–16 Exemple : Nun untersuchen wir die Matrix

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{array}\right]$$

und die zugehörige lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x}\mapsto\mathbf{A}\,\vec{x}=\left[\begin{array}{cc}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{array}\right]\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2\end{array}\right)$$

Für die beiden Basisvektoren (der Standardbasis) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\,\vec{e}_1 &= \left[\begin{array}{cc}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{array}\right]\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\cos\phi \\ \sin\phi\end{array}\right) \\
\mathbf{A}\,\vec{e}_2 &= \left[\begin{array}{cc}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{array}\right]\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-\sin\phi \\ \cos\phi\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $\phi=\frac{\pi}{6}=30^\circ$ erhalten wir

$$\mathbf{A}\,\vec{e}_1 = \left(\begin{array}{c}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}\,\vec{e}_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass $\|\mathbf{A}\,\vec{e}_1\| = \|\mathbf{A}\,\vec{e}_2\| = 1$. Somit haben die Einheitsvektoren ihre Länge durch die Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{A}$ nicht geändert. Beide Basisvektoren wurden um den Winkel $\phi = 30^\circ$ (im Gegenuhrzeigersinn) gedreht. Dies ist in Abbildung 9.6 zu beobachten. ♢

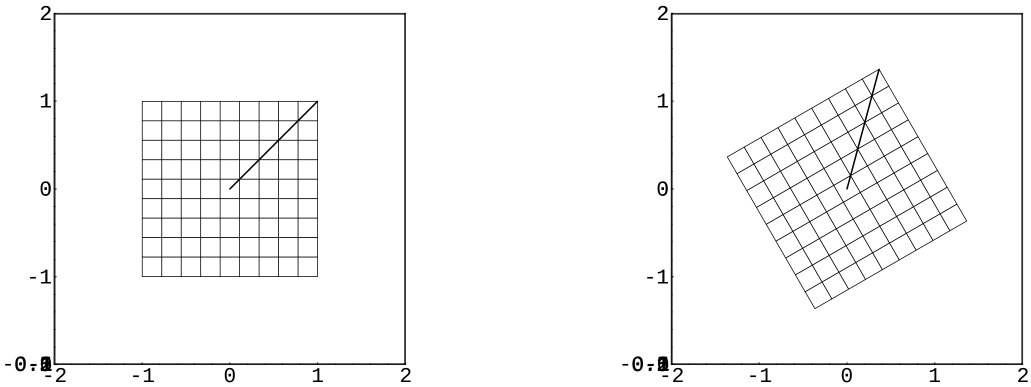


Figure 9.6: Gitter und um 30° gedrehtes Gitter in der Ebene

Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|^2 &= \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \cos^2\phi\,x_1^2 + \sin^2\phi\,x_2^2 - 2\sin\phi\,x_1\,\cos\phi\,x_2 \\
&\quad + \sin^2\phi\,x_1^2 + \cos^2\phi\,x_2^2 + 2\cos\phi\,x_1\,\sin\phi\,x_2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

Das Bild des Vektors ($\mathbf{A}\,\vec{x}$) hat die selbe Länge wie der ursprüngliche Vektor ($\vec{x}$). Die Abbildung dreht den Vektor. Um den Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ zu bestimmen verwenden wir

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\cos\alpha &= \langle \vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi\,x_1 - \sin\phi\,x_2 \\ \sin\phi\,x_1 + \cos\phi\,x_2 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \cos\phi\,x_1^2 - \sin\phi\,x_1\,x_2 + \sin\phi\,x_1\,x^2 + \cos\phi\,x_2^2 \\
&= \cos\phi\,(x_1^2 + x_2^2) = \cos\phi\,\|\vec{x}\|^2 \\
&= \cos\phi\,\|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|
\end{aligned}$$

Es ist also $\cos\alpha = \cos\phi$ und es werden **alle Vektoren um den Winkel ϕ gedreht**.

9–17 Résultat : *Soll ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene um den Winkel ϕ im positiven Sinn gedrecht werden (Gegenuhrzeigesinn), so kann er mit der **Drehmatrix** $\mathbf{A}$ multipliziert werden. Es ist*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Die inverse Matrix ist leicht zu bestimmen (Drehung um den Winkel $-\phi$) als

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

9–18 Exemple : Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen
Mit Hilfe der obigen Rotationsmatrizen können die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen leicht verifiziert werden. Dreht man einen Vektor zuerst um α, dann um β, so wird er insgesamt um $\alpha+\beta$ gedreht. Stell man dies durch Matrizenmultiplikationen dar, so gilt mit

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

die Identität

$$\mathbf{D}(\alpha+\beta) = \mathbf{D}(\beta)\cdot\mathbf{D}(\alpha)$$

Ausgeschrieben heisst das

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vergleicht man die Einträge in der ersten Spalte der obigen Matrizen, so kann man ablesen, dass

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

◇

9.2.5 Abbildung gegeben durch eine symmetrische Matrix

9–19 Exemple : In Beispiel 9–16 haben wir gesehen, dass die inverse Matrix der Drehmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Schreiben wir das Skalarprodukt

$$\langle\vec{y},\vec{x}\rangle = y_1\,x_1 + y_2\,x_2 = \vec{y}^T\cdot\vec{x}$$

als Produkt von zwei (sehr speziellen) Matrizen so erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{A}\,\vec{x},\mathbf{A}\,\vec{y}\rangle &= (\mathbf{A}\vec{x})^T\,\mathbf{A}\vec{y} \\ &= \vec{x}^T\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\vec{x} \\ &= \langle\vec{x},\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\vec{y}\rangle \\ &= \langle\vec{x},\vec{y}\rangle\end{aligned}$$

für beliebige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Also gilt für $\vec{y} = \vec{x}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|^2 &= \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

d.h. $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ haben die selbe Länge. Wegen

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle &= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\ \cos\angle(\vec{x}, \vec{y}) \\ \langle \mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}\rangle &= \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{y}\|\ \cos\angle(\mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\ \cos\angle(\mathbf{A}\,\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{y}) \end{aligned}$$

ist der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gleich dem Winkel zwischen $\mathbf{A}\,\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{y}$.

Somit ändert die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\,\vec{x}$ weder Längen von Vektoren noch die Winkel zwischen Vektoren. Um diese zu verifizieren haben wir nur die Eigenschaft $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ verwendet. $\diamondsuit$

9–20 Définition : Eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ heisst **orthogonale Matrix**. Fasst man die Spalten der Matrix $\mathbf{R}$ als Vektoren auf, d.h.

$$\mathbf{R} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n]$$

so haben die Vektoren $\vec{r}_k$ je die Länge 1 und stehen paarweise senkrecht aufeiander.

9–21 Résultat : *Sei $\mathbf{R}$ eine $n \times n$–Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{r}_i$, d.h.*

$$\mathbf{R} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n]$$

Die Matrix $\mathbf{R}$ ist genau dann orthogonal, wenn alle Vektoren $\vec{r}_i$ Länge 1 haben und senkrecht aufeinander stehen.

Démonstration : Falls $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ so gilt wegen $\vec{r}_i = \mathbf{R}\,\vec{e}_i$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j\rangle &= \langle \mathbf{R}\,\vec{e}_i, \mathbf{R}\,\vec{e}_j\rangle \\ &= \langle \mathbf{R}^T\,\mathbf{R}\,\vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Das entpricht genau den gewünschten Eigenschaften der Spaltenvektoren $\vec{r}_i$.

Mit Hilfe der Definition der Matrizenmultiplikation verifiziert man elementar, dass

$$\mathbf{R}^T\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1^{\,T} \\ \vec{r}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{r}_n^{\,T} \end{bmatrix} [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n] = \begin{bmatrix} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_1, \vec{r}_n\rangle \\ \langle \vec{r}_2, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_2, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_2, \vec{r}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{r}_n, \vec{r}_1\rangle & \langle \vec{r}_n, \vec{r}_2\rangle & \ldots & \langle \vec{r}_n, \vec{r}_n\rangle \end{bmatrix}$$

Haben nun die Vektoren $\vec{r}_i$ alle Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander, so gilt

$$\mathbf{R}^T\,\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_N$$

und somit ist $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. $\square$

Das folgende Resultat beschreibt das Verhalten von linearen Abbildungen, die durch **symmetrische** Matrizen $\mathbf{A}$ gegeben sind. Es gibt zwei zueinander senkrechte Richtungen (gegeben durch Eigenvektoren) in diese Richtungen werden die Vektoren um feste Faktoren (Eigenwerte) gestreckt. Das Resultat ist nicht nur für 2×2–Matrizen richtig, sondern gilt auch für symmetrische $n \times n$–Matrizen. Allerdings beweisen wir das Resultat nur für den zweidimensionalen Fall.

9–22 Résultat : *Für jede **symmetrische** 2×2–Matrix* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

gibt es eine Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

so dass

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T$$

*Die Diagonalelemente λ_i sind die **Eigenwerte der symmetrischen Matrix** $\mathbf{A}$ **und in den Spalten der Matrix** $\mathbf{R}$ **stehen normalisierte Eigenvektoren der Matrix** $\mathbf{A}$**.** Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

Statt den Vektor mit der Matrix $\mathbf{A}$ zu multiplizieren kann man ihn auch mit $\mathbf{R}$ multiplizieren, das Resulat mit der Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ multiplizieren und dann mit $\mathbf{R}^T$ multiplizieren. Das führt auf Tabelle 9.1. Der Effekt der drei Multiplikationen kann geometrisch leicht beschrieben werden.

Rechnung	Geometrische Beschreibung
$\mathbf{A}\,\vec{x}$	
$\mathbf{R}\,\vec{x}$	Drehung um Winkel ϕ
$\mathbf{D}\,(\mathbf{R}\,\vec{x})$	Streckung um λ_1 in eine Richtung Streckung um λ_2 in senkrechte Richtung
$\mathbf{R}^T\ (\mathbf{D}\,\mathbf{R}\,\vec{x})$	Drehung um Winkel $-\phi$

Tableau 9.1: Multiplikation mit symmetrischer Matrix zerlegt als Drehung / Streckung / Drehung

Démonstration : Die Beweisidee wurde [Twom77, p. 65] entnommen. Da $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix ist gilt

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Wir müssen den Drehwinkel ϕ bestimmen, sodass $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ zu einer Diagonalmatrix wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}\cos\phi + a_{12}\sin\phi & -a_{11}\sin\phi + a_{12}\cos\phi \\ a_{21}\cos\phi + a_{22}\sin\phi & -a_{21}\sin\phi + a_{22}\cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_{11}\cos^2\phi + (a_{12} + a_{21})\cos\phi\sin\phi + a_{22}\sin^2\phi \\ d_{12} &= -a_{11}\cos\phi\sin\phi + a_{12}\cos^2\phi - a_{21}\sin^2\phi + a_{22}\cos\phi\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= -a_{11}\cos\phi\sin\phi - a_{12}\sin^2\phi + a_{21}\cos^2\phi + a_{22}\cos\phi\sin\phi \\ d_{22} &= a_{11}\sin^2\phi - (a_{12}+a_{21})\cos\phi\sin\phi + a_{22}\cos^2\phi \end{aligned}$$

Die beiden Nebendiagonalelemente $d_{12} = d_{21} = 0$ müssen Null sein, damit $\mathbf{D}$ zu einer Diagonalmatrix wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn $d_{12} + d_{21} = 0$ und $d_{12} - d_{21} = 0$. Nun setzen wir die Bedingung $A = A^T$ eine, d.h. $a_{21} = a_{12}$. Die Differenz $d_{12} - d_{21} = 0$ verschwindet immer. Für die Summe erhalten die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= d_{12} + d_{21} = -2\,a_{11}\cos\phi\sin\phi + 2\,a_{12}\,(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\,a_{22}\cos\phi\sin\phi \\ &= (a_{22} - a_{11})\,2\,\cos\phi\sin\phi + 2\,a_{12}\,(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ &= (a_{22} - a_{11})\,\sin 2\,\phi + 2\,a_{12}\,\cos 2\phi \end{aligned}$$

Wir wählen somit den Drehwinkel ϕ aufgrund der Bedingung

$$\tan(2\phi) = \frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi)} = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

Diese Bedingung ist immer erfüllbar, selbst wenn $a_{11} - a_{22} = 0$. Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Wir haben noch zu zeigen, dass wir auch Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt haben.

Wegen $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und der obigen Gleichung gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T$$

Betrachten wir die Spalten von $\mathbf{R}$ als Vektoren und rechnen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}\cos\phi & -d_{22}\sin\phi \\ d_{11}\sin\phi & d_{22}\cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multipliziert man die Matrix $\mathbf{R}$ mit $\mathbf{A}$, so wird die jede Spalte von $\mathbf{R}$ mit der entsprechenden Diagonalzahl aus $\mathbf{D}$ multipliziert. Führen wir die Multiplikation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$ Spaltenweise auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} &= d_{11} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} &= d_{22} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit hat das homogene Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - d_{11}\mathbb{I})\vec{e} = \begin{bmatrix} a_{11} - d_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - d_{11} \end{bmatrix} \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung, d.h. die Determinate muss Null sein. Somit ist $\lambda = d_{11}$ eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2$$

d_{11} und d_{22} sind die **Eigenwerte** der Matrix $\mathbf{A}$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen. Sei dazu

$$\mathbf{A}\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{v} = \mu\,\vec{v}$$

mit $\mu \neq \lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\,\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle &= \langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle - \langle \vec{u}, \mu\vec{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{A}\,\vec{u}, \vec{v}\rangle - \langle \vec{u}, \mathbf{A}\,\vec{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{A}\,\vec{u}, \vec{v}\rangle - \langle \mathbf{A}^T\,\vec{u}, \vec{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{A}\,\vec{u}, \vec{v}\rangle - \langle \mathbf{A}\,\vec{u}, \vec{v}\rangle = 0
\end{aligned}$$

Da $(\lambda - \mu) \neq 0$ ist muss $\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = 0$ sein, d.h. $\vec{v}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$. □

Das obige Resultat ist auch richtig für grössere, symmetrische Matrizen.

9–23 Résultat : *Für jede* ***symmetrische*** $n \times n$*–Matrix* A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gibt es eine orthogonale Matrix $\mathbf{R}$ *und eine Diagonalmatrix* $\mathbf{D}$*, so dass*

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}^T$$

Die Diagonalelemente λ_i *sind die* ***Eigenwerte der symmetrischen Matrix*** $\mathbf{A}$ ***und in den Spalten der Matrix*** $\mathbf{R}$ ***stehen normalisierte Eigenvektoren der Matrix*** $\mathbf{A}$***.*** *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.*

9–24 Exemple : Beschreiben Sie das Verhalten der Abbildung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Solution: Wir suchen die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{R}^T$$

Im Beweis des Satzes 9–22 sehen wir

$$\tan(2\phi) = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{6}{2-1} = 6$$

Daraus ergibt sich $\phi = \frac{1}{2}\arctan 6 \approx 0.703 \approx 40.3°$. Somit erhalten wir

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.76302 & -0.64637 \\ 0.64637 & 0.76302 \end{bmatrix}$$

Die beiden Eigenwerte können wir nun aus den Bedingungen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0.76302 \\ 0.64637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.46516 \\ 2.93543 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0.76302 \\ 0.64637 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 \approx 4.5414$$

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -0.64637 \\ 0.76302 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99631 \\ -1.17610 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -0.64637 \\ 0.76302 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 \approx -1.5414$$

ablesen. Die beiden Eigenwerte müssen auch Lösung der charakteristischen Gleichung sein.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 3\,\lambda - 7 = 0$$

Das ergibt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(3 \pm \sqrt{9+28}\right) = \begin{cases} 4.5414 \\ -1.5414 \end{cases}$$

Somit kann das Vehalten der linearen Abbildung wie folgt beschrieben werden:

1. Multiplikation mit $\mathbf{R}^{-1}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx -40.3°$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit $\mathbf{D}$:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx 4.54$
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx -1.54$ (Spiegelung und Streckung)
3. Multiplikation mit $\mathbf{R}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx 40.3°$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In diesem (einfachen) Beispiel haben wir zuerst die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix berechnet, dann mit deren Hilfe die Eigenwerte. Üblicherweise arbeitet man in der anderen Reihenfolge:

1. Berechne die Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}) = 0$$
2. Für jeden Eigenwert λ_i hat das lineare Gleichungssystem
$$\mathbf{A}\,\vec{v} - \lambda_i\,\vec{v} = \vec{0}$$
eine nichttriviale Lösung $\vec{v}$, einen Eigenvektor. Dieser kann bei Bedarf normiert werden.

♢

9–25 Exemple : Die Abbildung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

des vorangehenden Beispiels kann auch mit *Mathematica* oder MATLAB untersucht werden.

Mathematica

```
N[Eigensystem[{{2,3},{3,1}}]]
.
{{-1.54138, 4.54138}, {{-0.847127, 1.}, {1.18046, 1.}}}
```

Leider sind die von *Mathematica* berechneten Eigenvektoren (noch) nicht normiert. Mit einigen zusätzlichen Befehlen kann dem aber abgeholfen werden.

Mathematica

```
Clear[vec,val]
{val,vec}=N[Eigensystem[{{2,3},{3,1}}]];
{val[[1]],vec[[1]]/Sqrt[vec[[1,1]]^2+vec[[1,2]]^2]}
{val[[2]],vec[[2]]/Sqrt[vec[[2,1]]^2+vec[[2,2]]^2]}
.
{-1.54138, {-0.646375, 0.76302}}
{4.54138,  { 0.76302,  0.646375}}
```

MATLAB liefert direkt die gewünschten Resultate.

Matlab

```
[vectors,values]=eig([2,3;3,1])
.
vectors =

   0.76302  -0.64637
   0.64637   0.76302

values =

   4.54138   0.00000
   0.00000  -1.54138
```

♢

9.2.6 Abbildung gegeben durch komplexe Eigenvektoren und Eigenwerte

Die Eigenwerte einer reellen 2×2–Matrix sind Nullstellen eines Polynoms der Ordnung 2. Deshalb ist es möglich, dass es keine reellen Eigenwerte gibt, sondern ein Paar von konjugiert komplexen Eigenwerten. Dazu gibt es dann auch komplexe Eigenvektoren. Wir wollen untersuchen wie sich eine lineare Abbildung mit einer solchen Matrix verhält.

9–26 Exemple : Untersuchen Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind Lösungen der Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0$$

und somit gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm i\,3 = \alpha \pm i\,\beta$$

Um den Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + i\,3$ zu bestimmen muss man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -9 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -i\,3 & -9 \\ 1 & -i\,3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine einfache (nicht normierte) Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u} + i\,\vec{w}$$

mit reellen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$. Wir haben den komplexen Eigenvektor $\vec{v}$ zerlegt in Real- und Imaginär–Teil. Da die Matrix A reell ist gilt $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) &= \overline{\mathbf{A}}\;\overline{(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\mathbf{A}\,(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\lambda_1\,(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \overline{\lambda_1}\;\overline{(\vec{u} + i\,\vec{w})} \\ &= \lambda_2\,(\vec{u} - i\,\vec{w}) \end{aligned}$$

Somit ist der zu $\vec{v} = \vec{u}+i\vec{w}$ konjugiert komplexe Vektor $\vec{u}-i\vec{w}$ der Eigenvektor zum konjugiert komplexen Eigenwert $\lambda_2 = \alpha - i\,\beta = 1 - i3$. Folglich gelten die beiden komplexen Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,(\vec{u}+i\,\vec{w}) &= (\alpha+i\,\beta)\,(\vec{u}+i\,\vec{w}) = (\alpha\,\vec{u}-\beta\,\vec{w}) + i\,(\alpha\,\vec{w}+\beta\,\vec{u})\\ \mathbf{A}\,(\vec{u}-i\,\vec{w}) &= (\alpha-i\,\beta)\,(\vec{u}-i\,\vec{w}) = (\alpha\,\vec{u}-\beta\,\vec{w}) - i\,(\alpha\,\vec{w}+\beta\,\vec{u})\end{aligned}$$

Diese beiden komplexen Gleichungen können addiert und subtrahiert werden. Dividiert man die entsprechenden Resultate durch 2 so erhält man die beiden reellen Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,\vec{u} &= \alpha\,\vec{u}-\beta\,\vec{w}\\ \mathbf{A}\,\vec{w} &= \alpha\,\vec{w}+\beta\,\vec{u}\end{aligned}$$

Hier sieht man, dass bei einer Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{A}$ sowohl der Vektor $\vec{u}$ als auch $\vec{w}$ um den Faktor α gestreckt werden, dann wird noch das β–fache des anderen Vektors dazu addiert (resp. subtrahiert). Da die beiden reellen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind[1], bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis kann ein beliebiger Vektor geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\vec{y} = c_1\,\vec{u}+c_2\,\vec{w} \Longrightarrow \mathbf{A}\,\vec{y} &= c_1\,\mathbf{A}\,\vec{u}+c_2\,\mathbf{A}\,\vec{w}\\ &= c_1\,(\alpha\,\vec{u}-\beta\,\vec{w})+c_2\,(\alpha\,\vec{w}+\beta\,\vec{u})\\ &= c_1\,(\alpha\,\vec{u}-\beta\,\vec{w})+c_2\,(\alpha\,\vec{w}+\beta\,\vec{u})\\ &= (\alpha\,c_1+\beta\,c_2)\,\vec{u}+(-\beta\,c_1+\alpha\,c_2)\,\vec{w}\\ &= d_1\,\vec{u}+d_2\,\vec{w}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Diese Matrix entspricht der Darstellung der linearen Abbildung in der Basis $\{\vec{u},\vec{w}\}$. Setzt man

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{\alpha}{\beta}$$

und fasst $(\alpha,\beta)^T$ als Punkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf, so kann man mit Polarkoordinaten schreiben

$$\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\end{pmatrix} = r\,\begin{pmatrix} \cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix} = r\,\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

Somit bewirkt die Abbildung in der Basis $\{\vec{u},\vec{w}\}$ einer Drehung um den Winkel $-\phi$ und einer anschliessenden Streckung um den Faktor r. Diese Beschreibung ist einfach. In der Standardbasis ergibt die Matrix $\mathbf{A}$ keine reine Drehung, wie sie in Abbildung 9.7 beobachten. Die Streckung ist nicht in alle Richtungen gleich gross und es gibt auch noch Scherungen. Diese Beschreibung ist weniger einfach. Die obige Darstellung hat sehr viel zu tun mit der Polardarstellung der komplexen Zahl

$$\lambda_1 = \alpha+i\,\beta = r\,e^{i\phi} \quad \text{wobei} \quad r^2 = \alpha^2+\beta^2 \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{\alpha}{\beta}$$

Dies wird illustriert durch die folgende Sequenz von Abbildungen.

