

# Analyse 2

Andreas Stahel

29 novembre 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'intégrale définie</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction	1
1.2	Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	6
1.3	L'intégrale indéfinie	9
1.4	Méthodes d'intégration	10
1.4.1	Exemples pour la règle des sommes	11
1.4.2	Intégration par partie	11
1.4.3	Substitution	13
1.5	Intégration des fonctions rationnelles	16
1.5.1	Décomposition en fractions simples	16
1.5.2	Intégrales des fonction rationnelles élémentaires	24
1.5.3	Integration des fonctions rationnelles	25
1.6	Intégration numérique	28
1.6.1	Formule des trapèzes	28
1.6.2	Formule de Simpson	31
1.6.3	Formule de Simpson 3/8	34
1.6.4	Pascal–Programme zur numerischen Integration	37
1.6.5	Intégration à l'aide de Gauss	42
1.7	Exercices	43
1.7.1	Somme de Riemann	43
1.7.2	Exercices de base	45
1.7.3	Calcul des intégrals	46
1.7.4	Intégration par partie	48
1.7.5	Substitution	49
1.7.6	Fonctions rationnelles	50
1.7.7	Intégration numérique	51
1.7.8	Problèmes mixtes	56
1.7.9	Solutions de quelques problèmes	58
1.8	Récapitulation	76
<b>2</b>	<b>Applications de l'intégrale</b>	<b>77</b>
2.1	Aires entre courbes	77
2.1.1	Coordonnées cartésiennes	77
2.1.2	coordonnées polaires	78
2.2	Centre de masse et moments	79
2.2.1	Centre de masse d'une surface	79
2.2.2	Moments de l'ordre 0 et 1	80
2.2.3	Moments de l'ordre 2, moment d'inertie	81
2.3	Flexion de poutres	83
2.3.1	Energie de déformation	83
2.3.2	Les équations de base	84

2.3.3	Flexion d'une poutre par son propre poids	85
2.3.4	Calculs à la main	85
2.3.5	Poutre soutenues des deux côtés	88
2.4	Longueur de courbes	90
2.5	Volume et surface de corps de révolution	92
2.6	Travail	94
2.7	Courant, voltage, puissance	95
2.8	Problèmes mixtes	95
2.9	Solutions de quelques problèmes	100
<b>3</b>	<b>Kurven</b>	<b>123</b>
3.1	Kurven und Parametrisierungen in $\mathbb{R}^2$	123
3.1.1	Parametrisierung	123
3.1.2	Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung	125
3.1.3	Ort, Tangentialvektor und Krümmung	132
3.2	Kurven in $\mathbb{R}^3$	139
3.3	Aufgaben	141
3.3.1	Lösungen zu einigen Aufgaben	149
3.4	Zusammenfassung	161
<b>4</b>	<b>Linienintegrale</b>	<b>162</b>
4.1	Integral einer skalaren Funktion entlang einer Kurve	163
4.2	Integral einer Vektor-Funktion entlang einer Kurve	165
4.3	Konservative Vektorfelder	170
4.4	Finden des Potentials eines konservativen Vektorfeldes	174
4.5	Potentialberechnung für ein elektrisches Feld	176
4.5.1	Erster Lösungsversuch	176
4.5.2	Erste Lösung: Kurve intelligent parametrisieren	176
4.5.3	Zweite Lösung: Kurve ändern	177
4.5.4	Dritte Lösung: Potential bestimmen	177
4.6	Das Gesetz von Biot-Savart	177
4.6.1	Magnetfeld eines geraden Leiters	178
4.6.2	Magnetfeld eines kreisförmigen Leiters	179
4.6.3	Feld entlang einer anderen Achse	181
4.6.4	Mehrere Stromschleifen, eine einfache Spule	183
4.6.5	Feldlinien	184
4.6.6	Die Helmholtz Anordnung zweier Spulen	185
4.7	Aufgaben	187
4.7.1	Lösungen zu einigen Aufgaben	194
4.8	Zusammenfassung	202
<b>5</b>	<b>Uneigentliche Integrale und Parameterintegrale</b>	<b>204</b>
5.1	Uneigentliche Integrale	204
5.1.1	Integrale mit unendlichem Integrationsbereich	204
5.1.2	Integrale über Polstellen der Funktion	206
5.1.3	Majorantenkriterium	208
5.2	Eigentliche Parameterintegrale	210
5.2.1	Grundproblem	210
5.2.2	Resultate	210
5.3	Uneigentliche Integrale in mehreren Variablen	212
5.3.1	Grundproblem	212
5.3.2	Resultate	213

5.4	Uneigentliche Parameterintegrale	216
5.4.1	Grundproblem	216
5.4.2	Resultate	216
5.4.3	Beispiele	217
5.5	Aufgaben	219
5.5.1	Uneigentliche Integrale	219
5.5.2	Parameterintegrale	221
5.6	Zusammenfassung	222
<b>6</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>223</b>
6.1	Repetition: Reihen von Zahlen	223
6.2	Potenzreihen	224
6.3	Rechnen mit Reihen	228
6.4	Komplexe Exponentialfunktion	234
6.5	Potenzreihen und Taylorpolynome	235
6.6	Eine Anwendung	236
6.7	Aufgaben	238
6.7.1	Lösungen zu einigen Aufgaben	242
6.8	Zusammenfassung	244
<b>7</b>	<b>Differentialrechnung in mehreren Variablen</b>	<b>245</b>
7.1	Einführung	245
7.1.1	Graphen	246
7.2	Grenzwerte und Stetigkeit	250
7.2.1	Definitionen und Begriffe	250
7.2.2	Beispiele und Resultate	254
7.3	Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen	258
7.3.1	Gradient und Tangentialebene	260
7.3.2	Richtungsableitung	265
7.3.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	270
7.3.4	Taylorapproximation zweiter Ordnung, Hesse'sche Matrix	273
7.4	Anwendungen	278
7.4.1	Extremalprobleme	278
7.4.2	Das Differential, lineare Approximationen und Fehlerrechnung	286
7.4.3	Lösen von mehreren nichtlinearen Gleichungen (Newton)	291
7.4.4	Extremalprobleme mit Nebenbedingungen, Verfahren von Lagrange	300
7.5	Aufgaben	306
7.5.1	Aufgaben zu Grundlagen	306
7.5.2	Extremalprobleme	311
7.5.3	Approximationen erster und zweiter Ordnung	314
7.5.4	Aufgaben zum Verfahren von Newton	317
7.5.5	Aufgaben zum Verfahren von Lagrange	319
7.5.6	Vermischte Aufgaben	319
7.5.7	Lösungen zu einigen Aufgaben	322
7.6	Zusammenfassung	353
<b>8</b>	<b>Mehrfache Integrale</b>	<b>354</b>
8.1	Integrale über Bereiche in $\mathbb{R}^2$	354
8.1.1	Integrale über Rechtecke	354
8.1.2	Integrale über beliebige Bereiche	356
8.1.3	Integrale in Polarkoordinaten	360
8.1.4	Integrale in beliebigen Koordinaten	361

8.1.5	Der Satz von Green, Divergenzsatz	364
8.2	Integrale über Bereiche in $\mathbb{R}^3$	368
8.2.1	Integrale in kartesischen Koordinaten	368
8.2.2	Integrale in Zylinderkoordinaten	371
8.2.3	Integrale in Kugelkoordinaten	371
8.2.4	Integrale in beliebigen Koordinaten	373
8.3	Divergenzsatz	375
8.4	Oberflächenintegrale	376
8.4.1	In kartesischen Koordinaten	376
8.4.2	In Zylinderkoordinaten	376
8.4.3	In Kugelkoordinaten	376
8.4.4	Oberflächenintegrale in beliebigen Koordinaten	377
8.4.5	Beispiele	381
8.5	Potential und Kraftfeld einer Vollkugel	384
8.5.1	Integration in Kugelkoordinaten	385
8.5.2	Integration in Zylinderkoordinaten	386
8.6	Einfache Wärmeleitungsprobleme	388
8.6.1	Physikalische Begriffe	388
8.6.2	Der Laplaceoperator in verschiedenen Koordinatensystemen	390
8.6.3	Stationäre Randwertprobleme	392
8.6.4	Wärmefluss durch eine Rohrwand	393
8.6.5	Wärmeleitwertmessung	395
8.6.6	Wie heiss wird diese Pfanne?	396
8.6.7	Wärmeübergangskoeffizienten	397
8.7	Aufgaben	398
8.7.1	Zweidimensionale Bereiche	398
8.7.2	Dreidimensionale Bereiche	403
8.7.3	Zum Divergenzsatz	406
8.7.4	Lösungen zu einigen Aufgaben	413
8.8	Zusammenfassung	436
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>437</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>439</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>440</b>

# Chapitre 1

## L'intégrale définie

### 1.1 Introduction

Un puissant moyen d'investigation en mathématiques, en physique, en mécanique, ainsi que dans d'autres disciplines est fourni par **l'intégrale définie**, une des notions fondamentales de l'analyse. Le calcul des aires délimitées par des courbes, des arcs, des volumes, du travail, de la vitesse, du chemin, des moments d'inertie, etc., se ramène au calcul d'une intégrale définie.

Considérons l'aire  $A$  d'un trapèze curviligne qui est limité en haut par la fonction continue, positive  $y = f(x)$ , en bas par l'axe  $y = 0$  à droite par une verticale  $x = b$  et à gauche par une verticale  $x = a$ .

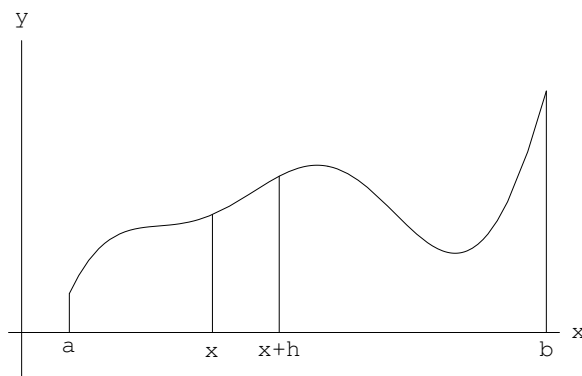


Figure 1.1: Approximation de l'aire

Si  $0 < h \ll 1$  on peut approximer l'aire  $A(x, x+h)$  entre des verticales  $x$  et  $x+h$  par  $f(\xi)h$  pour n'importe quelle valeur de  $x \leq \xi \leq x+h$ .

$$A(x, x+h) \approx f(\xi)h$$

Posons

$$M = \sup_{x \leq t \leq x+h} f(t) \quad m = \inf_{x \leq t \leq x+h} f(t)$$

et on voit que

$$m h \leq A(x, x+h) \leq M h \quad .$$

Maintenant le but est d'approximer l'aire  $A$  par une somme des aires des bandes de largeurs de plus en plus petites.

**1-1 Définition :** On dit que l'ensemble  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est une **partition** de l'intervalle  $[a, b]$  si

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Utilisons les notations

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \\ |P| &= \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \quad \text{ finesse de la partition} \\ M_i &= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \\ m_i &= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \end{aligned}$$

et formons les sommes

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(P) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \\ \underline{S}_f(P) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \end{aligned}$$

La somme  $\overline{S}_f(P)$  est appelée **somme intégrale supérieure** et  $\underline{S}_f(P)$  **somme intégrale inférieure**.

Examiner les problèmes 1-1, 1-2 et 1-3.

**1-2 Définition :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. On dit que la fonction est **intégrable** sur l'intervalle  $[a, b]$  si on a un nombre  $S \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(P) &\rightarrow S \quad \text{si } |P| \rightarrow 0 \\ \underline{S}_f(P) &\rightarrow S \quad \text{si } |P| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Le nombre  $S$  est appelé **intégrale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$**  et on écrit

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f$$

Le nombre  $S$  (l'intégrale) ne doit pas dépendre de la suite des partitions choisies; le résultat doit être le même si seulement  $|P| \rightarrow 0$ .

Soit  $I = [a, b]$  et  $f$  une fonction bornée et intégrable avec

$$M = \sup_{t \in I} f(t) \quad m = \inf_{t \in I} f(t)$$

puis on peut vérifier que

$$m(b-a) \leq \underline{S}_f(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{S}_f(P) \leq M(b-a)$$

A cause de  $m_i \leq M_i$  on a pour toute partition  $P$

$$\underline{S}_f(P) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \overline{S}_f(P)$$

pour n'importe quel choix des valeurs intermédiaires  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ .

**1–3 Théorème :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ . Puis on sait que pour n'importe quel choix des valeurs intermédiaires  $\xi_i$  on a

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f \quad \text{si} \quad |P| \rightarrow 0$$

La preuve de ce théorème se base sur l'inégalité au-dessus et n'est pas difficile.

Figure 1.2 montre un exemple d'une partition  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_5\}$  et un choix des points intermédiaires  $\xi_i$ .

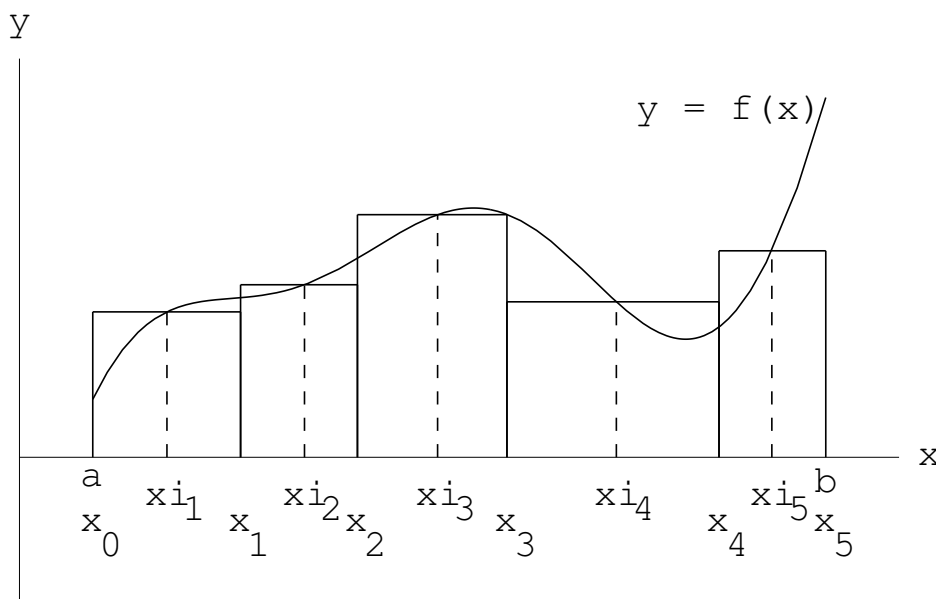


Figure 1.2: Somme intégrale

**1–4 Théorème :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. Si on trouve une suite  $P_k$  de partitions telle que

$$|P_k| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \bar{S}_f(P_k) - \underline{S}_f(P_k) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty$$

on sait que  $f$  est intégrable et

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_f(P_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}_f(P_k)$$

**1–5 Exemple :** Regarder la fonction  $f(x) = 1 + x$  sur l'intervalle  $[2, 3]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  on peut choisir la partition  $x_i = 2 + i/n$  avec  $i = 0, 1, \dots, n$ . On a  $\Delta x_i = 1/n$  et parce que la fonction est croissante, on a

$$m_i = f(x_{i-1}) = 1 + x_{i-1} = 3 + \frac{i-1}{n}$$

$$M_i = f(x_i) = 1 + x_i = 3 + \frac{i}{n}$$



et puis

$$\underline{S}_f(P) = \sum_{i=1}^n \left(3 + \frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 3 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = 3 + \frac{(n-1)n}{2n^2}$$

et

$$\overline{S}_f(P) = \sum_{i=1}^n \left(3 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 3 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = 3 + \frac{(n+1)n}{2n^2}$$

Puis il est vraiment facile à voir que  $\underline{S}_f(P)$  et  $\overline{S}_f(P)$  converge vers  $7/2$  si  $n$  tend vers l'infini. A cause du théorème au-dessus on sait maintenant que  $1+x$  est intégrable sur  $[2, 3]$  et

$$\int_2^3 1+x \, dx = \frac{7}{2}.$$

◇

**1-6 Exemple :** Regarder la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Vérifier que

$$\underline{S}_f(P) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{S}_f(P) = 1$$

pour toute partition  $P$ . Puis cette fonction n'est pas intégrable.

Si on regarde une partition uniforme  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  et des valeurs intermédiaires

$$\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) \in \mathbb{Q}$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 1$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour la même fonction et partition on peut aussi choisir des points intermédiaires  $\xi_i = \frac{1}{4n\pi} + x_i \notin \mathbb{Q}$  et puis on obtient

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 0$$

◇

**1-7 Définition :** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle  $[a, b]$  si et seulement si

1.  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  existe.
2.  $f$  est continue, sauf pour un nombre fini de points  $s_1, s_2, \dots, s_m$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow s_i+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow s_i-} f(x)$  existe pour tout  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Les théorèmes suivants sont très importants pour des applications et produisent une classe énorme des fonctions intégrables. Il est difficile de trouver une fonction bornée mais non intégrable sur des intervalles finis.

**1-8 Théorème :** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée et continue par morceaux, elle est intégrable sur  $[a, b]$ .

**1-9 Théorème :** Chaque fonction monotone et bornée sur un intervalle est intégrable.

On doit indiquer que ces deux théorèmes ne sont pas utiles pour calculer des valeurs d'intégrales, mais que pour vérifier que les intégrales existent.

**1-10 Définition :** Soit  $a > b$  et  $f$  une fonction intégrable sur  $[b, a]$ ; puis on utilise

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

En utilisant des partitions il n'est pas très difficile de vérifier que le résultat suivant est juste.

**1-11 Résultat :** Soit  $a < b < c$  et  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable, puis on a

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Donc on a les règles de calcul suivantes pour l'intégrale définie:

$$\begin{aligned} \int_a^b c_1 f(x) + c_2 g(x) dx &= c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

**1-12 Résultat :** Symétrie

Soit  $p(x)$  une fonction **paire** et  $u(x)$  une fonction **impaire**. Puis on sait que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p(x) dx &= 2 \int_0^a p(x) dx \\ \int_{-a}^a u(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

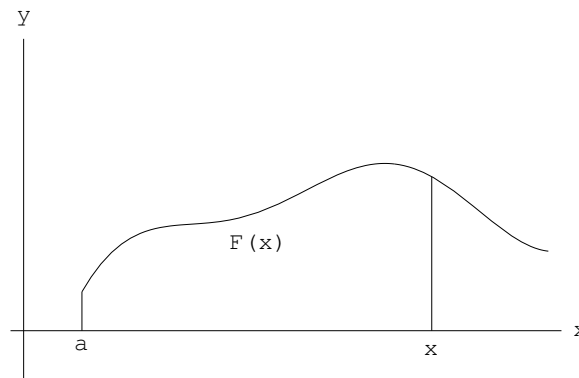


Figure 1.3: Théorème de la moyenne du calcul intégral

## 1.2 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Les résultats de cette section sont très importantes et forme la base pour beaucoup des applications de l'analyse.

### 1-13 Théorème : Théorème de la moyenne du calcul intégral

La valeur de l'intégrale définie d'une fonction continue est égale au produit de la longueur de l'intervalle d'intégration par la valeur de la fonction à intégrer pour une certaine valeur intermédiaire de l'argument.

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi) \quad \text{pour un } \xi \in [a, b]$$

**Démonstration :** Soit

$$m := \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_m) \quad \text{et} \quad M := \max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_M)$$

On sait que

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M = f(x_M)$$

et à cause du théorème des valeurs intermédiaires il existe un  $\xi$  entre  $x_m$  et  $x_M$  tel que

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

Considérer une fonction intégrable sur un intervalle  $[a, b]$  et  $x \in (a, b)$ . On va maintenant choisir la borne supérieure d'intégration comme variable d'une fonction  $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

c'est-à-dire que l'intégrale sera une fonction de sa borne supérieure. Maintenant on essaie de calculer la dérivée de cette fonction. L'aire entre les deux verticales pour  $x$  et  $x+h$  est égale à  $F(x+h) - F(x)$  et

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} F(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} f(\xi) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

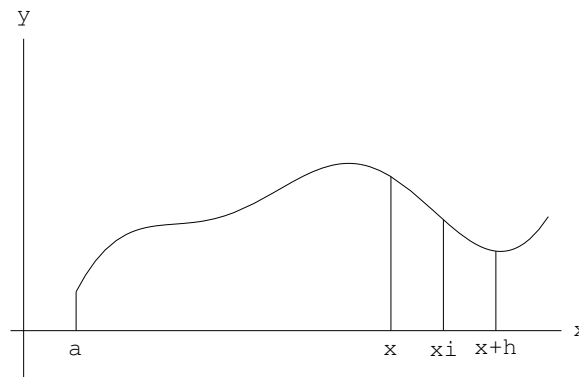


Figure 1.4: Preuve du théorème fondamental

Au-dessus on a utilisé le théorème de la moyenne et que la fonction  $f$  est continue. On a donc trouvé la preuve du théorème suivant.

**1–14 Théorème : Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral**

$f(x)$  étant une fonction continue et si l'on pose  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  on a

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad .$$

*En d'autres termes: la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la fonction sous le signe intégral dans laquelle la variable d'intégration a été remplacée par la valeur de la borne supérieure (sous la condition que la fonction  $f$  soit continue).*

Ce théorème montre la connection entre le calcul différentiel et le calcul intégral. On voit que l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée. Comme conséquence on obtient facilement

**1-15 Théorème :** Formule de Newton-Leibniz

Soit  $f$  une fonction continue et  $F$  une fonction dérivable, telles que

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

puis

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{x=a}^b .$$

**Démonstration :** Soit

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

A cause du théorème fondamental on sait que

$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = f(x) = \frac{d}{dx} F(x) .$$

Puis on sait que

$$\Phi(x) = F(x) + K$$

Si on met  $x = a$  on obtient

$$\Phi(a) = F(a) + K \quad \text{ou} \quad K = \Phi(a) - F(a) = -F(a)$$

Puis

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

□

**1-16 Exemple :** Pour calculer

$$\int_2^3 1 + x dx$$

on utilise  $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2$  et  $F'(x) = 1 + x$  pour obtenir

$$\int_2^3 1 + x dx = F(3) - F(2) = \left(3 + \frac{9}{2}\right) - \left(2 + \frac{4}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

◇

**1-17 Exemple :** Calculer l'aire sous un arc de la courbe  $y = \sin x$ .

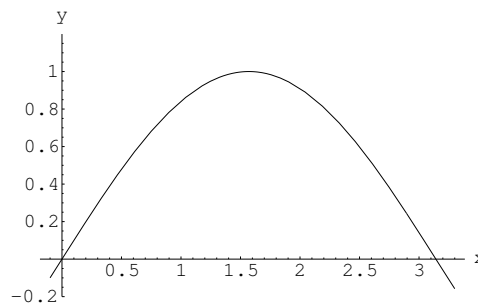
En regardant le graphe de la fonction  $f(x) = \sin(x)$  (Figure 1.5) on voit qu'il faut calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

A cause de  $\frac{d}{dx} (-\cos x) = \sin x$  on a

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

◇

Figure 1.5: L'aire sous un arc de  $y = \sin x$ 

### 1.3 L'intégrale indéfinie

Dans cette section  $f$  est toujours une fonction continue.

**1-18 Définition :** Une fonction  $F$  est dite **fonction primitive** de  $f$  si

$$F'(x) = f(x)$$

**1-19 Exemple :** Soit  $f(x) = x^2$ , puis

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{3} x^3 \\ G(x) &= \frac{1}{3} x^3 + 17 \end{aligned}$$

et on a trouver deux fonctions primitives de  $x^2$ . ◇

**1-20 Résultat :** Chaque fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue a une fonction primitive.

**Démonstration :** Soit  $a$  un point fix dans l'intervalle et nous regardons

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

A cause du théorème fondamental on sait que  $F$  est une fonction primitive de  $f$ . □

Malheureusement ce résultat ne contient pas d'algorithme pour trouver une fonction primitive  $F$ . Il existe même des fonctions simples pour lesquelles il n'existe pas de fonctions primitive **élémentaire**, par exemple  $e^{(-x^2)}$  ou  $\frac{\sin x}{x}$ .

L'exemple au-dessus montre qu'il existe toujours multiple fonction primitives. Soit

$$F(x) \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Puis pour chaque constante  $c \in \mathbb{R}$  on sait que

$$G(x) = F(x) + c$$

est une fonction primitive, par-ce que

$$\frac{d}{dx} G(x) = \frac{d}{dx} (F(x) + c) = f(x)$$

Soit  $G(x)$  une deuxième fonction primitive. Puis

$$\begin{aligned} G(a) - F(a) &= k \\ \frac{d}{dx} (G(x) - F(x)) &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc la différence entre deux fonctions primitives est toujours une constante. C'est la base pour la définition de l'intégrale indéfinie.

**1-21 Définition :** Soit  $f(x)$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ . Puis l'ensemble de toutes les fonctions primitives de  $f$  est appelée **intégrale indéfinie** de  $f$  et on utilise la notation

$$\int f(x) dx$$

**1-22 Exemple :** La fonction  $g(t) = \cos(2t)$  est continue partout. On peut deviner que

$$\frac{d}{dt} \sin(2t)/2 = g(t)$$

donc pour chaque constante  $c$  la fonction

$$G(t) = \frac{\sin(2t)}{2} + c$$

est une fonction primitive de  $g$ . Puis on a

$$\int g(t) dt = \frac{\sin(2t)}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

◇

## 1.4 Méthodes d'intégration

Pour chaque règle d'intégration il y a une règle correspondante pour l'intégration à cause de la relation fondamentale

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x) dx = F(x) + c$$

Donc on peut créer une table d'intégrales avec les dérivés correspondentes

Dérivée	Intégrale
$\frac{d}{dx} kx = k$	$\int k dx = kx + c$
$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$	$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$
$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ pour $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$
$\frac{d}{dx} \ln x  = 1/x$	$\int 1/x dx = \ln x  + c$
$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$

Cette table pourrait être allongée, mais dans chaque formulaire mathématique vous trouvez des tables plus longues et détaillées.

Mais on a besoin de quelques **règles d'intégration** pour simplifier les intégrales. Soient  $f, g, F$  et  $G$  des fonctions de  $x$  avec  $F'(x) = f(x)$  et  $G'(x) = g(x)$ . On va supprimer la variable indépendante  $x$  pour toutes les fonctions.

Dérivée	Intégration
$\frac{d}{dx} (k f) = k \frac{d}{dx} f$	$\int k f dx = k F + c$
$\frac{d}{dx} (f + g) = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$ Règle des sommes	$\int f + g dx = F + G + c$ Règle des sommes
$\frac{d}{dx} (f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$ Règle des produits	$\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$ Intégration par partie
$\frac{d}{dx} (f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g'$ Règle de chaîne	$\int (f \circ g) \cdot g' dx = F \circ g + c$ Substitution

Ces formules forment la base pour toutes les méthodes d'intégration.

### 1.4.1 Exemples pour la règle des sommes

La règle des sommes simplifie le calcul des intégrales des sommes ou différences des intégrales. Elle est très facile à appliquer. Donc on peut trouver les intégrales indéfinies des polynômes d'une façon facile.

**1-23 Exemple :** A cause de la règle des sommes on calcule

$$\begin{aligned} \int x^2 - 7 \cos x dx &= \int x^2 dx - 7 \int \cos x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - 7 \sin x + c \end{aligned}$$

◇

**1-24 Exemple :** Pour  $x > 0$  on sait que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} + \sin x dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx \\ &= \ln |x| - \cos x + c \end{aligned}$$

◇

**1-25 Résultat :** On a

$$\int \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + c$$

### 1.4.2 Intégration par partie



**1-26 Exemple :** L'intégrale indéfinie

$$\int x \sin x \, dx$$

est de la forme

$$\int f(x) g'(x) \, dx$$

avec  $f(x) = x$  et  $g'(x) = \sin x$ . Donc on peut utiliser  $g(x) = -\cos x$  et on obtient

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx \\ &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

◇

**1-27 Exemple :** Regarder l'intégrale indéfinie

$$\int x^3 e^{2x} \, dx$$

comme intégrale de la forme

$$\int f(x) g'(x) \, dx$$

Utiliser l'intégration par partie pour réécrire l'intégrale avec

(a)

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g'(x) = e^{2x}$$

(b)

$$f(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad g'(x) = x^3$$

Lequel des deux chemins de calcul va simplifier l'intégrale?

◇

Il y a une autre notation pour cette règle de calcul

$$\int u \, dv = u \, v - \int du \, v$$

**1-28 Exemple :** On peut calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \sin^2 x \, dx$$

en utilisant  $\sin^2 x = \sin x \sin x$  et donc

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos x \cos x \, dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Cette équation peut être résolue pour l'intégrale inconnue et on arrive à

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (-\cos x \sin x + x + C)$$

Contrôler ce résultat avec un formulaire. ◇

### 1.4.3 Substitution

La règle de chaîne pour les dérivées dit que

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

et donc on arrive à

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

et pour les intégrales définies

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt$$

**1-29 Exemple :** Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^3 \sin(x^2) x \, dx$$

on doit réaliser que

$$g(x) = x^2 \quad \text{avec} \quad g'(x) = 2x$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^3 \sin(x^2) 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^3 \sin(g(x)) g'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(3)} \sin(t) \, dt = \frac{1}{2} (-\cos(t)) \Big|_{t=0}^9 = \frac{1}{2} (-\cos(9) + 1) \end{aligned}$$

◇

**1-30 Exemple :** Avec la substitution  $u = x^2 + 1$  on obtient

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{ou} \quad du = 2x \, dx$$

et donc on calcule l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1+x^2} 2x \, dx$$

comme

$$\int \sqrt{1+x^2} 2x \, dx = \int u^{1/2} \, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + C$$

◇

**1-31 Exemple :** Pour calculer l'intégral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^3}} dx$$

on peut utiliser la substitution

$$z = a^2 + x^3 \quad \text{et} \quad dz = 3x^2 dx$$

et on obtient

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{3} \sqrt{z} + C = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + x^3} + C$$

◇

**1-32 Exemple :** Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \arctan(x) \frac{1}{1+x^2} dx$$

on peut utiliser la substitution

$$u = \arctan x \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

et on obtient

$$\int_0^1 \arctan(x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}$$

◇

**1-33 Résultat :**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

**1-34 Exemple :** Voilà un exemple simple

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$$

◇

**1-35 Exemple :** Pour des constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  on sait que

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + C$$

◇

**1-36 Résultat :** Substitution trigonométrique

Pour quelques intégrales on peut utiliser des substitutions similaires.

Dans l'expression on remplace	par	et on obtient
$\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \sin z$	$\pm a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \tan z$	$\pm a \sqrt{1 + \tan^2 z} = \frac{a}{\cos z}$
$\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} \frac{1}{\cos z}$	$\pm a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 z} - 1} = a \tan z$

**1-37 Exemple :** Pour calculer l'intégrale

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

on peut utiliser la substitution

$$x = \sin u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{du} = \cos u \quad \text{ou} \quad dx = \cos u \, du$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u \, du \\ &= \int \cos^2 u \, du \\ &= \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2} \, du \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} + C \\ &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C \end{aligned}$$

◇

**1-38 Exemple :** Pour calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \, dx$$

On doit voir que l'expression n'est définie que pour  $0 < x < 2$ . Puis on peut utiliser la substitution

$$1-x = \sin u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{du} = -\cos u \quad \text{ou} \quad dx = -\cos u \, du$$

et on obtient

$$x^2 = (\sin u - 1)^2 \quad \text{et} \quad u = \arcsin(1-x)$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \, dx &= \int \frac{(\sin u - 1)^2}{\sqrt{1-\sin^2 u}} (-\cos u) \, du \\ &= - \int (\sin u - 1)^2 \, du \\ &= - \int \sin^2 u - 2 \sin u + 1 \, du \\ &= - \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2u)}{2} - 2 \sin u + 1 \, du \\ &= \frac{-3u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} - 2 \cos u + C \end{aligned}$$

Avec les identités

$$\cos u = \cos \arcsin(1-x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(1-x))} = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2}$$

et

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u = 2(1-x) \sqrt{2x-x^2}$$

on arrive à

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx = -\frac{3}{2} \arcsin(1-x) - \frac{1}{2} (3+x) \sqrt{2x-x^2} + C$$

◇

## 1.5 Intégration des fonctions rationnelles

Dans cette section on trouve une méthode pour calculer les intégrales des fonctions rationnelles. La même méthode de la **décomposition en éléments fractions simples** est utile pour les transformations de Laplace.

Dans toute la section on regarde des polynômes  $P(x)$  et  $Q(x)$  et on cherche à calculer l'intégrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Si  $P/Q$  est une fonction rationnelle impropre, elle peut être réécrite comme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

tel que le degré de  $R$  est strictement plus petit que le degré de  $Q$ .

Le résultats de ce chapitre sont formulées pour des fonction rationnelles propres, veut dire la division des polynômes est déjà fait. De plus les polynômes  $P$  et  $Q$  sont réels.

Utiliser le schéma ci-dessous pour trouver les intégrales indéfinies. Les pas sont expliqués et illustrés par des exemples.

1. Division des polynômes, si nécessaire.
2. Trouver les zéro du dénominateur..
3. Décomposition en fraction simples.
4. Trouver les intégrales pour tous les termes.
5. Présenter le résultat.

Les calculs pour quelques exemples peuvent être longues et laborieux. Souvent l'utilisation d'une calculatrice où ordinateur est indiqué.

### 1.5.1 Décomposition en fractions simples

**1-39 Exemple :** Verifier que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{17x - 22}{x^3 + x^2 - 10x + 8} = \frac{17x - 22}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{x+4}$$

Il est difficile de trouver une fonction primitive pour l'expression à gauche ou de trouver la transformation de Laplace inverse. Il est nettement plus facile de travailler avec les expressions simples à droite.  $\diamond$

Soit

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

avec  $n < m$  (fonction rationnelle propre) et  $b_m = 1$ . Le polynôme  $Q$  de degré  $m$  a exactement  $m$  zéros, peut être complexe. Donc la factorisation du polynôme est

$$Q(x) = \prod_{k=1}^m (x - z_k)$$

Parce-que le polynôme  $Q(x)$  est réelle les zéros complexes vient en paire et on peut combiner les deux termes  $z_k = \alpha_k \pm i\beta_k$  dans la forme ci-dessus et transformer en

$$(x - (\alpha_k + i\beta_k)) (x - (\alpha_k - i\beta_k)) = (x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2$$

Si le polynome  $Q$  a  $m_1$  zéros réels  $x_k$  et  $2m_2$  zéros complexes  $z_k = \alpha_k \pm i\beta_k$  on trouve

$$m_1 + 2m_2 = m$$

et la factorisation et termes réels

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{m_1} (x - x_k) \cdot \prod_{k=1}^{m_2} ((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)$$

La décomposition en fractions simples se base sur cette notation de factorisation du dénominateur. Chaque terme dans la factorisation produit un terme de la décomposition. Trouver la liste ci-dessous.

facteur	→	terme dans la décomposition
$(x - x_k)$	→	$\frac{A}{x - x_k}$
$(x - x_k)^n$	→	$\frac{A_1}{x - x_k} + \frac{A_2}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_k)^n}$
$((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)$	→	$\frac{A(x - \alpha_k) + B}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$ ou $\frac{Ax + B}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$
$((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n$	→	$\frac{A_1 x + B_1}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} + \frac{A_2 x + B_2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n}$
ou	→	$\frac{A_1 (x - \alpha_k) + B_1}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} + \frac{A_2 (x - \alpha_k) + B_2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} + \dots + \frac{A_n (x - \alpha_k) + B_n}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n}$

Les deux dernier lignes représente des termes identiques. Le choix est à déterminé par les calculs à suivre. Souvent la deuxième forme est préférable.

**1-40 Exemple :** Pour l'exemple 1-39 on trouve

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)(x - 2)(x + 4)$$

et puis  $m = 3$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  et  $x_3 = -4$  et la décomposition en fractions simples est de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{17x - 22}{(x - 1)(x - 2)(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 4}$$

Il reste a trouver les valeurs des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Écrire l'expression à droite comme une seule fraction.

$$\frac{17x - 22}{(x - 1)(x - 2)(x + 4)} = \frac{A(x - 2)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)(x + 4)}$$

Cette équation doit être satisfait pour tout valeur de  $x \in \mathbb{R}$ . A cause des dénominateur identiques on peut comparer les numérateurs.

$$17x - 22 = A(x - 2)(x + 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x - 2)$$

Il existe des méthodes différentes pour déterminer les inconnues.

### 1. Multiplication et théorème d'identités des polynômes

Multiplier toutes les expressions à droite et puis arranger par des puissances en  $x$  nous donne l'équation

$$17x - 22 = x^2 (A + B + C) + x (2A + 3B - 3C) + (-8A - 4B + 2C)$$

À cause du théorème d'identités des polynômes cette équation est satisfait pour tout  $x \in \mathbb{R}$  si et seulement si le système des équations linéaires est satisfait.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -8 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce système. La solution unique est

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 2. Choisir des valeurs intelligentes

Dans l'équation

$$17x - 22 = A(x-2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-2)$$

choisir  $x = 1$  pour obtenir

$$-5 = A(-1)(5) \quad \text{et donc} \quad A = 1$$

Choisir  $x = 2$  pour obtenir

$$12 = B(1)(6) \quad \text{et donc} \quad B = 2$$

Choisir  $x = -4$  pour obtenir

$$-90 = C(-5)(-6) \quad \text{et donc} \quad C = -3$$

Il est à vous de comparer l'effort de calcul nécessaire pour trouver la solution. ◇

**1-41 Exemple :** La forme de la décomposition en fraction simples de

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3}{x^4 - x^3 + 2x^2 + 22x - 60} = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)(x^2 - 2x + 10)}$$

est donnée par

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3x + B_3}{(x-1)^2 + 3^2}$$

Écrire l'expression à droite comme une seule fraction pour arriver à

$$\frac{x^3}{(x-2)(x+3)((x-1)^2 + 3^2)} = \frac{A_1(x+3)((x-1)^2 + 3^2) + A_2(x-2)((x-1)^2 + 3^2) + (A_3x + B_3)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)((x-1)^2 + 3^2)}$$

Les deux dénominateur coïncide et donc on peut examiner les numérateurs seulement.

$$x^3 = A_1(x+3)((x-1)^2 + 3^2) + A_2(x-2)((x-1)^2 + 3^2) + (A_3x + B_3)(x-2)(x+3)$$

Choisir les bonnes valeurs de  $x$  pour trouver les constant d'une façon simple.

- Examiner  $x = 2$

$$8 = A_1 (2 + 3) ((2 - 1)^2 + 3^2) + 0 = A_1 50 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{8}{50}$$

- Examiner  $x = -3$

$$-27 = 0 + A_2 (-3 - 2) ((-3 - 1)^2 + 3^2) + 0 = -A_2 125 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{27}{125}$$

- Pour trouver les deux constantes manquant nous utilisons le zéro complexe  $z = 1 + i3$ .

$$\begin{aligned} (1 + i3)^3 &= 0 + (A_3 (1 + i3) + B_3) (1 + i3 - 2) (1 + i3 + 3) \\ 1 + i9 - 27 - i27 &= (A_3 + B_3 + i3A_3) (-13 + i9) \\ -26 - i18 &= (-40A_3 - 13B_3) + i(-30A_3 + 9B_3) \end{aligned}$$

$$-26 = -40A_3 - 13B_3$$

$$-18 = -30A_3 + 9B_3$$

On obtient la solution

$$A_3 = \frac{78}{125} \quad \text{et} \quad B_3 = \frac{2}{25}$$

Par conséquent la décomposition en fractions simples est donné par

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{8}{50} \frac{1}{x-2} + \frac{27}{125} \frac{1}{x+3} + \frac{78x+10}{125(x-1)^2+3^2}$$

Utiliser *Octave*<sup>1</sup> et la commande `residue()` pour trouver la décomposition en fractions simples, et d'autres informations.

#### Octave

```
B = [1 0 0 0];
A = [1 -1 2 22 -60];
[R, P, K, E] = residue (B, A)
-->
R =
    0.31200 - 0.11733i
    0.31200 + 0.11733i
    0.21600 - 0.00000i
    0.16000 - 0.00000i

P =
    1.00000 + 3.00000i
    1.00000 - 3.00000i
   -3.00000 + 0.00000i
    2.00000 + 0.00000i

K = [](0x0)
E = [ 1 1 1 1]
```

Les vecteurs `P` et `E` contiennent l'information que la fonction rationnelle a des pôles simples pour  $1 \pm i3$ ,  $-3$  et  $2$ . Dans le vecteur `R` on trouve les coefficients de la factorisation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \approx \frac{0.31200 - i0.11733}{x - 1 - i3} + \frac{0.31200 + i0.11733}{x - 1 + i3} + \frac{0.216}{x + 3} + \frac{0.16}{x - 2}$$

<sup>1</sup>Avec MATLAB la forme des arguments change très peut.



Combiner les deux expressions complexes.

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{0.31200 - i 0.11733}{x - 1 - i 3} + \frac{0.31200 + i 0.11733}{x - 1 + i 3} \\
 &= \frac{(0.31200 - i 0.11733)(x - 1 + i 3) + (0.31200 + i 0.11733)(x - 1 - i 3)}{(x - 1 - i 3)(x - 1 + i 3)} \\
 &= \frac{0.624x + 0.08}{(x - 1)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

Trouver le dénominateur par *Octave* avec

<b>Octave</b>
<pre>R(1)*[1 -P(2)] + R(2)*[1 -P(1)] --&gt; 0.624000    0.080000</pre>

Confirmer les résultats à l'aide de *Mathematica*.

<b>Mathematica</b>
<pre>f[x_] = x^3/((x-2)(x+3)(x^2-2x+10)); Apart[f[x]] .</pre> $  \frac{4}{25(-2+x)} + \frac{27}{125(3+x)} + \frac{2(5+39x)}{125(10-2x+x^2)}  $



**1-42 Exemple :** La forme de la décomposition en fractions simple de

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 5}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 - 5}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

est donnée par

$$\frac{x^2 - 5}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Écrire l'expression à droite comme une seule fraction pour arriver à

$$x^2 - 5 = A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)^2$$

Choisir des bonnes valeurs de  $x$  pour trouver les coefficients.

1. Choisir  $x = -1$  pour arriver à

$$-4 = A_2 \cdot 2 \quad \text{et donc} \quad A_2 = -2$$

2. Parce-que l'équation est correcte pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on peut calculer les dérivés pour arriver à une nouvelle équation.

$$2x = A_1((x^2+1) + (x+1)2x) + A_2 2x + B(x+1)^2 + (Bx+C)2(x+1)$$

Si  $x = -1$  tous les termes avec  $(x+1)$  sont zéro et on trouve

$$-2 = A_1 \cdot 2 + A_2(-2) = A_1 \cdot 2 + 4 \quad \text{et donc} \quad A_1 = -3$$

3. Pour faire disparaître les termes avec  $A_1$  et  $A_2$  choisir le zéro complexe  $x = +i$  de  $(x^2 + 1)$  pour arriver à une équation complexe.

$$-6 = (Bi + C)(i + 1)^2 = (Bi + C)i^2$$

où

$$(6 - B^2) + iC^2 = 0$$

Pour-que cette équation soit correcte il faut que la partie réelle et imaginaire sont zéro et donc

$$B = 3 \quad \text{et} \quad C = 0$$

Finalement on arrive à

$$\frac{x^2 - 5}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)} = \frac{-3}{x + 1} + \frac{-2}{(x + 1)^2} + \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Pour utiliser *Octave* il faut d'abord multiplier le dénominateur

$$(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 0x + 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

à l'aide de la commande

**Octave**

```
denum = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 0 1])
—>
denum =    1    2    2    2    1
```

puis on utilise `residue()`

**Octave**

```
B = [1 0 -5];
[R, P, K, E] = residue (B, denum)
—>
R =
-3.0000 - 0.0000i
-2.0000 + 0.0000i
 1.5000 - 0.0000i
 1.5000 + 0.0000i

P =
-1.00000 + 0.00000i
-1.00000 + 0.00000i
 0.00000 + 1.00000i
-0.00000 - 1.00000i

K = [](0x0)
E = [ 1 2 1 1]
```

et donc

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{-3}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1.5}{x-i} + \frac{1.5}{x+i} \\ &= \frac{-3}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{3x}{x^2+1} \end{aligned}$$

À l'aide de *Mathematica* on peut utiliser le code ci-dessous.

**Mathematica**

```
f[x_] = (x^2-5)/((x+1)^2 (x^2+1))
Apart[f[x]]
```

$$\frac{-2}{(1+x)^2} - \frac{3}{1+x} + \frac{3x}{1+x^2}$$

◇

**1-43 Exemple :** La forme de la décomposition en fractions simple de

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-5}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

est donnée par

$$\frac{x-5}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Trouver les valeurs de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  et  $C$ .

**Solution:** Avec *Octave*

**Octave**

```
denum = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 0 1]);
[R, P, K, E] = residue ([1, -5], denum)
```

◇

Les idées des exemples ci-dessus pour déterminer les valeurs des coefficients sont applicable pour tout problème. Trouver la description de la méthode de Heaviside.

Il faut examiner les situations suivantes:

facteur	→	terme dans la décomposition
$(x - x_k)$	→	$\frac{A}{x - x_k}$
$(x - x_k)^n$	→	$\frac{A_1}{x - x_k} + \frac{A_2}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_k)^n}$
$((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)$	→	$\frac{A(x - \alpha_k) + B}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$ ou $\frac{Ax + B}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$
$((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n$	→	$\frac{A_1 x + B_1}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} + \frac{A_2 x + B_2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n}$
ou	→	$\frac{A_1(x - \alpha_k) + B_1}{(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2} + \frac{A_2(x - \alpha_k) + B_2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} + \dots + \frac{A_n(x - \alpha_k) + B_n}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n}$

**1-44 Résultat :** Pour calculer les coefficients dans la décomposition en fractions simples utiliser les méthodes suivantes:

**cas 1 :** Pour un facteur simple  $x - x_k$  dans le dénominateur  $Q$  choisir  $x = x_k$  pour déterminer la valeur de la constante  $A$ .

**cas 2 :** Pour un facteur multiple  $(x - x_k)^n$  dans le dénominateur  $Q$  choisir  $x = x_k$  pour déterminer la valeur de la constante  $A_n$ . Puis trouver les dérivées des numérateurs et choisir de nouveau  $x = x_k$  pour trouver  $A_{n-1}$ / Répéter ce pas jusque vous arriver à  $A_1$ .

**cas 3 :** Pour un facteur simple  $(x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2$  dans le dénominateur  $Q$  choisir  $x = \alpha_k + i \beta_k$  pour déterminer les valeurs des constante  $A$  et  $B$ . Utiliser les partie réels et imaginaire de l'équation. Typiquement on tombe sur un système de deux équations linéaires.

**cas 4 :** Pour un facteur multiple  $((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^n$  dans le dénominateur  $Q$  les calculs sont laborieux. Combiner les cas 2 et 3. Choisir  $x = \alpha_k + i \beta_k$  pour déterminer les valeurs des constante  $A_n$  et  $B_n$ . Utiliser les partie réels et imaginaire de l'équation. Puis examiner les dérivées pour trouver les constantes  $A_{n-1}$  et  $B_{n-1}$ . Répétez si nécessaire.

**cas 5 :** identique au cas 4.

**1-45 Exemple :** Pour calculer les coefficients dans la décomposition en fractions simples de la fonction

$$\frac{x^2}{x^6 - 8x^5 + 20x^4 - 80x^2 + 128x - 64}$$

il faut d'abord trouver les pôles.  $x = 2$  est un pôle de l'ordre 5 et  $x = -2$  un pôle simple. Donc on a

$$\frac{x^2}{(x-2)^5(x+2)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{A_4}{(x-2)^4} + \frac{A_5}{(x-2)^5} + \frac{B}{(x+2)}$$

et il faut examiner l'équation

$$x^2 = (A_1(x-2)^4 + A_2(x-2)^3 + A_3(x-2)^2 + A_4(x-2) + A_5)(x+2) + B(x-2)^5$$

Trouver les coefficients.

1. Choisir  $x = -2$  pour trouver

$$4 = B(-4)^5 \quad \text{et donc} \quad B = \frac{-1}{256}$$

2. Choisir  $x = 2$  pour trouver

$$4 = A_5(4) \quad \text{und somit} \quad A_5 = 1$$

3. Tout dérivé de l'ordre plus petit que 4 du terme  $(x-2)^5$ , calculé pour  $x = 0$  vaut 0. La première dérivé des termes  $(x-2)^n$  pour  $n \geq 2$  vaut aussi 0 au point  $x = 2$ .

4. La première dérivé de l'équation dessus pour  $x = 2$  nous donne

$$4 = A_4 \cdot 4 + A_5$$

Utiliser la valeur connue  $A_5 = 1$  pour obtenir  $A_4 = \frac{3}{4}$ .

5. La deuxième dérivé de l'équation dessus pour  $x = 2$  nous donne

$$2 = A_3 8 + A_4 2$$

Utiliser les valeurs connues pour obtenir  $A_3 = \frac{1}{16}$ .

6. La troisième dérivé de l'équation dessus pour  $x = 2$  nous donne

$$0 = A_2 24 + A_3 6$$

Utiliser les valeurs connues pour obtenir  $A_2 = \frac{-1}{64}$ .

7. La quatrième dérivé de l'équation dessus pour  $x = 2$  nous donne

$$0 = A_1 96 + A_3 24$$

Utiliser les valeurs connues pour obtenir  $A_1 = \frac{1}{256}$ .

Avec ce calcul laborieux on arrive à

$$\frac{x^2}{(x-2)^5(x+2)} = \frac{1}{256(x-2)} - \frac{1}{64(x-2)^2} + \frac{1}{16(x-2)^3} + \frac{3}{4(x-2)^4} + \frac{1}{(x-2)^5} - \frac{1}{256(x+2)}$$

Les programmes numériques vont avoir des problèmes avec cette question construit. Il est numériquement difficile de détecter un pôle de l'ordre 5.

**Octave**

```
B = [1 0 0];
A = [1 -8 20 0 -80 128 -64];
[R, P, K, E] = residue (B, A)
```



### 1.5.2 Intégrales des fonction rationnelles élémentaires

La décomposition en fractions simples des fonction rationnelles produit plusieurs termes. On cherche les intégrales indéfinies de ces fonctions. Dans des tableau ou dans votre calculatrice trouver des listes des intégrales des fonctions rationnelles. Générez la table courte ci-dessus sans outils supplémentaires.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \quad \text{si } x \neq 0 \\ \int \frac{1}{x-a} dx &= \ln |x-a| + C \quad \text{si } x \neq a \\ \int \frac{1}{x^n} dx &= \frac{-1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + C \quad \text{si } n \neq 1 \quad \text{et } x \neq 0 \\ \int \frac{1}{(x-a)^n} dx &= \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad \text{si } n \neq 1 \quad \text{et } x \neq a \\ \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{x^2+b^2} dx &= \frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} + C \\ \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx &= \frac{1}{b} \arctan \frac{(x-a)}{b} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx &= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + C \\ \int \frac{1}{(x^2+b^2)^2} dx &= \frac{x}{2b^2(x^2+b^2)} + \frac{1}{2b^3} \arctan \frac{x}{b} + C \\ \int \frac{1}{(x^2+b^2)^{n+1}} dx &= \frac{x}{2nb^2(x^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2nb^2} \int \frac{1}{(x^2+b^2)^n} dx\end{aligned}$$

Vérifier la dernière formule récursive à l'aide de la dérivé

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2nb^2(x^2+b^2)^n} \right)$$

La table des intégrals des base ci-dessus suffit pour trouver les intégrales des fonction rationnelles. Pour des calculs concrète il existe une source des problème supplémentaire. Pour calculer

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

il faut vérifier que le dénominateur  $Q(x)$  n'a pas de zéro dans l'intervalle  $[a, b]$ . Si la fonction a un pôle dans l'intervalle elle **n'est pas bornée** et par conséquent ne pas intégrable.

### 1.5.3 Intégration des fonctions rationnelles

Dans cette section nous allons examiner quelques exemples.

**1-46 Exemple :** Calculer

$$\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x-4)} dx$$

**Solution:** La décomposition en fraction simples est de la forme

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}$$

et donc il faut résoudre

$$x^2 = A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  choisir des „bonnes“ valeurs des  $x$ .

$x$	équation
$x = 1$	$1 = A(-9)$
$x = -2$	$4 = B(18)$
$x = 4$	$16 = C(18)$

avec les solutions

$$A = -\frac{1}{9}, \quad B = \frac{2}{9}, \quad C = \frac{8}{9}$$

On a tous q'il faut pour calculer l'intégrale indéfinie.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x-4)} dx &= \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4} dx \\ &= \int \frac{-1}{9(x-1)} + \frac{2}{9(x+2)} + \frac{8}{9(x-4)} dx \\ &= \frac{-1}{9} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{2}{9} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{8}{9} \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= \frac{-1}{9} \ln|x-1| + \frac{2}{9} \ln|x+2| + \frac{8}{9} \ln|x-4| + C\end{aligned}$$

Parce-que il n'y a pas des pôles dans l'intervalle entre 2 et 3 il est facile de donner l'intégrale définie.

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x-4)} &= \frac{1}{9} (-\ln |x-1| + 2 \ln |x+2| + 8 \ln |x-4|) \Big|_{x=2}^3 \\
 &= \frac{1}{9} (-\ln (x-1) + 2 \ln (x+2) + 8 \ln (4-x)) \Big|_{x=2}^3 \\
 &= \frac{1}{9} (-\ln 2 + 2 \ln 5 + 8 \ln 1) \\
 &\quad - \frac{1}{9} (-\ln 1 + 2 \ln 4 + 8 \ln 2) \\
 &= \frac{1}{9} (-\ln 2 + 2 \ln 5 - 4 \ln 2 - 8 \ln 2) \\
 &= \frac{1}{9} (\ln 25 - 13 \ln 2) \approx -0.64359
 \end{aligned}$$

◇

**1-47 Exemple :** Calculer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

à l'aide de la décomposition

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Choisir  $x = \pm 1$  dans

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

pour trouver  $A = 1/2$  et  $B = -1/2$  et donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C
 \end{aligned}$$

◇

**1-48 Exemple :** L'intégrale définie

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-1} dx$$

**ne peut pas** être calculer à l'aide de

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{x=0}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{3} - \ln 1 \right) = \frac{-\ln 3}{2}
 \end{aligned}$$

parce-que la fonction n'est pas bornée dans l'intervalle  $[0, 2]$ .

◇

**1-49 Exemple :** Pour trouver la valeur de l'intégral définie

$$\int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 \frac{x^5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$$

utiliser le chemin de calcul suivant:

1. Division des polynômes avec reste, pour écrire  $f(x)$  comme somme d'un polynôme et une **fonction rationnelle propre**.
2. Trouver les zéros de dénominateur.
3. Décomposition en fractions simples.
4. Trouver l'intégrale indéfinie.
5. Calculer l'intégrale indéfinie.

Appliquons ces pas, l'un après l'autre.

1. Un calcul long, mais élémentaire montre que

$$f(x) = \frac{x^5}{x^3 + 3x^2 - 4} = x^2 - 3x + 9 + \frac{-23x^2 - 12x + 36}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

2. Les zéros du polynôme sont facile à trouver.

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2 (x - 1)$$

3. La décomposition en fraction simples est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{-23x^2 - 12x + 36}{x^3 + 3x^2 - 4} &= \frac{-23x^2 - 12x + 36}{(x + 2)^2 (x - 1)} \\ &= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{x - 1} \\ &= \frac{A(x + 2)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 2)^2}{(x + 2)^2 (x - 1)} \end{aligned}$$

et il faut examiner l'équation

$$-23x^2 - 12x + 36 = A(x + 2)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 2)^2$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Choisir  $x = -2$  et  $x = 1$  pour trouver des équations pour  $B$  et  $C$ . Pour l'équation pour  $A$  examiner les dérivées au point  $x = 2$ .

$$\begin{aligned} -92 + 24 + 36 &= B(-3) \\ -23 - 12 + 36 &= C(9) \\ 92 - 12 &= A(-3) + B \end{aligned}$$

On obtien

$$C = \frac{1}{9}, \quad B = \frac{32}{3}, \quad A = \frac{-80}{3} + \frac{32}{9} = \frac{-208}{9}$$

Au lieu de travailler avec les dérivées on peut aussi utiliser une autre valeur de  $x$ , par exemple  $x = 0$ . On arrive à

$$36 = -2A - B + 4C$$

Utiliser les valeurs de  $B$  et  $C$  pour déterminer  $A$ .



## 4. L'intégrale indéfinie

$$\int f(x) dx = \int x^2 - 3x + 9 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} dx$$

est facile à trouver et le résultat est

$$\int f(x) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 9x + A \ln |x+2| - \frac{B}{(x+2)} + C \ln |x-1| + \text{Konst.}$$

Utiliser les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$  ci-dessus.

5. On ne trouve pas de pôle pour  $2 \leq x \leq 5$  et donc on peut calculer l'intégrale définie.

$$\int_2^5 f(x) dx = \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 9x - \frac{208}{9} \ln(x+2) - \frac{32}{3(x+2)} + \frac{1}{9} \ln(x-1) \right) \Big|_{x=2}^5$$

Une simplification laborieuse montre que

$$\int_2^5 f(x) dx = \frac{499}{14} + \frac{209}{9} \ln 4 - \frac{208}{9} \ln 7$$

◇

## 1.6 Intégration numérique

## 1.6.1 Formule des trapèzes

Pour une „bonne“ fonction  $f(x)$  on utilise l'approximation

$$I(h) = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(-h/2) + f(h/2)) = T(h)$$

Dans la section sur l'interpolation linéaire (Chapitre Applications des dérivées) on a trouvé que l'approximation

$$f(x) - g(x) = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) f''(0) + o(h^2)$$

est juste. La fonction  $g(x)$  est la droite qui fait la connection entre le point  $(-h/2, f(-h/2))$  et  $(h/2, f(h/2))$ . Il est facile de vérifier que

$$T(h) = \int_{-h/2}^{h/2} g(x) dx$$

Pour estimer l'erreur de l'intégration on calcule

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) - g(x) dx = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) f''(0) + o(h^2) dx = \frac{-1}{12} f''(0) h^3 + o(h^3)$$

et donc on arrive à

$$I(h) - T(h) \approx \frac{-1}{12} f''(0) h^3.$$

On peut démontrer que

$$|I(h) - T(h)| \leq \frac{1}{12} M_2 h^3,$$

où

$$M_2 = \max_{-h/2 \leq x \leq h/2} |f''(x)|.$$

On peut trouver la formule et l'ordre de l'erreur avec une méthode plus directe (Problème 1-55).

**1-50 Exemple :** Considérer la fonction

$$f(x) = \cos(2x)$$

et pour  $h > 0$  on calcule

$$I(h) = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = \sin(h)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(0) = -4$$

$$T(h) = h \cos(h)$$

Ci-dessous sont présentées des calculs avec *Mathematica* de l'intégrale exacte  $I(h)$ , de l'intégrale approchée  $T(h)$ , de l'erreur relative et du quotient de l'erreur par  $h^3$  (pour des valeurs différentes de  $h$ )

$$h \quad I(h) \quad T(h) \quad \frac{I(h) - T(h)}{I(h)} \quad \frac{12(I(h) - T(h))}{h^3}$$

#### Mathematica

```
Clear[f, x, h];
f[x_] = Cos[2x];
i[h_] = Integrate[f[x], {x, -h/2, h/2}];
t[h_] = (f[-h/2] + f[h/2]) * h/2;
expr[h_] = {h, N[i[h], 5], N[t[h], 10], N[(i[h] - t[h])/i[h], 5],
  N[12(i[h] - t[h])/(h^3), 10]};
TableForm[{expr[1.0], expr[0.5], expr[0.25], expr[0.1],
  expr[0.05], expr[0.025], expr[0.01]}]
```

1.	0.841471	0.540302	0.357907	3.61402
0.5	0.479426	0.438791	0.0847561	3.90089
0.25	0.247404	0.242228	0.0209207	3.97506
0.1	0.0998334	0.0995004	0.00333556	3.996
0.05	0.0499792	0.0499375	0.000833472	3.999
0.025	0.0249974	0.0249922	0.000208342	3.99975
0.01	0.00999983	0.0099995	0.0000333336	3.99996

La valeur théorique

$$\frac{12(I(h) - T(h))}{h^3} \approx -f''(0) = 4$$

correspond assez bien au calcul. ◇

On peut utiliser l'approximation au-dessus pour évaluer l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . A la place de déterminer l'aire en dessous de la courbe on évalue l'aire en dessous des trapèzes. La figure 1.6 présente cette méthode.

Pour cette illustration on obtient

$$n = 5 \quad h = \frac{b-a}{5} \quad x_i = a + ih \quad \text{pour } i = 0, \dots, 5$$

et

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

$$= \frac{h}{2} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^4 f(x_i) \right)$$

Voilà la formule générale analogue

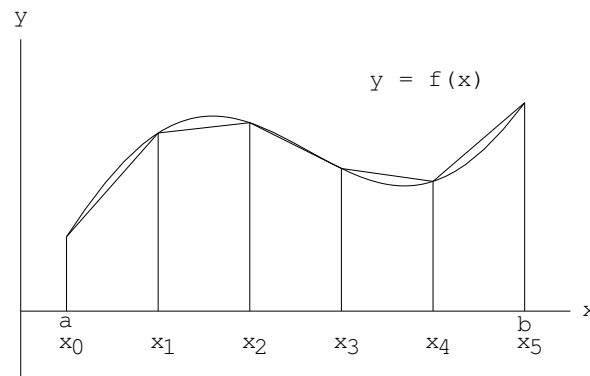


Figure 1.6: Interpolation linéaire

**1–51 Théorème :** *Intégration par la formule des trapèzes.*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 2 fois différentiable et

$$h = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + ih \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Alors on a:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

L'erreur de l'approximation est de l'ordre  $1/n^2$ , ou bien  $h^2$ . On a:

$$\text{Erreur} \approx \frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in [a, b].$$

Pour des polynômes du degré 1 (droites) la formule des trapèzes donne le résultat exact.

Problème 1–55 montre un raisonnement alternatif pour le résultat ci-dessus.

En Octave utiliser la commande `trapz()` pour l'intégration numérique avec la règle des trapèzes. Pour calculer

$$\int_0^\pi \sin(x/2) dx = -2 \cos(x/2) \Big|_{x=0}^\pi = 2$$

utiliser

**Octave**

```
x = linspace(0,pi,200); y = sin(x/2);
integral = trapz(x,y)
difference = integral - 2
—>
integral = 2.0000
difference = -1.0384e-05
```

Voici un programme simple en *Mathematica* qui définit la formule des trapèzes pour l'intégration des fonctions.

**Mathematica**

```
trapez[f_, a_, b_, n_] := Block[{h=(b-a)/n, i},
  (2*Sum[f[a+i*h], {i, 1, n-1}] + f[a] + f[b])*h/2];
```

Comme ça on obtient l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \arctan x \Big|_{x=0}^1 = \pi$$

pour des valeurs différentes de  $n$  et une table montrant en outre la déviation de  $\pi$ .

#### Mathematica

```
Clear[f, x, n, a, b];
f[x_] = 4/(1+x*x);
res[n_] = {n, trapez[f, 0, 1, n], Pi - trapez[f, 0, 1, n]};
TableForm[{N[res[5]], N[res[10]], N[res[20]], N[res[40]], N[res[80]], N[res[160]]}]
```

```
TableForm=
      5.      3.13493      0.00666654
     10.      3.13993      0.00166666
     20.      3.14118      0.000416667
     40.      3.14149      0.000104167
     80.      3.14157      0.0000260417
                    -6
    160.      3.141586143173127      6.51042 10
```

### 1.6.2 Formule de Simpson

Pour une „bonne“ fonction on peut aussi utiliser l'approximation

$$I(h) = \int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(-h) + 4f(0) + f(h)) = S(h) \quad .$$

Utiliser une interpolation quadratique par morceau pour vérifier la formula. On peut démontrer que

$$|S(h) - I(h)| \leq \frac{1}{90} M_4 h^5,$$

où

$$M_4 = \max_{-h \leq x \leq h} |f^{(4)}(x)| \quad .$$

Pour  $h$  suffisamment petit on a même

$$S(h) - I(h) \approx \frac{1}{90} f^{(4)}(0) h^5 \quad .$$

On peut trouver la formule et l'ordre de l'erreur avec une méthode plus directe (Problème 1-56).

Ce résultat est basé sur l'interpolation quadratique avec la formule pour l'approximation

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{6} f^{(3)}(0) (x^3 - h^2 x) + o(h^3)$$

avec

$$p(x) = f(0) + x \frac{f(h) - f(-h)}{2h} + x^2 \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}$$

Il est facile de vérifier que

$$S(h) = \int_{-h}^h p(x) dx$$

Pour estimer l'erreur de l'intégration on calcule

$$\int_{-h}^h f(x) - p(x) dx = \int_{-h}^h \frac{1}{6} f^{(3)}(0) (x^3 - h^2 x) + o(h^3) dx = 0 + o(h^4)$$

et donc on arrive à

$$I(h) - S(h) \approx o(h^4).$$

Pour trouver la forme exacte de l'erreur on devrait calculer un terme de plus pour l'interpolation quadratique.

**1-52 Exemple :** Considérer la fonction

$$f(x) = \cos(2x)$$

et pour  $h > 0$  on calcule

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_{-h}^h f(x) dx = \sin(2h) \\ \frac{d^4}{dh^4} f(0) &= 16 \\ S(h) &= \frac{4+2\cos(2h)}{3} \end{aligned}$$

Ci-dessous sont présentées des calculs avec *Mathematica* de l'intégrale exacte  $I(h)$ , de l'intégrale approchée  $S(h)$ , de l'erreur relative et du quotient de l'erreur par  $h^5$  (pour des valeurs différentes de  $h$ )

$$h \quad I(h) \quad S(h) \quad \frac{S(h) - I(h)}{I(h)} \quad 90 \frac{S(h) - I(h)}{h^5}$$

#### Mathematica

```
Clear[f,i,s];
f[x_] = Cos[2*x];
i[h_] = Integrate[f[x],{x,-h,h}];
s[h_] = (f[-h]+4f[0]+f[h])*h/3;
expr[h_] = {h, N[i[h],5], N[s[h],10],N[(s[h]-i[h])/i[h],5],
             N[90(s[h]-i[h])/h^5,10]};
TableForm[{expr[1.0],expr[0.5],expr[0.25],expr[0.1],
            expr[0.05],expr[0.025],expr[0.01]}]
```

>	1.	0.909297	1.0559	0.161229	13.1944
	0.5	0.841471	0.846767	0.00629428	15.2538
	0.25	0.479426	0.479597	0.000357835	15.8105
	0.1	0.198669	0.198671	8.9314 10 <sup>-6</sup>	15.9695
	0.05	0.0998334	0.0998335	5.56218 10 <sup>-7</sup>	15.9924
	0.00025	0.000999517	0.000999517	3.08749 10 <sup>-17</sup>	255.965

La dernière ligne de cette table est inutile. Pourquoi? La valeur théorique

$$\frac{90(I(h) - S(h))}{h^5} \approx f^{(4)}(0) = 16$$

correspond assez bien au calcul.



On souvent utilise l'approximation au-dessus pour l'intégration d'une fonction sur l'intervalle connue  $[a, b]$ . Parce que, en cours de l'intégration par la formule de Simpson, on réunit toujours deux intervalles, il faut évidemment que  $n$  soit un nombre pair, ou bien que le nombre des points  $x_i$  soit impair.

En utilisant cette méthode on obtient pour  $n = 6$

$$n = 6 \quad h = \frac{b-a}{6} \quad x_i = a + ih \quad \text{pour } i = 0, \dots, 6$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(b)) \\ &= \frac{h}{3} \left( f(a) - f(b) + 2 \sum_{i=1}^3 (2f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) \right) \end{aligned}$$

Voilà la formule générale analogue

**1-53 Théorème :** *Intégration par la formule de Simpson.*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 4 fois différentiable, soit  $n$  un nombre entier **pair** et

$$h = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + ih \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Alors on a

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left( f(a) - f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n/2} (2f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})) \right).$$

L'erreur de l'approximation est de l'ordre  $1/n^4$ , ou bien  $h^4$ . On a:

$$\text{Erreur} = \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) h^4, \quad \xi \in [a, b].$$

Pour des polynômes du degré 3 la formule de Simpson donne le résultat exact.

Problème 1-56 montre un raisonnement alternative pour le résultat ci-dessus.

Voici un programme simple en *Mathematica* qui définit la formule de Simpson pour l'intégration des fonctions.

**Mathematica**

```
simpson[f_, a_, b_, n_] := Block[{h=(b-a)/n, i},
  (2*Sum[2*f[a+(2*i-1)*h]+f[a+2*i*h], {i, 1, n/2}]+ f[a]-f[b])*h/3];
```

Comme ça on obtient l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \arctan x \Big|_{x=0}^1 = \pi$$

pour des valeurs différentes de  $n$  et une table montrant en outre la déviation de  $\pi$ .

**Mathematica**

```

Clear[f, x, n, a, b];
f[x_] = 4/(1+x*x);
res[n_] = { n, simpson[f, 0, 1, n], Pi - simpson[f, 0, 1, n] };
TableForm[{N[res[6]], N[res[10]], N[res[20]], N[res[40]], N[res[80]], N[res[160]]}]

```

6.	3.14159	8.72654 10 <sup>-7</sup>
10.	3.14159	3.96506 10 <sup>-8</sup>
20.	3.14159	6.20008 10 <sup>-10</sup>
40.	3.14159	9.68825 10 <sup>-12</sup>
80.	3.14159	1.5099 10 <sup>-13</sup>
160.	3.141592653589791	2.22045 10 <sup>-15</sup>

Il est instructif de comparer cette table avec celle obtenue par la formule des trapèzes. Ça doit faciliter le choix de la méthode dans une situation pratique.

Malheureusement on peut pas utiliser directement la méthode de Simpson si le nombre des points de base  $x_i$  donnés est impair. Mais on a trouvé une solution de ce dilemme.

### 1.6.3 Formule de Simpson 3/8

Si une „bonne“ fonction  $f(x)$  est donnée sur un nombre de points de base  $x_i$  pair, on peut d'abord évalué l'intégrale sur les trois premiers intervalles par la formule suivante:

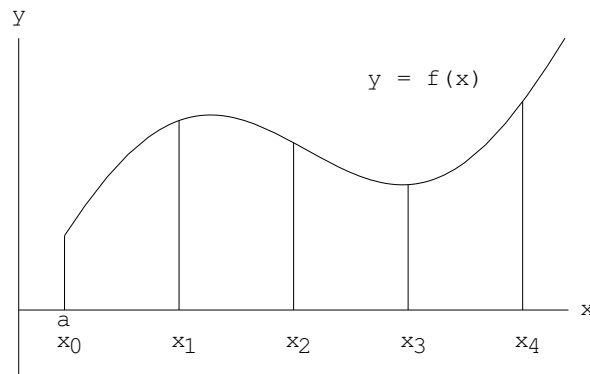


Figure 1.7: Simpson's 3/8-Regel

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3}{8} h (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)).$$

Si on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx + \int_{x_3}^b f(x) dx,$$

on peut évaluer la première intégrale en utilisant la formule ci-dessus et remplacer la seconde intégrale par la formule de Simpson pour un nombre pair d'intervalles. L'erreur totale de l'approximation est de l'ordre  $1/n^4$ , où bien  $h^4$ .

**1-54 Exemple :** Considérer l'intégrale

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad .$$

Une intégration analytique n'est pas possible.

1. Calculer cette intégrale par la formule des trapèzes avec une erreur de  $10^{-6}$  en maximum.
2. Calculer cette intégrale par la formule de Simpson avec une erreur de  $10^{-6}$  en maximum.

**Solution :**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ f''(x) &= \frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{2 \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24 \sin x}{x^5} - \frac{24 \cos x}{x^4} - \frac{12 \sin x}{x^3} + \frac{4 \cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Ainsi on peut démontrer que

$$|f''(x)| \leq \frac{10}{\pi} \quad \text{pour tout} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi$$

et

$$|f^{(4)}(x)| \leq \frac{130}{\pi} \quad \text{pour tout} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi.$$

1. Pour la formule des trapèzes on a

$$| \text{ Erreur } | \leq \frac{\pi/2}{12} \frac{10}{\pi} \left( \frac{\pi/2}{n} \right)^2 = \frac{10\pi^2}{96} \left( \frac{1}{n} \right)^2 \leq \left( \frac{1}{n} \right)^2.$$

Si on a  $n \geq 1000$ , l'erreur est plus petite que  $10^{-6}$ . En calculant l'intégrale par la formule des trapèzes avec  $n = 1000$ , on obtient beaucoup plus tard

Mathematica
<pre>Clear[f,x,n,a,b]; f[x_] = Sin[x]/x; N[trapez[f,Pi/2,Pi,1000],10] . 0.4811749017</pre>

2. Pour la formule de Simpson on a

$$| \text{ Erreur } | \leq \frac{\pi/2}{180} \frac{130}{\pi} \left( \frac{\pi/2}{n} \right)^4 = \frac{130\pi^4}{180 * 32} \left( \frac{1}{n} \right)^4 \leq 2.2 \left( \frac{1}{n} \right)^4.$$

Donc il faut que

$$\frac{10^{-6}}{2.2} \geq \left( \frac{1}{n} \right)^4 \quad \text{où} \quad n \geq \left( \frac{2.2}{10^{-6}} \right)^{1/4}.$$

Si on a  $n \geq 39$ , l'erreur est plus petite que  $10^{-6}$ . En calculant l'intégrale par la formule de Simpson avec  $n = 40$ , on obtient tout de suite

Mathematica
<pre>Clear[f,x,n,a,b]; f[x_] = Sin[x]/x; N[Simpson[f,Pi/2,Pi,40],10] . 0.4811749017</pre>



```
Clear[f,x,n,a,b];
f[x_] = Sin[x]/x;
N[simpson[f,Pi/2,Pi,40],10]
.
```

```
0.4811748824
```

3. Par *Mathematica* on détermine la même intégrale en utilisant les routines installées

**Mathematica**

```
N[Integrate[f[x],{x,Pi/2,Pi}],10]
```

```
.
```

```
0.4811748838
```

4. Comme on joue avec la formule de Simpson, on voit que l'estimation de l'erreur ci-dessus est d'une très mauvaise qualité. Une valeur plus petite pour  $n$  va produire une erreur assez petite.

**Mathematica**

```
Clear[f,x,n,a,b];
f[x_] = Sin[x]/x;
N[simpson[f,Pi/2,Pi,10],10]
```

```
.
```

```
0.481174526
```

◇

**1–55 Exemple :** Vérifier la formule pour l'erreur par rapport à  $h$ . Calculer l'intégrale et l'erreur pour

$$\int_{-1}^1 x \sin x \, dx$$

- exactement.
- avec la formule des trapèzes pour  $n = 10, 20, 40$  und  $80$ .
- avec la formule de Simpson pour  $n = 10, 20, 40$  und  $80$ .
- Calculer le quotient pour deux valeurs de  $n$  en séquence. Qu'est-ce que vous trouvez? (Chercher la raison pour ce résultat)

**Solution:**

**Mathematica**

```
Clear[f,x,res];
f[x_] := x*Sin[x];
int := Integrate[f[x],{x,-1,1}];
res[n_] := {n, trapez[f,-1,1,n], trapez[f,-1,1,n]-int,
            simpson[f,-1,1,n], simpson[f,-1,1,n]-int};
TableForm[{res[10],res[20],res[40],res[80]}/N
```

```
.
```

10.	0.611563	0.00922546	0.602282	-0.000054888
				-6
20.	0.604641	0.00230381	0.602334	-3.41153 10
				-7
40.	0.602913	0.000575792	0.602337	-2.12926 10
				-8
80.	0.602481	0.000143938	0.602337	-1.33032 10



**1-56 Exemple :** Calculer les mêmes résultats comme pour le problème au-dessus, mais pour l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \left| x - \frac{1}{7} \right| dx$$

**Solution :** La fonction n'est pas deux fois dérivable, donc on ne peut rien dire sur la convergence des approximations numériques. La valeur exacte peut être trouvée par un dessin.

#### Mathematica

```
Clear[f,x,res,int];
f[x_] = Abs[x-1/7];
int = (36+64)/98;
res[n_] = {n, trapez[f,-1,1,n], trapez[f,-1,1,n]-int,
           simpson[f,-1,1,n], simpson[f,-1,1,n]-int};
TableForm[{res[10],res[20],res[40],res[80] }]/N
```

10.	1.02857	0.00816327	1.02476	0.00435374
20.	1.02286	0.00244898	1.02095	0.000544218
40.	1.02071	0.000306122	1.02	-0.000408163
80.	1.02054	0.000127551	1.02048	0.0000680272



Est-ce que vous pouvez expliquer le résultat au-dessous.

#### Mathematica

```
newint = simpson[f,-1,1/7,2] + simpson[f,1/7,1,2];
{newint,int,newint-int}/N
```

.

```
{1.02041, 1.02041, 0}
```

Tip: Examiner la fonction sur les intervalles partielles.



### 1.6.4 Pascal-Programme zur numerischen Integration

Malheureusement cette section n'est pas encore traduit.

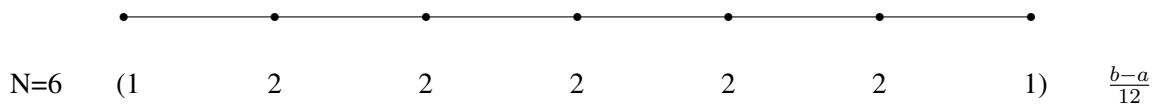
Ziel dieses Abschnittes ist es, eine praktisch brauchbare Integrationsroutine zu entwerfen. Die zu integrierende Funktion  $f(x)$ , die Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  sowie die gewünschte relative Genauigkeit sind vorzugeben, dann sollte das Programm das Integral berechnen. Die vorgestellten Programme sind dem Buch „Numerical Recipes in Pascal“ von Press, Flannery, Teukolsky und Vetterling entnommen [Pres86, Pres92]. Es gibt auch Versionen dieses Buches für die Programmiersprachen Fortran, C, Java, ...

#### Trapezregel

Zuerst betrachtet man die Integrationsformel für die Trapezregel mit  $N$  Teilintervallen.

$$T_N = \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right) + f(b) \right) \frac{b-a}{2N}$$

Diese Formel kann auch auf die folgende Art graphisch dargestellt werden.

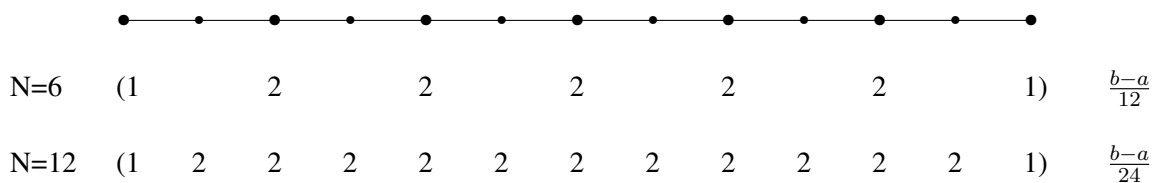


Nun sind die Summenformeln für  $T_N$  und  $T_{2N}$  gemeinsam zu betrachten

$$T_N = \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right) + f(b) \right) \frac{b-a}{2N}$$

$$T_{2N} = \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{2N-1} f\left(a + i \frac{b-a}{2N}\right) + f(b) \right) \frac{b-a}{4N}$$

Für  $N = 6$  ergibt dies folgende Graphik.



Hieraus kann man ablesen, dass

$$T_{2N} = \frac{1}{2}T_N + \frac{b-a}{2N} \sum_{i=1}^N f\left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2N}\right)$$

Somit kann  $T_{2N}$  aus  $T_N$  berechnet werden, indem nur noch die neu dazukommenden Punkte berücksichtigt werden. Dies führt auf die folgende Reihenfolge von Berechnungen:

$$T_1 \quad T_2 \quad T_4 \quad T_8 \quad T_{16} \quad T_{32} \quad \dots$$

Die PASCAL-Prozedur `trapzd` beruht auf dieser Idee. Die Zeilennummern sind selbstverständlich nicht Teil des Programms, sondern als Orientierungshilfe gedacht.

```

1:  PROCEDURE trapzd(a,b: real; VAR s: real; n: integer);
2:  (* Programs calling TRAPZD must provide a function
3:  func(x:real):real which is to be integrated. They must
4:  also define the variable
5:  VAR
6:      glit: integer;
7:  in the main routine. *)
8:  VAR
9:      j: integer;
10:     x,tnm,sum,del: real;
11: BEGIN
12:     IF (n = 1) THEN BEGIN
13:         s := 0.5*(b-a)*(func(a)+func(b));
14:         glit := 1
15:     END
16:     ELSE BEGIN
17:         tnm := glit;
18:         del := (b-a)/tnm;
19:         x := a+0.5*del;
```

```

20:      sum := 0.0;
21:      FOR j := 1 to glit DO BEGIN
22:          sum := sum+func(x);
23:          x := x+del
24:      END;
25:      s := 0.5*(s+(b-a)*sum/tnm);
26:      glit := 2*glit
27:  END
28: END;

```

Diese Prozedur berechnet den  $n$ -ten Schritt der Trapezregel. Die Funktion `func` wird zwischen  $a$  und  $b$  integriert. Wird sie mit  $n = 1$  aufgerufen, so erhält man eine sehr grobe Schätzung des Integrals. Darauf folgende Aufrufe mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  (in dieser Reihenfolge) verbessern die Schätzung durch Dazufügen von  $2^{n-2}$  weiteren internen Punkten. Nach dem Aufruf mit  $n$  wurden somit insgesamt  $2^{n-1} + 1$  Stützpunkte verwendet. An keiner Stützstelle wurde die zu integrierende Funktion zweimal ausgewertet, dies ist der grosse Vorteil dieser Implementation. Die Rechenzeiten können erheblich verkürzt werden.

Durch mehrfaches Aufrufen dieser Prozedur kann das Integral der Funktion `func` von  $a$  bis  $b$  berechnet werden. Nun braucht man noch ein einfaches Verfahren, um das Integral mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit (Anzahl richtiger Stellen) zu berechnen. Hier gibt es leider kein narrensicheres Verfahren. Die verwendete Idee vertraut darauf, dass der tatsächliche Fehler von  $T_{2N}$  kleiner ist als die Differenz zwischen  $T_N$  und  $T_{2N}$ . Dies wird als Abbruchkriterium verwendet. Die folgende Prozedur berechnet das Integral mit 6 richtigen Stellen. Durch ändern der Konstante `eps` kann die gewünschte Genauigkeit vorgegeben werden. Es werden höchstens  $2^{j_{\max}-1} + 1$  Stützstellen verwendet. Wird die gewünschte Genauigkeit hiermit nicht erreicht, so stoppt die Prozedur mit einer entsprechenden Fehlermeldung ab. Die Wahl von `jmax=20` limitiert die Anzahl der Stützpunkte auf maximal ca. 1 Million.

```

1:  PROCEDURE qtrap(a,b: real;VAR s: real);
2:  LABEL 99;
3:  CONST
4:      eps=1.0e-6;
5:      jmax=20;
6:  VAR
7:      j: integer;
8:      olds: real;
9:  BEGIN
10:     olds := -1.0e30;
11:     FOR j := 1 to jmax DO BEGIN
12:         trapzd(a,b,s,j);
13:         IF (abs(s-olds) < eps*abs(olds)) THEN GOTO 99;
14:         olds := s
15:     END;
16:     writeln ('pause in QTRAP - too many steps'); readln;
17: 99:  END;

```

Nach diesen Vorbereitungen berechnet das nächste Programm

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

```

1:  PROGRAM pi_trap (input,output);
2:
3:  VAR a,b,integral : real;
4:      glit :integer;

```

```

5:
6:  FUNCTION func(x:real):real;
7:  BEGIN
8:    func := 4/(1+sqr(x))
9:  END;
10:
11:  {$I TRAPZD.PAS}
12:  {$I QTRAP.PAS}
13:
14:
15:  BEGIN
16:    a := 0;
17:    b := 1;
18:    qtrap(a,b,integral);
19:    writeln('Integral: ',integral,' Fehler: ',
20:           integral-pi,' Stuetzpunkte: ',glit);
21:  END.

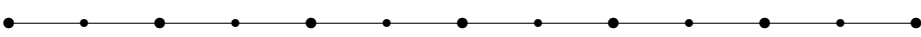
```

### Simpson's Regel

Hier muss aber sogleich herausgestrichen werden, dass die Trapezregel meist nicht die geeignete Methode ist, um ein Integral zu berechnen, sondern Simpsons Regel sollte wegen dem besseren Konvergenzverhalten verwendet werden. Hier ist die entsprechende Summenformel

$$S_{2N} = \frac{b-a}{3 \cdot 2N} \left( f(a) + 4 \sum_{i=1}^N f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + f(b) \right),$$

wobei  $x_i = a + i \frac{b-a}{2N}$ . Stellt man diese Formel für  $N = 6$  graphisch dar, zusammen mit den entsprechenden Termen für die Trapezregel, so ergibt sich.



$T_6$	(2		4		4		4		4		4	2)	$\frac{b-a}{2 \cdot 12}$	
$T_{12}$	(1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1)	$\frac{b-a}{2 \cdot 12}$	
$S_{12}$	(1	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	1)	$\frac{b-a}{3 \cdot 12}$

Man kann ablesen, dass

$$S_{2N} = \frac{2}{3}(2T_{2N} - \frac{1}{2}T_N) = \frac{1}{3}(4T_{2N} - T_N),$$

d.h. die Simpsonregel für  $2N$  Stützpunkte lässt sich leicht aus den Resultaten für die Trapezregel mit  $N$  und  $2N$  Punkten herleiten. Deshalb lassen sich die obigen Programme leicht modifizieren und mittels der Prozedur `trapzd` lässt sich die Simpsonregel programmieren.

```

1:  PROCEDURE qsimp(a,b: real; VAR s: real);
2:  LABEL 99;
3:  CONST
4:    eps=1.0e-6;

```

```

5:      jmax=20;
6:  VAR
7:      j: integer;
8:      st,ost,os: real;
9:  BEGIN
10:     ost := -1.0e30;
11:     os := -1.0e30;
12:     FOR j := 1 to jmax DO BEGIN
13:         trapzd(a,b,st,j);
14:         s := (4.0*st-ost)/3.0;
15:         IF (abs(s-os) < eps*abs(os)) THEN GOTO 99;
16:         os := s;
17:         ost := st
18:     END;
19:     writeln ('pause in QSIMP - too many steps'); readln;
20: 99:  END;

```

Nach diesen Vorbereitungen berechnet das Integral

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

mit dem folgenden Programm.

```

1:  PROGRAM pi_simp (input,output);
2:
3:  VAR a,b,integral : real;
4:      glit :integer;
5:
6:  FUNCTION func(x:real):real;
7:  BEGIN
8:  func := 4/(1+sqr(x))
9:  END;
10:
11:  {$I TRAPZD.PAS}
12:  {$I QSIMP.PAS}
13:
14:
15:  BEGIN
16:  a := 0;
17:  b := 1;
18:  qsimp(a,b,integral);
19:  writeln('Integral: ',integral,' Fehler: ',
20:         integral-pi,' Stuetzpunkte: ',glit);
21:  END.

```

Dieses Verfahren ist für die meisten Integrale durchaus effizient genug und wird deshalb auch oft eingesetzt.

Zum Vergleich: `qtrap` verwendet 513 Stützpunkt und `qsimp` verwendet 17 Stützpunkte um das Integral mit 6-stelliger Genauigkeit zu berechnen. Tatsächlich erhält man mittels `qsimp` sogar 9-stellige Genauigkeit.

### 1.6.5 Intégration à l'aide de Gauss

Pour trouver une approximation de l'intégral d'une fonction  $f(x)$  avec peut d'évaluation de la fonction on peut utiliser une idée de Gauss. Dans l'intervalle standard  $[-h, h]$  utiliser trois point de support  $\pm \xi h$  et 0 et des poids d'intégration  $w_1$  et  $w_0$ . Choisir tel que la formule

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx h ((w_1 f(-\xi h) + w_0 f(0) + w_1 f(\xi h))$$

produit des résultats exactes pour des polynômes des degrés le plus hautes possibles. Donc examiner

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f(x) dx &\approx h (w_1 f(-\xi h) + w_0 f(0) + w_1 f(\xi h)) \\ \int_{-h}^h 1 dx &= 2h = h(w_1 + w_0 + w_1) && \text{première équation} \\ \int_{-h}^h x dx &= 0 = h^2(-w_1\xi + 0w_0 + w_1\xi) && \text{symétrie} \\ \int_{-h}^h x^2 dx &= \frac{2}{3}h^3 = h^3(w_1\xi^2 + 0w_0 + w_1\xi^2) && \text{deuxième équation} \\ \int_{-h}^h x^3 dx &= 0 = h^4(-w_1\xi^3 + 0w_0 + w_1\xi^3) && \text{symétrie} \\ \int_{-h}^h x^4 dx &= \frac{2}{5}h^5 = h^5(w_1\xi^4 + 0w_0 + w_1\xi^4) && \text{troisième équation} \\ \int_{-h}^h x^5 dx &= 0 = h^6(-w_1\xi^5 + 0w_0 + w_1\xi^5) && \text{symétrie} \\ \int_{-h}^h x^6 dx &= \frac{2}{7}h^7 \approx h^7(w_1\xi^6 + 0w_0 + w_1\xi^6) && \text{détermine l'erreur} \end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus on trouve un système de trois équations non-linéaires pour trois inconnues.

$$\begin{aligned} w_0 + 2w_1 &= 2 \\ w_1 \xi^2 &= \frac{1}{3} \\ w_1 \xi^4 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Dans le rapport de la deuxième et troisième équation on trouve  $\xi^2 = \frac{3}{5}$  et donc  $\xi = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ . Puis utiliser la deuxième équation pour trouver  $w_1 \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$  et donc  $w_1 = \frac{5}{9}$ . La première équation rend  $w_0 = \frac{8}{9}$ . Donc on trouve une formule de Gauss.

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{9} \left( 5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}h) + 8f(0) + 5f(+\sqrt{\frac{3}{5}}h) \right)$$

À l'aide de l'intégration de  $x^6$  on voit que l'erreur de l'approximation de l'intégrale pour une intervalle standard  $[-h, h]$  est de l'ordre  $O(h^7)$ . Pour une intégration globale (somme des intégrales sur des sous-intervalles) on obtient un erreur de l'ordre  $h^6$ . Pour des valeurs de  $h$  petites l'erreur de l'approximation sera extrêmement petit.

**1-57 Exemple :** Examiner l'intégral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1$$

à l'aide d'une intégration de Gauss avec une intervalle.

$$\begin{aligned} h &= \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4} \\ x_0 &= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \\ x_{\pm} &= x_0 \pm \sqrt{\frac{3}{5}} h = \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\pi}{4} \\ G &= \frac{h}{9} (5f(x_-) + 8f(x_0) + 5f(x_+)) \end{aligned}$$

En Octave utiliser

Octave

```
x0 = pi/4; h = pi/4;
xm = x0 - sqrt(3/5)*h; xp = x0 + sqrt(3/5)*h;
Gauss = h/9*(5*sin(xm) + 8*sin(x0) + 5*sin(xp))
difference = Gauss - 1
—>
Gauss = 1.0000
difference = 8.1216e-06
```

◇

## 1.7 Exercices

### 1.7.1 Somme de Riemann

#### • Problème 1-1:

Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = x^2 - 1$  auf dem Intervall  $[0, 5]$  und unterteilen Sie das Intervall in  $n$  Stücke gleicher Länge. Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen  $\overline{S}_f(P_n)$  und  $\underline{S}_f(P_n)$ . Bestimmen Sie die Limites, falls  $n$  gegen unendlich geht.

#### • Problème 1-2:

Diviser l'intervalle  $[0, 2]$  en 5 secteur de la même longueur et examiner la fonction  $f(x) = x(x-1)$ . Trouver la somme intégrale inférieure  $\underline{S}_f(P)$  et la somme intégral supérieure  $\overline{S}_f(P)$ . Trouver une représentation graphique.

#### • Problème 1-3:

Regarder l'intégrale

$$\int_3^6 \sin x \, dx$$

Diviser l'intervalle en 5 pièces de même longueur et calculer la somme supérieure  $\overline{S}(P)$  et inférieure  $\underline{S}(P)$  pour cette partition.

#### • Problème 1-4:

Considérer la fonction  $f(t) = t^2$  sur l'intervalle  $[0, 3]$  et utiliser des partitions en  $n$  intervalles de la même longueur pour démontrer que la fonction est intégrable et que

$$\int_0^3 t^2 \, dt = 9 \quad .$$

#### • Problème 1-5:

Considérer la fonction  $f(x) = 7x^2$  sur l'intervalle  $[1, 4]$  et utiliser des partitions en  $n$  intervalles de la même longueur pour démontrer que la fonction est intégrable et calculer l'intégrale.

#### • Problème 1-6:

Considérer la fonction  $f(x) = x^2 - 1$  sur l'intervalles  $[4, 5]$  et subdiviser l'intervalle en  $n$  parties de la même longueur. Déterminer les sommes supérieure et inférieure  $\overline{S}_f(P_n)$  et  $\underline{S}_f(P_n)$ . Déterminer les limites si  $n$  tend vers l'infini.

#### • Problème 1-7:

Diviser l'intervalle  $[0, 2]$  en 4 secteur de la même longueur et examiner la fonction  $f(x) = \cos(\frac{\pi}{4}x)$ .

(a) Trouver l'intégrale exacte  $A$  de cette fonction sur cette intervalle.



- (b) Trouver la somme intégrale inférieure  $\underline{S}_f(P)$  et la somme supérieure  $\overline{S}_f(P)$ .
- (c) Trouver l'approximation de l'intégral par la règle des trapèzes.

• **Problème 1–8:**

Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = \cos(2x)$  auf dem Intervall  $[1, 4]$ . Als Partition  $P$  ist eine Unterteilung dieses Intervall in 5 Stücke gleicher Länge zu betrachten.

- (a) Bestimmen Sie  $\overline{S}_f(P)$ .
- (b) Bestimmen Sie  $\underline{S}_f(P)$ .
- (c) Wählen Sie als Zwischenpunkte  $\xi_i$  die Mittelpunkte der Teilintervalle und bestimmen Sie

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

- (d) Bestimmen Sie den Wert des Integrals exakt (mittels Hauptsatz).
- (e) Vergleichen Sie die obigen Resultate und kommentieren Sie.

• **Problème 1–9:**

Recalculer les intégrales ci-dessus à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

• **Problème 1–10:**

Untersuchen Sie das Integral

$$\int_0^2 e^t dt$$

- (a) Zerlegen Sie das Intervall in 4 Stücke gleicher Länge und finden Sie die exakte Formel für  $S_4 = \underline{S}_f(P)$ .
- (b) Zerlegen Sie das Intervall in  $n$  Stücke gleicher Länge und finden Sie die Summenformel für  $S_n = \underline{S}_f(P)$ .
- (c) Finden Sie den exakten Wert der Summe  $S_n$ .
- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert von  $S_n$  für  $n \rightarrow \infty$  mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

• **Problème 1–11:**

Untersuchen Sie das Integral

$$\int_0^2 e^{-t} dt$$

- (a) Zerlegen Sie das Intervall in 4 Stücke gleicher Länge und finden Sie die exakte Formel für die Riemann'sche Untersumme  $S_4 = \underline{S}_f(P)$ .
- (b) Zerlegen Sie das Intervall in  $n$  Stücke gleicher Länge und finden Sie die Summenformel für die Riemann'sche Untersumme  $S_n = \underline{S}_f(P)$ .
- (c) Finden Sie den exakten Wert der Summe  $S_n$ .
- (d) Bestimmen Sie den Grenzwert von  $S_n$  für  $n \rightarrow \infty$  mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

### 1.7.2 Exercices de base

#### • Problème 1–12:

Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Skript und Formelsammlung zu lösen.

- Geben Sie eine exakte Formulierung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung an.
- Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
- Verwenden Sie den Mittelwertsatz um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu beweisen.

#### • Problème 1–13:

Leite aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung das Theorem von Newton–Leibniz her.

#### • Problème 1–14:

Finden Sie die Tabelle von unbestimmten Integralen in **Ihrer** Formelsammlung und verschaffen Sie sich einen Überblick.

#### • Problème 1–15:

Décider lesquelles des fonctions suivantes sont continues par morceaux sur l'intervalle indiqué.

Entscheiden Sie, welche von den gegebenen Funktionen auf dem gegebenen Intervall stückweise stetig sind.

- Für  $x \in [-10, 10]$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

- Für  $x \in [-10, 10]$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

- Für  $x \in [-10, 10]$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{für } x > 1 \\ 0 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

- Für  $x \in [-10, 10]$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x^2 & \text{für } -10 \leq x \leq -2 \\ \cos(2x) & \text{für } -2 < x \leq 0 \\ \cos \sqrt{x} & \text{für } 0 < x \leq 10 \end{cases}$$

#### • Problème 1–16:

Décider si les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué. Justifier la réponse.

- $\sin(2x - x^3 + \cos x)$  auf  $[0, 6]$ .
- $\sin(1/x)$  auf  $[1, 6]$ .
- $\sin(1/x)$  auf  $[-1, 1]$ .
- $x \sin(1/x)$  auf  $[-1, 1]$ .
- $f(x) = 1$  falls  $x < 0$ ,  $f(x) = 3x^4 - \frac{1}{x+2}$  falls  $x \geq 0$  auf  $[-10, 10]$ .
- $f(x) = 1$  falls  $x \in \mathbb{Q}$  und  $f(x) = 0$  falls  $x \notin \mathbb{Q}$ .

• **Problème 1–17:**

Bewegen Sie, dass die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  auf dem Intervall  $(0, 1]$  integrierbar ist, obwohl sie nicht stückweise stetig ist.

Diese Aufgabe ist (zu) schwierig.

• **Problème 1–18:**

Für eine oft differenzierbare Funktion  $f(x)$  setzen wir

$$I(h) = \int_{-3h}^{3h} f(x) dx \quad .$$

Berechne

$$\frac{d}{dh} I(h).$$

• **Problème 1–19:**

Calculus

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^{x-\sin(2x)} \cos(e^{3t}) dt$$

### 1.7.3 Calcul des intégrals

• **Problème 1–20:**

Calculus les expressions suivantes (sans calculatrice).

$$a = \int 2x^{-3} - e^{x/3} dx$$

$$b = \int_2^{-2} x^4 \cosh(x^5) dx$$

$$f(z) = \int_0^z \left( \int_1^t \sinh(x) dx \right) dt$$

$$d = \int_{-2}^2 \sinh(\sin(x^3)) dx$$

• **Problème 1–21:**

Trouver les expressions suivantes

$$a = \int x^3 - 2^x dx$$

$$b = \int x^3 \cosh(x^4) dx$$

$$c = \int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin(x) dx$$

$$d = \int_0^s \left( \int_1^t 13x dx \right) dt$$

$$e = \int \frac{(x-2)^2}{(x-2)^3 + 13} dx$$

• **Problème 1–22:**

Calculus d'une façon exacte, veut dire pas de résultat numérique de la calculatrice.

$$a = \int x^2 + \sin(2x) dx$$

$$b = \int x \sqrt{1+3x^2} dx$$

$$c = \int_{-7}^7 x e^{-x^2} dx$$

$$d = \int e^{-x/3} + \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$e = \frac{d}{dz} \int_1^z \sinh(\cos x) dx$$

• **Problème 1–23:**

Calculer les expressions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  ci-dessous d'une façon exacte, **sans utiliser la calculatrice**.

$$A = \int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) + x^2 \, dx$$

$$C = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

$$B = \int_{-2}^2 (1+x) \cosh(x) \, dx$$

$$D = \int x \ln x \, dx$$

Tuyau pour  $B$ : partager en deux intégrales et symétrie

Tuyau pour  $D$ : intégration par partie

• **Problème 1–24:**

Trouver les expressions suivantes d'une façon exacte.

$$A = \int_{-2}^3 x^3 - \frac{x^4}{2} \, dx$$

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} s^3 \cosh(s) \, ds$$

$$B = \int_0^x \sqrt{t^2} \, dt$$

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} s^2 \cos(s) \, ds$$

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(s) \, ds$$

• **Problème 1–25:**

Calculer les intégrales suivantes **exactement** montrer les pas intermédiaires (sans calculatrice).

$$A = \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$D = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \phi}{1 + \cos^2 \phi} \, d\phi$$

$$B = \int_{-3}^3 x e^{-x^2} \, dx$$

$$E = \int_0^4 \sin(x-2) e^{(x-2)^2} \, dx$$

$$C = \int_0^2 e^{2x} \cosh e^{2x} \, dx$$

Tuyau: Dessiner et réfléchir

• **Problème 1–26:**

Déterminer les intégrales indéfinies suivantes.

$$a = \int \cos(5x) \, dx$$

$$c = \int 3(x^4 - 2x)^3 \, dx$$

$$b = \int x^2 \cos 5 \, dx$$

• **Problème 1–27:**

Trouver les expressions suivantes

$$a = \int 2x^3 - \cos \frac{x}{3} \, dx$$

$$f(z) = \int_0^z \left( \int_1^t \sin(7x) \, dx \right) dt$$

$$b = \int_1^{-2} x^4 \sinh(2x^5) \, dx$$

$$d = \int_{-2}^2 \sinh(\sin(x^3)) \, dx$$

• **Problème 1–28:**

Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) Berechnen Sie exakt

$$\int_0^3 (x^2 + 3)^2 dx$$

(c) Bestimmen Sie

$$\int \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx$$

(b) Berechnen Sie exakt

$$\int_{-2}^2 y^2 e^{(y^3)} dy$$

(d) Bestimmen Sie

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

**• Problème 1–29:**

Bestimmen Sie

$$\int \sin^{17} x dx$$

Diese Aufgabe ist etwas schwieriger zu lösen. Tip:  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  und binomischer Lehrsatz.

**1.7.4 Intégration par partie****• Problème 1–30:**

Vérifier la formule

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + c$$

**• Problème 1–31:**

Durch zweifache partielle Integration ergibt sich

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

**• Problème 1–32:**

Verwenden Sie partielle Integrationen um die folgenden Formeln zu verifizieren.

$$\begin{aligned} \int x \sin(ax) dx &= \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} + C \\ \int x \cos(ax) dx &= \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} + C \\ \int x^2 \sin(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cos(ax) + C \\ \int \frac{\cos(ax)}{x^2} dx &= -\frac{\cos(ax)}{x} - a \int \frac{\sin(ax)}{x} dx \end{aligned}$$

**• Problème 1–33:**

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration

$$a = \int \cos^2 x dx$$

$$d = \int x e^{3x} dx$$

$$b = \int x e^x dx$$

$$e = \int 3x \sin(2x) dx$$

$$c = \int x^2 e^x dx$$

$$f = \int x^2 \cos(x/4) dx$$

Kontrollieren Sie die Resultate mittels Ableiten, einer Tabelle oder *Mathematica*.

**• Problème 1–34:**

Die Konstante  $K$  ist gegeben durch

$$\int_{-7}^7 e^{-x^2} dx = K \approx 1.77$$

Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_0^7 x^2 e^{-x^2} dx$$

Das Resultat wird  $K$  enthalten.

Tip:  $x^2 e^{-x^2} = x \cdot x e^{-x^2}$

**• Problème 1–35:**

Schreiben Sie das Integral um, so dass im Resultat nur noch Integrale mit der Funktion  $f(x)$  vorkommen (keine Ableitungen mehr).

Réécrire l'expression ci-dessous tel qu'on ne trouve que la fonction  $f(x)$  dans l'intégrale (plus de dérivée).

$$\int_0^z x^3 f''(x) dx$$

**1.7.5 Substitution****• Problème 1–36:**

Calculer les intégrales

$$a = \int \cos^4 x \cdot \sin x dx$$

$$b = \int \cos(2x^2 + x) \cdot (4x + 1) dx$$

**• Problème 1–37:**

Remplacer les points d'interrogation ci-dessous par des fonctions (non zéro) telle qu'on peut calculer les intégrals avec des substitutions. Puis trouver les intégrals indéfinie.

(a)

$$\int \sin^4(7x) \boxed{?} dx$$

(c)

$$\int \sqrt{1 + \sin^2 x} \boxed{?} dx$$

(b)

$$\int (x^6 - x)^{17} \boxed{?} dx$$

(d)

$$\int \frac{2}{(1 + e^{3x})^2} \boxed{?} dx$$

**• Problème 1–38:**

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale mittels Substitution.

$$a = \int_0^3 x \sin x^2 dx$$

$$b = \int_0^1 x e^{-3x^2} dx$$

$$c = \int_{-2}^0 (\sin(7x) - x^3)^3 (7 \cos(7x) - 3x^2) dx$$

**• Problème 1–39:**

Remplacer le point d'interrogation ci-dessous par une fonction (non zéro) telle qu'on peut calculer l'intégral avec une substitution. Puis trouver l'intégrale indéfinie.

$$\int \cosh^3(4x) \boxed{?} dx$$

**1.7.6 Fonctions rationnelles****• Problème 1–40:**

Bestimmen Sie

$$\int \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} dx$$

**• Problème 1–41:**

Bestimmen Sie

$$\int \frac{-9 - x}{x^2 - 2x - 24} dx$$

**• Problème 1–42:**

Calculer

$$\int \frac{x - 5}{x^2 - 6x + 9} dx$$

**• Problème 1–43:**

Calculer

$$\int \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$$

**• Problème 1–44:**

Trouver

$$\int \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 34} dx$$

**• Problème 1–45:**

Un des deux intégrales existe

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 - 4)(x + 1)} dx \quad \text{ou} \quad B = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$$

(a) Décider laquelle des deux intégrales définies existe.

(b) Trouver une fonction primitive.

(c) Trouver la valeur exacte de l'intégrale.

**• Problème 1–46:**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 7x + 12)}$$

(a) Finden Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion  $f(x)$ .

(b) Bestimmen Sie

$$\int f(x) dx$$

(c) Bestimmen Sie

$$\int_{-6}^0 f(x) dx$$

• **Problème 1–47:**

Trouver

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx$$

Tip:  $e^x = u$

• **Problème 1–48:**

Trouver

$$\int \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos^2 x)} dx$$

Tip:  $\cos x = u$

### 1.7.7 Intégration numérique

• **Problème 1–49:**

Ecrire un programme (Modula, Pascal, C, HP–48, *Mathematica* ...) pour calculer

$$\int_a^b f(x) dx$$

si  $f$ ,  $a$ ,  $b$  et  $n$  (pair) sont donnés, en utilisant la formule de Simpson.

• **Problème 1–50:**

Betrachten Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{\cos x}{x+1} dx$$

- Zerlegen Sie  $[0, 2]$  in 4 Teilintervalle gleicher Länge und verwenden Sie die Trapezregel um das Integral approximativ zu berechnen.
- Zerlegen Sie  $[0, 2]$  in 4 Teilintervalle gleicher Länge und verwenden Sie Simpson's Regel um das Integral approximativ zu berechnen.
- Zerlegen Sie  $[0, 2]$  in 5 Teilintervalle gleicher Länge und verwenden Sie Simpson's Regel um das Integral approximativ zu berechnen.

• **Problème 1–51:**

Betrachten Sie das Integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

- Bestimmen Sie die minimal notwendige Zahl von Teilintervallen, um das Integral mittels der Trapezregel mit einem Fehler der sicher kleiner ist als  $10^{-3}$  zu berechnen.
- Bestimmen Sie die minimal notwendige Zahl von Teilintervallen, um das Integral mittels der Simpsonregel mit einem Fehler der sicher kleiner ist als  $10^{-3}$  zu berechnen.

• **Problème 1–52:**

Betrachten Sie das Integral

$$\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$$

Eine analytische Integration ist hier nicht möglich.



- (a) Teilen Sie das Integral in 4 Stücke gleicher Länge auf und berechnen Sie das Integral approximativ mit Hilfe der Methode von **Simpson**.
- (b) Wie viele Werte der Funktion müssen berechnet werden, damit der Fehler bei einer numerischen Integration mit Hilfe der **Trapezregel** kleiner als  $10^{-6}$  wird? Die Antwort ist zu begründen.

• **Problème 1–53:**

Examiner l'intégrale

$$I = \int_0^3 \sinh(2x) dx$$

- (a) Diviser l'intervalle en quatre sections de même longueur. Puis trouver une approximation numérique de  $I$  à l'aide de la formule de Simpson.
- (b) Combien (valeur de  $n$ ) de sections sont nécessaires pour que l'erreur d'une approximation par la formule des trapèzes rend un erreur plus petit que  $10^{-8}$  ?
- (c) Combien (valeur de  $n$ ) de sections sont nécessaires pour que l'erreur d'une approximation par la formule du Simpson rend un erreur plus petit que  $10^{-8}$  ?

• **Problème 1–54:**

Soit

$$f(-h/2) = c_{-1} \quad f(h/2) = c_1 \quad .$$

- (a) Trouver un polynôme  $p(x)$  du degré 1 tel que

$$p(-h/2) = c_{-1} \quad p(h/2) = c_1$$

- (b) Calculer en suite

$$\int_{-h/2}^{h/2} p(x) dx \quad .$$

Comparer le résultat avec la formule du trapèze.

• **Problème 1–55:**

Untersuchen Sie die Taylorentwicklung einer Funktion

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dots$$

und den Stützstellen bei  $x = \pm h/2$ . Wie sind die Gewichte  $w_{-1}$  und  $w_1$  zu wählen, damit in der obigen Funktion möglichst viele Terme korrekt integriert werden durch die Formel

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx w_{-1} f(-h/2) + w_1 f(h/2)$$

• **Problème 1–56:**

Die Aufgabe 1–55 kann auch mit drei Stützstellen bei  $-h$ ,  $0$  und  $h$  durchgeführt werden mit den Gewichten  $w_{-1}$ ,  $w_0$  und  $w_1$  und der approximativen Formel

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx w_{-1} f(-h/2) + w_0 f(0) + w_1 f(h/2)$$

Leiten Sie daraus die Formel von Simpson her und bestimmen Sie die Ordnung des Fehlers.

**• Problème 1–57:**

Soit

$$f(-h) = c_{-1} \quad f(0) = c_0 \quad f(h) = c_1 \quad .$$

Trouver un polynôme  $p(x)$  du degré 2 tel que

$$p(-h) = c_{-1} \quad p(0) = c_0 \quad p(h) = c_1$$

et calculer en suite

$$\int_{-h}^h p(x) dx \quad .$$

Comparer le résultat avec la formule d'intégration de Simpson.

**• Problème 1–58:**

Eine oft differenzierbare Funktion  $f(x)$  ist gegeben auf dem Intervall  $-h \leq x \leq h$ . Das Integral soll numerisch approximiert werden durch

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx g_{-1} f(-z) + g_1 f(z)$$

mit den zu bestimmenden Gewichten  $g_{-1}$ ,  $g_1$  und für ein  $0 < z < h$ .

- Bestimmen Sie die Werte  $g_{-1}$  und  $g_1$ , indem Sie verlangen, dass die Approximation für Polynome vom Grad 1 das exakte Ergebnis liefert.
- Bestimmen Sie den korrekten Wert von  $z$ , indem Sie zusätzlich verlangen, dass  $x^2$  exakt integriert wird.
- Bestimmen Sie die Ordnung des Fehlers (bezüglich  $h$ ), indem Sie  $f(x)$  durch eine Taylorapproximation ersetzen und die Ergebnisse der exakten Integration mit der Approximationsformel vergleichen.

**• Problème 1–59:**

Für eine oft differenzierbare Funktion  $f(x)$  setzen wir

$$I(h) = \int_{-h}^h f(x) dx$$

$$T(h) = h (f(-h/3) + f(h/3))$$

- Finde die ersten drei Terme (inkl.  $h^3$ ) der Taylorentwicklung von  $E(h) = T(h) - I(h)$ .
- Leite eine Formel her, um für gegebene  $a$  und  $b$  das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

approximativ zu berechnen. Bestimme die Ordnung des Fehlers.

- Für Polynome bis zu welcher Ordnung wird die Formel exakte Resultate liefern? Teste.
- Berechne

$$\int_0^1 x^5 dx$$

approximativ mittels 6 Stützpunkten im Inneren von  $[0, 1]$ .

• **Problème 1–60:**

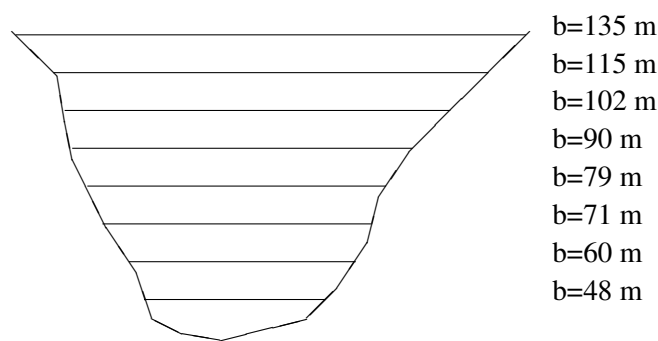
Bei einem Fass wird auf verschiedenen Höhen  $h$  der Umfang  $U$  gemessen. Berechnen Sie aus den gegebenen Daten das Volumen des Fasses numerisch mit den Simpson–Regeln

Pour quelques hauteurs  $h$  on a mesuré la circonférence  $U$  d'un tonneau. Trouver le volume du tonneau par des méthodes numériques avec les règles de Simpson.

$h$ cm	$U$ cm
0	200
20	210
40	215
60	214
80	208
100	195

• **Problème 1–61:**

Pour un barrage de 80 m de hauteur on a mesuré tous le 10 m de hauteur la largeur du mur. On a obtenu les résultats suivants:



- (a) Utiliser la règle de Simpson pour calculer la surface du barrage.

Tuyau: on connaît la largeur de ce barrage tout en bas.

- (b) Une force  $F$  appliquée sur une surface  $A$  peut être exprimée par la pression  $p$  selon la formule suivante

$$\text{Force} = \text{surface} \cdot \text{pression} \quad \text{ou} \quad F = A \cdot p.$$

La pression dans un liquide est donné par

$$p = \rho gh,$$

où  $\rho$  est la densité et  $h$  la profondeur au-dessous de la surface du liquide. Prendre les valeurs  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  et  $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ .

Le lac étant complètement rempli d'eau, calculer la force totale sur le barrage.

• **Problème 1–62:**

Betrachten Sie das Integral

$$\int_2^5 \frac{1}{(x+2)^3} dx$$

- (a) Bestimmen Sie das Integral exakt.

- (b) Bestimmen Sie die minimal notwendige Zahl von Teilintervallen, um das Integral mittels der Simpsonregel mit einem Fehler der sicher kleiner ist als  $10^{-4}$  zu berechnen.

• **Problème 1–63:**

Regarder l'intégrale

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-10)^2} dx$$

- (a) Calculer la valeur exacte pour l'intégrale.
- (b) Trouver la nombre  $n$  minimal, tel que l'approximation de l'intégrale par la formule de Simpson produit un erreur plus petite que  $10^{-6}$ .

• **Problème 1–64:**

Calculer

$$A = \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{4} dx$$

- (a) exacte
- (b) avec la règle des trapèzes et les trois points de support  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $x_2 = \pi$ .
- (c) avec la règle de Simpson et les trois points de support  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $x_2 = \pi$ .
- (d) Comparer les résultats ci-dessus et donner un commentaire.

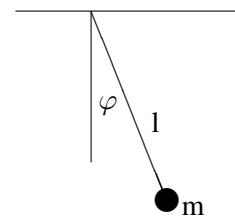
• **Problème 1–65:**

Schwingungsdauer eines Pendels

Das skizzierte Fadenpendel mit der Länge  $l$  und der Masse  $m$  schwingt für kleine Auslenkwinkel  $\varphi$  nahezu harmonisch, wobei die Schwingungsdauer  $T$  aus der Näherungsgleichung

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnet werden kann.



Die exakte Berechnung der Schwingungsdauer erfolgt nach der Integralformel

$$T_2 = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} du \quad \lambda = \sin(\varphi_0/2)$$

wobei  $\varphi_0$  der maximale Auslenkwinkel ist. Berechnen Sie dieses Integral und somit die Schwingungsdauer  $T_2$  für die Winkel  $\varphi_0 = 2, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 140^\circ$ . Erstellen Sie eine Tabelle mit den relativen (prozentualen) Unterschieden von  $T_1$  und  $T_2$ . Zur Integration von  $T_2$  kann das Simpsonverfahren mit  $n = 10$  verwendet werden.

• **Problème 1–66:**

Weshalb liefern die in den Notizen vorgestellten `Pascal`-Programme für das Integral

$$\int_0^{2\pi} 1 + \sin^2(4x) dx$$

sehr schnell ein sehr falsches Resultat? (Tip: zeichne den Graphen dieser Funktion)

Kann man dieses Problem besser in den Griff bekommen oder sogar eliminieren?

• **Problème 1–67:**

**Thickness of ozone layer**

Suppose  $\rho(x)$  is the density (in cm/km) of ozone in the atmosphere at a height of  $x$  km above the ground. For example, if  $\rho(6) = 0.0052$ , then at a height of 6 km there is effectively a thickness of 0.0052 cm of ozone for each km of atmosphere. The thickness of the ozone layer between heights  $a$  and  $b$  can be found by the integral

$$\int_a^b \rho(x) dx.$$

Values for  $\rho(x)$  found experimentally are shown in the table on the right. Use Simpson's rule to estimate the thickness of the ozone layer between the altitudes of 6 km and 42 km during both spring and autumn.

$x$ km	$\rho(x)$ spring	$\rho(x)$ autumn
0	0.0034	0.0038
6	0.0052	0.0043
12	0.0124	0.0076
18	0.0132	0.0104
24	0.0136	0.0109
30	0.0084	0.0072
36	0.0034	0.0034
42	0.0017	0.0016

• **Problème 1–68:**

An electrician suspects that a meter showing the total consumption  $Q$  in kilowatt hours (kwh) of electricity is not functioning properly. To check the accuracy, the electrician measures the consumption rate  $R$  directly every 10 minutes, obtaining the results in the following table.

$t$ (min)	0	10	20	30	40	50	60
$R$ (kwh/min)	1.31	1.43	1.45	1.39	1.36	1.47	1.29

- (a) Use Simpson's rule to estimate the total consumption during this one hour period.
- (b) If the meter reads 48792 kwh at the beginning of the experiment and 48953 kwh at the end, what should the electrician conclude?

• **Problème 1–69:**

- (a) Examiner l'intégral  $\int_0^3 e^{-2t} dt$  à l'aide des méthodes numériques. L'erreur d'approximation doit être plus petit que  $10^{-6}$ . Combien de points de support doit on prendre si on utilise

- la méthode des trapèzes?
- la méthode de Simpson?

- (b) Dans une rivière on mesure la température de l'eau une fois par heure. Déterminer la température moyenne entre 9:00 et 17:00 à l'aide de la méthode de Simpson.

Temps	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
Temperature	24.1	25.0	28.4	29.1	30.3	30.2	27.3	25.9	23.9

### 1.7.8 Problèmes mixtes

• **Problème 1–70:**

Trouver les expressions suivantes

(a)

$$\int 2x^3 - \cos \frac{x}{3} dx$$

(c)

$$f(z) = \int_0^z \left( \int_1^t \sin(7x) dx \right) dt$$

(b)

$$\int_1^{-2} x^4 \sinh(2x^5) dx$$

(d)

$$\int_{-2}^2 \sinh(\sin(x^3)) dx$$

**• Problème 1–71:**

Utiliser l'intégration par partie (deux fois) pour trouver l'intégrale indéfinie.

$$\int x^2 \cosh(-7x) dx$$

**• Problème 1–72:**

Remplacer la boîte vide par une fonction de sorte qu'on puisse calculer l'intégrale. Puis trouver l'intégrale.

$$\int_{-1}^2 \sin(x^3 - 2x) \boxed{?} dx$$

**• Problème 1–73:**

Verwenden Sie zweimal partielle Integration um das folgende unbestimmte Integral zu berechnen.

$$\int x^2 \sinh(x/2) dx$$

**• Problème 1–74:**

Calculer les expressions suivantes

(a)

$$\int \frac{x^2 - 3}{(x^3 - 9x)^{1/5}} dx$$

(d)

$$\int_0^3 \cosh(2x + 1) dx$$

(b)

$$\int 2^x + \frac{1}{7} \cosh x dx$$

(e)

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2 + 3} dx$$

(c)

$$\int \frac{2x}{x^4 + 49} dx$$

(f)

$$\int_0^\pi \sin^5 x dx$$

Tip:  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

**• Problème 1–75:**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)(x-4)(x-2)}$$

Eines der beiden Integrale

$$\int_0^3 f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx$$

kann berechnet werden.

Entscheide welches und bestimme den Wert ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners.

• **Problème 1–76:**

Trouver une primitive de

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x + 2}$$

−2 et 1 sont les zeros du dénominateur.

• **Problème 1–77:**

Calculer

$$\int_0^3 \frac{1}{(x^2 + 8)(x - 1)} dx$$

• **Problème 1–78:**

Calculer les intégrales suivantes:

(a)

$$\int_0^3 \cosh(2x + 1) dx$$

(c)

$$\int \sin^5 x dx$$

(b)

Tip:  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$$

• **Problème 1–79:**

Examiner la fonction  $f(x) = e^x$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Diviser l'intervalle en  $n$  morceau de la même longueur.

(a) On cherche une approximation de la fonction. Trouver le nombre  $n$  tel que l'erreur maximale d'une approximation linéaire par morceau est plus petit que  $10^{-5}$ .

(b) On peut utiliser la partition ci-dessus (partie a) et la méthode de Simpson pour calculer l'intégral  $\int_{-1}^1 e^x dx$ . Estimer l'erreur maximal de cette approximation. Ne calculer pas l'intégral.

## 1.7.9 Solutions de quelques problèmes

### Solution pour problème 1–3 :

$$\overline{S}_f(P) = 0.6 \cdot (\sin 3 + \sin 3.6 + \sin 4.2 + \sin 5.4 + \sin 6) \approx -1.335$$

$$\underline{S}_f(P) = 0.6 \cdot (\sin 3.6 + \sin 4.2 + (-1) + \sin 4.8 + \sin 5.4) \approx -2.4498$$

**Solution pour problème 1–5 :** Mit Riemann'schen Summen arbeiten und für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $h = 3/n$  und  $x_i = 1 + i h$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}_f(P) &= h \sum_{i=0}^{n-1} 7 x_i^2 = h \sum_{i=0}^{n-1} 7 (1 + i h)^2 \\ &= 7 h \sum_{i=0}^{n-1} (1 + 2 i h + i^2 h^2) = 7 h \sum_{i=0}^{n-1} 1 + 14 h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + 7 h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7nh + 14h^2 \frac{(n-1)n}{2} + 7h^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= 7 \cdot 3 + 14 \cdot 9 \frac{(n-1)n}{2n^2} + 7 \cdot 27 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\
&\rightarrow 7 \cdot 3 + 14 \cdot 9 \frac{1}{2} + 7 \cdot 27 \frac{2}{6} = 147
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{S}_f(P) &= h \sum_{i=1}^n 7x_i^2 = h \sum_{i=1}^n 7(1+ih)^2 \\
&= 7h \sum_{i=1}^n (1+2ih+i^2h^2) = 7h \sum_{i=1}^n 1 + 14h^2 \sum_{i=1}^n i + 7h^3 \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= 7nh + 14h^2 \frac{n(n+1)}{2} + 7h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 7 \cdot 3 + 14 \cdot 9 \frac{n(n+1)}{2n^2} + 7 \cdot 27 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&\rightarrow 7 \cdot 3 + 14 \cdot 9 \frac{1}{2} + 7 \cdot 27 \frac{2}{6} = 147
\end{aligned}$$

Beachte

$$\underline{S}_f(P) < 147 < \bar{S}_f(P)$$

Das Resultat wird bestätigt durch

$$\int_1^4 7x^2 dx = \frac{7}{3} x^3 \Big|_{x=1}^4 = \frac{7 \cdot 4^3}{3} - \frac{7}{3} = 147$$

### Solution pour problème 1–7 :

(a)

$$A = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{4}{\pi}$$

(b) Da die Funktion im Intervall  $[0, 2]$  monoton fallend ist, sind die Ober- und Untersumme leicht abzugeben.

$$\begin{aligned}
\underline{S}(P) &= \frac{1}{2} (f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2)) \approx \frac{1}{2} (0.92388 + 0.70711 + 0.38268 + 0) \approx 1.0068 \\
\bar{S}(P) &= \frac{1}{2} (f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5)) \approx \frac{1}{2} (1 + 0.92388 + 0.70711 + 0.38268) \approx 1.5068
\end{aligned}$$

(c) Eine genaue Inspektion zeigt, dass das Resultat der Trapezregel durch den Mittelwert der Ober- und Untersumme gegeben ist.

$$T_4 = \frac{1}{2} (\underline{S}(P) + \bar{S}(P)) \approx 1.2568$$

Diese Vereinfachung ist nur für monotone Funktionen korrekt.

Ein einfacher Test der Rechnungen ist

$$\underline{S}(P) < T_4 \approx A < \bar{S}(P)$$

### Solution pour problème 1–10 :



(a)

$$S_4 = \frac{2}{4} \left( e^0 + e^{1/2} + e^1 + e^{3/2} \right)$$

(b)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \left( e^0 + e^{2/n} + e^{4/n} + e^{6/n} + \dots + e^{2(n-1)/n} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k}{n}} \end{aligned}$$

(c) Es handelt sich um eine geometrische Summe mit Faktor  $e^{2/n}$  und wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

gilt

$$S_n = \frac{2}{n} \frac{1 - e^2}{1 - e^{2/n}} = 2(1 - e^2) \frac{1/n}{1 - e^{2/n}}$$

(d) Mit Hilfe der Substitution  $x = 1/n$  ist der folgende Grenzwert zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} 2(1 - e^2) \frac{x}{1 - e^{2x}} &= 2(1 - e^2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{1 - e^{2x}} \\ &= 2(1 - e^2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{-2e^{2x}} \\ &= 2(1 - e^2) \frac{1}{-2} = e^2 - 1 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–11 :**

(a)

$$S_4 = \frac{2}{4} \left( e^{-1/2} + e^{-1} + e^{-3/2} + e^{-2} \right)$$

(b)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \left( e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \dots + e^{-2(n-1)/n} \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{2k}{n}} \end{aligned}$$

(c) Es handelt sich um eine geometrische Summe mit Faktor  $e^{-2/n}$  und wegen

$$\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

gilt

$$S_n = \frac{2}{n} e^{-2/n} \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-2/n}} = 2(1 - e^{-2}) \frac{e^{-2/n}}{n(1 - e^{-2/n})}$$

(d) Mit Hilfe der Substitution  $x = 1/n$  ist der folgende Grenzwert zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} 2(1 - e^{-2}) \frac{x e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} &= 2(1 - e^{-2}) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{e^{2x} - 1} \\ &= 2(1 - e^{-2}) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2 e^{2x}} \\ &= 1 - e^{-2} \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–16 :** integrierbar, integrierbar, nicht leicht entscheidbar, integrierbar, integrierbar, nicht integrierbar.

**Solution pour problème 1–18 :**  $3(f(-3h) + f(3h))$

**Solution pour problème 1–19 :** Théorème fondamental et une substitution  $z = x - \sin(2x)$

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-1}^z \cos(e^{3t}) dt \\ \frac{d}{dz} F(z) &= \cos(e^{3z}) \\ \frac{d}{dx} (x - \sin(2x)) &= 1 - 2 \cos(2x) \\ \frac{d}{dx} \int_{-1}^{x - \sin(2x)} \cos(e^{3t}) dt &= \cos(e^{3(x - \sin(2x))}) \cdot (1 - 2 \cos(2x)) \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–21 :**

$$\begin{aligned} a &= \int x^3 - 2^x dx = \int x^3 - e^{x \ln 2} dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} + C \\ b &= \int x^3 \cosh(x^4) dx = \frac{1}{4} \sinh(x^4) + C \\ c &= \int_{-3}^3 e^{-x^2} \sin(x) dx = 0 \quad \text{wegen Symmetrie} \\ d &= \int_0^s \left( \int_1^t 13x dx \right) dt = \int_0^s \left( \frac{13}{2} (t^2 - 1) \right) dt = \frac{13}{2} \left( \frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_{t=0}^s = \frac{13}{2} \left( \frac{s^3}{3} - s \right) \\ e &= \int \frac{(x-2)^2}{(x-2)^3 + 13} dx = \frac{1}{3} \ln |(x-2)^3 + 13| + C \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–22 :**

$$\begin{aligned} a &= \int x^2 + \sin(2x) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \cos(2x) + c \\ b &= \int x \sqrt{1 + 3x^2} dx = \frac{1}{6} \int 6x (1 + 3x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{6} \frac{2}{3} (1 + 3x^2)^{3/2} + c \\ c &= \int_{-7}^7 x e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{wegen Symmetrie} \\ d &= \int e^{-x/3} + \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = -3e^{-x/3} + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c \\ e &= \frac{d}{dz} \int_1^z \sinh(\cos x) dx = \sinh(\cos z) \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–23 :**

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) + x^2 dx = -\cos(x) + \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\pi}^{2\pi} \\
&= -\cos(2\pi) + \frac{(2\pi)^3}{3} - (-\cos(-\pi) - \frac{\pi^3}{3}) = -2 + \frac{9\pi^3}{3} = -2 + 3\pi^3 \\
B &= \int_{-2}^2 \cosh(x) dx + \int_{-2}^2 x \cosh(x) dx = \sinh(x) \Big|_{x=-2}^2 + 0 = 2 \sinh(2) \\
&\quad \text{verwende Symmetrie} \\
C &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{Hauptsatz} \\
D &= \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

Bei  $D$  führt eine partielle Integration "in die andere Richtung" nicht zu einem einfacheren Ausdruck. Die Rechnung führt zu einer Gleichung für  $D$  und somit auch zur Lösung.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x \cdot \ln x - x) &= \ln x + \frac{x}{x} - 1 \\
D &= \int x \ln x dx = x \cdot (x \cdot \ln x - x) - \int 1 \cdot (x \cdot \ln x - x) dx \\
&= x \cdot (x \cdot \ln x - x) + \frac{1}{2} x^2 - \int x \cdot \ln x dx \\
2D &= x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C
\end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–24 :**

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^3 x^3 - \frac{x^4}{2} dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{x=-2}^3 \\
&= \frac{3^4}{4} - \frac{3^5}{10} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{10} = \frac{81}{4} - \frac{243}{10} - \frac{16}{4} + \frac{32}{10} \\
&= \frac{65}{4} - \frac{275}{10} = \frac{325 - 550}{20} = \frac{-225}{20} = \frac{-45}{4} \\
B &= \int_0^x \sqrt{t^2} dt = \frac{x^2}{2} \\
C &= \int_{-\pi}^{\pi} \cosh s ds = \sinh s \Big|_{s=-\pi}^{\pi} = 2 \sinh \pi
\end{aligned}$$

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} s^3 \cosh s ds = 0 \text{ wegen Symmetrie.}$$

Für  $E$  kann eine Integral-Tabelle verwendet werden

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\pi}^{\pi} s^2 \cos s ds = 2 \int_0^{\pi} s^2 \cos s ds \\
&= (4s \cos s - 4 \sin s + 2s^2 \sin s) \Big|_{s=0}^{\pi} \\
&= -4\pi
\end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–25 :**

(a)

$$A = \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^4}{12} - \frac{1}{x} \Big|_{x=0}^3$$

Wegen der Division durch Null ist dieses Integral nicht definiert.