[1]Beweis durch Widerspruch: Falls $\vec{w} = k\,\vec{u}$ so gilt wegen $\mathbf{A}\,(\vec{u}+i\,\vec{w}) = (\alpha+i\,\beta)\,(\vec{u}+i\,\vec{w})$ die Gleichung

$$\mathbf{A}\,(1+i\,k)\,\vec{u} = (\alpha+i\,\beta)\,(1+i\,k)\,\vec{u}$$

Nach einer Division durch $(1+i\,k)\neq 0$ gilt somit

$$\mathbf{A}\,\vec{u} = (\alpha+i\,\beta)\,\vec{u}$$

Der Ausdruck links ist reell, aber der Ausdruck recht hat einen Imaginärteil. Somit kann diese Gleichung nicht richtig sein. Wir haben den gewünschten Widerspruch.

- Basiswechsel

$$x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 = c_1\,\vec{u} + c_2\,\vec{w} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

  oder auch

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Rotation und Streckung

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- Basiswechsel rückgängig machen

$$y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 = d_1\,\vec{u} + d_2\,\vec{w} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \cdot r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

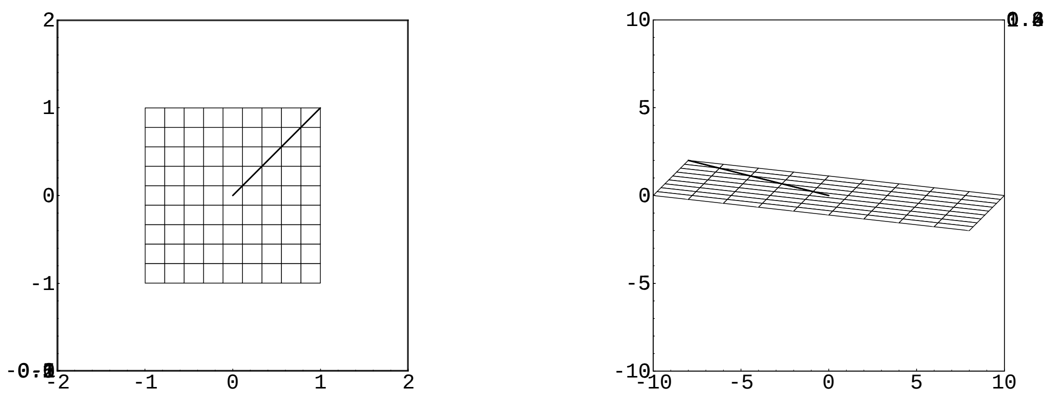


Figure 9.7: Abbildung durch komplexe Eigenwerte

Im obigen Beispiel haben wir das folgende Resultat bewiesen:

9–27 Résultat : *Ist* $\mathbf{A}$ *eine reelle* $n\times n$*–Matrix und* $\lambda = \alpha + i\beta$ *ein komplexer Eigenwert mit komplexem Eigenvektor* $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$*. So ist* $\lambda = \alpha - i\beta$ *ein komplexer Eigenwert mit komplexem Eigenvektor* $\vec{v} = \vec{u} - i\vec{w}$*, d.h.*

$$\mathbf{A}\,(\vec{u} + i\vec{w}) = (\alpha + i\,\beta)\,(\vec{u} + i\vec{w}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}\,(\vec{u} - i\vec{w}) = (\alpha - i\,\beta)\,(\vec{u} - i\vec{w})$$

Der Realteil $\vec{u}$ *und und der Imaginärteil* $\vec{w}$ *der komplexen Eigenvektors sind linear unabhängig.*

9.3 Komposition und Matrizenmultiplikation

9–28 Exemple : Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ soll folgendermassen konstruiert werden:

1. Zuerst eine Spiegelung an der y–Achse.
2. Das Resultat der obigen Operation soll um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden.
3. Das Resultat der obigen Operation soll in der x–Richtung um den Faktor 2 gestreckt werden.

Die Gesamtabbildung soll durch eine Matrizenmultiplikation in der Standardbasis dargestellt werden.

Solution: Als erstes erzeugen wir die Matrizen der einzelnen Abbildungen.

1. Spiegelung an der y–Achse
   Die Matrix
   $$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   entspricht der Abbildung
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{S}_1\,\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$
   Das ist die gewünschte Spiegelung.
2. Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn
   Der Drehwinkel ist $\phi = +\frac{\pi}{2}$ und die Drehmatrix somit
   $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
3. Streckung um Faktor 2 in x–Richtung
   Diese Abbildungsmatrix ist gegeben durch
   $$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun setzen wir die Abbildungen zusammen.

1. Spiegelung an der y–Achse
   Der ursprüngliche Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ wird abgebildet.
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{S}_1\,\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$
2. Drehung um 90° im Uhrzeigersinn
   Das Resultat $\mathbf{S}_1\vec{x}$ muss gedreht werden
   $$\begin{array}{ccl} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \mathbf{D} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_1\,\vec{x} & \mapsto & \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$
   Durch die Komposition der ersten Spiegelung und der zweiten Drehung erhalten wir die Abbildung
   $$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \\ \vec{x} & \mapsto & \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

3. Streckung um Faktor 2 in x–Richtung
   Das Resultat $\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\vec{x}$ muss gestreckt werden.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} & \mapsto & S_2 \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,y \\ -x \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} & \mapsto & \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

   Durch die Komposition der drei Teilabbildungen erhalten wir erhalten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2\,y \\ -x \end{pmatrix} \\ \vec{x} & \mapsto & \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1\,\vec{x} \end{array}$$

Somit kann die gesamte Abbildung dargestellt werden durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind die beiden Lösungen von

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0$$

Somit ist $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ mit den Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \quad , \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\sqrt{2} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Komposition der drei Abbildungen hat insgesamt den folgenden Effekt:

- In der Richtung $(\sqrt{2},-1)^T$ eine Streckung um den Faktor $+\sqrt{2}$.
- In der Richtung $(\sqrt{2},1)^T$ Streckung um den Faktor $+\sqrt{2}$, d.h. eine Spiegelung und eine Streckung.

Mit Hilfe dieser Information kann die Gesamtabbildung gut beschrieben werden. ♢

Das obige Beispiel zeigt, dass Kompositionen von linearen Abbildungen (dargestellt durch Matrizen) zur Multiplikation der entsprechenden Matrizen führt. Das Resultat ist nicht auf lineare Abbildungen in der Ebene beschränkt.

9–29 Résultat : *Seien F und G zwei lineare Abbildungen mit*

$$\begin{array}{rl} F\ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m & \text{mit} \quad F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{y} \\ G\ : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l & \text{mit} \quad G(\vec{y}) = \mathbf{B}\,\vec{y} = \vec{z} \end{array}$$

Hierbei ist $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ und $\vec{z}\in\mathbb{R}^l$. $\mathbf{A}$ ist eine $m\times n$–Matrix und $\mathbf{B}$ ist eine $l\times m$–Matrix. Dann ist die Komposition $H = G\circ F$ (d.h. $H(\vec{x}) = G(F(\vec{x}))$) eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^l$ mit

$$H\ : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l \quad \text{und} \quad H(\vec{x}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{z}$$

$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ ist eine $l\times n$–Matrix.
Das entsprechende Resultat für die Komposition mehrerer linearer Abbildungen ist korrekt.

9–30 Exemple : In Beispiel 9–24 haben wir gesehen, dass die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^T$$

mit der Drehmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tan 2\phi = 6$$

und $\lambda_1 \approx 4.54$ und $\lambda_2 \approx -1.54$ richtig ist. Das obige Resultat zeigt, dass die Multiplikation eines Vektors $\vec{x}$ auch durch die folgenden Operationen beschrieben werden kann.

1. Multiplikation mit $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$: Drehung um den Winkel $\phi \approx -40.3°$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit $\mathbf{D}$:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx 4.54$
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx -1.54$ (Spiegelung und Streckung)
3. Multiplikation mit $\mathbf{R}$: Drehung um den Winkel $\phi \approx 40.3°$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

Das Komponieren der Abbildungen (hintereinander ausführen) entspricht dem Multiplizieren der Matrizen. Dieses Resultat haben wir bereits in Beispiel 9–24 gefunden. ♢

Die Verbindung von Komposition von linearen Abbildungen und Matrizenmultiplikation führt auf ein einfaches Verfahren Umkehrabbildungen von linearen Abbildungen zu bestimmen. Die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{I}$$

führt auf das folgende Resultat.

9–31 Résultat : *Ist eine invertierbare, lineare Abbildung beschrieben durch eine Matrix* $\mathbf{A}$*, so ist die Matrix der Umkehrabbildung gegeben durch die inverse Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$*.*

9.4 Homogene Koordinaten in der Ebene

Im vorangehenden Abschnitt wurden Drehungen und Streckungen in der Ebene als Matrizenmultiplikationen dargestellt. Es war aber (noch) nicht möglich **Translationen** als Matrizenmultiplikation aufzufassen. Eine Translation ist keine lineare Abbildung. Es gibt aber eine einfache **Trick** um auch Translationen mit Hilfe von Matrizenmultiplikationen darzustellen. Untersuchen Sie dazu die folgenden Formeln. Eine Translation um den festen Vektor $(a, b)^T$ wird untersucht.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dem 2–Vektor $(x, y)^T$ wird eine dritte Komponente (immer 1) angefügt, der verlängerte Vektor wird mit einer passenden 3–Matrix multipliziert. In der dritten Spalte dieser Matrix steckt der Vektor $(a, b)^T$ um den verschoben wird. Die dritte Zeile der Matrix enthält immer die Zahlen $(0, 0, 1)$.

Werden nun Translationen, Streckungen und Rotationen hintereinander ausgeführt, so kann dies durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen dargestellt werden. In Tabelle 9.2 finden Sie eine Zusammenstellung von einfachen Abbildungen und ihrer Matrizendarstellung. Arbeitet man mit homogenen Koordinaten so wir man oft zwischen Rechnungen mit 2 oder 3 Komponenten umschalkten müssen.

Beschreibung der Abbildung	Matrixdarstellung
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ	$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Streckung in x–Richtung um den Faktor λ	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Streckung in y–Richtung um den Faktor λ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Zwei reelle Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt, d.h. $\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \mapsto \lambda_2 \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$ wobei $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau 9.2: Affine Abbildungen in der Ebene und Matrizen mit homogene Koordinaten

9–32 Exemple : Ist eine lineare Abbildung in der Ebene gegeben durch die 2×2–Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

so wird daraus mit homogenen Koordinaten die neue 3×3–Matrix

$$\begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wird das Resultat der obigen Abbildung anschliessend um den Vektor $(a, b)^T$ verschoben, so kann das Resultat mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

multipliziert werden. Man erhält

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Statt die Matrizenmultiplikation auszuführen könnten auch die Komponenten a und b am richtigen Ort eingefügt werden.

Es ist wichtig die Multiplikation in der richtigen Reihenfolge auszuführen. Eine Matrix mit $(a, b, 1)^T$ in der dritten Spalte entspricht einer linearen Abbildung in der Ebene und einer anschliessenden Verschiebung um den Vektor $(a, b)^T$. Führt man zuerst die Verschiebung aus und anschliessen die lineare Abbildung, so führt das auf die Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\,a + a_{12}\,b \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}a + a_{22}\,b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das entspricht einer linearen Abbildung in der Ebene (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) und einer anschliessenden Verschiebung um den Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11}\,a + a_{12}\,b \\ a_{21}a + a_{22}\,b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

♢

9–33 Exemple : Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um 30° gedreht in positiver Richtung.
2. Anschliessend um den Vektor $(1, 2)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird um den Faktor 2 gestreckt in der $45°$–Richtung. Die dazu senkrechte Richtung soll nicht verändert werden.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der drei obigen Abbildungen darstellt.

Solution:

1. Drehung um 30°
   Die entsprechenden Rotationsmatrix ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Translation um $(1,2)^T$
   Die Matrix ist

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Streckungen
   Die erste Bedingung kann durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Die dazu senkrechte Richtung wird nicht verändert, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit sind zwei Eigenwerte und passende Eigenvektoren bekannt. Nun verwenden wir die Idee aus Beispiel 9–14 (Seite 270) um die passende Matrix zu konstruieren. Wegen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit ist die dritte Teilabbildung gegeben durch die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Komposition der drei Abbildungen führt nun auf die Matrix $\mathbf{A}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1.54904 & -0.31699 & 2.5 \\ 1.18301 & 1.04904 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

9–34 Exemple : Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Vektor $(1,2)^T$ verschoben.
2. Anschliessend wird um den Faktor 2 gestreckt in der $45°$–Richtung. Die dazu senkrechte Richtung soll nicht verändert werden.
3. Anschliessend um 30° gedreht in positiver Richtung.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der drei obigen Abbildungen darstellt.

Solution: Die drei Teilabbildungen sind der vorangehenden Aufgabe entnommen, einzig die Reihenfolge hat geändert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &\approx \begin{bmatrix} 1.04904 & -0.31699 & 0.415064\\ 1.18301 & 1.54904 & 4.281089\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Das Resultat unterscheidet sich erheblich von der vorangehenden Aufgabe. $\diamondsuit$

9.5 Lineare Abbildungen vom Raum $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

Genauso wie lineare Abbildungen in der Ebene können auch Abbildungen vom Raum $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ untersucht werden. Die Ideen und Rechnungen sind sinngemäss zu übertragen. Die Rechnungen sind mit Hilfe geeigneter Werkzeuge (*Mathematica*, `MATLAB`, HP–48) auszuführen.

9.5.1 Bilder der drei Basisvektoren, Eigenvektoren

9–35 Exemple : Abbildung gegeben durch Bilder von drei Vektoren
Von einer linearen Abbildung $F\ :\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ist bekannt, dass

$$F(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad,\quad F(\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad F(\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Es sind drei Vektoren und ihre Bilder gegeben. Zu bestimmen ist die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$, sodass $F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$.

Solution: Die obige Vorschrift kann nur erfüllt werden, falls die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad,\quad\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Dies ist der Fall, da

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix} = 18\neq 0$$

Wegen der obigen drei Bedingungen müssen die drei Gleichungen

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad,\quad\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathbf{A}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

erfüllt sein. Setzt man diese drei Systeme von Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt sofort

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Das Invertieren der einen Matrix und eine anschliessende Multiplikation ergeben

$$\mathbf{A} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & 15 & 6 \\ -4 & 8 & 8 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Die obigen Rechnungen können auch mit *Mathematica* ausgeführt werden.

Mathematica

```
B1 ={{1,0,-1},{2,2,0},{3,-2,4}};
Det[B1]
B2 ={{3,1,1},{2,0,2},{1,1,1}};
A=B2.Inverse[B1]
.
18

  1  5  1       2   4  4       5   11  1
{{-, -, -}, {-(-), -, -}, {-(-), --, -}}
  3  6  3       9   9  9       9   18  9
```

Eine lesbarere Darstellung erhält man durch

Mathematica

```
18 A //MatrixForm
.
6     15    6
-4    8     8
-10   11    2
```

und die Resultate können überprüft werden durch

Mathematica

```
A.{0,2,-2}
.
{1, 0, 1}
```

◇

9–36 Exemple : Abbildung gegeben durch drei Eigenvektoren
Es können auch drei Eigenvektoren und zugehörige Eigenwerte gegeben werden. Daraus kann die Matrix $\mathbf{A}$ konstruiert werden. Als Beispiel untersuchen wir eine lineare Abbildung beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{wird um den Faktor 2 gestreckt}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{wird auf die halbe Länge reduziert}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wird am Ursprung gespiegelt}$$

Daraus soll die Matrix der linearen Abbildung konstruiert werden.

Solution: Die drei Bedingungen können auch geschrieben werden als

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Mit *Mathematica* erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{16}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Das Resultat wurde erzeugt durch

Mathematica

```
B = {{1,0,-1},{2,2,0},{3,-2,4}};
A = B.{{2,0,0},{0,1/2,0},{0,0,-1}}.Inverse[B]
```

Als Kontrolle können Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix berechnet werden mit

Mathematica

```
Eigensystem[A]
```

♢

9–37 Exemple : Orthogonale Projektion auf eine Ebene
Die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 2, -1)^T$ und $\vec{b} = (0, -1, 1)^T$ spannen eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$ auf. Punkte $\vec{x}$ in dieser Ebene sollen durch die lineare Abbildung F nicht geändert werden. Liegt der Punkt $\vec{x}$ nicht in der Ebene E, so soll er entlang einer zur Ebene senkrechten Geraden auf die Ebene projiziert werden. Zu bestimmen ist die Matrix dieser linearen Abbildung F.

Solution: Da die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht verändert werden haben wir zwei Eigenvektoren mit Eigenwert 1.

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = \vec{b}$$

Der Vektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{a}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E. Durch die Abbildung F wird er auf $\vec{0}$ abbgebildet, d.h.

$$\mathbf{A}\,\vec{n} = A\,(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}$$

Genau wie beim vorangehenden Beispiel erhalten wir die Gleichung

$$\mathbf{A}\,\left[\vec{a}\;,\;\vec{b}\;,\;\vec{b} \times \vec{a}\right] = \left[\vec{a}\;,\;\vec{b}\;,\;\vec{0}\right]$$

Mit den hier gegebenen Zahlen ergibt dies $\vec{n} = (-1, 1, 1)^T$ und somit

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Die Projektion auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene ist also beschrieben durch

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das Resultat kann durch die drei Bedingungen

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad , \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = \vec{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{n} = \vec{0}$$

kontrolliert werden.

Die selbe Aufgabe kann auch ohne die Hilfe von Matrizen gelöst werden. Dazu ist der Normalenvektor $\vec{n}$ zu normieren

$$\vec{n}_{norm} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann kann die Komponente von $\vec{x}$ in Richtung $\vec{n}_{norm}$ bestimmt werden mit Hilfe des Skalarproduktes

$$\vec{x}_n = \langle \vec{x}, \vec{n}_{norm} \rangle\, \vec{n}_{norm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-x_1 + x_2 + x_3)\,\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiert man vom Vektor $\vec{x}$ seine Komponente senkrecht zur Ebene, so ergibt sich die Projektion auf die Ebene.

$$F(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Resultate der beiden Lösungswege übereinstimmen. ♢

9.5.2 Drehungen im Raum, Euler'sche Winkel

Drehungen in $\mathbb{R}^3$ sind etwas schwieriger als Drehungen in der Ebene, weil neben dem Drehwinkel auch die Drehachse berücksichtigt werden muss.

9–38 Définition : Die **positive Drehrichtung** wird durch die **rechte–Hand–Regel** festgelegt: Zeigt der Daumen der rechten Hand in die Richtung der Drehachse, so wird die positive Drehrichtung durch die leicht gebeugten Finger der rechten Hand angezeigt.

Es ist unbedingt zu beachten, dass die Drehachse gerichtet ist. Eine Drehung um den Vektor $\vec{d}$ oder den Vektor $-\vec{d}$ als Achse ergibt nicht die selbe Drehung. Der Drehsinn ändert.

9–39 Exemple : Werden Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel α um die z–Achse gedreht, so entspricht dies einer Multiplikation mit der Matrix

$$\mathbf{D}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Drehung um α mit der y–Achse and Achse ist durch

$$\mathbf{D}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

gegeben und eine Drehung um die x–Achse durch

$$\mathbf{D}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Besondere Beachtung ist den Vorzeichen zu schenken. Da Drehungen das Volumen nicht verändern und auch die Orientierung fest lassen, muss die Determinante dieser Drehmatrizen 1 sein. Dies kann leicht überprüft werden. ♢

9–40 Définition : Die Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ) in $\mathbb{R}^3$ sind bestimmt durch die Beziehungen

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\;\cos\phi\;\sin\theta \\ y &=& r\;\sin\phi\;\sin\theta \\ z &=& r\;\cos\theta \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rcl} r^2 &=& x^2+y^2+z^2 \\ \tan\,\phi &=& \frac{y}{x} \\ \tan\,\theta &=& \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{array}$$

und die passende Abbildung 9.8. Aus den Kugelkoordinaten können also leicht die kartesischen Koordinaten bestimmt werden, oder auch umgekehrt.

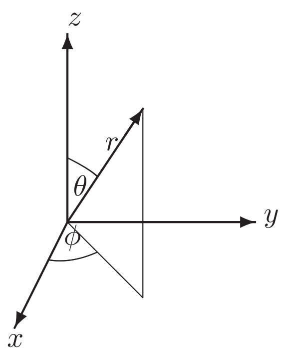


Figure 9.8: Definition von Kugelkoordinaten

Sei nun ein Richtungsvektor $\vec{d}$ gegeben ($\|\vec{d}\| = 1$). Somit ist dieser Vektor gegeben durch

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \cos\phi\;\sin\theta \\ \sin\phi\;\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor soll nun durch zwei Drehungen aus dem Vektor in z–Richtung hervorgehen. In Abbildung 9.8 ist ersichtlich, dass der Einheitsvektor $\vec{e}_3$ (z–Richtung) um den Winkel θ um die y–Achse gedreht werden kann. Der resultierende Vektor wird dann um die z–Achse um den Winkel ϕ gedreht. Das Resultat sollte der Vektor $\vec{d}$ sein. Mit Hilfe der obigen Drehmatrizen können dies zwei Drehungen dargestellt werden durch

$$\vec{d} = \mathbf{D}_z\,(\phi) \cdot \mathbf{D}_y\,(\theta)\,\vec{e}_3$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi\ \sin\theta \\ \sin\phi\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die einzelnen Drehmatrizen leicht zu invertieren sind gilt auch

$$\vec{e}_3 = (\mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta))^{-1}\ \vec{d} = \mathbf{D}_y^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{D}_z^{-1}(\phi)\ \vec{d} = \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{d}$$

Somit können wir den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\vec{d}$ drehen, und zurück. Diese Überlegungen erlauben es die Matrix einer Drehung um eine beliebige Achse $\vec{d}$ zu konstruieren. Da vom Achsenvektor $\vec{d}$ nur die Richtung wichtig ist, kann man seine Länge verwenden um den Drehwinkel anzugeben. Eine Drehung um den Vektor $\vec{d}$ bedeutet also

$$\text{Drehachse } \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} \quad \text{und Dehwinkel} \quad \alpha = \|\vec{d}\|$$

9–41 Exemple : Drehung um eine gegebene Drehachse
Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ soll um den Winkel α um die durch $\vec{d}$ gegebene Drehachse gedreht werden. Diese Drehungen wird durch die folgende Sequenz von einfacheren Drehungen dargestellt.