(b)

$$B = \int_{-3}^3 x e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{wegen Symmetrie}$$

(c) Eine Substitution  $u = e^{2x}$  führt auf

$$C = \int_0^2 e^{2x} \cosh e^{2x} dx = \frac{1}{2} \sinh e^{2x} \Big|_{x=0}^2 = \frac{1}{2} (\sinh e^4 - \sinh 1)$$

(d) Die Substitution  $u = \cos \phi$  mit  $du = -\sin \phi d\phi$  führt auf

$$D = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-1}{1+u^2} du = \arctan u \Big|_{u=\sqrt{2}/2}^1 = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(e) Die Funktion ist ungerade bezüglich des Punktes  $(x, y) = (2, 0)$  und folglich ist

$$E = \int_0^4 \sin(x-2) e^{(x-2)^2} dx = 0$$

**Solution pour problème 1–28 :**

(a)

$$\int_0^3 (x^2 + 3)^2 dx = \int_0^3 x^4 + 6x^2 + 9 dx = \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x \Big|_0^3 = \frac{3^5}{5} + 2 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 = \frac{648}{5} = 129.6$$

(b) Substitution  $u = y^3$  mit  $du = 3y^2 dy$ 

$$\int_{-2}^2 y^2 e^{(y^3)} dy = \frac{1}{3} \int_{-8}^8 e^u du = \frac{1}{3} e^u \Big|_{-8}^8 = \frac{1}{3} (e^8 - e^{-8})$$

(c) Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x} &= \frac{1}{x(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

Einsetzen von  $x = 0$ ,  $x = -2$  und  $x = -3$  liefert sofort

$$1 = A6, \quad 1 = B(-2) \quad \text{und} \quad 1 = C3$$

und somit

$$\int \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} dx = \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x+2| + \frac{1}{3} \ln |x+3| + c$$

(d)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cos x$$

**Solution pour problème 1–29 :** Bei der Aufgabenstellung ist ein Fehler unterlaufen. Die gestellte Aufgabe ist etwas schwierig, aber mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes lösbar.

$$\begin{aligned} \int \sin^{17} x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^8 \sin x \, dx \\ &= \int \left( \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k \cos^{2k} x \right) \sin x \, dx \\ &= \sum_{k=0}^8 \left( \binom{8}{k} (-1)^k \int \cos^{2k} x \sin x \, dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^8 \left( \binom{8}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \cos^{2k+1} x \right) + c \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–34 :** Wegen

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}$$

gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x^2} \, dx &= \int x x e^{-x^2} \, dx \\ &= \frac{-x}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int 1 e^{-x^2} \, dx \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_0^7 x^2 e^{-x^2} \, dx &= \frac{-x}{2} e^{-x^2} \Big|_0^7 + \frac{1}{2} \int_0^7 1 e^{-x^2} \, dx \\ &= \frac{-7}{2} e^{-49} + \frac{1}{4} K \end{aligned}$$

Es wurde verwendet, dass

$$\int_0^7 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-7}^7 e^{-x^2} \, dx = \frac{K}{2}$$

**Solution pour problème 1–35 :** Partielle Integration

$$\begin{aligned} \int x^3 f''(x) \, dx &= x^3 f'(x) - \int 3x^2 f'(x) \, dx \\ &= x^3 f'(x) - 3x^2 f(x) + \int 6x f(x) \, dx \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_0^z x^3 f''(x) \, dx &= (x^3 f'(x) - 3x^2 f(x)) \Big|_{x=0}^z + \int_0^z 6x f(x) \, dx \\ &= z^3 f'(z) - 3z^2 f(z) + \int_0^z 6x f(x) \, dx \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–36 :**

$$\begin{aligned} a &= \int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = \frac{-1}{5} \cos^5 x + C \\ b &= \int \cos(2x^2 + x) \cdot (4x + 1) \, dx = \sin(2x^2 + x) + C \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–37 :**

(a)

$$\int \sin^4(7x) \cos(7x) \, dx = \frac{1}{35} \sin^5(7x) + C$$

(b)

$$\int (x^6 - x)^{17} (6x^5 - 1) \, dx = \frac{1}{18} (x^6 - x)^{18} + C$$

(c)

$$\int \sqrt{1 + \sin^2 x} (2 \cos x \sin x) \, dx = \frac{2}{3} (1 + \sin^2 x)^{3/2} + C$$

(d)

$$\int \frac{2}{(1 + e^{3x})^2} e^{3x} \, dx = \frac{-2}{3} (1 + e^{3x})^{-1} + C$$

Andere richtige Lösungen sind möglich für diese Aufgabe.

**Solution pour problème 1–38 :**

$$\begin{aligned} a &= \int_0^3 x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} - \frac{\cos 9}{2} \\ b &= \int_0^1 x e^{-3x^2} \, dx = \frac{-1}{6} e^{-3x^2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{-1}{6} e^{-3} + \frac{1}{6} \\ c &= \int_{-2}^0 (\sin(7x) - x^3)^3 (7 \cos(7x) - 3x^2) \, dx \\ &= \frac{1}{4} (\sin(7x) - x^3)^4 \Big|_{x=-2}^0 \\ &= \frac{-1}{4} (\sin(-14) - (-2)^3)^4 \\ &= \frac{1}{4} (\sin(14) - 8)^4 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1–39 :** Substitution , oder auch Kettenregel

$$\int \cosh^3(4x) (\sinh(4x) 4) \, dx = \frac{1}{4} \cosh^4(4x) + C$$

**Solution pour problème 1–40 :** Faktorisierung der Nenners

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 5}$$

Integration

$$\int \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} dx = 3 \int \frac{1}{x - 2} dx + 2 \int \frac{1}{x + 5} dx = 3 \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 5| + C$$

**Solution pour problème 1-41 :**

$$\int \frac{-9 - x}{x^2 - 2x - 24} dx = \frac{1}{2} \ln |x + 4| - \frac{3}{2} \ln |x - 6| + C$$

**Solution pour problème 1-42 :** Nullstellen des Nenners

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x - 5}{(x - 3)^2} &= \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2} \\ \frac{(x - 3) - 2}{(x - 3)^2} &= \frac{1}{x - 3} + \frac{-2}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

Integration

$$\int \frac{(x - 3) - 2}{(x - 3)^2} dx = \ln |x - 3| + \frac{2}{(x - 3)} + C$$

**Solution pour problème 1-43 :** Zéros du dénominateur

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2$$

Fractions partielles

$$\frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2}$$

L'équation à résoudre

$$15x^2 + 26x - 5 = A(x + 2)^2 + B(x + 2)(x - 1) + C(x - 1)$$

$x$	équation
$x = 1$	$36 = 9A$
$x = -2$	$3 = -3C$
$x = 0$	$-5 = 4A - 2B - C$

avec les solutions  $A = 4$ ,  $C = -1$  et  $B = 11$  et donc

$$\int \frac{15x^2 + 26x - 5}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = 4 \ln |x - 1| + \frac{1}{x + 2} + 11 \ln |x + 2| + C$$

**Solution pour problème 1-44 :** Wegen

$$x^2 - 6x + 34 = (x - 3)^2 + 5^2$$

ist die Partialbruchzerlegung bereits ausgeführt, und wir schreiben den Bruch um zu

$$\frac{3x-4}{x^2-6x+34} = \frac{3(x-3)+5}{x^2-6x+34} = \frac{3(x-3)}{(x-3)^2+5^2} + \frac{5}{(x-3)^2+5^2}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x^2-6x+34} dx &= \int \frac{3(x-3)}{(x-3)^2+5^2} dx + \int \frac{5}{(x-3)^2+5^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln((x-3)^2+5^2) + \arctan \frac{x-3}{5} + C \end{aligned}$$

### Solution pour problème 1-45 :

- (a) Die Funktion im Integral  $B$  hat eine Polstelle bei  $x = 1$  im Intervall, und deshalb kann  $B$  nicht berechnet werden.
- (b) Zu berechnen ist  $A$  mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2-4)(x+1)} &= \frac{1}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{a(x+2)(x+1) + b(x-2)(x+1) + c(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} \end{aligned}$$

Also ist die zu lösende Gleichung

$$1 = a(x+2)(x+1) + b(x-2)(x+1) + c(x-2)(x+2)$$

Setzt man der Reihe nach  $x = 2$ ,  $x = -2$  und  $x = -1$  so erhalten wir

$$1 = a \cdot 12, \quad 1 = b \cdot 4 \quad \text{und} \quad 1 = c \cdot (-3)$$

und somit

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{1}{(x^2-4)(x+1)} dx \\ &= \int \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+1} dx \\ &= a \ln|x-2| + b \ln|x+2| + c \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{12} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

- (c) Mit der obigen Stammfunktion erhält man

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{1}{(x^2-4)(x+1)} dx \\ &= \left( \frac{1}{12} \ln(2-x) + \frac{1}{4} \ln(x+2) - \frac{1}{3} \ln(x+1) \right) \Big|_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{12} (\ln 1 - \ln 2) + \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1) \\ &= -\frac{\ln 2}{12} + \frac{\ln 3 - \ln 2}{4} - \frac{\ln 2}{3} = -\frac{2 \ln 2}{3} + \frac{\ln 3}{4} \approx -0.187445 \end{aligned}$$

### Solution pour problème 1-46 :



(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x+4} \end{aligned}$$

Die zu lösende Gleichung ist somit

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 1 &= A(x+1)(x+3)(x+4) + B(x-1)(x+3)(x+4) \\ &\quad + C(x-1)(x+1)(x+4) + D(x-1)(x+1)(x+3) \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} x=1 &\implies 0 = A \cdot 40 \\ x=-1 &\implies 2 = -B \cdot 12 \\ x=-3 &\implies -20 = C \cdot 8 \\ x=-4 &\implies -55 = -D \cdot 15 \end{aligned}$$

und somit

$$f(x) = \frac{-1}{6} \frac{1}{x+1} - \frac{5}{2} \frac{1}{x+3} + \frac{11}{3} \frac{1}{x+4}$$

(b)

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{6} \ln(x+1) - \frac{5}{2} \ln(x+3) + \frac{11}{3} \ln(x+4) + K$$

(c) Das bestimmte Integral

$$\int_{-6}^0 f(x) dx$$

existiert nicht, da die Polstellen im Intervall liegen.

**Solution pour problème 1–47 :**

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx = \frac{1}{3e^x} + \ln \left| \frac{e^x - 3}{e^x} \right| + C$$

**Solution pour problème 1–48 :**

$$\int \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos^2 x)} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{\cos x} \right| + C$$

**Solution pour problème 1–52 :**

(a) Mit  $h = \frac{0.5}{4}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx &\approx \frac{h}{3} (1 f(0) + 4 f(0.125) + 2 f(0.25) + 4 f(0.375) + 1 f(0.5)) \\ &\approx \frac{1}{24} (1 + 4 \cdot 0.98450 + 2 \cdot 0.93941 + 4 \cdot 0.86882 + 0.77880) \\ &\approx 0.46129 \end{aligned}$$

(b) Für die Trapezregel gilt

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{b-a}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| h^2$$

Für unsere Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x e^{-x^2} \\ f''(x) &= (4x^2 - 2) e^{-x^2} \\ |f''(x)| &= |4x^2 - 2| e^{-x^2} \leq 2 \end{aligned}$$

Somit ist die Ungleichung

$$\frac{0.5}{12} 2 h^2 \leq 10^{-6}$$

zu erfüllen, d.h.

$$h \leq \sqrt{12 \cdot 10^{-6}} = 3.464 \cdot 10^{-3}$$

Somit ist die Anzahl der Teilintervalle

$$n = \frac{0.5}{h} \approx 144.3$$

Mit  $n = 150$  Teilintervallen wird die gewünschte Genauigkeit erreicht.

### Solution pour problème 1–53 :

(a) Mit  $h = \frac{3}{4}$  ist die folgende Formel anzuwenden

$$I \approx \frac{h}{3} (f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + f(4h)) \approx 102.57$$

(b) Die Fehlerformel für die Trapezregel ist

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{b-a}{12} M_2 \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

Wegen

$$M_2 = \max_{0 \leq x \leq 3} f''(x) = \max_{0 \leq x \leq 3} (4 \sinh 2x) = 4 \sinh 6$$

führt das auf die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{3}{12} 4 \sinh 6 \left(\frac{3}{n}\right)^2 &\leq 10^{-8} \\ 9 \cdot 10^8 \sinh 6 &\leq n^2 \\ n &\geq 3 \cdot 10^4 \sqrt{\sinh 6} \approx 426'077 \end{aligned}$$

(c) Die Fehlerformel für die Simpsonregel ist

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = \frac{b-a}{180} M_4 \left(\frac{b-a}{n}\right)^4$$

Wegen

$$M_4 = \max_{0 \leq x \leq 3} f^{(4)}(x) = \max_{0 \leq x \leq 3} (16 \sinh 2x) = 16 \sinh 6$$

führt das auf die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{3}{180} 16 \sinh 6 \left(\frac{3}{n}\right)^4 &\leq 10^{-8} \\ \frac{3^5 \cdot 16}{180} 10^8 \sinh 6 &\leq n^4 \\ n &\geq \left(\frac{3^5 \cdot 16}{180} 10^8 \sinh 6\right)^{1/4} \approx 812 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 1-54 :**

(a)

$$p(x) = \frac{c_1 + c_{-1}}{2} + \frac{c_1 - c_{-1}}{h} x$$

(b)

$$\int_{-h/2}^{h/2} p(x) dx = \frac{c_1 + c_{-1}}{2} h$$

Dies ist genau das Resultat der Trapezformel mit einem Intervall.

**Solution pour problème 1-55 :** Wir arbeiten von links nach rechts in der Formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dots$$

1. Damit die Funktion 1 korrekt integriert wird, muss gelten

$$\int_{-h/2}^{h/2} 1 dx = h = w_{-1} + w_1$$

Damit wird auch  $f(x) = f(0)$  exakt integriert.

2. Damit die Funktion  $x$  korrekt integriert wird, muss gelten

$$\int_{-h/2}^{h/2} x dx = 0 = -w_{-1} \frac{h}{2} + w_1 \frac{h}{2}$$

Damit wird auch  $f(x) = f(0) + f'(0)x$  exakt integriert.

Das ergibt zwei Gleichungen für die Koeffizienten  $w_{-1}$  und  $w_1$  mit den Lösungen  $w_1 = w_{-1} = \frac{h}{2}$ . Es gilt also

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx \frac{f(-h/2) + f(h/2)}{2} h$$

Dies ist die Trapezformel.

Wegen

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} x^2 dx &= \frac{2}{2 \cdot 3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{h^3}{24} \\ w_{-1} \frac{h^2}{4} + w_1 \frac{h^2}{4} &= \frac{h^3}{4} \end{aligned}$$

gilt

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 dx - \frac{f(-h/2) + f(h/2)}{2} h = -\frac{f''(0)}{12} h^3 + O(h^4)$$

Dies ist die lokale Fehlerabschätzung der Trapezformel.

**Solution pour problème 1-56 :** Wir arbeiten von links nach rechts in der Formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \dots$$

1. Damit die Funktion 1 korrekt integriert wird, muss gelten

$$\int_{-h}^h 1 \, dx = 2h = w_{-1} + w_0 + w_1$$

Damit wird auch  $f(x) = f(0)$  exakt integriert.

2. Damit die Funktion  $x$  korrekt integriert wird, muss gelten

$$\int_{-h}^h x \, dx = 0 = -w_{-1}h + w_1h$$

Damit wird auch  $f(x) = f(0) + f'(0)x$  exakt integriert.

3. Damit die Funktion  $x^2$  korrekt integriert wird, muss gelten

$$\int_{-h}^h x^2 \, dx = \frac{2}{3}h^3 = w_{-1}h^2 + w_1h^2$$

Damit wird auch  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$  exakt integriert.

Das ergibt drei Gleichungen für die Koeffizienten  $w_{-1}$ ,  $w_0$  und  $w_1$

$$\begin{array}{rclcl} w_{-1} & +w_0 & +w_1 & = & 2h \\ -w_{-1} & & +w_1 & = & 0 \\ w_{-1} & & +w_1 & = & \frac{2}{3}h \end{array}$$

mit den Lösungen  $w_1 = w_{-1} = \frac{h}{3}$  und  $w_0 = \frac{4h}{3}$ . Es gilt also

$$\int_{-h}^h f(x) \, dx \approx \frac{f(-h) + 4f(0) + f(h)}{3} h$$

Dies ist die klassische Simpson-Formel.

Wegen

$$\begin{array}{rcl} \int_{-h}^h x^3 \, dx & = & 0 \\ -w_{-1}h^3 + 0w_0 + w_1h^3 & = & 0 \\ \int_{-h}^h x^4 \, dx & = & \frac{2}{5}h^5 \\ -w_{-1}h^4 + 0w_0 + w_1h^4 & = & \frac{2}{3}h^5 \end{array}$$

wird der Term mit  $x^3$  exakt integriert. Der Fehler tritt erst für Integrale von  $x^4$  auf, und somit ist der lokale Fehler des Simpsonverfahren von der Ordnung  $h^5$ . Genauer gilt

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 \, dx - \\ -h \frac{f(-h) + 4f(0) + f(h)}{3} &\approx \frac{f^{(4)}(0)}{24} \left( \frac{2}{5}h^5 - \frac{2}{3}h^5 \right) \\ &= -\frac{f^{(4)}(0)}{90} h^5 \end{aligned}$$

Dies ist die lokale Fehlerformel für das Verfahren von Simpson.

**Solution pour problème 1-58 :**

(a) Wir verlangen, dass die Funktionen  $f(x) = 1$  und  $f(x) = x$  exakt integriert werden

$$\begin{aligned} 2h &= \int_{-h}^h 1 \, dx = g_{-1} + g_1 \\ 0 &= \int_{-h}^h x \, dx = g_{-1}(-z) + g_1 z \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen für die Gewichte werden gelöst durch  $g_{-1} = g_1 = h$ .

(b)

$$\frac{2}{3} h^3 = \int_{-h}^h x^2 \, dx = g_{-1} z^2 + g_1 z^2 = 2h z^2$$

Daraus folgt sofort  $z^2 = \frac{1}{3} h^2$  oder  $z = h\sqrt{1/3}$ .

(c) Die Taylorapproximation von  $f(x)$  ist

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$$

Man sieht leicht, dass

$$0 = \int_{-h}^h x^3 \, dx = g_{-1}(-z^3) + g_1 z^3 = 0$$

aber

$$\frac{2}{5} h^5 = \int_{-h}^h x^4 \, dx \neq g_{-1} z^4 + g_1 z^4 = 2h^5 \frac{1}{9}$$

Die Approximationsformel ist also für Polynome der Ordnung 4 nicht mehr exakt, und der (lokale) Approximationsfehler ist von der Ordnung  $h^5$ .

**Solution pour problème 1–59 :** Nur eine Teillösung (mit *Mathematica*)

**Mathematica**

```
int[h_] = Integrate[f[x], {x, -h, h}];
t[h_] = h(f[-h/3] + f[h/3]);
e[h_] = int[h] - t[h];
Series[e[h], {h, 0, 3}]
.
```

$$\frac{2}{9} f''[0] h^3 + O[h]^4$$

**Solution pour problème 1–60 :** Utiliser  $h_i = i \cdot 20 \text{ cm}$  et

$$V = \int_0^{100} \pi r^2 \, dh = \pi \int_0^{100} \frac{U^2(h)}{4\pi^2} \, dh$$

Avec Simpson 3/8 et Simpson (normale) on obtien

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{1}{4\pi} \frac{60}{8} (U^2(h_0) + 3U^2(h_1) + 3U^2(h_2) + U^2(h_3)) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{40}{6} (U^2(h_3) + 4U^2(h_4) + U^2(h_5)) \\ &= \frac{15}{8\pi} (200^2 + 3 \cdot 210^2 + 3 \cdot 215^2 + 214^2) + \frac{5}{3\pi} (214^2 + 4 \cdot 208^2 + 195^2) \\ &\approx 349209 \text{ [cm}^3\text{]} \approx 350 \text{ l} \end{aligned}$$

Une estimation simple donne  $r^2 \approx 11 \text{ dm}^2$  et donc

$$V \approx h \cdot \pi r^2 \approx 11 \cdot \pi \cdot 10 \text{ dm}^3 \approx 345 \text{ l}$$

**Solution pour problème 1–63 :**

(a)

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-10)^2} dx = \frac{-1}{x-10} \Big|_2^5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$$

(b)

$$f(x) = (x-10)^{-2}, \quad f'(x) = -2(x-10)^{-3}, \quad f''(x) = 6(x-10)^{-4} \\ f^{(3)}(x) = -24(x-10)^{-5}, \quad f^{(4)}(x) = 120(x-10)^{-6}$$

Pour  $x \leq 2 \leq 5$  on sait que

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{120}{(x-10)^6} \leq \frac{120}{(5-10)^6} = \frac{120}{15625}$$

et donc on a la condition

$$\frac{3}{180} \cdot \frac{120}{15625} \cdot h^4 \leq 10^{-6}$$

qui est satisfait pour

$$\frac{3}{n} = h \leq 0.297$$

et donc  $n \geq 10.09$ . Parce-que  $n$  doit être pair on obtiens  $n = 12$ .

**Solution pour problème 1–64 :**

(a)

$$A = \int_0^\pi \sin \frac{x}{4} dx = -4 \cos \frac{x}{4} \Big|_{x=0}^\pi = 4(-\cos \frac{\pi}{4} + \cos 0) = 4\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.17157$$

(b)

$$\text{Trap} = \left(f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right) \frac{\pi}{4} = \left(0 + 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\pi}{4} \approx 1.15648$$

(c)

$$\text{Simp} = \left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi)\right) \frac{\pi}{6} = \left(0 + 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\pi}{6} \approx 1.17173$$

(d)

$$|A - \text{Trap}| \approx 0.0151 \quad \text{und} \quad |A - \text{Simp}| \approx 0.00016$$

Der Fehler der Simpson-Approximation des Integrals ist erheblich kleiner. Der Algorithmus von Simpson ist besser.

**Solution pour problème 1–68 :**

Octave

```

h = 10;
integral = h/3*(1*1.31 + 4*1.43 + 2*1.45 + 4*1.39 + 2*1.36 + 4*1.47 + 1* 1.29)
→
integral = 84.600

```

Since  $84.6 \cdot 60 = 5076 \neq 161 = 48953 - 48792$  the installation has to be fixed.

**Solution pour problème 1–69 :** Quelle: [Swok92, p. 261]

- (a) Die Fehlerformeln sind dem Kurs zu entnehmen. Wegen  $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2t}$  gilt  $M_2 = |f''(0)| = 4$  und  $M_4 = |f^{(4)}(0)| = 16$ .

- Trapezregel

$$\begin{aligned}
 |\text{Fehler}| &\leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{3}{12} 4 \left(\frac{3}{n}\right)^2 \leq 10^{-6} \\
 9 \frac{1}{n^2} &\leq 10^{-6} \\
 n &\geq \sqrt{9 \cdot 10^6} = 3000
 \end{aligned}$$

Somit sollten mehr als 3000 Punkte verwendet werden.

- Simpsonregel

$$\begin{aligned}
 |\text{Fehler}| &\leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = \frac{3}{180} 16 \left(\frac{3}{n}\right)^4 \leq 10^{-6} \\
 \frac{16 \cdot 81}{60} \frac{1}{n^4} &\leq 10^{-6} \\
 n &\geq \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 81}{60} 10^6} \approx 68.2
 \end{aligned}$$

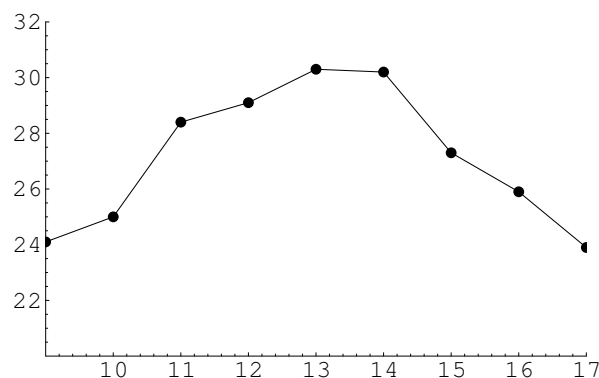
Somit sollten mehr als 69 Punkte verwendet werden.

- (b) Der Durchschnitt kann als Integral durch Intervall-Länge aufgefasst werden.

$$T_{\text{mittel}} = \frac{1}{8} \int_9^{17} T(t) dt$$

Das führt auf

$$\frac{24.1 + 4 \cdot 25.0 + 2 \cdot 28.4 + 4 \cdot 29.1 + 2 \cdot 30.3 + 4 \cdot 30.2 + 2 \cdot 27.3 + 4 \cdot 25.9 + 23.9}{1 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 1} = 27.53$$



**Solution pour problème 1–70 :**

(a)

$$\int 2x^3 - \cos \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} x^4 - 3 \sin \frac{x}{3} + C$$

(b)

$$\int_1^{-2} x^4 \sinh(2x^5) dx = \frac{-1}{10} (\cosh 2 - \cosh 64)$$

(c)

$$f(z) = \int_0^z \left( \int_1^t \sin(7x) dx \right) dt = \frac{1}{7} \left( z \cos 7 - \frac{1}{7} \sin(7z) \right)$$

(d) Weil die Funktion  $f(x) = \sinh(\sin(x^3))$  ungerade ist gilt

$$\int_{-2}^2 \sinh(\sin(x^3)) dx = 0$$

**Solution pour problème 1–79 :** Alle Ableitungen der Funktion  $e^x$  sind wiederum  $e^x$ . Somit ist der Maximalwert aller Ableitungen auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gegeben durch  $e^1 = e$ .

(a) Die Funktion ist zu approximieren, d.h. keine Integration. Die Formel für die Fehlerabschätzung ist

$$10^{-5} \leq |\text{Fehler}| \leq \frac{M_2}{8} h^2 = \frac{e}{8} \frac{2}{n^2}$$

Das führt auf die Bedingung

$$n^2 \geq \frac{e}{4} 10^5 \quad \text{und somit} \quad n \geq 368.66$$

Man kann also mit  $n = 370$  weiterrechnen

(b) Die Fehlerabschätzung ist hier

$$\text{Fehler} \leq \frac{2}{180} M_4 \left( \frac{2}{n} \right)^4 = \frac{e}{90} \left( \frac{2}{370} \right)^4 \approx 2.6 \cdot 10^{-11}$$



## 1.8 Récapitulation

Après ce chapitre on doit

- connaître la définition de l'intégrale définie avec les sommes de Riemann.
- maîtriser la connection entre les intégrals définies et indéfinies par le théorème fondamental.
- calculer les intégrales de base d'un façon rapide et fiable.
- maîtriser l'intégrations par partie.
- savoir utiliser des substitutions simples et des table avec des intégrales.
- utiliser l'intégration par fractions partielles.
- être capable de calculer des intégrales numériques, avec l'estimation de l'erreur (si nécessaire).

## Chapitre 2

# Applications de l'intégrale

### 2.1 Aires entre courbes

#### 2.1.1 Coordonnées cartésiennes

L'aire déterminé par les inégalités  $a \leq x \leq b$  et  $g(x) \leq y \leq f(x)$  se calcule par l'intégrale

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Ceci correspond à la décomposition de l'aire en des colonnes verticales étroites.

L'aire déterminé par les inégalités  $a \leq y \leq b$  et  $l(y) \leq x \leq r(y)$  se calcule par l'intégrale

$$A = \int_a^b r(y) - l(y) dy$$

Ceci correspond à la décomposition de l'aire en des rectangles horizontaux étroites.

#### • Problème 2-1:

Trouver l'aire comprise de la section bornée entre l'axe des  $x$  et la parabole  $y = 4x - x^2$ .

#### • Problème 2-2:

Trouver la surface limitée par la parabole  $y^2 = 4x$  et la droite  $y = 2x - 4$  par

- (a) un découpage horizontal.
- (b) un découpage vertical.

#### • Problème 2-3:

Trouver la surface limitée par les deux paraboles  $y = 6x - x^2$  et  $y = x^2 - 2x$ .

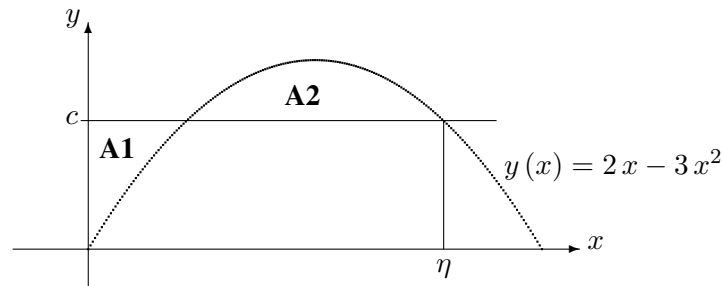
#### • Problème 2-4:

Trouver la surface limitée par les graphes des deux fonctions

$$y = f(x) = x^3 + 2 \quad \text{et} \quad y = g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

#### • Problème 2-5:

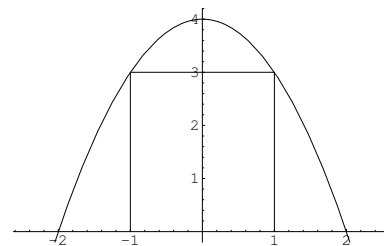
Soit une courbe donnée par  $y = f(x) = 2x - 3x^2$  et la droite horizontale  $y = c$ . Trouver la valeur **exacte** de la constante  $c$  telle que les deux aires  $A_1$  et  $A_2$  soient les mêmes.



Tip: Utiliser aussi la condition  $f(\eta) = c$ .

• **Problème 2-6:**

Construire un rectangle sous la courbe  $y = 4 - x^2$ , comme dans la figure à droite. Où doit-on mettre les points de base du rectangle pour que la surface (en trois sections) entre la parabole et les droites est minimale?



(a) Trouver la valeur optimale pour  $x$ .

(b) Déterminer l'aire minimale.

• **Problème 2-7:**

Examiner la surface dans le demi-plan  $y > 0$ , mais au-dessous de la parabole  $y = 2x - x^2$ . Cette surface est coupée en deux par une droite  $y = ax$ . Trouver la valeur de  $a$  telle que les deux sections ont la même aire.

### 2.1.2 coordonnées polaires

Un aire est générée par la ligne de jonction entre l'origine et le point avec les coordonnées polaires  $(r(\theta), \theta)$ , l'angle  $\theta$  variant entre  $\theta_0$  et  $\theta_1$ . L'aire se calcule par l'intégrale

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

Ce résultat s'appelle **formule du secteur de Leibniz**.

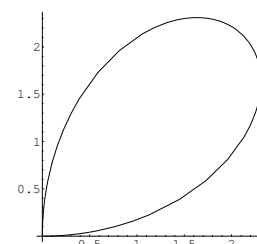
• **Problème 2-8:**

Spirale d'Archimède

Le premier tour d'une spirale d'Archimède est donné par la relation  $r = c \cdot \theta$  entre le rayon  $r$  et l'angle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $c$  étant une constante positive. Déterminer l'aire à l'intérieur de cet arc.

• **Problème 2-9:**

Calculer l'aire à l'intérieur de la courbe  $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$  dans le premier quadrant.



• **Problème 2–10:**

Déterminer l'aire incluse par la courbe  $r = \cos(3\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

## 2.2 Centre de masse et moments

### 2.2.1 Centre de masse d'une surface

Considérer un ensemble de points pourvus des masses  $m_i$  avec les coordonnées  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ . La masse totale est donnée par

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Les coordonnées du centre de masse sont données par

$$x_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{et} \quad y_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

Considérer ces formules comme moyennes pondérées des coordonnées, les poids étant donnés par les masses des points.

Une surface avec densité de masse constante 1 est décrite par les inégalités  $a \leq x \leq b$  et  $g(x) \leq y \leq f(x)$ . La masse  $M$  correspond à l'aire  $A$ , et on a donc

$$M = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Pour obtenir cette intégrale, on a considéré les limites suivantes

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N (f(x_j) - g(x_j)) \Delta x_j = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Par une réflexion similaire, on peut dériver les intégrales pour le calcul de la coordonnée  $x$  du centre de masse

$$M x_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N x_j (f(x_j) - g(x_j)) \Delta x_j = \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

Pour la coordonnée  $y$ , on obtient

$$M y_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{f(x_j) + g(x_j)}{2} (f(x_j) - g(x_j)) \Delta x_j = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Si la surface est décrite par les inégalités  $a \leq y \leq b$  et  $g(y) \leq x \leq f(y)$ , l'aire (la masse) est donné par

$$M = \int_a^b f(y) - g(y) dy$$

La coordonnée  $y$  est donnée par

$$M y_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N y_j (f(y_j) - g(y_j)) \Delta y_j = \int_a^b y (f(y) - g(y)) dy$$

La coordonnée  $x$  est donnée par

$$M x_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{f(y_j) + g(y_j)}{2} (f(y_j) - g(y_j)) \Delta y_j = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(y) - g^2(y)) dy$$

• **Problème 2–11:**

Déterminer le centre de masse d'un triangle avec les coins  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  et  $(a, b)$  par

- (a) un découpage vertical.
- (b) un découpage horizontal.

Remarque:  $a$  et  $b$  sont positifs.

• **Problème 2–12:**

Déterminer le centre de masse d'un quart de cercle.

• **Problème 2–13:**

Examiner la demie boule de rayon  $R$ , veut dire  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  und  $z > 0$ .

- (a) Donner une intégral pour le volume de la demie boule.
- (b) Déterminer le centre de gravité de cette demie boule à l'aide d'une intégrale.

Tuyau: Utiliser le rayon du cercle d'une intersection sur hauteur  $z$ .

## 2.2.2 Moments de l'ordre 0 et 1

Considérer un ensemble de points pourvus des masses  $m_i$  avec les coordonnées  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  et une axe fixe. La distance du point  $(x_i, y_i)$  de l'axe est dénotée par  $r_i$ . Puis le **moment de l'ordre 1** de cet ensemble de points pourvus d'une masse par rapport à l'axe est donnée par la somme

$$M(1, \text{axe}) = \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

Donc le moment de l'ordre 1 par rapport à l'axe des  $y$  est donné par

$$M(1, \text{axe des } y) = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

et le moment de l'ordre 1 par rapport à l'axe des  $x$  est donné par

$$M(1, \text{axe des } x) = \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

De façon analogue, on définit le **moment de l'ordre 0** par

$$M(0) = \sum_{i=1}^n m_i$$

ici, la situation de l'axe ne joue aucun rôle.

En décomposant les surfaces de manière convéniente et en formant des limites, on peut également déterminer les moments de surfaces. En examinant les intégrales de la section précédente on voit que

$$\begin{aligned} A &= M(0) \\ x_s &= \frac{M(1, \text{axe des } y)}{M(0)} \\ y_s &= \frac{M(1, \text{axe des } x)}{M(0)} \end{aligned}$$

### 2.2.3 Moments de l'ordre 2, moment d'inertie

L'énergie  $E$  d'un point pourvu d'une masse  $m$  qui bouge sur une droite avec une vitesse  $v$ , est donnée par  $E = \frac{1}{2} m v^2$ . Si le mouvement suit un cercle de rayon  $r$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ , la vitesse est donnée par  $v = \omega r$ . On peut donc calculer l'énergie d'un tel point par  $E = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ . Si tout un système de points pourvus d'une masse tournent avec vitesse angulaire  $\omega$  autour d'une axe, l'énergie totale est donnée par

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i = \frac{1}{2} \omega^2 J$$

L'expression

$$J = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$$

est appelée **moment de l'ordre 2** ou **moment d'inertie** de ce système. Il joue le même rôle pour des rotations comme la masse pour des mouvements linéaires. A partir de ces réflexions on peut définir le moment de l'ordre 2 pour des surfaces (et corps) et le calculer à l'aide d'intégrales. Ceci est exécuté de façon exemplaire pour quelques exemples.

#### • Problème 2-14:

Déterminer le moment de l'ordre 2 d'un disque d'une épaisseur constante  $D$ , d'un rayon  $R$  et d'une densité de masse  $\rho$  qui tourne autour l'axe centrale perpendiculaire au plan du disque. Confirmer que l'énergie à une vitesse angulaire  $\omega$  est donnée par

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{M R^2}{4} \omega^2 \quad \text{et donc} \quad J = \frac{1}{2} M R^2$$

#### • Problème 2-15:

Déterminer le moment de l'ordre 2 d'un disque d'un rayon  $R$  et d'une densité de masse  $\rho$  qui tourne autour l'axe centrale dans le plan du disque. Confirmer que l'énergie à une vitesse angulaire  $\omega$  est donnée par

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{M R^2}{8} \omega^2 \quad \text{et donc} \quad J = \frac{1}{4} M R^2$$

#### • Problème 2-16:

Une voiture bouge à 80 km/h. Déterminer la proportion de l'énergie du mouvement linéaire et de l'énergie de rotation des roues.

Données typiques: masse de la voiture 1000 kg, masse d'une roue 8 kg, diamètre des roues 0.6 m.

#### • Problème 2-17:

Par rotation du disque  $(x - R)^2 + y^2 \leq r^2$  ( $0 < r < R$ ) autour de l'axe des  $y$ , un tore est généré. Etablir l'intégrale pour le calcul du moment d'inertie de ce tore par rapport à la rotation autour de l'axe des  $y$ .

#### • Problème 2-18:

Considérer la surface caractérisée par les inégalités  $a \leq x \leq b$  et  $g(x) \leq y \leq f(x)$ . En déterminer le moment de l'ordre 2 par rapport à une rotations autour

(a) de l'axe des  $y$ .

(b) de l'axe des  $x$ .

Vous pouvez (devez) supposer que  $a > 0$  et  $0 < g(x)$ .

Pour des rotations autour de l'axe des  $y$ , les trois formules

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \\ Mx_s &= \int_a^b x (f(x) - g(x)) \, dx \\ J_y &= \int_a^b x^2 (f(x) - g(x)) \, dx \end{aligned}$$

se ressemblent un peu (moments de l'ordre 0, 1, 2). On est donc tenté de chercher des rapports entre  $M$ ,  $x_s$  et  $J_y$ . Pour ceci, on détermine le moment d'inertie  $J_S$  de la surface par rapport à une rotation autour de l'axe parallèle à l'axe des  $y$  qui passe par le centre de masse.

$$\begin{aligned} J_S &= \int_a^b (x - x_s)^2 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_a^b (x^2 - 2xx_s + x_s^2) (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_a^b x^2 (f(x) - g(x)) \, dx - 2x_s \int_a^b x (f(x) - g(x)) \, dx + x_s^2 \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= J_y - 2x_s Mx_s + x_s^2 M \\ &= J_y - x_s^2 M \end{aligned}$$

Ceci nous fournit le **théorème de Steiner** qui va nous être très utile.

Le moment de l'ordre 2 autour d'une axe quelconque se calcule en déterminant le moment de l'ordre 2 autour de l'axe parallèle qui passe par le centre de masse de la surface et l'additionnant au produit du carré de la distance du centre de masse de l'axe avec l'aire.

$$J_y = J_S + A x_s^2$$

• **Problème 2–19:**

Déterminer le moment d'inertie du disque  $(x - R)^2 + y^2 \leq r^2$  ( $0 < r < R$ ) par rapport à une rotation autour de l'axe des  $y$ .

- (a) Par le théorème de Steiner.
- (b) Directement par une intégrale.

• **Problème 2–20:**

La terre a une masse de  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  et un rayon de  $R = 6370 \text{ km}$ . On estime la consommation d'énergie mondiale annuelle à  $3 \cdot 10^{20} \text{ J}$ .

- (a) Déterminer l'énergie „stockée“ dans la rotation autour de son propre axe.
- (b) De combien un jour serait prolongés (après un an) si la consommation d'énergie était tirée de la rotation de la terre?

• **Problème 2–21:**

Si un disque avec rayon constant  $r$  et masse  $m$  tourne autour l'axe perpendiculaire au disque qui passe par le centre, le moment d'inertie est donné par

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

Un corps d'une densité constante  $\rho$  est généré par la rotation de la surface sous un arc de la courbe  $y = \cos x$  autour de l'axe des  $x$ . Calculer le moment d'inertie pour la rotation autour de l'axe des  $x$ .

## 2.3 Flexion de poutres



Figure 2.1: Flexion d'une poutre

Nous examinons une poutre élastique avec position de repos horizontale. Sa déviation soit décrite par une fonction  $y(x)$  pour  $0 \leq x \leq L$ , voir Figure 2.1. Une section de la poutre est montrée en Figure 2.2 et détermine un **moment d'inertie**  $I$ . La valeur de  $I$  est donnée par un intégral et correspond à un moment de l'ordre 2. D'abord on va examiner pourquoi cette expression est importante pour déterminer les déformations des poutres.

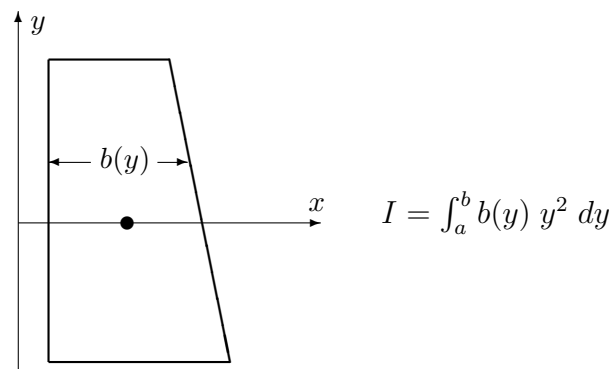


Figure 2.2: Moment d'inertie

### 2.3.1 Énergie de déformation

En problème 2-41 on va trouver que l'énergie nécessaire pour allonger une poutre de section  $A$  et longueur  $L$  par  $\Delta L$  est donnée par

$$E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} \frac{E A}{l} (\Delta l)^2$$

En Figure 2.3 trouver une petite section de la poutre déformée en Figure 2.1. Par la déformation les couches au-dessus la hauteur  $h = H$  sont allongées et les couches au-dessous sont comprimées. Une couche mince entre  $h$  et  $h + \Delta h$  peut être simplifiée comme allongée/comprimée d'une façon horizontale. Calculons l'énergie nécessaire pour cette allongement.

Utiliser les notations suivantes.

$H$	hauteur de la couche non allongée
$h$	hauteur à examiner
$b(h)$	largeur à l'hauteur $h$
$E$	module d'élasticité



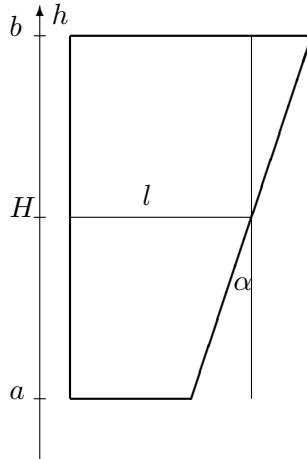


Figure 2.3: l'énergie pour déformation d'une poutre

En Figure 2.3 vérifier que

$$\begin{aligned}
 \Delta l &= (h - H) \tan \alpha && \text{changement le longueur a hauteur } h \\
 \Delta l &\approx (h - H) \alpha && \text{bonne approximation} \\
 E_{\text{elast}}(h) &= \frac{1}{2} \frac{E b(h) \Delta h}{l} (\Delta l)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{E b(h) \Delta h}{l} (h - H)^2 \alpha^2
 \end{aligned}$$

Avec une intégration der cette énergie par couche on peut calculer l'énergie totale  $E(H)$  comme fonction de la hauteur  $H$  de la couche neutre. Des lois de base de la physique et mécanique implique que la hauteur  $H$  est tel que cette énergie est minimale.

$$\begin{aligned}
 E(H) &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{E b(h)}{l} (h - H)^2 \alpha^2 dh \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} \frac{E}{l} \int_a^b b(h) (h - H)^2 dh \\
 \frac{d}{dH} E(H) &= -\frac{\alpha^2}{2} \frac{E}{l} \int_a^b b(h) 2 (h - H) dh
 \end{aligned}$$

Cette condition extremale donc nous mène à

$$\frac{d}{dH} E(H) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b b(h) h dh = \int_a^b b(h) H dh$$

et puis

$$H = \frac{\int_a^b b(h) h dh}{\int_a^b b(h) dh} = H_s$$

Donc on a montré que la hauteur  $H$  de la couche neutre est déterminée par le centre de gravité de la section. L'énergie de déformation est donnée par un moment de l'ordre deux.

### 2.3.2 Les équations de base

Les relations physiques fondamentales sont

$$\begin{aligned}
 EI y''(x) &= M(x) \\
 EI y^{(4)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2} M(x) = f(x)
 \end{aligned}$$

Pour la signification des notations voir la table ci-dessous.

abréviation	signification	unité
$x$	coordonnée horizontale $0 \leq x \leq L$	$m$
$y$	déviaton verticale par rapport à la position de repos	$m$
$L$	longueur de la poutre	$m$
$I$	moment d'inertie	$m^4$
$E$	module d'élasticité	$\frac{N}{m^2}$
$f$	force verticale par longueur	$\frac{N}{m}$
$M$	moment de flexion	$N m$

D'abord, on veut vérifier que les deux formulations ci-dessus sont équivalentes. Pour ceci, il faut d'abord déterminer le moment  $M(x)$  généré par les forces attaquant à droite de  $x$ . Cette intégrale peut être dérivée à l'aide d'une formule de sommes. Puis on détermine par moyen du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral la deuxième dérivée de cette expression.

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \int_x^L (s-x) f(s) ds \\
 \frac{d}{dx} M(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^L (s-x) f(s) ds \\
 &= \frac{d}{dx} \int_x^L s f(s) ds - \frac{d}{dx} x \int_x^L f(s) ds \\
 &= x f(x) - \int_x^L f(s) ds - x f(x) \\
 &= - \int_x^L f(s) ds \\
 \frac{d^2}{dx^2} M(x) &= - \frac{d}{dx} \int_x^L f(s) ds \\
 &= +f(x)
 \end{aligned}$$

Maintenant on peut différentier la relation  $EI y''(x) = M(x)$  deux fois pour obtenir

$$EI y^{(4)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} M(x) = f(x)$$

### 2.3.3 Flexion d'une poutre par son propre poids

Une poutre horizontale avec section  $A$  est cintrée par son propre poids. A  $x = 0$ , il est fixé, donc  $y(0) = y'(0) = 0$ . Il faut déterminer la forme de la poutre. A une densité de matière  $\rho$ , on a

$$f(x) = -g \rho A$$

### 2.3.4 Calculs à la main

D'abord on détermine à partir de la force donnée le moment correspondant  $M(x)$ .

$$M(x) = -g \rho A \int_x^L (s-x) ds = -g \rho A \left. \frac{1}{2} (s-x)^2 \right|_{s=x}^L = -g \rho A \frac{1}{2} (L-x)^2$$

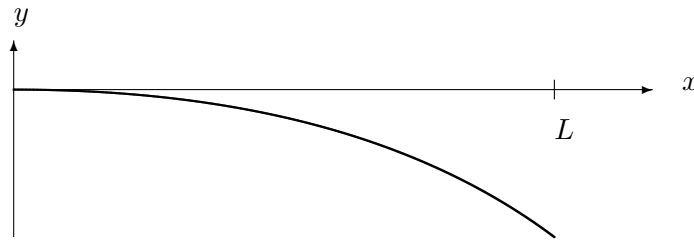


Figure 2.4: flexion d'une poutre fixée

On a donc

$$EI y''(x) = -g \rho A \frac{1}{2} (L - x)^2$$

Maintenant on peut intégrer cette relation deux fois par rapport à  $x$  pour construire de  $y''(x)$  la fonction cherchée  $y(x)$ . Pour ceci il faut utiliser les deux conditions  $y(0) = y'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} EI y'(x) &= EI \left( y'(0) + \int_0^x y''(s) ds \right) \\ &= -g \rho A \int_0^x \frac{1}{2} (L - s)^2 ds \\ &= g \rho A \frac{1}{6} (L - s)^3 \Big|_{s=0}^x \\ &= g \rho A \frac{1}{6} ((L - x)^3 - L^3) \\ EI y(x) &= EI \left( y(0) + \int_0^x y'(s) ds \right) \\ &= g \rho A \frac{1}{6} \int_0^x ((L - s)^3 - L^3) ds \\ &= g \rho A \left( \frac{-(L - s)^4}{24} - \frac{s L^3}{6} \right) \Big|_{s=0}^x \\ &= g \rho A \left( \frac{-(L - x)^4 + L^4}{24} - \frac{x L^3}{6} \right) \\ &= \frac{g \rho A}{24} (-(L - x)^4 + L^4 - 4 x L^3) \end{aligned}$$

Alors on a obtenu une formule pour  $y(x)$

$$\begin{aligned} y(L) &= -\frac{g \rho A}{8 EI} L^4 \\ y(0) &= \frac{g \rho A}{24 EI} (-(L - 0)^4 + L^4) = 0 \\ y'(0) &= \frac{g \rho A}{24 EI} (+4(L - 0)^3 + 0 - 4 L^3) = 0 \end{aligned}$$

### Mathematica, première version

Les calculs ci-dessus peuvent être exécutés par *Mathematica*. Comme cela, il ne faut que décider ce qu'il faut calculer, les calculs sont faits par *Mathematica*.

---

**Mathematica**

---

$$f[x_-] = -\rho g A$$

$$M[x_-] = \text{Integrate}[(s-x)f[s], \{s, x, L\}]$$

$$-(A g \rho)$$

$$\frac{-(A g L^2 \rho)}{2} + A g L \rho x - \frac{A g \rho x^2}{2}$$

**Mathematica**

$$y1[x_-] = 1/(EI) \text{ Integrate}[M[s], \{s, 0, x\}];$$

$$y[x_-] = \text{Integrate}[y1[s], \{s, 0, x\}] // \text{Simplify}$$

$$\frac{-(A g \rho x^2 (6 L^2 - 4 L x + x^2))}{24 EI}$$

**Mathematica**

$$y[L]$$

$$\frac{-(A g L^4 \rho)}{8 EI}$$

Par moyen des résultats ci-dessus on peut générer un graphique pour une situation de référence.

**Mathematica**

$$\text{Plot}[y[x]/., \{L \rightarrow 1, EI \rightarrow 1, A \rightarrow 1, g \rightarrow 1, \rho \rightarrow 1\}, \{x, 0, 1\}];$$

**Changements d'échelles**

Si la longueur  $L$  de la poutre est allongée par le facteur  $\alpha > 1$ , la déviation maximale est agrandie par le facteur  $\alpha^4$ . Un doublage de la longueur résulte donc en un agrandissement par un facteur 16 de la déviation.

Si on n'agrandit pas seulement la longueur  $L$ , mais aussi la largeur et la hauteur par le facteur  $\alpha$ , la section  $A$  et le moment d'inertie changent aussi. Selon la table ci-dessous, la déviation maximale va être agrandie „seulement“ par le facteur  $\alpha^2$ . Un doublage de la longueur va agrandir la déviation par un facteur 4.

$$L \longrightarrow \alpha L$$

$$A \longrightarrow \alpha^2 A$$

$$I \longrightarrow \alpha^4 I$$

$$y(L) = -\frac{g \rho A}{8 EI} L^4 \longrightarrow \frac{g \rho \alpha^2 A}{8 E \alpha^4 I} \alpha^4 L^4 = \alpha^2 y(L)$$

Les réflexions ci-dessus montrent pourquoi on peut très bien construire le modèle pour un immeuble-tour en styropore. Pour les vraies maisons, il faut utiliser des matériaux différents.

**Charges différentes, calculées par Mathematica**

Les calculs ci-dessus peuvent être rassemblé en une fonction dans *Mathematica*.

**Mathematica**

```

Remove[Auslenkung]
Auslenkung[x_, L_, last_] :=
  Module[{M, y1, s},
    M[xt_] = Integrate[(s - xt) last[s], {s, xt, L}];
    y1[xt_] = 1/(EI) Integrate[M[s], {s, 0, xt}];
    Simplify[Integrate[y1[s], {s, 0, x}]]]

```

L'exemple ci-dessus peut maintenant facilement être vérifié.

#### Mathematica

```

gewicht=Function[x, rho A g];
Auslenkung[x, L, gewicht]

```

$$\frac{A g \rho x^2 (6 L^2 - 4 L x + x^2)}{24 EI}$$

Comme on peut maintenant définir la fonction de charge de façon „quelconque“, on peut aussi examiner des charges qui sont 1 à un bout de la poutre et 0 à l'autre.

#### Mathematica

```

abnehmend=Function[x, 1 - x/L];
zunehmend=Function[x, x/L];
Auslenkung[L, L, abnehmend]
Auslenkung[L, L, zunehmend]

```

$$\frac{L^4}{30 EI}$$

$$\frac{11 L^4}{120 EI}$$

On pouvait s'y attendre que la poutre chargée plus au bout est cintrée beaucoup plus. Le calcul ci-dessus montre que le facteur monte à  $\frac{11}{4} = 2.75$ .

La procédure ci-dessus est capable de calculer d'autres charges.

#### Mathematica

```

exponentiel=Function[x, Exp[-x]];
Auslenkung[x, L, exponentiel]

```

$$\frac{-6 + \frac{6}{x} + 6x - \frac{3(1+L)x^2}{L} + \frac{x^3}{L}}{6 EI}$$

### 2.3.5 Poutre soutenues des deux côtés

Une poutre horizontale avec section  $A$  est cintrée par son propre poids. Elle est soutenue à  $x = 0$  et à  $x = L$ , c'est-à-dire  $y(0) = y(L) = 0$ . Il faut déterminer la forme de la poutre.

$$M(x) = -g \rho A \frac{1}{2} (L - x)^2 + (L - x) \frac{g \rho A L}{2}$$

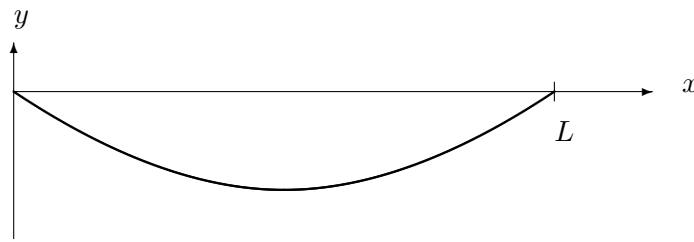


Figure 2.5: Flexion d'une poutre soutenue

En comparaison avec la poutre fixée, il y a un moment supplémentaire résultant de la force d'appui au bout droite. On obtient Deux conditions aux limites sont évidentes:  $y(0) = y(L) = 0$ . Les appuis aux deux bouts ne peuvent pas adopter de moment, et on obtient donc  $M(0) = M(L) = 0$ . Deux fois intégrer génère de  $M(x)$  une formule pour la déviation  $y(x)$ . La pente initiale d'abord inconnue  $y'(0)$  peut être déterminée par moyen de la condition  $y''(0) = 0$ .

**Mathematica**

```
Remove[Auslenkung, gewicht, m, rho, A]
Auslenkung[x_, L_, last_, kraft_] := Module[{moment, y1, y10, res, x1, x2, x3},
  moment[x1_] = Integrate[(s-x1) last[s], {s, x1, L}] + (L-x1) kraft;
  y1[x2_] = y10 + 1/(EI) Integrate[moment[s1], {s1, 0, x2}];
  res[x3_] = Simplify[Integrate[y1[s2], {s2, 0, x3}]];
  Simplify[res[x]/. Solve[res[L]==0, y10][[1]]]]
```

**Mathematica**

```
gewicht=Function[x, -g*m/L];
Auslenkung[L/2, L, gewicht, g*m/2]
.
-5 g L m
-----
384 EI
```

Le calcul suivant montre que le moment est décrit par une parabole avec les zéros  $x = 0$  et  $x = L$ . Le maximum est donc à  $x = \frac{L}{2}$ .

**Mathematica**

```
Simplify[D[Auslenkung[x, L, gewicht, g*m/2], {x, 2}]]
.
g m (L - x) x
-----
2 L
```

Cet exercice peut être compris comme **équation différentielle**. Ceci simplifie le code *Mathematica*.

**Mathematica**

```
ysol[x_]=y[x]/. DSolve[
  {EI D[y[x], {x, 4}]==-g*m/L, y[0]==0, y[L]==0, y'[0]==0, y'[L]==0},
  y[x], x]
ysol[L/2]
.
- (g L m x)2 + (g m x)3 - (g m x)4
-----
{ }
```

$$24 \text{ EI} \quad 12 \text{ EI} \quad 24 \text{ EI L}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ -5 \text{ g L m} \\ \{ \quad \quad \quad \} \\ 384 \text{ EI} \end{array}$$

## 2.4 Longueur de courbes

Donnée une courbe par le graphe d'une fonction plusieurs fois différentiable  $f$  avec

$$y(x) = f(x) \quad \text{avec} \quad a \leq x \leq b$$

et on essaye de déterminer la longueur de cette courbe. Pour ceci, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  par  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$  et relie les points  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  et  $(x_i, y_i)$  par des morceaux de droites de longueur  $\Delta l_i$  (interpolation linéaire par morceaux). Evidemment, on a

$$(\Delta l_i)^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

Par le théorème de Darboux on sait que

$$\Delta y_i = f'(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{pour un} \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

donc

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

Si les divisions  $\Delta x_i$  sont suffisamment petites, on obtient pour la longueur  $L$  de la courbe

$$L \approx \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

Cette considération nous emmène à définir la longueur d'une telle courbe par la formule

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

### • Problème 2–22:

Déterminer la longueur de l'arc de la courbe  $y = x^{3/2}$  de  $x = 0$  à  $x = 5$ .

### • Problème 2–23:

Etablir l'intégrale pour calculer la longueur du morceau de la parabole  $y = x^2$  entre  $x = -a$  et  $x = a$ .

Une courbe soit paramétrisée par le temps  $t$  avec les fonctions

$$(x, y) = (x(t), y(t)) \quad \text{avec} \quad a \leq t \leq b$$

et on essaie à calculer la longueur de cette courbe. Pour ceci nous subdivisons l'intervalle de temps  $[a, b]$  par  $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = b$  et relient les points  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  et  $(x_i, y_i)$  par des morceaux de droites de la longueur  $\Delta l_i$  (interpolation linéaire par morceaux). A cause de

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \approx \dot{x}(t_i) \Delta t_i \\ \Delta y_i &= y_i - y_{i-1} \approx \dot{y}(t_i) \Delta t_i \end{aligned}$$

on a

$$(\Delta l_i)^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 \approx (\dot{x}^2(t_i) + \dot{y}^2(t_i)) \cdot (\Delta t_i)^2$$

$$\Delta l_i \approx \sqrt{\dot{x}^2(t_i) + \dot{y}^2(t_i)} \Delta t_i$$

Si on en détermine la limite pour  $\Delta t_i \rightarrow 0$ , on obtient

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(t_i) + \dot{y}^2(t_i)} \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

• **Problème 2–24:**

Un cercle de rayon  $r$  peut être paramétrisé par

$$x(t) = r \cos t, \quad y(t) = r \sin t \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Pour cette paramétrisation, on a évidemment

$$\dot{x}(t) = -r \sin t, \quad \dot{y}(t) = r \cos t$$

et donc

$$\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r$$

La longueur de la courbe se détermine maintenant par

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

bestimmt werden.

• **Problème 2–25:**

Déterminer la longueur d'un arc de la cycloïde  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$ , avec  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

• **Problème 2–26:**

Déterminer la longueur de l'arc  $x = e^t \cos t$  et  $y = e^t \sin t$  de  $t = 0$  à  $t = 4$ .

• **Problème 2–27:**

Un câble dans le plan  $xy$  est attaché aux points  $(-3, H)$  et  $(3, H)$ . La hauteur du câble est donnée par la formule

$$y(x) = a \cosh \frac{x}{a}, \quad a = 0.5$$

(a) Trouver  $H$ .

(b) Trouver la longueur du câble.



## 2.5 Volume et surface de corps de révolution

### • Problème 2–28:

Par rotation de la région entre la courbe  $y = (x - 2)(x - 4)$  et l'axe des  $x$  autour de l'axe  $x = -5$ , un volume borné est généré. Calculer ce volume.

### • Problème 2–29:

Par rotation de la surface entre la courbe  $y = (x - 2)(x + 2)$  et l'axe des  $x$  par rapport à l'axe  $x = 5$  on obtient un volume. Calculer ce volume.

### • Problème 2–30:

Considérer la courbe  $y = \sin x$  pour  $0 < x < \pi$ .

- La courbe est tournée sur l'axe des  $x$ . Dériver une formule pour calculer la surface générée par la rotation. Donner l'intégrale définie résultante. La calculer ou bien par une fonction primitive (table) ou bien de façon numérique.
- La courbe est tournée sur l'axe des  $y$ . Dériver une formule pour calculer la surface générée par la rotation. Donner l'intégrale définie résultante. La calculer ou bien par une fonction primitive (table) ou bien de façon numérique.
- La courbe est tournée sur la droite  $y = 1$ . Dériver une formule pour calculer la surface générée par la rotation. Donner l'intégrale définie résultante. La calculer ou bien par une fonction primitive (table) ou bien de façon numérique.
- La surface entre la courbe et l'axe des  $x$  est tournée sur l'axe des  $x$ . Dériver une formule pour calculer le volume générée par la rotation. Donner l'intégrale définie résultante. La calculer ou bien par une fonction primitive (table) ou bien de façon numérique.

### • Problème 2–31:

Considérer la région entre l'axe des  $y$  et la courbe  $x = y^2 - 5y + 4$ .

- Trouver le centre de gravité de cette région.
- La région est tournée sur l'axe des  $x$ . Calculer le volume généré.
- La région est tournée sur l'axe des  $y$ . Calculer le volume généré.

### • Problème 2–32:

Considérer l'aire entre l'axe des  $x$  et la courbe  $y = e^{-x^2}$ . Examiner les valeurs de  $x$  tel que  $0 \leq x \leq R$ .

- On applique une rotation par rapport à l'axe des  $y$ . Calculer le volume de ce solide de rotation.
- Examiner la courbe  $y = e^{-x^2}$  pour  $0 \leq x \leq R$  et appliquer une rotation par rapport à l'axe des  $y$ . Trouver l'intégrale pour l'aire de cette surface de rotation. Ne pas calculer l'intégrale.

### • Problème 2–33:

Regarder un cylindre avec l'axe des  $z$  comme axe centrale, hauteur  $H = 20 \text{ cm}$  et rayon  $R = 10 \text{ cm}$ . Ce cylindre est rempli d'eau. A cause d'une rotation par rapport à l'axe centrale (vitesse angulaire  $\omega$ ) la surface de l'eau est donnée par la formule ci-dessous, où  $r$  est la distance de l'axe centrale. La vitesse angulaire du cylindre est telle que la surface touche le fond au centre du cylindre. Combien de l'eau (en  $\text{cm}^3$ ) se trouve dans le cylindre à ce moment?

$$h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Les calculs ci-dessus se simplifient souvent par la **première règle de Guldin** (souvent nommé le **premier théorème de Pappus**).

Le volume d'un corps de révolution est égal au produit de l'aire de la surface génératrice et le chemin du centre de gravité de la surface.

**Démonstration :** Nous ne considérons que le cas particulier de la rotation autour l'axe des  $x$  d'une surface donnée par les inégalités  $a \leq x \leq b$  et  $g(x) \leq y \leq f(x)$ . En ce cas, on a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x) dx$$

et

$$A y_s = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) - g^2(x) dx$$

Le chemin du centre de gravité lors de la rotation autour de l'axe des  $x$  est donné par  $2\pi y_s$ , et c'est donc facile à vérifier que

$$V = A 2\pi y_s$$

□

• **Problème 2–34:**

Déterminer le volume du corps généré par la rotation du cercle de rayon  $r$  avec le centre  $(0, R)$  autour de l'axe des  $x$ . Utiliser  $0 < r < R$ .

• **Problème 2–35:**

Déterminer la position du centre de gravité du demi-cercle  $x^2 + y^2 \leq R^2$  et  $y > 0$  par la première règle de Guldin.

La surface de corps de révolution se détermine quelquefois par la **deuxième règle de Guldin** (souvent nommée **deuxième théorème de Pappus**)

La surface d'un corps de révolution est égal au produit de la longueur de la courbe génératrice et du chemin du centre de gravité de la courbe.

**Démonstration :** Nous ne considérons que le cas particulier de la rotation d'une courbe donnée par  $y = f(x)$  pour  $a \leq x \leq b$  autour de l'axe des  $x$ . En ce cas, on a

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

La coordonnée  $y$  du centre de gravité de la courbe est déterminé par l'équation

$$L y_s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

et la surface  $O$  est donnée par

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Donc on a évidemment

$$O = L 2\pi y_s$$

□

• **Problème 2–36:**

Déterminer la surface du corps généré par la rotation de la courbe de cercle de rayon  $r$  avec centre  $(0, R)$  autour de l'axe des  $x$ . Utiliser  $0 < r < R$ .

• **Problème 2–37:**

Déterminer la position du centre de gravité de la courbe de demi-cercle  $x^2 + y^2 = R$  et  $y > 0$  par moyen de la deuxième règle de Guldin.

• **Problème 2–38:**

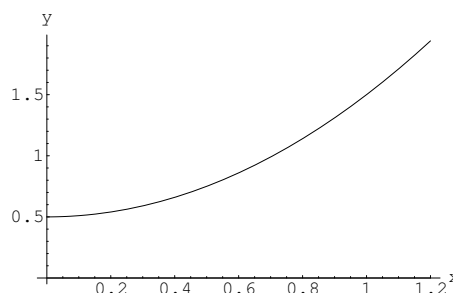
Considérer la région entre les courbes  $y(x) = \sin x$  et  $y = 1/2$  pour  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ .

- Déterminer les coordonnées exactes  $(x_s, y_s)$  du centre de gravité de la région.
- La région est tournée sur la droite  $y = 1/2$ . Déterminer le volume du corps de révolution.
- Etablir une intégrale pour la surface  $O$  du corps de révolution ci-dessus.

• **Problème 2–39:**

Soit  $a > 0$  un nombre fix. Examiner la courbe  $y = \frac{1}{2} + x^2$  pour  $0 \leq x \leq a$ .

- Déterminer l'intégral pour la longueur  $L(a)$  de cette courbe. Pas besoin de calculer la valeur de l'intégral.
- Trouver une approximation de l'intégral ci-dessus à l'aide de la règle de Simpson et les points de support  $0, \frac{a}{2}$  et  $a$ .
- Trouver la valeur approximative pour  $a = 1$  à l'aide du résultat précédent.
- On applique une rotation par rapport à l'axe des  $y$  à la courbe originale. Déterminer la surface de révolution d'une façon exacte.



## 2.6 Travail

• **Problème 2–40:**

Un rouleau se trouve sur une hauteur de 40 m. Une masse de 30 kg est attachée à une corde de 50 m. La masse spécifique de la corde est  $2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ . Trouver le travail nécessaire pour lever la masse à une hauteur de 25 m.

• **Problème 2–41:**

Si un bâton (section  $A$ , longueur  $L$ ) consistante d'un matériel connu (module d'élasticité  $E$ ) est allongé par la longueur  $\Delta L$ , il est allongé par une force  $F$  avec

$$F = E A \frac{\Delta L}{L}$$

Trouver une formule pour déterminer le travail nécessaire pour allonger le bâton de la longueur de repos  $L$  à la longueur  $L + x$ . Justifier soigneusement la manière de dériver la formule. Au cours du calcul vous pouvez utiliser  $|x| \ll L$  (si nécessaire).

Physique: pour une force constane, on a travail = force · chemin.

## 2.7 Courant, voltage, puissance

### • Problème 2–42:

Pour un signal de courant alternatif de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

le **voltage effectif**  $U_{eff}$  est défini par la relation

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt$$

Vérifier qu'on a pour le voltage de forme de sinus ci-dessus

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$$

### • Problème 2–43:

Pour un circuit simple de courant alternatif on a

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad U(t) = U_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Déterminer la puissance moyenne pour des grands intervalle de temps.

### • Problème 2–44:

Un courant

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

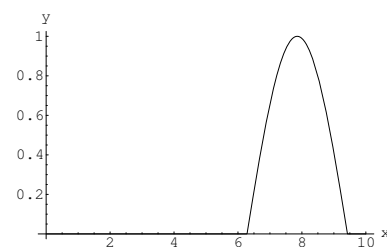
coule dans une capacité  $C$ . Au temps  $t = 0$ , la capacité est sans charge:  $Q(0) = 0$ . Trouver la charge  $Q(t)$  comme fonction du temps  $t$  et déterminer la charge pour des très grands temps.

## 2.8 Problèmes mixtes

### • Problème 2–45:

Examiner la section entre la courbe  $y = \sin x$  et l'axe des  $x$  pour  $2\pi \leq x \leq 3\pi$ .

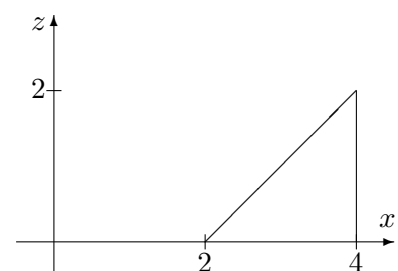
- Trouver les coordonnées  $(x_s, y_s)$  du centre de gravité.
- On applique une rotation autour l'axe des  $y$  à cette section. Trouver le volume de cet solide de rotation.



### • Problème 2–46:

On applique une rotation par rapport à l'axe des  $z$  au triangle à droite. Donc un solide en  $\mathbb{R}^3$  est généré. Rendre les intégrales nécessaire pour répondre aux questions ci-dessous et calculer les valeurs.

- Calculer le volume  $V$ .
- Le matériel a une densité  $\rho$  et la vitesse angulaire de la rotation par rapport à l'axe des  $z$  est donnée par  $\omega$ . Calculer l'énergie de rotation  $E$ .



• **Problème 2–47:**

Examiner une demi-sphère de rayon  $R$ , plus précisément  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  et  $z \geq 0$ . Le volume d'une sphère pleine est  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

- (a) Déterminer les composantes  $x$  et  $y$  du centre de gravité (sans calcul).
- (b) Etablir une intégrale pour déterminer la composante  $z$  du centre de gravité (dénnotée  $z_s$ ).
- (c) Calculer  $z_s$ .

• **Problème 2–48:**

En tournant une parabole  $z = ax^2$  sur l'axe des  $z$ , on obtient une surface de révolution  $A$  et un volume de révolution  $V$  avec une hauteur  $H$  et un rayon  $R$ . Ici,  $H$  et  $R$  sont donnés, la constante  $a$  est à déterminer.

- (a) Etablir une intégrale pour déterminer le volume de révolution  $V$  généré.
- (b) On a pour ce volume

$$\text{volume} = \frac{(\text{aire de base}) \cdot (\text{hauteur})}{c}$$

Trouver  $c$ .

- (c) Etablir une intégrale pour déterminer la surface de révolution  $A$  générée. Il ne faut „que“ déterminer la partie courbée de la surface.
- (d) Calculer  $A$  à l'aide d'une table d'intégrales. Ne **pas** simplifier le résultat.

• **Problème 2–49:**

Une voiture roule pendant une heure ( $0 < t < 1$ ) à une vitesse de  $v = 200t(1-t)$  (en kilomètres par heure). La consommation d'essence  $f$  (en litres par kilomètre) dépend de la vitesse  $v$  par la formule  $f = v^2 10^{-4}$ . Trouver

- (a) la distance parcourue.
- (b) la consommation totale d'essence.

• **Problème 2–50:**

Les intégrales suivantes sont très importantes pour déterminer des **coefficients Fourier**. Vérifier les formules.

- (a) Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt = 0$$

- (b) Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

- (c) Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

• **Problème 2–51:**

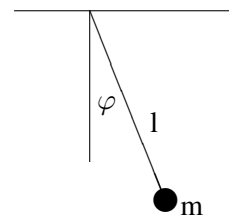
Le profil de vitesse dans un ruisseau de largeur  $b = 10$  m et de profondeur  $h = 1$  m a la forme d'une parabole (vitesse comme fonction de la distance du bord). Supposer que la vitesse ne dépend pas de la profondeur. La vitesse maximale soit  $v_{max} = 1 \frac{m}{s}$  et l'eau aux bords du ruisseau soit en repos. Déterminer le flux  $F$  dans ce ruisseau, c'est-à-dire le volume d'eau coulante à travers par seconde.

• **Problème 2–52:**

**durée d'oscillation d'une pendule**

La pendule esquissée de longueur  $l$  et de masse  $m$  oscille de façon quasi-harmonique pour des angles  $\varphi$  petits, et on peut calculer la durée d'oscillation  $T$  à partir de l'équation approximative

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Si  $\varphi$  est plus grand, la formule pour la période ci-dessus n'est plus valable. Il faut maintenant trouver la période pour un angle maximal  $\varphi_0$ . On peut procéder de la façon suivante:

1. Déterminer la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  comme fonction de  $\varphi$  et  $\varphi_0$  à l'aide de la loi de conservation de l'énergie.
2. Déterminer la durée  $\Delta T$  nécessitée par la pendule pour parvenir de  $\varphi$  à  $\varphi + \Delta \varphi$ .
3. Obtenir une formule d'intégrales par des sommes et des limites.

• **Problème 2–53:**

Un fil de fer est tendu dans un plan le long de la fonction

$$y = f(x) \quad \text{avec} \quad a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad f'(x) < 0, \quad f(a) = 0$$

Une petite boule glisse sans frottement le long du fil de fer du point  $(a, f(a))$  au point  $(b, f(b))$ . Elle part avec la vitesse 0. En raison de la conservation de l'énergie, la vitesse peut être déterminée à chaque point. Etablir l'intégrale pour déterminer la durée du vol entier.

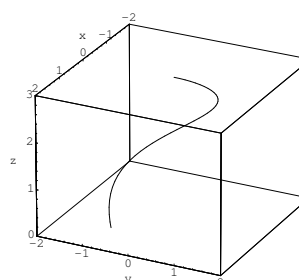
• **Problème 2–54:**

Une boule roule sur la courbe donnée par la paramétrisation de la courbe donnée ci-dessous. Le paramètre  $\tau$  n'est pas le temps physique.

- (a) Donner un intégral pour la longueur  $L$  de cette courbe et puis trouver  $L$  à l'aide de la calculatrice.
- (b) La vitesse (en temps réel  $t$ )  $v = \|\vec{v}\|$  est déterminée par  $\frac{1}{2} v^2 = g \cdot (4 - z)$ . Trouver un intégral pour le temps de voyage total  $T$  du ballon sur cette courbe. Utiliser  $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \tau^2 \\ \sin(3\tau) \\ 3 - \tau^2 \end{pmatrix}$$

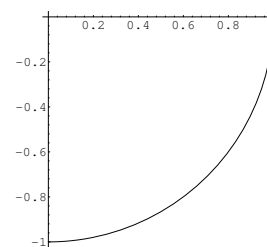
avec  $0 \leq \tau \leq 3$ .



• **Problème 2–55:**

Un quart d'un cercle de rayon  $R$  dans un plan est donné par la paramétrisation  $x(\theta) = R \cos \theta$  et  $y(\theta) = -R \sin \theta$  pour  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Un point de masse glisse en bas sur cette courbe. Conservation de l'énergie donne que la vitesse est déterminée par  $v^2 = -2gy$ .

- (a) Calculer la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  comme fonction de l'angle  $\theta$ .
- (b) Trouver l'intégrale pour le temps de vol sur ce quart d'un cercle avec  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Ne calculer pas l'intégrale.



• **Problème 2–56:**

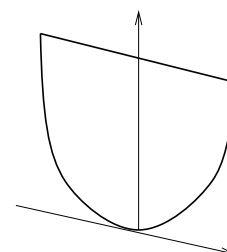
La force  $F$  sur une surface  $A$  peut être exprimée par la pression  $p$  selon la formule suivante

$$\text{Force} = \text{surface} \cdot \text{pression} \quad \text{où} \quad F = A \cdot p.$$

La pression dans un liquide est donnée par

$$p = \rho gh,$$

où  $\rho$  est la densité et  $h$  la profondeur au-dessous de la surface du liquide. Une surface verticale parabolique ( $y = x^2$ ) est mise dans le liquide à une profondeur de  $2m$ . Chercher une intégrale qui calcule la force sur cette surface par le liquide. On ne doit pas calculer la valeur numérique.



• **Problème 2–57:**

Le jet d'eau de Genève a une hauteur de 137 mètres. La pompe jette 500 litres d'eau par seconde en l'air. La vitesse  $v$  de l'eau est donnée par  $v = \sqrt{2gh}$ , où  $h$  est la distance du point le plus haut. Calculer avec  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

- (a) Combien d'eau y a-t-il au total dans le jet?
- (b) Combien d'eau y a-t-il, dans le jet, au-dessus de 100 mètres?
- (c) Combien d'eau y a-t-il, dans le jet, au-dessous de 37 mètres?

Tuyau: Si un point bouge sur une droite du point  $a$  au point  $b$  avec une vitesse  $v(x)$ , on calcule le temps nécessaire par la formule

$$T = \int_a^b \frac{1}{v(x)} dx$$

• **Problème 2–58:**

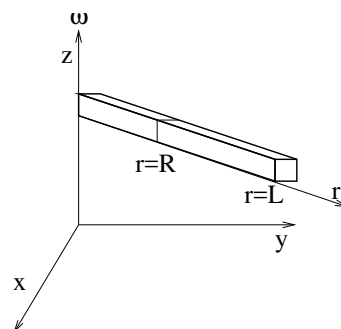
Un tonneau rond de hauteur  $2h$  a au milieu un rayon de  $a$  et aux bords un rayon de  $b$ . La couverture peut être approximée assez bien par une parabole tournée sur l'axe. En dériver une formule approximative pour le volume du tonneau.

• **Problème 2–59:**

Une poutre de longueur  $L$  et de section  $A$  est tournée autour l'axe des  $z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  comme indiqué dans l'esquisse à côté. La poutre est fixée sur l'axe des  $z$  et est toujours parallèle au plan  $xy$ . La masse spécifique  $\rho$  est donnée.

Physique: Si un point de masse  $m$  à une distance  $r$  est tournée sur une axe avec vitesse angulaire  $\omega$ , on a une force centrifuge

$$F = m r \omega^2$$

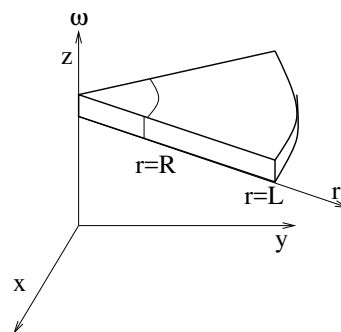


- Déterminer l'énergie de rotation contenue dans ce système à l'aide d'une intégrale.
- Une force  $F(R)$  agit sur une section à la distance  $R$  de l'axe des  $z$  en raison de la masse tournante plus loin. Déterminer  $F(R)$  par une intégrale adéquate de  $R$  à  $L$ .

• **Problème 2–60:**

Un segment d'un disque de rayon  $L$ , épaisseur  $h$  et angle  $\alpha$  (voir figure à droite) tourne avec une vitesse angulaire de  $\omega$  par rapport à l'axe des  $z$ . Le disque est attaché à l'axe des  $z$  et est parallèle au plan des  $xy$ . La masse spécifique  $\rho$  est connue. Physique: la rotation d'un point de masse  $m$  avec vitesse angulaire  $\omega$  demande une force centrifuge de

$$F = m r \omega^2$$



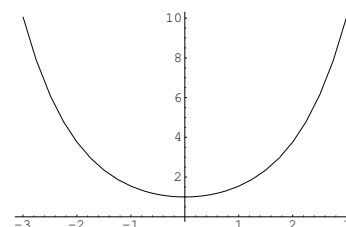
- Trouver l'énergie de rotation dans ce système à l'aide d'une intégrale.
- Sur la surface avec une distance  $R$  de l'axe des  $z$  on trouve une force  $F(R)$  à cause de la masse à l'extérieur. Calculer cette force à l'aide d'une intégrale par rapport à  $r$  avec  $R \leq r \leq L$ .
- Calculer la tension  $\sigma$  (unité:  $\frac{N}{m^2}$ ) lelong de la surface avec une distance  $z$ .

• **Problème 2–61:**

Une boule glisse sans frottement le long de fil de fer de la forme

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax)$$

Elle est lâchée à  $x = 3$  et  $y = \frac{\cosh(3a)}{a}$ .



- Quel chemin est parcouru par la boule jusqu'au point le plus bas?
- Etablir une intégrale pour déterminer la période  $T$  de ce mouvement. Il ne faut **pas** calculer cette intégrale.

Tuyaux pour la partie (b):

- Déterminer la vitesse  $v(x)$  comme fonction de  $x$  (conservation de l'énergie)
- Chercher une relation entre  $v_x$  (composante horizontale) et  $v(x)$ .
- Ecrire  $v_x$  comme fonction de  $x$ .



• **Problème 2-62:**

Dans une artère de rayon  $R$ , le sang coule à une vitesse de  $v = c(R^2 - r^2)$ ,  $r$  est la distance du centre de l'artère et une constante  $c$  est donnée.

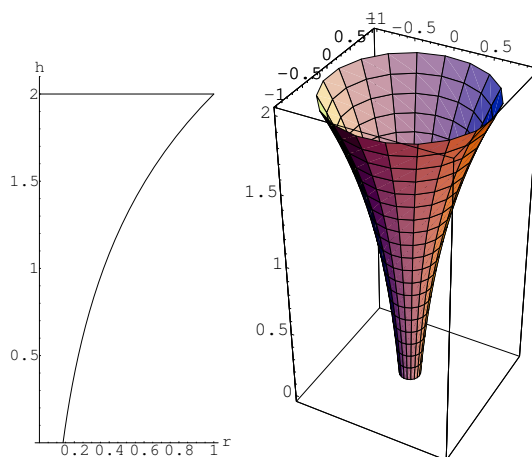
- Combien de sang (par unité de temps) coule par l'anneau de rayons entre  $r$  et  $r + \Delta r$ ? Utiliser le fait que  $\Delta r$  est très petit.
- Trouver l'intégrale pour calculer le flux total dans l'artère, en fonction de  $R$  et  $c$ . Calculer cette intégrale.
- À un moment donné, on a  $R = 0.03 \text{ cm}$  et suite à l'absorption de deux aspirines le rayon  $R$  augmente à la vitesse de  $1.8 \cdot 10^{-4} \text{ cm/min}$ . Trouver le taux de croissance du flux total dans l'artère.

• **Problème 2-63:**

La fonction ci-dessus exprime le rayon  $r$  d'un solide avec des sections circulaires en fonction de la hauteur  $h$ . Lorsque la section entre la courbe et l'axe des  $h$  fait des révolutions autour l'axe vertical, on obtient un solide conique. Ce solide est accroché en haut. Le graphique montre la surface extérieure.

$$r(h) = e^{h-2} \quad \text{pour } 0 \leq h \leq 2$$

- Trouver la masse totale  $M$ . La densité  $\rho$  est connue.
- Donner une intégrale pour calculer la force de gravitation  $F(H)$ , créée par la section de la cône au-dessous de la hauteur  $H$ .
- Trouver la tension  $\tau$  (force par aire) dans une section à une hauteur de  $h = H$ .



• **Problème 2-64:**

La section d'une poutre consiste de deux cercles de rayon  $R$  à une distance de  $D$ . Les cercles sont connectés par une structure mince.

- Trouver le moment quadratique par rapport à l'axe de connexion entre les deux centres des cercles. L'axe passe par le centre de gravité.
- Trouver le moment quadratique par rapport à l'axe orthogonal à l'axe de connexion entre les deux centres des cercles. L'axe passe par le centre de gravité.

Utiliser

$$\int_0^1 s^2 \sqrt{1-s^2} ds = \frac{\pi}{16}$$

## 2.9 Solutions de quelques problèmes

**Solution pour problème 2-1 :** La courbe coupe l'axe des  $x$  pour  $x = 0$  et  $x = 4$ . Quand on utilise un découpage vertical, ces valeurs deviennent les bornes d'intégration. Pour le rectangle d'approximation on obtient une aire de  $(4x_k - x_k^2) \Delta x_k$  et donc

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (4x_k - x_k^2) \Delta x_k = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left( 2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

Pour un découpage horizontal on doit résoudre  $y = 4x - x^2$  pour  $x$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - y}$$

et on arrive à

$$A = \int_0^4 \left(2 + \sqrt{4 - y}\right) - \left(2 - \sqrt{4 - y}\right) dy = \int_0^4 2\sqrt{4 - y} dy = \frac{-4}{3} (4 - y)^{3/2} \Big|_{y=0}^4 = \frac{32}{3}$$

**Solution pour problème 2-2 :** Regarder l'équation

$$y^2 = 4x = (2x - 4)^2$$

pour trouver que la droite et la parabole coupe aux points  $(1, -2)$  et  $(4, 4)$ .

(a) Découpage horizontal

Utiliser les deux fonctions  $x = y^2/4$  et  $x = 2 + y/2$  pour arriver à

$$A = \int_{-2}^4 \left(2 + y/2\right) - (y^2/4) dy = \left(2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right) \Big|_{y=-2}^4 = 9$$

(b) Découpage vertical

Couper la surface en deux sections  $0 \leq x \leq 1$  et  $1 \leq x \leq 4$  pour arriver à

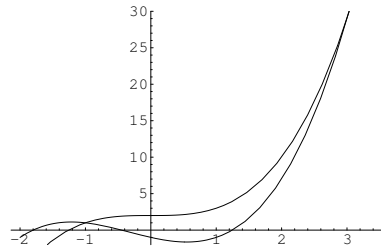
$$A = \int_0^1 2\sqrt{4x} dx + \int_1^4 \sqrt{4x} - (2x - 4) dx = \dots = 9$$

**Solution pour problème 2-3 :** Les deux points d'intersections sont  $(0, 0)$  et  $(4, 8)$  et il est clair qu'on utilise un découpage vertical.

$$A = \int_0^4 (6x - x^2) - (x^2 - 2x) dx = \int_0^4 8x - 2x^2 dx = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3}$$

**Solution pour problème 2-4 :** Die Schnittpunkte der Kurven sind bestimmt durch die Gleichung  $f(x) = g(x)$ . Die Lösungen sind gegeben durch  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0$ , d.h. die Schnittpunkte sind bei  $a = -1$  und  $b = 3$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 f(x) - g(x) dx \\ &= \int_{-1}^3 -x^2 + 2x + 3 dx \\ &= \left(\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right) \Big|_{x=-1}^3 \\ &= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



**Solution pour problème 2-5 :**

$$c = f(\eta) = 2\eta - 3\eta^2 = c$$

$$\int_0^\eta y(x) - c dx = 0$$

$$\int_0^\eta 2x - 3x^2 - c dx = \left(x^2 - x^3 - cx\right) \Big|_0^\eta = \eta^2 - \eta^3 - c\eta = \eta(\eta - \eta^2 - c) = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &= \eta - \eta^2 - c = \eta - \eta^2 - f(\eta) = \eta - \eta^2 - 2\eta + 3\eta^2 \\
2\eta^2 - \eta &= \eta(2\eta - 1) = 0 \iff \eta = 0 \quad \text{oder/ou} \quad \eta = 1/2 \\
c &= f(2) = \frac{2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

**Solution pour problème 2-6 :** Die Fläche des Rechtecks  $A(x)$  maximal muss maximal sein. Hierbei ist  $0 < x < 2$  der Fusspunkt der rechten Kante des Rechtecks. Es gilt.

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3 \\
\frac{d}{dx} A(x) &= 8 - 6x^2 = 0
\end{aligned}$$

Somit sind die Extrema bei  $\pm\sqrt{\frac{8}{6}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1.1547$ . Wegen  $\frac{d^2}{dx^2} A(x) = -12x < 0$  liegt ein Maximum vor.

- (a) Die Fusspunkte sind bei  $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$  zu wählen.
- (b) Die Fläche zwischen Parabel und Rechteck kann bestimmt werden, indem  $A(x)$  von der Fläche unter der Parabel subtrahiert wird.

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6.158 \\
I &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_{x=-2}^2 \\
&= 2 \left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10.667 \\
\text{Fläche} &= I - A = \frac{32}{3} - \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32(\sqrt{3} - 1)}{3\sqrt{3}} \approx 4.508
\end{aligned}$$

**Solution pour problème 2-7 :** Die Fläche unter der Parabel ist gegeben durch

$$F = \int_0^2 (2x - x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Der Schnittpunkt von Parabel und Gerade ist

$$2x - x^2 = ax \implies x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2 - a$$

Die Fläche zwischen Parabel und Gerade muss gleich der halben Fläche unter der Parabel sein.

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_0^{x_2} (2x - x^2 - ax) dx = \int_0^{x_2} (2-a)x - x^2 dx \\
&= \frac{2-a}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x_2} = \frac{2-a}{2} x_2^2 - \frac{x_2^3}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) (2-a)^3 = \frac{(2-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

Bedingung aufstellen und lösen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} F &= F_2 \\
\frac{2}{3} &= \frac{(2-a)^3}{6} \\
4 &= (2-a)^3 \\
2-a &= 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} \\
a &= 2 - \sqrt[3]{4} \approx 0.4126
\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt liegt bei  $x = 2 - a$ .

**Solution pour problème 2-8 :**

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} c^2 \theta^2 d\theta = \frac{c^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{c^2 4\pi^3}{3}$$

**Solution pour problème 2-9 :** Diese Übung wurde dem Buch [JordSmit94, p. 248] entnommen: Integration in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (3 \sin(2\theta))^2 d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi} \sin^2(s) \frac{1}{2} ds = \frac{9}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8} (\approx 3.53) \end{aligned}$$

Man kann auch die Identität  $\sin(2\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos(4\theta))$  einsetzen oder eine Integraltabelle verwenden.

**Solution pour problème 2-10 :** Achtung: durch den Parameterbereich wird die Fläche doppelt überstrichen. Somit ist nur das Integral von 0 bis zu  $\pi$  zu berechnen.

$$A = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2(3\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$$

**Solution pour problème 2-11 :**

(a) Schneiden in vertikaler Richtung.

Die untere Grenze der Fläche ist  $y = 0$ , und die obere ist  $y = \frac{b}{a} x$ . Somit ist

$$A = \int_0^a \frac{b}{a} x - 0 dx = \frac{b}{2a} x^2 \Big|_0^a = \frac{ab}{2}$$

und

$$A x_s = \int_0^a x \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{3a} x^3 \Big|_0^a = \frac{a^2 b}{3}$$

Somit gilt

$$x_s = \frac{a^2 b/3}{ab/2} = \frac{2a}{3}$$

Die  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes ist gegeben durch

$$A y_s = \frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{b}{a} x \right)^2 dx = \frac{b^2}{6a^2} x^3 \Big|_0^a = \frac{ab^2}{6}$$

und somit

$$y_s = \frac{ab^2/6}{ab/2} = \frac{b}{3}$$

(b) Schneiden in horizontaler Richtung.

Die linke Grenze der Fläche ist  $x = \frac{a}{b} y$ , und die rechte ist  $y = a$ . Somit ist

$$A = \int_0^b a - \frac{a}{b} y dx = \left( ay - \frac{a}{2b} y^2 \right) \Big|_0^b = ab - \frac{a}{2b} b^2 = \frac{ab}{2}$$

und

$$A y_s = \int_0^b y \left( a - \frac{a}{b} y \right) dy = \left( \frac{a}{2} y^2 - \frac{a}{3b} y^3 \right) \Big|_0^b = \frac{a}{2} b^2 - \frac{a}{3b} b^3 = \frac{ab^2}{6}$$

Somit gilt

$$y_s = \frac{a b^2/6}{a b/2} = \frac{b}{3}$$

Die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes ist gegeben durch

$$A x_s = \frac{1}{2} \int_0^b a^2 - \left(\frac{a}{b} y\right)^2 dy = \frac{a^2}{2} \int_0^b 1 - \frac{y^2}{b^2} dy = \frac{a^2}{2} \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_0^b = \frac{a^2 b}{3}$$

und somit

$$x_s = \frac{a b^2/3}{a b/2} = \frac{2b}{3}$$

**Solution pour problème 2-12 :** Der Viertelkreis mit Radius  $r$  sei im ersten Quadranten angeordnet. Die Fläche ist gegeben durch

$$A = \frac{\pi}{4} r^2$$

und es gilt

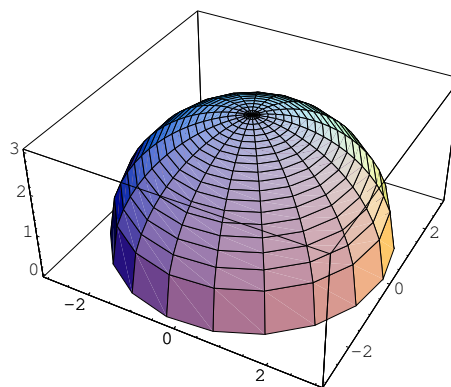
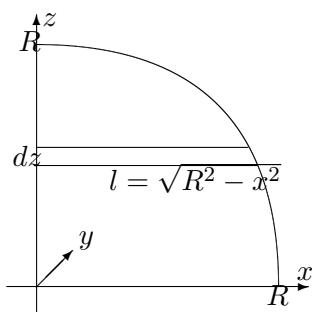
$$A x_s = \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{-1}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^r = \frac{1}{3} r^3$$

und somit

$$x_s = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$$

Aus Symmetriegründen ist offensichtlich, dass  $y_s = x_s$ .

**Solution pour problème 2-13 :** Die Halbkugel entsteht durch Rotation eines Viertelkreises um die  $z$ -Achse.



Integriere Keisscheiben auf Höhe  $z$  mit Radius  $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ .

(a)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \pi r^2(z) dz = \int_0^R \pi (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3\right) \Big|_{z=0}^R = \pi \left(R^2 R - \frac{1}{3} R^3\right) = \pi \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_s = y_s &= 0 \\ \frac{2}{3} \pi R^3 z_s &= \int_0^R z \pi r^2(z) dz = \int_0^R \pi z (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4\right) \Big|_{z=0}^R = \pi \left(\frac{1}{2} R^2 R^2 - \frac{1}{4} R^4\right) = \pi \frac{1}{4} R^4 \\ z_s &= \frac{\pi \frac{1}{4} R^4}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–14 :** Die Masse der Scheibe ist  $M = \pi \rho R^2$ . Wir zerlegen die Kreisscheibe in Ringe der Breite  $\Delta r_i$  und Radius  $r_i$ , da entlang solcher Ringe der Abstand von der Drehachse konstant ist. Die Masse eines solchen Ringes ist gegeben durch  $m_i = 2\pi \rho r_i \Delta r_i$ , und somit kann das Massenträgheitsmoment bestimmt werden durch

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta r \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n r_i^2 2\pi r_i \Delta r_i = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho \frac{1}{4} R^4 = M \frac{R^2}{2}$$

Dreht sich die Scheibe mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so ist die Energie gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{M R^2}{4} \omega^2$$

**Solution pour problème 2–15 :** Wir wählen die  $x$ -Achse als Rotationsachse. Die Masse der Scheibe ist  $M = \pi \rho R^2$ . Wir zerlegen die Kreisscheibe in Streifen der Höhe  $\Delta y_i$  parallel zur  $x$ -Achse, da entlang solcher Streifen der Abstand von der Drehachse konstant ist. Die Masse eines solchen Streifens ist gegeben durch  $m_i = 2 \rho \sqrt{R^2 - y_i^2} \Delta y_i$ , und somit kann das Massenträgheitsmoment bestimmt werden durch

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n y_i^2 2 \rho \sqrt{R^2 - y_i^2} \Delta y_i = 2 \rho \int_{-R}^R y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Aus einer Integraltafel lesen wir ab, dass

$$\int_0^R y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = \left( -\frac{y}{4} \sqrt{(R^2 - y^2)^3} + \frac{R^2}{8} \left( y \sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin \frac{y}{R} \right) \right) \Big|_{y=0}^R = \frac{\pi R^4}{16}$$

Mittels *Mathematica* erhält man das selbe Resultat

<b>Mathematica</b>
<pre>Integrate[y^2 Sqrt[R^2-y^2],{y,0,R}]</pre>
$\frac{\pi R^4}{16}$

Somit gilt

$$J = \rho \frac{\pi R^4}{4} = M \frac{R^2}{4}$$

Dreht sich die Scheibe mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so ist die Energie gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{M R^2}{8} \omega^2$$

**Solution pour problème 2–16 :** Die Energie der linearen Bewegung ist gegeben durch

$$E_{lin} = \frac{1}{2} M v^2$$

wobei  $M = 1000 \text{ kg}$  und  $v = 80 \text{ km/h} = 22.2 \text{ m/s}$ . Da die Räder rollen, muss die Beziehung  $\omega r = v$  richtig sein und somit  $\omega = v/r$ . Die Rotationsenergie der vier Räder kann bestimmt werden durch die Formel

$$E_{rot} = 4 \frac{1}{2} J \omega^2 = 4 \frac{1}{2} \frac{m r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = m v^2$$

wobei  $r = 0.3 \text{ m}$  und  $m = 8 \text{ kg}$ . Somit gilt

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{lin}}} = \frac{2m}{M}$$

**Solution pour problème 2–17 :**

$$J = \int_{R-r}^{R+r} x^2 2\sqrt{r^2 - (x-R)^2} 2\pi x \, dx$$

**Mathematica**

```
Integrate[4 Pi x^3 Sqrt[r^2 - (x-R)^2], {x, R-r, R+r}]
.
```

$$\frac{\pi^2 r^2 R (3 r^2 + 4 R^2)}{2}$$

**Solution pour problème 2–18 :**

(a) Rotation um die  $y$ -Achse.

Die Fläche wird in vertikale Streifen zerschnitten, und wir erhalten

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (x_i^2 (f(x_i) - g(x_i)) \Delta x_i) = \int_a^b x^2 (f(x) - g(x)) \, dx$$

(b) Rotation um die  $x$ -Achse.

Hierzu müssen wir zuerst das Trägheitsmoment einer Säule der Breite  $\Delta x_i$  mit  $g(x_i) \leq y \leq f(x_i)$  bestimmen.

$$\Delta J_i = \Delta x_i \int_{g(x_i)}^{f(x_i)} y^2 \, dy = \frac{1}{3} (f^3(x_i) - g^3(x_i)) \Delta x_i$$

und somit erhalten wir

$$J = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3} (f^3(x_i) - g^3(x_i)) \Delta x_i \right) = \frac{1}{3} \int_a^b (f^3(x) - g^3(x)) \, dx$$

**Solution pour problème 2–19 :**

(a) Mit dem Satz von Steiner

Das Moment zweiter Ordnung eines Kreises mit Radius  $r$  bezüglich einer Achse in der Kreisebene durch den Schwerpunkt haben wir in Aufgabe 2–15 bestimmt als

$$J_S = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$J_y = J_S + Mx_s^2 = \frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 R^2$$

(b) Direkt mit einem Integral.

$$J_y = \int_{R-r}^{R+r} x^2 2\sqrt{r^2 - (x-R)^2} \, dx$$

Eine kurze Rechnung mit *Mathematica* bestätigt das obige Ergebnis.

**Mathematica**

$$\frac{\text{Integrate}[x^2 \sqrt{r^2 - (x-R)^2}, \{x, R-r, R+r\}]}{4}$$

**Solution pour problème 2–20 :** Zuerst bestimmen wir das Massenträgheitsmoment  $J$  der Erde. Durch Zerlegen der Erde in Zylinderwände mit Radius  $x$ , Höhe  $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$  erhalten wir das Massenträgheitsmoment

$$\begin{aligned} J &= \int_0^R x^2 \rho \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} 2\pi x \, dx \\ &= 4\pi\rho \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\ &= 4\pi\rho \left( -\frac{R^2 \sqrt{R^2 - x^2}^3}{3} + \frac{\sqrt{R^2 - x^2}^5}{5} \right) \Big|_{x=0}^R \\ &= 4\pi\rho \left( \frac{R^2 R^3}{3} - \frac{R^5}{5} \right) \\ &= \frac{\rho 8\pi}{15} R^5 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3} \frac{2}{5} R^2 \\ &= M \frac{2}{5} R^2 \end{aligned}$$

(a) Wegen  $T = 24 \text{ Std} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ sec} = 86400 \text{ sec}$  und

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

gilt

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{4}{5} M R^2 \frac{\pi^2}{T^2} \approx 2.6 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

(b) Die obige Formel kann nach der Periode  $T$  aufgelöst werden, und wir erhalten

$$T^2 = \frac{4}{5} M R^2 \frac{\pi^2}{E}$$

Somit können wir  $T$  als Funktion von  $E$  auffassen und die obige Beziehung nach  $E$  ableiten mit dem Resultat

$$2 T \frac{dT}{dE} = -\frac{4}{5} M R^2 \frac{\pi^2}{E^2}$$

oder auch

$$\frac{dT}{dE} = -\frac{2}{5} M R^2 \frac{\pi^2}{T E^2}$$

Nun wissen wir, dass die Energie um den „kleinen“ Betrag  $\Delta E = -3 \cdot 10^{20} \text{ J}$  pro Jahr ändert, und durch eine lineare Approximation erhalten wir

$$\Delta T \approx \frac{dT}{dE} \Delta E$$

und somit

$$\Delta T \approx -\frac{2}{5} M R^2 \frac{\pi^2}{T E^2} \Delta E \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$$

Somit wäre der Tag nach ca. 20'000 Jahren um eine Sekunde länger.

Das selbe Resultat kann auch mit *Mathematica* erreicht werden durch

**Mathematica**



```

T= 86400;
R= 6370000;
M= 6 10^(24);
DeltaEn =3 10^(20);
En= N[4/5 M R^2 Pi^2 / T^2]

```

```

.
29
2.57509 10

```

**Mathematica**

```

FindRoot[ En - DeltaEn == 4/5 M R^2 Pi^2 / (T+DeltaT)^2, {DeltaT,0}]
.
{DeltaT -> 0.0000503284}

```

**Solution pour problème 2–21 :**

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho \pi y^2(x) \cdot y^2(x) dx = \frac{\rho \pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x dx \\
 &= \frac{\rho \pi}{2} \frac{12x + 8 \sin(2x) + \sin(4x)}{32} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\rho \pi}{2} \frac{12\pi}{32} = \frac{3\rho \pi^2}{16}
 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–22 :** Es gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx \\
 &= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Big|_{x=0}^5 = \frac{335}{27}
 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–23 :**

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + 4x^2} dx = \dots = a\sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2a)$$

Für die Berechnung des Integrals kann eine Tabelle oder die Substitution  $2x = \sinh u$  nützlich sein.**Solution pour problème 2–25 :** Es gilt

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta \quad \text{und} \quad \frac{dx}{d\theta} = \sin \theta$$

und somit

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

und

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -4 \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8$$

**Solution pour problème 2–26 :**  $L = \sqrt{2} (e^4 - 1)$ **Solution pour problème 2–28 :**

$$V = \int_2^4 2\pi (5+x) (-(x-2)(x-4)) dx = \dots = \frac{64\pi}{3}$$

**Solution pour problème 2–29 :**

$$V = \int_{-2}^2 2\pi (5-x)(2-x)(x+2) dx = \frac{320\pi}{3}$$

**Solution pour problème 2–30 :**

$$y(x) = \sin x, \quad y'(x) = \cos x$$

(a)

$$O = \int_0^\pi 2\pi r ds = \int_0^\pi 2\pi y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \int_0^\pi 2\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x} dx = ?$$

(b)

$$O = \int_0^\pi 2\pi r ds = \int_0^\pi 2\pi x \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \int_0^\pi 2\pi x \sqrt{1+\cos^2 x} dx = ?$$

(c)

$$\begin{aligned} O &= \int_0^\pi 2\pi r ds = \int_0^\pi 2\pi (1-y(x)) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \\ &= \int_0^\pi 2\pi (1-\sin x) \sqrt{1+\cos^2 x} dx = ? \end{aligned}$$

(d)

$$V = \int_0^\pi \pi y^2(x) dx = \int_0^\pi \pi \sin^2 x dx = ?$$

**Solution pour problème 2–32 :**

(a)

$$V = \int_0^R 2\pi x e^{-x^2} dx = 2\pi \left. \frac{-1}{2} e^{-x^2} \right|_{x=0}^R = \pi (1 - e^{-R^2})$$

(b)

$$A = \int_0^R 2\pi x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_0^R 2\pi x \sqrt{1+4x^2 e^{-2x^2}} dx$$

**Solution pour problème 2–33 :**  $1000 \pi \text{ cm}^3$ .

**Solution pour problème 2–34 :**

$$V = 2\pi R \pi r^2$$

**Solution pour problème 2–35 :** Die Halbkreisfläche ist  $A = \pi R^2/2$ . Wird dieser Halbkreis um die  $x$ -Achse rotiert, so entsteht eine Kugel mit Volumen  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ . Die Regel von Guldin besagt

$$V = A \cdot 2\pi y_s$$

und somit

$$y_s = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{2\pi \frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$

**Solution pour problème 2–36 :**

$$O = 2\pi R \, 2\pi r = 4\pi^2 r R$$

**Solution pour problème 2–37 :** Die Länge des Halbkreises ist  $L = \pi R$ . Wird dieser Halbkreis um die  $x$ -Achse rotiert, so entsteht eine Kugel­fläche mit Oberfläche  $O = 4\pi R^2$ . Die Regel von Guldin besagt

$$O = L \, 2\pi y_s$$

und somit

$$y_s = \frac{O}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \pi R} = \frac{2}{\pi} R$$

**Solution pour problème 2–38 :** Zuerst bestimmt man die eingeschlossene Fläche

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x - \frac{1}{2} dx = \left( -\cos x - \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left( -\cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} \right) - \left( -\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.685 \end{aligned}$$

(a) Wegen Symmetrie gilt  $x_s = \frac{\pi}{2}$ . Für  $y_s$  gilt

$$\begin{aligned} A y_s &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 x - \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2} - \cos(2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.478 \end{aligned}$$

Das führt auf  $y_s \approx 0.698$ .

(b) Die einfachste Variante ist mit Sicherheit der Satz von Pappus (Guldin)

$$V = 2\pi \left( y_s - \frac{1}{2} \right) A \approx 0.854$$

(c)

$$O = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( \sin(x) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

**Solution pour problème 2–39 :**

(a) Für die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$  gilt  $f'(x) = 2x$  und somit

$$L(a) = \int_0^a 1 ds = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

(b)

$$\begin{aligned} L(a) &= \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx \frac{a}{6} \left( \sqrt{1 + 0^2} + 4 \sqrt{1 + 4(a/2)^2} + \sqrt{1 + 4a^2} \right) \\ &= \frac{a}{6} \left( 1 + 4 \sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + 4a^2} \right) \end{aligned}$$

(c)

$$L(1) \approx \frac{1}{6} \left( 1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{5} \right) \approx 1.48215$$

*Mathematica* liefert einen numerischen Wert von  $L(1) = 1.47894$  und somit ist die Approximation durch die Simpson Formel recht gut.

(d)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a 2\pi x \, ds = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1+4x^2} \, dx \\ &\quad \text{Substitution } u = 4x^2 \text{ und somit } du = 8x \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{4a^2} \sqrt{1+u} \, du = \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} (1+u)^{3/2} \Big|_0^{4a^2} \\ &= \frac{\pi}{6} \left( (1+4a^2)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–41 :** Um den Stab von der Länge  $L+l$  zu  $L+l+\Delta l$  zu strecken, muss die Arbeit (Energie)

$$E A \frac{l}{L+l} \Delta l$$

geleistet werden. Nun variiert man  $l$  von 0 bis  $x$ , summiert und erhält die Gesamtarbeit

$$\text{Arbeit} = \sum_{l=0}^x E A \frac{l}{L} \Delta l$$

Hierbei haben wir  $L+l \approx L$  eingesetzt. Mit der Grenzwertbildung  $\Delta l \rightarrow 0$  wird daraus

$$\text{Arbeit} = \int_{l=0}^x E A \frac{l}{L} \, dl = \frac{E A}{L} \int_{l=0}^x l \, dl = \frac{E A}{2 L} x^2$$

**Solution pour problème 2–42 :**

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) \, dt = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) \, dt = \frac{U_0^2}{T} \frac{T}{2}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

**Solution pour problème 2–43 :** Die Momentanleistung  $P(t)$  ist gegeben durch

$$P(t) = I(t) \cdot U(t) = I_0 U_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta)$$

Die mittlere Leistung ist somit

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \, dt$$

für grosse Werte von  $T$ . Damit wir besser integrieren können, formen wir die trigonometrische Funktion etwas um

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} (\cos(2\omega t + \delta) + \cos \delta)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \, dt = \frac{I_0 U_0}{2 T} \int_0^T (\cos(2\omega t + \delta) + \cos \delta) \, dt \\ &= \frac{I_0 U_0}{2 T} \left( \frac{\sin(2\omega t + \delta)}{2\omega} + t \cos \delta \right) \Big|_0^T = \frac{I_0 U_0}{2 T} \left( \frac{\sin(2\omega T + \delta)}{2\omega} + T \cos \delta \right) \\ &\longrightarrow \frac{I_0 U_0}{2} \cos \delta = I_{eff} U_{eff} \cos \delta \quad \text{für } T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist der tiefere Grund für die Definitionen

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

**Solution pour problème 2-44 :** Mit Hilfe von reellen Funktionen erhält man

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + \int_0^t I(\tau) d\tau \\ &= I_0 \int_0^t e^{-\alpha\tau} \cos(\omega\tau) d\tau \\ &= I_0 \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)) \Big|_0^t \\ &= I_0 \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} (e^{-\alpha t} (-\alpha \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)) + \alpha) \\ &\rightarrow I_0 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das Integral wurde mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmt.

Die selbe Aufgabe kann auch mit Hilfe von komplexen Funktionen und Zahlen gelöst werden. Man setzt  $z_0 = -\alpha + i\omega$

$$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} e^{(-\alpha + i\omega)t} = \operatorname{Re} e^{z_0 t}$$

und statt des obigen reellen Integrals können wir auch den Realteil des folgenden Integrals untersuchen.

$$\begin{aligned} Q(t) &= I_0 \int_0^t e^{z_0 \tau} d\tau = I_0 \frac{1}{z_0} e^{z_0 \tau} \Big|_0^t = I_0 \frac{1}{z_0} (e^{z_0 t} - 1) \\ &\rightarrow I_0 \frac{-1}{z_0} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Mit Hilfe der einfachen Identität

$$\frac{-1}{z_0} = \frac{-1}{-\alpha + i\omega} = \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{\alpha + i\omega}{(\alpha - i\omega)(\alpha + i\omega)} = \frac{\alpha + i\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)}$$

sieht man, dass der Realteil dieses Ausdrucks mit der ersten Rechnung übereinstimmt. Die Rechnung ist ohne Integraltabelle ausführbar.

**Solution pour problème 2-45 :**

(a) Aufgrund der Symmetrie gilt  $x_s = 5\pi/2$ . Für die  $y$ -Koordinate ist zuerst die Fläche zu bestimmen.

$$A = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{2\pi}^{3\pi} = 2$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} A y_s &= \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} \\ y_s &= \frac{\pi}{8} \approx 0.39 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird durch die Graphik bestätigt.

(b) Entweder mit der Regel von Guldin

$$V = 2\pi s A = 2\pi \frac{5\pi}{2} 2 = 10\pi^2$$

oder mittels Zerlegung in vertikale Streifen (resp. Ringe) und einer Integration

$$V = \int_{2\pi}^{3\pi} 2\pi x \sin x dx = 2\pi (\sin x - x \cos x) \Big|_{2\pi}^{3\pi} = 2\pi (3\pi + 2\pi) = 10\pi^2$$

### Solution pour problème 2-46 :

(a) Vertikal zerlegen. Die Höhe ist gegeben durch  $h(x) = -2 + x$  für  $2 \leq x \leq 4$ .

$$\begin{aligned} V &= \int_2^4 h(x) 2\pi x dx = 2\pi \int_2^4 -2x + x^2 dx \\ &= 2\pi \left( -x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=2}^4 = 2\pi \left( -4^2 + \frac{4^3}{3} + 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) \\ &= 2\pi \left( -16 + \frac{64}{3} + 4 - \frac{8}{3} \right) = 2\pi \frac{-48 + 64 + 12 - 8}{3} = \pi \frac{40}{3} \approx 41.8879 \end{aligned}$$

(b) Basierend auf  $E = \frac{1}{2} m v^2$  erhält man

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{1}{2} v^2 \rho dV = \int_2^4 \frac{1}{2} (\omega x)^2 \rho h(x) 2\pi x dx \\ &= \rho \pi \omega^2 \int_2^4 -2x^3 + x^4 dx = \dots = \rho \pi \omega^2 \frac{392}{5} = \rho \pi \omega^2 78.4 \end{aligned}$$

Der Satz von Steiner ist hier **nicht** anwendbar. Es wird ein Volumen im Raum rotiert. Somit ist nicht das Moment zweiter Ordnung zu verwenden, sondern ein Moment dritter Ordnung.

### Solution pour problème 2-47 :

(a) Wegen Symmetrie ist  $x_s = y_s = 0$ . Einzig die  $z$ -Komponente  $z_s$  ist von 0 verschieden.

(b)

$$\begin{aligned} V z_s &= \int_0^R z \pi \sqrt{R^2 - z^2} dz = \pi \int_0^R z (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left( \frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R = \pi \left( \frac{R^2 R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \pi \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nach  $z_s$  aufgelöst werden.

(c) Wegen  $V = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3$  gilt also

$$z_s = \frac{\pi \frac{R^4}{4}}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

**Solution pour problème 2-48 :** Wegen  $z = a x^2$  muss  $H = a R^2$  richtig sein, d.h.  $a = H/R^2$ . Somit erhalten wir auf einer festen Höhe  $z$  eine Kreisscheibe mit Radius  $r(z) = \sqrt{z/a} = \sqrt{\frac{z R^2}{H}}$

(a)

$$V = \int_0^H \pi r(z)^2 dz = \frac{\pi R^2}{H} \int_0^H z dz = \frac{1}{2} \pi R^2 H$$

(b)  $c = 2$ 

(c) Es gilt

$$\frac{d}{dz} r = \frac{d}{dz} \sqrt{\frac{z R^2}{H}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{z H}}$$

und somit

$$A = \int_0^H 2\pi r \sqrt{1+r'^2} dz = \int_0^H 2\pi \sqrt{\frac{z R^2}{H}} \sqrt{1 + \frac{R^2}{4zH}} dz = \frac{2\pi R}{\sqrt{H}} \int_0^H \sqrt{z + \frac{R^2}{4H}} dz$$

(d)

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi R}{\sqrt{H}} \int_0^H \sqrt{z + \frac{R^2}{4H}} dz = \frac{2\pi R}{\sqrt{H}} \frac{2}{3} \left( z + \frac{R^2}{4H} \right)^{3/2} \Big|_{z=0}^H \\ &= \frac{2\pi R}{\sqrt{H}} \frac{2}{3} \left( \left( H + \frac{R^2}{4H} \right)^{3/2} - \left( \frac{R^2}{4H} \right)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

In der hier gegebenen Lösung wurde bezüglich  $z$  integriert. Man kann die Aufgabe auch durch Integration bezüglich  $x$  (resp.  $r$ ) lösen.

**Solution pour problème 2–49 :** Quelle [[JordSmit94](#), p 246]

(a)

$$\text{Dist} = \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 200 t (1-t) dt = 200 \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{100}{3} \quad \text{in Kilometern}$$

(b) Die Angabe ist gegeben in Litern pro Kilometer, zur Integration benötigt man aber Liter pro Zeit.

$$\frac{\Delta \text{Verbrauch}}{\Delta t} = \frac{\Delta \text{Verbrauch}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f v$$

$$\begin{aligned} \text{Verbrauch} &= \int_0^1 10^{-4} v^2(t) v(t) dt = 10^{-4} \int_0^1 (200 t (1-t))^3 dt \\ &= 800 \int_0^1 t^3 (1-3t+3t^2-t^3) dt = 800 \left( \frac{t^4}{4} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^6}{6} - \frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^1 \\ &= 800 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) \\ &= 800 \frac{105 - 84 - 20}{140} = \frac{800}{140} \approx 5.71 \quad \text{in Liter} \end{aligned}$$

Die folgende Lösung ist **falsch**.

$$\begin{aligned} \text{Verbrauch} &= \int_0^1 10^{-4} v^2(t) dt = 10^{-4} \int_0^1 (200 t (1-t))^2 dt \\ &= 4 \int_0^1 t^2 (1-2t+t^2) dt = 4 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= 4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 4 \frac{1}{30} = \frac{2}{15} \approx 0.133 \quad \text{in Liter} \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2-51 :** Sei  $x$  der Abstand vom Flussmittelpunkt. Dann gilt für die Geschwindigkeit

$$v(x) = v_{max} - c x^2$$

wobei die Konstante  $c$  so zu wählen ist, dass  $v(b/2) = 0$ . Das führt auf

$$v(x) = v_{max} \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)$$

In einem Abschnitt zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  fließt das Wasser mit einer (fast) konstanten Geschwindigkeit  $v(x)$ , falls  $\Delta x$  nur genügend klein ist. Somit ist der Fluss in diesem Abschnitt gegeben durch

$$\Delta F \approx v(x) h \Delta x$$

Für den Gesamtfluss ergibt sich mittels Approximation durch eine Summe

$$F = \sum_i \Delta F_i \approx \sum_i v(x_i) h \Delta x_i$$

Bilden wir den Grenzwert für  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , so ergibt sich das Integral

$$F = \int_{-b/2}^{b/2} v(x) h dx = \int_{-b/2}^{b/2} v_{max} \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) h dx = h v_{max} \left(b - 2 \frac{4b^3}{2^3 3b^2}\right) = \frac{2}{3} b h v_{max}$$

Für die hier verwendeten Zahlenwerte ergibt sich somit ein Fluss von  $F \approx 6.67 \text{ m}^3/\text{sec}$ .

**Solution pour problème 2-52 :** Diese Lösung zeigt die typischen Schritte beim Aufstellen eines Integrals. Sie sollten in der Lage sein die ersten drei Schritte auszuführen. Der vierte Schritt ist der Vollständigkeit halber angegeben.

1. Der Unterschied der potentiellen Energie bei  $\varphi_0$  und  $\varphi$  ist

$$m g l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

Da die kinetische Energie gegeben ist durch  $\frac{1}{2} m v^2$  gilt

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 = m g l (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

und somit

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

2. Wegen

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta T}$$

gilt

$$\Delta \varphi \approx \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)} \Delta T$$

oder auch

$$\Delta T \approx \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \Delta \varphi$$

3. Summiert man die Zeitdifferenzen für Winkel von 0 bis zu  $\varphi_0$  und bildet den Grenzwert  $\Delta \varphi \rightarrow 0+$ , so ergibt sich das Integral

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi$$

Da man damit einen Viertel der vollen Periode bestimmt hat, gilt

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi$$



4. Beachten Sie bitte, dass bei diesem Integral bei  $\varphi = \varphi_0$  eine Division durch Null auftritt. Somit liegt ein **uneigentliches** Integral vor. Mit einigen Tricks kann dieses jedoch umgeformt werden. Die trigonometrische Identität

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

führt zu

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi$$

Nun setzen wir

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

und ersetzen die Variable  $\varphi$  durch  $u$  mittels der Substitution

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin u \quad , \quad \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = k \cos u du$$

und erhalten

$$\begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi \\ &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{k \sqrt{1 - \sin^2 u}} \frac{2k \cos u}{\cos \frac{\varphi}{2}} du \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} du \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} du \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du \end{aligned}$$

Durch die Substitution ist aus dem uneigentlichen Integral ein eigentliches Integral geworden, da wegen  $k = \sin \frac{\varphi_0}{2} < 1$  keine Division durch Null mehr auftritt. Dies ist ein **elliptisches Integral** und lässt sich nicht durch Elementarfunktionen berechnen. Für kleine Winkel  $\varphi_0$  kann man  $k \approx 0$  setzen und erhält die bekannte Approximation

$$T \approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

**Solution pour problème 2–53 :** Befindet sich die Kugel im Punkt  $(x, f(x))$ , so gilt

$$\frac{1}{2} m v^2 = -m g f(x) \quad \text{oder} \quad v(x) = \sqrt{-2 g f(x)}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  gilt offensichtlich

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

wobei  $\tan \alpha = f'(x)$  und

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan \alpha = f'(x)$$

Nun versucht man die Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$  als Funktion von  $x$  zu schreiben.

$$-2g f(x) = v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 + (f'(x) v_x)^2 = v_x^2 (1 + (f'(x))^2)$$

und somit

$$v_x^2 = \frac{-2g f(x)}{1 + (f'(x))^2}$$

Um das Stück von  $x$  zu  $x + \Delta x$  zurückzulegen, benötigt die Kugel ungefähr ( $\Delta x$  sehr klein) die Zeit  $\Delta T$ , wobei

$$\Delta T \approx \frac{1}{v_x} \Delta x \approx \sqrt{\frac{-2g f(x)}{1 + (f'(x))^2}}^{-1} \Delta x$$

Das führt nach passender Summation und Grenzwertbildung ( $\Delta x \rightarrow 0+$ ) zum Integral

$$T = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{-2g f(x)}} dx$$

### Solution pour problème 2-54 :

(a) Die Standardformel für die Länge einer parametrisierten Kurve liefert

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 + (-3\cos(3\tau))^2 + (-2\tau)^2} d\tau \\ L &= \int ds = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 + (-3\cos(3\tau))^2 + (-2\tau)^2} d\tau \approx 11.75 \end{aligned}$$

(b) Wegen  $v = \frac{ds}{dt}$  gilt  $dt = \frac{ds}{v}$  und mit  $v = \sqrt{2g \cdot (4 - z)} = \sqrt{2g \cdot (1 + \tau^2)}$

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{20(1 + \tau^2)}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 + (-3\cos(3\tau))^2 + (-2\tau)^2} d\tau \\ T &= \int dt = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{20(1 + \tau^2)}} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\tau\right)^2 + (-3\cos(3\tau))^2 + (-2\tau)^2} d\tau \approx 1.389 \end{aligned}$$

### Solution pour problème 2-55 :

(a) Die Geschwindigkeit  $v$  lässt sich aus der gegebenen Information bestimmen. Dann ist  $\dot{\theta}$  bestimmt durch die Beziehung  $R\dot{\theta} = v$

$$\begin{aligned} v(\theta) &= \sqrt{-2gy(\theta)} = \sqrt{2gR \sin \theta} \\ R\dot{\theta} &= v(\theta) = \sqrt{2gR \sin \theta} \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \sqrt{2gR \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{2g \sin \theta} \end{aligned}$$

(b) Das führt auf

$$T = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\dot{\theta}(t)} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2g \sin \theta}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta$$

**Solution pour problème 2-56 :**

$$F = \int_0^2 \rho g (2 - y) 2\sqrt{y} \, dy$$

**Solution pour problème 2-57 :**

(a) Die gesamte Flugzeit eines Wassertropfens ist gegeben durch

$$T = 2 \int_0^{137} \frac{1}{\sqrt{2gh}} \, dh = \frac{4}{\sqrt{2g}} \sqrt{h} \Big|_0^{137} \approx 10.5 \, s$$

Da pro Sekunde 500 l Wasser gepumpt werden, sind insgesamt  $10.5 \cdot 500 \, l$  oder  $5250 \, l$  in der Luft.

(b) Für das Wasser höher als 100 m variiert  $h$  (Höhe unter Spitze) zwischen 0 und 37 m. Somit ergibt sich mit der selben Überlegung

$$T = 2 \int_0^{37} \frac{1}{\sqrt{2gh}} \, dh = \frac{4}{\sqrt{2g}} \sqrt{h} \Big|_0^{37} \approx 5.4 \, s$$

und eine Wassermenge von  $2700 \, l$ .

(c) Für das Wasser tiefer als 37 m variiert  $h$  (Höhe unter Spitze) zwischen 100 und 137 m. Somit ergibt sich mit der selben Überlegung

$$T = 2 \int_{100}^{137} \frac{1}{\sqrt{2gh}} \, dh = \frac{4}{\sqrt{2g}} \sqrt{h} \Big|_{100}^{137} \approx 1.52 \, s$$

und eine Wassermenge von  $750 \, l$ .

**Solution pour problème 2-58 :** Wählen Sie die Achse des Fasses als  $x$ -Achse, wobei  $x = 0$  in der Mitte liege. Somit ist für den Radius  $r$  der Ansatz

$$r(x) = A - kx^2 \quad \text{mit} \quad r(0) = a \quad \text{und} \quad r(h) = r(-h) = b$$

zu verwenden. Offensichtlich ist  $a = A$  und  $k = (a - b)/h^2$  und somit

$$r(x) = a - \frac{a - b}{h^2} x^2$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} V &\approx \int_{-h}^h \pi r^2(x) \, dx = \pi \int_{-h}^h (a - kx^2)^2 \, dx = 2\pi \int_0^h (a^2 - 2akx^2 + k^2x^4) \, dx \\ &= 2\pi \left( a^2x - \frac{2ak}{3} x^3 + \frac{k^2}{5} x^5 \right) \Big|_{x=0}^h = 2\pi \left( a^2h - \frac{2ak}{3} h^3 + \frac{k^2}{5} h^5 \right) \\ &= 2\pi h \left( a^2 - \frac{2a(a-b)}{3h^2} h^2 + \frac{(a-b)^2}{5h^4} h^4 \right) = 2\pi h \left( a^2 - \frac{2}{3} (a^2 - ab) + \frac{1}{5} (a^2 - 2ab + b^2) \right) \\ &= 2\pi h \left( \frac{8}{15} a^2 + \frac{4}{15} ab + \frac{1}{5} b^2 \right) \end{aligned}$$

Diese Schlussformel ist reichlich kompliziert für eine Näherungsformel und man sollte versuchen, sie zu vereinfachen, wobei vielleicht eine weitere Approximation in Kauf genommen wird. Die Differenz der Radien  $(a - b)$  sollte klein sein im Vergleich zur halben Höhe  $h$ , und somit gilt wegen  $|x| \leq h$

$$k \cdot h = \frac{a - b}{h} \ll 1 \quad \text{und} \quad k^2 x^4 \leq k x^2 k h^2 \ll k x^2$$

und wir verwenden die viel einfachere Approximation

$$V \approx 2\pi \int_0^h a^2 - 2akx^2 dx = \dots = 2\pi h a \left( \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} \right)$$

Diese approximative Formel wird manchmal auch **Kepler'sche Fassregel** genannt.

**Solution pour problème 2-59 :**

- (a) Die Grundformel für Rotationsenergie ist  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ . Somit gilt

$$E = \int_0^L \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \omega^2 r^2 dr = \frac{1}{6} \rho A L^3 \omega^2 = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2$$

- (b) Die Kraftbeiträge müssen über den Bereich  $R \leq r \leq L$  summiert/integriert werden. Für  $\Delta r \ll L$  ist die Masse mit zwischen  $r$  und  $r + \Delta r$  gegeben durch

$$\Delta m = \rho A \Delta r$$

Diese Masse hat Abstand  $r$  von der Rotationsachse und erzeugt somit einen Kraftbeitrag

$$\Delta F = r \omega^2 \rho A \Delta r$$

Somit ist

$$F(R) = \int_R^L r \omega^2 \rho A dr = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A (L^2 - R^2)$$

**Solution pour problème 2-60 :**

- (a) Die Grundformel für Rotationsenergie ist

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L \frac{r^2 \omega^2}{2} dm = \int_0^L \frac{r^2 \omega^2}{2} \rho h \alpha r dr \\ &= \frac{\omega^2 \rho h \alpha}{2} \int_0^L r^3 dr = \frac{\omega^2 \rho h \alpha}{2} \frac{L^4}{4} = \frac{\omega^2 M L^2}{4} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet

$$M = \rho \frac{h \alpha L^2}{2}$$

- (b) Die Kraftbeiträge müssen über den Bereich  $R \leq r \leq L$  summiert/integriert werden. Für  $\Delta r \ll L$  ist die Masse mit zwischen  $r$  und  $r + \Delta r$  gegeben durch

$$\Delta m = \rho h \alpha r \Delta r$$

Diese Masse hat Abstand  $r$  von der Rotationsachse und erzeugt somit einen Kraftbeitrag

$$\Delta F = r \omega^2 \rho h \alpha r \Delta r$$

Somit ist

$$F(R) = \omega^2 \rho h \alpha \int_R^L r^2 dr = \frac{\omega^2 \rho h \alpha}{3} (L^3 - R^3)$$

(c) Die Fläche  $A$  auf welche die Kraft wirkt ist

$$A = h \alpha R$$

Somit ist

$$\sigma(R) = \frac{F(R)}{A} = \frac{\omega^2 \rho h \alpha}{3 h \alpha R} (L^3 - R^3) = \frac{\omega^2 \rho}{3 R} (L^3 - R^3)$$

### Solution pour problème 2-61 :

(a) Wegen  $y(x) = \frac{1}{a} \cosh(ax)$  und  $y'(x) = \sinh(ax)$  gilt

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \sinh^2(ax)} dx = \int_0^3 \cosh(ax) dx = \frac{\sinh(3a)}{a}$$

(b) Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= m g \frac{1}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3)) \\ v^2 &= \frac{2g}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3)) \end{aligned}$$

Wegen

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 + (y')^2 v_x^2 = (1 + (y')^2) v_x^2 = \cosh^2(ax) v_x^2$$

gilt

$$|v| = \cosh(ax) |v_x|$$

und somit

$$v_x = \frac{|v|}{\cosh(ax)} = \frac{1}{\cosh(ax)} \sqrt{\frac{2g}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3))}$$

Es gilt also

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \implies \Delta t = \frac{1}{v_x} \Delta x = \frac{\cosh(ax)}{\sqrt{\frac{2g}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3))}} \Delta x$$

Bezeichnet man die Periode mit  $T$ , so gilt

$$T = 4 \int_0^3 \frac{\cosh(ax)}{\sqrt{\frac{2g}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3))}} dx$$

Ein zweiter Lösungsweg basiert auf

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x}{\Delta t} \\ \Delta t &= \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x}{v} = \frac{\cosh(ax)}{\sqrt{\frac{2g}{a} (\cosh(ax) - \cosh(a \cdot 3))}} \Delta x \end{aligned}$$

Das führt selbstverständlich zum selben Resultat für die Periode  $T$ .