1. den Vektor $\vec{d}$ in $\vec{e}_3$ drehen
2. um die z–Achse drehen, Drehwinkel α
3. den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\vec{d}$ zurückdrehen

Der Effekt dieser Operationen auf einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ kann durch Matrixmultiplikationen dargestellt werden. Seien θ und ϕ die Kugelkoordinaten der Drehachse $\vec{d}$.

1.
$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{x}$$

2.
$$\vec{x}' \mapsto \vec{x}'' = \mathbf{D}_z(\alpha)\ \vec{x}'$$

3.
$$\vec{x}'' \mapsto \vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta)\ \vec{x}''$$

Insgesamt ergibt sich

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)\ \vec{x}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ der Drehung um die Achse $\vec{d}$ ist also gegeben als Produkt von 5 elementaren Drehmatrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)$$

Es sollte klar sein, dass der Vektor $\vec{d}$ durch diese Operationen insgesamt nicht verändert wird, d.h. $\mathbf{A}\ \vec{d} = \vec{d}$. Dies kann mit Hilfe des Skalarproduktes verifiziert werden. Drehmatrizen ändern die Länge von Vektoren nicht, deshalb gilt $\|\mathbf{A}\ \vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

Nun wird zuerst der Vektor $\vec{x}$ um den Winkel $-\phi$ um die z–Achse gedrecht, anschliessend um den Winkel $-\theta$ um die y–Achse, das Resultat taufen wir $\vec{y}$. Dieselbe Abbildung transformiert die Drechachse $\vec{d}$ in die z–Achse. Es gilt $\vec{y} = \mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}$ und somit $\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|$. Eine längere Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|^2\,\cos\angle(\vec{x},\mathbf{A}\,\vec{x}) &= \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\|\,\cos\angle(\vec{x},\mathbf{A}\,\vec{x}) = \langle\vec{x}\,,\,\mathbf{A}\,\vec{x}\rangle\\
&= \langle\vec{x}\,,\,\mathbf{D}_z(\phi)\cdot\mathbf{D}_y(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\alpha)\cdot\mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle\\
&= \langle\mathbf{D}_z^T(\phi)\,\vec{x}\,,\,\mathbf{D}_y(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\alpha)\cdot\mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle\\
&= \langle\mathbf{D}_y^T(\theta)\cdot\mathbf{D}_z^T(\phi)\,\vec{x}\,,\,\mathbf{D}_z(\alpha)\cdot\mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle\\
&= \langle\mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\,,\,\mathbf{D}_z(\alpha)\cdot\mathbf{D}_y(-\theta)\cdot\mathbf{D}_z(-\phi)\,\vec{x}\rangle\\
&= \langle\vec{y}\,,\,\mathbf{D}_z(\alpha)\,\vec{y}\rangle\\
&= \|\vec{y}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\angle(\vec{y},\,\mathbf{D}_z(\alpha)\,\vec{y})
\end{aligned}$$

und somit

$$\cos\angle(\vec{x},\mathbf{A}\,\vec{x}) = \cos\angle(\vec{y},\,\mathbf{D}_z\,(\alpha)\,\vec{y})$$

Somit ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\mathbf{A}\,\vec{x}$ gegeben durch den Winkel zwischen $\vec{y}$ und dem selben Vektor um die z–Achse gedreht um den Winkel α. ◊

Aus den obigen Überlegungen wird klar, dass eine Drehung durch drei Parameter vollständig bestimmt ist: zwei Winkel bestimmen die Richtung der Drehachse und zusätzlich ist der Drehwinkel zu geben. Obwohl die 3×3–Matrix einer Rotation 9 Einträge hat stehen nur drei freie Parameter zur Verfügung. Die Bedingung „Rotation" führt tatsächlich auf sechs Bedingungen:

- Die Länge der drei Basisvektoren muss 1 bleiben (3 Bedingungen)
- Die Bilder der drei Basisvektoren müssen paarweise senkrecht sein zueinander (3 Bedingungen)

9–42 Exemple : Euler'sche Winkel
Eine Drehung um eine beliebige Achse kann auch durch drei Euler'sche Winkel und zugehörige Elementardrehungen dargestellt werden. Die Drehung wird durch die folgende Sequenz von einfacheren Drehungen dargestellt.

1. um die z–Achse mit Winkel ψ drehen. Der Winkel ψ (Psi) heisst **Präzessionswinkel** (angle de précession).
2. anschliessend wir um das Bild der x–Achse gedreht mit dem Winkel θ. Der Winkel θ (Theta) heisst **Nutationswinkel** (angle de nutation).
3. anschliessend wir um das Bild der z–Achse gedreht mit dem Winkel ϕ.

Es muss unbedingt beachtet werden, dass jeweils um die **neuen** Koordinatenachsen zu drehen ist. Der Effekt dieser Operationen auf einen beliebigen Vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ kann durch Matrixmultiplikationen dargestellt werden:

1. $$\vec{x}\mapsto\vec{x}' = \mathbf{D}_z(\psi)\,\vec{x}$$
2. Es muss um die **neue** x–Achse gedreht werden. Dieser Effekt kann erreicht werden indem der ursprungliche Vektor zuerst um die alte x–Achse gedreht wird und dann die Abbildung des ersten Teils ausgeführt wird. Das führt auf
   $$\vec{x}\mapsto\mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x}\mapsto\mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x}$$
   oder kürzer
   $$\vec{x}\mapsto\vec{x}'' = \mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\,\vec{x}$$
3. Es muss um die **neue** z–Achse gedreht werden. Dieser Effekt kann erreicht werden indem der ursprungliche Vektor zuerst um die alte z–Achse gedreht wird und dann die Abbildung der ersten beiden Teile ausgeführt werden. Das führt auf
   $$\vec{x}\mapsto\mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x}\mapsto\mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x}$$
   oder kürzer
   $$\vec{x}\mapsto\vec{x}''' = \mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\phi)\,\vec{x}$$

Die Matrix A der Drehung um die Euler'schen Winkel ist also gegeben als Produkt von 3 elementaren Drehmatrizen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{D}_z(\psi)\cdot\mathbf{D}_x(\theta)\cdot\mathbf{D}_z(\phi) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\,\cos\theta & \sin\psi\,\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\,\cos\theta & -\cos\psi\,\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\psi\cos\theta\sin\phi + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrizenmultiplikation kann auch mit *Mathematica* ausgeführt werden.

Mathematica

```
Clear[Dx,Dy,Dz,alpha]
Dx[alpha_] = {{1,0,0},{0,Cos[alpha],-Sin[alpha]},{0,Sin[alpha],Cos[alpha]}};
Dy[alpha_] = {{Cos[alpha],0,Sin[alpha]},{0,1,0},{-Sin[alpha],0,Cos[alpha]}};
Dz[alpha_] = {{Cos[alpha],-Sin[alpha],0},{Sin[alpha],Cos[alpha],0},{0,0,1}};
Dz[psi].Dx[theta].Dz[phi]
```

Ist eine Rotationsmatrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ gegeben, so lassen sich die drei Euler'schen Winkel bestimmen mit Hilfe der dritten Spalte und Zeile:

$$\cos\theta = a_{33} \quad , \quad \tan\phi = \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad \text{und} \quad \tan\psi = \frac{-a_{13}}{a_{23}}$$

$\diamondsuit$

Im obigen Beispiel haben wir um die Achsen Z-X-Z gedreht. Man kann auch Euler'sche Winkel für Drehungen um andere Reihenfolgen von Achsen untersuchen, z.B. X-Z-X ode X-Y-Z. Insgesamt sind 12 verschiedene Kombinationen möglich. Zu jeder Kombination kann eine zugehörige Transformationsmatrix A bestimmt werden. Eine Übersicht finden Sie in [Crai89]. *Mathematica* stellt einige Befehle mit den Euler'schen Winkeln zur Verfügung.

Mathematica

```
<<Geometry`Rotations`

?RotationMatrix3D
"RotationMatrix3D[psi,theta,phi] gives the matrix for rotation by the
specified Euler angles in three dimensions."

The rotation given by the Euler angles psi, theta, and phi can be decomposed
into a sequence of three successive rotations. The first by angle psi about
the z axis, the second by angle theta about the x axis, and the third around
the z axis (again) by angle phi. The angle theta is restricted to the range
0 to Pi.

Get the general matrix (in Mma this is a list of three lists of three
entries)

rm=RotationMatrix3D[psi,theta,phi]
{{Cos[phi] Cos[psi] - Cos[theta] Sin[phi] Sin[psi],
   Cos[psi] Cos[theta] Sin[phi] + Cos[phi] Sin[psi], Sin[phi] Sin[theta]},
  {-Cos[psi] Sin[phi] - Cos[phi] Cos[theta] Sin[psi],
   Cos[phi] Cos[psi] Cos[theta] - Sin[phi] Sin[psi], Cos[phi] Sin[theta]},
  {Sin[psi] Sin[theta], -Cos[psi] Sin[theta], Cos[theta]}}
```

```
Here it is abbreviated and in 2D format:

rm/. {psi->p,theta->q,phi->r, Sin->S,Cos->C} //MatrixForm

C[p]C[r] - C[q]S[p]S[r]    C[r]S[p] + C[p]C[q]S[r]    S[q]S[r]
-C[q]C[r]S[p] - C[p]S[r]   C[p]C[q]C[r] - S[p] S[r]   C[r] S[q]
S[p]S[q]                   -C[p]S[q]                  C[q]
```

Im obigen Beispiel ist gezeigt, wie aus gegebenen Euler'schen Winkel die Transformationsmatrix bestimmt werden kann. In Beispiel 9–41 wurde aus gegebener Drehachse $\vec{d}$ und Drehwinkel α die Transformationsmatrix bestimmt. Das folgende Beispiel untersucht, wie aus den gegebenen Euler'schen Winkeln ψ, θ und ϕ die Drehachse $\vec{d}$ und der Drehwinkel α berechnet werden können.

9–43 Exemple : Als Zahlenbeispiel untersuchen wir eine Rotation mit den drei Euler'schen Winkeln

$$\psi = \frac{\pi}{9} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \phi = -\frac{\pi}{6}$$

Das führt auf eine Transformationsmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\psi) \cdot \mathbf{D}_x(\theta) \cdot \mathbf{D}_z\,(\phi) = \begin{bmatrix} 0.899303 & 0.321747 & 0.296198 \\ 0.061275 & 0.577909 & -0.813798 \\ -0.433013 & 0.75 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen dises Beispiels sind mit einem geeigneten Werkzeug auszuführen (HP, *Mathematica*, `MATLAB`). Nun bestimmen wir Drehachse und Winkel in zwei Schritten:

1. Berechnen der Drehachse:
   Die Drehachse $\vec{d}$ ist bestimmt durch die Bedingung, dass sie durch die Abbildung nicht verändert wird, d.h.

   $$\mathbf{A}\,\vec{d} = \vec{d}$$

   Somit muss 1 ein Eigenvektor der Matrix A sein und der zugehörige Eigenvektor liefert die Drehachse. eine Rechnung mit *Mathematica* (Befehl `Eigenvectors`) ergibt

   $$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.896154 \\ 0.417884 \\ -0.149267 \end{pmatrix}$$

   Dieser Eigenvektor ist bereits normiert. Somit haben wir die Drehachse bestimmt. Die Drehachse kann auch in Kugelkoordinaten dargestellt werden

   $$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.896154 \\ 0.417884 \\ -0.149267 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_d \ \sin\theta_d \\ \sin\phi_d \ \sin\theta_d \\ \cos\theta_d \end{pmatrix}$$

   Daraus lassen sich die Kugelkoordinaten θ_d und ϕ_d der Drehachsenvektors $\vec{a}$ leicht bestimmen. Warnung: es handelt sich nicht um die Euler'schen Winkel der Drehung. Wir erhalten $\theta_d \approx 1.7206$ und $\phi_d \approx 0.436332 = 25^\circ$.

2. Bestimmen des Drehwinkels:
   Um den Drehwinkel α zu bestimmen untersuchen wir einen Vektor $\vec{x}$ der senkrecht steht auf der Drehachse $\vec{d}$. Der Winkel zwischen diesem Vektor und dem Bildvektor $A\,\vec{x}$ ist α, d.h.

   $$\langle \vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\| \ \cos\angle(\vec{x}, \mathbf{A}\,\vec{x}) = \|\vec{x}\|\,\|\mathbf{A}\,\vec{x}\| \ \cos\,\alpha$$

Da $\mathbf{A}$ einer reinen Rotation entspricht gilt $\|\vec{x}\| = \|\mathbf{A}\,\vec{x}\|$. Um einen Vektor zu erhalten der senkrecht steht auf $\vec{d}$ vertauschen wir zwei Komponenten, multiplizieren die eine mit -1 und setzen die dritte zu 0. Dann wird $\langle \vec{x}, \vec{d} \rangle = 0$. Wir wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.417884 \\ -0.896154 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und erhalten} \quad \|\vec{x}\| \approx 0.9888$$

Somit erhalten wir

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.0874687 \\ -0.49229 \\ -0.853065 \end{pmatrix}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}, A\,\vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} \approx \frac{0.477719}{0.977719^2} \approx 0.4886$$

und somit $\alpha \approx \pm 1.06031 \approx \pm 60.75°$. Da nur der Cosinus des Drehwinkels gegeben ist können wir damit nicht über das Vorzeichen, den Drehsinn, entscheiden. Dazu sehen wir uns die folgende Beziehung an.

$$\begin{aligned} \text{Drehung in positivem Sinne} \quad &= \quad \alpha > 0 \\ &= \quad \vec{d}, \vec{x} \text{ und } A\,\vec{x} \text{ bilden ein rechtsorientiertes System} \\ &= \quad \det[\vec{d}, \vec{x}, A\vec{x}] > 0 \end{aligned}$$

In unserem Beispiel gilt $\det[\vec{d}, \vec{x}, \mathbf{A}\vec{x}] \approx 0.85306 > 0$ und somit ist $\alpha > 0$.
Mit Hilfe von Beispiel 9–41 erhält man nun auch

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi_d) \cdot \mathbf{D}_y(\theta_d) \cdot \mathbf{D}_z\,(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y\,(-\theta_d) \cdot \mathbf{D}_z\,(-\phi_d)$$

Mit *Mathematica* oder `MATLAB` erhält man

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.899303 & 0.321747 & 0.296198 \\ 0.061275 & 0.577909 & -0.813798 \\ -0.433013 & 0.750000 & 0.500000 \end{bmatrix}$$

Dieses Resultat muss mit der ursprünglichen Matrix $\mathbf{A}$ übereinstimmen. ♢

9.5.3 Homogene Koordinaten, affine Abbildungen

Genau wie bei Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ kann man auch bei Abbildungen vom Raum in den Raum homogene Koordinaten einführen, damit auch Translationen erfasst werden können. Den üblichen drei Komponenten eines Vektor wird künstlich die vierte Komponente 1 angefügt und statt mit 3×3–Matrizen rechnet man mit 4×4–Matrizen. Man erhält die Transformationsmatrizen in Tabelle 9.3. Man kann beliebige affine Abbildungen durch Matrizenmultiplikationen darstellen.

9–44 Définition : Eine **affine Abbildung** von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine lineare Abbildung und eine anschliessende Translation um einen festen Verschiebungsvektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$, d.h. es gibt eine 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ und einen Vektor $\vec{d} = (a, b, c)^T$ mit

$$F\,(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} + \vec{d} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Den Spezialfall einer linearen Abbildung erhält man mit $\vec{d} = \vec{0}$.

9–45 Résultat : *In homogenen Koordinaten kann die affine Abbildung der vorangehenden Definition durch eine Multiplikation mit einer 4×4–Matrix dargestellt werden.*

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

Die Komposition von affinen Abbildungen kann durch die Multiplikation der entsprechenden Matrizen dargestellt werden. Eine Liste von Grundtransformationen finden Sie in Tabelle 9.3.

Beschreibung der Abbildung	Matrixdarstellung
$\vec e_1 \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}$, $\vec e_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}$ und $\vec e_3 \mapsto \begin{pmatrix} a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Translation $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Streckungen in die drei Achsenrichtungen um die Faktoren s_x, s_y und s_z	$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die z–Achse	$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die y–Achse	$\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
Drehung um Winkel ϕ um die x–Achse	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Tableau 9.3: Affine Abbildungen im Raum und Matrizen mit homogenen Koordinaten

9–46 Résultat : *Sind von einer affinen Abbildung das Bild $\vec y_0$ des Ursprunges $\vec 0$ und die Bilder von drei linear unabhängigen Vektoren $\vec x_1$, $\vec x_2$ und $\vec x_3$ bekannt (d.h. $F(\vec x_i) = \vec y_i$ für $i = 1,2,3$), dann kann die Matrix konstruiert werden.*

Démonstration : Die affine Abbildung ist beschrieben durch

$$F(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x} + \vec{d}$$

Somit ist

$$F(\vec{0}) = \mathbf{A}\,\vec{0} + \vec{d} = \vec{d} = \vec{y}_0$$

Somit stehen in der letzten Spalte der 4×4–Matrix die Komponenten von $\vec{y}_0$, ergänzt durch 1. Wegen

$$\vec{y}_i = F(x_i) = \mathbf{A}\,\vec{x}_i + \vec{d} = \mathbf{A}\,\vec{x}_i + \vec{y}_0$$

gilt

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_1 \\
\vec{y}_2 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_2 \\
\vec{y}_3 - \vec{y}_0 &= \mathbf{A}\,\vec{x}_3
\end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen kann die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ konstruiert werden (siehe Beispiel 9–35, Seite 289). Weil die drei Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ linear unabhängig sind ist die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar. Damit ist auch die 4×4–Matrix $\mathbf{T}$ bestimmt. □

9–47 Exemple : Für eine affine Abbildung F von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gelte

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{T}$.

Solution: Die letzte Spalte ist gegeben durch $(1, -1, 2, 1)^T$). Die 3×3–Matrix $\mathbf{A}$ in der linken, oberen Ecke ist bestimmt durch die drei Bedingungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das führt auf die Gleichung

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir haben also

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Rechnung kann kontrolliert werden, z.B. durch $F(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die vier gegebenen Punkte erlauben es auch direkt einen Ansatz für die 4×4–Matrix $\mathbf{T}$ zu machen. Die Aufgabe könnte auch gelöst werden durch die Gleichungen

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In dieser Darstellung ist es nicht mehr wesentlich, dass in der ersten Spalte der linken Matrix der Vektor $(0,0,0,1)^T$ steht. Statt des Koordinatenursprunges könnte ein beliebiger Punkt eingesetzt werden. Dieses zweite Lösungsverfahren führt auf das untenstehende, allgemein gültige Resultat. $\diamondsuit$

9–48 Résultat : *Sind von einer affinen Abbildung die Bilder von vier Vektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_4$ bekannt (d.h. $F(\vec{x}_i) = \vec{y}_i$ für $i = 1,2,3,4$), dann kann die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ konstruiert werden. Dazu müssen die drei Vektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_1$ und $\vec{x}_4 - \vec{x}_1$ linear unabhängig sein.*

Dieses Resultat zeigt, dass eine affine Abbildung im allgemeinen durch die Bilder von vier Punkten vollständig beschrieben ist. Die notwendige Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass das Volumen des Tetraeders mit den Ecken in den Punkten $\vec{x}_i$ von Null verschieden ist.

Démonstration : Die Matrix $\mathbf{T}$ ist charakterisiert durch

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

das führt auf

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 & \vec{x}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \vec{y}_3 & \vec{y}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$$

Damit dieses System von 16 Gleichungen für 16 Unbekannte lösbar ist muss die Determinate der 4×4–Matrix $\mathbf{X}$ von 0 verschieden sein. Um dies zu verifizieren subtrahieren wir die erste Spalte von den anderen Spalten. Die Determinate wir dadurch nicht verändert. Es gilt

$$\det \mathbf{X} = \det \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 - \vec{x}_1 & \vec{x}_3 - \vec{x}_1 & \vec{x}_4 - \vec{x}_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entwickelt man diese Determinate nach der letzten Zeile, so sieht man, dass sie nicht 0 ist, da die drei Vektoren $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_1$ und $\vec{x}_4 - \vec{x}_1$ linear unabhängig sind. Wir erhalten

$$\mathbf{T} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}^{-1}$$

$\square$

9–49 Exemple : Für eine affine Abbildung F von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gelte

$$F\left(\begin{pmatrix}\pi\\e\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}10\\0\\20\end{pmatrix} \quad , \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.5\\-7\\3\end{pmatrix} \quad ,$$

$$F\left(\begin{pmatrix}10\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0.7\\0\\\pi\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\1\\20\end{pmatrix}$$

Zu bestimmen ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{T}$.

Solution: Zu lösen ist die Gleichung

$$\mathbf{T}\cdot\begin{bmatrix}\pi&0&10&-3\\e&2&0&1\\0&-3&1&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0.5&0.7&6\\0&-7&0&1\\20&3&\pi&20\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Das führt auf

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix}10&0.5&0.7&6\\0&-7&0&1\\20&3&\pi&20\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi&0&10&-3\\e&2&0&1\\0&-3&1&3\\1&1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}0.22956&4.6660&1.8091&-3.4047\\0.28981&1.3583&1.7046&-4.6028\\-0.11060&7.3984&4.0111&0.2364\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Die Rechnungen sind mit einem geeigneten Werkzeug auszuführen. ♢

9–50 Exemple : 3D–Computer–Graphik
Eine Funktion $z = f(x, y)$ beschreibt eine Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$. Um diese Fläche darzustellen kann sie mit einem Gitter überzogen werden. Entlang der einzelnen Linien sind die y–Werte konstant und die x–Werte variieren. Der Wert von z wird mit Hilfe der Funktion bestimmt. Ebenso werden auch, bei festen x–Werten, die y–Werte variiert. Nun sind diese Kurven zu zeichnen. Auf Papier oder Bildschirm können nur zwei Koordinaten dargestellt werden. Deshalb muss man sich mit Projektionen begnügen. Als Beispiel untersuchen wir die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+4\,y^2}}{\sqrt{x^2+4\,y^2}} \quad \text{für} \quad -10 \le x, y \le 10$$

1. In einem ersten Versuch werden die ursprünglichen x und y–Werte angezeigt. Die entstehende Figur ist nicht sehr aussagekräftig. Die Information über die z–Werte geht vollständig verloren.
2. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um $45°$ um die x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (oben rechts).
3. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um $30°$ um die z–Achse, dann um $45°$ um die neue x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (unten links).
4. Vor dem Darstellen der Werte kann die Figur um $120°$ um die z–Achse, dann um $45°$ um die neue x–Achse gedreht werden. Dann werden die neuen x und y–Werte angezeigt. Es ergibt sich die Graphik in Abbildung 9.9 (unten rechts).

Diese Operationen können vom Graphikprogramm mit Hilfe von geeigneten 4×4–Matrizen implementiert werden.

In *Mathematica* können Sie vergleichbare Graphiken erzeugen mit den Befehlszeilen

Mathematica

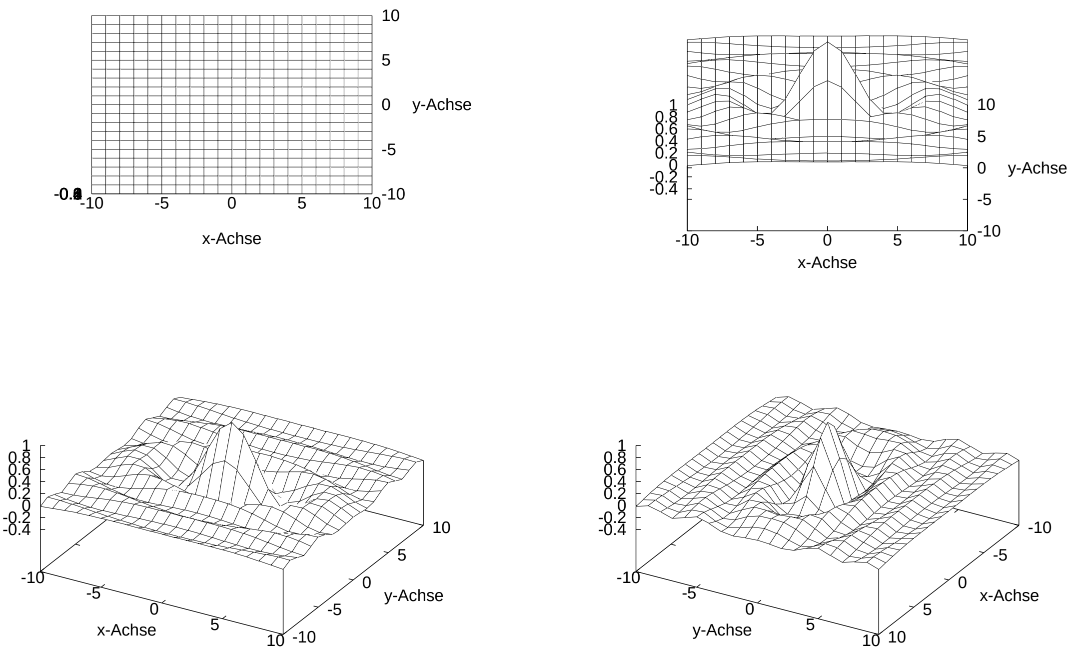


Figure 9.9: Graphen einer Funktion unter verschiedenen Blickwinkeln

```
f[x_,y_] = Sin[Sqrt[x^2+4y^2]]/ Sqrt[x^2+4y^2]
Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10},
    PlotRange -> All,
    PlotPoints -> 30,
    Shading -> False];
```

Einen neuen Blickwinkel können Sie mit der Option `ViewPoint` festlegen. Intern verwendet *Mathematica* Matrixoperationen der obigen Art um den Blickpunkt festzulegen.

Mathematica

```
Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10},
    PlotRange -> All,
    PlotPoints -> 30,
    Shading -> False,
    AxesLabel -> {"x-Achse","y-Achse",""},
    ViewPoint -> {50,20,20}];
```

Die Resultat der beiden obigen Rechnungen finden Sie in Abbildung 9.10. ♢

9.6 Aufgaben

9.6.1 Abbildungen von Polynomen

• Problème 9–1:
Sei die Abbildung $I\ : \mathbb{P}_3 \mapsto \mathbb{P}_4$ bestimmt durch die folgende Vorschrift: jedem Polynom in $\mathbb{P}_3$ wird jene Stammfunktion zugeordnet, für die der Wert bei $x = 0$ Null ist. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} I\,(x) &= \frac{1}{2}\,x^2 \\ I\,(3+x^3) &= 3\,x + \frac{1}{4}\,x^4 \end{aligned}$$

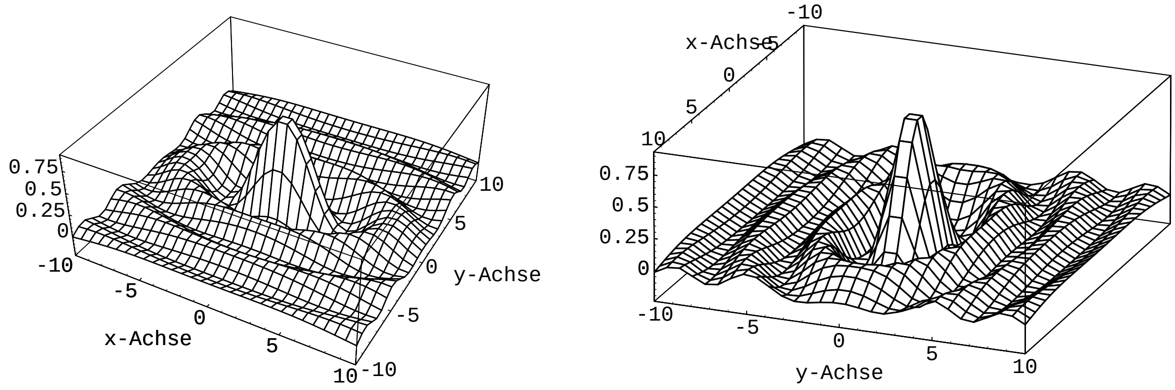


Figure 9.10: Graphen einer Funktion unter verschiedenen Blickwinkeln, mit *Mathematica*

Zeigen Sie, dass dies eine lineare Abbildung ergibt und finden Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung in der Standardbasis.

• Problème 9–2:

Examiner l'application linéaire A de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_2$, donnée par

Zu untersuchen ist die lineare Abbildung A von $\mathbb{P}_2$ nach $\mathbb{P}_2$, beschrieben durch

$$f(x) \to \frac{d^2}{dx^2}\ \left((1+x^2)\cdot f(x)\right)$$

(a) L'application $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_4$. Trouver une matrice 3×5 qui correspond à cette application.

(b) L'application $g(x) \to g''(x)$ est une application linéaires de $\mathbb{P}_4$ en $\mathbb{P}_2$. Trouver une matrice 5×3 qui correspond à cette application.

(c) L'application A est une composition des applications ci–dessus. Trouver une matrice 3×3 qui correspond à cette application A.

(d) Pour un polynôme $h(x)$ de degré 2 on sait que l'application A rend le résultat $1+18\,x^2$. Trouver $h(x)$.

(a) Die Abbildung $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{P}_2$ nach $\mathbb{P}_4$. Stellen Sie diese durch eine geeignete 3×5 Matrix dar.

(b) Die Abbildung $g(x) \to g''(x)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{P}_4$ nach $\mathbb{P}_2$. Stellen Sie diese durch eine geeignete 5×3 Matrix dar.

(c) Die Abbildung A ist die Komposition der obigen Abbildungen. Stellen Sie A durch eine geeignete 3×3 Matrix dar.

(d) Für ein Polynom $h(x)$ vom Grad 2 weiss man, dass die lineare Abbildung A zum Resultat $1+18\,x^2$ führt. Bestimmen Sie $h(x)$.

• Problème 9–3:

Mit einem gegebenen Polynom $p\in\mathbb{P}_2$ werden die folgenden Operationen ausgeführt.

1. zuerst mit $(1-2\,x)$ multiplizieren
2. anschliessend ableiten bezüglich x

Das Resultat ist ein Polynom $F(p)\in\mathbb{P}_2$

Avec un polynôme $p\in\mathbb{P}_2$ on fait les opérations suivantes

1. d'abord multiplier par $(1-2\,x)$
2. puis calculer la dérivé par rapport à x

Le résultat est un polynômes $F(p)\in\mathbb{P}_2$

(a) Stellen Sie diese lineare Abbildung $F:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ durch eine geeignete Matrix dar.

(b) Berechnen Sie das Resulat, falls man $p(x) = -x^2+2\,x-3$ setzt.

(c) Finden Sie ein Polynom $f\in\mathbb{P}_2$, so dass als Resultat der Abbildung F das Polynom $x^2-3\,x$ erscheint.

(a) Représenter cette application linéaire $F:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ par une matrice adaptée.

(b) Trouver le résultat si on met $p(x) = -x^2+2\,x-3$.

(c) Trouver un polynôme $f\in\mathbb{P}_2$, tel que le résultat de l'application F est le polynôme $x^2-3\,x$.

• Problème 9–4:

Mit einem gegebenen Polynom $p \in \mathbb{P}_2$ werden die folgenden Operationen ausgeführt.

1. zuerst mit $(1 + 3\,x)$ multiplizieren
2. anschliessend ableiten bezüglich x

Das Resultat ist ein Polynom $F(p) \in \mathbb{P}_2$

(a) Stellen Sie diese lineare Abbildung $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ durch eine geeignete Matrix dar.

(b) Berechnen Sie das Resulat, falls man $p(x) = x^2 + 7$ setzt.

(c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{P}_2$, so dass als Resultat der Abbildung F das Polynom $g(x) = x$ erscheint.

Avec un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ on fait les opérations suivantes

1. d'abord multiplier par $(1 + 3\,x)$
2. puis calculer la dérivé par rapport à x

Le résultat est un polynômes $F(p) \in \mathbb{P}_2$

(a) Représenter cette application linéaire $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ par une matrice adaptée.

(b) Trouver le résultat si on met $p(x) = x^2 + 7$.

(c) Trouver un polynôme $f \in \mathbb{P}_2$, tel que le résultat de l'application F est le polynôme $g(x) = x$.

9.6.2 Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

• Problème 9–5:

Von einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ (gegeben durch die Matrix $\mathbf{A}$) weiss man, dass

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.h. man kennt die Bilder zweier Vektoren. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

• Problème 9–6:

Pour une application linéaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on sait que le vecteur $(1,3)^T$ est allongé par un facteur 3 et l'image du vecteur $(1,1)^T$ est donné par $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$.

(a) Touver la matrice $\mathbf{A}$ de cette application.

(b) Trouver l'image du vecteur $(4,1)^T$.

Von einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ weiss man, dass der Vektor $(1,3)^T$ um den Faktor 3 gestreckt wird und der Vektor $(1,1)^T$ wird auf $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$ abgebildet.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ dieser Abbildung.

(b) Bestimmen Sie das Bild des Vektors $(4,1)^T$.

• Problème 9–7:

Von einer Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt, dass sie den Vektor $(2,-1)^T$ um den Faktor 0.5 streckt und den Vektor $(1,1)^T$ auf $\vec{0}$ abbildet. Zu bestimmen ist die Matrix $\mathbf{A}$.

• Problème 9–8:

Eine lineare Abbildung ist gegeben als Spiegelung an der 60°–Geraden. Finden Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung in der Standardbasis. Zwei verschiedene Lösungswege sind zu verwenden.

(a) Verwenden Sie die Bilder der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Drehen sie zuerst um $-60° = -\frac{\pi}{3}$, dann eine passende Spiegelung und anschliessend zurückdrehen.

Vergleichen Sie die Rechnungen der beiden Lösungen.

• Problème 9–9:

Beschreiben Sie das Verhalten der Abbildung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{x}$$

geometrisch (Drehungen, Streckungen).

• **Problème 9–10:**
Eine Verschiebung um den Vektor $(a, b)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ und beschreiben Sie die entsprechende geometrische Operation.

• **Problème 9–11:**
Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben durch die folgenden Vorschriften:

1. Drehung um den Ursprung um 45° im Gegenuhrzeigersinn
2. Verschiebung um den Vektor $(2\,,\,1)$
3. Drehung um den Ursprung um 30° im Uhrzeigersinn

Une application affine est donné par la description ci–dessous:

1. rotation autour l'origine par 45° contre le sens d'une aiguille d'une montre.
2. translation par le vecteur $(2\,,\,1)$
3. rotation autour l'origine par 30° dans le sens d'une aiguille d'une montre.

(a) Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer Matrix.

(b) Es gibt einen Punkt $(x_0\,,\,y_0)$ der durch diese Abbildung nicht bewegt wird. Bestimmen Sie diesen Punkt.

(a) Donner une description de cette application à l'aide des coordonnées homogène et une matrice.

(b) Il existe un point $(x_0\,,\,y_0)$ qui n'est pas bougé par cette application. Trouver ce point.

• **Problème 9–12:**
Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben durch die folgenden Vorschriften:

1. Drehung um den Ursprung um 60° im Uhrzeigersinn
2. Verschiebung um den Vektor $(3\,,\,-1)$
3. Drehung um den Ursprung um 30° im Gegenuhrzeigersinn

Une application affine est donné par la description ci–dessous:

1. rotation autour l'origine par 60° dans le sens d'une aiguille d'une montre.
2. translation par le vecteur $(3\,,\,-1)$
3. rotation autour l'origine par 30° contre le sens d'une aiguille d'une montre.

(a) Beschreiben Sie diese Abbildung mit Hilfe homogener Koordinaten und einer Matrix.

(b) Es gibt einen Punkt $(x_0\,,\,y_0)$ der durch diese Abbildung nicht bewegt wird. Bestimmen Sie diesen Punkt.

(a) Donner une description de cette application à l'aide des coordonnées homogène et une matrice.

(b) Il existe un point $(x_0\,,\,y_0)$ qui n'est pas bougé par cette application. Trouver ce point.

• **Problème 9–13:**
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Winkel $\phi = 30^\circ$ gedreht in positive Richtung.
2. Anschliessend wird um den Vektor $(1, 1)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird noch einmal um 30° gedreht in positive Richtung.
4. Anschliessend wird um den Vektor $(1, 1)^T$ verschoben.
5. Anschliessend wird noch um -60° gedreht.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der fünf obigen Abbildungen darstellt, mit Hilfe von homogenen Koordinaten.

• **Problème 9–14:**
Eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die folgenden Vorschriften.

1. Zuerst wird um den Winkel $\phi = 30^\circ$ gedreht in positive Richtung.
2. Anschliessend wird um den Vektor $(1,1)^T$ verschoben.
3. Anschliessend wird noch einmal um 30° gedreht in positive Richtung.
4. Anschliessend wird um den Vektor $(-1,-1)^T$ verschoben.
5. Anschliessend wird noch um -60° gedreht.

Zu konstruieren ist die Matrix $\mathbf{A}$, welche die Komposition der fünf obigen Abbildungen darstellt, mit Hilfe von homogenen Koordinaten.

• Problème 9–15:
Verwenden Sie homogene Koordinaten. Zeigen Sie. dass eine Verschiebung um den Vektor $(-2,2)$ auch dargestellt werden kann durch

1. Drehung um einen geeigneten Winkel α.
2. Verschiebung in x–Richtung um die positive Länge l.
3. Drehung um $-\alpha$

• Problème 9–16:
La matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ est donnée par

Die Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver une déscription de cette transformation à l'aide des valeurs et vecteurs propres. Écrire l'application comme composition des rotations et allongement dans la direction des axes.

(b) Le carré $-1 \leq x, y \leq 1$ est transformé dans une nouveau figure. Calculer l'aire de cette figure.

(a) Beschreiben sie den Effekt dieser Abbildung mit Hilfe von Eigen–Vektoren und Eigen–Werten als Komposition von Drehungen und Streckungen in die Richtung der Koordinatenachsen.

(b) Das Quadrat $-1 \leq x, y \leq 1$ wird durch die obige Abbildung in eine neue Figur transferiert. Bestimmen Sie die Fläche dieser neuen Figur.

• Problème 9–17:
La matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ est donnée par

Die Matrix einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Trouver une déscription de cette transformation à l'aide des valeurs et vecteurs propres. Écrire l'application comme composition des rotations et allongement dans la direction des axes.

(b) Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est transformé dans une nouveau figure. Esquisser cette nouveau figure.

(c) Le triangle aves les coins $(\pm 1, 0)$ et $(0, 2)$ est transformé dans une nouveau figure. Calculer l'aire de cette figure.

(a) Beschreiben sie den Effekt dieser Abbildung mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten als Komposition von Drehungen und Streckungen in die Richtung der Koordinatenachsen.

(b) Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ wird auf eine neue Figur abgebildet. Zeichnen Sie diese neue Figur.

(c) Das Dreieck mit den Ecken $(\pm 1, 0)$ und $(0, 2)$ wird durch die obige Abbildung in eine neue Figur transferiert. Bestimmen Sie die Fläche dieser neuen Figur.

• Problème 9–18:

Eine affine Transformation $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Ebene in die Ebene ist gegeben durch die Transformationsmatrix

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ du plan dans le plan est donné par la matrice de transformation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Das Dreieck ABC mit den drei Punkten $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ und $C = (1/-1)$ wird durch diese Transformation in ein neues Dreieck abgebildet. Bestimmen Sie die Ecken des neuen Dreiecks.

(b) Es gibt genau einen Punkt $(x, y)^T$ der durch die Abbildung F nicht verändert wird. Finden Sie ihn.

(a) Le triangle ABC avec les trois coins $A = (1/2)$, $B = (0/3)$ et $C = (1/-1)$ est transformé dans un nouveau triangle par cette application. Trouver les coins de ce nouveau triangle.

(b) Il y a un seul point $(x, y)^T$ dont la position ne change pas par l'application F. Touver ce point.

• Problème 9–19:

Une rotation par $60°$ par rapport au point fix $P = (2, 3)$ rend une transformation affine dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice $\mathbf{A}$ de cette transformation, en utilisant les coordonnée homogène.

Eine affine Abbildung in der Ebene ist gegeben als Drehung um den festen Punkt $P = (2, 3)$ um den Winkel $60°$. Gesucht ist die zu dieser Abbildung gehörende Transformationsmatrix $\mathbf{A}$, wobei homogene Koordinaten zu verwenden sind.

(a) Cette application peut être reécrit comme composition de trois applications élémentaire. Donner ces trois applications élémentaires et les trois matrices élémentaires.

(b) Trouver la matrice $\mathbf{A}$ de la rotation originalle.

(c) Trouver l'image du point $Q = (-3, 2)$.

(a) Die Abbildung kann beschrieben werden als Komposition von drei elementaren Abbildungen. Finden Sie diese drei elementaren Abbildungen und die zugehörigen elementaren Transformationsmatrizen.

(b) Bestimmen die die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ der ursprünglichen Drehung.

(c) Berechnen Sie das Bild des Punktes $Q = (-3, 2)$.

• Problème 9–20:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben als Spiegelung an der Geraden $y = 1 + 2\,x$. Stellen Sie G durch eine geeignete 3×3–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

Une application affine $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée comme réflexion à la droite $y = 1 + 2\,x$. Representer G par une matrice 3×3 en coordonnées homogène. Il peut être utile d'écrire l'application comme composition de plusieures applications simples.

• Problème 9–21:

Une application affine $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforme le triangle ABC avec $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ et $C(1, 3)$ en le nouveau triangle $A'B'C'$ avec $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ et $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. On a

Durch eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wird das Dreieck ABC mit $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ und $C(1, 3)$ in das neue Dreieck $A'B'C'$ abgebildet mit $A'(\frac{3}{4}, \frac{-5}{2})$, $B'(\frac{7}{4}, -1)$ und $C'(\frac{7}{2}, \frac{23}{4})$. Es gilt

$$F\,(\vec{x}) = \mathbf{M} \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

Donner des résultats exacts (sans calculatrice).

(a) Trouver le vecteur $\vec{c}$ et la matrice $\mathbf{M}$.

(b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de cette matrice $\mathbf{M}$.

(c) L'application F ci–desus transforme le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ en une ellipse. Dessiner cette ellipse.

(d) Trouver les longueurs des demi–axes de cette ellipse et l'aire.

Die Resultate sind exakt anzugeben (ohne Taschenrechner).

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ und die Matrix $\mathbf{M}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M}$.

(c) Die Abbildung F transformiert den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ in eine Ellipse. Zeichnen Sie diese Ellipse.

(d) Bestimmen Sie die Längen der Halbachsen und die Fläche der Ellipse.

9.6.3 Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$

• Problème 9–22:

Utiliser le vecteur $\vec{a} = (2, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ et pour les deux applications linéaires trouver les matrices 3×3 qui corresponds à ces applications.

(a) $\mathbf{P}$ est la projection dans la direction de $\vec{a}$ sur le plan orthogonal au vecteur $\vec{a}$. L'origine fait partie du plan.

(b) $\mathbf{R}$ est la rotation par $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ avec axe de rotation $\vec{a}$.

Verwenden Sie den Vektor $\vec{a} = (2, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ und für die beiden folgenden linearen Abbildung ist die passende 3×3-Matrix anzugeben.

(a) $\mathbf{P}$ ist die Projektion in der Richtung von $\vec{a}$ auf die zu $\vec{a}$ senkrechte Ebene durch den Ursprung.

(b) $\mathbf{R}$ ist eine Rotation um $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ um die Drehachse $\vec{a}$.

• Problème 9–23:

Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Verschiebung um der Vektor $(1, 2, 3)^T$
2. Rotation um die ursprüngliche x–Achse um 30°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Problème 9–24:

Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Verschiebung um der Vektor $(1, 2, 3)^T$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Problème 9–25:

Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Rotation um die alte z–Achse um 45°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Problème 9–26:

Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

1. Rotation um die x–Achse um 30°
2. Rotation um die neue z–Achse um 45°

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Problème 9–27:

Eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben als Rotation um 30° um die Gerade

$$g \; : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Matrix dieser Transformation in homogenen Koordinaten.

• Problème 9–28:

Eine affine Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben als Rotation um 30° um die Achse welche die Punkte $(1/0/1)$ und $(1/1/1)$ verbindet. Das Bild des Ursprunges liegt unterhalb der xy–Ebene.