### Solution pour problème 2-62 :

(a)

$$\Delta F = v \Delta A = c(R^2 - r^2) 2\pi r \Delta r$$

(b)

$$\begin{aligned}
 F &= \int \Delta F = \int_0^R c(R^2 - r^2) 2\pi r \, dr = c 2\pi \int_0^R R^2 r - r^3 \, dr \\
 &= c 2\pi \left( \frac{1}{2} R^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_{r=0}^R = c 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{c\pi}{2} R^4
 \end{aligned}$$

(c) Gegeben ist  $R(0) = 0.03 \text{ cm}$  und  $\frac{d}{dt} R(0) = 1.8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{min}}$ . Somit folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} F(0) &= \frac{d}{dt} \frac{c\pi}{2} R^4(0) = 4 \frac{c\pi}{2} R^3(0) \dot{R}(0) \\
 &= 4 \frac{c\pi}{2} R^4(0) \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} = 4 F(0) \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \\
 \frac{\dot{F}(0)}{F(0)} &= 4 \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} = 4 \frac{1.8 \cdot 10^{-4}}{0.03 \text{ min}} = \frac{0.024}{\text{min}}
 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–63 :**(a) Zerlegen in horizontale Scheiben der Dicke  $\Delta h$  auf Höhe  $h$  mit Radius  $r(h)$ . Das Volumen einer solchen Scheibe ist

$$\Delta V = \pi r(h)^2 \Delta h = \pi \left( e^{h-2} \right)^2 \Delta h = \pi e^{2h-4} \Delta h$$

Für die Gesamtmasse  $M$  erhält man nun

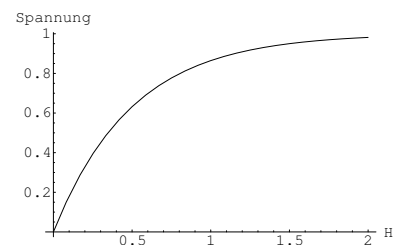
$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^2 \rho \pi \left( e^{h-2} \right)^2 dh = \pi \rho \int_0^2 e^{2h} e^{-4} dh \\
 &= \pi \rho e^{-4} \frac{e^{2h}}{2} \Big|_{h=0}^2 = \frac{\pi \rho}{2 e^4} (e^4 - 1) \\
 &= \frac{\pi \rho}{2} (1 - e^{-4}) \approx \rho \, 1.54203
 \end{aligned}$$

(b) Die Gravitationskraft ist gegeben durch  $m g$  und somit

$$F(H) = g M(H) = g \int_0^H \rho \pi \left( e^{h-2} \right)^2 dh = \frac{g \pi \rho}{2 e^4} (e^{2H} - 1)$$

(c) Die Spannung kann nun leicht bestimmt werden. Ein typischer Verlauf ist unten gezeigt.

$$\begin{aligned}
 \sigma(H) &= \frac{F(H)}{\pi (e^{H-2})^2} \\
 &= \frac{g \pi \rho}{2 e^4} \frac{e^{2H} - 1}{\pi e^{2H} e^{-4}} \\
 &= \frac{g \rho}{2} (1 - e^{-2H})
 \end{aligned}$$

**Solution pour problème 2–64 :**(a) Das Moment zweiter Ordnung ist zu berechnen und die beiden Kreise liefern den selben Beitrag. Auf der Höhe  $y$  hat der Schnitt mit dem Kreis die Länge  $2 \sqrt{R^2 - y^2}$  und somit gilt

$$J = 2 \int_{-R}^R y^2 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = 4 \int_{-R}^R y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
& \text{Substitution } y = R s \quad , \quad dy = R ds \\
& = 4 \int_{-1}^1 R^2 s^2 \sqrt{R^2 - R^2 s^2} R ds \\
& = 4 R^4 \int_{-1}^1 s^2 \sqrt{1 - s^2} ds = 8 R^4 \int_0^1 s^2 \sqrt{1 - s^2} ds \\
& = 8 R^4 \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{2} R^4
\end{aligned}$$

- (b) Hier wird mit Vorteil der Satz von Steiner verwendet mit dem Flächenträgheitsmoment eines Kreises  $J_R = \frac{\pi}{4} R^4$ . Da jeder der Kreismittelpunkte einen Abstand von  $D/2$  vom Zentrum hat gilt

$$J = 2 J_R + 2 A d^2 = \frac{\pi}{2} R^4 + 2 \pi R^2 \frac{D^2}{4}$$

# Kapitel 3

## Kurven

Im ganzen Kapitel gehen wir davon aus, dass alle auftretenden Funktionen „genügend oft“ differenzierbar sind.

### 3.1 Kurven und Parametrisierungen in $\mathbb{R}^2$

#### 3.1.1 Parametrisierung

**3–1 Definition :** Eine (parametrisierte) **Kurve** in  $\mathbb{R}^2$  mit kartesischen Koordinaten ist durch zwei Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  und das Parameterintervall  $t_a \leq t \leq t_e$  gegeben:

$$(x(t), y(t)) \quad \text{wobei} \quad t_a \leq t \leq t_e$$

Die unabhängige Variable  $t$  heisst **Parameter** der Kurve. Selbstverständlich können auch Polarkoordinaten  $r(t)$  und  $\phi(t)$  verwendet werden; dann ist die Kurve durch die Parametrisierung

$$(r(t) \cos \phi(t), r(t) \sin \phi(t)) \quad \text{wobei} \quad t_a \leq t \leq t_e$$

gegeben.

**3–2 Beispiel :** Eine Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$  und Mittelpunkt im Ursprung kann durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ b \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

beschrieben werden. ◇

**3–3 Beispiel :** Ein Kreis mit Radius  $R$  und Mittelpunkt bei  $(a, b)$  kann durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + R \cos t \\ b + R \sin t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

beschrieben werden. ◇



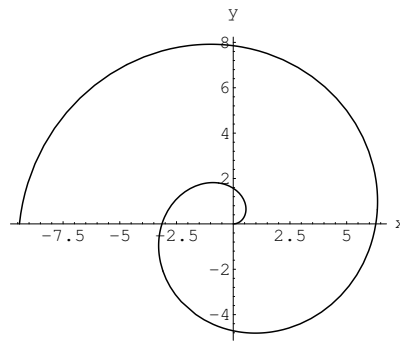


Abbildung 3.1: Archimedische Spirale

**3–4 Beispiel :** Ein Stück einer Archimedischen Spirale kann gegeben werden durch die Parametrisierung

$$(x(t), y(t)) = (t \cos t, t \sin t) \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

Die selbe Kurve kann in Polarkoordinaten durch die Parametrisierung

$$r(t) = t, \quad \phi(t) = t \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 3\pi$$

beschrieben werden. In diesem Beispiel kann auch direkt der Winkel  $\phi$  als Parameter verwendet werden, und es ergibt sich die Parametrisierung

$$r(\phi) = \phi \quad \text{wobei} \quad 0 \leq \phi \leq 3\pi$$

◇

**3–5 Beispiel :** Die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad -2 \leq t < 4$$

erzeugt die Kurve links in der Abbildung 3.2.

◇

**3–6 Beispiel :** Die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t \in \mathbb{R}$$

erzeugt die Kurve in der Mitte der Abbildung 3.2. Die selbe Kurve kann auch gegeben werden durch die Parametrisierungen

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad -1 \leq t \leq 1$$

oder

$$y(x) = x^3 \quad \text{wobei} \quad -1 \leq x \leq 1$$

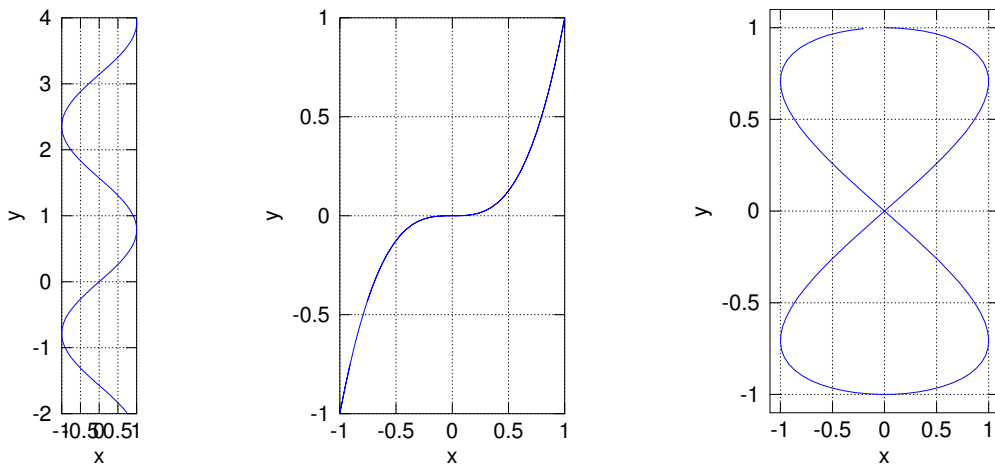
◇

**3–7 Beispiel :** Die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 2\pi - 0.1$$

erzeugt die Kurve rechts in der Abbildung 3.2.

◇

Abbildung 3.2: Die Kurven  $(\sin(2t), t)$ ,  $(\sin t, \sin^3 t)$  und  $(\sin(2t), \cos t)$ 

### 3.1.2 Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Gegeben ist eine Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \quad \text{wobei} \quad a \leq t \leq b.$$

Fassen wir nun den Vektor  $\vec{x}(t)$  als **Ort** eines Objektes zur **Zeit**  $t$  auf. Somit bewegt sich dieses Objekt für Zeiten  $a \leq t \leq b$  entlang der Kurve vom Punkt  $\vec{x}(a)$  zum Punkt  $\vec{x}(b)$ . Der **Geschwindigkeitsvektor**  $\vec{v}(t)$  ist gegeben durch die Zeitableitung des Ortsvektors  $\vec{x}(t)$ , d.h.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Der **Beschleunigungsvektor**  $\vec{a}(t)$  entspricht der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}(t)$ , d.h.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

#### 3–8 Beispiel : Die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq \pi/3$$

erzeugt die Kurve in Abbildung 3.3. Man rechnet für dieses Beispiel leicht nach, dass

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \sin(3t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -6 \sin(3t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \cos(3t) \\ -9 \sin(3t) \end{pmatrix}$$

In Abbildung 3.4 sind für den Zeitpunkt  $t = \pi/12$  der Ortsvektor  $\vec{x}(\pi/12)$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(\pi/12)$  eingezeichnet. Man erkennt sofort, dass  $\vec{v}(t)$  tangential zur Kurve ist im Punkt  $\vec{x}(t)$ .  $\diamond$

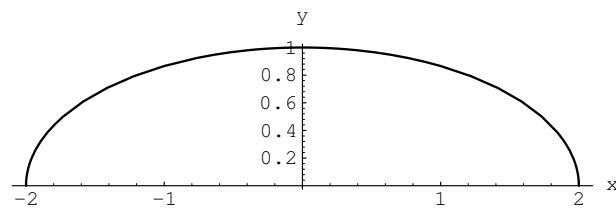
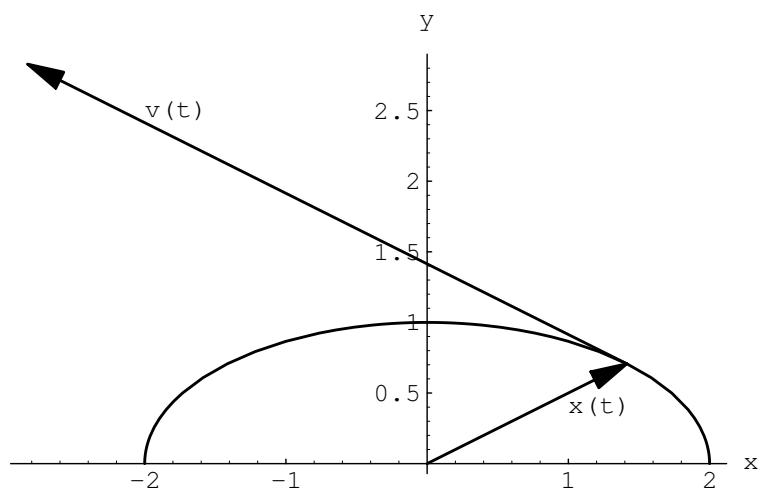
Abbildung 3.3: Die Kurve  $(2 \cos(3t), \sin(3t))$ 

Abbildung 3.4: Orts- und Geschwindigkeitsvektor

Sind alle Funktionen mindestens dreimal differenzierbar, so gelten für kleine Werte von  $\tau$  die Taylor-Approximationen

$$\begin{aligned}x(t + \tau) &= x(t) + \dot{x}(t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}(t)\tau^2 + O(\tau^3) \\y(t + \tau) &= y(t) + \dot{y}(t)\tau + \frac{1}{2}\ddot{y}(t)\tau^2 + O(\tau^3)\end{aligned}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\vec{x}(t + \tau) = \vec{x}(t) + \tau \vec{v}(t) + \frac{1}{2}\tau^2 \vec{a}(t) + O(\tau^3)$$

Man betrachtet einen festen Wert  $t$  und lässt die neue Variable  $\tau$  alle reellen Werte durchlaufen. So ergibt sich

$$\vec{x}(t) + \tau \vec{v}(t)$$

die Parametrisierung einer Geraden mit Startvektor  $\vec{x}(t)$  und Richtungsvektor  $\vec{v}(t)$ .

**3–9 Beispiel :** Für  $0 \leq t \leq 0.5$  bewegt sich ein Objekt auf der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos(t\pi) \\ t \sin(t\pi) \end{pmatrix}$$

Zur Zeit  $t = 0.5$  verlässt das Objekt die obige Kurve und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Wann wird das Objekt die Gerade  $y = -x$  kreuzen?

**Lösung:** Offensichtlich gilt

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\pi) - t\pi \sin(t\pi) \\ \sin(t\pi) + t\pi \cos(t\pi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\vec{x}(0.5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}(0.5) = \begin{pmatrix} -0.5\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entlang dieser Geraden ist die Bedingung  $x = -y$  erfüllt, falls

$$-0.5\pi\tau = -0.5 - \tau \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{1}{\pi - 2}$$

Somit schneidet die Flugbahn die Gerade  $y = -x$  bei  $\tau \approx 0.876$  oder auch zur absoluten Zeit  $t \approx 0.5 + 0.876$ .  $\diamond$

**3–10 Beispiel :** Eine logarithmische Spirale ist gegeben durch die Parametrisierung in Polarkoordinaten

$$r(\phi) = r_0 e^{a\phi}$$

oder auch

$$r(t) = r_0 e^{at} \quad \text{und} \quad \phi(t) = t$$

Es ist zu beachten, dass der Geschwindigkeitsvektor in Polarkoordinaten sorgfältig bestimmt werden muss. Mit der Ketten- und Produktregel sieht man, dass für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

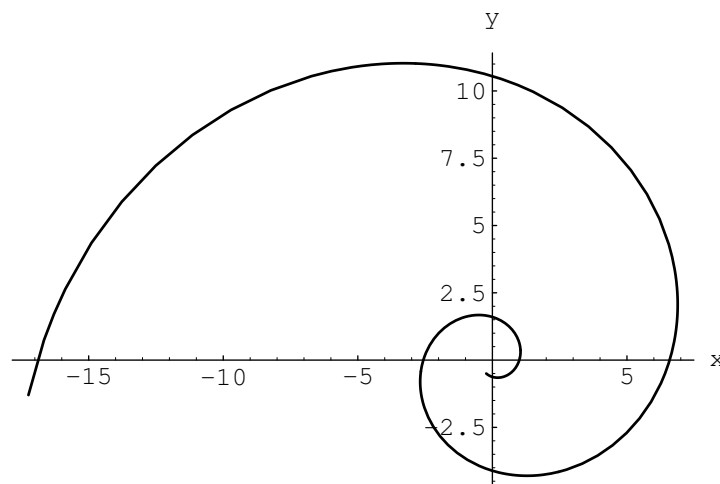


Abbildung 3.5: Eine logarithmische Spirale

gilt

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t))\dot{\phi}(t) \\ \cos(\phi(t))\dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \\ &= \dot{r}(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} + r(t)\dot{\phi}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In unserem Beispiel

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} = r_0 e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$\vec{v}(t) = a r_0 e^{at} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + r_0 e^{at} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

◇

**3–11 Beispiel :** Ein Stein wird auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius  $R$  auf die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  beschleunigt. Bei welchem Winkel  $\phi$  muss der Stein losgelassen werden, damit er möglichst weit fliegt? Die Distanz wird gemessen, wenn der Stein die  $x$ -Achse wieder schneidet.

**Lösung:** Wir legen zuerst einen Plan fest, um weniger in Gefahr zu geraten, die Übersicht zu verlieren.

1. Die Kreisbahn parametrisieren.
2. Den Anfangsort und die Geschwindigkeit bestimmen, abhängig von  $\phi$ .
3. Parametrisierung der Wurfparabel finden.
4. Wurfparabel mit  $x$ -Achse schneiden, d.h.  $x$ -Wert berechnen.
5. Den berechneten  $x$ -Wert (als Funktion von  $\phi$ ) extremal machen.

Nun versuchen wir diesen Plan auch auszuführen:

1. Die Kreisbahn parametrisieren.

Der Kreis wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

2. Der Anfangsort  $\vec{x}_0$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  beim Winkel  $0 \leq \phi \leq \pi$  sind also

$$\vec{x}_0 = R \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_0 = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

3. Parametrisierung der Wurfparabel finden.

Sei  $\tau$  die Flugzeit auf der Parabel. Da die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung nicht ändert, gilt

$$x(\tau) = R \cos \phi - \tau R \omega \sin \phi$$

Die Beschleunigung in  $y$ -Richtung ist konstant  $-g$ , und somit erhalten wir

$$y(\tau) = R \sin \phi + \tau R \omega \cos \phi - \frac{g}{2} \tau^2$$

4. Wurfparabel mit  $x$ -Achse schneiden, d.h.  $x$ -Wert berechnen.

Wir müssen die quadratische Gleichung

$$0 = R \sin \phi + \tau R \omega \cos \phi - \frac{g}{2} \tau^2$$

nach  $\tau$  auflösen. Die übliche Lösungsformel ergibt

$$\tau_{1,2} = \frac{-1}{g} \left( -R\omega \cos \phi \pm \sqrt{R^2 \omega^2 \cos^2 \phi + 2gR \sin \phi} \right)$$

Da die Auftreffzeit  $\tau$  positiv sein muss, gilt

$$\tau = \frac{1}{g} \left( R\omega \cos \phi + \sqrt{R^2 \omega^2 \cos^2 \phi + 2gR \sin \phi} \right)$$

Nun müssen wir diesen Wert von  $\tau$  in die Formel für die  $x$ -Koordinate einsetzen und erhalten

$$x(\phi) = R \cos \phi - \frac{R\omega \sin \phi}{g} \left( R\omega \cos \phi + \sqrt{R^2 \omega^2 \cos^2 \phi + 2gR \sin \phi} \right)$$

5. Den berechneten  $x$ -Wert (als Funktion von  $\phi$ ) extremal machen.

Nun könnte man versuchen die Extrema dieser Funktion zu finden, indem man alle kritischen Punkte bestimmt (ableiten, Null setzen, auflösen). Die Formel ist aber kompliziert genug, dass kaum Aussicht auf Erfolg besteht. Deshalb begnügen wir uns mit den Plots und extremalen Werten für zwei verschiedene Werte für die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ .

Setzt man  $R = 1$  und  $\omega = 10$ , so entsteht Abbildung 3.6, und der maximale Abstand von  $x \approx -10.05$  wird bei  $\phi \approx 0.858 \approx 50^\circ$  angenommen.

Setzt man  $R = 1$  und  $\omega = 2$ , so entsteht Abbildung 3.7, und der maximale Abstand von  $x \approx -1.077$  wird bei  $\phi \approx 2.271 \approx 130^\circ$  angenommen.



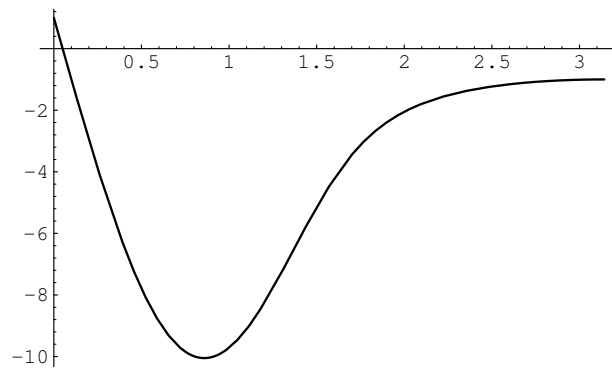
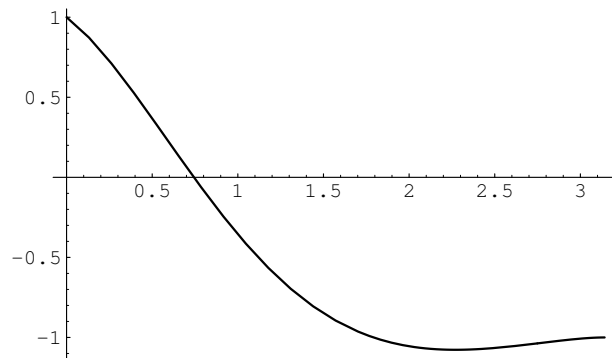
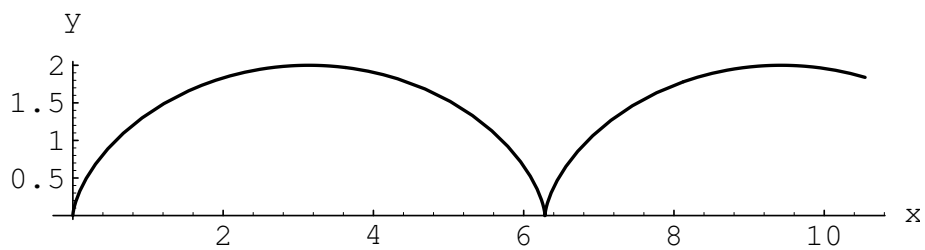
Abbildung 3.6: Wurfdistanz als Funktion des Winkels bei  $\omega = 10$ Abbildung 3.7: Wurfdistanz als Funktion des Winkels bei  $\omega = 2$ 

Abbildung 3.8: Eine gewöhnliche Zykloide

**3–12 Beispiel : Zykloide**

Ein Rad mit Radius  $R$  rollt auf der  $x$ -Achse einer  $xy$ -Ebene nach rechts. Zur Zeit  $t = 0$  sei der Radmittelpunkt bei  $(0, R)$ , und ein Schreiber wird bei den Koordinaten  $(0, 0)$  auf dem Rad befestigt. Zu finden ist die Gleichung der durch diesen Schreiber gezeichneten Kurve.

**Lösung:** Wir nehmen an, dass sich der Radmittelpunkt mit Geschwindigkeit 1 nach rechts bewegt. Somit sind die Koordinaten des Mittelpunktes gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R \end{pmatrix}$$

Da das Rad rollt, dreht es sich gleichzeitig um einen Winkel  $\phi$  im Uhrzeigersinn, wobei  $R\phi = t \cdot v = t$  die Länge der abgerollten Strecke sein muss. Somit ist die Position des Schreibers gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{R} \\ -\cos \frac{t}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - R \sin \frac{t}{R} \\ R - R \cos \frac{t}{R} \end{pmatrix}$$

Diese **Zykloide** ist durch eine Parametrisierung (Parameter  $t$ ) gegeben. ◇

**3–13 Beispiel :** Wird beim vorangehenden Beispiel der Schreiber nicht auf dem Rande des Rades befestigt, sondern in einem Abstand  $a$  vom Mittelpunkt, so erhalten wir die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{R} \\ -\cos \frac{t}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - a \sin \frac{t}{R} \\ R - a \cos \frac{t}{R} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten drei verschiedene Typen von Kurven

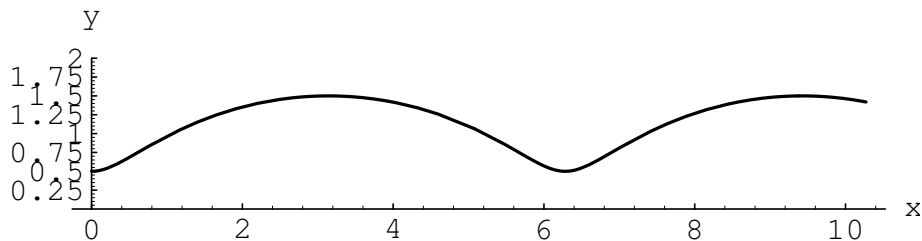


Abbildung 3.9: Eine verkürzte Zykloide

$0 < a < R$	verkürzte Zykloide
$a = R$	gewöhnliche Zykloide
$R < a$	verlängerte Zykloide

◇



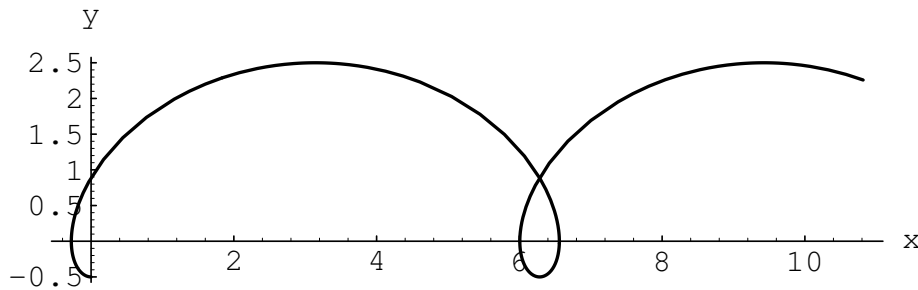


Abbildung 3.10: Eine verlängerte Zykloide

### 3.1.3 Ort, Tangentialvektor und Krümmung

Im vorangehenden Abschnitt wurde eine Kurve immer durch eine Parametrisierung gegeben. Somit wurde neben der Form der Kurve auch die Art und Weise, wie sie zu durchlaufen ist, festgelegt. Zwei **verschiedene Parametrisierungen** können aber durchaus zur **selben Kurve** führen. Nun versuchen wir Eigenschaften herauszuschälen, die nur von der Kurve und nicht von der speziellen Parametrisierung abhängen. Allerdings wollen wir die **Orientierung** der Kurve, d.h. die Richtung, in der sie durchlaufen wird, beibehalten. Einige geometrische Begriffe müssen unabhängig von der Parametrisierung sein und dürfen nur von der Kurve abhängen. Als Beispiel wählen wir die Länge  $L$ .

**3–14 Satz :** *Zwei verschiedene Parametrisierungen der selben Kurve führen auf die selbe Kurvenlänge  $L$ .*

**Beweis :** Seien zwei Parametrisierungen gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq t \leq b$$

und

$$\vec{y}(\tau) = \begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad c \leq \tau \leq d$$

Weil die beiden Parametrisierungen die selbe Kurve darstellen, muss gelten:

$$\vec{x}(a) = \vec{y}(c) \quad \text{und} \quad \vec{x}(b) = \vec{y}(d)$$

(identische Anfangs- und Endpunkte). Ebenso muss es für jeden Zeitpunkt  $t$  der ersten Parametrisierung genau eine passende Zeit  $\tau = f(t)$  geben, so dass

$$\vec{x}(t) = \vec{y}(\tau) = \vec{y}(f(t))$$

Die Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

heisst **Umparametrisierung**. Ist  $c < d$  und  $a < b$ , so muss  $\frac{d}{dt} f(t) > 0$  gelten. Aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \vec{y}(f(t)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(f(t)) \\ y_2(f(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} y_1(f(t)) \\ \frac{d}{d\tau} y_2(f(t)) \end{pmatrix} \frac{df(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \frac{d\vec{y}(f(t))}{d\tau}$$

Nun bestimmen wir die Länge der Kurve mit Hilfe der  $\vec{x}$ -Parametrisierung und formen das Integral um mit Hilfe der Substitution  $\tau = f(t)$  und  $d\tau = \frac{df}{dt} dt$

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left\| \frac{df(t)}{dt} \frac{d\vec{y}(f(t))}{d\tau} \right\| dt \\ &= \int_a^b \left\| \frac{d\vec{y}(f(t))}{d\tau} \right\| \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= \int_c^d \left\| \frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau = L \end{aligned}$$

□

### 3-15 Beispiel : Die Parametrisierungen

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

und

$$\vec{y}(\tau) = \begin{pmatrix} -R \cos \ln \tau \\ R \sin \ln \tau \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 1 \leq \tau \leq e^\pi$$

beschreiben beide einen Halbkreis mit Radius  $R$  in der oberen Halbebene, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die beiden Parametrisierungen unterscheiden sich durch die Geschwindigkeiten, mit der der Halbkreis durchlaufen wird.

Die Länge berechnet sich mit Hilfe der ersten Parametrisierung durch

$$L = \int_0^\pi \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt = \int_0^\pi \left\| \begin{pmatrix} R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^\pi R dt = \pi R$$

und mittels der zweiten durch

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{e^\pi} \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{y}(\tau) \right\| d\tau = \int_1^{e^\pi} \left\| \begin{pmatrix} \frac{R}{\tau} \sin \ln \tau \\ \frac{R}{\tau} \cos \ln \tau \end{pmatrix} \right\| d\tau \\ &= \int_1^{e^\pi} R \left\| \begin{pmatrix} \sin \ln \tau \\ \cos \ln \tau \end{pmatrix} \right\| \frac{1}{\tau} d\tau = \int_1^{e^\pi} R \frac{1}{\tau} d\tau = R \ln \tau \Big|_1^{e^\pi} = \pi R \end{aligned}$$

◇

Nun werden wir versuchen, eine gegebene Kurve mit einer Standardparametrisierung zu versehen. Dies erreichen wir durch die Zusatzbedingung, dass die Geschwindigkeit immer 1 sein soll. Man spricht in diesem Fall von einer Parametrisierung bezüglich der **Bogenlänge**. Ist die Parametrisierung gegeben durch

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq s \leq b,$$

so muss die Bedingung

$$\|\vec{v}(s)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} x(s) \\ \frac{d}{ds} y(s) \end{pmatrix} \right\|^2 = \left( \frac{d}{ds} x(s) \right)^2 + \left( \frac{d}{ds} y(s) \right)^2 = 1$$

erfüllt sein. Für Parametrisierungen bezüglich der Bogenlänge kann man leicht nachrechnen, dass die Länge  $L$  der Kurve gegeben ist durch

$$L = \int_a^b \|\vec{v}(s)\| ds = \int_a^b 1 ds = b - a$$

Diese Tatsache rechtfertigt den Begriff Bogenlänge.

Nun stellt sich die Frage, ob aus einer beliebigen Parametrisierung einer Kurve die Standardparametrisierung bezüglich der Bogenlänge gefunden werden kann. Das folgende Resultat zeigt, dass dies (zumindest theoretisch) meistens möglich ist.

**3–16 Satz :** Ist eine parametrisierte Kurve gegeben durch

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq s \leq b,$$

so kann mit dem Integral

$$s(t) = \int_a^t \|v(\tau)\| d\tau = \int_a^t \sqrt{(\dot{x}(\tau))^2 + (\dot{y}(\tau))^2} d\tau$$

der Bogenlängeparameter  $s$  als Funktion von  $t$  bestimmt werden. Lässt sich diese Gleichung nach  $t$  als Funktion von  $s$  auflösen, so kann in der ursprünglichen Parametrisierung  $t$  durch  $s$  ersetzt werden, und wir haben die Parametrisierung bezüglich der Bogenlänge gefunden.

**3–17 Beispiel :** Die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

des Halbkreises mit Radius  $R$  in der oberen Halbebene ist nicht bezüglich der Bogenlänge, da

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \right\|^2 = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2 \neq 1$$

ausser falls  $R = 1$ . Das Integral

$$s(t) = \int_a^t \|v(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{(R \sin \tau)^2 + (R \cos(\tau))^2} d\tau = \int_0^t R d\tau = R t$$

lässt sich hier leicht ausrechnen, und man erhält auch

$$t = \frac{s}{R} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq s \leq R\pi$$

Somit ist die Parametrisierung bezüglich Bogenlänge gegeben durch

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} -R \cos \frac{s}{R} \\ R \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq s \leq R\pi$$

Die Kontrollrechnung

$$\|\vec{v}(s)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sin \frac{s}{R} \\ \cos \frac{s}{R} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sin^2 \frac{s}{R} + \cos^2 \frac{s}{R} = 1$$

bestätigt dieses Resultat. ◇

Der Geschwindigkeitsvektor einer Parametrisierung bezüglich der Bogenlänge hat immer die Länge 1 und heisst auch **Tangentialvektor** an die Kurve. Er hängt nicht von der speziellen Parametrisierung ab, sondern nur von der Kurve, und der Richtung, in der sie durchlaufen wird.

Die **Krümmung einer Kurve** soll ein Mass dafür sein, wie schnell eine Kurve „dreht“, wenn wir uns entlang der Kurve bewegen. Hierzu betrachten wir den Quotienten der Winkeländerung  $\Delta\theta$  durch Längenänderung  $\Delta s$  für immer kürzer werdende Längenabschnitte.

**3–18 Definition :** Die **Krümmung** einer Kurve  $y = f(x)$  beim Punkt  $(x_0, f(x_0))$  ist definiert durch die Formel

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

Ist die Kurve durch die Funktion

$$y = f(x)$$

beschrieben, so betrachten wir für zwei nahe zusammen liegende Punkte  $x_1$  und  $x_2$ . Dabei nehmen wir an, dass  $x_1 \rightarrow x_0 -$  und  $x_2 \rightarrow x_0 +$ .

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \\ \Delta\theta &= \theta_2 - \theta_1 = \arctan f'(x_2) - \arctan f'(x_1)\end{aligned}$$

Die Länge der Kurve für  $x$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$  ist gegeben durch ein Integral, und mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\Delta s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \sqrt{1 + (f'(\eta))^2} \Delta x$$

für ein  $\eta$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Wegen  $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$  und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt auch

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arctan f'(x_2) - \arctan f'(x_1) = \frac{f''(\xi)}{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x$$

für ein  $\xi$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$ .

Nun können wir die Krümmung für die obige Situation berechnen.

$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(\xi)}{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x}{\sqrt{1 + (f'(\eta))^2} \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f''(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\eta))^2}^3} = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}^3} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Gilt für eine Kurve  $|f'(x)| \ll 1$ , so ist  $\kappa \approx f''(x)$ . In diesem Sinne ist die Krümmung sehr eng mit der zweiten Ableitung einer Funktion verbunden. Es ist aber falsch zu sagen, dass die Krümmung gleich der zweiten Ableitung ist.

**3–19 Beispiel :** Ein Kreis mit Radius  $R$  ist kann gegeben werden durch

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} = (R^2 - x^2)^{1/2}$$

Offensichtlich gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ 1 + (f'(x))^2 &= \frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2} \\ f''(x) &= \frac{-\sqrt{R^2 - x^2} - x \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} = \frac{-R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

und somit

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \frac{-R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \left( \frac{R^2 - x^2}{R^2} \right)^{3/2} = -\frac{1}{R}$$

An diesem Beispiel wird klar, dass der Radius des Krümmungskreises das Reziproke der Krümmung ist. Ist  $\kappa > 0$ , so nimmt die Steigung der Tangente zu, die Kurve ist konvex und der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt oberhalb der Kurve. Ist  $\kappa < 0$ , so nimmt die Steigung der Tangente ab, die Kurve ist konkav und der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt unterhalb der Kurve.  $\diamond$

Die folgende Tabelle stellt einige Begriffe für Parametrisierungen von Kurven und die entsprechenden Begriffe für Kurven gegenüber. Es ist zu beachten, dass die Begriffe aber **nicht** identisch sind, d.h die Krümmung einer Kurve ist nicht gleich der Beschleunigung einer Parametrisierung.

Parametrisierung einer Kurve	Kurve
Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$	Tangentialvektor (Länge 1)
Beschleunigungsvektor $\vec{a}$	
Beschleunigung $\ \vec{a}\ $	Krümmung $\kappa$

Bei einer Kurve der Form

$$y = f(x)$$

liegt der Punkt

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

auf der Kurve, und der normierte, nach oben zeigende Normalenvektor  $\vec{n}$  ist gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \vec{P} + \frac{1}{\kappa} \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**3–20 Beispiel :** Für die Kurve

$$y = f(x) = \cos x$$

gilt

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{-\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}}$$

Hier sehen wir leicht, dass  $|\kappa| \leq 1$ , und die Extrema von  $\pm 1$  werden bei Vielfachen von  $\pi$  angenommen. Dies zeigt, dass ein Rad mit Radius 1 noch auf einer  $\cos$ -Kurve rollen kann, ohne die „Täler“ auszulassen. Die Koordinaten des Krümmungskreises an die  $\cos$ -Kurve sind gegeben durch

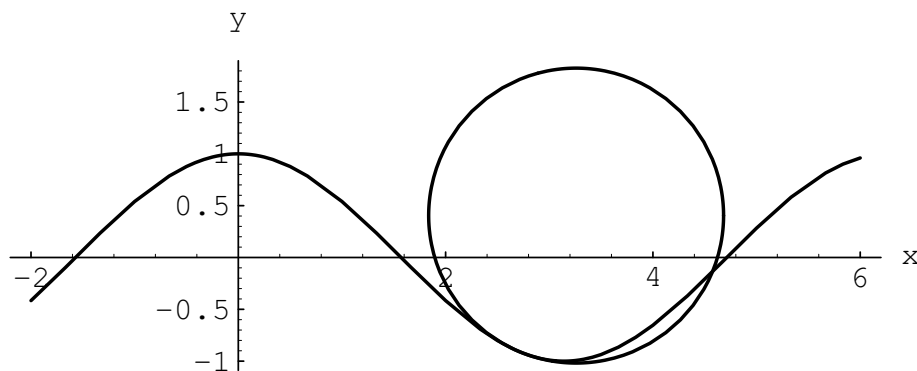


Abbildung 3.11: Die Kurve  $y = \cos x$  und ein Krümmungskreis

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} - \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x} \begin{pmatrix} \sin x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Division durch 0 bei den Nullstellen der  $\cos$ -Funktion entspricht der Tatsache, dass der Krümmungskreis von unten nach oben springen muss. In [Abbildung 3.11](#) sehen Sie die Kurve und den Krümmungskreis bei  $x = 2.7$ . Die Figur wurde erzeugt durch

#### Mathematica

```
Clear[x,y,f,df,ddf,xi,eta,kappa];
f[t_] = Cos[t];
df[t_] = D[f[t],t];
ddf[t_] = D[df[t],t];
kappa[t_] = ddf[t]/(1+ df[t]^2)^(3/2);
xi[x_] = x - (1+ Sin[x]^2)/Cos[x] Sin[x] ;
eta[x_] = Cos[x] - (1+ Sin[x]^2)/Cos[x] ;
x0= 2.7;
g14a = ParametricPlot[ { t ,f[t]},{t,-2,6},
  AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> All,
  AxesLabel ->{"x","y"},
  AxesOrigin ->{0,0},
  DisplayFunction -> Identity];
g14b = ParametricPlot[ {xi[x0]+1/kappa[x0] Cos[t],
  eta[x0]+1/kappa[x0] Sin[t]},
```

```

{t, 0, 2 Pi},
AspectRatio -> Automatic,
PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"x", "y"},
AxesOrigin -> {0, 0},
DisplayFunction -> Identity];
g14=Show[{g14a, g14b}, DisplayFunction -> DisplayFunction]

```



Die obigen Überlegungen und Rechnungen zu Krümmung und Krümmungskreisen können auch für andere Parametrisierungen ausgeführt werden, nicht nur für  $y = f(x)$ . Als Resultat erhält man die Tabelle 3.1. Mit einigem Aufwand kann man zeigen, dass verschiedene Parametrisierungen der selben Kurve auf die selben Resultate für die Krümmung führen, auch wenn die auszuführenden Rechnungen verschieden sind.

Form	$y = f(x)$	$y = y(t)$ $x = x(t)$	$r = f(\theta)$
Krümmung $\kappa$	$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$	$\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$	$\frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$
Mittelpunkt des Kreis	$\xi = x - \frac{1 + (y')^2}{y''} y'$ $\eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$	$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y}$ $\eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}$	$\xi = r \cos \theta - \frac{(r^2 + (r')^2)(r \cos \theta + r' \sin \theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}$ $\eta = r \sin \theta - \frac{(r^2 + (r')^2)(r \sin \theta - r' \cos \theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}$

Tabelle 3.1: Formeln für Krümmungsradien

Die mittlere Spalte lässt sich in allen Situationen anwenden. Mit den Übersetzungen

$$\begin{aligned}
 x(t) &= t & \dot{x}(t) &= 1 & \ddot{x}(t) &= 0 \\
 y(t) &= f(t) & \dot{y}(t) &= f'(t) & \ddot{y}(t) &= f''(t)
 \end{aligned}$$

können wir die erste Spalte als Spezialfall der zweiten erhalten. Mit etwas grösserem Aufwand liesse sich auch die dritte Spalte aus der zweiten herleiten. Wir verzichten auf diese Verifikation.

### 3–21 Beispiel : Die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ . Siehe auch Abbildung 3.12. Für  $t = 0$  sind wir beim Punkt  $(a, 0)$  auf der Ellipse und erhalten

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a & \dot{x}(0) &= 0 & \ddot{x}(0) &= -a \\
 y(0) &= 0 & \dot{y}(0) &= b & \ddot{y}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

und somit

$$\kappa(0) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{0 + ab}{(0 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{b^2}$$

Somit hat der Krümmungskreis einen Radius von  $R = b^2/a$  und der Winkel des Tangentialvektors vergrößert sich entlang der Kurve, weil  $\kappa > 0$ . Für  $t = \pi/2$  sind wir beim Punkt  $(0, b)$  auf der Ellipse und erhalten

$$\begin{aligned} x(\pi/2) &= 0 & \dot{x}(\pi/2) &= -a & \ddot{x}(\pi/2) &= 0 \\ y(\pi/2) &= b & \dot{y}(\pi/2) &= 0 & \ddot{y}(\pi/2) &= -b \end{aligned}$$

und somit

$$\kappa(\pi/2) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab - 0}{(a^2 + 0)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}$$

Somit hat der Krümmungskreis im Punkt  $(0, b)$  einen Radius von  $R = a^2/b$ . ◇

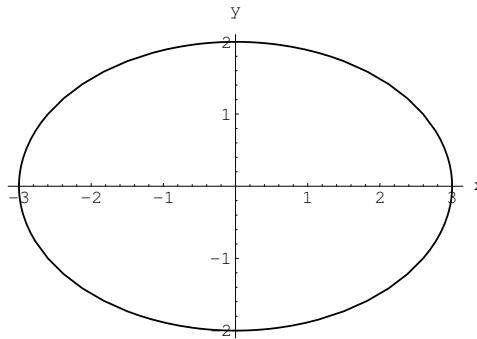


Abbildung 3.12: Eine Ellipse mit Halbachsen  $a = 3$  und  $b = 2$

## 3.2 Kurven in $\mathbb{R}^3$

Die Begriffe **Kurve**, **Parametrisierung**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** lassen sich direkt von zwei auf drei Dimensionen übertragen, einzig die neu dazukommende dritte Komponente muss berücksichtigt werden. Also ist eine Kurve gegeben durch eine Parametrisierung der Form

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq t \leq b$$

und für die Geschwindigkeit gilt

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq t \leq b$$

Ebenso ist der Beschleunigungsvektor gegeben durch

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a \leq t \leq b$$



Die Länge  $L$  einer solchen Kurve kann bestimmt werden durch das Integral

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

**3–22 Beispiel :** In Abbildung 3.13 sehen Sie die Kurve, gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0.3t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

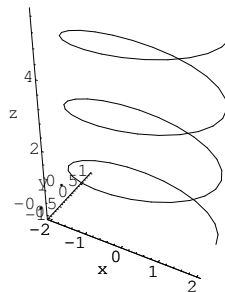


Abbildung 3.13: Eine einfache Kurve in  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

und der Beschleunigungsvektor durch

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

◇

In der Ebene werden meist kartesische  $(x, y)$  oder polare  $(r, \phi)$  Koordinaten eingesetzt. Im Raum verwendet man kartesische Koordinaten, **Zylinderkoordinaten** und **Kugelkoordinaten**.

Für Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

oder auch

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Eine Fläche mit  $\rho = \text{konst}$  entspricht einem Zylinder.

Für Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

oder auch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Eine Fläche mit  $r = \text{konst}$  entspricht einer Kugel.

**3–23 Beispiel :** Eine Kurve sei in Kugelkoordinaten gegeben durch die Parametrisierung

$$r = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = 20\theta \quad \text{wobei} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Da  $r = 1$ , muss die Kurve vollständig auf einer Kugeloberfläche mit Radius 1 liegen. Macht der Winkel  $\theta$  eine halbe Drehung (von oben nach unten), so dreht  $\varphi$  mit 20-facher Geschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn. Somit ergibt sich ein spiralähnliches Gebilde auf einer Kugeloberfläche. Die Kurve macht genau 10 volle Runden auf der Kugel. Die Kurve finden Sie in Abbildung 3.14 dargestellt.

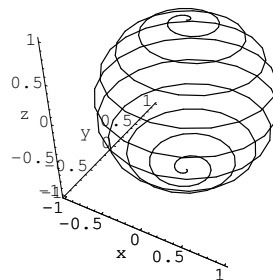


Abbildung 3.14: Eine Spirale auf einer Kugeloberfläche

In kartesischen Koordinaten könnte die selbe Kurve beschrieben werden durch

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin t \cos(20t) \\y(t) &= \sin t \sin(20t) \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\z(t) &= \cos t\end{aligned}$$

◇

### 3.3 Aufgaben

• **Aufgabe 3–1:**

Une courbe est donnée par la paramétrisation

Eine Kurve ist gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (5-t) \sin(t) \\ (5-t) \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{avec/wobei} \quad 0 \leq t \leq 5$$

(a) Esquisser la courbe.  
Zeichne die Kurve.

(b) Un ballon bouge sur la courbe au-dessus par rapport au temps  $t$ . À la hauteur  $z = \pi$ , il est lâché et va bouger avec une vitesse constante. Chercher location et temps de l'intersection avec le plan  $xz$ .

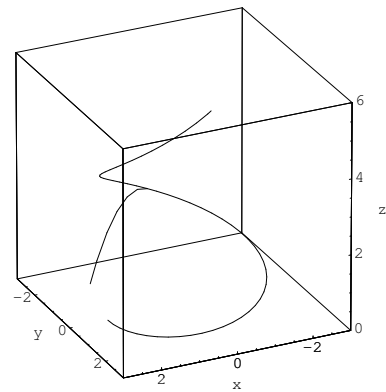
Ein Ball bewegt sich entlang der obigen Kurve mit der Zeit  $t$  als Parameter. Auf der Höhe  $z = \pi$  löst sich der Ball von der Kurve und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Wo und wann durchstösst er die  $xz$ -Ebene?

• **Aufgabe 3-2:**

La position d'un ballon est donnée par la spirale ci-dessous. Pour un certain temps  $t_0$  il est lâché de la courbe et il vol parallèle au plan  $xz$ . La seule force est la gravitation ( $g = -10 \text{ m/s}^2$ ) dans la direction des  $z$ .

Die Position eines Balles ist gegeben durch die untenstehende Spirale. Zu einer bestimmten Zeit  $t_0$  wird der Ball losgelassen und er fliegt parallel zur  $xz$ -Ebene weiter. Die einzige wirkende Kraft ist die Gravitation ( $g = -10 \text{ m/s}^2$ ) in die  $z$ -Richtung.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ \frac{1}{10} t^2 \end{pmatrix}$$



- (a) Trouver le vecteur de vitesse  $\vec{v}(t)$  pour  $t \leq t_0$ .  
 (b) Déterminer le temps  $t_0$  et la location et vitesse au temps  $t = t_0$ .  
 (c) Quand va le ballon toucher le plan des  $xy$  ?

- (a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$  für  $t \leq t_0$ .  
 (b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt  $t_0$  und die Position und Geschwindigkeit zur Zeit  $t_0$ .  
 (c) Wann wird der Ball auf der  $xy$ -Ebene auftreffen?

• **Aufgabe 3-3:**

Eine Kurve ist gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \\ \arctan(t) \end{pmatrix} \quad \text{wobei } t \in \mathbb{R}$$

- (a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$ .  
 (b) Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor  $\vec{a}(t)$ .  
 (c) Skizzieren Sie die Kurve

• **Aufgabe 3-4:**

Ein Radfahrer legt 50 km zurück. Ein Punkt auf dem Reifen des Fahrrades legt einen längeren Weg zurück. Welche Länge hat dieser Weg?

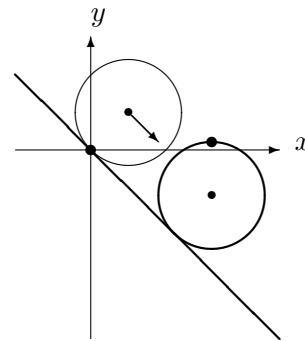
Tipp: Bestimmen Sie die Länge einer Zykloide.

### • Aufgabe 3–5:

Ein Rad mit Radius  $R$  rollt auf einer schiefen Ebene (Winkel  $45^\circ$ ) nach unten. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes ist  $2 \frac{m}{s}$ . Untersuchen Sie den Punkt  $\vec{x}(t)$  des Rades, der zur Zeit  $t = 0$  die Ebene berührt.

- (a) Finden Sie eine Parametrisierung  $\vec{x}(t)$  der Bahn.
- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$ .

Tipp: zuerst die Koordinaten des Kreismittelpunktes parametrisieren.



Une roue de rayon  $R$  roule sur un plan oblique (angle  $45^\circ$ ) vers le bas. La vitesse du centre du roue est  $2 \frac{m}{s}$ . Examiner le point  $\vec{x}(t)$  du roue qui toche le plan au temps  $t = 0$ .

- (a) Trouver la paramétrage  $\vec{x}(t)$ .
- (b) Calculer la vitesse  $\vec{v}(t)$ .

Tip: examiner les coordonnées du centre due roue d'abord.

### • Aufgabe 3–6:

Bei einem Fahrrad mit Radradius  $R = 0.35 \text{ m}$  wird die Radnabe des Vorderrades  $0.05 \text{ m}$  unterhalb des Radmittelpunktes montiert. Dadurch wird sich die Vorderachse ziemlich heftig auf und abwärts bewegen. Das Fahrrad bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von  $20 \text{ km/h}$ .

- (a) Bestimmen Sie die Lage der Radnabe als Funktion der Zeit.
- (b) Berechnen Sie die maximale Beschleunigung, die aufgrund der Auf- und Abwärtsbewegung der Radnabe auftritt.

### • Aufgabe 3–7:

Von einer Säule mit Radius  $R$  und Zentrum im Ursprung wird ein Seil abgewickelt mit den folgenden Bedingungen:

1. Der Seilanfang ist zuerst beim Punkt  $(R, 0)$
2. Das Seil ist zu jeder Zeit gestreckt und die Seil-Gerade ist tangential zur Seilrolle.

Beschreiben Sie die Koordinaten des Seilanfangs als Funktion des Winkels zwischen  $x$ -Achse und der Verbindung Ursprung–Kontaktpunkt. Skizzieren Sie die vom Endpunkt des Seils durchlaufene Kurve.

Diese Kurve wird von einem Hund durchlaufen, falls seine Leine an der Säule befestigt ist und der Hund um die Säule herumrennt.

### • Aufgabe 3–8:

Der Minutenzeiger einer grossen Uhr ist 1m lang. An seiner Spitze ist der 0.1m lange Sekundenzeiger angebracht. Zur Zeit  $t = 0$  (gemessen in Minuten) zeigen beide senkrecht nach oben. Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegt beim Befestigungspunkt des Minutenzeigers. Der Motor des Sekundenzeigers macht eine Umdrehung pro Minute.

- (a) Finden Sie die Parametrisierung der von der Spitze des Sekundenzeigers durchlaufenen Kurve.
- (b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t)$ .

• **Aufgabe 3–9:**

Die Zeiger einer Turmuhr sind 3 m und 2 m lang. Betrachten Sie diese Uhr um 4 Uhr.

- (a) Wie weit sind die Zeigerspitzen voneinander entfernt?
- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Zeigerspitzen.
- (c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die Spitzen einander nähern.

• **Aufgabe 3–10:**

Ein Kreis mit Radius  $R \leq 1$  rollt auf einer  $\sin$ -Kurve, d.h. der Berührungspunkt ist gegeben durch die Koordinaten  $(x, \sin x)$ . Finden Sie die Parametrisierung (Parameter  $x$ ) des Mittelpunktes dieses rollenden Kreises.

• **Aufgabe 3–11:**

Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve  $y = e^x$ .

• **Aufgabe 3–12:**

Bestimmen Sie die Krümmung der Spirale  $r = e^\theta$ .

• **Aufgabe 3–13:**

**Hypozykloide** wird eine Kurve genannt, die von einem Peripheriepunkt eines Kreises (Radius  $r$ ) beschrieben wird, wenn dieser auf der Innenseite eines anderen Kreises (Radius  $R$ ) abrollt. Zeigen Sie, dass eine mögliche Parametrisierung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x(\phi) &= (R - r) \cos \phi + a \cos \left( \phi \frac{R}{r} - \phi \right) \\ y(\phi) &= (R - r) \sin \phi - a \sin \left( \phi \frac{R}{r} - \phi \right) \end{aligned}$$

• **Aufgabe 3–14:**

Rollt ein Kreisring mit seinem Innenkreis (Radius  $a$ ) auf einem festen Kreis (Radius  $b < a$ ) ab, so beschreibt ein Punkt  $P$ , der mit dem Ring fest verbunden ist, eine **Epizykloide**. Der Punkt  $P$  habe einen Abstand  $d > 0$  vom Mittelpunkt des Kreisrings. Finden Sie eine Parametrisierung. Epizykloiden werden bei der Konstruktion von Wankelmotoren verwendet [BurgHafWill90, p.68].

L'aiguille de minutes d'une montre énorme a une longueur de 1 m. À la pointe de l'aiguille de minutes on a attaché l'aiguille de secondes d'une longueur de 0.1 m. Pour  $t = 0$  (en minutes) les deux aiguilles pointent verticalement vers le haut. L'origine du système des coordonnées cartésiennes se trouve au point d'attachement de l'aiguille de minutes. Le moteur de l'aiguille de secondes fait un tour complet en une minute.

- (a) Trouver la paramétrisation de la courbe parcourue par la pointe de l'aiguille de secondes.
- (b) Trouver le vecteur  $\vec{v}(t)$  de vitesse.

Le cercle intérieure (rayon  $a$ ) d'une couronne circulaire roule sur un cercle fixe de rayon  $b$ , avec  $b < a$ . Le point  $P$  sur la couronne a une distance  $d > 0$  du centre et il var parcourir une **épicycloïde**. Trouver une paramétrage. Des épicycloïdes sont utiliser dans des moteurs Wankel.

• **Aufgabe 3–15:**

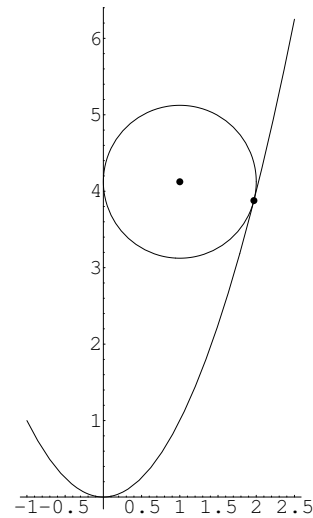
Untersuchen Sie Kreise mit Radius  $R = 1$ , tangential an den Graphen von  $y = x^2$ .

- (a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes  $\vec{M}$  als Funktion von  $x$ . Der Kontaktpunkt liegt bei  $(x, x^2)$ . Der Kreis ist tangential zur Kurve und liegt oberhalb der Kurve.
- (b) Berechnen Sie die Koordinate  $x_s$  des Berührungspunktes, falls der Kreis auch die  $y$ -Achse berührt. Diese Situation ist in der Graphik rechts gezeichnet. Anschliessend sind die Mittelpunktskoordinaten anzugeben. Es ist erlaubt/notwendig den Taschenrechner zu verwenden.

Examiner les cercles de rayon  $R = 1$ , tangentiels au graphe de la fonction  $y = x^2$ .

- (a) Trouver les coordonnées du centre  $\vec{M}$  du cercle comme fonction de  $x$ . Le point de contact est  $(x, x^2)$ . Le cercle est tangentiel à la courbe et au-dessus de la courbe.
- (b) Trouver la coordonnées  $x_s$  du point de contact, si le cercle aussi touche l'axe des  $y$ . Cette situation est esquissée à droite. Puis trouver le centre du cercle.

Il est permis/nécessaire d'utiliser la calculatrice.



• **Aufgabe 3–16:**

Ein Ball wird für  $0 \leq t \leq 1$  entlang einer Bahn gemäss der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

beschleunigt. Zur Zeit  $t = 1$  verlässt er die Bahn, und es wirkt nur noch die Gravitationskraft in negativer  $y$ -Richtung ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ).

- (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  zur Zeit  $t = 1$ .
- (b) Wo und wann trifft der Ball auf die  $x$ -Achse auf?  
Tipp: Wurfparabel

• **Aufgabe 3–17:**

Un ballon bouge pour  $0 \leq t \leq 2$  avec la paramétrisation ci-dessous.

Ein Ball wird entlang einer Bahn beschleunigt für  $0 \leq t \leq 2$  gemäss der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{pour/für } 0 \leq t \leq 2$$

Pour  $t = 2$  il quitte cette courbe et il n'y a que la force de gravitation dans la direction  $-z$  avec  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

Zur Zeit  $t = 2$  verlässt er die Bahn, und es wirkt nur noch die Gravitationskraft in die negative  $z$ -Richtung ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ).

- (a) Calculer location  $\vec{x}(t)$  et vitesse  $\vec{v}(t)$  du ballon pour  $t = 2$ .
- (a) Bestimmen Sie Ort  $\vec{x}(t)$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  zur Zeit  $t = 2$ .
- (b) Trouver location et temps d'intersection de ce ballon avec le plan  $xy$ .  
Tip: parabole du chute libre.
- (b) Wo und wann trifft der Ball auf die  $xy$ -Ebene auf?  
Tipp: Wurfparabel

### • Aufgabe 3–18:

Un ballon bouge pour  $0 \leq t \leq t_0$  avec la paramétrisation ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \sin(t) \\ e^{2t} \cos(t) \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{pour/für } 0 \leq t \leq t_0$$

Le ballon coup le plan des  $xz$  et à partir de ce temps  $t_0$  il n'y a que la force de gravitation dans la direction  $-z$  avec  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

- (a) Calculer location  $\vec{x}(t_0)$  et vitesse  $\vec{v}(t_0)$  du ballon pour  $t = t_0$ .
- (b) Trouver location et temps d'intersection de ce ballon avec le plan  $xy$ .  
Tip: parabole du chute libre.

### • Aufgabe 3–19:

Ein ideal elastischer Ball fällt aus einer Höhe von 1.5 m auf ein Brett mit einer Steigung von  $1/4$ . Der Auftreffpunkt ist 0.5 m über der Unterlage. Die Schnelligkeit vor und nach dem Auftreffen sind gleich gross. Die Schnelligkeit nach einem Fall der Höhe  $h$  ist gegeben durch  $v = \sqrt{2gh}$ . Verwenden Sie  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

- (a) Beim Aufprall gilt das Gesetz: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit (als Vektor) der Wurfparabel nach dem Aufprall.
- (b) Geben Sie eine Parametrisierung der Wurfparabel des Balles nach dem Auftreffen auf dem Brett.
- (c) Wo und wann trifft der Ball auf den Boden auf?

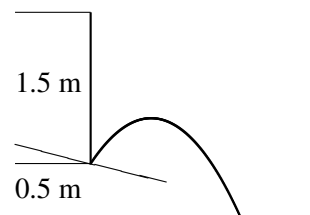
Ein Ball wird entlang einer Bahn beschleunigt für  $0 \leq t \leq t_0$  gemäss der Parametrisierung

Der Ball schneidet die  $xz$ -Ebene und ab diesem Zeitpunkt  $t_0$  wirkt nur noch die Gravitationskraft in die negative  $z$ -Richtung ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ).

- (a) Bestimmen Sie Ort  $\vec{x}(t_0)$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t_0)$  zur Zeit  $t = t_0$ .
- (b) Wo und wann trifft der Ball auf die  $xy$ -Ebene auf?  
Tipp: Wurfparabel

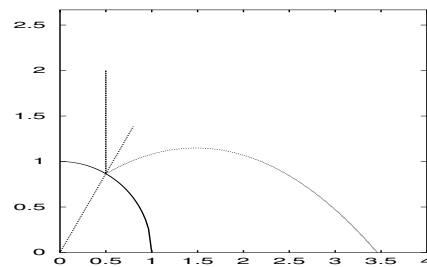
Une petite balle élastique tombe de 1.5 mètres sur une planche avec une pente de  $1/4$ . Le point de contact se trouve à une hauteur de 0.5 m au dessus du sol. Les rapidités avant et après le contact sont égales. Après une chute de hauteur  $h$  la rapidité est donné par  $v = \sqrt{2gh}$ . Utiliser  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

- (a) L'angle de rebondissement est le même que l'angle d'incidence. Trouver la vitesse initiale (comme vecteur) de la trajectoire de la balle après son contact avec la planche.
- (b) Trouver une paramétrisation de la trajectoire parabolique de la balle après son contact avec la planche.
- (c) Quand et où la balle touche le sol.



### • Aufgabe 3–20:

Ein zylinderförmiger Öltank mit Radius 1 m ist zur Hälfte eingegraben. Auf einer Höhe von 2 m und in einer horizontalen Distanz von 0.5 m von der Zylinderachse (beim Punkt  $(0.5, 2)$ ) wird ein Ball losgelassen. Er wird den Tank treffen und von dort wieder aufspringen. Der Ball sei ideal elastisch, d.h. die Schnelligkeit vor und nach dem Auftreffen sind gleich. Alle Rechnungen können mit drei signifikanten Stellen ausgeführt werden



- Wo und mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball den Tank?
- Beim Aufprall gilt das Gesetz: der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit (als Vektor) der Wurfparabel nach dem Aufprall.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Wurfparabel des Balles nach dem Auftreffen auf den Tank. Tipp: entlang der Wurfparabel gilt  $\ddot{x}(t) = 0$  und  $\ddot{y}(t) = -g$
- Wo trifft der Ball auf den Boden auf?

Une petite balle élastique tombe de 2 mètres sur un réservoir cylindrique à moitié enterré. Les coordonnées du point initial sont  $(0.5, 2)$ . Le rayon du réservoir est 1 mètre. La balle arrive au réservoir avec une certaine vitesse, et repart avec la même vitesse. Calculer avec trois chiffres significatifs.

- Trouver le point de contact et la vitesse à ce moment.
- L'angle de rebondissement est le même que l'angle d'incidence. Trouver la vitesse initiale (comme vecteur) de la trajectoire de la balle après son contact avec le réservoir.
- Trouver une paramétrisation de la trajectoire de la balle après son contact avec le réservoir. Indication: on sait que  $\ddot{x}(t) = 0$  et  $\ddot{y}(t) = -g$ .
- Calculer la position  $P$  de la balle lorsqu'elle touche le sol.

### • Aufgabe 3–21:

Une masse  $m$  bouge de la façon donnée par la description suivante

- point initial  $(x_0, y_0) = (-2, 2)$  avec vitesse 0
- en suivant un cercle de rayon 2 et de centre  $(0, 2)$  pour arriver à un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe des  $y$ . Ignorer la friction.
- chute libre

La seule force externe est la gravitation dans la direction des  $y$  négatif avec  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

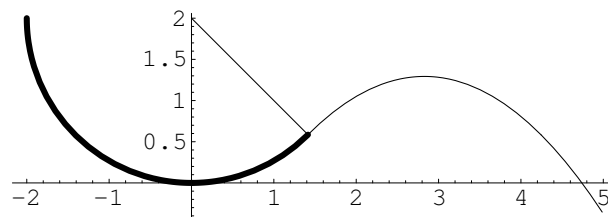
Eine Masse  $m$  bewegt sich gemäss der folgenden Beschreibung

- Startpunkt bei  $(x_0, y_0) = (-2, 2)$  mit Geschwindigkeit 0
- entlang einem Kreis mit Radius 2 und Zentrum bei  $(0, 2)$  bis zu einem Winkel von  $45^\circ$  zur  $y$ -Achse. Reibung kann vernachlässigt werden.
- freier Fall

Die einzige externe Kraft ist die Gravitation in die negative  $y$ -Richtung mit  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



- (a) Déterminer la vitesse  $v_1$  et le vecteur de vitesse au moment où la masse quitte le cercle. (Tip: énergie  $\frac{m}{2} v^2 = m g h$ )
- (b) Trouver une paramétrisation de la courbe dans la phase ‘chute libre’.
- (c) Quand, où et avec quel angle (par rapport à l’horizontale) la masse va-t-elle toucher le fond ( $y = 0$ )?
- (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $v_1$  und den Geschwindigkeitsvektor beim Verlassen der Kreisbahn. (Tipp: Energie  $\frac{m}{2} v^2 = m g h$ )
- (b) Finden Sie eine Parametrisierung der Flugkurve in der Phase ‘freier Fall’.
- (c) Wann, wo und mit welchem Winkel tritt die Masse auf dem Boden ( $y = 0$ ) auf?



• **Aufgabe 3–22:**

Untersuchen Sie die Masse des vorangehenden Problems während der Bewegung auf dem Kreis.

- (a) Finden Sie eine mögliche Parametrisierung des Kreissegmentes.
- (b) Stellen Sie ein Integral auf um die Reisezeit  $T$  entlang des Kreisbogens zu berechnen.
- (c) Finden Sie den numerischen Wert von  $T$ .

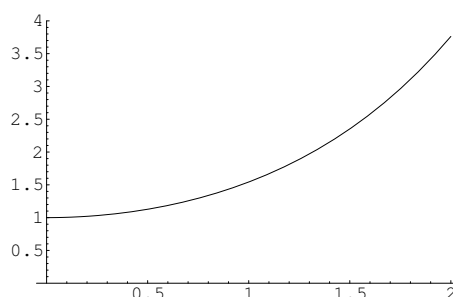
• **Aufgabe 3–23:**

Untersuchen Sie die Kurve

Examiner la courbe

$$y(x) = \cosh(x) \quad \text{für/pour} \quad 0 \leq x \leq 2$$

- (a) Geben Sie das Integral an, um die Länge dieser Kurve zu bestimmen.
- (b) Berechnen Sie den Wert des Integrals.
- (c) Zerlegen Sie das Intervall  $[0, 2]$  in vier Teilintervalle gleicher Länge und verwenden Sie das Verfahren von Simpson um das obige Integral approximativ zu bestimmen.
- (d) Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler in der obigen numerischen Rechnung.  
Tipp:  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$
- (a) Donner l’intégral pour la longueur de cette courbe.
- (b) Calculer la valeur de cette intégrale.
- (c) Diviser l’intervalle  $[0, 2]$  en quatre sections de même longueur. Puis trouver une approximation à l’aide de la formule de Simpson.
- (d) Trouver une borne maximal pour l’erreur de l’approximation ci-dessus.  
Tip:  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$



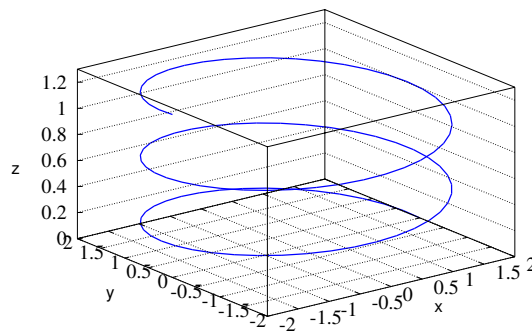
• **Aufgabe 3–24:**

Die untenstehende Kurve liegt auf der Aussenfläche eines Zylinders mit Radius 2 und der  $z$ -Achse als Achse. Ein Massenpunkt bewegt sich entlang dieser Kurve für Zeiten  $0 \leq t \leq 5$ . Die absolute Geschwindigkeit und die Komponente in  $z$ -Richtung sind konstant. Die Masse startet auf der Höhe  $z = 0$  und ist zur Zeit  $t = 5$  auf der Höhe  $z = \frac{5}{4}$ .