(a) Stellen Sie G durch eine geeignete 4×4–Matrix mit homogenen Koordinaten dar. Es kann nützlich sein, die Abbildung in mehrere, einfachere Abbildungen zu zerlegen.

(b) Finden Sie das Bild des Punktes $P = (1/2/-4)$.

Une application affine $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée comme rotation de 30° par rapport à l'axe passant par les points $(1/0/1)$ et $(1/1/1)$. L'image de l'origine se trouve au–dessous du plan xy.

(a) Représenter G par une matrice 4×4 en utilisant des coordonnées homogènes. Il peut être utile d'écrire l'application comme une composition de plusieures applications plus simples.

(b) Touver l'image du point $P = (1/2/-4)$.

• Problème 9–29:

(a) Pour une rotation par 30° dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on sait que le point $(1, 2, -1)$ ne bouge pas. L'image du point $(1, 0, 0)$ se trouve au–dessus du plan des xy. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ de largeur 3×3 qui correspond à cette rotation.

(b) Déterminer l'axe de rotation et l'angle de rotation pour la rotation donnée par la matrice $\mathbf{R}$ ci–dessous.

(a) Von einer Rotation um 30° im Raum $\mathbb{R}^3$ weiss man, dass der Punkt $(1, 2, -1)$ nicht bewegt wird. Das Bild des Punktes $(1, 0, 0)$ liegt oberhalb der xy–Ebene. Bestimmen Sie die zugehörige 3×3–Matrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Rotationsachse und den Rotationswinkel der durch die untenstehende Matrix $\mathbf{R}$ gegebenen Rotation.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.8125 & 0.15309 \\ -0.6875 & 0.5625 & -0.45928 \\ -0.45928 & 0.15309 & 0.875 \end{bmatrix}$$

9.6.4 solutions pour quelques problèmes

Solution pour problème 9–1 : Die Linearität der Abbildung folgt aus

$$\int_0^x a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3\;dt = a_0\,x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \frac{a_3}{4}\,x^4$$

Wegen der Elementarintegrale

$$\begin{aligned} I\,(1) &= x \\ I\,(x) &= \frac{1}{2}\,x^2 \\ I\,(x^2) &= \frac{1}{3}\,x^3 \\ I\,(x^3) &= \frac{1}{4}\,x^4 \end{aligned}$$

Dem Polynom

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \in \mathbb{P}_3$$

ist also das Bildpolynom

$$0 + a_0\,x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \frac{a_3}{4}\,x^4$$

zugeordnet. Verwendet man die Standardbasen in $\mathbb{P}_3$ und $\mathbb{P}_4$ so kann das selbe Resultat dargestellt werden durch die Matrizenmultiplikation

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_2}{3} \\ \frac{a_3}{4} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Matrixdarstellung der Abbildung gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 9–2 : Es ist die Standardbasis $1,\ x,\ x^2, \ldots$ in den Räumen $\mathbb{P}_2$ und $\mathbb{P}_4$ zu verwenden. In den Spalten der Matrizen stehen die Bilder der Basisvektoren.

(a) Für die Abbildung $f(x) \to (1+x^2)\cdot f(x)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & 1+x^2 \\ x & \to & x+x^3 \\ x^2 & \to & x^2+x^4 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Für die Abbildung $g(x) \to g''(x)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & 0 \\ x & \to & 0 \\ x^2 & \to & 2 \\ x^3 & \to & 6\,x \\ x^4 & \to & 12\,x^2 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(c) Da die gesuchte Abbildung Komposition der beiden obigen ist, kann **A** mittels Matrizenmultiplikation bestimmt werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(d) Das Polynom sei $h(x) = a + b\,x + c\,x^2$. Die Abbildung liefert das Resultat $1 + 18\,x^2$, d.h.

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der ursprünglichen Funktion können mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Somit ist $h(x) = -1 + \frac{3}{2}\,x^2$.

Solution pour problème 9–3 : Ein Polynom $a + b\,x + c\,x^2$ wird dargestellt durch den Vektor $(a,b,c)^T$.

(a) Mit der Standardbasis in $\mathbb{P}_2$ muss man die drei Funktionen 1, x und x^2 untersuchen. Jedes der Basispolynome ist zuerst mit $(1-2\,x)$ zu multiplizieren, dann abzuleiten. Man erhält

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{d}{dx}\ ((1-2\,x)\ 1) = -2 + 0\,x + 0\,x^2 \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\ ((1-2\,x)\ x) = 1 - 4\,x + 0\,x^2 \\ F(x^2) &= \frac{d}{dx}\ \left((1-2\,x)\ x^2\right) = 0 + 2\,x - 6\,x^2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Resultate sind in den Spalten von A einzutragen. Als Matrix ergibt sich somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

(b) Das Polynom $p(x) = -x^2 + 2\,x - 3$ wird dargestellt durch den Vektor $(-3, 2, -1)^T$. Wegen

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ist das resultierende Polynom $8 - 10\,x + 6\,x^2$.

(c) Wegen

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist $f(x)$ gegeben durch

$$f\,(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{6}\,x^2$$

Dieses Resultat könnte auch bestimmt werden indem man zuert das gegebene Polynom $x^2 - 3\,x$ integriert und anschliessend durch $(1 - 2x)$ dividiert. Die Integrationskonstante ist so zu wählen, dass bei der Division kein Rest entsteht.

Solution pour problème 9–4 : Ein Polynom $a + b\,x + c\,x^2$ wird dargestellt durch den Vektor $(a, b, c)^T$.

(a) Mit der Standardbasis in $\mathbb{P}_2$ muss man die drei Funktionen 1, x und x^2 untersuchen. Jedes der Basispolynome ist zuerst mit $(1 + 3\,x)$ zu multiplizieren und dann abzuleiten. Man erhält

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{d}{dx}\,((1+3\,x)\,1) = 3 \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\,((1+3\,x)\,x) = 1 + 6\,x \\ F(x) &= \frac{d}{dx}\,\left((1+3\,x)\,x^2\right) = 2\,x + 9\,x^2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Resultate sind in den Spalten von A einzutragen. Als Matrix ergibt sich somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(b) Das Polynom $p(x) = x^2 + 7$ wird dargestellt durch den Vektor $(7, 0, 1)^T$. Wegen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ist das resultierende Polynom $21 + 2\,x + 9\,x^2$.

(c) Wegen

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $f(x)$ gegeben durch

$$f\,(x) = \frac{-1}{18} + \frac{1}{6}\,x$$

Solution pour problème 9–5 : Vergleiche Beispiel 9–11

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 9–6 :

(a) Die Abbildung ist bestimmt durch

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt durch

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ 9 & -0.5 \end{bmatrix}$$

oder auch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 \\ 9 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.25 & 1.75 \\ -5.25 & 4.75 \end{bmatrix}$$

(b) Das Bild von $(4, 1)^T$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25 & 1.75 \\ -5.25 & 4.75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.25 \\ -16.25 \end{pmatrix}$$

Solution pour problème 9–7 : Vergleiche Beispiel 9–14. Es gilt

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Somit sind zwei Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt.
Mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 9–8 :

(a) Der Vektor $\vec{a}$ zeigt in die 60°–Richtung, $\vec{b}$ steht senkrecht dazu. Deshalb gilt

$$\mathbf{A}\,\vec{a} = \vec{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}\,\vec{b} = -\vec{b}$$

Wir haben zwei Eigenwerte und Eigenvektoren und erhalten somit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Die Drehung um $\alpha = \frac{-\pi}{3}$ wird dargestellt durch die Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Nach der Drehung kann neu an der x–Achse gespiegelt werden. Die Operation ist dargestellt durch die Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Drehung um 60° ist gegeben durch $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ und wir erhalten

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen sind fast identisch.

Solution pour problème 9–9 : Vergleiche mit Beispiel 9–24
Die Eigenwerte der Matrix sind Lösungen von

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\,\lambda - 16 = (\lambda-1)^2 - 17$$

und somit $\lambda_1 = 1 - \sqrt{17}$ und $\lambda_2 = 1 + \sqrt{17}$. Die **orthonormierten** Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.78821 \\ 0.61541 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.61541 \\ 0.78821 \end{pmatrix}$$

Daraus konstruiert man

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.78821 & -0.61541 \\ 0.61541 & 0.78821 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

wobei $\alpha \approx 0.66291 \approx 38°$. Die Matrix $\mathbf{E}$ ist orthogonal ($\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T$) und entspricht somit einer Drehung. Es gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}^{-1}$$

Das Vehalten der linearen Abbildung kann wie folgt beschrieben werden:

1. Multiplikation mit $\mathbf{E}^{-1}$: Drehung um den Winkel $-\alpha \approx -38°$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Multiplikation mit Diagonalmatrix:
   (a) Streckung in der x_1–Richtung um den Faktor $\lambda_1 \approx -3.12$. Es handelt sich um eine Streckung und Spiegelung.
   (b) Streckung in der x_2–Richtung um den Faktor $\lambda_2 \approx 5.12$
3. Multiplikation mit $\mathbf{E}$: Drehung um den Winkel $\alpha \approx 30°$, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

Da es sich um eine 2×2–Matrix handelt, könnte der Drehwinkel auch durch

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

bestimmt werden. Die obigen Rechnungen lassen sich auch mit grösseren Matrizen durchführen, meist mit Hilfe von geeigneten Programmen (*Mathematica*, `MATLAB`).

Solution pour problème 9–10 : Es gilt

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das entspricht einer Verschiebung um den Vektor $-(a, b)^T$.

Solution pour problème 9–11 : Die Matrizen der drei einzelnen Abbildungen sind

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Die Matrix ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_1 \approx \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 & 2.2321 \\ 0.2588 & 0.9659 & -0.1340 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Da der Punkt (x_0, y_0) nicht bewegt wird muss die Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein, d.h. der Punkt ist durch den zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenvektor bestimmt. *Mathematica* liefert den Eigenvektor, der so zu strecken ist, dass die dritte Komponente 1 wird.

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} 0.188 \\ 0.975 \\ 0.116 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.62 \\ 8.41 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Fixpunkt gegeben durch $(x_0, y_0) \approx (1.62\,,\, 8.41)$.

Solution pour problème 9–12 : Der erste Drehwinkel ist $-60° = -\pi/3$ und die zweite Drehung ergibt einen Winkel von $= 30° = \pi/6$. Die Matrizen der drei einzelnen Abbildungen sind somit

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Die gesuchte Matrix ist gegeben als Produkt der drei obigen Transformationsmatrizen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 3.098 \\ -0.5 & 0.866 & 0.634 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Da der Punkt (x_0, y_0) nicht bewegt wird muss die Gleichung

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein, d.h. der Punkt ist durch den zum Eigenwert 1 gehörenden Eigenvektor bestimmt. Geeignete Hilfsmittel (*Octave*, `MATLAB`, *Mathematica*, TI, HP) liefern den Eigenvektor, der so zu strecken ist, dass die dritte Komponente 1 wird.

$$\vec{v} \approx \begin{pmatrix} +0.441 \\ -0.883 \\ +0.162 \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} +2.732 \\ -5.464 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Fixpunkt gegeben durch $(x_0, y_0) \approx (2.732\,,\ -5.464)$.

Altenativ können auch die beiden ersten Gleichungen des Systems

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nach x_0 und y_0 aufgelöst werden.

Solution pour problème 9–13 : Die Drehmatrix um den Winkel 30° ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Drehung um -30° kann durch $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ dargestellt werden. Eine Drehung um -60° kann durch das Produkt $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T$ (zwei Drehungen um je -30°) dargestellt werden. Die Verschiebung um den Vektor $(1,1)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Komposition der Abbildungen ist somit

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich also nur eine Verschiebung um 2.732 in x–Richtung.

Solution pour problème 9–14 : Die Lösung in eng verwandt mit der vorangehenden Aufgabe.
Die Drehmatrix $\mathbf{R}$ und die Translationsmatrix $\mathbf{T}$ können übernommen werden. Die Verschiebung um den Vektor $(-1,-1)^T$ ist beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Komposition der Abbildungen ist somit

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich also nur eine Verschiebung um 0.732 in y–Richtung.

Solution pour problème 9–15 : Es gilt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{2^2+2^2} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

Der Vektor hat also die Länge $l = 2\sqrt{2}$ und schliesst mit der x–Achse einen Winkel von 135° ein. Statt um den Vektor $(-2,2)^T$ zu verschieben werden wir die folgenden Operationen ausführen:

1. Um -135° drehen
2. Um $2\sqrt{2}$ in x–Richtung verschieben.
3. Um 135° drehen

Mit der Drehmatrix um den Winkel $\frac{-3\pi}{4}$

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir der Vektor $(-2,2)^T$ in die x–Richtung gedreht. Nun wendet man eine Verschiebung um $2\sqrt{2}$ in x–Richtung mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und dreht wieder zurück um 135°. Das ergibt

$$\mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}(-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die obige Behauptung ist bestätigt.

Solution pour problème 9–16 :

(a) Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind gegeben als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 11 = 0$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+44}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm 3\sqrt{5}\right) \approx \begin{cases} 2.8541 \\ -3.8541 \end{cases}$$

Der zum ersten Eigenwert λ_1 gehörende Eigenvektor $\vec{e}_1$ ist gegeben als Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) x + 3\,y &= 0 \\ \left(1-\sqrt{5}\right) x + 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

mit der leicht ablesbaren Lösung

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor schliesst mit der x–Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.5536 \approx 31.7°$ ein. Der zweite Eigenvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht dazu, da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist. Somit kann der Effekt der obigen Abbildung folgendemassen beschrieben werden

1. Rotation um $-\alpha$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Streckung um Faktor $\lambda_1 \approx 2.8541$ in der x–Richtung.
3. Streckung und Spiegelung um Faktor $\lambda_2 \approx -3.8541$ in der y–Richtung.
4. Rotation um α, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In der Matrizensprache ausgedrückt ergiebt dies

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können auch mit dem Taschenrechner durchgeführt werden. Die Zahlen in der Rotationsmatrix sind dann

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.850651 & 0.525731 \\ -0.525731 & 0.850651 \end{bmatrix}$$

(b) Die ursprüngliche Fläche ist 4 . Diese muss mit $\det \mathbf{A} = -2 - 9 = -11$ multipliziert werden. Man erhält also eine Figur mit Flächeninhalt 44. Die Fläche hat die Orientierung gewechselt.

Solution pour problème 9–17 :

(a) Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ sind gegeben als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\,\lambda - 23 = 0$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(6 \pm \sqrt{36+92}\right) = 3 \pm 4\,\sqrt{2} \approx \begin{cases} +8.65685 \\ -2.65685 \end{cases}$$

Der zum ersten Eigenwert $\lambda_1 = 3 + 4\,\sqrt{2}$ gehörende Eigenvektor $\vec{e}_1$ ist gegeben als Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda_1 & 4 \\ 4 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 4-4\sqrt{2} & 4 \\ 4 & -4-4\,\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} \left(4-4\,\sqrt{2}\right)\,x + 4\,y &= 0 \\ \left(1-\sqrt{2}\right)\,x + y &= 0 \end{aligned}$$

mit der leicht ablesbaren Lösung

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor schliesst mit der x–Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan\,(-1+\sqrt{2}) \approx 0.39 \approx 22.5°$ ein. Der zweite Eigenvektor $\vec{e}_2$ steht senkrecht dazu, da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist. Der Drehwinkel kann auch aus der Beziehung

$$\tan\,2\alpha = \frac{2\,a_{1,2}}{a_{1,1} - a_{2,2}} = \frac{2 \cdot 4}{7+1} = 1$$

bestimmt werden.

Somit kann der Effekt der obigen Abildung folgendemassen beschrieben werden

1. Rotation um $-\alpha$, d.h. im Uhrzeigersinn.
2. Streckung um Faktor $\lambda_1 \approx 8.66$ in der x–Richtung.
3. Streckung und Spiegelung um Faktor $\lambda_2 \approx -2.66$ in der y–Richtung.
4. Rotation um α, d.h. im Gegenuhrzeigersinn.

In der Matrizensprache ausgedrückt ergiebt dies

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen können auch mit dem Taschenrechner durchgeführt werden. Die Zahlen in der Rotationsmatrix sind dann

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.92388 & 0.38268 \\ -0.38268 & 0.92388 \end{bmatrix}$$

(b) Die resultierende Figur ist eine Ellipse Die eine Halbachse der Länge 8.66 zeigt in die $22.5°$–Richtung. Die andere Halbachse der Länge 2.66 ist senkrecht dazu und zeigt in die $112.5°$–Richtung.

(c) Die Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist 2. Rotationen ändern die Fläche nicht. Die beiden Streckungen vergrössen die Fläche um den Faktor

$$\lambda_1\lambda_2 = (3-4\sqrt{2})(3+4\sqrt{2}) = 3^2 - (4\sqrt{2})^2 = -23$$

Man erhält also eine Figur mit Flächeninhalt 46. Das Dreieck hat somit die Orientierung gewechselt.

Solution pour problème 9–18 :

(a) Die Matrix $\mathbf{A}$ kann mit drei Vektoren multipliziert werden. Die drei Rechnungen können auch (spaltenweise) in eine einzige Matrizenmultiplikation gesteckt werden.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 7 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit sind die drei Eckpunkte des neuen Dreiecks $(9/7)$, $(9/7)$ und $(0/10)$.

(b) Multiplizieren mit der Matrix $\mathbf{A}$ darf den Vektor nicht verändern, deshalb gilt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Komponenten können als Gleichungssytem für die Unbekannten x und y geschrieben werden

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +3y & +0\cdot 1 & = & x \\ 2x & -1y & +7\cdot 1 & = & y \end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 0 \\ 2x & -2y & = & -7 \end{array}$$

Dieses System kann leicht gelöst werden mit den Lösungen $x = \frac{-21}{10}$ und $y = \frac{7}{5}$. Dieser Vektor kann auch erhalten werden als Eigenvektor zum Eigenwert 1, wobei die dritte Komponente auf 1 zu normieren ist.

Solution pour problème 9–19 :

(a) Die Abbildung kann folgendermassen zerlegt werden:

1. Zuerst wird der Punkt P in den Ursprung verschoben durch eine Translation um den Vektor $(-2,-3)^T$. Die Transformationsmatrix ist
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Drehung um 60° mt Hilfe der Matrix ($\alpha = 60^\circ$)
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
3. Dann muss der Ursprung wieder auf den P zurückgeschoben werden mit Hilfe der Transformationsmatrix
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ ist nun gegeben durch
$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866025 & 3.59808 \\ 0.866025 & 0.5 & -0.232051 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Als Kontrolle kann das Resultat
$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
verwendet werden.

(c) Wegen der Rechnung
$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5-5\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.366025 \\ -1.83013 \\ 1 \end{pmatrix}$$
wird der Punkt $Q = (-3,2)$ abgebildet auf den neuen Punkt $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-5\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solution pour problème 9–20 : Die Abbildung kann zerlegt werden in: eine Verschiebung nach unten, Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung, Verschieben nach oben.

1. Verschiebung um Vektor $(0,-1)^T$ mit der Matrix
$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Nun kann an der „neuen“ Gerade $y = 2\,x$ gespiegelt werden. Bei dieser Abbildung bleibt der Vektor $(1,2)^T$ fest und der dazu senkrechte Vektor $(2,-1)^T$ wird mit (-1) multipliziert. Das ergibt
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die Spiegelungsmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese $\mathbf{S}$ Matrix könnte auch erzeugt werden durch: Drehung um $-\arctan 2$, Spiegelung an x–Achse, Drehung um $\arctan 2$.

3. Das Rückverschieben nach oben wird erzeugt durch

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Zusammengesetzt erhält man die Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Als Kontrolle können die Punkte $(0,1)$ mit Bild $(0,1)$), $(1,3)$ mit Bild $(1,3)$ und $(-2,2)$ mit Bild $(2,0)$ verwendet werden.

Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem die Bilder von drei Vektoren aus einer Figur abgelesen werden. Es gilt

$$G(0,1) = (0,1) \quad , \quad G(1,3) = (1,3) \quad \text{und} \quad G(-2,2) = (2,0)$$

Übersetzt in die Matrizensprache erhält man

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution pour problème 9–21 :

(a) $\vec{c}$ muss das Bild des Ursprunges $A(0/0)$ sein. Aufgrund der Beschreibung gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{23}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{33}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{33}{4} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{33}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir als Resultat der ersten Teilaufgabe

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

(b) Die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{2}-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \lambda^2 - 3\,\lambda + \frac{11}{16} = 0$$

Hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9 - \frac{11}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm \frac{5}{2}\right)$$

Daraus erhält man

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{11}{4} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Zentrum bei $A'(\frac{3}{4}, \frac{-2}{2})$. In Richtung von $\vec{v}_1$ (Steigung $\frac{-1}{3}$) um Faktor $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ gestreckt, d.h. gestaucht. In Richtung von $\vec{v}_2$ (Steigung 3) um Faktor $\lambda_2 = \frac{11}{4}$ gestreckt.

(d) Die Längen der Halbachsen sind gegeben durch die beiden Eigenwerte.

$$\text{Fläche } = \pi\,\det\mathbf{M} = \pi\,\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{11\,\pi}{16}$$

Solution pour problème 9–22 :

(a) Es gilt $\mathbf{P}\,\vec{a} = \vec{0}$. Vektoren senkrecht zu $\vec{a}$ werden nicht geändert. Somit muss gelten

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit lässt sich $\mathbf{P}$ nun berechnen mittels

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor $\vec{a}$ liegt in der xy–Ebene und schliesst mit der x Achse einen Winkel von $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ ein. Somit können die folgenden Operationen ausgeführt werden

1. Rotation um die z Achse mit Winkel $-\alpha$
2. Rotation um die x Achse mit Winkel $+60°$
3. Rotation um die z Achse mit Winkel $+\alpha$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.894 & -0.447 & 0 \\ 0.447 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.894 & 0.447 & 0 \\ -0.447 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0.387 \\ 0.2 & 0.6 & -0.775 \\ -0.387 & 0.775 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Solution pour problème 9–28 :

(a) Die Rotationsachse ist parallel zur y–Achse. Der Rotationswinkel α muss $-30°$ sein, damit der Ursprung nach unten gedreht wird. Die Abbildung kann zerlegt werden in: eine Verschiebung des Punktes $(1/0/1)$ in den Ursprung, Rotation um $-30°$, dann zurückschieben.

Die Verschiebung um Vektor $(-1, 0, -1)^T$ erfolgt mit Hilfe mit der Matrix $\mathbf{T}$, das Rückverschieben mit der inversen Matrix $\mathbf{T}^{-1}$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun kann um $-30°$ um die y–Achse rotiert werden. Das ergibt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 30° & 0 & -\sin 30° & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 30° & 0 & \cos 30° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zusammengesetzt erhält man die Transformationsmatrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0.634 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & -0.366 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Als einfache Kontrolle kann ein Punkt auf der Rotationsachse verwendet werden. Es darf seine Lage nicht verändern, d.h. es sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

(b) Um den Punkt $P = (1/2/-4)$ kann die Multiplikation des um 1 erweiterten Vektors mit der Matrix der vorangehenden Teilaufgabe erzeugt werden.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 2 \\ 1 - 5\sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \\ -3.33 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Bildpunkt die Koordinaten $(3.5/2/-3.33)$.

Solution pour problème 9–29 :

(a) Zuerst muss die Drehachse auf die z–Achse gedreht werden, dann um $\pm 30°$ rotiert und anschliessend die Drehachse zurückgedreht werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_z(\phi) \cdot \mathbf{D}_y(\theta) \cdot \mathbf{D}_z(\alpha) \cdot \mathbf{D}_y(-\theta) \cdot \mathbf{D}_z(-\phi)$$

wobei

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \tan\phi = \frac{2}{1}$$

und somit

$$\mathbf{D}_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_z(\phi) = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Punkt $(1, 0, 0)$ wird nach oben rotiert und somit muss der Rotationswinkel $\alpha = -30° = -\pi/6$ sein. Das führt auf

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.888355 & -0.159466 & -0.430577 \\ 0.248782 & 0.955342 & 0.159466 \\ 0.385919 & -0.248782 & 0.888355 \end{bmatrix}$$

Die Kontrollrechnung

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.888355 \\ 0.248782 \\ 0.385919 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass das Bild des Punktes $(1, 0, 0)$ oberhalb der xy–Ebene liegt.

(b) Die Rotationsachse $\vec{d}$ wird durch die Multiplikation mit $\mathbf{R}$ nicht bewegt und ist somit der zum Eigenwert 1 gehörende Eigenvektor. Das führt auf

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -0.353553 \\ -0.353553 \\ +0.866025 \end{pmatrix}$$

Um den Winkel zu bestimmen muss ein zu $\vec{d}$ senkrecht stehender Vektor $\vec{x}$ untersucht werden. Es gilt

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x} \, , \, \mathbf{R}\,\vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\| \; \|\mathbf{R}\,\vec{x}\|} = \frac{\langle \vec{x} \, , \, \mathbf{R}\,\vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2}$$

Mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} +0.353553 \\ -0.353553 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = 0.5 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \pi/3 = 60°$$

Chapitre 10

Anwendungen der linearen Algebra

10.1 Anwendungen von Transformationsmatrizen

10.1.1 Beschreibung eines Roboterarmes

Die Methoden von Abschnitt 9.5 können verwendet werden Bewegungen von Robotern zu beschreiben. Hierzu betrachten wir ein einfaches Beispiel in Abbildung 10.1, beschrieben durch

- Das erste Element AB zeigt vom Ursprung (A) um die feste Länge H nach oben. Das Element ist drehbar um die z-Achse und wird um den Winkel θ gedreht.
- Das zweite Element BC hat eine variable Länge l und wird horizontal befestigt. Aufgrund der Drehung des ersten Elementes schliesst das zweite Element mit der x-Achse einen Winkel θ ein.
- Das dritte Element CD hat eine feste Länge h und liegt in der durch die beiden ersten Elemente aufgespannten Ebene. Diese Element zeigt ursprünglich vertikal nach unten, kann aber um den Winkel ϕ ausgelenkt werden.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es die Koordinaten der Kontrollpunkte A, B, C und D als Funktion der Variablen θ, l und ϕ zu beschreiben. Um dieses Ziel zu erreichen verwenden wir homogene Koordinaten und entsprechende 4×4 Transformationsmatrizen.

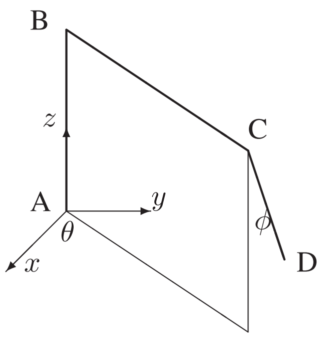


Figure 10.1: Ein einfacher Roboter mit drei Elementen

Der Ursprung A wird in homogenen Koordinaten dargestellt durch den Vektor $\vec{A} = (0,0,0,1)$. Um das erste Roboterelement zu beschreiben verwenden wir eine affine Transformation welche das Koordinatensystem um H nach oben bewegt und um den Winkel θ dreht, d.h.

$$\mathbf{TAB} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um vom Ursprung zum Punkt C zu gelangen können wir zuerst um l in die x-Richtung verschieben und anschliessend die durch **TAB** gegebene Transformation ausführen. Somit gilt

$$\mathbf{TAC} = \mathbf{TAB} \cdot \mathbf{TBC}$$

wobei

$$\mathbf{TBC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um vom Ursprung zum Punkt D zu gelangen können wir zuerst um h nach unten verschieben und dann um die y-Achse mit dem Winkel $-\phi$ drehen. Anschliessend die durch **TAC** gegebene Transformation ausführen. Somit gilt

$$\mathbf{TAD} = \mathbf{TAC} \cdot \mathbf{TCD}$$

wobei

$$\mathbf{TCD} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der obigen Transformationsmatrizen können die Koordinaten der verschiedenen Punkte nun leicht berechnet werden durch

$$\vec{B} = \mathbf{TAB} \cdot \vec{A} \quad , \quad \vec{C} = \mathbf{TAC} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{D} = \mathbf{TAD} \cdot \vec{A}$$

Die Konstruktion der Matrix

$$\mathbf{TAD} = \mathbf{TAB} \cdot \mathbf{TBC} \cdot \mathbf{TCD}$$

Beschreibt das Vorgehen um vom Startpunkt A zum Endpunkt D zu gelangen

1. Verschiebe den Punkt um H nach oben und rotiere um die z-Achse mit dem Winkel θ. Diese Operationen können auch ausgeführt werden indem der ursprüngliche Vektor im neuen Koordinatensystem gezeichnet wird, wobei der neue Koordinatenursprung im Punkt B liegt und die neue x-Achse in Richtung von C zeigt.
2. Im neuen Koordinatensystem ist der Punkt um l in die neue x-Richtung zu verschieben. Dies kann wiederum durch ein neues Koordinatensystem (Ursprung bei C) dargestellt werden.
3. Nun muss der Punkt um $-h$ in die neue (und alte) z-Richtung verschoben werden, dann um die neue y-Achse mit dem Winkel $-\phi$ gedreht werden.

Die Reihenfolge der Operationen und Matrizenmultiplikationen ist wichtig.

10.1.2 Bewegungen eines Skifahrers

Als Semester- und Diplomarbeit wird 2004 ein Beschleunigungsmesssystem entworfen das am Schuh eines Skifahrers befestigt wird und Daten über die Bewegung aufnehmen muss.

Die Höhe eines Hügels kann gegeben sein durch die Höhe $z = h(x,y)$ als Funktion der horizontalen Position (x,y). Nun bewegt sich ein Skifahrer entlang einer gegebenen Kurve $(x(t)\,,\,y(t))$. Das führt auf die folgenden Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \frac{\partial}{dt}\,h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \frac{\partial^2}{dt^2}\,h(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Kurve ist in Abbildung 10.2 gezeigt.

Nun konstruieren wir ein mit dem Skifahrer mitfahrendes Koordinatensystem.

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigt mit einem Winkel θ nach unten und sein horizontaler Anteil zeigt in eine durch einen Winkel ϕ gegebene Richtung. Die zeitabhängigen Winkel sind gegeben durch

$$\sin\theta(t) = \frac{-v_3(t)}{\|\vec{v}(t)\|} \quad \text{und} \quad \tan\phi(t) = \frac{v_2(t)}{v_1(t)}$$

Das ortsfeste Koordinatensystem wird nun

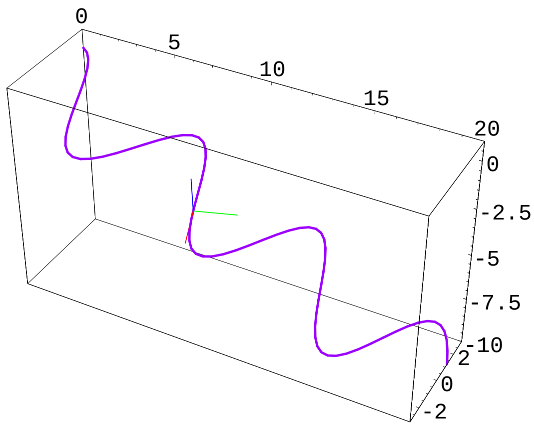


Figure 10.2: Bewegungskurve eines Skifahrers

- um den Winkel $\theta(t)$ um die y–Achse rotiert und
- anschliessend um dien Winkel $\phi(t)$ um die ortsfeste z–Achse rotiert.

Die x–Achse des neuen Systems wird folglich in die selbe Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigen. Diese Transformation kann beschrieben werden durch Multiplikation mit Rotationsmatrizen.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\phi(t)) \cdot \mathbf{R}_y(\theta(t)) = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_{xneu} & \vec{e}_{yneu} & \vec{e}_{zneu} \end{array} \right]$$

Die neue z–Achse $\vec{e}_{zneu}$ zeigt noch nach oben, ist aber bereits senkrecht zur Bahnkurve. ein solches begleitendes Dreibein ist auf in Abbildung 10.2 sichtbar. Nun muss diese vertikale Achse noch um den richtigen Winkel gekippt werden, damit die Kurvenlage des Skifahrers korrekt widergegeben wird. Wir nehmen an, dass diese Richtung durch die auf den Schu wirkenden Kräfte bzu bestimmen ist, da die Hauptlast senkkrecht zur Schulsohle aufgenommen werden sollte. Auf den Skifahrer wirkt eine Gravitationskraft der Stärke $m\,g$ nach unten. Damit er auf der gegebenen Bahn bleibt, muss nach dem Gesetz von Newton die Summe aller wirkenden Kräfte $m\,\vec{a}$ sein. Somit wirken auf den Schuh insgesamt die Kräfte

$$m\,\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,g \end{pmatrix}$$

Nun kippen wir die neue z Achse um einen geeigneten Winkel, soddas diese Gesamtkraft keine Komponente sekrecht dazu hat. Um dies zu erreichen schreiben wir die Gesamtkraft im neuen Koordinatensystem

$$\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{g} = b_1\,\vec{e}_{xneu} + b_2\,\vec{e}_{yneu} + b_3\,\vec{e}_{zneu}$$

Somit sind die Koeffizienten b_i gegeben durch

$$\begin{aligned} b_1 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{xneu} \rangle \\ b_2 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{yneu} \rangle \\ b_3 &= \langle \vec{a} + \vec{g},\, \vec{e}_{zneu} \rangle \end{aligned}$$

Der gewünschte Kippwinkel φ ist nun bestimt durch

$$\tan\varphi(t) = \frac{b_2(t)}{b_3(t)}$$

und die neue Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_n(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}_x(\varphi(t)) = \mathbf{R}_z(\phi(t)) \cdot \mathbf{R}_y(\theta(t)) \cdot \mathbf{R}_x(\varphi(t)) = \left[\begin{array}{ccc} \vec{e}_{xN} & \vec{e}_{yN} & \vec{e}_{zN} \end{array} \right]$$

Die Beschleunigungssensoren sind in diesem mitbewegten Bezugssystem befestigt und messen folglich die folgenden Komponenten der Beschleunigung:

10.2 Einfache Anwendungen von Eigenwerten und Eigenvektoren

10.2.1 Die Fibonacci Folge

Die Fibonacci Folge von ganzen Zahlen ist gegeben durch die rekursive Berechnungsvorschrift

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 1 \quad \text{mit} \quad x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$$

Einige Zahlenbeispiele sind hier berechnet

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$x_{n-2} + x_{n-1}$			$1+1$	$1+2$	$2+3$	$3+5$	$5+8$	$8+13$	$\cdots$
x_n	1	1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$

Die Berechnungen können auch mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden.

$$\begin{array}{rcrcl} x_n & = & & + & x_n \\ x_{n+1} & = & x_{n-1} & + & x_n \end{array} \quad \text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun können Vektoren $\vec{y}_n \in \mathbb{R}^2$ eingeführt werden und statt einer Folge von Zahlen x_n kann eine Folge von Vektoren $\vec{y}_n$ untersucht werden.

$$\vec{y}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \vec{y}_n \quad \text{wobei} \quad \vec{y}_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur Illustration sind hier einige Berechnungen gezeigt.

$$\begin{aligned}
\vec{y}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_1 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_2 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_1 = \mathbf{A}^2 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_3 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_2 = \mathbf{A}^3 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_4 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_3 = \mathbf{A}^4 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_5 &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_4 = \mathbf{A}^5 \cdot \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\vec{y}_n &= \mathbf{A} \cdot \vec{y}_{n-1} = \mathbf{A}^n \cdot \vec{y}_0
\end{aligned}$$

Die obige Rechnung zeigt, dass die Werte von $\vec{y}_n$ auch mit Hilfe von ganzen Potenzen $\mathbf{A}^n$ der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt werden können. Für diese Rechnungen sind Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ nützlich. Dies soll anhand dieses Beispiels illustriert werden.

Zuerst sind die beiden Eigenwerte zu berechnen. Sie sind bestimmt durch

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Anschliessend können die Eigenvektoren bestimmt werden durch die folgenden Rechnungen. Für den ersten Eigenwert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist das Gleichungsystem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt auf die eine Gleichung

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, x + y = 0$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 1 + \sqrt{5} \quad \text{und somit} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Für den zweiten Eigenwert $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erhält man analog

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{zu lösen ist} \qquad -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\, x + y = 0$$

Eine einfache Lösung ist gegeben durch

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 1 - \sqrt{5} \quad \text{und somit} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Nun schreiben wir den Startvektor $\vec{y}_0$ als Linearkombination der beiden linear unabhängigen Eigenvektoren.

$$\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Diese beiden Gleichungen für α und β sind eindeutig lösbar mit der Lösung $\alpha = -\beta = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Wegen

$$\mathbf{A}^n\,\vec{v}_1 = \lambda_1^n\,\vec{v}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^n\,\vec{v}_2 = \lambda_2^n\,\vec{v}_2$$

gilt nun

$$\vec{y}_n = \mathbf{A}^n \vec{y}_0 = \mathbf{A}^n \cdot (\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2) = \alpha\ (\mathbf{A}^n \cdot \vec{v}_1 - \mathbf{A}^n\,\vec{v}_2) = \alpha\ (\lambda_1^n\,\vec{v}_1 - \lambda_2^n\,\vec{v}_2)$$

und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right)$$

Somit haben wir eine explizite Formel für den n-ten Term in der Fibonacci Folge.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

Auf den ersten Blick mag es überraschen, dass diese Formel immer einen ganzzahligen Wert liefert, aber eine genauere Analyse bestätigt diese Tatsache. Mit der obigen Formel kann auch für grosse Werte von $n \in \mathbb{N}$ direkt die Zahl x_n bestimmt werden, ohne alle vorangehenden Terme zu bestimmen.

Die obigen Rechnungen können mit *Mathematica* implementiert werden. Die ersten 20 Terme der rekursiven Definition werden bestimmt mittels

Mathematica

```
n = 20;
val = Table[, {n}];
val[[1]] = 1; val[[2]] = 1;
For[k = 3, k <= n, k = k + 1, val[[k]] = val[[k - 1]] + val[[k - 2]]];
val
.
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,
 4181, 6765}
```

Der 20-te Term kann direkt bestimmt werden mittels

Mathematica

```
x[k_] := Simplify[(((1 + Sqrt[5])/2)^k - ((1 - Sqrt[5])/2)^k)/Sqrt[5]]
x[20]
.
6765
```

10.2.2 Markov'sche Ketten

Gewisse Probleme der Wahrscheinlichkeit können sehr gut mit Hilfe von Markov Kette beschrieben werden. Als Hilfsmittel werden Übergangsmatrizen verwendet. Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrizen beinhalten Information über dieses System. Das Verfahren wird mit Hilfe von zwei Beispielen illustriert, ohne auf Details der zugrundeliegenden Theorie einzugehen. Einfache Einführungen sind gegeben in [AntoRorr77, §7] und [SchnBark68, §6.7].

Grösse der Söhne

Wir betrachten eine grosse Gruppe von Vater–Sohn Paaren und untersuchen die Grösse (Länge). Wir gehen von den folgenden (hypothetischen) Tatsachen aus

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein kleiner Mann einen kleinen Sohn hat ist 0.6.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein kleiner Mann einen grossen Sohn hat ist 0.4.
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein grosser Mann einen kleinen Sohn hat ist 0.2.
4. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein grosser Mann einen grossen Sohn hat ist 0.8.

Diese Information kann auch als 2×2 Matrix dargestellt werden.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Die erste Zeile entspricht kleinen Söhnen, die zweite Zeile grossen Söhnen. Die erste Spalte entspricht kleinen Vätern, die zweite Spalte grossen Vätern. Diese Matrix hat einige spezielle Eigenschaften:

- Da jeder kleine Vater entweder einen kleinen oder grossen Sohn hat, ist die Summe der Zahlen in der ersten Spalte 1.
- Da jeder grosse Vater entweder einen kleinen oder grossen Sohn hat, ist die Summe der Zahlen in der zweiten Spalte 1.
- Alle Einträge in der Matrix sind positiv.
- Subtrahieren wir die Zahl 1 entlang der Diagonalen, so ist die Summe aller Zeilen immer Null.

$$\begin{bmatrix} 0.6-1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

  Somit ist die letzte Zeile eine Linearkombination der oberen Zeilen[1] und die Determinate dieser Matrix ist Null.

[1]Für 2×2 Matrizn ist diese Tatsache trivial, sie gilt aber auch für grössere Matrizen

Sind in der Gruppe k kleine Väter und g grosse Väter vorhanden, so erwarten wir $0.6 \cdot k + 0.2 \cdot g$ kleine Söhne und $0.4 \cdot k + 0.8 \cdot g$ grosse Söhne. Diese Rechnungen können auch als Matrizenmultiplikation geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Söhne} \\ \text{Anzahl grosse Söhne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \cdot k + 0.2 \cdot g \\ 0.4 \cdot k + 0.8 \cdot g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Mit den selben Überlegungen kann auch auf die Verteilung der Grosskinder geschlossen werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Grossöhne} \\ \text{Anzahl grosse Grosssöhne} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Anzahl kleiner Söhne} \\ \text{Anzahl grosse Söhne} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.28 \\ 0.56 & 0.72 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach n Generationswechseln erwarten wir somit eine Verteilung von

$$\begin{pmatrix} \text{klein} \\ \text{gross} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Analog zu den Überlegungen im Abschnitt 10.2.1 über die Fibonacci Folge sind Eigenwerte und Eigenvektoren nützlich um das Verhalten von $\mathbf{A}^n$ zu untersuchen.

Die beiden Eigenwerte sind Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0.6-\lambda & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} &= (0.6-\lambda)\,(0.8-\lambda) + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= \lambda^2 - (0.6+0.8)\,\lambda + 0.6 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.4 = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left((1.4) \pm \sqrt{1.4^2 - 4\,(0.48+0.08)}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0.4 \end{cases}$$

Aufgrund der obigen Überlegungen ist es kein Zufall, dass 1 ein Eigenwert ist. Die Eigenvektoren können nun bestimmt werden und man erhält

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0.4 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenvektoren gilt:

- Der zum Eigenwert 1 gehörende Vektor kann so normiert werden, dass alle Einträge positiv sind und die Summe aller Einträge 1 ist.
- Die Summe aller Einträge des/der anderen Eigenvektoren ist 0. Um dies einzusehen untersuchen wir einen von 1 verschiedenen Eigenwert λ mit Eigenvektor $\vec{v} = (x,y)^T$. Für diesen Vektor gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbb{I}) \cdot \vec{v} &= (\mathbf{A} - \mathbb{I}) \cdot \vec{v} - (\lambda - 1)\,\vec{v} = \vec{0} \\ \begin{bmatrix} 0.6-1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (\lambda-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 0 &= (\lambda-1) \cdot (x+y) \end{aligned}$$

  Um zur letzten Zeile zu gelangen, wurden die Gleichungen addiert. Für $\lambda \neq 1$ gilt somit $x + y = 0$, d.h. die Summe der Komponenten ist Null.

Die Anfangsverteilung der Väter wird nun geschrieben als Linearkombination der Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2$$

Für die Werte α und β erhalten wir ein lineares Gleichungssytem

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & , & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix}$$

Addiert man die beiden Gleichungen so erhält man

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + (1-1)\,\beta = g + k$$

und somit $\alpha = 1$. Der Wert von β könnte auch berechnet werden.

Für die Verteilung in der n-ten Generation gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \cdot (\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2) \\ &= \alpha\,\mathbf{A}^n\,\vec{v}_1 + \beta\,\mathbf{A}^n\,\vec{v}_2 \\ &= \alpha\,\lambda_1^n\,\vec{v}_1 + \beta\,\lambda_2^n\,\vec{v}_2 \\ &= \alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,0.4^n\,\vec{v}_2 \\ &\longrightarrow \alpha\,\vec{v}_1 = \vec{v}_1 \quad \text{falls} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

Da die Anzahl der Männer in jeder Generation bereits bekannt ist (ein Sohn pro Vater) muss die Summe der Einträge in $\alpha, \vec{v}_1$ gleich der ursprünglichen Anzahl Väter sein, d.h. $\alpha\,(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = \alpha = k + g$. Dies bestätigt den Wert von $\alpha = 1$. Nach vielen Generationen ergibt sich die Verteilung

Art	Anzahl	Anteil
klein	$\frac{k+g}{3}$	$\frac{1}{3}$
gross	$\frac{2\,(k+g)}{3}$	$\frac{2}{3}$

Somit ist die prozentuale Verteilung von kleinen und grossen Söhnen durch die Einträge im Eigenvektor $\vec{v}_1$ gegeben. Es ist der zu $\lambda_1 = 1$ gehörende Eigenvektor. Es ist zu beachten, dass die Endverteilung unabhängig ist von der Verteilung der ersten Generation.