- (a) Finden Sie die Parametrisierung des Massenpunktes entlang dieser Kurve.
- (b) Bestimmen Sie die Länge dieser Kurve.
- (c) Schreiben Sie die Integrale an, um die Schwerpunktskoordinaten  $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$  der Kurve zu bestimmen.
- (d) Berechnen Sie  $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ .

La courbe montré ci-dessous se trouve sur la face d'un cylindre de rayon 2 avec l'axe des  $z$  comme axe du cylindre. Un point de masse bouge sur cette courbe pour les temps  $0 \leq t \leq 5$ . La vitesse absolue et sa composante dans la direction  $z$  sont constantes. Le point de départ se trouve sur le niveau  $z = 0$  et pour le temps  $t = 5$  on sait que  $z = \frac{5}{4}$ .

- (a) Trouver la paramétrisation pour cet point de masse suivant la courbe.
- (b) Trouver la longueur de la courbe.
- (c) Donner les intégrales pour calculer les coordonnées du centre de gravité  $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$  de la courbe.
- (d) Calculer  $\vec{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ .



### 3.3.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

**Lösung zu Aufgabe 3–1 :**

- (a) Eine sich im Uhrzeigersinn nach oben drehende Spirale
- (b)

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (5-t) \cos(t) - \sin(t) \\ (5-t) \sin(t) - \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z = \pi$  für  $t = \pi$  und somit

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -(5-\pi) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Fluggeraden mit Parameter  $s$

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(5-\pi) \\ \pi \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -(5-\pi) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit der  $xz$ -Ebene entspricht der Bedingung  $y(s) = 0$  und somit  $s = 5 - \pi$ . Es gilt

$$\vec{x}(5-\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(5-\pi) \\ \pi \end{pmatrix} + (5-\pi) \begin{pmatrix} -(5-\pi) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(5-\pi)^2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Da  $s$  die Flugzeit auf der Geraden ist die absolute Zeit beim Durchstosspunkt gegeben durch  $t = \pi + s = 5$  und beim Punkt  $(-(5-\pi)^2, 0, 5)$ .

### Lösung zu Aufgabe 3-2 :

(a) Eine einfache Ableitung ergibt

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ \frac{1}{5} t \end{pmatrix}$$

(b) Damit die Flugbahn parallel zur  $xz$ -Ebene ist, muss  $\dot{y}(t_0) = 0$  sein, d.h.  $\cos t_0 = 0$ . Aufgrund der Graphik ist somit  $t_0 = 3\pi/2$  und

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -2 \sin t_0 \\ 2 \cos t_0 \\ \frac{1}{5} t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ \frac{3\pi}{10} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{9\pi^2}{40} \end{pmatrix}$$

(c) Die Parametrisierung der Flugparabel ist

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \frac{9\pi^2}{40} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ \frac{3\pi}{10} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \tau^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Hierbei ist  $\tau$  die Flugzeit nach dem Verlassen der Spiralbahn. Die zu lösende Gleichung ist  $z(\tau) = 0$ , d.h.

$$\frac{9\pi^2}{40} + \tau \frac{3\pi}{10} - \frac{g}{2} \tau^2 = 0$$

Die positive Lösung dieser Gleichung ist

$$\tau_0 = \frac{3\pi(1 + \sqrt{51})}{100} \approx 0.76731$$

Das ergibt eine Auftreffzeit von ca.  $\frac{3\pi}{2} + 0.76731 \approx 5.48$ .

### Lösung zu Aufgabe 3-3 :

(a)

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -4 \sin(t) \\ 4 \cos(t) \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cos(t) \\ -4 \sin(t) \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

(c) Siehe Abbildung 3.15. Die Figur wurde erzeugt mit *Mathematica* durch die Befehle**Mathematica**

```
Clear[x,y,z];
x[t_] := 4 Cos[t];
y[t_] := 4 Sin[t];
z[t_] := ArcTan[t];
ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]},{t,-20,20},
  AspectRatio->Automatic,
  PlotRange->All,
  AxesLabel->{"x","y","z"},
  AxesEdge->{{-1,-1},{-1,-1},{-1,-1}},
  Boxed->False,
  PlotPoints->200
];
```

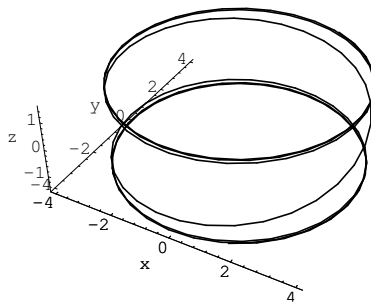


Abbildung 3.15: Lösungskurve zur Aufgabe 3–3

**Lösung zu Aufgabe 3–4 :** Bei einem Radradius von  $R$  bewegt sich ein Punkt des Reifens entlang einer Zykloide.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ R \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{R} \\ -\cos \frac{t}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - R \sin \frac{t}{R} \\ R - R \cos \frac{t}{R} \end{pmatrix}$$

Für Zeiten  $0 \leq t \leq 2\pi R$  macht das Rad eine volle Umdrehung und der Radfahrer legt eine Strecke von  $2\pi R$  zurück. In der selben Zeit legt der Punkt auf dem Rad eine Strecke  $L$  zurück, wobei  $L$  die Länge eines Zykloidenbogens ist. Es gilt

$$L = \int_0^{2\pi R} \|v(t)\| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi R} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{t}{R} \\ \sin \frac{t}{R} \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^{2\pi R} \sqrt{(1 - 2 \cos \frac{t}{R} + \cos^2 \frac{t}{R}) + \sin^2 \frac{t}{R}} dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi R} \sqrt{1 - \cos \frac{t}{R}} dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi R} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2R}} dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi R} \sin \frac{t}{2R} dt \\
&= 4R \left( -\cos \frac{t}{2R} \right) \Big|_0^{2\pi R} \\
&= 8R
\end{aligned}$$

Somit ist das Verhältnis der zurückgelegten Längen gegeben durch

$$\frac{\text{Distanz von Punkt auf Rad}}{\text{Distanz von Radfahrer}} = \frac{8R}{2\pi R} = \frac{8}{2\pi}$$

Legt der Radfahrer also 50 km zurück, so durchläuft der Punkt auf dem Rad einen Weg von ca. 63.7 km.

#### Lösung zu Aufgabe 3–5 :

- (a) Zur Zeit  $t = 0$  ist der Mittelpunkt des Rades bei  $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})^T$ . Er bewegt sich in die Richtung  $(1, -1)^T$  mit Schnelligkeit 2. Das ergibt für den Mittelpunkt

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{2t}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} R + 2t \\ R - 2t \end{pmatrix}$$

Der Vektor vom Radmittelpunkt zum zu untersuchenden Punkt hat die Länge  $R$ , und der Winkel ist gegeben durch

$$\alpha(t) = -\frac{3\pi}{4} - t \frac{2}{R}$$

Somit haben wir für den zu untersuchenden Punkt

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} R + 2t \\ R - 2t \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \cos(-\frac{3\pi}{4} - t \frac{2}{R}) \\ \sin(-\frac{3\pi}{4} - t \frac{2}{R}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} R + 2t \\ R - 2t \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4} + t \frac{2}{R}) \\ -\sin(\frac{3\pi}{4} + t \frac{2}{R}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Andere Lösungsverfahren sind möglich.

- (b) Ableiten bezüglich  $t$  liefert den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin(\frac{3\pi}{4} + t \frac{2}{R}) \\ -\cos(\frac{3\pi}{4} + t \frac{2}{R}) \end{pmatrix}$$

Eine *Mathematica*-Graphik kann erzeugt werden durch

**Mathematica**

```

R=1;
x[t_]=1/Sqrt[2]*{R+2 t, R-2 t}
+ R*{Cos[-3/4 Pi -t 2/R], Sin[-3/4 Pi -t 2/R]};
ParametricPlot[x[t],{t,0,5},AspectRatio->Automatic];

```

**Lösung zu Aufgabe 3–6 :** Zuerst bestimmen wir die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aus der Beziehung

$$\omega R = v = 20 \frac{km}{h} = \frac{50}{9} \frac{m}{sec}$$

und somit

$$\omega = \frac{50}{9 \cdot 0.35} \frac{1}{sec} = \frac{1000}{63} \frac{1}{sec}$$

- (a) Die Kurve entspricht einer verkürzten Zykloide mit  $R = 0.35 \text{ m}$  und  $r = 0.05 \text{ m}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \omega R t \\ R \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

- (b) Für den Geschwindigkeitsvektor der Radnabe erhalten wir somit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \end{pmatrix} + \omega r \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

und für die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \omega^2 r \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Somit ist der Betrag der Beschleunigung konstant gleich

$$\|\vec{a}\| = \omega^2 r \approx 12.6 \frac{m}{s^2}$$

Der Beschleunigungsvektor dreht sich auf einem Kreis. Die resultierende Beschleunigung ist grösser als die Beschleunigung durch die Gravitationskraft der Erde ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ) und das Vorderrad würde zeitweise abheben. An ein ruhiges Rollen ist mit diesem Rad nicht zu denken.

**Lösung zu Aufgabe 3–7 :** Bei einem Winkel von  $\phi$  wurde  $L = R\phi$  Seil bereits abgewickelt und der Kontaktpunkt mit der Seilrolle ist  $(R \cos \phi, R \sin \phi)$ . Das Seil „zeigt“ in die Richtung  $(\sin \phi, -\cos \phi)$ . Somit ist die Parametrisierung gegeben durch

$$\vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix} + R\phi \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix}$$

Eine Skizze ist in Abbildung 3.16 wurde mit *Mathematica* erzeugt mit dem Code

#### Mathematica

```

Clear[x,y,r];
r=1;
x[t_]:=r (Cos[t] + t Sin[t]);
y[t_]:=r (Sin[t] - t Cos[t]);
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,8},
  AspectRatio->Automatic,
  PlotRange->All,
  AxesLabel->{"x","y"},
  AxesOrigin->{0,0}];

```

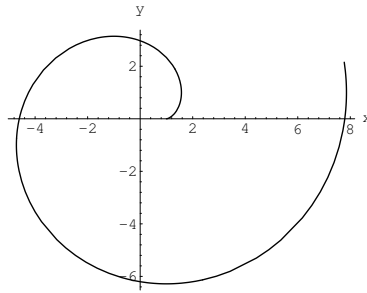


Abbildung 3.16: Seil von einer Rolle abrollen

**Lösung zu Aufgabe 3–8 :**

- (a) Die Zeit  $t$  sei in Minuten gemessen. Dann gilt für den Winkel des Minutenzeigers  $\phi_1$  bezüglich der vertikalen  $\phi_1 = \frac{2\pi}{60} t$  und für den Winkel  $\phi_2$  des Sekundenzeigers  $\phi_2 = 2\pi t$ . Somit gilt für die Koordinaten der Spitze des Minutenzeigers

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \sin \phi_1 + 0.1 \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ y(t) &= 1 \cos \phi_1 + 0.1 \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

oder in vektorieller Form

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi}{60} t) \\ \cos(\frac{2\pi}{60} t) \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi 61}{60} t) \\ \cos(\frac{2\pi 61}{60} t) \end{pmatrix}$$

- (b) Sorgfältiges Ableiten des obigen Ausdrucks ergibt

$$\vec{v}(t) = \frac{2\pi}{60} \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{60} t) \\ -\sin(\frac{2\pi}{60} t) \end{pmatrix} + 0.1 \frac{2\pi 61}{60} \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi 61}{60} t) \\ -\sin(\frac{2\pi 61}{60} t) \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 3–10 :**

$$\begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix} + \frac{R}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \begin{pmatrix} -\cos x \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 3–11 :**

$$\kappa(x) = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$

**Lösung zu Aufgabe 3–12 :**

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}} = \frac{e^{2\theta} + 2e^{2\theta} - e^{2\theta}}{(e^{2\theta} + e^{2\theta})^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\theta}$$

**Lösung zu Aufgabe 3–14 :** Zur „Zeit“  $t = 0$  sei der Mittelpunkt des Kreisringes bei  $(b - a, 0)$  und der Punkt  $P$  bei  $(b - a + d, 0)$ .  $t$  entspricht dem Winkel des Berührungspunktes  $\vec{A}$  des festen Kreises mit dem Kreisring. Es gilt

$$\vec{A} = b \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

und somit ist der Mittelpunkt des Kreisringes bei

$$\vec{M} = (b - a) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Wegen der Abrollbedingung hat sich der Kreisring um einen Winkel  $\phi$  gedreht, wobei

$$a(t - \phi) = bt \quad \text{oder} \quad \phi = \frac{a - b}{a} t$$

Somit befindet sich der Punkt  $\vec{P}$  bei

$$\vec{P} = (b - a) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \cos(\frac{a-b}{a} t) \\ \sin(\frac{a-b}{a} t) \end{pmatrix}$$

### Lösung zu Aufgabe 3–15 :

- (a) Ein Tangentialvektor ist gegeben durch  $(1, 2x)^T$  und somit ist  $(-2x, 1)$  ein nach oben zeigender Normalenvektor. Durch Skalierung auf Länge  $R$  erhalten wir die Koordinaten des Kreismittelpunktes

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + \frac{R}{\sqrt{1 + (2x)^2}} \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Die  $x$ -Koordinate des Mittelpunktes muss  $R$  sein, damit der Kreis die  $y$ -Achse berührt. Das führt auf eine Gleichung für die die  $x$ -Koordinate  $x_s$  der Kontaktpunktes. Diese kann mit dem Taschenrechner gelöst werden, oder durch quadrieren und multiplizieren mit geeigneten Termen entsteht eine Gleichung vierter Ordnung.

$$R = x + \frac{R}{\sqrt{1 + (2x)^2}} (-2x)$$

$$1 - 2x + x^2 - 8x^3 + 4x^4 = 0$$

Für  $R = 1$  hat diese Gleichung vierten Grades zwei reelle Lösungen  $x_1 \approx 0.387464$  und  $x_s = x_2 \approx 1.96925$  die zweite ist hier relevant. Somit ist  $y_s = x_s^2 \approx 3.878$  und wir erhalten die Mittelpunktskoordinaten

$$\vec{M} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 4.12402 \end{pmatrix}$$

### Lösung zu Aufgabe 3–16 :

- (a)

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (b) Sei  $s$  die Flugzeit auf der Wurfparabel (d.h.  $s = t - 1$  für  $t \geq 1$ ). Aufgrund der wirkenden Kräfte muss gelten

$$\frac{d^2}{ds^2} x(s) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{ds^2} y(s) = -g$$

Das führt mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



Zu lösen ist also die Gleichung

$$y(s) = 1 + 4s - \frac{g}{2}s^2 = 1 + 4s - 5s^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{10} (4 \pm \sqrt{16 + 20}) = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Offensichtlich ist nur die Lösung  $s = 1$  relevant, und es gilt

$$x(1) = 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Somit trifft der Ball 2 Sec nach dem Start bei  $x = 3$  auf den Boden auf.

### Lösung zu Aufgabe 3–17 :

(a)

$$\vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b) Sei  $s$  die Flugzeit auf der Wurfparabel ( d.h.  $s = t - 2$  für  $t \geq 2$ ). Aufgrund der wirkenden Kräfte muss gelten

$$\frac{d^2}{ds^2} x(s) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} y(s) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{ds^2} z(s) = -g$$

Das führt mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also die Gleichung

$$z(s) = 8 + 12s - \frac{g}{2}s^2 = 8 + 12s - 5s^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{10} (12 \pm \sqrt{144 + 160}) = \begin{cases} 2.94 \\ -0.54 \end{cases}$$

Da die Flugzeit positiv sein muss, ist nur die Lösung  $s_1 = 2.94$  relevant und es gilt

$$\begin{pmatrix} x(s_1) \\ y(s_1) \\ z(s_1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + 2.94 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{2.94^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 15.8 \\ -31.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit trifft der Ball 2 + 2.94 Sec nach dem Start bei  $x \approx 15.8$  und  $y \approx -31.5$  auf den Boden auf.

### Lösung zu Aufgabe 3–18 :

- (a) Beim Schnitt durch die  $xz$ -Ebene gilt  $y = 0$  und somit muss  $\cos(t) = 0$  sein. Daraus folgt  $t_0 = \pi/2$ .

$$\vec{x}(\pi/2) = \begin{pmatrix} e^\pi \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(t) + 2\sin(t)) \\ e^{2t}(-\sin(t) + 2\cos(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 2e^\pi \\ -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Sei  $s$  die Flugzeit auf der Wurfparabel (d.h.  $s = t - \frac{\pi}{2}$  für  $t \geq \frac{\pi}{2}$ ). Aufgrund der wirkenden Kräfte muss gelten

$$\frac{d^2}{ds^2} x(s) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} y(s) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{ds^2} z(s) = -g$$

Das führt mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\pi \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2e^\pi \\ -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also die Gleichung

$$z(s) = 20 - \frac{g}{2} s^2 = 20 - 5s^2 = 0$$

mit der positiven Lösung  $s = +2$ . Es gilt

$$\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \\ z(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\pi \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2e^\pi \\ -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^\pi \\ -2e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 115.70 \\ -46.281 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit trifft der Ball  $\pi/2 + 2$  sec nach dem Start bei  $x \approx 115.7$  und  $y \approx -46.28$  auf den Boden auf.

### Lösung zu Aufgabe 3–19 :

- (a) Der Auftreffpunkt hat die Koordinaten  $(0, 0.5)$ , und der Ball fällt um 1.5 m. Die Endgeschwindigkeit ist  $v = \sqrt{2gh} \approx 5.48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Die Gerade hat einen Steigungswinkel von  $-\beta = -\arctan 0.25$ . Der Geschwindigkeitsvektor steigt mit einem Winkel von  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta$ . Somit hat der Geschwindigkeitsvektor eine Steigung von  $\alpha$  und die oben berechnete Länge.

$$\vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \sin(2\beta) \\ \cos(2\beta) \end{pmatrix} \approx 5.48 \begin{pmatrix} 0.470 \\ 0.882 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.57752 \\ 4.83285 \end{pmatrix}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ g/2 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.57752 \\ 4.83285 \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Die zu lösende Gleichung ist  $y(t) = 0$ , d.h.

$$0.5 + t 4.83285 - t^2 5 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen

$$t_1 \approx -0.0942654 \quad \text{und} \quad t_2 \approx 1.06083$$

Offensichtlich kommt nur die zweite Auftreffzeit  $t_2 = 1.06$  in Frage, und als zugehörigen Wert erhalten wir  $x(t) = 2.57752 t_2 \approx 2.734$  m.

**Lösung zu Aufgabe 3–20 :**

$$\frac{m}{2} v^2 = m g h \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2 g h}$$

- (a) Der Auftreffpunkt hat die Koordinaten  $(0.5, \sqrt{3/4})$  und der Ball fällt somit um  $h = 2 - \sqrt{3/4} \text{ m} \approx 1.134 \text{ m}$ . Die Geschwindigkeit ist  $v = \sqrt{2 g h} \approx 4.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .
- (b) Die vertikale Fallgerade schliesst mit der Verbindungsgerade zum Ursprung beim Punkt  $(0.5, \sqrt{3/4})$  einen Winkel von  $30^\circ$  ein. Somit hat der Geschwindigkeitsvektor eine Steigung von  $30^\circ$  und die oben berechnete Länge.

$$\vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix} \approx 4.717 \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.085 \\ 2.358 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ g/2 \end{pmatrix} \\ \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ \sqrt{3/4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4.085 \\ 2.358 \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4.905 \end{pmatrix}$$

- (d) Die zu lösende Gleichung ist  $y(t) = 0$ , d.h.

$$\sqrt{3/4} + t \cdot 2.358 - t^2 \cdot 4.905 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen

$$t_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot 4.905} \left( 2.358 \pm \sqrt{2.358^2 + 4 \cdot 4.905 \cdot \sqrt{3/4}} \right) = \begin{cases} 0.72445 \\ -0.24372 \end{cases}$$

Offensichtlich kommt nur die erste Auftreffzeit  $t = 0.72445$  in Frage und als zugehörigen Wert erhalten wir  $x(t) = 3.45938 \text{ m}$ .

**Lösung zu Aufgabe 3–21 :**

- (a) Wegen  $h = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$  gilt

$$v_1 = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2}} \approx 5.3183 \quad [\text{m/s}]$$

Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in die Richtung  $(1, 1)$  und somit

$$\vec{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.7606 \\ 3.7606 \end{pmatrix}$$

- (b) Die Wurfparabel kann bezüglich der Zeit  $t$  parametrisiert werden.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} + t v_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- (c) Die Bedingung ist  $y(t) = 0$ , d.h.

$$y(t) = 2 - \sqrt{2} + t \frac{v_1}{\sqrt{2}} - \frac{g}{2} t^2 = 0.5858 + 3.7606 t - 5 t^2 = 0$$

Die positive Lösung ist  $t_1 \approx 0.8846$  [s] somit ist der Kontaktpunkt bei  $x(t_1) \approx 4.7407$  [m]. Die Flugrichtung ist bestimmt durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.7606 \\ -5.08506 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Winkel zur  $x$ -Achse gegeben durch

$$\alpha = \arctan \frac{-5.08506}{3.7606} = -0.93410 \approx -53.5^\circ$$

### Lösung zu Aufgabe 3–22 :

(a) Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi \\ 2 - 2 \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq \phi \leq \frac{3}{4} \pi$$

(b) Mit Hilfe der Energieerhaltung kann die Geschwindigkeit  $v = r \dot{\phi}$  als Funktion des Parameters  $\phi$  ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= m g h = m g 2 \sin \phi \\ v(\phi) &= \sqrt{g 4 \sin \phi} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{v(\phi)}{r} = \frac{v(\phi)}{2} = \sqrt{g \sin \phi} \\ T &\approx \sum_i \frac{\Delta t_i}{\Delta \phi_i} \Delta \phi_i = \sum_i \frac{1}{\frac{\Delta \phi_i}{\Delta t_i}} \Delta \phi_i \longrightarrow \int \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi \\ T &= \int_0^{3\pi/4} \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi = \int_0^{3\pi/4} \frac{2}{v(\phi)} d\phi = \int_0^{3\pi/4} \frac{1}{\sqrt{g \sin \phi}} d\phi \end{aligned}$$

(c) Es handelt sich um ein uneigentliches Integral, da bei  $\phi = 0$  durch 0 dividiert wird. Somit muss von  $\varepsilon > 0$  bis  $\frac{3}{4} \pi$  integriert werden. Zu untersuchen ist der Grenzwert falls  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Man erhält

$$T = \sqrt{\frac{1}{10}} \int_0^{3\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\sin \phi}} d\phi \approx 1.09192 \quad [\text{s}]$$

### Lösung zu Aufgabe 3–23 :

(a) Wegen  $y'(x) = \sinh x$  und  $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$  gilt

$$L = \int ds = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx$$

(b) Verwende  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$  um das Integral zu berechnen

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = \int_0^2 \cosh(x) dx = \sinh(2) \approx 3.63$$

(c) Mit  $g(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$  ergibt die Simpsonregel

$$L \approx \frac{h}{3} (g(0) + 4g(0.5) + 2g(1) + 4g(1.5) + g(2)) \approx 3.62808$$

(d)

$$|\text{Fehler}| \leq \frac{b-a}{180} \max |g^{(4)}(x)| h^4 \leq \frac{2}{180} 4 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{360} \approx 0.0028$$

**Lösung zu Aufgabe 3–24 :**

(a)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi t) \\ 2 \sin(\pi t) \\ \frac{1}{4} t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 5$$

(b)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} -2\pi \sin(\pi t) \\ 2\pi \cos(\pi t) \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ v(t) &= \|\vec{v}(t)\| = \left( (-2\pi \sin(\pi t))^2 + (2\pi \cos(\pi t))^2 + \frac{1}{4^2} \right)^{1/2} \\ &= \left( 4\pi^2 + \frac{1}{16} \right)^{1/2} = v \quad \text{konstant} \\ L &= 5 \cdot v \approx 31.441 \end{aligned}$$

Die Länge kann auch geschätzt werden durch 2.5 Umdrehungen auf einem Kreis mit Radius 2, d.h.  $10\pi$ , und etwas mehr für den Höhengewinn.

(c) und (d). Wegen  $M = \rho L$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{x}_s &= \frac{1}{M} \int_C \vec{x}(t) \rho ds = \frac{1}{L} \int_C \vec{x}(t) ds = \frac{1}{5v} \int_0^5 \vec{x}(t) v dt \\ &= \frac{1}{5} \int_0^5 \vec{x}(t) dt = \frac{1}{5} \int_0^5 \begin{pmatrix} 2 \cos(\pi t) \\ 2 \sin(\pi t) \\ \frac{1}{4} t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{2 \sin(\pi t)}{\pi} \\ \frac{-2 \cos(\pi t)}{\pi} \\ \frac{1}{8} t^2 \end{pmatrix} \Big|_{t=0}^5 \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2+2}{\pi} \\ \frac{1}{8} 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5\pi} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25465 \\ 0.625 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Werte von  $x_s = 0$  und  $z_s = \frac{1}{2} \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$  können auch ohne Integrale abgelesen werden.

### 3.4 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- einfache Kurven aufgrund ihrer Beschreibung parametrisieren können.
- Tangential- und Geschwindigkeitsvektoren von Kurven bestimmen können.
- entscheiden können, ob eine Kurve bezüglich ihrer Bogenlänge parametrisiert ist und in einfachen Fällen die Bogenlängenparametrisierung finden.
- Krümmungen von einfachen Kurven in  $\mathbb{R}^2$  berechnen können.

## Kapitel 4

# Linienintegrale

Im ganzen Kapitel sei  $C$  eine durch eine Parametrisierung gegebene Kurve

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \leq t \leq b$$

Wir werden verschiedene Typen von Funktionen entlang dieser Kurve integrieren. Der wichtige Aspekt wird sein die Integrale **aufzustellen**, deren Berechnung wird weniger Bedeutung zugemessen. Sie sollten auf frühere Kenntnisse zurückgreifen können.

Wir werden drei Typen von Linienintegralen untersuchen. Die erste und wichtigste Entscheidung beim Lösen einer Aufgabe muss es sein zu entscheiden um welchen Typ von Kurvenintegral es sich handelt.

- Ist  $f$  eine skalare Funktion und  $C$  eine Kurve so kann das Integral

$$\int_C f = \int_C f \, ds$$

untersucht werden. Als typisches Beispiel kann  $f$  die Masse pro Meter eines Seils mit variablem Querschnitt angeben. Dann wird durch das Integral die Gesamtmasse bestimmt. Das Vorgehen wird in Abschnitt 4.1 behandelt.

- Ist  $\vec{F}$  ein Vektorfeld und  $C$  eine Kurve so kann das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

untersucht werden. Als typisches Beispiel kann  $\vec{F}$  für eine Kraft stehen. Dann wird durch das Integral die Arbeit berechnet die für eine Bewegung entlang der Kurve geleistet werden muss. Das Vorgehen wird in Abschnitt 4.2 behandelt.

- Mit der Notation

$$\vec{A} = \int_C \vec{F} \, ds = \int_C \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} ds$$

können mehrere skalare Integrale erfasst werden. Die Notation steht als Abkürzung für die beiden Integrale

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_C F_1 \, ds \\ A_2 &= \int_C F_2 \, ds \end{aligned}$$

Als typisches Beispiel wird in Abschnitt 4.6 das Gesetz von Biot–Savart untersucht.

## 4.1 Integral einer skalaren Funktion entlang einer Kurve

Sei  $f$  eine auf  $\mathbb{R}^3$  definierte Funktion und wir versuchen

$$\int_C f = \int_C f \, ds$$

zu bestimmen. Statt direkt die Formel anzugeben starten wir mit einem Beispiel.

**4-1 Beispiel :** Sei die Kurve gegeben durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

und entlang dieser Kurve sei die spezifische Masse (Masse pro Länge) gegeben durch die Funktion

$$f(x, y, z) = e^{\alpha z}$$

Die Gesamtmasse  $M$  ist zu berechnen.

**Lösung:** Wir teilen die Kurve auf in kleine Stücke durch die Partition

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = 2\pi$$

Wegen der Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gilt mit der Abkürzung  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\xi_k) \Delta t_k$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = \dot{y}(\eta_k) \Delta t_k$$

$$\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}) = \dot{z}(\nu_k) \Delta t_k$$

Die Länge des Bogenstücks zwischen den Punkten  $\vec{x}(t_{k-1})$  und  $\vec{x}(t_k)$  kann approximiert werden durch

$$\begin{aligned} \Delta s_k &\approx \|\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})\| \\ &= \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\eta_k) + \dot{z}^2(\nu_k)} \Delta t_k \end{aligned}$$

Somit kann die Masse  $\Delta m_k$  dieses kurzen Stücks approximiert werden durch

$$\begin{aligned} \Delta m_k &\approx f(\vec{x}(t_k)) \Delta s_k \\ &= f(\vec{x}(t_k)) \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\eta_k) + \dot{z}^2(\nu_k)} \Delta t_k \end{aligned}$$

Die Gesamtmasse  $M$  ergibt sich als Summe der Teilmassen durch die Formel

$$\begin{aligned} M = \sum_{k=1}^n \Delta m_k &\approx \sum_{k=1}^n f(\vec{x}(t_k)) \Delta s_k \\ &= \sum_{k=1}^n f(\vec{x}(t_k)) \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\eta_k) + \dot{z}^2(\nu_k)} \Delta t_k \end{aligned}$$

Lässt man in dieser Partition die Feinheit ( $\Delta t_k$ ) gegen Null gehen, so wird aus der Summe ein Integral und wir erhalten

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n f(\vec{x}(t_k)) \Delta s_k \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^n f(\vec{x}(t_k)) \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\eta_k) + \dot{z}^2(\nu_k)} \Delta t_k \\ &= \int_0^{2\pi} f(\vec{x}(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos t} \sqrt{1 + \sin^2(t)} \, dt \end{aligned}$$



Dieses Integral kann nicht leicht integriert werden. Mit numerischen Verfahren erhält man für spezielle Werte von  $\alpha$  approximative Werte.

$$\alpha = 1 \implies M \approx 9.4971$$

$$\alpha = 0 \implies M \approx 7.6404$$

◇

**4-2 Definition :** Das obige Beispiel zeigt wie ein Integral einer skalaren Funktion über eine parametrisierte Kurve zu berechnen ist.

$$\int_C f = \int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt \quad \text{wobei} \quad a < b$$

Man spricht vom **Integral der Funktion  $f$  über die Kurve  $C$** .

**4-3 Beispiel :** Sei die Kurve  $C$  gegeben durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 1 \leq t \leq 3$$

und zu bestimmen ist das Integral

$$\int_C f(x, y, z) = \int_C x y z^2 = \int_C x y z^2 \, ds$$

Offensichtlich gilt

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 2t \cdot t \cdot \sqrt{t}^2 = 2t^3$$

und

$$ds = \sqrt{4 + 1 + \frac{1}{4t}} \, dt$$

Damit erhalten wir

$$\int_C f = \int_1^3 2t^3 \sqrt{5 + \frac{1}{4t}} \, dt = \int_1^3 t^{5/2} \sqrt{20t + 1} \, dt \approx 90.406$$

◇

Die obige Definition scheint von der speziellen Parametrisierung der Kurve abhängig zu sein. Dies wäre allerdings fatal, da das Ergebniss je nach Parametrisierung anders herauskommen könnte.

Sei also

$$C : \vec{y}(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_1 \leq \tau \leq b_1$$

eine andere Parametrisierung der **selben Kurve**  $C$ . Somit muss es sich um eine Umparametrisierung handeln, d.h. es gibt eine Funktion  $\tau = h(t)$  mit

$$h : [a, b] \longrightarrow [a_1, b_1] \quad \text{mit} \quad h(a) = a_1, \quad h(b) = b_1 \quad \text{und} \quad \vec{x}(t) = \vec{y}(h(t))$$

Sind alle Funktionen differenzierbar gilt aufgrund der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \vec{y}(h(t)) = \frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau} \frac{dh(t)}{dt}$$

Nun berechnen wir das Linienintegral mit Hilfe der Parametrisierung  $\vec{x}(t)$ , führen dann aber die Substitution  $\tau = h(t)$  aus

$$\begin{aligned} \int_C f &= \int_a^b f(\vec{x}(t)) \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\vec{x}(h(\tau))) \left\| \frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau} \right\| \frac{dh(t)}{dt} dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\vec{y}(\tau)) \left\| \frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau \\ &= \int_C f \end{aligned}$$

und erhalten als Resultat das Linienintegral berechnet mit Hilfe der  $\vec{y}$ -Parametrisierung. Diese Rechnung zeigt, dass der Wert eines Linienintegrals **unabhängig von der Parametrisierung** ist, einzig die Kurve ist wichtig.

**4-4 Beispiel :** Die Länge  $L$  einer Kurve kann auch bestimmt werden, indem man eine spezifische Masse von  $\rho = 1$  annimmt und die Masse  $M$  durch ein Integral bestimmt. Das führt auf das bekannte Resultat

$$L = \int_C 1 = \int_C 1 ds = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

◇

**4-5 Beispiel :** Die Koordinaten des **Schwerpunktes** einer massebesetzten Kurve lassen sich durch die folgenden Integrale bestimmen.

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{M} \int_C x \rho ds \\ y_s &= \frac{1}{M} \int_C y \rho ds \\ z_s &= \frac{1}{M} \int_C z \rho ds \end{aligned}$$

◇

## 4.2 Integral einer Vektor-Funktion entlang einer Kurve

Im vorangehenden Abschnitt wurde das Integral einer skalaren Funktion über eine Kurve bestimmt. Nun sei

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

ein gegebenes Vektorfeld und  $C$  eine parametrisierte Kurve. Wir bestimmen das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Ist  $\vec{F}$  ein Kraftfeld, so entspricht das Integral der geleisteten Arbeit, falls ein Testkörper entlang der Kurve bewegt wird. Um die konkrete Bestimmung des Integrals zu motivieren benutzen wir die grundlegende Formel  $\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg}$ . Allerdings sind Kraft und Weg als Vektoren aufzufassen. Nur die in der

Richtung des Weges wirkende Komponente der Kraft leistet Arbeit. Entlang eines kleinen Wegstückes  $\Delta \vec{s}$  kann die Kraft  $\vec{F}$  approximativ als Konstante betrachtet werden und wir erhalten den Beitrag  $\Delta A$  zu Arbeit  $A$  mit

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Zerlegen wir die Kurve  $C$  durch eine Partition und summieren die einzelnen Beiträge zur Arbeit auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k &\approx \sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{x}(t_k)) \cdot \Delta \vec{s}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{F}(\vec{x}(t_k)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(\xi_k) \\ \dot{y}(\eta_k) \\ \dot{z}(\nu_k) \end{pmatrix} dt \\ &\longrightarrow \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) dt \end{aligned}$$

**4–6 Definition :** Aufgrund diese Überlegungen definieren wir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) dt$$

Man spricht vom **Integral des Vektorfeldes  $\vec{F}$  entlang der Kurve  $C$**  und schreibt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Ist die Kurve  $C$  geschlossen, d.h.  $\vec{x}(b) = \vec{x}(a)$ , so schreibt man auch

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Genauso wie bei Integralen einer skalaren Funktion ist zu verifizieren, dass diese Definition nicht von der Parametrisierung abhängig ist, sondern nur von der Kurve (und dem Durchlaufsinne).

Um bei gegebener Kurve  $C$  und Vektorfeld  $\vec{F}$  ein solches Integral zu bestimmen, kann man die folgenden Rechenschritte ausführen.

1. Parametrisierung der Kurve  $C$  finden

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \leq t \leq b$$

2. Das Längenelement  $d\vec{s}$  bestimmen

$$d\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt$$

3. Die Funktion  $\vec{F}(\vec{x}(t))$  angeben

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}(t)) \\ F_2(\vec{x}(t)) \\ F_3(\vec{x}(t)) \end{pmatrix}$$

4. Das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}(t)) \\ F_2(\vec{x}(t)) \\ F_3(\vec{x}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt$$

wird nun zu einem Standardintegral bezüglich der Variablen  $t$ .

**4–7 Beispiel :** Sei  $C$  ein Viertelkreisbogen (Mittelpunkt im Ursprung) mit Radius 2, der von der  $x$ -Achse zur  $y$ -Achse läuft. Das Kraftfeld  $\vec{F}$  zeige senkrecht nach oben mit Stärke 1. Zu bestimmen ist das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

**Lösung:** Eine mögliche Parametrisierung der Kurve ist

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq \pi/2$$

Dies führt auf

$$d\vec{s}(t) = \dot{\vec{x}}(t) dt = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist gegeben durch

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} 2 \cos(t) dt = 2 \sin(t) \Big|_{t=0}^{\pi/2} = 2$$

◇

**4–8 Beispiel :** Bestimmen Sie das Integral des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$$

entlang verschiedener Kurven.

- (a) Entlang der Geraden die  $(0, 1)$  mit  $(1, 2)$  verbindet.
- (b) Zuerst entlang einer Geraden von  $(0, 1)$  nach  $(1, 1)$ , dann entlang einer Geraden von  $(1, 1)$  nach  $(1, 2)$ .
- (c) Entlang einer Parabel  $x = t, y = 1 + t^2$  von  $(0, 1)$  nach  $(1, 2)$ .

**Lösung:**

(a) Die Parametrisierung der Geraden kann gegeben werden durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

und somit

$$\vec{ds}(t) = \dot{\vec{x}}(t) dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

und

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - (t+1) \\ (t+1)^2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^2 - (t+1) + (t+1)^2 + t dt \\ &= \int_0^1 2t^2 + 2t dt = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(b) Die Parametrisierung des ersten Geradenstücks kann gegeben werden durch

$$C_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

und das zweite durch

$$C_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 2$$

und somit

$$\vec{ds}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

beziehungsweise

$$\vec{ds}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

Somit erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}_2 \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 1^2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} 1^2 - t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^2 - 1 dt + \int_1^2 t^2 + 1 dt \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(c) Die Parametrisierung der Parabel kann gegeben werden durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

und somit

$$\vec{ds}(t) = \dot{\vec{x}}(t) dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$

und

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - (t^2 + 1) \\ (t^2 + 1)^2 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^2 - (t^2 + 1) + 2t((t^2 + 1)^2 + t) dt \\ &= \int_0^1 2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 dt = 2 \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass bei diesem Beispiel der Wert des Integrals von der Wahl der Kurve abhängt, obwohl die Anfangs- und Endpunkte immer dieselben sind.  $\diamond$

**4-9 Beispiel :** Berechnen Sie die Arbeit um ein Teilchen entlang einer Ellipse mit  $x$ -Halbachse 4 und  $y$ -Halbachse 3 im positiven Sinn einmal herumzubewegen. Hierbei ist das Kraftfeld gegeben durch

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Als Parametrisierung kann

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\vec{ds}(t) = \dot{\vec{x}}(t) dt = \begin{pmatrix} -4 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt$$

verwendet werden. Somit ist das Integral gegeben durch

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 \cos t - 4 \cdot 3 \sin t \\ 4 \cdot 4 \cos t + 2 \cdot 3 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 48 \cos^2 t + 48 \sin^2 t - 30 \cos t \sin t dt = 96\pi \end{aligned}$$

$\diamond$

**4-10 Beispiel :** Sei  $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  in das Vektorfeld  $\vec{F}$  gegeben als Gradient von  $V$ , d.h.

$$\vec{F} = \text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Nun kann das Integral des Vektorfeldes entlang der Kurve

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \leq t \leq b$$

berechnet werden durch

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{\partial V(\vec{x}(t))}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial V(\vec{x}(t))}{\partial y} \cdot \dot{y}(t) dt \\
 &= \int_a^b \text{grad } V(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} dt \\
 &= V(\vec{x}(b)) - V(\vec{x}(a))
 \end{aligned}$$

Somit **hängt das Integral nur von den Anfangs- und Endpunkten ab**, und nicht von der Kurve die dazwischen durchlaufen wird. Wir werden aus diesen Aspekt im nächsten Abschnitt näher eingehen.  $\diamond$

**4-11 Beispiel :** Ein Körper der Masse  $m$  wird entlang der Schraubenlinie

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{h}{2\pi} t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 4\pi$$

vom Punkt  $(1, 0, 0)$  zum Punkt  $(1, 0, 2h)$  angehoben. Berechnen Sie die hierzu notwendige Arbeit. Die  $z$ -Achse zeigt vom Erdmittelpunkt weg.

**Lösung:** Offensichtlich ist das Kraftfeld gegeben durch

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

und somit das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

zu berechnen. Man sieht hier leicht, dass

$$\vec{F} = \text{grad}(-mgz) = \text{grad } V(x, y, z) = \vec{\nabla} V(x, y, z)$$

und somit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = V(1, 0, 2h) - V(1, 0, 0) = -2mgh$$

Man beachte, dass kein Integral zu bestimmen war, da wir die Potentialfunktion erraten haben.  $\diamond$

## 4.3 Konservative Vektorfelder

**4-12 Definition :** Eine Teilmenge  $G \subset \mathbb{R}^2$  (oder auch  $\subset \mathbb{R}^n$ ) heisst ein **Gebiet** falls

1.  $G$  eine offene Menge ist.
2.  $G$  (weg)zusammenhängend ist, d.h. falls zwei beliebige Punkte in  $G$  immer durch eine in  $G$  verlaufende Kurve verbunden werden können.

**4–13 Definition :** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Eine Funktion  $\vec{F} \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$  heisst **Potentialfeld (Gradientenfeld, konservatives Feld)**, falls es eine Funktion  $V \in C^1(G, \mathbb{R})$  gibt mit

$$\vec{F} = \vec{\nabla} V = \text{grad } V$$

In vorangehenden Abschnitt haben wir das folgende Theorem verifiziert.

**4–14 Theorem :** Ist  $C$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\vec{F} = \text{grad } V$  so gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = V(\vec{x}(b)) - V(\vec{x}(a))$$

**4–15 Beispiel :** Sei

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve  $C$  bestehe aus drei Stücken

1. Einem Geradenstück vom Punkt  $(1, 0)$  zum Punkt  $(1, 1)$ .
2. Einem oberen Halbkreisbogen mit Radius  $1/2$  und Mittelpunkt  $(1.5, 1)$ . Er verbindet den Punkt  $(1, 1)$  mit  $(2, 1)$ .
3. Einem Geradenstück vom Punkt  $(2, 1)$  zum Punkt  $(2, 0)$ .

Zu berechnen ist das Integral des Vektorfeldes über diese Kurve.

**Lösung:** Offensichtlich gilt

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{\nabla}(x + 2y) = \vec{\nabla} V(x, y)$$

und somit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = V(2, 0) - V(1, 0) = 1$$

◇

**4–16 Beispiel :** Sei  $C$  die selbe Kurve wie im vorangehenden Beispiel und das Vektorfeld nun gegeben durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{1+y^4} \\ \frac{-4(x^3 - y)y^3 - 1 - y^4}{(1+y^4)^2} \end{pmatrix}$$

und es ist bekannt (dazu mehr später), dass  $\vec{F}$  ein konservatives Feld ist. Somit müssen wir nicht unbedingt über die gegebene Kurve  $C$  integrieren, sondern können sie ersetzen durch eine einfachere Kurve  $C_1$  mit den selben Endpunkten. Ein Kandidat hierfür ist

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 2$$



und wir erhalten

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 3t^2 dt = t^3 \Big|_1^2 = 7$$

◇

Nun versuchen wir mit möglichst wenig Rechnungen festzustellen, ob ein gegebenes Vektorfeld  $\vec{F}$  konservativ ist. Dazu gibt es mehrere Verfahren.

(a) **Raten** Sie eine Funktion  $V$  mit

$$\text{grad } V = \vec{F}$$

(b) Falls es eine Potentialfunktion  $V \in C^2(R^2, \mathbb{R})$  gibt mit

$$\text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial y} V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \vec{F}$$

so muss auch

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} V$$

richtig sein (gemischte zweite Ableitungen). Somit haben wir die **notwendige Bedingung** für das Vektorfeld  $\vec{F}$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Ist also diese Bedingung verletzt, so kann kein Potentialfeld vorliegen.

**4–17 Beispiel :** Das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

kann wegen

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial 3x}{\partial x} = 3 \neq 2 = \frac{\partial 2y}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

sicher kein Potentialfeld sein.

◇

**4–18 Beispiel :** Die Kraft einer Masse  $M$  im Ursprung auf eine Testmasse  $m$  im Punkt  $\vec{x}$  ist gegeben durch  $F = G m M \frac{1}{r^2}$  und die Richtung der Kraft ist zum Ursprung hin. Das kann beschrieben werden durch

$$\vec{F} = \frac{-G m M}{\|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{-G m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Aufgrund dieser physikalischen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= + \frac{3}{2} \frac{G m M x 2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= + \frac{3}{2} \frac{G m M y 2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Somit könnte dieses Kraftfeld konservativ sein.

◇

Nun werden wir Gebiete  $G$  untersuchen, auf denen die obige notwendige Bedingung auch hinreichend ist.

**4–19 Definition :** Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heisst **einfach zusammenhängend** falls

1.  $G$  ein zusammenhängendes Gebiet ist.
2. Jede doppelunktfreie, geschlossene Kurve lässt sich innerhalb des Gebietes auf einen Punkt zusammenziehen.

Einige Skizzen in der Stunde werden diesen Begriff erklären.

**4–20 Theorem :** (Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$$

ein Vektorfeld mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Dann ist  $\vec{F}$  ein Potentialfeld.

Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$$

ein Vektorfeld mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

Dann ist  $\vec{F}$  ein Potentialfeld.

Dieses Theorem führt zu einem neuen Verfahren um Linientintegrale zu bestimmen. Zuerst untersuchen wir, ob das Vektorfeld konservativ ist. Hierzu sind partielle Ableitungen zu vergleichen. Ist die Antwort „ja“, so können wir auch versuchen das Potential  $V$  zu erraten. Gelingt uns dies nicht so kann trotzdem die Kurve vereinfacht werden, da nur Anfangs- und Endpunkt für das Integral wichtig sind.

**4–21 Beispiel :** Die zu untersuchende Kurve sei ein Bogen einer Zykloide

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

und das Vektorfeld ist

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2e^{x^2y}xy + y^2 \\ e^{x^2y}x^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2e^{x^2y}(x^2xy + x) + 2y \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= e^{x^2y}(2xyx^2 + 2x) + 2y\end{aligned}$$

und somit  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ . Aufgrund der obigen Überlegungen lässt sich das Integral leicht bestimmen durch

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi$$

◇

**4-22 Beispiel :** Um das Integral des Vektorfeldes

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang eines positiv orientierten Kreises mit Radius 3 und Mittelpunkt im Ursprung zu bestimmen, kann die Parametrisation

$$\begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

verwendet werden. Das führt auf das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \sin(t) \\ 3 \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin(t) \\ 3 \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Um zu untersuchen ob das Feld konservativ ist muss man die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

und stellt fest, dass überraschenderweise

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Trotzdem ist dies **kein** Widerspruch zum obigen Theorem. Warum?

◇

## 4.4 Finden des Potentials eines konservativen Vektorfeldes

Gegeben sei ein Vektorfeld  $F$ , von dem man weiss, dass es ein Potential  $V$  gibt. Nun gilt es dieses Potential zu bestimmen. Hierzu sind drei mögliche Lösungswege vorgeschlagen.

### 1. Raten

### 2. Mit Kurvenintegralen

Wir wählen  $(x_0, y_0)$  beliebig (z.B.  $(0, 0)$ ) und setzen  $V(x_0, y_0) = 0$ . Dann gilt für eine beliebige Kurve  $C$  die den Punkt  $(x_0, y_0)$  mit  $(x, y)$  verbindet

$$V(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

3. Mittels eines **Ansatzes**

Wegen  $\text{grad } V = \vec{F}$  gelten die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= F_1(x, y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_2(x, y)\end{aligned}$$

Diese Bedingungen können nun „integriert“ werden, um die Potentialfunktion  $V$  zu finden.

**4–23 Beispiel :** Das Vektorfeld sei gegeben durch

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(2xy) + 2xy \cos(2xy) \\ 2x^2 \cos(2xy) \end{pmatrix}$$

1. **Raten**

$$V(x, y) = x \sin(2xy)$$

2. Mit **Kurvenintegralen**

Als Kurve betrachten wir zwei Geradenstücke, welche die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$  und  $(x, y)$  verbinden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}V(x, y) &= \int_{C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} F_1 dx + \int_{C_2} F_2 dy \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y 2x^2 \cos(2xt) dt \\ &= x \sin(2xy)\end{aligned}$$

3. Mittels eines **Ansatzes**

Wegen  $\text{grad } V = \vec{F}$  gelten die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \sin(2xy) + 2xy \cos(2xy) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 2x^2 \cos(2xy)\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung integrieren wir nun bezüglich  $y$  und erhalten

$$V(x, y) = x \sin(2xy) + c(x)$$

wobei die „Integrationskonstante“  $c(x)$  von  $x$  abhängig sein kann, da wir bezüglich  $y$  integriert haben. Den erhaltenen verbesserten Ansatz von  $V$  setzen wir nun in die erste obige Bedingung ein und erhalten die Gleichung

$$\sin(2xy) + 2xy \cos(2xy) + c'(x) = \sin(2xy) + 2xy \cos(2xy)$$

Dies führt auf  $c'(x) = 0$  und somit  $c(x) = k$ , eine frei wählbare Konstante. Wir setzen  $k = 0$  und erhalten

$$V(x, y) = x \sin(2xy)$$

◇

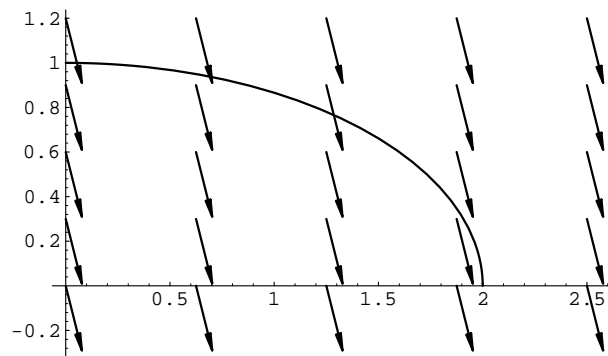


Abbildung 4.1: Vektorfeld und Linienintegral

## 4.5 Potentialberechnung für ein elektrisches Feld

Die Potentialdifferenz in der Ebene zwischen dem Punkt  $(0, 1)$  und  $(2, 0)$  ist zu bestimmen. Die beiden Punkte sind durch eine Ellipse verbunden. Das Vektorfeld hat eine Stärke von 110 und schliesst mit der  $x$ -Achse einen Winkel von  $75^\circ$  ein. Zu berechnen ist die Potentialdifferenz, diese ist durch einen Linienintegral gegeben.

### 4.5.1 Erster Lösungsversuch

Für den gegebenen Bereich kann die Gleichung

$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$$

nach  $y$  aufgelöst werden durch

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2$$

Somit gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2}}} = \frac{-x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

Das zu bestimmende Kurvenintegral ist also

$$\begin{aligned} \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_0^2 110 \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \\ -\sin 75^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}} \end{pmatrix} dx \\ &= 110 \int_0^2 \cos 75^\circ + \sin 75^\circ \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 110 \left( 2 \cos 75^\circ + \sin 75^\circ \int_0^2 \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} dx \right) \end{aligned}$$

Das verbleibende uneigentliche Integral kann berechnet werden, aber ...

### 4.5.2 Erste Lösung: Kurve intelligent parametrisieren

Die Kurve ist von links nach rechts zu durchlaufen und kann parametrisiert werden durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi/2$$

und somit gilt

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt$$

und für das Vektorfeld gilt

$$\vec{E} = 110 \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \\ -\sin 75^\circ \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{E} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{\pi/2} 110 \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \\ -\sin 75^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt \\ &= 110 \int_0^{\pi/2} 2 \cos 75^\circ \cos t + \sin 75^\circ \sin t dt \\ &= 110 (2 \cos 75^\circ + \sin 75^\circ) \approx 163.192 \end{aligned}$$

#### 4.5.3 Zweite Lösung: Kurve ändern

Wegen

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{\partial E_2}{\partial x} = 0$$

ist das Vektorfeld konservativ. Statt entlang der gegebenen Kurve zu integrieren kann man zuerst entlang der  $y$ -Achse zum Ursprung gehen, dann zum Punkt  $(2, 0)$ . Das führt auf

$$\begin{aligned} \int_C \vec{E} \cdot \vec{ds} &= \int_1^0 110 (-\sin 75^\circ) (-dy) + \int_0^2 110 \cos 75^\circ dx \\ &= 110 (+\sin 75^\circ + 2 \cos 75^\circ) \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Dritte Lösung: Potential bestimmen

Es ist nicht zu schwierig die Beziehung

$$\nabla P(x, y) = \nabla(220 x \cos 75^\circ - 110 y \sin 75^\circ) = 110 \begin{pmatrix} \cos 75^\circ \\ -\sin 75^\circ \end{pmatrix}^T = \vec{E}^T$$

zu erraten. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{E} \cdot \vec{ds} &= P(2, 0) - P(0, 1) \\ &= 110 (2 \cos 75^\circ + \sin 75^\circ) \end{aligned}$$

### 4.6 Das Gesetz von Biot–Savart

Fließt in einem Leiter ein Strom  $I$ , so erzeugt dieser Strom ein magnetisches Feld  $\vec{H}$  in der Nähe des Leiters. Wir untersuchen ein kurzes Stück (Länge  $ds$ ) des Leiters und bestimmen den Beitrag  $d\vec{H}$  zum Magnetfeld. Die Situation ist in Abbildung 4.2 illustriert. Es gilt das Gesetz von **Biot–Savart**.

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} \vec{ds} \times \vec{r}$$

Ist ein Leiter durch eine Kurve  $C$  bestimmt und fließt ein Strom  $I$  so kann das resultierende Magnetfeld  $\vec{H}(\vec{x})$  bestimmt werden durch das Linienintegral

$$\vec{H}(\vec{x}) = \int_C d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{1}{\|\vec{s} - \vec{x}\|^3} \vec{ds} \times (\vec{x} - \vec{s})$$

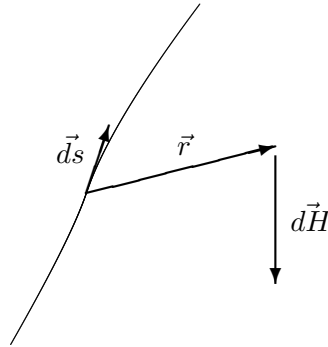


Abbildung 4.2: Gesetz von Biot–Savart

#### 4.6.1 Magnetfeld eines geraden Leiters

Im Raum  $\mathbb{R}^3$  fließe ein Strom der Stärke  $I$  in die positive Richtung entlang der  $z$ -Achse. Zu bestimmen ist das resultierende Magnetfeld  $\vec{H}$ .

Es ist klar, dass das Magnetfeld  $\vec{H}$  nicht von  $z$  abhängig sein wird. Wir bestimmen  $\vec{H}$  deshalb nur in der Ebene  $z = 0$ . Das Feld wird nur vom Abstand vom Leiter abhängig sein. Deshalb bestimmen wir das Feld  $\vec{H}$  sogar nur entlang der positiven  $x$ -Achse. Für den Verbindungsvektor  $\vec{r}$  vom Punkt  $(0, 0, z)$  auf der  $z$ -Achse zum Punkt  $(x, 0, 0)$  gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

Der Beitrag des Leiterstücks zwischen  $z$  und  $z + \Delta z$  zum Magnetfeld ist somit

$$\Delta \vec{H} \approx \frac{I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} = \frac{I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ x \Delta z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also nur die  $y$ -Komponente von Null verschieden und wir erhalten

$$\Delta H_y = \frac{I}{4\pi \sqrt{x^2 + z^2}^3} (x \Delta z)$$

Nun sind die Beiträge für alle Werte von  $-\infty < z < \infty$  zu summieren, respektive zu integrieren. Wir erhalten

$$H_y = \frac{x I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{x I}{4\pi x^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \Big|_{z=-\infty}^{\infty} = \frac{I}{2\pi x}$$

Um das uneigentliche Integral zu bestimmen muss der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = 1$$

verwendet werden.

Das Feld entlang der positiven  $x$ -Achse zeigt also in die positive  $y$ -Richtung und für die Stärke gilt

$$H = \frac{I}{2\pi x}$$

### 4.6.2 Magnetfeld eines kreisförmigen Leiters

Als nächstes Beispiel untersuchen wir das von einem kreisförmigen Leiter erzeugte Magnetfeld. Wir untersuchen einen Kreis in der  $xy$ -Ebene mit Zentrum im Ursprung und Radius  $R$ . Eine einfache Parametrisierung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Für ein Wegelement  $\vec{ds}$  gilt dann

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi$$

Das durch den Strom  $I$  erzeugte Magnetfeld  $\vec{H}$  wird sicher radialsymmetrisch sein mit der Symmetrieachse in  $z$ -Richtung. Somit bestimmen wir „nur“ das Feld in den Punkten  $(x, 0, z)^T$ . Es gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} r^2 &= (R \cos \phi - x)^2 + R^2 \sin^2 \phi + z^2 \\ &= R^2 - 2xR \cos \phi + x^2 + z^2 \end{aligned}$$

Für das Gesetz von Biot–Savart muss der folgende Ausdruck untersucht werden.

$$\begin{aligned} \vec{ds} \times \vec{r} &= \begin{pmatrix} -R \sin \phi \\ R \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - R \cos \phi \\ -R \sin \phi \\ z \end{pmatrix} d\phi \\ &= \begin{pmatrix} z R \cos \phi \\ z R \sin \phi \\ R^2 - x R \cos \phi \end{pmatrix} d\phi \end{aligned}$$

Somit erhalten wir bei einem Punkt  $(x, 0, z)^T$  das Feld

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 - 2xR \cos \phi + x^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z R \cos \phi \\ z R \sin \phi \\ R^2 - x R \cos \phi \end{pmatrix} d\phi$$

Nun werden einige Spezialfälle genauer untersuchen.

#### Feld in der Leiterebene

Der stromführende Leiter liegt in der Ebene  $z = 0$  und wir erhalten somit die einfachere Formel

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 - 2xR \cos \phi + x^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 - x R \cos \phi \end{pmatrix} d\phi$$



Hier ist klar ersichtlich, dass das Magnetfeld nur eine  $z$ -Komponente hat, die positiv ist (für  $I > 0$ ). Die Stärke ist gegeben durch

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - x R \cos \phi}{(R^2 - 2xR \cos \phi + x^2)^{3/2}} d\phi$$

Nun kann dieses Integral mit *Mathematica* bestimmt werden.

```

Mathematica
f[x_, R_] := 1/(4 Pi)
  Integrate[(R^2 - x R Cos[phi])/(R^2 - 2 x R Cos[phi] + x^2)^(3/2), {phi,
    0, 2 Pi}]
.
      2
      -((R - R x) (-
          2
          (R - 2 R x + x ) EllipticE[
              -4 R x
              2
              R - 2 R x + x
          ]
          R
          ) - 2 R (R - 2 R x + x )
          EllipticK[
              -4 R x
              2
              R - 2 R x + x
          ] +
          2
          ((R + x ) (R - 2 R x + x )
          EllipticK[
              -4 R x
              2
              R - 2 R x + x
          ]) / R)) /
      (2 Pi (R - x) (R - x ) (R - 2 R x + x ) )

```

Den Plot für diese Funktion für  $R = 1$  und  $0 \leq x \leq 2$  finden Sie in [Abbildung 4.3](#).

```

Mathematica
Plot[f[x, 1], {x, 0, 2}, PlotRange -> {-10, 10}];

```

Wie in der [Abbildung](#) klar ersichtlich variiert der Wert für  $0 \leq x \ll R$  nur wenig und kann durch den Wert bei  $x = 0$  gut approximiert werden. Es gilt

$$H_{x=0} = \frac{I R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^3} d\phi = \frac{I}{2R}$$

### Feld entlang der Symmetrieachse

Die Symmetrieachse in der obigen Situation ist beschrieben durch  $x = 0$ . Wir erhalten

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 - 2xR \cos \phi + x^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z R \cos \phi \\ z R \sin \phi \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi$$

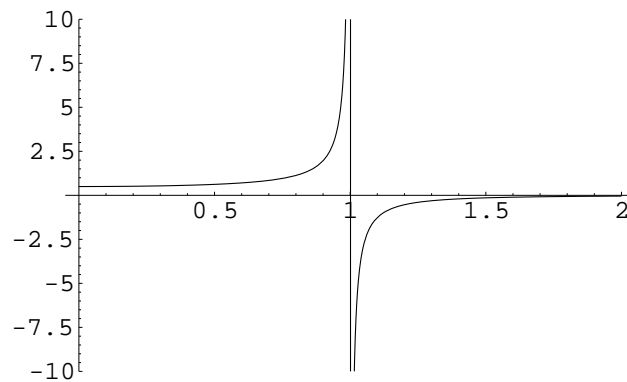


Abbildung 4.3: Magnetfeld in einer Stromschleife, in der Ebene

$$= \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z R \cos \phi \\ z R \sin \phi \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi$$

Aufgrund der Symmetrie werden die  $x$ -Komponente und die  $y$ -Komponente verschwinden und das Feld wird in die  $z$ -Richtung zeigen mit einer Stärke von

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi \\ &= \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Für sehr gross und sehr kleine Werte von  $z$  erhalten wir die beiden approximativen Formeln

$$\begin{aligned} H_{z \ll R} &\approx \frac{I}{2} \frac{1}{R} \\ H_{z \gg R} &\approx \frac{I}{2} \frac{R^2}{z^3} \end{aligned}$$

Diese Rechnung kann mit *Mathematica* bestätigt werden.

**Mathematica**

```
f[z_, R_] = 1/2 R^2/(z^2+R^2)^(3/2);
Plot[f[z, 1], {z, -2, 5}];
```

### 4.6.3 Feld entlang einer anderen Achse

Wir können auch das Feld einer anderen, zur Kreisebene senkrechten Achse untersuchen, wiederum in der Ebene  $y = 0$ . Mit Symmetrieüberlegungen sieht man, dass die  $y$ -Komponente von  $\vec{H}$  verschwinden muss. Für die  $z$ -Komponente gilt

$$H_z = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - x R \cos \phi}{(R^2 - 2 x R \cos \phi + x^2 + z^2)^{3/2}} d\phi$$

und für die  $x$ -Komponente

$$H_x = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z R \cos \phi}{(R^2 - 2 x R \cos \phi + x^2 + z^2)^{3/2}} d\phi$$

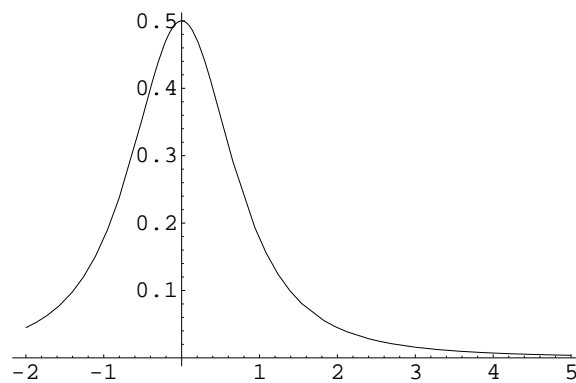


Abbildung 4.4: Magnetfeld in einer Stromschleife, entlang der Symmetrieachse

Die beiden Integrale können mit *Mathematica* bestimmt werden. Die Resultate enthalten elliptische Funktionen und sind nicht elementar darstellbar. *Mathematica* kann aber problemlos Graphen dieser Funktionen erzeugen. In Abbildung 4.5 finden Sie die  $z$ -Komponenten des magnetischen Feldes, wobei die Gerade 0.2 (resp. 0.8) vom Zentrum entfernt ist. Der Radius der Stromschleife wurde  $R = 1$  gewählt.