10.2.3 Wechsel der Sportart

Mit den selben Methoden wie im vorangehenden Abschnitt untersuchen wir die durch eine Gruppe von Jugendlichen ausgeübten Sportarten:

- F steht für den Anteil FussballerInnen
- B steht für den Anteil BasketballerInnen
- N steht für den Anteil NichtsportlerInnen

Im Laufe eines Jahres wechseln die Jugendlichen ihre Sportart gemäss dem folgende Schema

	bisher		
neu	Fussball	Basketball	Nichts
Fussball	80%	15%	20%
Basketball	12%	75%	10%
Nichts	8%	10%	70%

• Problème 10–1:
Mit Hilfe der Ideen des vorangehenden Abschnittes sind die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Es ist zu verifizieren, dass die Angaben konsistent sind, d.h. widerspruchsfrei.

(b) Zu Beginn spielen je 50% Fussball und Basketball. Es gibt (noch) keine Nichtsportler. Wie sieht die Situation nach einem, resp. zwei Jahren aus?

(c) Die drei Eigenwerte und Eigenvektoren sind zu berechnen. Ein Eigenwert muss $\lambda_1 = 1$ sein. Der entsprechende Eigenvektor ist so zu wählen, dass die Summe aller Komponeneten 1 ergibt.

(d) Wie ist die Verteilung auf die drei Sportarten nach vielen Jahren?

Lösung: Die zu untersuchende Matrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.20 \\ 0.12 & 0.75 & 0.10 \\ 0.08 & 0.10 & 0.70 \end{bmatrix}$$

(a) Die Summe in jeder Spalte der Matrix ist tatsächlich 1.

(b) Zu berechnen sind

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.435 \\ 0.090 \end{pmatrix}$$

Somit spielen nach einem Jahr 47.5% Fussball, 43.5% Basketball und die verbleibenden 9% sind 'untätig'. Wegen

$$\mathbf{A}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.435 \\ 0.090 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46325 \\ 0.39225 \\ 0.14450 \end{pmatrix}$$

ist die Verteilung nach zwei Jahren 46.3%, 39.2% und 14.5% .

(c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und das konjugiert komplexe Paar $\lambda_{2,3} \approx 0.62500 \pm i\, 0.01936$. Der Eigenvektor $\vec{v}_1$ zum Eigenwert 1 ist

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.46099 \\ 0.31206 \\ 0.22695 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten wurden so normiert, dass die Summe 1 ergibt.

(d) Nach vielen Generationen erhält man 46% Fussball, 31% Basketball und 23% sportlich Inaktive.

• Problème 10–2:

In einer grossen Gruppe von Personen werden drei Sportarten betrieben (A, B und C). Nach jeder Saison können die Teilnehmer wechseln. Es haben sich die folgenden Wechselmuster ergeben.

Dans une grande groupe des personnes trois sport différente (A, B et C) sont possibles . Après chaque saison les participants on le choix de changer le sport. On trouve les pourcentages suivantes des changements.

- vorher/avant A. nachher/après: 20% B, 10% C
- vorher/avant B. nachher/après: 10% A, 5% C
- vorher/avant C. nachher/après: 20% A, 30% B

(a) Nach einer Wechselperiode spielen 40% A, 40% B und 20% C. Bestimmen Sie die ursprüngliche Verteilung.

(b) Welche Verteilung wird sich nach vielen Jahren einstellen?

(a) Après un seul changement on trouve la distribution de 40% A, 40% B et 20% C. Déterminer la distribution originale.

(b) Quel est la distribution après beaucoup des années?

Lösung: Die Übergangsmatrix für die Sportartenwechsel ist gegeben durch

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.10 & 0.2 \\ 0.2 & 0.85 & 0.3 \\ 0.1 & 0.05 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Die Summe in jeder Spalte muss 1 je ergeben.

(a) Ist (A, B, C) die Anfangsverteilung, so gilt nach einem Wechsel

$$\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45283 \\ 0.26415 \\ 0.28302 \end{pmatrix}$$

(b) Nach vielen Jahren ist die Verteilung gegeben durch den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörende Eigenvektor $\vec{v}$. Der Eigenvektor ist so zu normieren, dass die Summe der Komponeneten 1 ergibt. Somit ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.27907 \\ 0.60465 \\ 0.11628 \end{pmatrix}$$

Somit werden nach vielen Jahren 28% die Sportart A betreiben und 60% bleiben für B und noch 12% für C .

• Problème 10–3:

In einer grossen Gruppe von Personen werden drei Sportarten betrieben (A, B und C). Nach jeder Saison können die Teilnehmer wechseln. Es haben sich die folgenden Wechselmuster ergeben.

Dans une grande groupe des personnes trois sport différente (A, B et C) sont possibles . Après chaque saison les participants on le choix de changer le sport. On trouve les pourcentages suivantes des changements.

- vorher/avant A. nachher/après: 80% A, 10% B, 10% C
- vorher/avant B. nachher/après: 10% A, 50% B, 40% C
- vorher/avant C. nachher/après: 30% A, 30% B, 40% C

(a) Nach zwei Wechselperioden spielen 37.8% A, 31.2% B und 31.0% C. Bestimmen Sie die ursprüngliche Verteilung.

(b) Welche Verteilung wird sich nach vielen Jahren einstellen?

(a) Après deux changement on trouve la distribution de 37.8% A, 31.2% B et 31.0% C. Déterminer la distribution originale.

(b) Quel est la distribution après beaucoup des années?

Lösung: Die Übergangsmatrix für die Sportartenwechsel ist gegeben durch

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(a) Ist (A, B, C) die Anfangsverteilung, so gilt nach zwei Wechseln

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.8 \\ 31.2 \\ 31.0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 37.8 \\ 31.2 \\ 31.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

(b) Nach vielen Jahren ist die Verteilung gegeben durch den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektor $\vec{v}$. Der Eigenvektor ist so zu normieren, dass die Summe der Komponeneten 1 ergibt. Somit ist $\vec{v} = (0.5, 0.25, 0.25)^T$. Somit werden 50% die Sportart A betreiben und je 25% bleiben für B und C .

Ändert man die Verteilung nach zwei Jahren ab zu $(0.388\,,\, 0.302\,,\, 0.310)$, so ergibt sich eine sehr verschiedene Anfangsverteilung. Die Matrix $\mathbf{T}^2$ hat eine grosse Konditionierungszahl (≈ 150) und somit ist die Lösung von $\mathbf{T}^2\,\vec{x} = \vec{b}$ sehr empfindlich auf Änderungen im Vektor $\vec{b}$.

10.3 Geometrische Optik

In der geometrischen Optik können folgende Vektoren untersucht werden.

En optique géométrique, on peut utiliser les vecteurs

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Abstand von der optischen Achse} \\ \text{Winkel bezüglich optischer Achse} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{distance de l'axe optique} \\ \text{angle par rapport à l'axe optique} \end{pmatrix}$$

Alle Lichtwege werden von links nach rechts durchlaufen. Als Beispiele untersuchen wir die folgenden optischen Elemente.

1. Ein freies Wegstück der Länge s
2. Eine konvexe dünne Linse (fokussierend) mit gegebener Brennweite f. Für eine konkave Linse (Streulinse) ist die Brennweite f negativ zu wählen.
3. Ein kugelförmiger Körper mit Radius R. Der Radius R ist positiv zu wählen, wenn die brechende Fläche zum eintreffenden Strahl hin gewölbt ist, als negativ, wenn sie in Strahl–Richtung konkav ist.
4. Eine zur Achse senkrechte Ebene mit verschiedenen Brechungsindices links und rechts. Dies ist eine Spezialfall ($R = \infty$) der obigen Kugeloberfläche.

Tous les rayon de lumière vont de gauche a droite. Comme exemples, examinons les éléments optiques suivants.

1. Un chemin libre de longueur s.
2. une lentille convexe avec longueur focale f. Pour une lentille concave choisir la longueur focale f négative.
3. Un solide sphérique de rayon R. Choisir R positif si la surface se boucle contre la direction du trait, R est négatif si la surface se boucle dans la direction du rayon incident.
4. Un plan orthogonal à l'axe optique avec des indices de réfractions différentes.

Es ergeben sich dann die Transfermatrizen in Tabelle 10.1. Die Abschnitte 4 und 5 in [StanMeieFalc96] erklären, wie die Matrizen der Grundelemente zu multiplizieren sind um komplexe optische Systeme zu beschreiben und wie die Einträge der System–Matrix zu interpretieren sind.

On arrive alors aux matrices de transfert de la table 10.1. Les sections 4 et 5 en [StanMeieFalc96] expliquent comment multiplier les matrices des éléments de bas pour traiter des système optiques plus compliqués et comment tirer de l'information des éléments de cette matrice du système.

10–1 Exemple : Achsenparallele Strahlen fallen auf eine konkave dünne Linse mit Brennweite f. Nach der Linse wird noch eine Strecke der Länge s durchlaufen. Die Situation ist in Abbildung 10.3 skizziert.

Da die einfallenden Strahlen achsenparallel sind gilt dort $\alpha = 0$ und somit erhalten wir nach der Linse und der Strecke einen Abstand y_{neu} und einen Winkel α, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_{neu} \\ \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{L}(f) \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beschreibung / description	Matrix/matrice
Ausbreitung, Strecke s distance à parcourir s	$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
konvexe dünne Linse, Brennweite f lentille convexe, longueur focale f	$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Sphärischer Körper, Radius R Brechungsindex links n_1, rechts n_2 Solide sphérique, rayon R indices de réfraction: à gauche n_1, à droite n_2	$S(R, n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Grenzebene, Index links n_1, rechts n_2 plan, indices: à gauche n_1, à droite n_2	$S_\infty(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Tableau 10.1: Einige Transfermatrizen in der geometrischen Optik

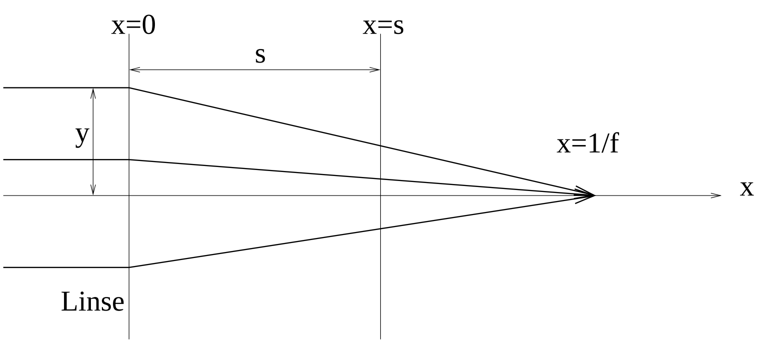


Figure 10.3: Strahlengang durch eine Linse

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -y/f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y - s\,y/f \\ -y/f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit gilt für den neuen Achsenabstand $y - s\,\frac{y}{f}$ und der Winkel ist gegeben durch $\frac{-y}{f}$. Setzt man $s = f$ so wird der Achsenabstand zu $y - f\,\frac{y}{f} = 0$ und somit werden die Strahlen in einem Abstand f von der Linse fokussiert. Die Abbildung 10.3 bestätigt diese Tatsache. ♢

10–2 Exemple :

Bei einer einfachen geometrischen Anordnung sind ein 2 cm grosses Objekt und der Projektionsschirm 50 cm voneinander entfernt. Eine dünne Linse mit Brennweite f sei x cm vom Objekt entfernt. Der Lichtstrahl geht vom Objekt zum Schirm, via Linse. Das auf dem Kopf stehende Bild soll 40 cm gross werden.

Dans une situation simple on a un objet de largeur 2 cm et un écran à une distance de 50 cm . Une lentille de longueur focale f se trouve à une distance de x cm de l'objet. Des rayons de lumière passent de l'objet à l'écran par la lentille. L'image de l'objet est inversée et a une largeur de 40 cm .

(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x, f)$ dieses optischen Systems auf.

(b) Erklären Sie, weshalb diese Matrix die untenstehende Form haben muss, d.h. $A = -20$ und $B = 0$.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x, f)$ de ce système optique.

(b) expliquer pourquoi la matrice $M(x, f)$ doit être de la forme donnée ci–dessous, c'est–à–dire $A = -20$ et $B = 0$.

$$M(x) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(c) Verwenden Sie den Determinantenmultiplikationssatz und $B = 0$ um zu zeigen, dass $D = 1/A$.

(d) Bestimmen Sie $\frac{x}{f}$, mit Hilfe von $D = -1/20$. Bestimmen Sie anschliessend x, mit Hilfe von $B = 0$

(c) Utiliser le théorème des multiplication des déterminant et $B = 0$ pour montrer que $D = 1/A$.

(d) Trouver $\frac{x}{f}$ à l'aide de $D = -1/20$. Puis trouver x à l'aide de $B = 0$

Solution:

(a) Die Matrix wird konstruiert durch

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Gesamt} = & \text{Linse zu Schirm} \cdot & \text{Linse} & \cdot\ \text{Objekt zu Linse} \\
M(x, f) = & T(50 - x) \quad \cdot & L(f) & \cdot \quad T(x)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 50 - x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50 - x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist die folgende Matrix zu untersuchen

$$M(x, f) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{50-x}{f} & x + (50 - x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ \frac{-1}{f} & 1 - \frac{x}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

(b) Damit das Bild fokussiert ist muss $B = 0$ sein. Für $B \neq 0$ werden Strahlen, die vom selben Punkt ausgehen, aber nicht mit dem selben α, nicht am selben Ort auf den Schirm auftreffen. Das Bild wird gespiegelt und um den Faktor 20 vergrössert, deshalb $A = -20$.

In Formeln geschrieben

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile dieses Systems lautet

$$A\,2 + B\,\alpha = -40$$

Damit dies für beliebige α richtig ist muss $A = -20$ und $B = 0$ sein.

(c) $\det T(s) = 1$ und $\det L(f) = 1$ implizieren

$$\begin{aligned} \det M\,(x,f) &= \det(T\,(50-x))\ \det\,(L\,(f))\ \det\,(T\,(x)) = 1 \\ \det\ M\,(x,f) &= A\,D - B\,C = A\,D = 1 \\ D &= \frac{1}{A} \end{aligned}$$

(d)
- Wegen $D = 1/A = -1/20$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{-1}{20} &= 1 - \frac{x}{f} \\ \frac{x}{f} &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

- Wegen $B = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x + (50-x)\,(1 - \frac{x}{f}) \\ 0 &= x - (50-x)\,\frac{1}{20} \\ 20\,x &= 50 - x \\ x &= \frac{50}{21} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

10–3 Exemple : This example is taken from [GerrBurc75, p 43].
The left end of a long plastic rod of refraction index 1.56 is ground and polished to a convex (outward) spherical surface of radius 2.8 cm . An object 2 cm tall is located in the air and on the axis at a distance of of 15 cm from the vertex. Find position x and size of the image inside the rod. The situation is shown in figure 10.4

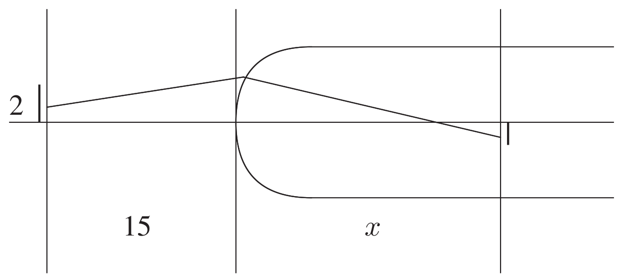


Figure 10.4: spherical rod used as a lense

Solution: As the ray of light travels from left to right is passes three different elements:

1. a distance of 15 cm
2. the curved surface, determined by the rod
3. a distance of x cm

Thus the first matrix to be multiplied is the transfer by the distance 15 cm. This leads to the following calculations. It might help to read the operations from right to left since the vector is multiplied by the matrices in that order. This is also the order in which the ray passes the optic elements.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{image} & & \text{distance } x & & \text{spherical surface} & & \text{distance 15} & & \text{original} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & T(x) & \cdot & S(R, n_i, n_a) & \cdot & T(15) & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_a-n_i}{n_i\,R} & \frac{n_a}{n_i} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-1.56}{1.56\cdot 2.8} & \frac{1}{1.56} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{array}$$

By multiplying the matrices we obtain

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - 0.128\,x & 15 - 1.282\,x \\ -0.128 & -1.128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 - 0.128\,x)\,y_{init} + (15 - 1.282\,x)\,\alpha_{init} \\ -0.128\,y_{init} - 1.128\,\alpha_{init} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If the image has to show at a distance x from the spherical surface, then all rays leaving at height y_{init} have to arrive at the same level y_{end}, independent on the initial angle α_{init}. This leads to the condition, that the number in the top right corner of the matrix has to vanish, i.e.

$$15 - 1.282\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 11.7$$

Thus the image will show at a distance of 11.7 cm. To find the size of the image we have to compute the result if we set $y_{init} = 2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.128 & -1.282 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.256 - 1.282\,\alpha_{init} \end{pmatrix}$$

Thus the image has size 1 cm and is inverted.

The calculation of this exercise can be done with *Mathematica*.

Mathematica

```
T[x_]:= {{1,x},{0,1}}
R[r_,ni_,na_] :={{1,0},{(na-ni)/(ni*r),na/ni}}
L[f_] := {{1,0},{-1/f,1}}
res1=T[x].R[2.8,1.56,1].T[15] //Simplify;
Solve[res1[[1,2]]==0]
.
{{x -> 11.7}}
```

♢

10–4 Exemple :

Parallele Lichtstrahlen treffen auf eine Kugel mit Radius $r = 1$ cm. Das Material hat einen Brechungsindex $n = 1.4$. Alle Strahlen sind nahe der Kugelachse.

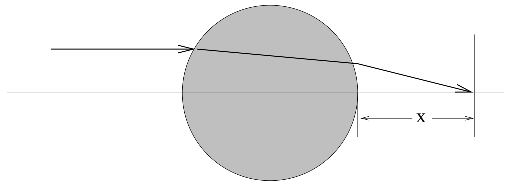
(a) Stellen Sie die Transfermatrix $M(x)$ dieses optischen Systems auf.

(b) In welchem Abstand x von der Kugel befindet sich der Brennpunkt?

Des rayons lumineuse paralèlles passent par une spère (rayon $r = 1$ cm) dont l'indic de réfraction est $n = 1.4$. Tous les rayons sont proche de l'axe de la spère.

(a) Trouver la matrice de transfert $M(x)$ de ce système optique.

(b) A quelle distance x de la boule se trouve le foyer?



Solution: Der Lichtstrahl durchläuft nacheinander

1. die erste Kugelfläche mit $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1.4$, $R = 1$
2. eine freie Wegstrecke der Länge 2 cm.
3. die zweite Kugelfläche mit $n_1 = n = 1.4$, $n_2 = 1$, $R = -1$
4. eine freie Wegstrecke der Länge x cm.

Dies kann durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen kombiniert werden.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Gesamt} & & \text{Weg } x & & \text{zweite Fläche} & & \text{Kugel} & & \text{erste Fläche} \\
M(x) & = & T(x) & \cdot & S(-1,1,n) & \cdot & T(2) & \cdot & S(1,n,1) \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{-1} & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-n & n \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n}-1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 0.429 & 1.426 \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} & = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix}}
\end{array}$$

(a) Man erhält

$$\begin{pmatrix} y_{end} \\ \alpha_{end} \end{pmatrix} = M(x) \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.429 - 0.571\,x & 1.426 + 0.429\,x \\ -0.571 & 0.429 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{init} \\ \alpha_{init} \end{pmatrix}$$

(b) Damit der Strahl fokussiert muss der Eintrag oben links in der Matrix Null sein. Nur dann hängt der y–Wert des Bildstrahls nicht vom y–Wert des Eingangsstrahls ab. Da die Einganstrahlen parallel zur Achse sind ist $\alpha_{init} = 0$. Deshalb ist der Eintrag oben rechts in M irrelevant. Somit die folgende Beziehung gelten:

$$0.429 - 0.571\,x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.75 \text{ cm}$$

Diese Beispiel wurde [GerrBurc75] entnommen. ♢

10.4 Spannungen, Elastizität

Teile dieses Abschnittes wurden den Büchlein [Demm75, p. 90] und [ChouPaga67] entnommen.

10.4.1 Definition von ebenen Spannungen und Grundgleichungen

Auf einen elastischen Körper wirken Kräfte die alle parallel zur xy–Ebene sind. Die Kontur des Körpers ist unabhängig von z. Deshalb untersuchen wir auch im Inneren des Körpers nur Spannungen parallel zur xy–Ebene. Nun schneiden wir (in Gedanken) aus dem Körper ein kleines Rechteck heraus und untersuchen die auf den Rand der Quaders der Breite Δx, Tiefe Δy und Höhe Δz wirken. Die gemessenen Kräfte werden durch die Flächen auf denen sie wirken dividiert. Dadurch erhält man die **Spannungen**.

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

Senkrecht zu den Trennflächen erhält man die **Normalspannungen** σ und parallel zu den Flächen erhält man die **Tangentialspannungen** τ. Wir gehen davon aus, dass der Quader so klein ist, dass die Spannungen als konstant betrachtet werden können. Die Pfeile in der Abbildung 10.5 zeigen die positiven Richtungen an. Das Rechteck hat eine Breite von Δx und eine Höhe Δy. Die Dicke in die nicht sichtbare z–Richtung sei Δz. Nun gehen wir davon aus, dass der Körper in Ruhe ist. Somit muss die Summe aller wirkenden Kräfte und Momente verschwinden. Das wird auf einige Bedingungen an die Spannungen führen.

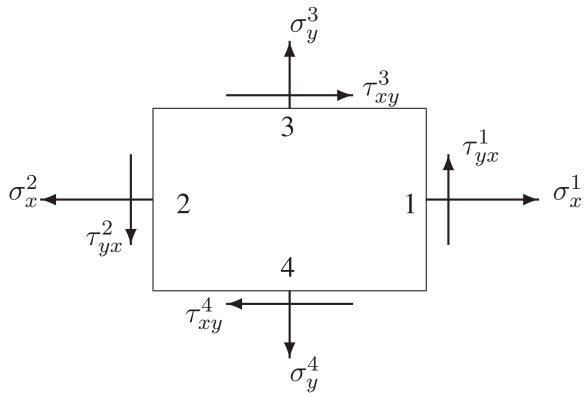


Figure 10.5: Spannungen in der Ebene, erster Versuch

- Kräfte in x–Richtung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_x^1\,\Delta y\,\Delta z - \sigma_x^2\,\Delta y\,\Delta z + \tau_{xy}^3\,\Delta x\,\Delta z - \tau_{xy}^4\,\Delta x\,\Delta z \\ 0 &= (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)\,\Delta y + (\tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4)\,\Delta x \end{aligned}$$

  In der obigen Gleichung konnten wir problemlos durch Δz dividieren, da dieser Term nicht Null ist. All obigen Überlegungen können wir auch mit einem Rechteck der Breite Δx und der neuen Höhe $2\Delta y$ durchführen. Im Schlussresultat kann einfach Δy durch $2\Delta y$ ersetzt werden, d.h.

$$0 = (\sigma_x^1 - \sigma_x^2)\;2\;\Delta y + (\tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4)\;\Delta x$$

  Nun können die beiden Gleichungen geeignet kombiniert werden (Addition, Subtraktion) und man liest sofort ab, dass

$$\sigma_x^1 - \sigma_x^2 = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{xy}^3 - \tau_{xy}^4 = 0$$

- Kräfte in y–Richtung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_y^3\,\Delta x\,\Delta z - \sigma_y^4\,\Delta x\,\Delta z + \tau_{yx}^1\,\Delta y\,\Delta z - \tau_{yx}^2\,\Delta y\,\Delta z \\ 0 &= (\sigma_y^3 - \sigma_y^4)\,\Delta x + (\tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2)\,\Delta y \end{aligned}$$

  In der obigen Gleichung konnten wir problemlos durch Δz dividieren, da dieser Term nicht Null ist. Auch hier können wir Δy durch $2\Delta y$ ersetzt werden, d.h.

$$0 = (\sigma_y^3 - \sigma_y^4)\;\Delta x + (\tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2)\;\Delta y$$

  Nun können die beiden Gleichungen geeignet kombiniert werden (Addition, Subtraktion) und man liest sofort ab, dass

$$\sigma_y^3 - \sigma_y^4 = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{yx}^1 - \tau_{yx}^2 = 0$$

- Somit sind die Normal- und Tangentialspannungen an gegenüberliegenden Seiten je gleich und wir können auf die Numerierung der Spannungen verzichten.
- Moment bezüglich des Mittelpunktes:
  Das Moment der Normalkräfte ist Null und wir müssen nur die Tangentialspannungen berücksichtigen. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Delta x}{2}\,\tau_{yx}^1\,\Delta\,y\,\Delta z + \frac{\Delta x}{2}\,\tau_{yx}^3\,\Delta\,y\,\Delta z - \frac{\Delta y}{2}\,\tau_{xy}^1\,\Delta\,x\,\Delta z + \frac{\Delta y}{2}\,\tau_{xy}^3\,\Delta\,x\,\Delta z \\ 0 &= \tau_{yx} - \tau_{xy} \end{aligned}$$

  Für die letzte Umformung haben wir die obigen Resultate (z.B. $\tau_{yx}^1 = \tau_{yx}^2$) bereits verwendet. Somit haben alle Tangentialspannungen den selben Betrag und unterscheiden sich nur in der Richtung.

Somit können wir die Bezeichnungen in der Abbildung 10.5 vereinfachen und erhalten die neue Abbildung 10.6.

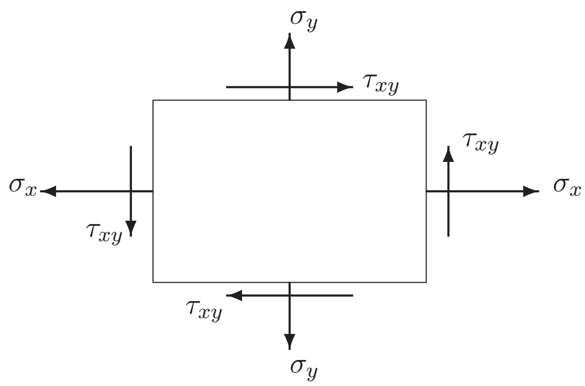


Figure 10.6: Spannungen in der Ebene

10.4.2 Ebene Spannungszustände, Hauptspannungsrichtungen

Nun untersuchen wir Normal- und Tangential–Spannung entlang einer geneigten Schnittfläche mit dem normierten Normalenvektor $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\ \alpha)^T$. Die Situation ist in Abbildung 10.7 skizziert.

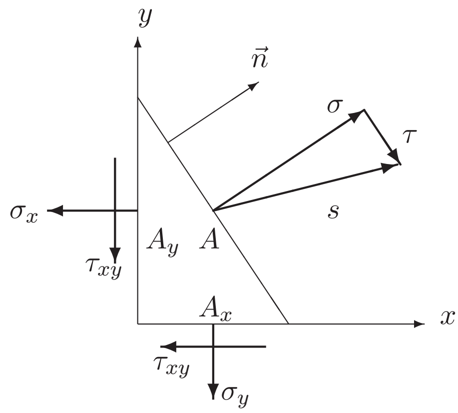


Figure 10.7: Spannungen entlang eines schiefen Schnittes

In Abbildung 10.7 gilt

$$A_x = A\ \sin\alpha \quad \text{und} \quad A_y = A\ \cos\alpha$$

Da sich die beiden Komponenten der externen Spannungskräfte auch hier aufheben müssen gilt für den Spannungsvektor $\vec{s} = (s_x, s_y)^T$ auf dem schiefen Schnitt

$$\begin{aligned} s_x\ A = \sigma_x\ A_y + \tau_{xy}\ A_x &\implies s_x = \sigma_x\ \cos\alpha + \tau_{xy}\ \sin\alpha \\ s_y\ A = \sigma_y\ A_x + \tau_{xy}\ A_y &\implies s_y = \tau_{xy}\ \cos\alpha + \sigma_y\ \sin\alpha \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Matrizen kann man diese beiden Gleichungen umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

oder kürzer

$$\vec{s} = S\ \vec{n}$$

wobei die symmetrische Spannungsmatrix gegeben ist durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Der Spannungsvektor $\vec{s}$ kann zerlegt werden in einen Anteil reine Normalspannung der Stärke τ und einen Anteil Tangentialspannung der Stärke σ. Da sich die Komponente eines Vektors in eine gegebene Richtung mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen lässt gilt

$$\begin{aligned}
\sigma &= \langle \vec{n}\,,\,\vec{s}\rangle = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = (\cos\,\alpha, \sin\,\alpha)\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\
\tau &= (-\sin\,\alpha, \cos\,\alpha)\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen von τ und σ hängt von den gewählten positiven Richtungen ab.

10–5 Exemple : Gegeben sind die Spannungen $\sigma_x = 500$ und $\sigma_y = 300$. Es gilt $\tau_{xy} = 0$. Gesucht sind die Spannungen in den um 60° gedrehten Ebenen.

Solution: Die Lösung sollte durch eine passende Figur illustriert werden.

- Der erste Normalenvektor $\vec{n}$ bildet einen Winkel von 60° mit der x–Achse. Für den Spannungsvektor $\vec{s}$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} s_x\\ s_y\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}500 & 0\\ 0 & 300\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\\ 150\,\sqrt{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Die Normalspannung ist gegeben durch

$$\sigma_1 = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix}250\\ 150\,\sqrt{3}\end{pmatrix} = 125 + \frac{3}{2}\,150 = 350$$

  Der Betrag der Tangentialspannung ist

$$|\tau_1| = \left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}250\\ 150\,\sqrt{3}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}\,\,|-125+75| = 50\,\sqrt{3} \approx 86.6$$

- Der zweite Normalenvektor $\vec{n}$ bildet einen Winkel von -30° mit der x–Achse. Für den Spannungsvektor $\vec{s}$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} s_x\\ s_y\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\,\alpha\\ \sin\,\alpha\end{pmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}500 & 0\\ 0 & 300\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\,\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Die Normalspannung ist gegeben durch

$$\sigma_2 = \vec{n}^T\cdot\vec{s} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix}250\,\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix} = 450$$

  Der Betrag der Tangentialspannung ist

$$|\tau_2| = \left|\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix}250\,\sqrt{3}\\ -150\end{pmatrix}\right| = 50\,\sqrt{3}$$

- Wie zu erwarten war gilt $|\tau_1| = |\tau_2|$, d.h. die beiden Tangentialspannungen sind gleich gross. Die Normalspannungen sind $\sigma_1 = 350$ und $\sigma_2 = 450$.

$\diamondsuit$

Eine zentrale Fragestellung bei der Analyse des Spannungszustandes ist die folgende:

> Gibt es eine schräge Fläche, die schubspannungsfrei ist, auf der also der gesamte Spannungsvektor $\vec{s}$ senkrecht steht auf der Fläche? Wenn ja, wie gross ist dann diese **Hauptspannung** σ, und wie ist diese Fläche orientiert.

Die lineare Algebra kann die obigen Fragen beantworten. Der Spannungsvektor $\vec{s}$ ist genau dann senkrecht auf der Ebene, wenn er ein Vielfaches des normierten Normalenvektors $\vec{n}$ ist. Der Faktor entspricht dann der Hauptspannung, d.h. $\vec{s} = \sigma\,\vec{n}$. Setzt man dies in der obigen Formel ein so ergibt sich mit der gegebenen Spannungsmatrix S die Gleichung

$$S\,\vec{n} = \sigma\,\vec{n} \quad \text{oder auch} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

für den Faktor σ und den Vektor $\vec{n}$. Dies ist ein Eigenwert–Problem. Somit gilt in der Sprache der linearen Algebra

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Eigenwert der Matrix } S \\ \vec{n} &= \text{Eigenvektor der Matrix } S \end{aligned}$$

Die Eigenwerte (Hauptspannungen) sind gegeben als Lösungen einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte σ.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 - \sigma\,(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\,\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

Die Lösungen sind

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\,\left(\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\,\sigma_x\,\sigma_y + 4\,\tau_{xy}^2}\right) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen lassen sich berechnen mit den Methoden für Eigenvektoren. Da die Spannungsmatrix S symmetrisch ist, gibt es immer zwei Hauptspannungen und die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen sind senkrecht zueinander.

Aufgrund der obigen Gleichung gilt auch

$$\left(\sigma_{1,2} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

Nun untersuchen wir einen Kreis in einer $\sigma\tau$–Ebene mit Mittelpunkt bei $(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\,,\,0)$ und Radius R. diese Gleichung lautet

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

In der obigen Gleichungen kann man ablesen, dass die Punkte

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix}$$

alle auf diesem **Spannungskreis von Mohr** liegen. Dieser Kreis ist in Abbildung 10.8 gezeigt. Im Beweis des Satzes 10–22 (Seite 276) sehen wir, dass die Richtung des ersten Eigenvektors der Matrix **S** beschrieben ist durch den Winkel ϕ, wobei

$$\tan\,(2\phi) = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Somit kann auch der Winkel ϕ (resp. $2\,\phi$) im Mohr'schen Spannungskreis abgelesen werden.

Sind die Werte von σ_x, σ_y und τ_{xy} bekannt so kann er leicht konstruiert werden:

- Zeichne die Punkte (σ_x, τ_{xy}) und $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ ein.
- Verbinde die Punkte durch eine Gerade, der Schnittpunkt mit der σ–Achse ergibt den Kreismittelpunkt.
- Zeichne den Kreis und die Schnittpunkte mit der σ–Achse ergeben die Hauptspannungen σ_1 und σ_2.

Nun können auch Normal- und Tangential–Spannungen für beliebige Richtungen am Kreis abgelesen werden. Um diese Spannungen in Richtung mit Abweichung ψ von der Hauptspannungsrichtung zu bestimmen, muss eine Gerade mit Winkel $2\,\psi$ durch den Kreismittelpunkt gezeichnet werden. An den Schnittpunkten mit dem Kreis können die Werte abgelesen werden.

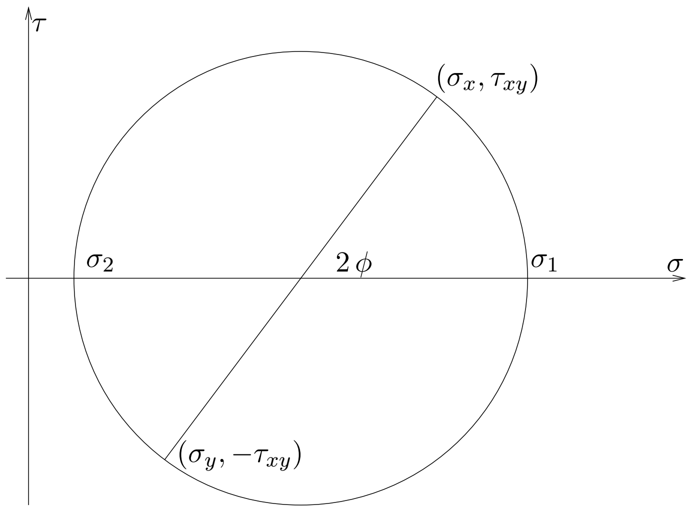


Figure 10.8: Spannungskreis von Mohr

10.4.3 Räumliche Spannungszustände

Die obigen Überlegungen können auch für die z–Komponenten durchgeführt werden. Wir erhalten die Tabelle 10.2 von 6 Spannungen, die den Spannungszustand in einem Punkt (sehr kleiner Quader) vollständig beschrieben. Die Abbildung 10.9 illustriert die verschiedenen Normal- und Tangentialspannungen. Die gezeichneten Vektoren geben die positiven Richtungen an. In Abbildung 10.9 sind neun Grössen eingezeichnet, aber einige der Tangentialspannungen sind gleich gross. So ist zum Beispiel $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wäre dies nicht der Fall würden sich die Momente bezüglich einer Achse parallel zu z–Achse durch den Mittelpunkt nicht aufheben.

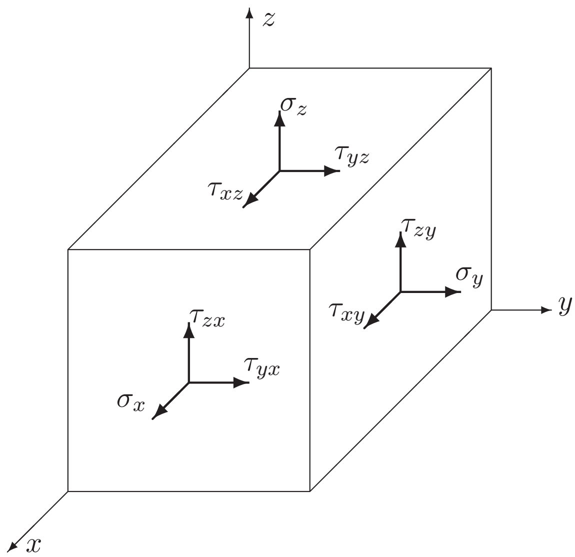


Figure 10.9: Spannungen im Raum

Die symmetrische Spannungsmatrix S ist hier gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Notation	Bedeutung
σ_x	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung
σ_y	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung
σ_z	Normalspannung an einer Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	Tangentialspannung in y-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung Tangentialspannung in x-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$	Tangentialspannung in z-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur x–Richtung Tangentialspannung in x-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$	Tangentialspannung in z-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur y–Richtung Tangentialspannung in y-Richtung an Schnittfläche senkrecht zur z–Richtung

Tableau 10.2: Normal- und Tangential–Spannungen im Raum

und der Spannungsvektor $\vec{s}$ an einer Schnittebene mit normiertem Normalenvektor $\vec{n}$ ist auch hier gegeben durch

$$\vec{s} = S\,\vec{n}$$

Die symmetrische Matrix S hat drei reelle Eigenwerte $\sigma_{1,2,3}$, Lösungen der kubischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_3) = \det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

und zugehörige Eigenvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$. Diese Eigenvektoren sind paarweise senkrecht. Sind die Flächen eines Quaders je senkrecht auf diesen Eigenvektoren, so wirken keine tangentialen Schubspannungen, es gibt nur Normalspannungen.

10.4.4 Beispiele

10–6 Exemple : Bei einem ebenen Spannungsproblem werden nur Tangentialspannungen τ_{xy} festgestellt. Zu bestimmen sind die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen

Solution: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

und die Hauptspannungen somit als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_2) = \det\begin{bmatrix} -\sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 - \tau_{yx}^2 = 0$$

Somit sind die beiden Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xy}$$

Die erste Hauptspannungsrichtung ist gegeben durch die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(S - \sigma_1\,\mathbb{I}_2)\,\vec{n} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & -\tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} -\tau_{xy}\,n_x + \tau_{xy}\,n_y &= 0 \\ \tau_{xy}\,n_x - \tau_{xy}\,n_y &= 0 \end{aligned}$$

Eine normierte Lösung ist

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die beiden Hauptspannungsrichtungen $45°$ und $-45°$. Die Normalspannung in der $45°$–Richtung ist gegeben durch τ_{xy} und in der $-45°$–Richtung durch $-\tau_{xy}$. ♢

10–7 Exemple : Bei einem ebenen Spannungsproblem wirken in den Achsenrichtungen nur Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, d.h. $\tau_{xy} = 0$. Zu zeigen ist, dass dann in jeder Richtung nur Normalspannungen wirken.

Solution: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Der Spannungsvektor in Richtung $\vec{n}$ ist also

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \vec{n} = \sigma\,\vec{n}$$

Somit zeigt der Spannungsvektor $\vec{s}$ in die Richtung des Normalenvektors der zu untersuchenden Ebene, d.h. es liegt eine reine Normalbelastung vor. ♢

10–8 Exemple : Bei einem ebenen Spannungsproblem ist $\sigma_x = -800$, $\sigma_y = 300$ und $\tau_{xy} = -400$. Zu bestimmen sind die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen

Solution: Die Spannungsmatrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{bmatrix} -800 & -400 \\ -400 & 300 \end{bmatrix}$$

und die Hauptspannungen somit als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_2) = \det \begin{bmatrix} -800 - \sigma & -400 \\ -400 & 300 - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 + 500\,\sigma - 400'000 = 0$$

Somit sind die beiden Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = -250 \pm 680 = \begin{cases} 430 \\ -930 \end{cases}$$

Die erste Hauptspannungsrichtung ist gegeben durch die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(S - 430\,\mathbb{I}_2)\,\vec{n} = \begin{bmatrix} -1230 & -400 \\ -400 & -130 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{aligned} -1230\,n_x - 400\,n_y &= 0 \\ -400\,n_x - 130\,n_y &= 0 \end{aligned}$$

Somit muss $n_y = \frac{40}{13}\,n_x \approx 3\,n_x$ sein. Der Winkel kann bestimmt werden durch $\arctan\frac{40}{13} \approx 1.26 \approx 72°$. In diese Richtung herrscht eine reine Zugspannung von 430 Einheiten ($[\frac{N}{m^2}]$). In der dazu senkrechten Richtung eine reine Druckbelastung von 930 Einheiten. ♢

10–9 Exemple : Bei einem räumlichen Spannungszustand ist $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ und $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau$. Gesucht sind die Hauptspannungen und ihre Richtung. Für die Konvention der Richtungen der Tangentialspannungen sollten Sie Abbildung 10.9 verwenden.

Solution: Die Spannungsmatrix ist

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Zu finden sind die drei Eigenwerte und die Eigenvektoren

$$\det(S - \sigma\,\mathbb{I}_3) = \det \begin{bmatrix} -\sigma & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma \end{bmatrix}$$

Das führt auf die kubische Gleichung

$$-\sigma^3 + 3\,\tau^2\,\sigma + 2\,\tau^3 = 0$$

Die erste Lösung $\sigma_1 = -\tau$ findet man durch Raten. Division des Polynoms durch $\sigma + \tau$ ergibt die quadratische Gleichung

$$\sigma^2 - \tau\,\sigma - 2\tau^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $\sigma_2 = -\tau$ und $\sigma_3 = 2\tau$. Der Eigenvektor des grössten Eigenwertes σ_3 ergibt sich als Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} -2\,\tau & \tau & \tau \\ \tau & -2\,\tau & \tau \\ \tau & \tau & -2\,\tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der normierten Lösung

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit wirkt in die Richtung der Diagonalen des Einheitswürfels eine Spannung von $2\,\tau$ (Zug). In den dazu senkrechten Richtung wirkt eine Normalspannung von $-\tau$ (Druck). $\diamondsuit$

Bibliographie

[AntoRorr77] H. Anton and C. Rorres. *Applications of Linear Algebra*. John Wiley and Sons, Inc., 3rd edition, 1977.

[AntoRorr91] H. Anton and C. Rorres. *Elementary Linear Algebra, Applications Version*. John Wiley and Sons, Inc., 1991.

[Bach71] H. Bachmann. *Vektorgeometrie*. Sabe, Velagsinstitut für Lehrmittel, 1971.

[ChouPaga67] P. C. Chou and N. J. Pagano. *Elasticity, Tensors, dyadic and engineering Approaches*. D Van Nostrand Company, 1967. reprinted by Dover 1992.

[Crai89] J. J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Addision Wesley, second edition, 1989.

[Demm75] G. Demmig. *Matrizen und Determinanten*. Demmig Verlag, 1975.

[GerrBurc75] A. Gerrard and J. M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. John Wiley & Sons, 1975. Dover edition 1994.

[LandHest92] E. M. Landesman and M. R. Hestenes. *Linear Algebra for Mathematics, Science and Engineering*. Prentice Hall, 1992.

[Pres86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (in PASCAL)*. Cambridge University Press, 1986.

[Pres92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.

[SchnBark68] H. Schneider and G. P. Barker. *Matrices and Linear Algebra*. Holt, Rinehard and Winston, 1968.

[Schw75] W. Schwarz. *Brücke zur Höheren Mathematik*. Verlag Vieweg, Braunschweig, 1975.

[Solo90] D. Solow. *How to Read and Do Proofs*. John Wiley & Sons, New York, 1990.

[StanMeieFalc96] S. Stankowski, C. Meier, and L. Falco. Matrix–Optik im Physik–Unterricht. Jahresbericht 1995/96 der Ingenieurschule Biel, 1996.

[Swok92] E. W. Swokowski. *Calculus, late Trigonometry Version*. PWS–Kent Publishing Company, Boston, fifth edition, 1992.

[Twom77] S. Twomey. *Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurements*. Number 3 in Developments in Geomathematics. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. republished by Dover 1996.

Liste des figures

Liste des tableaux