#### Mathematica

```
Hz[x_, z_, R_] = 1/(4 Pi) *
  Integrate[(R^2 - x R Cos[phi]) / (R^2 - 2 x R Cos[phi] + x^2 + z^2)^(3/2), {phi, 0, 2 Pi}];
Hx[x_, z_, R_] = 1/(4 Pi) *
  Integrate[(z R Cos[phi]) / (R^2 - 2 x R Cos[phi] + x^2 + z^2)^(3/2), {phi, 0, 2 Pi}];
Plot[{Hz[0.2, z, 1], Hz[0.8, z, 1]}, {z, -1, 6}];
```

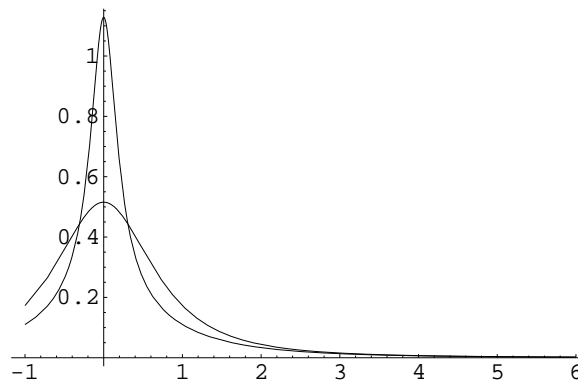


Abbildung 4.5: Magnetfeld in einer Stromschleife, entlang einer Achse

Mit Hilfe vom *Mathematica* kann das Magnetfeld  $\vec{H}$  auch illustriert werden. Dazu verwendet man

#### Mathematica

```
Clear[VF, ShowVF, SaveVF];
Needs["Graphics`PlotField`"]
VF[f_, xRange_, yRange_, opts_...] :=
  PlotVectorField[f[x, y], Join[{x}, xRange], Join[{y}, yRange],
    opts,
    PlotPoints -> 15,
    ScaleFactor -> 0.4,
    AspectRatio -> 1/GoldenRatio,
    HeadWidth -> 0.6,
    HeadLength -> 0.3,
    HeadScaling -> Relative,
```

```

MaxArrowLength -> None,
PlotRange -> {xRange,yRange},
Axes -> True,
DisplayFunction -> Identity
];
ShowVF[f_, xRange_, yRange_, opts___] :=
  Show[VF[f, xRange, yRange, opts],
    DisplayFunction -> $DisplayFunction];
SaveVF[file_, f_, xRange_, yRange_, opts___] :=
  CreateEPS[file, VF[f, xRange, yRange, opts]];

```

und

#### Mathematica

```

vf[x_, z_] = {Hx[x, z, 1], Hz[x, z, 1]};
ShowVF[vf, {0, 2.0}, {-0.5, 2}, AspectRatio -> Automatic, AxesLabel -> {"x", "z"}];
ShowVF[vf, {0, 0.7}, {-0.5, 2}, PlotPoints -> 8, AspectRatio -> Automatic,
  AxesLabel -> {"x", "z"}];

```

um die Abbildung 4.6 zu erhalten. Die Singularität des Feldes beim Leiter  $x = R = 1$  ist in der linken

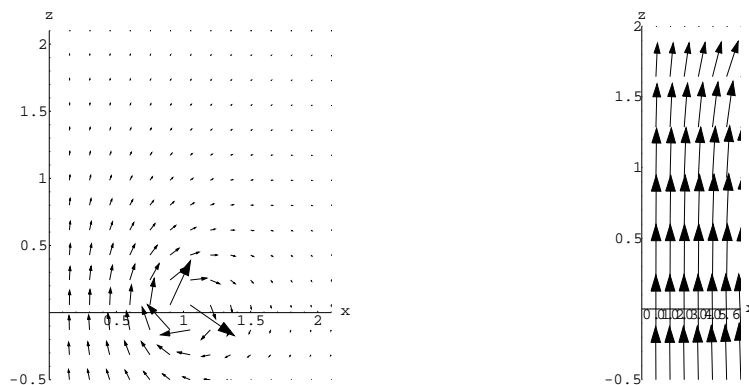


Abbildung 4.6: Magnetfeld in einer Stromschleife

Graphik deutlich sichtbar. Die Graphik rechts zeigt, dass im Innern der Kreises das Magnetfeld ziemlich homogen ist.

#### 4.6.4 Mehrere Stromschleifen, eine einfache Spule

In einer Spule sind mehrere kreisförmige Schleifen übereinander gelegt. Mit *Mathematica* können 7 Schleifen mit Radius  $R = 1$  in Abständen von je 0.1 gestapelt werden. Das Magnetfeld kann bestimmt werden und dann für verschiedene Bereiche angezeigt.

#### Mathematica

```

dz=1/2;
vf[x_, z_] = Sum[{Hx[x, z+k dz, 1], Hz[x, z+k dz, 1]}, {k, -3, 3}];

ShowVF[vf, {0, 0.7}, {-0.2, 1},
  PlotPoints -> 8, AspectRatio -> Automatic, AxesLabel -> {"x", "z"}];
ShowVF[vf, {0, 2}, {-1, 3},
  PlotPoints -> 15, AspectRatio -> Automatic, AxesLabel -> {"x", "z"}];

```

In der linken Hälfte von Abbildung 4.7 sehen Sie, dass das Feld im inneren der Spule sehr homogen ist. Rechts können Sie das Verhalten des Feldes auch ausserhalb der Spule untersuchen.

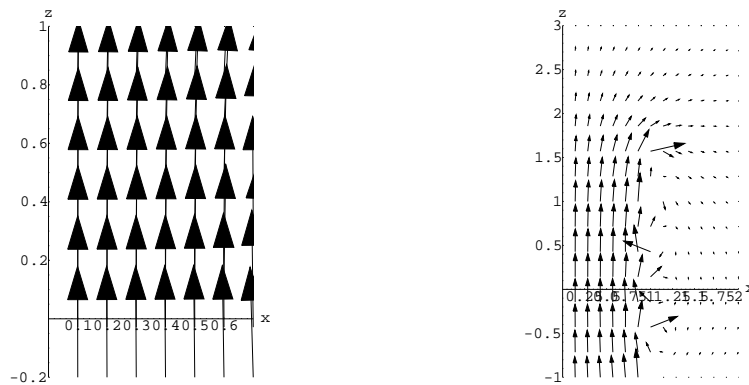


Abbildung 4.7: Magnetfeld in einer einfachen Spule

#### 4.6.5 Feldlinien

Die Feldlinien des Magnetfeldes sind gegeben als Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x(x(t), z(t)) \\ H_z(x(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

Selbst für eine einfache Leiterschleife ist diese Differentialgleichung kaum in geschlossener Form lösbar. Mit *Mathematica* kann ein numerisches Verfahren verwendet werden. Der untenstehende Code erzeugt Abbildung 4.8.

#### Mathematica

```
steps=5;
xstart=0.1;
deltax= 0.2;
tEnd=15;
nsol=Table[
  NDSolve[ {x'[t]==Hx[x[t],z[t],1],z'[t]==Hz[x[t],z[t],1],
    x[0]==xstart+(k-1)deltax,z[0]==0},{x[t],z[t]},{t,-tEnd,tEnd}],
  {k,1,steps}];
```

#### Mathematica

```
solplot=Table[
  ParametricPlot[{x[t],z[t]}/.nsol[[k]},{t,-tEnd,tEnd},
    DisplayFunction->Identity},{k,1,steps}];
g8=Show[solplot,PlotRange->{{0,2},{-1,2}},AspectRatio->Automatic,
  DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

Auch hier können mehrere (7) Stromschleifen übereinander gelegt werden und die entsprechenden Feldlinien berechnet werden. Das führt auf Abbildung 4.9. Auch hier ist ersichtlich, dass die Feldlinien im Inneren der Spule sehr regelmässig sind, gegen den Rand hin aber grosse Variationen zeigen. Man kann erraten, dass die stromführenden Leiter entlang der Geraden  $x = R = 1$  mit  $z = -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5$  zu finden sind.

#### Mathematica

```
steps=5;
xstart=0.1;
deltax= 0.2;
tEnd=15;
dz=1/2;
HxSpule=Sum[Hx[x[t],z[t]+k*dz,1],{k,-3,3}];
```

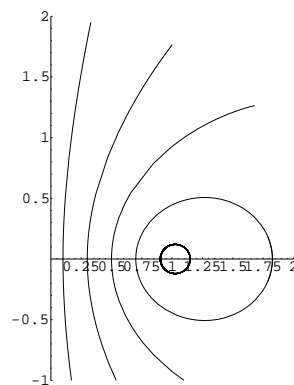


Abbildung 4.8: Einige Feldlinien eines einfachen Stromkreises

```
HzSpule=Sum[Hz[x[t],z[t]+k dz,1],{k,-3,3}];
nsol=Table[NDSolve[{x'[t]==HxSpule,z'[t]==HzSpule,
  x[0]==xstart+(k-1) deltax,z[0]==-1},{x[t],z[t]},{t,-tEnd,tEnd}],
  {k,1,steps}];
```

#### Mathematica

```
solplot=Table[
  ParametricPlot[{x[t],z[t]}/.nsol[[k]},{t,-tEnd,tEnd},DisplayFunction->Identity],
  {k,1,steps}];
Show[solplot,PlotRange->{{0,2},{-1,2}},AspectRatio->Automatic,
  AxesLabel->{"x","z"},DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

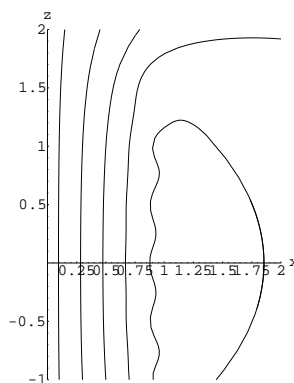


Abbildung 4.9: Einige Feldlinien einer einfachen Spule

### 4.6.6 Die Helmholtz Anordnung zweier Spulen

Zwei zur  $xy$ -Ebene parallele Stromschleifen mit Radius  $R$  können bei  $z = \pm\alpha$  angebracht werden. Ziel ist es den Abstand  $d = 2\alpha$  so zu wählen, dass das die  $z$ -Komponente des resultierenden Magnetfeldes im Ursprung möglichst homogen ist. Mit *Mathematica* kann diese Funktion berechnet werden.

#### Mathematica

```
f[z_,R_]=1/2 R^2/(z^2+R^2)^(3/2);
HelmholzZ[z_,R_]=f[z+alpha,R]+f[z-alpha,R]//Simplify
g12=Plot[{HelmholzZ[z,1]/.alpha->2,
  HelmholzZ[z,1]/.alpha->1/3},
  {z,-3,3}];
```

$$\frac{1}{2} R^2 \left( \frac{1}{(R^2 + (\alpha - z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (\alpha + z)^2)^{3/2}} \right)$$

Mit diesem Code erhalten Sie die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes für die beiden Fälle  $\alpha = 2$  und  $\alpha = \frac{1}{3}$ . In beiden Fällen wurde  $R = 1$  gewählt. Es ergibt sich Abbildung 4.10 Um die optimale Lösung zu finden

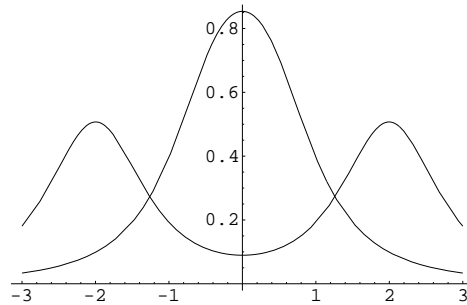


Abbildung 4.10:  $z$ -Komponente des Feldes in einer Helmholtzspule

untersuchen wir die Taylorentwicklung dieser Funktion bezüglich der Variablen  $z$  um den Punkt  $z_0 = 0$ .

**Mathematica**

```
ser=Series[ HelmholtzZ[z,R],{z,0,3}]/Simplify
```

$$\frac{R^2}{(\alpha^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3 R^2 (-4 \alpha^2 + R^2) z^2}{2 (\alpha^2 + R^2)^{7/2}} + O[z]^4$$

Damit diese Funktion möglichst konstant ist, muss der Koeffizient von  $z^2$  Null sein, d.h.

**Mathematica**

```
Solve[Coefficient[ser,z,2]==0,alpha]
```

$$\{\{\alpha \rightarrow -\frac{R}{2}\}, \{\alpha \rightarrow \frac{R}{2}\}\}$$

Diese optimale Lösung kann nun eingesetzt werden und das Magnetfeld in der Nähe des Ursprungs untersucht werden. Sie erhalten Abbildung 4.11.

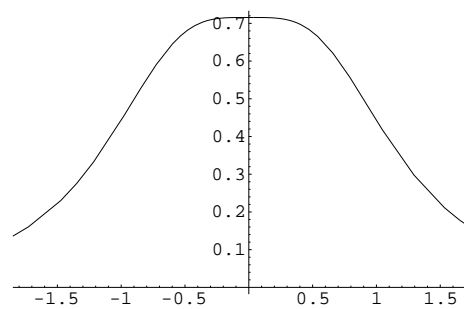
**Mathematica**

```
HelmholtzZ[z,R] /. alpha -> R/2 // Simplify
g13=Plot[HelmholtzZ[z,1]/.alpha ->1/2,{z,-3,3}];
```

$$\frac{R^2}{4} \left( \frac{1}{(R^2 + (-\frac{R}{2} + z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (-\frac{R}{2} + z)^2)^{3/2}} \right)$$

Nun kann auch das Magnetfeld gezeichnet werden. Hierbei wurden einige *Mathematica*-Befehle der vorangehenden Seiten übernommen.

**Mathematica**

Abbildung 4.11:  $z$ -Komponente des Feldes in einer Helmholtzspule, homogenes Feld

```

vf[x_, z_] = Sum[{Hx[x, z - k/2, 1], Hz[x, z + k/2, 1]}, {k, -1, 1, 2}];
ShowVF[vf, {0.01, 0.2}, {-0.2, 0.2}, PlotPoints -> 10, AspectRatio -> Automatic,
  AxesLabel -> {"x", "z"}, HeadScaling -> Relative, ScaleFactor -> Automatic];

```

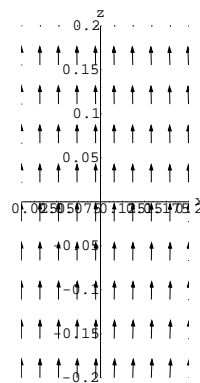


Abbildung 4.12: Magnetfeld in einer Helmholtzspule

## 4.7 Aufgaben

### • Aufgabe 4-1:

Sei die Kurve  $C$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch die Bedingung  $y = x^n$ , wobei  $0 \leq x \leq 2$ . Die Massendichte (Masse pro Länge) sei gegeben durch  $\rho(x, y) = \sin x$ . Stellen Sie die Integrale auf um die folgenden Ausdrücke zu bestimmen

- die Länge  $L$  der Kurve.
- die Masse  $M$  der Kurve.
- Die Schwerpunktskoordinaten  $x_s$  und  $y_s$

### • Aufgabe 4-2:

Die Kurve  $C$  besteht aus zwei Geradenstücken, das erste Stück verbindet den Ursprung mit dem Punkt  $(2, 0)$ , das zweite  $(2, 0)$  mit  $(2, 1)$ . Die Massendichte (Masse pro Länge) sei gegeben durch  $\rho(x, y) = \sin x$ . Stellen Sie die Integrale auf um die Ausdrücke

- die Masse  $M$  der Kurve.
- $x_s$  und  $y_s$



zu bestimmen.

• **Aufgabe 4–3:**

Berechnen Sie das Integral

Calculer l'intégral

$$\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

wobei  $C$  der Rand des Quadrates mit Ecken bei  $(\pm 1, \pm 1)$ . Die geschlossene Kurve wird im Gegenuhreigersinn durchlaufen.

La courbe  $C$  est le bord du carré avec les coins en  $(\pm 1, \pm 1)$ , parcourue contre le sens d'une aiguille d'une montre.

• **Aufgabe 4–4:**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$$

wobei  $C$  der Rand des Quadrates mit Ecken bei  $(\pm 1, \pm 1)$ . Die geschlossene Kurve wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

• **Aufgabe 4–5:**

Sei die Kurve  $C$  gegeben durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 4$$

und zu bestimmen ist das Integral

$$\int_C 4 \cosh(z) ds$$

• **Aufgabe 4–6:**

Sei die Kurve  $C$  gegeben durch

$$C : x = y = z = 1 + t^2 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

und zu bestimmen ist das Integral

$$\int_C xz - y^2 ds$$

• **Aufgabe 4–7:**

Sei die Kurve  $C$  gegeben durch

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 1 \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

und zu bestimmen ist das Integral

$$\int_C x - y + 3z ds$$

**• Aufgabe 4–8:**

Die Form eines Springseiles ist gegeben durch die Funktion

La forme d'une corde à suter est donnée par la fonction

$$h(x) = 3(0.5 - x^2) \quad \text{für/pour } x^2 \leq 0.5$$

Das Seil hat eine Masse von 1 kg und macht pro Sekunde eine volle Umdrehung um die  $x$ -Achse.

La corde a une masse de 1 kg et fait un tour complet par seconde autour l'axe des  $x$ .

(a) Bestimmen Sie die Länge  $L$  des Seiles und daraus die spezifische Masse  $\rho$  (in kg/m).

(a) Trouver la longueur  $L$  de la corde, puis calculer la masse spécifique  $\rho$  (en kg/m).

(b) Stellen Sie das Integral auf um die Rotationsenergie zu berechnen.

(b) Donner l'intégrale pour déterminer l'énergie cinétique de la rotation.

**• Aufgabe 4–9:**

Betrachten Sie wie in der vorangehenden Aufgabe ein Springseil, das durch die Punkte  $(\pm\sqrt{0.5}, 0)$  und  $(0, 1.5)$  geht. Diesmal ist die Kurve  $h$  gegeben durch eine umgekehrte cosh-Kurve, d.h.

$$h(x) = 2.5 - \cosh(cx)$$

für eine geeignete Konstante  $c$ .

(a) Bestimmen Sie den Wert von  $c$ .

(b) Bestimmen Sie die Länge  $L$  des Seiles und daraus die spezifische Masse.

(c) Stellen Sie das Integral auf um die Rotationsenergie zu berechnen.

**• Aufgabe 4–10:**

Der 'Gateway Arch' in St. Louis (USA) kann beschrieben werden durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt der Form

$$h(x) = 250 - 41 \cosh \frac{x}{41} \quad -102 \leq x \leq 102$$

$h$  ist die Höhe in  $m$  und  $x$  der Abstand vom Zentrum. Der Radius  $r$  des Rohres in  $m$  auf einer Höhe  $h$  ist gegeben durch

$$r(h) = 10 - \frac{h}{50}$$

Stellen Sie das Integral auf um das Volumen des Bogens approximativ zu berechnen. Das Integral ist nicht zu berechnen.

Le 'Gateway Arch' en St. Louis est une tube de la forme  $h(x) = \dots$  avec des cercles comme section.  $h$  est la hauteur et  $x$  la distance du centre. Le rayon  $r$  de la tube à l'hauteur  $h$  est donné par  $r(h) = \dots$ ,  $h$  et  $x$  sont mesurés en mètre.

Construire l'intégrale pour une approximation du volume totale du 'Gateway Arch'. Ne calculer pas l'intégrale.

**• Aufgabe 4–11:**

Ein Vektorfeld in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

Un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \\ x - z \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Integral  
Trouver l'intégral

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{s}$$

für die Kurve  $C$ , welche  $(0, 0, 0)$  mit  $(1, 2, 4)$  verbindet durch  
pour la courbe  $C$ , qui fait la connection des points  $(0, 0, 0)$  et  $(1, 2, 4)$  par

- (a) eine Gerade / une droite.  
(b) die parametrisierte Kurve  
la courbe paramétrique

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = 2t^2, \quad z(t) = 4t$$

• **Aufgabe 4-12:**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C (x \, dy - y \, dx) = \int_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

entlang der Kurve  $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$  für  $0 \leq t \leq \pi$ .

• **Aufgabe 4-13:**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C (x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz)$$

entlang der Kurve  $x = \cos t, y = \sin t, z = t$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

• **Aufgabe 4-14:**

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_C \begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

wobei  $C$  der positiv orientierte Kreis  $x^2 + y^2 = 4$  ist.

• **Aufgabe 4-15:**

La courbe  $C$  relie le point  $(1, -2)$  et  $(3, 3)$  le long  
d'une droite. Calculer

Die Kurve  $C$  verbindet die Punkte  $(1, -2)$  und  
 $(3, 3)$  durch ein Geradenstück. Berechnen Sie

$$a = \int_C \begin{pmatrix} x-y \\ e^{3x} \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} \quad \text{et/und} \quad b = \int_C (x-y + e^{3x}) \cdot ds$$

• **Aufgabe 4-16:**

Examiner la courbe  $C$

Untersuchen Sie die Kurve  $C$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \quad \text{pour/für} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{et/und} \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

Il existe une fonction scalaire  $f(x, y)$ , telle que  
pour la courbe  $C$  on trouve

Es gibt eine skalare Funktion  $f(x, y)$ , sodass für  
die Kurve  $C$  gilt

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_C f(x, y) \, ds$$

Trouver la fonction  $f(x, y)$ . Ne **pas** calculer la va-  
leur de l'intégral.

Bestimmen Sie die Funktion  $f(x, y)$ . Das Integral  
ist **nicht** zu berechnen.

• **Aufgabe 4–17:**

Une courbe  $C$  est donnée par la paramétrisation

Eine Kurve  $C$  ist gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = 2 \sin t, \quad y(t) = 2 - 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Calculer l'intégral

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

avec

mit

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x(y-2)}(1 + x(y-2)) \\ x^2 e^{x(y-2)} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{4}y\right) \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 4–18:**

Entscheiden Sie ob das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

konservativ ist und finden Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Potential.

• **Aufgabe 4–19:**

Gegeben ist das Vektorfeld

On considère le champ vectoriel

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x e^y \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Eine Kurve  $C$  verbindet den Punkt  $(1, 0)$  mit dem Punkt  $(-3, 4)$  in der Ebene entlang eines Halbkreises. Wählen Sie die Funktion  $F_2(x, y)$ , sodass das untenstehende Linienintegral leicht zu bestimmen ist und bestimmen Sie den Wert des Integrals.

Un demi-cercle  $C$  relie le point  $(1, 0)$  et le point  $(-3, 4)$ . Choisir la fonction  $F_2(x, y)$ , telle que l'intégrale curviligne ci-dessous est facile à calculer. Trouver ensuite la valeur de l'intégrale.

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

• **Aufgabe 4–20:**

Sei  $C \subset \mathbb{R}^2$  der obere Halbkreis mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung, orientiert von links nach rechts. Betrachten Sie die Funktionen

Soit  $C \subset \mathbb{R}^2$  le demi-cercle supérieure de rayon 3 avec centre à l'origine et orientation de gauche à droite. Examiner les fonctions

$$f(x, y) = y \quad \text{und/et} \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} (1 + xy) e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

Die beiden untenstehenden Linienintegrale sind umzuschreiben als „normale“ Integrale und dann die Werte zu berechnen.

Transformer les deux intégrales curviligne ci-dessous dans des intégral „normaux“ et puis trouver les valeurs.

$$A = \int_C f(x, y) ds \quad \text{und/et} \quad B = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s}$$

**•Aufgabe 4–21:**

Die Kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$  besteht aus einem Parabelstück von  $(-1, 1)$  zu  $(1, 1)$ , durch den Ursprung. Betrachten Sie die Funktion

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$A = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s} \quad \text{und/et} \quad B = \int_C \|\vec{F}(x, y)\| ds$$

La courbe  $C \subset \mathbb{R}^2$  est formée d'un secteur d'une parabole du point  $(-1, 1)$  au point  $(1, 1)$ , passant par l'origine. Examiner la fonction

(a) Stellen Sie das bestimmte Integral für  $A$  auf. Anschließend ist der exakte Wert von  $A$  zu bestimmen.

(a) Donner l'intégrale définie pour  $A$  et puis trouver la valeur exacte de  $A$ .

(b) Stellen Sie das bestimmte Integral für  $B$  auf. Anschließend ist der Wert von  $B$  zu bestimmen.

(b) Donner l'intégrale définie pour  $B$  et puis trouver la valeur de  $B$ .

**•Aufgabe 4–22:**

Die Kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$  besteht aus zwei Geradenstücken und ist unten gezeigt. Betrachten Sie die Funktionen

La courbe  $C \subset \mathbb{R}^2$  consiste des deux bouts de droites montrés ci-dessous. Examiner les fonctions

$$f(x, y) = x \quad \text{und/et} \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy e^x (2+x) \\ x^2 e^x \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie das bestimmte Integral für  $A$  auf. Anschließend ist der Wert von  $A$  zu bestimmen.

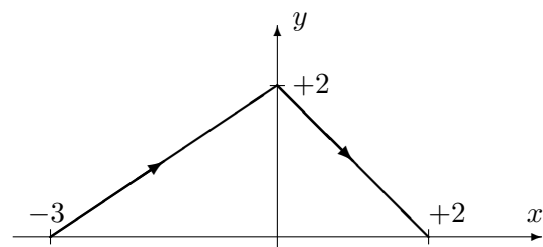
(a) Donner l'intégrale définie pour  $A$  et puis trouver la valeur de  $A$ .

(b) Stellen Sie das bestimmte Integral für  $B$  auf. Anschließend ist der Wert von  $B$  zu bestimmen.

(b) Donner l'intégrale définie pour  $B$  et puis trouver la valeur de  $B$ .

$$A = \int_C f(x, y) ds$$

$$B = \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s}$$

**•Aufgabe 4–23:**

Eine Kurve  $C$  ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 + 2 \sin t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

(a) Berechnen Sie

$$A = \int_C x ds$$

(b) Berechnen Sie

$$B = \int_C \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} d\vec{s}$$

• **Aufgabe 4-24:**

La courbe  $C \subset \mathbb{R}^2$  est donnée par la paramétrisation ci-dessous. Calculer les deux intégrales d'une façon **exacte**.

Die Kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$  ist gegeben durch die untenstehende Parametrisierung berechnen Sie die beiden Integrale **exakt**.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 - t^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec/wobei} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$a = \int_C \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} ds \quad \text{und/et} \quad b = \int_C \begin{pmatrix} \sin x + e^y \\ x e^y \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

• **Aufgabe 4-25:**

Un demi cercle  $C \subset \mathbb{R}^2$  avec rayon  $R$  est dans le demi plan supérieure avec centre à l'origine.

Ein Halbkreis  $C \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $R$  liegt in der oberen Halbebene mit Mittelpunkt im Ursprung.

- (a) Le poids spécifique  $\rho$  (mesuré en  $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ) est proportionnelle à la distance de l'axe des  $x$ . Déterminer la masse totale  $M$ .
- (b) Un ballon avec masse  $m$  bouge sur cette courbe  $C$  de gauche à droite dans le champs de force  $\vec{F}$ . Trouver le travail  $A$  nécessaire pour boucher la masse sur cette courbe.

- (a) Das spezifische Gewicht  $\rho$  (gemessen in  $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ) ist proportional zum Abstand von der  $x$ -Achse. Bestimmen Sie die Gesamtmasse  $M$ .
- (b) Ein Ball mit Masse  $m$  wird im Kraftfeld  $\vec{F}$  entlang der Kurve von links nach rechts bewegt. Bestimmen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit  $A$ .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

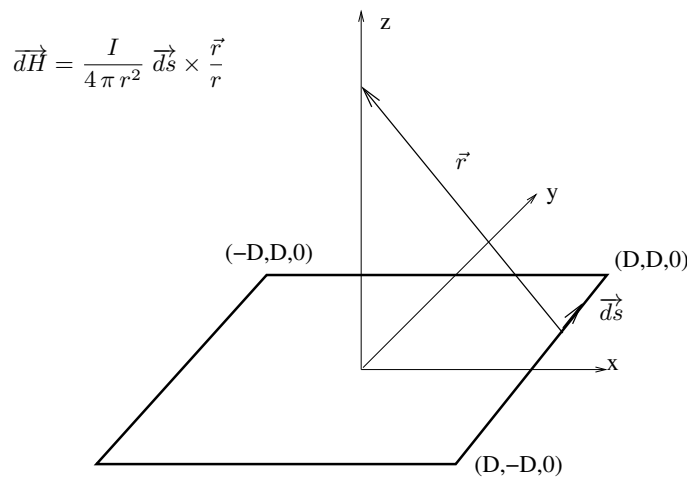
• **Aufgabe 4-26:**

Mit dem Gesetz von Biot-Savart ist das Magnetfeld eines Leiters in der  $xy$ -Ebene zu untersuchen. Die Form des Drahtes ist gegeben als Quadrat der Seitenlänge  $2D$  mit Zentrum im Ursprung.

Utiliser la loi de Biot-Savart pour un conducteur dans le plan  $xy$ . Le fil prend la forme d'un carré de longueur  $2D$  centré à l'origine.

- (a) Geben Sie das Integral an um die  $z$ -Komponente  $H_3(0,0,z)$  des Magnetfeldes an einem Punkt  $(0,0,z)$  auf der  $z$ -Achse zu bestimmen.
- (b) Bestimmen Sie den numerischen Wert des obigen Integrals, für die Daten  $I = 1$ ,  $D = 2$  und  $z = 0.5$ .

- (a) Donner l'intégrale pour la composante  $z$   $H_3(0,0,z)$  du champ magnétique en un point  $(0,0,z)$  sur l'axe des  $z$
- (b) Trouver la valeur numérique de l'intégrale ci-dessus en utilisant les valeurs  $I = 1$ ,  $D = 2$  et  $z = 0.5$ .



#### 4.7.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

**Lösung zu Aufgabe 4-1 :** Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^n \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Das führt auf

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n t^{n-1} \end{pmatrix}$$

und somit

(a)

$$L = \int_C 1 \, ds = \int_0^2 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} \, dt$$

(b)

$$M = \int_C \rho \, ds = \int_0^2 \sin(t) \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} \, dt$$

(c)

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{M} \int_c x \rho \, ds = \frac{1}{M} \int_0^2 t \sin(t) \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} \, dt \\ y_s &= \frac{1}{M} \int_c y \rho \, ds = \frac{1}{M} \int_0^2 t^n \sin(t) \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} \, dt \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4-2 :** Die Parametrisierung sollte hier in zwei Teilen erfolgen. Eine mögliche Parametrisierung der ersten Gerade ist

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 1$$

und für das zweite Geradenstück kann man

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 1 \leq t \leq 2$$

verwenden.

(a)

$$M = \int_C \rho \, ds = \int_0^1 \sin(2t) \sqrt{4} \, dt + \int_1^2 \sin(2) \sqrt{1} \, dt = 1 - \cos(2) + \sin(2)$$

(b)

$$\begin{aligned} M x_s &= \int_c x \rho \, ds \\ &= \int_0^1 2t \sin(2t) \sqrt{4} \, dt + \int_1^2 2 \sin(2) \sqrt{1} \, dt \\ M y_s &= \int_c y \rho \, ds \\ &= \int_0^1 0 \sin(2t) \sqrt{4} \, dt + \int_1^2 (t-1) \sin(2) \sqrt{1} \, dt = \frac{\sin(2)}{2} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4-3 :**

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \int_{(1,1)}^{(-1,1)} f + \int_{(-1,1)}^{(-1,-1)} f + \int_{(-1,-1)}^{(1,-1)} f + \int_{(1,-1)}^{(1,1)} f \\ &= 4 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = 8 \sinh^{-1} 1 \end{aligned}$$

Hierbei ist die Funktion  $\sinh^{-1}$  die zu  $\sinh$  inverse Function.

**Lösung zu Aufgabe 4-4 :**

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} &= \int_{(1,1)}^{(-1,1)} f + \int_{(-1,1)}^{(-1,-1)} f + \int_{(-1,-1)}^{(1,-1)} f + \int_{(1,-1)}^{(1,1)} f \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} \, dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \, dt \\ &= 4 \sinh^{-1} \frac{1}{2} + 2 \sinh^{-1} 2 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4-5 :**  $4 \sinh(48)$ **Lösung zu Aufgabe 4-6 :** 0**Lösung zu Aufgabe 4-7 :**  $\frac{-3\pi}{4} + 27 - 9\sqrt{2}$ **Lösung zu Aufgabe 4-8 :**(a) Sei  $a = \sqrt{0.5}$ 

$$L = \int_C 1 \, ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + h'^2(x)} \, dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + 36x^2} \, dx \approx 3.44 \, [m]$$

$$\rho = \frac{M}{L} \approx 0.29 \left[ \frac{kg}{m} \right]$$

(b) Da eine Umdrehung pro Sekunde gemacht wird ist die Winkelgeschwindigkeit gegeben durch  $\omega = 2\pi$ . Die spezifische Energie (Energie pro Länge) ist somit

$$e(x, y) = \frac{\rho}{2} \omega^2 y^2$$



Daraus erhalten wir die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= \int_C e = \int_C e \, ds = \frac{\rho}{2} \omega^2 \int_{-a}^a h(x)^2 \sqrt{1 + h'(x)^2} \, dx \\ &= \frac{2\pi^2 M}{L} \int_{-a}^a (3(0.5 - x^2))^2 \sqrt{1 + 36x^2} \, dx \approx 17.08 \, [J] \end{aligned}$$

#### Lösung zu Aufgabe 4-9 :

(a) Wegen

$$h(\sqrt{0.5}) = 2.5 - \cosh(c\sqrt{0.5}) = 0$$

gilt

$$c = \frac{\operatorname{acosh}(2.5)}{\sqrt{0.5}} \approx 2.216$$

(b) Eine Rechnung ähnlich zur vorangehenden Aufgabe ergibt  $L \approx 3.468 \, [m]$ .

(c) Eine Rechnung ähnlich zur vorangehenden Aufgabe ergibt  $E \approx 17.41 \, [J]$ .

#### Lösung zu Aufgabe 4-10 :

$$\frac{dh}{dx} = -\sinh \frac{x}{41}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-102}^{102} \pi r^2(h) \, ds \\ &= \int_{-102}^{102} \pi \left( 10 - \frac{250 - 41 \cosh(x/41)}{50} \right)^2 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{41}} \, dx \end{aligned}$$

#### Lösung zu Aufgabe 4-11 :

(a)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{-14}{3}$$

(b)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^4 \\ t^4 \\ t^2 - 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 4 \end{pmatrix} dt = \frac{-16}{3}$$

#### Lösung zu Aufgabe 4-12 : $\pi$

#### Lösung zu Aufgabe 4-13 : $\frac{8\pi^3}{3}$

#### Lösung zu Aufgabe 4-14 : 0

Lösung zu Aufgabe 4-15 : Die Kurve  $C$  kann parametrisiert werden durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2+\frac{5}{2}t \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2$$

Dann gilt

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{1 + \frac{25}{4}} dt = \sqrt{7.25} dt$$

(a)

$$\begin{aligned}
a &= \int_C \begin{pmatrix} x - y \\ e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 + t + 2 - \frac{5}{2}t \\ e^{3(1+t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^2 1 + t + 2 - \frac{5}{2}t + e^{3(1+t)} \frac{5}{2} dt \\
&= \int_0^2 3 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}e^{3(1+t)} dt \\
&= \left( 3t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{6}e^{3(1+t)} \right) \Big|_{t=0}^2 \\
&= \left( 6 - 3 + \frac{5}{6}e^9 \right) - \left( 0 - 0 + \frac{5}{6}e^3 \right) \\
&= 3 - \frac{5}{6}e^3 + \frac{5}{6}e^9 \approx 6738.83
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
b &= \int_C (x - y + e^{3x}) \cdot ds \\
&= \int_0^2 (1 + t + 2 - \frac{5}{2}t + e^{3(1+t)}) \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4}} dt \\
&= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} \int_0^2 (3 - \frac{3}{2}t + e^{3(1+t)}) dt \\
&= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} \left( 3t - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{3}e^{3(1+t)} \right) \Big|_{t=0}^2 \\
&= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} \left( 6 - 3 + \frac{1}{3}(e^9 - e^3) \right) \\
&= \sqrt{1 + \frac{25}{4}} \left( 3 + \frac{1}{3}(e^9 - e^3) \right) \approx 7262.79
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4–16 :**

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix}, \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt, \quad ds = \|\vec{ds}\| = 3 dt$$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 9 \cos^2 t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^\pi (-9 \cos^2 t \sin t + 3 \sin t \cos t) 3 dt \\
&= \int_C \left( -\frac{1}{3}x^2 y + \frac{1}{3}y x \right) ds
\end{aligned}$$

Somit  $f(x, y) = \frac{1}{3}(-x^2 y + y x)$  eine mögliche Lösung.

**Lösung zu Aufgabe 4–17 :** Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

und somit ist das Vektorfeld konservativ und Integrale über geschlossene Kurven sind Null. Deshalb ersetzen wir die Kurve  $C$  durch eine einfachere Kurve  $C'$  welche dieselben Anfangs- und Endpunkte verbindet.

$$C' : \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 4$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\vec{s} &= \int_{C'} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_0^4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^4 -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{4}\right) dt = \cos\left(\frac{t}{4}\right) \Big|_{t=0}^4 = \cos 1 - 1 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4–18 :** Das Vektorfeld ist konservativ

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2x)}{\partial y} &= \frac{\partial(-2y)}{\partial x} = 0 \\ \vec{F}(x, y) &= \text{grad}(-x^2 - y^2) \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4–19 :** Das Vektorfeld  $\vec{F}$  sollte konservativ sein, dann hängt das Kurvenintegral nur von den beiden Endpunkten ab. Eine Integration bezüglich  $x$  liefert eine Formel für  $F_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{dx} &= \frac{dF_1}{dy} = \frac{d(xe^y)}{dy} = xe^y \\ F_2(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 e^y + c \end{aligned}$$

Die einfachste Wahl für die Konstante  $c$  ist sicher  $c = 0$ . Nun kann man leicht ein Potential  $V(x, y)$  erraten, oder auch errechnen.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 e^y \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= xe^y = F_1 \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{2}x^2 e^y = F_2 \end{aligned}$$

Es gilt

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = V(-3, 4) - V(1, 0) = \frac{9}{2}e^4 - \frac{1}{2}$$

**Lösung zu Aufgabe 4–20 :** Die Kurve  $C$  kann parametrisiert werden durch

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \\ d\vec{s} &= \dot{\vec{x}}(t) dt = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ -3 \sin t \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = \|\dot{\vec{x}}(t)\| = 3 dt \end{aligned}$$

(a)

$$A = \int_C f(x, y) \, ds = \int_C y \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos t \cdot 3 \, dt = 9 \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 18$$

(b) Wegen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x e^{xy} + (1 + xy) e^{xy} x = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

ist das Vektorfeld konservativ und der Halbkreis kann ersetzt werden durch eine Gerade von  $(-3, 0)$  zu  $(3, 0)$ . Somit wird

$$\begin{aligned} B &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{ds} = \int_C \begin{pmatrix} (1 + xy) e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \int_{-3}^3 \begin{pmatrix} (1 + x0) e^{x0} \\ x^2 e^{x0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{-3}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx = \int_{-3}^3 1 \, dx = 6 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4-21 :** Zuerst ist die Parabel zu parametrisieren. Eine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$$

wobei  $-1 \leq t \leq 1$ .

(a) Nun gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{ds} = \int_C \begin{pmatrix} 1 \\ 4y \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^1 1 + 8t^3 \, dt = \left( t + \frac{8}{4} t^4 \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \end{aligned}$$

Da das Vektorfeld  $\vec{F}$  konservativ ist, kann man auch die Parabel zu einer Geraden ändern oder das Potential  $V(x, y) = x + 2y^2$  erraten und somit  $A = V(1, 1) - V(-1, 1) = 2$ .

(b) Analog erhält man

$$\begin{aligned} B &= \int_C \|\vec{F}(x, y)\| \, ds = \int_C \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4y \end{pmatrix} \right\| \, ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + (4t^2)^2} \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \, dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 16t^4} \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \, dt \approx 6.09342 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4-22 :** Zuerst sind die beiden Geradenstücke zu parametrisieren. Eine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 + 3t \\ 0 + 2t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{3^2 + 2^2} \, dt = \sqrt{13} \, dt$$

wobei  $0 \leq t \leq 1$ . Für die zweite Gerade gilt

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 + 2t \\ 2 - 2t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{2^2 + 2^2} \, dt = \sqrt{8} \, dt$$

für den Bereich  $0 \leq t \leq 1$ .

(a) Nun gilt

$$\begin{aligned}
 A &= \int_C f(x, y) \, ds = \int_C x \, ds \\
 &= \int_0^1 (-3 + 3t) \sqrt{13} \, dt + \int_0^1 (2t) \sqrt{8} \, dt \\
 &= \left( \frac{1}{6} (-3 + 3t)^2 \sqrt{13} + t^2 \sqrt{8} \right) \Big|_{t=0}^1 \\
 &= \sqrt{8} - \frac{1}{6} 9 \sqrt{13} \approx -2.5799
 \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$\frac{\partial x^2 e^x}{\partial x} = 2x e^x + x^2 e^x \quad \text{und} \quad \frac{\partial x y e^x (2+x)}{\partial y} = 2x e^x + x^2 e^x$$

ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  konservativ und die Kurve darf vereinfacht werden. Wir verwenden die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad \text{wobei} \quad -3 \leq t \leq 2$$

und somit

$$\begin{aligned}
 B &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{ds} = \int_C \begin{pmatrix} x y e^x (2+x) \\ x^2 e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{-3}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0
 \end{aligned}$$

Man kann auch versuchen das Potential  $V(x, y)$  zu erraten.

$$V(x, y) = x^2 y e^x \quad \implies \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) &= 2x y e^x + x^2 y e^x \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) &= x^2 e^x \end{aligned}$$

Damit ist das Integral gegeben durch

$$B = V(2, 0) - V(-3, 0) = 0$$

**Lösung zu Aufgabe 4–23 :** Die Kurve  $C$  entspricht einem Kreissegment mit Radius 2 und Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse auf der Höhe 2, wobei der Winkel von  $-90^\circ$  zu  $180^\circ$  variiert.

$$\begin{aligned}
 \vec{ds} &= \frac{d \vec{x}(t)}{dt} dt = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt \\
 ds &= \|\vec{ds}\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2 dt
 \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
 A &= \int_C x \, ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos t \cdot 2 \, dt \\
 &= 4 \sin t \Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 B &= \int_C \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} d\vec{s} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \begin{pmatrix} 2 + 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} -4 \sin t - 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t dt = -4
 \end{aligned}$$

Diese Teilaufgabe kann leichter mit Hilfe eines Potentials  $V(x, y) = x \cdot y$  gelöst werden. Wegen

$$\text{grad } V = \text{grad}(x \cdot y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

gilt

$$B = \int_C \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} d\vec{s} = V(\vec{x}(\pi)) - V(\vec{x}(\frac{-\pi}{2})) = (-2) \cdot 2 - 0 \cdot 0 = -4$$

**Lösung zu Aufgabe 4–24 :** Pour cette paramétrisation on trouve

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ds = \sqrt{1 + (2t)^2}$$

(a) On trouve

$$a = \int_C \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} ds = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

(b) A cause de  $\frac{\partial}{\partial x}(x e^y) = e^y = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + e^y)$  le champs  $\vec{F}$  est conservative et on peut remplacer la courbe par la droite de connection entre  $(-1, 1)$  et  $(1, 1)$  avec la nouvelle paramétrisation

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad -1 \leq t \leq 1$$

Donc  $\vec{ds} = (1, 0)^T$  et  $ds = 1$  et donc

$$\begin{aligned}
 b &= \int_C \begin{pmatrix} \sin x + e^y \\ x e^y \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \sin t + e^1 \\ t e^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{-1}^1 \sin t + e^1 dt = 2e \approx 5.43656
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 4–25 :** Sei die Kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$  parametrisiert durch

$$x(t) = a \cos(t) \quad , \quad y(t) = a \sin t \quad \text{wobei/avec} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(a) Kurvenintegral der Dichte ergibt die Gesamtmasse. Gemäss den Angaben gilt  $\rho = k y$  und somit

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \rho ds = \int_C k \cdot y ds \\
 &= k \int_0^\pi R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\
 &= k R^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2k R^2
 \end{aligned}$$

- (b) Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist nicht konservativ. Die obige Parametrisierung ergibt die falsche Orientierung.

$$\begin{aligned} -A &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi R^2 dt = \pi R^2 \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 4–26 :

- (a) Aufgrund der Symmetrie liefern alle vier Seiten des Quadrates den selben Beitrag zur  $z$ -Komponente der  $H$ -Feldes und wir bestimmen folglich nur einen Beitrag. Die Parametrisierung einer Seite ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} D \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad \text{für} \quad -D \leq t \leq D$$

und somit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -D \\ -t \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{D^2 + t^2 + z^2}$$

Wegen

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -D \\ -t \\ z \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ D \end{pmatrix} dt$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{H}(0, 0, z) &= 4 \int_{\text{Kante}} d\vec{H} = 4 \frac{I}{4\pi} \int_{\text{Kante}} \frac{1}{r^3} d\vec{s} \times \vec{r} \\ H_3(0, 0, z) &= \frac{I}{\pi} \int_{-D}^D \frac{D}{\sqrt{D^2 + t^2 + z^2}^3} dt \end{aligned}$$

Dieses Integral kann exakt berechnet werden, man erhält

$$H_3(0, 0, z) = \frac{2 D^2 I}{\pi (D^2 + z^2) \sqrt{2 D^2 + z^2}}$$

- (b) Eine numerische Integration mit den Werten  $I = 1$ ,  $D = 2$  und  $z = 0.5$  ergibt

$$H_3(0, 0, z) = \frac{I}{\pi} \int_{-D}^D \frac{D}{\sqrt{D^2 + t^2 + z^2}^3} dt \approx 0.20860$$

## 4.8 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Integrale von skalaren Funktionen und Vektorfeldern über Kurven aufstellen und berechnen können.

- einfache Kurvenintegrale exakt berechnen können.
- den Wert von nicht elementaren Kurvenintegralen mit Hilfe des Taschenrechners numerisch berechnen können.
- mit einigen Anwendungen vertraut sein.
- entscheiden können ob ein Vektorfeld konservativ ist oder nicht.
- Potentiale eines konservativen Vektorfeldes bestimmen können und damit Linienintegrale berechnen.



## Kapitel 5

# Uneigentliche Integrale und Parameterintegrale

### 5.1 Uneigentliche Integrale

Im Kapitel über eigentliche Integrale haben wir gezeigt, dass jede stückweise stetige, beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist. Die Konstruktion mit Hilfe von Riemannschen Summen führte zu zwei wesentlichen Einschränkungen

1. der Integrationsbereich  $[a, b]$  muss beschränkt sein
2. die Funktion  $f(x)$  muss beschränkt sein

Nun werden wir zeigen, wie diese beiden Einschränkungen durch geeignete Konstruktionen umgangen werden können.

#### 5.1.1 Integrale mit unendlichem Integrationsbereich

**5-1 Beispiel :** Um die Fläche  $A$  unter der Kurve  $y = 1/x^2$  für  $x \geq 1$  zu bestimmen, wählen wir ein sehr grosses  $\omega \in \mathbb{R}$  und berechnen

$$A \approx \int_1^\omega \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_{x=1}^\omega = \frac{-1}{\omega} + 1 \longrightarrow 1 \quad \text{falls } \omega \rightarrow \infty$$

Somit können wir mit gutem Grund behaupten  $A = 1$ .

◇

**5-2 Definition :** Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften

1. auf jedem Intervall der Form  $[a, \omega]$  ist  $f$  integrierbar
2. der Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx$$

existiert.

Dann ist die Funktion  $f$  auf dem unbeschränkten Intervall  $[a, \infty)$  integrierbar und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx$$

Man spricht von einem **uneigentlichen Integral** der Funktion  $f$ .

**5–3 Beispiel :** Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

**Lösung:** Die Funktion ist auf jedem Intervall  $[0, \omega]$  stetig und beschränkt und somit integrierbar. Es gilt

$$\int_0^{\omega} x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{\omega} = \frac{-1}{2} (e^{-\omega^2} - 1) \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty$$

Somit gilt

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

◇

**5–4 Beispiel :** Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \sin x dx$$

**Lösung:** Die Funktion ist auf jedem Intervall  $[0, \omega]$  stetig und beschränkt und somit integrierbar. Es gilt

$$\int_0^{\omega} \sin x dx = -\cos x \Big|_{x=0}^{\omega} = 1 - \cos \omega$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für  $\omega \rightarrow \infty$  existiert nicht, und somit ist die richtige Antwort

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \quad \text{existiert nicht}$$

◇

**5–5 Beispiel :** Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{10} e^{5x} dx$$

**Lösung:** Die Funktion ist auf jedem Intervall  $[-\omega, 10]$  stetig und beschränkt und somit integrierbar. Es gilt

$$\int_{-\omega}^{10} e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} \Big|_{x=-\omega}^{10} = \frac{1}{5} (e^{50} - e^{-5\omega}) \longrightarrow \frac{1}{5} e^{50} \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{10} e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{50}$$

◇

**5–6 Beispiel :** Um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$$

zu bestimmen, könnte man auf die Idee kommen, die Rechnung

$$\int_{-\omega}^{\omega} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{x=-\omega}^{\omega} = \cos(-\omega) - \cos \omega = 0$$

zu verwenden, um auf das Resultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = 0$$

zu schliessen. Dies ist **falsch**. Das richtige Resultat erhält man durch das Aufspalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \int_{-\infty}^0 \sin x \, dx + \int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

Da beide Integrale auf der rechten Seite nicht existieren, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx \quad \text{existiert nicht}$$

◇

**5–7 Beispiel :**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^0 \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{\nu} \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tanh x \Big|_{x=-\omega}^0 + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tanh x \Big|_{x=0}^{\nu} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tanh(-\omega) + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tanh \nu = 2 \end{aligned}$$

◇

### 5.1.2 Integrale über Polstellen der Funktion

Mit den bisher üblichen Integrationstechniken kann das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

nicht untersucht werden, da die Funktion  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  auf dem Intervall  $(0, 1)$  nicht beschränkt ist. Strebt  $x$  gegen Null, so wächst der Funktionswert über alle Grenzen. Trotzdem können wir die Fläche für sehr kleine, positive Werte von  $\varepsilon$  abschätzen durch

$$A \approx \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} \Big|_{x=\varepsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) \longrightarrow 2 \quad \text{falls } \varepsilon \rightarrow 0+$$

**5–8 Definition :** Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften

1. auf jedem Intervall der Form  $[a + \varepsilon, b]$  ist  $f$  integrierbar
2. der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

existiert.

Die Funktion muss in der Nähe von  $x = a$  nicht beschränkt sein. Dann ist die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $(a, b)$  integrierbar und wir setzen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Man spricht auch hier von einem **uneigentlichen Integral** der Funktion  $f$ .

Tritt die Singularität am rechten Intervallende auf, so ist die Definition entsprechend abzuändern.

**5–9 Beispiel :** Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**Lösung:** Die Funktion ist auf jedem Intervall  $[0, 1 - \varepsilon]$  stetig und beschränkt und somit integrierbar. Es gilt

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{x=0}^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+$$

Somit gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

◇

**5–10 Beispiel :** Man kann verifizieren, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

1. existiert, falls  $0 < p < 1$  mit

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$$

2. nicht existiert, falls  $p \geq 1$

◇

**5–11 Beispiel :** Das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$$

existiert trotz der einfachen Rechnung

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2} dx = \frac{-1}{2} \ln(1-x^2) \Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0$$

**nicht.** Wieso?

◇

### 5.1.3 Majorantenkriterium

Oft muss man entscheiden, ob ein uneigentliches Integral existiert oder nicht, ohne dass es notwendig ist, seinen Wert zu berechnen. Hierzu kann man Konvergenzkriterien einsetzen.

**5–12 Theorem :** Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. Auf jedem Intervall der Form  $[a, \omega]$  ist  $f$  integrierbar
2. Es gibt eine Zahl  $M$  und eine **Majorante**  $g(x)$ , mit

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \geq M$$

und

$$\int_a^\infty g(x) dx < \infty$$

existiert.

Dann ist die Funktion  $f$  auf dem unbeschränkten Intervall  $[a, \infty)$  integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty g(x) dx < \infty$$

**5–13 Beispiel :** Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

existiert, da offensichtlich

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty$$

◇

**5–14 Theorem :** Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften

1. Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist die Funktion auf dem Intervall  $[a + \varepsilon, b]$  integrierbar.
2. Es gibt eine **Majorante**  $g(x)$ , mit

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } a < x \leq b$$

und

$$\int_a^b g(x) dx < \infty$$

existiert.

Dann ist die Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx < \infty$$

**5–15 Beispiel :** Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$$

existiert, da offensichtlich

$$\left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

und

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 < \infty$$

◇

**5–16 Beispiel :** Zu den wichtigeren „höheren“ Funktionen gehört die Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Dieses ist ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral, dessen Konvergenz mit dem Majorantenkriterium untersucht werden kann.

- Das Integral  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  ist an der unteren Grenze nur uneigentlich, falls  $0 < x < 1$ . In diesem Falle garantiert  $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$  die Konvergenz.
- Um das Integral  $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  zu untersuchen, verwendet man, dass  $e^t$  schneller anwächst als jedes Polynom, wenn nur genügend grosse Argumente untersucht werden. Somit gilt  $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{-2}$  für genügend grosses  $t$  und das Integral konvergiert.

Für  $x > 1$  verifiziert man mit Hilfe einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -e^{-t} t^x \Big|_{t=0}^\omega + \int_0^\omega e^{-t} x t^{x-1} dt \right) \\ &= x \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \int_0^\omega e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= x \Gamma(x) \end{aligned}$$

Wegen

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = 1$$

gilt also

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(2) &= 1 \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2 \Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3 \Gamma(3) = 6 \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) = n! \end{aligned}$$

◇

**5–17 Theorem :** (Vergleich mit Reihen)

Sei  $f(x) \geq 0$  eine monoton fallende, stetige Funktion, und wir vergleichen die beiden Ausdrücke

$$\int_0^\infty f(x) dx \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^\infty f(n)$$

Die Reihe existiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral existiert.

**Beweis :** Eine einfache Zeichnung zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(x) dx \longrightarrow \int_0^\infty f(x) dx$$

und

$$\int_0^N f(x) dx \leq \sum_{n=0}^N f(n) \longrightarrow \sum_{n=0}^\infty f(n)$$

Diese beiden Ungleichungen und einfache Monotonieargumente führen zum behaupteten Resultat.  $\square$

**5–18 Beispiel :** Mit Hilfe des obigen Theorems kann man leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} & \quad \text{konvergiert falls} \quad p > 1 \\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} & \quad \text{divergiert falls} \quad 0 < p \leq 1 \end{aligned}$$

$\diamond$

## 5.2 Eigentliche Parameterintegrale

### 5.2.1 Grundproblem

Sei  $f(x, y)$  eine Funktion die von zwei Variablen  $x, y$  abhängt. Dann betrachtet man für feste Integrationsgrenzen  $a < b$  die neue Funktion

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad .$$

Die Funktion  $F(y)$  hängt vom **Parameter**  $y$  ab. Es ist zu erwarten, dass falls  $f(x, y)$  stetig ist bezüglich beider Variablen, dann hängt auch  $F$  stetig von  $y$  ab. Ist  $f$  differenzierbar bezüglich  $y$ , so sollte auch  $F$  differenzierbar sein. Die Resultate im folgenden Abschnitt verifizieren diese Vermutungen.

### 5.2.2 Resultate

Sei  $R$  ein Rechteck in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

und

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R} \quad .$$

Somit hat die oben definierte Funktion  $F$  einen Definitionsbereich  $[c, d]$  und einen Bildbereich  $\mathbb{R}$ .

**5–19 Theorem : (Stetigkeit)**

Aus  $f \in C^0(R, \mathbb{R})$  folgt  $F \in C^0([c, d], \mathbb{R})$ .

**5–20 Theorem : (Differenzierbarkeit)**

Aus  $f \in C^0(R, \mathbb{R})$  und  $\frac{\partial}{\partial y} f \in C^0(R, \mathbb{R})$  folgt  $F \in C^1([c, d], \mathbb{R})$  und

$$\frac{dF}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

Diese beiden Theoreme formulieren die erwarteten Resultate. Die Reihenfolge von Ableitung bezüglich des Parameters und der Integration können vertauscht werden. Die Voraussetzungen verlangen, dass die Funktion und gegebenenfalls auch die partielle Ableitung bezüglich des Parameters stetig sein sollten. Auch für mehrdimensionale Integrale gibt es die entsprechenden Resultate.

Hängen auch die Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  vom Parameter  $y$  ab, d.h.

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

so tritt der Parameter  $y$  an drei Orten in der Formel auf. Somit erhält man mittels sorgfältiger Anwendung der Kettenregel

$$\frac{dF}{dy} = f(b(y), y) \frac{\partial b(y)}{\partial y} - f(a(y), y) \frac{\partial a(y)}{\partial y} + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

**5–21 Beispiel : Sei**

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda x} \quad \text{und} \quad F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda x} dx$$

Diese Funktion  $f$  ist stetig und differenzierbar bezüglich beider Variablen auf jedem festen Rechteck  $R$ . Somit gilt

$$F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-\lambda x} dx = \int_a^b -x e^{-\lambda x} dx = \frac{1 + \lambda x}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big|_{x=a}^b = \frac{1 + \lambda b}{\lambda^2} e^{-\lambda b} - \frac{1 + \lambda a}{\lambda^2} e^{-\lambda a}$$

Das Resultat kann auch direkt verifiziert werden durch

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda x} dx = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{x=a}^b = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda b} - \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda a}$$

und durch ableiten bezüglich  $\lambda$  ergibt sich

$$F'(\lambda) = \frac{1 + \lambda b}{\lambda^2} e^{-\lambda b} - \frac{1 + \lambda a}{\lambda^2} e^{-\lambda a}$$

was mit dem obigen Resultat übereinstimmt. ◇



**5–22 Beispiel :** Verifiziere, dass die Funktion

$$y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= a y(t) + f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

löst. Dies ist die Formel für die **Variation der Konstanten**. ◇

## 5.3 Uneigentliche Integrale in mehreren Variablen

### 5.3.1 Grundproblem

Es gibt zwei Arten von uneigentlichen Integralen: Singularitäten in der zu integrierenden Funktion und unbeschränkte Integrationsbereiche. Als Erinnerung sei hier ein Theorem über uneigentliche Integrale in einer Variablen angegeben. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir nur die spezielle Situation einer möglichen Singularität bei  $x = 0$  und dem Integrationsbereich  $\mathbb{R}_+$ .

**5–23 Theorem :** (*Majorantenkriterium*)

Sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $g(x)$  eine weitere stetige Funktion mit

$$0 \leq |f(x)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty g(x) dx < \infty$$

(d.h.  $g$  ist eine integrierbare **Majorante** von  $f$ ), dann ist die Funktion  $f(x)$  integrierbar und das Integral kann berechnet werden durch

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

wobei  $a_n, b_n$  beliebige Folgen sind mit  $a_n \rightarrow 0+$  und  $b_n \rightarrow \infty$ .

Zur Illustration hier ein Beispiel

**5–24 Beispiel :** Sei  $f(x) = e^{-2x} \sin(x^2 - 1)$ . Somit ist

$$|f(x)| \leq e^{-2x} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2} e^{-2x} \Big|_{x=0}^n = \frac{1}{2}$$

Somit existiert auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-2x} \sin(x^2 - 1) dx$$

Die Berechnung des Integrales ist schwierig, da wir aber wissen, dass der Wert existiert, können wir numerische Verfahren verwenden und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-2x} \sin(x^2 - 1) dx \approx -0.277867$$

Der erhaltene Wert ist auch kleiner als  $1/2$ , wie es sein soll. ◇

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Verifikation der Voraussetzungen **nicht** fakultativ ist.

**5–25 Beispiel :** Wir untersuchen die Funktion  $f(x) = \sin x$  mit

$$\int_0^b f(x) dx = 1 - \cos b$$

- Mit der speziellen Folge  $b_n = 2n\pi$  gilt

$$\int_0^{b_n} f(x) dx = 0$$

- Mit der speziellen Folge  $b_n = (2n + 1)\pi$  gilt

$$\int_0^{b_n} f(x) dx = 2$$

- Jeder Wert zwischen 0 und 2 kann durch eine geeignete Wahl der Folge  $b_n$  erreicht werden.

Somit sollte klar sein, dass diese Funktion **nicht integrierbar** ist. ◇

### 5.3.2 Resultate

Es geht hier darum das **Majorantenkriterium** für uneigentliche Integrale in mehreren Variablen richtig anzuwenden.

Um die Situation zu vereinfachen betrachten wir nur Funktionen ohne Singularitäten, d.h. wir haben uneigentliche Integrale weil der Integrationsbereich unbeschränkt ist.

**5–26 Definition :** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  hat eine **integrierbare Majorante**  $g$  falls

$$g \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad |f(x, y)| \leq g(x, y) \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

und eine der drei Bedingungen erfüllt ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \int_{-n}^n g(x, y) dx dy &< \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \int_{-n}^n g(x, y) dy dx &< \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^{2\pi} g(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho &< \infty \end{aligned}$$

Hierbei wurde stillschweigend die Konvention verwendet, dass bei  $g(x, y)$  kartesische Koordinaten verwendet werden und bei  $g(\rho, \varphi)$  Polarkoordinaten.

Das folgende Theorem besagt, dass man mittels Berechnung von Integralen über immer grösser werdende Bereiche das uneigentliche Integral einer Funktion über die Ebene bestimmen kann, falls es eine integrierbare Majorante gibt.

**5–27 Theorem :** Hat eine Funktion  $f(x, y)$ , die stetig ist auf  $\mathbb{R}^2$ , eine integrierbare Majorante so existiert das uneigentliche Integral von  $f$  über den Bereich  $\mathbb{R}^2$  und kann berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f \, dA &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a_n}^{b_n} \int_{-c_n}^{d_n} f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a_n}^{b_n} \int_{-c_n}^{d_n} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \rho \, d\varphi \, d\rho \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_n} f(\rho, \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi \end{aligned}$$

wobei  $a_n, b_n, c_n, d_n$  beliebige Folgen sind, die gegen  $\infty$  konvergieren.

**5–28 Beispiel :** Das uneigentliche Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = ?$$

kann mit Hilfe einer Transformation in Polarkoordinaten bestimmt werden.

Es gilt

$$I \cdot I = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dx \, dy$$

Da die Exponentialfunktion sehr schnell gegen Null konvergiert ist die Konvergenz der Integrale kein Problem. Durch umschreiben in Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-x^2-y^2} \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} \, d\rho \\ &= 2\pi \left. \frac{-e^{-\rho^2}}{2} \right|_{\rho=0}^{\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Somit gilt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

◇

**5–29 Beispiel :** Sei

$$f(x, y) = \frac{\cos(x-1) \cdot \sin y}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

und wir versuchen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \, dA = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos(x-1) \cdot \sin y}{1 + (x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$

zu berechnen.

Offensichtlich gilt

$$f(x, y) \leq \rho^{-4} = g(\rho, \varphi) \quad \text{falls} \quad \rho \geq 1$$

und

$$f(x, y) \leq 1 = g(\rho, \varphi) \quad \text{falls} \quad \rho < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^{2\pi} g(\rho, \varphi) \rho \, d\varphi \, d\rho = \pi + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n 2\pi \rho^{-3} \, d\rho = \pi + \frac{2\pi}{2} < \infty$$

Somit ist  $g$  eine integrierbare Majorante und  $f$ , aufgrund des Theorems, integrierbar.  $\diamond$

Man sieht in diesem Beispiel, dass nur das Verhalten von  $f(x, y)$  für grosse Werte von  $|x|, |y|$  eine Rolle spielt. Diese Vereinfachung ist nur richtig, wenn  $f$  keine Singularitäten hat.

### 5-30 Theorem :

1. Sei  $f(x, y)$  eine stetige Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$ . Gibt es einen Radius  $R$ , eine feste Zahl  $M$  und ein  $p > 2$ , sodass

$$f(x, y) \leq M \cdot \rho^{-p} \quad \text{für alle} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 > R$$

so hat  $f$  eine integrierbare Majorante.

2. Sei  $f(x, y, z)$  eine stetige Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}^3$ . Gibt es einen Radius  $R$ , eine feste Zahl  $M$  und ein  $p > 3$ , sodass

$$f(x, y, z) \leq M \cdot r^{-p} \quad \text{für alle} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 > R$$

so hat  $f$  eine integrierbare Majorante.

### 5-31 Beispiel : Betrachten Sie die Fläche $z = e^{-r^2}$ für $r^2 = x^2 + y^2 \geq 0$ .

1. Zeichnen Sie diese Fläche.
2. Berechnen Sie das Volumen zwischen dieser Fläche und der  $xy$ -Ebene.
3. Versuchen Sie die Oberfläche dieser Fläche zu bestimmen.
4. Kommentieren Sie die Ergebnisse.

$\diamond$

### 5-32 Beispiel : Untersuchen Sie das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

- (a) Zeigen Sie, dass für jeden festen Wert von  $y \in \mathbb{R}$  das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx$$

existiert.

- (b) Zeigen Sie, dass für jeden festen Wert von  $x \in \mathbb{R}$  das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dy$$

existiert.

- (c) Zeigen Sie, dass das Integral über die ganze Ebene  $\mathbb{R}^2$  nicht existiert.

$\diamond$

## 5.4 Uneigentliche Parameterintegrale

### 5.4.1 Grundproblem

Die Fragestellungen der beiden vorangehenden Abschnitte werden nun kombiniert, d.h. man untersucht uneigentliche Integrale die von einem Parameter abhängig sind, zum Beispiel

$$F(\lambda) = \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx \quad .$$

Integrale dieser Form treten in Anwendungen sehr häufig auf. **Laplace Transformationen** sind typische Beispiele.

**5–33 Beispiel :** Sei  $\lambda > 0$  und

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda x} \quad \text{und} \quad F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

Man kann leicht berechnen, dass

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und somit} \quad \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2}$$

Man verifiziert durch direkte Berechnung

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} -x e^{-\lambda x} dx = \frac{-1}{\lambda^2}$$

◇

### 5.4.2 Resultate

In den beiden folgenden Theoremen wird „nur“ Stetigkeit der Funktionen verlangt. Dies ist mathematisch nicht korrekt, man muss gleichmässige Stetigkeit verlangen. In den meisten Anwendungen ist dies glücklicherweise der Fall. Treffen Sie in der Praxis auf ein solches Problem, so können Sie einen kompetenten Mathematiker konsultieren.

Sei  $R$  ein Streifen in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.

$$R = \mathbb{R}_+ \times [c, d] = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, c \leq \lambda \leq d\}$$

und

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R} \quad .$$

Somit hat die oben definierte Funktion  $F$  einen Definitionsbereich  $[c, d]$  und einen Bildbereich  $\mathbb{R}$ .

**5–34 Theorem :** (Stetigkeit)

Sei  $f \in C^0(R, \mathbb{R})$  und es gebe eine von  $\lambda$  unabhängige Majorante  $g$  von  $f$ , d.h.

$$|f(x, \lambda)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} g(x) dx < \infty \quad .$$

Dann gilt  $F \in C^0([c, d], \mathbb{R})$ .

**5–35 Theorem :** (Differenzierbarkeit) Aus  $f \in C^0(R, \mathbb{R})$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda} f \in C^0(R, \mathbb{R})$  und es gebe von  $\lambda$  unabhängige Majoranten  $g_i$  von  $f$  und  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ , d.h.

$$|f(x, \lambda)| \leq g_1(x) \quad , \quad \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) \right| \leq g_2(x) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty g_i(x) dx < \infty \quad .$$

Dann gilt  $F \in C^1([c, d], \mathbb{R})$  und

$$\frac{dF}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx$$

Diese beiden Theoreme formulieren die erwarteten Resultate. Die Reihenfolge von Ableitung bezüglich des Parameters und der Integration können vertauscht werden. Die Voraussetzungen verlangen, dass die Funktion und gegebenenfalls auch die partielle Ableitung bezüglich des Parameters stetig sein sollten und es ist eine integrierbare Majorante zu finden. In Anwendungen besteht das Problem meist darin eine Majorante zu finden.

### 5.4.3 Beispiele

**5–36 Beispiel :** (Gamma Funktion)

Sei

$$f(x, \lambda) = x^{\lambda-1} e^{-x} \quad \text{und} \quad \Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$

Diese Funktion  $f$  ist stetig und differenzierbar bezüglich beider Variablen auf jedem festen Rechteck  $R$ . Da die Exponentialfunktion  $e^{-x}$  schneller gegen Null geht als jedes feste Polynom, ist es einfach eine integrierbare Majorante anzugeben. Mittels partieller Integration erhält man für  $\lambda > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda) &= \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx \\ &= -x^{\lambda-1} e^{-x} \Big|_{x=0}^\infty + (\lambda-1) \int_0^\infty x^{\lambda-2} e^{-x} dx \\ &= (\lambda-1) \Gamma(\lambda-1) \end{aligned}$$

und

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = 1$$

Aus diesen beiden Integralen kann man ablesen, dass

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

Versucht man die Ableitung von  $\Gamma(\lambda)$  bezüglich  $\lambda$  zu bestimmen so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Gamma(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(\lambda-1) \ln x} e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \ln x x^{\lambda-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich nur schwer vereinfachen, aber für ein gegebenes  $\lambda$  lässt sich der Wert numerisch berechnen, da das Integral existiert.  $\diamond$

Das folgende Beispiel zeigt, dass es wichtig sein kann die Voraussetzungen zu überprüfen.

**5–37 Beispiel :** Sei

$$f(x, \lambda) = \frac{\sin(\lambda x^2)}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x, \lambda) dx$$

Diese Funktion  $f$  ist stetig und bezüglich beider Variablen, beliebig oft differenzierbar, integrierbar bezüglich  $x$  und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{1 + x^2} \cos(\lambda x^2) = \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) \cos(\lambda x^2)$$

Somit ist die Funktion  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$  nicht integrierbar und es ist völlig sinnlos das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx$$

berechnen zu wollen um  $F'$  zu bestimmen. ◇

Das folgende Beispiel wird bei den Laplacetransformationen wichtig werden.

**5–38 Beispiel :** Sei  $f(x)$  eine „beliebige“ Funktion, sodass das unbestimmte Integral

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f'(x) dx$$

existiert und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} f(x) = 0.$$

Mittels partieller Integration erhält man daraus

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f'(x) dx \\ &= e^{-\lambda x} f(x) \Big|_{x=0}^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx \\ &= -f(0) + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx \end{aligned}$$

„Später“ werden wir den Ausdruck  $F(\lambda)$  mit  $\mathcal{L}[f'](\lambda)$  bezeichnen und die **Laplace Transformation** von  $f'$  an der Stelle  $\lambda$  nennen. Die obige Gleichung besagt dann

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0)$$
◇

**5–39 Satz :** Sei  $f(x)$  eine beschränkte Funktion und

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx$$

Zu zeigen ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda F(\lambda)) = f(0)$$

**Beweis :** Sei  $M = \max_{x \geq 0} |f(x)|$  und  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$f(0) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(0) dx$$

Da die Funktion  $f$  stetig ist gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x| \leq \delta$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} |\lambda F(\lambda) - f(0)| &= \lambda \left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} |f(x) - f(0)| dx \\ &= \lambda \int_0^{\delta} e^{-\lambda x} |f(x) - f(0)| dx + \lambda \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda x} 2M dx \\ &\leq \lambda \varepsilon \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\delta} + \lambda 2M \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{\delta}^{\infty} \\ &= \varepsilon - \varepsilon e^{-\lambda \delta} + 2M e^{-\lambda \delta} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \varepsilon \end{aligned}$$

Falls wir  $\lambda$  gross genug wählen gilt also

$$|\lambda F(\lambda) - f(0)| < 2\varepsilon$$

Dies war zu beweisen. □

„Später“ werden wir dieses Resultat als

$$s \mathcal{L}[f](s) = s F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(0)$$

schreiben. Mit ähnlichen Rechnungen kann man auch zeigen, dass

$$s \mathcal{L}[f](s) = s F(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

falls der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existiert.

## 5.5 Aufgaben

### 5.5.1 Uneigentliche Integrale

#### • Aufgabe 5–1:

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

nicht existiert.

#### • Aufgabe 5–2:

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

falls  $p > 1$ .



**• Aufgabe 5-3:**

Untersuchen Sie den Rotationskörper, der durch Rotation der Kurve  $y = 1/x$  für  $x \geq 1$  um die  $x$ -Achse entsteht.

(a) Berechnen Sie das umschlossene Volumen  $V$ .

(b) Berechnen Sie die „Mantelfläche“  $A$ .

**• Aufgabe 5-4:**

Die Kurve  $y = \sqrt{x}$  für  $0 \leq x \leq 2$  wird um die  $x$ -Achse rotiert.

(a) Berechnen Sie das umschlossene Volumen  $V$ .

(b) Berechnen Sie die „Mantelfläche“  $A$ .

**• Aufgabe 5-5:**

Die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $y(x) = e^{-2x}$  für  $0 \leq x < \infty$  wird mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $y$ -Achse rotiert. Das entstehende Volumen habe eine Massendichte von  $\rho$ . Bestimmen Sie die Rotationsenergie.

**• Aufgabe 5-6:**

Die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $y(x) = e^{-2x}$  für  $0 \leq x < \infty$  wird mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $x$ -Achse rotiert. Das entstehende Volumen habe eine Massendichte von  $\rho$ . Bestimmen Sie die Rotationsenergie.

Tip: Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe

**• Aufgabe 5-7:**

Was ist falsch an der Rechnung

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2} dx = \left. \frac{-1}{x} \right|_{-3}^3 = \frac{-2}{3}$$

**• Aufgabe 5-8:**

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^x} dx$$

existiert.

**• Aufgabe 5-9:**

Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Majorante, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

existiert.

**• Aufgabe 5-10:**

Man bestätige die folgenden Identitäten

(a)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{falls } \alpha > 0$$

Tip: Integraltafel oder komplexe Exponentialfunktion verwenden.

(b)

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^x} \Gamma(x) \quad \text{falls } \alpha > 0$$

(c)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx = \frac{\pi}{2ab(a+b)} \quad \text{falls } a \neq b$$

(d)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Tip:  $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$ , partiell integrieren.

Quelle: [MeybVach90, p. 189]

### • Aufgabe 5–11:

Verifizieren Sie mit Hilfe der Substitution  $2t = x^2$  und  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  die Identität

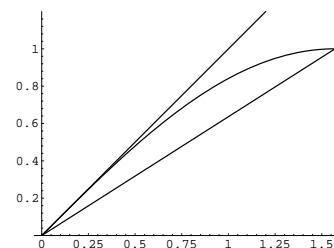
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

### • Aufgabe 5–12:

Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Majorante, dass das uneigentliche Integral existiert. Finden Sie eine obere und untere Grenze des numerischen Wertes mit Hilfe von Majoranten und Minoranten. Die untenstehenden Graphen der Sinusfunktion und zweier Geraden kann nützlich sein.

Montrer que l'intégrale impropre ci-dessous existe, utiliser une majorante. Trouver une borne inférieure et une borne supérieure à l'aide des majorantes et minorantes. Utiliser la courbe sin et les deux droites ci-dessous.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$$



## 5.5.2 Parameterintegrale

### • Aufgabe 5–13:

Sei  $f(t)$  eine beschränkte, stetige Funktion und

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Zu zeigen ist für  $s > 0$

$$\frac{\partial}{\partial s} F(s) = - \int_0^{\infty} t e^{-st} f(t) dt$$

und

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} F(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-st} f(t) dt$$

Mit der Notation der Laplacetransformationen wir hieraus später

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[t f(t)](s) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

• **Aufgabe 5–14:**

Die Funktion

La fonction

$$f(t, \vec{x}) = g(t) \exp \frac{-\|\vec{x}\|^2}{4k^2 t}$$

heißt auch Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Hierbei ist die Funktion  $g(t)$  (noch) nicht bekannt. Für jede Zeit  $t > 0$  ist die Wärmeenergie gegeben durch das Dreifachintegral

est dit solution fondamentale de l'équation de chaleur. La fonction  $g(t)$  n'est (pas encore) connue. Pour chaque temps  $t > 0$  l'énergie thermique est donnée par le triple intégral

$$E(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(t, \vec{x}) dV$$

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) Zeigen Sie, dass (für einen festen Wert von <math>t &gt; 0</math>) dieses uneigentliche Dreifachintegral existiert.</p> <p>(b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals durch Integration in einem geeigneten Koordinatensystem. Das schlussendlich zu bestimmende eindimensionale uneigentliche Integral ist in guten Formelsammlungen tabelliert.</p> <p>(c) Die Funktion <math>E(t)</math> muss konstant sein (Energieerhaltung). Es gilt <math>E(t) = 1</math>. Finden Sie damit die Formel für Funktion <math>g(t)</math>.</p> | <p>(a) Montrer que ce triple intégral impropre existe (pour une valeur fixe de <math>t</math>).</p> <p>(b) Trouver la valeur de ce triple intégral en utilisant des coordonnées adaptées au problème. Vous trouvez l'intégral impropre (en une dimension) à calculer finalement dans les tables.</p> <p>(c) La fonction <math>E(t)</math> doit être constante (conservation de l'énergie) On sait que <math>E(t) = 1</math>. Trouver donc une formule pour la fonction <math>g(t)</math></p> |
|--|--|

## 5.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- eigentliche und uneigentliche Integrale zuverlässig unterscheiden können.
- uneigentliche Integrale berechnen können.
- mit Hilfe des Majorantenkriteriums entscheiden können, ob uneigentliche Integrale existieren oder nicht.
- entscheiden können ob eigentliche Integrale stetig oder differenzierbar von einem Parameter abhängen.
- entscheiden können ob uneigentliche Integrale stetig oder differenzierbar von einem Parameter abhängen.
- Ableitungen von Parameterintegralen berechnen können.

# Kapitel 6

## Potenzreihen

### 6.1 Repetition: Reihen von Zahlen

Sei  $a_k$  eine Folge von Zahlen. Dann heisst die neue Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

die **Folge der Partialsummen**. Die Reihe der  $a_n$  konvergiert gegen die Zahl  $L$ , falls

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Man verwendet auch die abkürzende Notation

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad .$$

Die Reihe ist **absolut konvergent**, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \quad .$$

Damit die Reihen der  $a_n$  konvergiert, muss die Bedingung  $a_n \rightarrow 0$  erfüllt sein (notwendige Bedingung), aber es gibt durchaus Reihen mit  $a_n \rightarrow 0$ , die nicht konvergieren (keine hinreichende Bedingung).

Wir haben früher einige Konvergenzkriterien gefunden, die hier noch einmal aufgeführt werden.

#### **Repetition: Konvergenzkriterien für Reihen von Zahlen**

Sei  $a_k$  eine Folge von Zahlen. Dann gibt es die folgenden Kriterien, um zu entscheiden, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergiert.

(a) **Leibniz:** Ist  $(-1)^k a_k > 0$  eine fallende Folge von positiven Zahlen mit  $a_k \rightarrow 0$ , dann konvergiert die Reihe.

(b) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_k| \leq b_k$  und ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

konvergent, so konvergiert auch die aus der Folge  $a_k$  gebildete Reihe.

(c) **Regel von D'Alembert:** Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$$

so ist die Reihe der  $a_k$

1. konvergent, falls  $q < 1$ .
2. divergent, falls  $q > 1$ .
3. konvergent oder divergent, falls  $q = 1$ .

(d) **Wurzelkriterium:** Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

so ist die Reihe der  $a_k$

1. konvergent, falls  $r < 1$ .
2. divergent, falls  $r > 1$ .
3. konvergent oder divergent, falls  $r = 1$ .

Potenzreihen sind in vielen Aspekten mit Reihen von Zahlen vergleichbar. Statt Zahlen sind die einzelnen Terme aber Monome (Terme der Form  $x^n$ ).

## 6.2 Potenzreihen

Sei  $a_k$  eine gegebene Folge von Zahlen. Dann ist

$$a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad a_3 x^3, \quad a_4 x^4, \quad \dots, \quad a_n x^n, \quad \dots$$

eine **Folge von Funktionen** mit der unabhängigen Variablen  $x$ . Die Funktion

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x^k$$

ist die  $n$ -te **Partialsumme** dieser Reihe von Funktionen.

**6-1 Beispiel :** Sei  $a_k = 1/k$ , dann ist

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k x^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

Für einen festen Wert von  $x$  können wir nun versuchen, die Konvergenz der Reihe zu untersuchen. Um das Kriterium von d'Alembert anwenden zu können, müssen wir den Grenzwert

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot |x|}{n+1} = |x|$$

verwenden. Somit wissen wir, dass die Folge der  $s_n(x)$  für  $-1 < x < 1$  konvergiert und für  $|x| > 1$  divergiert. Wir können also nicht global (d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}$ ) entscheiden, ob die Folge  $s_n(x)$  konvergiert oder nicht. Es gibt einen Bereich von  $x$ , auf dem die Folge konvergiert, und einen Bereich, auf dem sie divergiert.  $\diamond$

**6–2 Beispiel :** Für die Funktion  $f(x) = e^x$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ableitungsformel  $f^{(n)}(x) = e^x$  und somit  $f^{(n)}(0) = 1$ . Somit ist die Taylor-Approximation  $n$ -ter Ordnung gegeben durch

$$f(x) \approx s_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

Sie sehen leicht, dass die Taylor-Approximation die Form einer Potenzreihe hat

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

mit  $a_k = 1/k!$ . Um die Konvergenz dieser Reihe mit dem Kriterium von d'Alembert zu untersuchen, muss der Grenzwert

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

verwendet werden. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  erhalten wir  $q = 0$ , und somit konvergiert  $s_n(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Die offensichtliche Vermutung ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = e^x$$

Um dies zu bestätigen, müssen wir das Restglied der Taylorapproximation verwenden. Sei also  $x \in \mathbb{R}$  fest, dann gilt

$$e^x = f(x) = s_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_n} x^{n+1}$$

für geeignete  $-|x| \leq \xi_n \leq |x|$ . Somit ist  $e^{\xi_n} \leq e^{|x|}$ , und es gilt die Abschätzung

$$|e^x - s_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi_n} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für den Approximationsfehler. Somit konvergiert für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  die Partialsumme  $s_n(x)$  gegen den Wert der Funktion  $e^x$ . Man schreibt somit zurecht

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

◇

Die Aufgabe 6–1 ist vergleichbar mit dem obigen Beispiel.

Nun geht es darum, die an den obigen Beispielen festgestellten Eigenschaften allgemein zu verifizieren und als Theoreme zu formulieren. Es stellt sich heraus, dass man besser direkt mit **komplexen Zahlen** arbeitet. Sei also  $a_n \in \mathbb{C}$  eine Folge von komplexen Zahlen, und wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$$

wobei die Notation  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  verwendet wird. Beim Versuch, das Kriterium von D'Alembert anzuwenden, stoßen wir in natürlicher Weise auf den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Existiert also der Grenzwert

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

und ist  $|z| < \rho$ , so gilt  $|z| \frac{1}{\rho} < 1$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z| \frac{1}{\rho} < 1$$

und die Folge  $P_n(z)$  von Partialsummen konvergiert, falls nur  $|z| < \rho$ . Zeichnen wir alle  $z \in \mathbb{C}$ , für welche die Reihe konvergiert in der komplexen Ebene ein, so ergibt sich ein Kreis mit Radius  $\rho$  um den Ursprung. Deshalb spricht man auch von **Konvergenzkreis** mit **Konvergenzradius**  $\rho$ .

Versucht man, statt des Kriteriums von D'Alembert das Wurzelkriterium einzusetzen, so muss der Grenzwert

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$$

untersucht werden. Existiert der Grenzwert

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

so folgt mit der selben Argumentation wie oben, dass die Reihe für  $|z| < \rho$  konvergiert. Diese Überlegungen kann man in einem Theorem zusammenfassen.

### 6-3 Theorem : Konvergenzatz

Eine Folge  $a_k \in \mathbb{C}$  von komplexen Zahlen sei gegeben, und wir untersuchen die komplexe Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

auf Konvergenz. Dann gibt es eine Zahl  $\rho$ , den **Konvergenzradius**, mit  $0 \leq \rho \leq \infty$  und

1. die Reihe  $P(z)$  konvergiert absolut, falls  $|z| < \rho$ .
2. die Reihe  $P(z)$  divergiert, falls  $|z| > \rho$ .
3. die Reihe  $P(z)$  kann konvergieren oder divergieren, falls  $|z| = \rho$ .

Falls die Grenzwerte existieren, kann  $\rho$  bestimmt werden durch

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

oder

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Reelle Potenzreihen sind als Spezialfall in diesen Resultat enthalten.

### 6-4 Beispiel : Für die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

gilt  $a_n = (-1)^n$  und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |-1| = 1 = \rho$$

Somit konvergiert die Reihe für alle  $z$  strikt innerhalb des Einheitskreises und divergiert ausserhalb.  $\diamond$

**6–5 Beispiel :** Für die Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

gilt  $a_n = 1/n$  und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1 = \rho$$

Somit konvergiert die Reihe für alle  $z$  strikt innerhalb des Einheitskreises und divergiert ausserhalb. Die Reihe  $P(1)$  divergiert, weil die Reihe von Zahlen

$$P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

divergiert. Die Reihe  $P(-1)$  konvergiert, weil die Reihe von Zahlen

$$P(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

aufgrund des Kriteriums von Leibniz konvergiert. ◇

**6–6 Beispiel :** Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

hat einen Konvergenzradius von 1. Der Konvergenzradius der neuen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + 32x^{10} + \dots$$

lässt sich **nicht** mit den gegebenen Formeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

bestimmen, da die Limites nicht existieren. Setzt man aber  $z = 2x^2$ , so sieht man, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

für  $|z| < 1$  konvergiert. Somit konvergiert die ursprüngliche Reihe für

$$|z| = |2x^2| < 1 \quad \text{oder} \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und man sieht auch leicht ein, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + 32x^{10} + \dots = \frac{1}{1-2x^2}$$

◇



### 6.3 Rechnen mit Reihen

Für Summen gelten offensichtlich die Rechenregeln

(a)

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

(b)

$$\sum_{k=m}^n (ca_k) = c \sum_{k=m}^n a_k$$

aber die „einfache“ Multiplikationsregel gilt nicht, d.h.

$$\sum_{k=m}^n a_k \cdot \sum_{k=m}^n b_k \neq \sum_{k=m}^n (a_k b_k)$$

Nun werden wir versuchen, diese Regeln so weit wie möglich auf Reihen (Summen mit unendlich vielen Termen) zu übertragen. Die meisten Resultate sind leicht übertragbar, einzig das Multiplizieren von zwei Reihen ist etwas schwieriger. Deshalb betrachten wir zuerst ein Beispiel.

**6–7 Beispiel :** Die folgende Rechnung sollte leicht nachzuvollziehen sein.

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + \dots) \\ = & \quad x^0 (a_0b_0) \\ & + \quad x^1 (a_1b_0 + a_0b_1) \\ & + \quad x^2 (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) \\ & + \quad x^3 (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) \\ & + \quad x^4 (a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_0b_4) \\ & + \quad x^5 (a_5b_0 + a_4b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5) \\ & + \quad \text{Terme der Ordnung } x^6 \text{ und höher} \end{aligned}$$

◇

**6–8 Satz :** Seien zwei Potenzreihen gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit Konvergenzradius } \rho_1$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{mit Konvergenzradius } \rho_2$$

Dann gilt

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

mit einem Konvergenzradius  $\rho$ , der grösser sein kann als das Minimum von  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Meistens gilt aber  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ .

(b)

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

Der Konvergenzradius  $\rho$  der Reihe kann grösser sein als das Minimum von  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Meistens gilt aber  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ .

**6–9 Beispiel :** In Beispiel auf Seite 225 haben wir gesehen, dass

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

mit einem Konvergenzradius von  $\rho = \infty$ . Somit gilt

$$e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n \quad \text{und} \quad e^{bz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} z^n$$

Nun multiplizieren wir diese beiden Potenzreihen und erhalten

$$e^{az} \cdot e^{bz} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

wobei

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \frac{b^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} a^{n-k} b^k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \frac{1}{n!} (a+b)^n \end{aligned}$$

Somit gilt

$$e^{az} \cdot e^{bz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} z^n = e^{(a+b)z}$$



Im Kapitel über Polynome haben wir den **Identitätssatz für Polynome** kennengelernt. Er zeigt, dass falls zwei Polynome

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  übereinstimmen, dass dann die beiden Polynome identisch sind, d.h.  $n = m$  und  $a_k = b_k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Es genügt sogar, dass die beiden Polynome für  $\max\{n, m\} + 1$  Werte übereinstimmen. Ein vergleichbares Resultat ist richtig für Potenzreihen.

**6–10 Theorem :** (Identitätssatz für Potenzreihen)

Seien zwei Funktionen gegeben durch Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit Konvergenzradius} \quad \rho_1 > 0$$

und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{mit Konvergenzradius} \quad \rho_2 > 0$$

mit  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ . Stimmen diese beiden Funktionen für alle  $|z| < \rho$  überein, d.h.

$$f(z) = g(z) \quad \text{für alle} \quad |z| < \rho$$

so gilt  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dieses Resultat bildet die Grundlage für den **Koeffizientenvergleich** bei Potenzreihen. Man kann zeigen, dass die Voraussetzungen abgeschwächt werden können: es genügt eine Folge  $z_k$  von komplexen Zahlen mit  $|z_k| \rightarrow 0$  und  $f(z_k) = g(z_k)$  zu finden.

**Beweis :** Wir haben zu zeigen, dass  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und geben hier einen Beweis durch vollständige Induktion.

- Induktionsverankerung  $n = 0$ . Setzen wir  $z = 0$ , so ergibt sich sofort

$$a_0 = f(0) = g(0) = b_0$$

- Induktionsschritt. Wir nehmen an, dass  $a_k = b_k$  für alle  $k < n$ , und müssen nun zeigen, dass  $a_n = b_n$ . Dazu betrachten wir

$$0 = h(z) = f(z) - g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) z^k = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - b_k) z^k$$

Somit gilt für  $z \neq 0$

$$0 = \frac{h(z)}{z^n} = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - b_k) z^{k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} (a_{n+l} - b_{n+l}) z^l$$

Da Potenzreihen bei  $z = 0$  stetig sind, können wir den Grenzwert  $z \rightarrow 0$  bilden und erhalten

$$0 = a_n - b_n$$

□

**6–11 Theorem :** (Ableiten und Integrieren von Potenzreihen)

Sei eine Funktion gegeben durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann gilt

(a)  $f(z)$  ist für  $|z| < \rho$  stetig.

(b)  $f(z)$  ist für  $|z| < \rho$  differenzierbar und

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

mit Konvergenzradius  $\rho$ .

(c)  $f(z)$  ist für  $|z| < \rho$  integrierbar und

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion mit Konvergenzradius  $\rho$ .

Aus Zeitgründen verzichten wir hier auf einen Beweis dieses Resultates und gehen auch nicht auf Unterschiede zwischen reell und komplex differenzierbaren Funktionen ein. Dies würde in das Gebiet der Funktionentheorie oder der komplexen Analysis führen. Einzig der Beweis, dass eine Potenzreihe stetig ist bei  $z = 0$  ist unten gezeigt. Zur Illustration werden eine einfache Konsequenz des obigen Theorems aufgeführt.

**6–12 Lemma :** Sei eine Funktion  $f(z)$  gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist die Funktion stetig bei  $z_0 = 0$ , d.h.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = a_0$$

**Beweis :** Wir geben einen Beweis unter der vereinfachenden Annahme, dass der Grenzwert

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

existiert. Dann gilt für genügend grosse  $n$  sicher die Ungleichung

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \frac{\rho}{2} \quad \text{und somit} \quad |a_{n+1}| < \frac{2}{\rho} |a_n|$$

Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir, dass diese Ungleichung für alle  $n$  gilt, was natürlich nicht immer richtig ist. Die verwendete Grundidee des Beweises bleibt aber dieselbe. Somit gilt

$$\begin{aligned} |a_1| &< \frac{2}{\rho} |a_0| \\ |a_2| &< \frac{2}{\rho} |a_1| < \left(\frac{2}{\rho}\right)^2 |a_0| \\ |a_3| &< \frac{2}{\rho} |a_2| < \left(\frac{2}{\rho}\right)^3 |a_0| \\ |a_4| &< \frac{2}{\rho} |a_3| < \left(\frac{2}{\rho}\right)^4 |a_0| \\ |a_k| &< \left(\frac{2}{\rho}\right)^k |a_0| \end{aligned}$$

Wir verwenden die Notation

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

Somit gilt für alle  $|z| < \rho/4$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f_n(z) - a_0| &= \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| = |z| \left| \sum_{k=1}^n a_k z^{k-1} \right| \\ &\leq |z| \sum_{k=1}^n |a_k z^{k-1}| \leq |z| \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^{k-1} \\ &\leq |z| \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{\rho}\right)^k \left(\frac{\rho}{4}\right)^{k-1} = |z| \left(\frac{2}{\rho}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= |z| \left(\frac{2}{\rho}\right) 2 \rightarrow 0 \quad \text{falls } z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

**6–13 Satz :** Eine als Potenzreihe gegebene Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  ist für  $|z| < \rho$  unendlich oft differenzierbar.

**6–14 Beispiel :** Die komplexe Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

hat einen Konvergenzradius  $\rho = \infty$ , und wir erhalten sofort

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

Somit haben wir die wohlbekannte Formel

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x$$

verifiziert.

Ebenso zeigt man, dass  $e^z$  eine Stammfunktion von  $e^z$  ist.

◇

**6–15 Beispiel :** Die geometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

kann auch als Potenzreihe (mit Konvergenzradius 1) aufgefasst werden, und wir erhalten leicht

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

Selbstverständlich kann auch in der Form  $f(x) = 1/(1-x)$  abgeleitet werden, und das Resultat muss das selbe sein. Somit gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Aufgrund des obigen Theorems ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

eine Stammfunktion von  $f(x)$ . Durch direkte Integration wissen wir, dass für  $|x| < 1$  jede Stammfunktion von der Form

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$$

ist. Setzen wir  $x = 0$  ein, so erhalten wir

$$F(0) = 0 = -\ln(1-0) + C = C$$

und somit gilt für  $-1 < x < 1$

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Durch Ersetzen von  $x$  durch  $-x$  erhalten wir daraus

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

◇

## 6.4 Komplexe Exponentialfunktion

Die bei weitem wichtigste Potenzreihe stellt die Exponentialfunktion dar. Mit den Resultaten der vorangehenden Abschnitte verifiziert man leicht die folgenden Potenzreihendarstellungen

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\
 e^{-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\
 e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
 \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\
 \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots
 \end{aligned}$$

Hierbei ist  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  eine beliebige komplexe Zahl mit Realteil  $x$  und Imaginärteil  $y$ .

Vergleicht man die Reihen von  $e^{ix}$ ,  $\cos x$  und  $\sin x$ , so findet man die fundamentale

$$\text{Euler'sche Identität: } e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Daraus folgen sofort die Gleichungen

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktionen folgt auch

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$$

Dieses Resultat heisst auch **Formel von de Moivre**. Für  $n = 2$  erhalten wir

$$\cos(2x) + i \sin(2x) = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x$$

Betrachtet man den Real- und Imaginärteil dieser Identität, so ergeben sich die bekannten Doppelwinkel-formeln

$$\begin{aligned}
 \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \sin(2x) &= 2 \cos x \sin x
 \end{aligned}$$

Für  $n = 3$  erhalten wir

$$\cos(3x) + i \sin(3x) = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

Betrachtet man den Real- und Imaginärteil dieser Identität, so ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ \sin(3x) &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x\end{aligned}$$

Setzt man nun noch die Identität  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  geschickt ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \sin(3x) &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

Ein einfacher Vergleich der Reihen von  $e^x$  und  $e^{-x}$  führt auf

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Vergleicht man die Reihen von  $\cos x$  und  $\cosh x$  und verwendet  $i^{2n} = (-1)^n$ , so stellt man fest, dass

$$\cosh x = \cos(ix) \quad \text{oder} \quad \cos x = \cosh(ix)$$

Vergleicht man die Reihen von  $\sin x$  und  $\sinh x$  und verwendet  $i^{2n} = (-1)^n$ , so stellt man fest, dass

$$\sinh x = \frac{1}{i} \sin(ix) = -i \sin(ix) \quad \text{oder} \quad \sin x = -i \sinh(ix)$$

Die obigen Formeln zeigen, dass die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen sehr eng durch die komplexe Exponentialfunktion verknüpft sind. Als einfaches Anwendungsbeispiel wollen wir die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen herleiten.

Einerseits gilt für reelle Zahlen  $x$  und  $y$

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

andererseits aufgrund der Rechenregel für die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}e^{i(x+y)} &= e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)) + i (\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y))\end{aligned}$$

Da die Real- und Imaginärteile dieser Ausdrücke übereinstimmen müssen, gilt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

## 6.5 Potenzreihen und Taylorpolynome

Für eine  $(n+1)$ -fach differenzierbare Funktion  $f(x)$  gilt die Taylorapproximation

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für ein  $\xi$  zwischen 0 und  $x$ . Ist die Funktion unendlich oft differenzierbar, so bilden die Taylorpolynome  $P_n$  der Ordnung  $n$  in natürlicher Art und Weise die Partialsummen der Potenzreihe

$$P_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

In den vorangehenden Abschnitten haben wir gesehen, dass für einige Funktionen ( $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ )



1. die Reihe  $P_\infty(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert.
2. die Reihe  $P_\infty(x)$  gegen die ursprüngliche Funktion  $f(x)$  konvergiert.

Solche Funktionen spielen eine spezielle Rolle.

**6–16 Definition :** Sei  $K \subset \mathbb{C}$  ein Kreis in der komplexen Ebene. Eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  heisst **analytisch** auf  $K$ , falls

1.  $f$  unendlich oft differenzierbar ist
2. die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

für alle  $z \in K$  konvergiert.

3. die Reihe gegen die ursprüngliche Funktion  $f(z)$  konvergiert, d.h. wir zurecht schreiben dürfen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Das Studium von analytischen Funktionen sprengt den Rahmen unseres Mathematikunterrichtes, und wir werden nur das folgende, einfache Resultat verwenden.

**6–17 Satz :** Polynome,  $e^z$ ,  $\cos z$  und  $\sin z$  sind (überall) analytische Funktionen. Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von analytischen Funktionen sind wiederum analytisch, solange nicht durch 0 dividiert wird.

## 6.6 Eine Anwendung

Wir versuchen in diesem Abschnitt, die Länge einer Ellipse zu bestimmen. Eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  kann durch

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

parametrisiert werden. Wir betrachten nur den Fall  $0 < a \leq b$ . Der andere Fall  $a > b$  wäre ähnlich zu behandeln, oder das Resultat kann aus den untenstehenden Überlegungen durch Vertauschen von  $a$  und  $b$  abgeleitet werden.

Die Länge  $L$  ist gegeben durch das Integral

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

wobei

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

Der Wert von  $0 \leq k \leq 1$  gibt an, wie weit die Ellipse von einem Kreis abweicht: der Wert  $k = 0$  entspricht einem Kreis, und je grösser  $k$ , desto exzentrischer die Ellipse.

Nun gilt es, dieses Integral zu bestimmen. Wir haben verschiedene Möglichkeiten:

1. Eine explizite Stammfunktion für dieses Integral finden. Leider ist dies nicht möglich.
2. Numerische Integration. Sind die Werte von  $a$  und  $b$  und somit auch von  $k$  gegeben, so ist dies leicht möglich. Wir werden aber keinesfalls eine allgemein gültige Formel für das Integral erhalten.
3. Mittels einer Reihenentwicklung. Diesen Rechenweg werden wir nun einschlagen und mit recht ausführlichen Überlegungen auch zu Ende führen.

Wir werden zuerst die Reihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \sqrt{1-z} = (1-z)^{1/2}$$

betrachten. Hierzu benötigen wir die Tabelle

$n$	$f^{(n)}(z)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1-z)^{1/2}$	1
1	$-\frac{1}{2} (1-z)^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{-1}{2 \cdot 2} (1-z)^{-3/2}$	$-\frac{1}{2 \cdot 2}$
3	$\frac{-3}{2^3} (1-z)^{-5/2}$	$-\frac{3}{2^3}$
4	$\frac{-3 \cdot 5}{2^4} (1-z)^{-7/2}$	$-\frac{3 \cdot 5}{2^4}$
5	$\frac{-3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5} (1-z)^{-9/2}$	$-\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5}$
$n$	$\frac{-(2n-2)!}{2^n \cdot (n-1)! 2^{n-1}} (1-z)^{-(2n-1)/2}$	$\frac{-(2n-2)!}{2^n \cdot (n-1)! 2^{n-1}}$

Somit ist die Taylorreihe gegeben durch

$$\sqrt{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot (n-1)! n!} z^n$$

Da bei  $z > 1$  in  $\sqrt{1-z}$  die Wurzel einer negativen Zahl berechnet werden müsste, erwartet man Probleme bei der Konvergenz dieser Reihe für  $|z| > 1$ . Man kann nachrechnen, dass für  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot (n-1)! n!}}{\frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! (n+1)!}} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot (n-1)! n!} \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot n! (n+1)!}{(2n)!} = \frac{2^2 n (n+1)}{2n (2n-1)} \rightarrow 1$$

Somit ist der Konvergenzradius tatsächlich 1.

Zur besseren Illustration schreiben wir die ersten paar Terme explizit aus und erhalten

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{16} z^3 - \frac{5}{128} z^4 - \dots$$

Nun setzen wir im obigen Integral für die Länge  $L$  der Ellipse  $z = k^2 \sin^2 t$  und erhalten

$$\begin{aligned} L &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (k^2 \sin^2 t)^n \, dt \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} 1 - \frac{1}{2} (k^2 \sin^2 t) - \frac{1}{8} (k^2 \sin^2 t)^2 - \frac{1}{16} (k^2 \sin^2 t)^3 - \frac{5}{128} (k^2 \sin^2 t)^4 - \dots \, dt \end{aligned}$$

Nun sollte diese Reihe termweise integriert werden. Leicht sieht man, dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

Mittels partieller Integration erkennt man

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n-1} x \, dx &= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

und somit gilt

$$n \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

Mit Hilfe dieser Identität kann man leicht ablesen, dass

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{3}{4} \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{5}{6} \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{32}$$

Setzen wir diese Integrale in der Formel für die Länge  $L$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= 4b \int_0^{\pi/2} 1 - \frac{1}{2} (k^2 \sin^2 t) - \frac{1}{8} (k^2 \sin^2 t)^2 - \frac{1}{16} (k^2 \sin^2 t)^3 - \frac{5}{128} (k^2 \sin^2 t)^4 - \dots \, dt \\ &= 4b \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{k^2 \pi}{4} - \frac{1}{8} \frac{k^4 3\pi}{16} - \frac{1}{16} \frac{k^6 5\pi}{32} - \dots \right) \\ &= 2\pi b - \frac{\pi}{2} b k^2 - \frac{3\pi}{32} b k^4 - \frac{5\pi}{128} b k^6 - \dots \end{aligned}$$

Der erste Term entspricht dem Umfang eines Kreises (Radius  $b$ ,  $k = 0$ ), die weiteren Terme sind Korrekturterme für die Ellipse. Je kleiner der Wert von  $k$ , desto besser die Approximation.

## 6.7 Aufgaben

### • Aufgabe 6-1:

Diese Aufgabe untersucht das Verhalten der Taylorreihe für die  $\cos$ -Funktion.

- (a) Zeigen Sie, dass die Taylorapproximation der Ordnung  $2n$  der Funktion  $f(x) = \cos x$  beim Punkt  $x_0 = 0$  gegeben ist durch

$$\cos x \approx s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

- (b) Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert.  
 (c) Zeigen Sie mittels der Restgliedformel für die Taylorapproximation, dass

$$s_n(x) \rightarrow \cos x \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

• **Aufgabe 6–2:**

Finden Sie die Taylorapproximation  $n$ -ter Ordnung für die Funktion  $f(x) = \sin x$  und leiten Sie daraus die Taylorreihenentwicklung der Funktion ab. Zeigen Sie anschliessend, dass diese Reihe tatsächlich für beliebige  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $\sin x$  konvergiert.

• **Aufgabe 6–3:**

Finden Sie die Potenzreihendarstellung des unbestimmten Integrales

$$\int \ln(1+x) dx$$

• **Aufgabe 6–4:**

Untersuchen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

bei  $x_0 = 0$ .

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Form der Reihe. (Tip: untersuchen Sie zuerst  $1/(1+x)$ .)  
 (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.  
 (c) Verwenden Sie (nur) die erste Ableitung von  $\arctan x$ , um die Reihe für  $y(x) = \arctan x$  zu finden.

Die notwendigen Rechnungen müssen ausgeführt werden. Abschreiben aus der Formelsammlung genügt nicht.

• **Aufgabe 6–5:**

Die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  ist offensichtlich eine Variation der Exponentialfunktion.

- (a) Verifizieren Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 - \dots$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

- (b) Das Integral

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

lässt sich nicht direkt bestimmen. Finden Sie eine Potenzreihendarstellung für  $F(x)$ .

• **Aufgabe 6–6:**

Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion  $\sin x$  (für  $x$  nahe bei 0), um die untenstehende Funktion  $f(x)$  durch eine Potenzreihe darzustellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls/si } x \neq 0 \\ 1 & \text{für/pour } x = 0 \end{cases}$$

Utiliser la série entière de la fonction  $\sin(x)$  (pour  $x$  proche à 0) pour trouver la série entière de la fonction  $f(x)$  ci-dessous.

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) Finden Sie die Potenzreihe von <math>f(x)</math>, bestimmen Sie den Konvergenzradius. Verifizieren Sie, dass die Funktion unendlich oft ableitbar ist.</p> <p>(b) Finden Sie die Reihenentwicklung von <math>f'(x)</math>.</p> <p>(c) Finden Sie die Reihenentwicklung von <math>F(x)</math>.</p> <p>(d) Bestimmen Sie das Integral <math>A</math> mit der obigen Reihenentwicklung, wobei der Fehler kleiner als <math>10^{-3}</math> sein muss.</p> <p>(e) Bestimmen Sie das Integral <math>B</math> mit der obigen Reihenentwicklung, wobei der Fehler kleiner als <math>10^{-3}</math> sein muss.</p> | <p>(a) Trouver la série entière de <math>f(x)</math> et déterminer le rayon de convergence. Vérifier que la fonction est infiniment dérivable.</p> <p>(b) Donner la série entière pour <math>f'(x)</math>.</p> <p>(c) Trouver la série entière de <math>F(x)</math>.</p> <p>(d) Trouver la valeur de l'intégral <math>A</math> à l'aide de la série entière ci-dessus. L'erreur doit être plus petite que <math>10^{-3}</math>.</p> <p>(e) Trouver la valeur de l'intégral <math>B</math> à l'aide de la série entière ci-dessus. L'erreur doit être plus petite que <math>10^{-3}</math>.</p> |
|--|--|

Wobei

Avec

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad A = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{und/et} \quad B = \int_0^{10} \frac{\sin t}{t} dt$$

• **Aufgabe 6–7:**

Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion  $\cos x$  (für  $x$  nahe bei 0), um die untenstehende Funktion  $f(x)$  durch eine Potenzreihe darzustellen.

Utiliser la série entière de la fonction  $\cos(x)$  (pour  $x$  proche à 0) pour trouver la série entière de la fonction  $f(x)$  ci-dessous.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{falls/si } x \neq 0 \\ 0 & \text{für/pour } x = 0 \end{cases}$$

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) Finden Sie die Potenzreihe von <math>f(x)</math>, bestimmen Sie den Konvergenzradius. Verifizieren Sie, dass die Funktion unendlich oft ableitbar ist.</p> <p>(b) Finden Sie die Reihenentwicklung von <math>f'(x)</math>.</p> <p>(c) Finden Sie die Reihenentwicklung von <math>F(x)</math>.</p> <p>(d) Bestimmen Sie das Integral <math>A</math> mit der obigen Reihenentwicklung, wobei der Fehler kleiner als <math>10^{-3}</math> sein muss.</p> | <p>(a) Trouver la série entière de <math>f(x)</math> et déterminer le rayon de convergence. Vérifier que la fonction est infiniment dérivable.</p> <p>(b) Donner la série entière pour <math>f'(x)</math>.</p> <p>(c) Trouver la série entière de <math>F(x)</math>.</p> <p>(d) Trouver la valeur de l'intégral <math>A</math> à l'aide de la série entière ci-dessus. L'erreur doit être plus petite que <math>10^{-3}</math>.</p> |
|--|---|

Wobei

Utiliser

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{und/et} \quad A = \int_0^1 f(t) dt$$

• **Aufgabe 6–8:**

Verwenden Sie die Formel von de Moivre, um  $\cos(4x)$  und  $\sin(4x)$  durch  $\cos x$  und  $\sin x$  auszudrücken. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der Formelsammlung.

• **Aufgabe 6–9:**

Leiten Sie die Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen  $\cosh x$  und  $\sinh x$  aus der Beziehung  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  ab.

• **Aufgabe 6–10:**

Leiten Sie die Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen  $\cosh x$  und  $\sinh x$  aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen ab.

• **Aufgabe 6–11:**

Finden Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Verwenden Sie anschliessend dieses Resultat, um eine Reihenentwicklung für die Funktion

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

zu finden.

(a) Schätzen Sie den Fehler der Approximation ab, falls die Reihe nach  $n$  Termen abgebrochen wird.

(b) Verifizieren Sie, dass das Argument der komplexen Zahl

$$(5-i)^4 (1+i)$$

exakt durch  $-\arctan 1/239$  gegeben ist. Somit gilt

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

Diese Identität kann verwendet werden, um mit einer Reihenentwicklung einige Ziffern der Dezimalbruchentwicklung der Zahl  $\pi$  zu bestimmen.

(c) Wie viele Terme müssen in der Reihenentwicklung von  $\arctan 1/5$  verwendet werden, damit der Fehler kleiner als  $10^{-100}$  ist?

(d) Wie viele Terme müssen in der Reihenentwicklung von  $\arctan 1/239$  verwendet werden, damit der Fehler kleiner als  $10^{-100}$  ist?

### 6.7.1 Lösungen zu einigen Aufgaben

#### Lösung zu Aufgabe 6–3 : Wegen

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

können wir diese Darstellung gliedweise integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \int x^k dx \\ &= C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\ &= C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots \end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, dass der Konvergenzradius dieser Reihe 1 ist, was mit dem erwarteten Resultat übereinstimmt.

#### Lösung zu Aufgabe 6–4 :

(a) Sei  $g(z) = 1/(1+z) = (1+z)^{-1}$ . Dann gilt

$$g^{[n]}(z) = (-1)^n n! (1+z)^{-1-n} \quad \text{und somit} \quad g^{[n]}(0) = (-1)^n n!$$

Somit ist die Taylorreihe von  $g(z)$  gegeben durch

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{[n]}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots$$

Mit Hilfe der Substitution  $z = x^2$  sieht man, dass

$$f(x) = g(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

(b) Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1.

(c) Es gilt  $\frac{d}{dx} \arctan x = 1/(1+x^2)$ , und somit entsteht die Potenzreihe von  $\arctan x$  durch gliedweises Integrieren der obigen Reihe

$$\arctan(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2n+1} = C + x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11} + \dots$$

Wegen  $\arctan 0 = 0$  muss die Konstante  $C = 0$  sein, und somit

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11} + \dots$$

#### Lösung zu Aufgabe 6–5 :

(a) Die Reihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Ersetzen Sie in dieser Reihe  $z$  durch  $-x^2$ , und Sie erhalten

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

(b) Gliedweise Integration der obigen Reihe ergibt

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \frac{x^{13}}{6!13} - \frac{x^{15}}{7!15} + \dots$$

### Lösung zu Aufgabe 6–7 :

(a) Für  $x \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ 1 - \cos(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 - \frac{1}{8!} x^8 + \dots \\ f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-1} = \frac{1}{2!} x - \frac{1}{4!} x^3 + \frac{1}{6!} x^5 - \frac{1}{8!} x^7 + \dots \end{aligned}$$

Für  $x = 0$  gibt die obige Rechnung auch  $f(0) = 0$ . Der Konvergenzradius der Funktion  $f(x)$  stimmt mit demjenigen von  $\cos(x)$  überein, d.h.  $\rho = \infty$ . Die Funktion ist als Potenzreihe unendlich oft ableitbar.

(b) Die Reihe kann termweise abgeleitet werden.

$$f'(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-2} = \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} x^2 + \frac{5}{6!} x^4 - \frac{7}{8!} x^6 + \dots$$

(c) Termweise integrieren

$$F(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1}{4 \cdot 4!} x^4 + \frac{1}{6 \cdot 6!} x^6 - \frac{1}{8 \cdot 8!} x^8 + \dots$$

(d) Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt

$$A = F(1) - F(0) = F(1) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k)!} = \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{4 \cdot 4!} + \frac{1}{6 \cdot 6!} - \frac{1}{8 \cdot 8!} + \dots$$

Diese Reihe erfüllt die Bedingungen des Kriteriums von Leibniz. Somit ist der Fehler kleiner als der erste, nicht mehr verwendete Term. Das führt auf die Bedingung

$$\frac{1}{2k(2k)!} \leq 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2k(2k)! \geq 1000$$

Diese Bedingung ist mit  $2k = 4$  nicht erfüllt, mit  $2k = 6$  aber erfüllt. Somit hat die Approximation

$$A \approx \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{4 \cdot 4!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{96} \approx 0.2396$$

einen Fehler, der kleiner ist als  $10^{-3}$ .



## 6.8 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Potenzreihen der Trigonometrischen- und Exponential-Funktionen anschreiben können.
- den Konvergenzradius von einfachen Potenzreihen bestimmen können.
- die Beziehungen von Taylorapproximation und Potenzreihen verstehen.

## Kapitel 7

# Differentialrechnung in mehreren Variablen

### 7.1 Einführung

Bei Funktionen sind bezüglich der Anzahl Variablen vier verschiedene Fälle zu unterscheiden

1. Eine unabhängige Variable und eine abhängige Variable.
2. Mehrere unabhängige Variablen und eine abhängige Variable.
3. Eine unabhängige Variable und mehrere abhängige Variablen.
4. Mehrere unabhängige Variablen und mehrere abhängige Variablen.

Bisher haben wir uns ausschliesslich mit dem ersten Fall beschäftigt. In diesem und folgenden Kapiteln werden wir den zweiten Fall genauer untersuchen und vor allem Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum einfacheren Fall einer unabhängigen Variablen aufzeigen.

Die zu untersuchenden Funktionen sind also auf eine Teilmenge  $D$  (dem **Definitionsbereich**) von  $\mathbb{R}^n$  definiert und nehmen Werte in  $\mathbb{R}$  an.

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \in D &\mapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

**7-1 Beispiel :** Wir können jedem Vektor  $\vec{x}$  in  $\mathbb{R}^n$  seine Länge zuordnen. Dies ergibt eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}^n$  und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n &\mapsto f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

◇

Um die Resultate auch graphisch illustrieren zu können, werden wir hauptsächlich mit dem Fall  $n = 2$  beschäftigen. Hier können wir den Wert der Funktion  $f(\vec{x})$  als Höhe über der  $\vec{x}$ -Ebene auffassen und passende Zeichnungen erstellen. Es muss aber festgehalten werden, dass sich alle Resultate auf höherdimensionale Situationen übertragen lassen. Wir werden die Notationen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

verwenden.

### 7.1.1 Graphen

**7-2 Beispiel :** Die Gleichung

$$f(\vec{x}) = f(x, y) = 1 - x + y/2$$

ist eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen und eine abhängigen Variablen. Der natürliche Definitionsbereich dieser Funktion ist  $\mathbb{R}^2$ . Tragen wir den Wert der Funktion  $f(x, y)$  als Höhe über der  $xy$ -Ebene auf, so erhalten wir die Ebene in Abbildung 7.1.

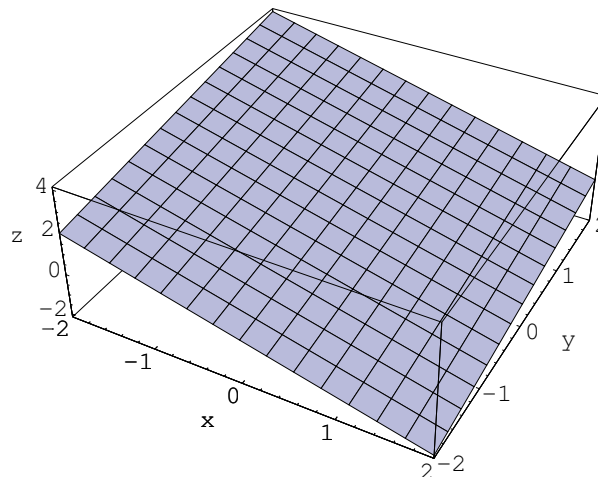


Abbildung 7.1: Graph der Funktion  $z = 1 - x + y/2$

◇

Eine Funktion von zwei Variablen kann entweder durch eine explizite Formel gegeben sein, oder auch implizit durch eine Gleichung. Hier sind zwei elementare Beispiele zur Illustration

- Explizite Form  $z = f(x, y) = 1 - 2x + y^2$ .
- Implizite Form  $z^3 - 2xz + y^2 = 0$ .

Es wird nicht immer möglich sein eine implizit gegebene Funktion in eine explizite Form umzuwandeln. Vor allem beim Bestimmen des Definitionsbereichs einer implizit gegebenen Funktion ist Vorsicht angebracht. Wir werden uns vor allem mit explizit gegebenen Funktionen beschäftigen.

Um den Graphen einer Funktion

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \in D &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

zu zeichnen kann man verschiedene Hilfsmittel einsetzen.

1. Eine **Niveaukurve**  $N_c$  für das Niveau  $c$  ist die Menge aller Punkte im Definitionsbereich, bei denen die Funktion  $f$  den Wert  $c$  annimmt.

$$N_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

Dies entspricht auch dem schneiden der Fläche  $z = f(x, y)$  mit einer zur  $xy$ -Ebene parallelen Ebene auf der Höhe  $c$  und einer anschließenden Projektion auf die  $xy$ -Ebene.

2. Eine **Isoline** ist eine Schnittkurve der Fläche  $z = f(x, y)$  mit einer Ebene parallel zur  $yz$ -Ebene (bzw.  $xz$ -Ebene). Diese Kurve erhält man auch, indem man nur eine der Variablen variiert und diese **partiellen Funktionen** betrachtet

$$x \mapsto f(x, y) \quad \text{wobei } y \text{ fest ist}$$

oder

$$y \mapsto f(x, y) \quad \text{wobei } x \text{ fest ist}$$

### 7-3 Beispiel : Die Niveaulinien der Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$x^2 + 2y^2 = c$$

Somit ist  $N_c$  die leere Menge für  $c < 0$  und eine Ellipse für  $c > 0$ . Die Isolinien

$$x \mapsto x^2 + 2y^2$$

entsprechen nach oben geöffneten Parabeln mit Scheitel bei  $(x, z) = (0, 2y^2)$  und  $x$  als Variablen. Die Isolinien

$$y \mapsto x^2 + 2y^2$$

entsprechen ebenfalls nach oben geöffneten Parabeln mit Scheitel bei  $(y, z) = (0, x^2)$  und  $y$  als Variablen. Diese Parabeln sind etwas steiler als die ersten. In Abbildung 7.2 sehen Sie alle oben erwähnten Kurven. In

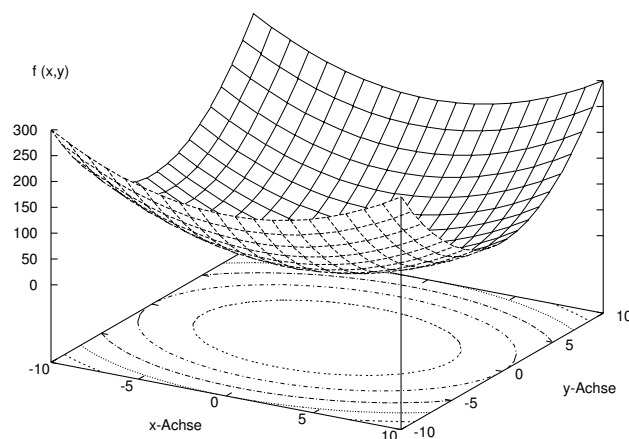


Abbildung 7.2: Graph der Funktion  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

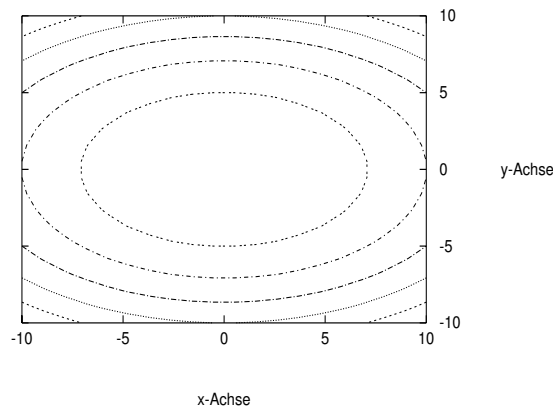
Abbildung 7.3 werden nur die Niveaulinien gezeigt. ◇

### 7-4 Beispiel : Die Niveaulinien der Funktion

$$z = f(x, y) = x y$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

$$x y = c$$

Abbildung 7.3: Niveaukurven der Funktion  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 

und können somit durch Graphen der Funktionen

$$y = \frac{c}{x}$$

dargestellt werden. Die Niveaukurve  $N_0$  ist gegeben durch die beiden Koordinatenachsen. Die Isolinien sind gegeben durch die Funktionen

$$\begin{aligned} x &\mapsto xy \\ y &\mapsto xy \end{aligned}$$

und in jeden Falle ergeben sich Geraden durch eine der beiden Koordinatenachsen. In Abbildung 7.4 sehen Sie alle oben erwähnten Kurven.  $\diamond$

**7-5 Beispiel :** Der natürliche Definitionsbereich der Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ist  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Die Niveaulinien sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = c \quad \text{oder} \quad xy = c(x^2 + y^2)$$

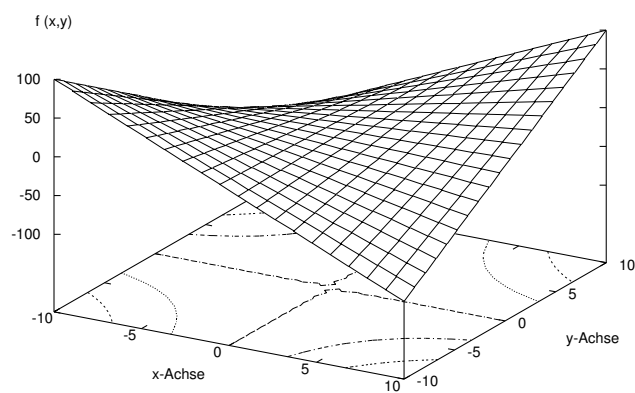
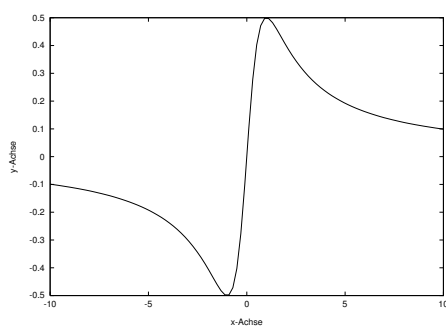
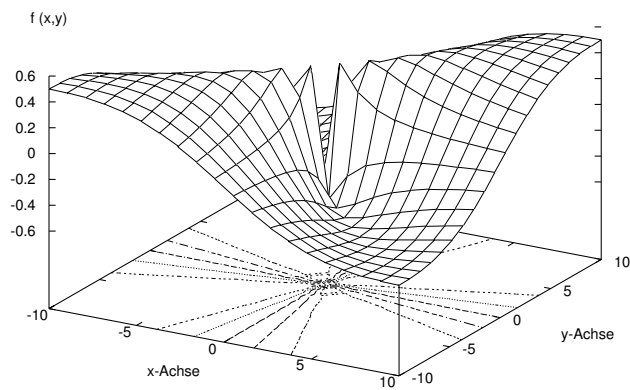
Dies ist eine quadratische Gleichung für  $y$

$$y^2 - \frac{x}{c}y + x^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{c} \pm \sqrt{\frac{x^2}{c^2} - 4x^2} \right) = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{c} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - 4} \right)$$

Hieraus kann man ablesen, dass die Niveaumengen für  $|c| > 1/2$  leere Mengen sind und für  $-1/2 < c < 1/2$  ergeben sich Geraden in der  $xy$ -Eben durch den Ursprung. Dies wird bestätigt durch Abbildung 7.6.

Abbildung 7.4: Graph der Funktion  $f(x, y) = xy$ Abbildung 7.5: Eine Isolinie der Funktion  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ Abbildung 7.6: Graph der Funktion  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$

Die Isolinien in  $x$ -Richtung sind gegeben durch die Funktionen

$$g(x) = x \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Dies sind echt gebrochen rationale Funktionen. Eine solche Kurve (für  $y = 1$ ) sehen Sie in Abbildung 7.5.



**7–6 Beispiel :** Der Graph einer Funktion kann natürlich auch etwas komplizierter aussehen. In Abbildung 7.7 finden sie Niveaukurven und Isolinien der Funktion

$$f(x, y) = e^{-0.2x^2} \sin(0.9y)$$

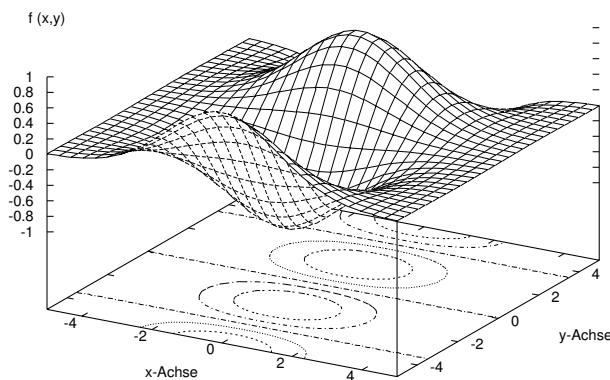


Abbildung 7.7: Der Graph der Funktion  $f(x, y) = \exp(-0.2x^2) \sin(0.9y)$

Selbstverständlich kann der Graph einer Funktion auch durch eine Beschreibung in Polarkoordinaten gegeben werden.

**7–7 Beispiel :** Als Beispiel sehen wir uns den Graphen der folgenden Funktion an, mit dem Graphen in Abbildung 7.8.

$$f(r, \theta) = r \sin(2\theta)$$



## 7.2 Grenzwerte und Stetigkeit

In diesem Abschnitt werden die Begriffe Grenzwert, Konvergenz und Stetigkeit für reellwertige Funktionen mehrerer Variablen eingeführt.

### 7.2.1 Definitionen und Begriffe

Zur Erinnerung sei hier die Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge  $x_n$  gegen die Zahl  $a$  noch einmal angegeben.

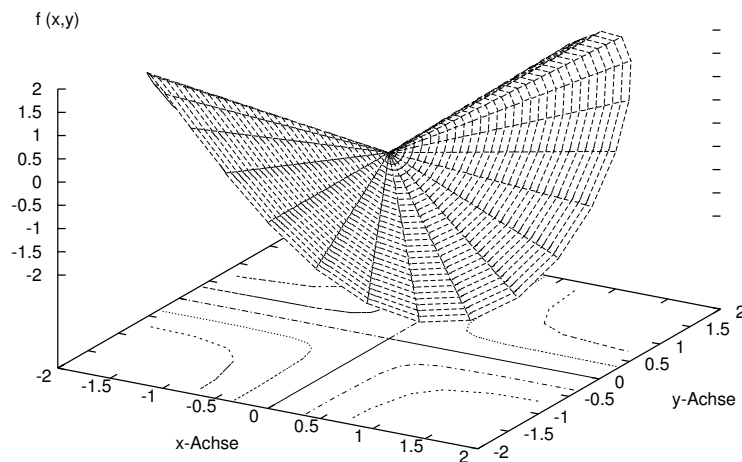


Abbildung 7.8: Der Graph einer Funktion in Polarkoordinaten

**7–8 Satz :** Die Folge  $x_k$  konvergiert gegen die Zahl  $a$ , falls für jede Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $m \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$k \geq m \quad \implies \quad |x_k - a| < \varepsilon$$

Nun ist diese Konstruktion auf eine Folge von Vektoren  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$  zu übertragen. Der Absolutbetrag  $|x_k - a|$  ist zu ersetzen durch die Länge der Vektoren  $\|\vec{x}_k - \vec{a}\|$ , wobei

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Dies führt auf die Definition der Konvergenz einer Folge von Vektoren.

**7–9 Definition :** Die Folge der Vektoren  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$  konvergiert gegen den Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , falls für jede Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $m \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$k \geq m \quad \implies \quad \|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \varepsilon$$

Wir haben für die Definition der Konvergenz die Euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  verwendet. Genausogut könnte man auch andere mögliche Normen verwenden.

$$\|\vec{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{wobei} \quad 1 < p < \infty$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$



**7–10 Satz :** Eine Folge von Vektoren  $\vec{x}_k$  konvergiert genau dann gegen  $\vec{a}$ , falls  $\|\vec{x}_k - \vec{a}\|_p$  gegen Null konvergiert für ein  $1 \leq p \leq \infty$ . Es spielt keine Rolle, welches  $p$  verwendet wird.

Als Konsequenz des obigen Resultates erhalten wir die folgende nützliche Aussage.

**7–11 Satz :** Eine Folge von Vektoren  $\vec{x}_k$  konvergiert genau dann gegen  $\vec{a}$  wenn für jede Komponente  $i = 1, \dots, n$  gilt  $(x_i)_k \rightarrow a_i$ , d.h.

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} (x_1)_k \\ (x_2)_k \\ \vdots \\ (x_n)_k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{a} \iff \iff (x_i)_k \rightarrow a_i \quad \text{falls } k \rightarrow \infty \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Für Funktionen einer Variablen waren die Definitionsbereiche immer Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen. Bei Funktionen mehrerer Variablen kann der Definitionsbereich erheblich komplizierter sein. Deshalb führen wir nun einige Begriffe über Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ein.

**7–12 Definition :** Für einen festen Punkt  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  heisst die Menge

$$U_{\vec{a}}(r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

eine  $r$ -**Umgebung** um den Punkt  $\vec{a}$ .

**7–13 Beispiel :** Für  $n = 1, 2, 3$  können  $r$ -Umgebungen leicht visualisiert werden.

- Für  $n = 1$  ist  $U_a(r)$  eine Intervall der Länge  $2r$  mit Mittelpunkt  $a$ .
- Für  $n = 2$  ist  $U_{\vec{a}}(r)$  eine Kreisfläche mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $\vec{a}$ .
- Für  $n = 3$  ist  $U_{\vec{a}}(r)$  ein Kugelvolumen mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $\vec{a}$ .

◇

**7–14 Definition :** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge.

- (a) Ein Punkt  $\vec{a} \in D$  heisst **innerer Punkt** der Menge  $D$ , falls es ein  $r > 0$  gibt mit  $U_{\vec{a}}(r) \subset D$ . Eine ganze „Kugel“ um den Punkt  $\vec{a}$  muss noch vollständig in der Menge  $D$  enthalten sein.
- (b) Die Menge  $D$  heisst **offen**, falls jeder Punkt in  $D$  ein innerer Punkt ist.
- (c) Ein Punkt  $\vec{b}$  heisst **Randpunkt** der Menge  $D$ , wenn für jedes  $r > 0$  die Umgebung  $U_{\vec{b}}(r)$  sowohl Punkte in  $D$  als auch Punkte ausserhalb von  $D$  enthält.
- (d) Die Menge  $\partial D$  heisst **Rand** von  $D$  und besteht aus allen Randpunkten von  $D$ .
- (e) Die Menge  $D$  heisst **abgeschlossen**, falls  $\partial D \subset D$ , d.h. wenn jeder Randpunkt in  $D$  enthalten ist.

**7–15 Beispiel :** Betrachten Sie die Teilmenge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 2\} = [0, 1] \times [0, 2]$$

Dies ist ein horizontales Rechteck der Breite 1 und Höhe 2, wobei der Rand der Rechtecks zur Menge gehört.

- (a) Der Punkt  $(0.9, 1.5)$  ist ein innerer Punkt der Menge, da ein Kreis mit Radius 0.01 noch vollständig im Rechteck enthalten ist.
- (b) Der Punkt  $(1, 1.5)$  ist kein innerer Punkt der Menge, da jeder Kreis mit noch so kleinem Radius  $r$  nicht vollständig innerhalb der Rechtecks liegt. Tatsächlich ist  $(1, 1.5)$  ein Randpunkt.
- (c) Die Menge ist nicht offen.
- (d) Der Rand der Menge besteht aus vier Geradenstücken und stimmt mit dem anschaulichen Begriff der Randes des Rechtecks überein.
- (e) Die Menge ist abgeschlossen, da der Rand zur Menge gehört.



**7–16 Beispiel :** Betrachten Sie die Teilmenge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 2\} = (0, 1) \times (0, 2)$$

Dies ist ein horizontales Rechteck der Breite 1 und Höhe 2, wobei der Rand der Rechtecks nicht zur Menge gehört.

- (a) Der Punkt  $(0.9, 1.5)$  ist ein innerer Punkt der Menge, da ein Kreis mit Radius 0.01 noch vollständig im Rechteck enthalten ist.
- (b) Die Menge ist offen, da jeder Punkt in  $D$  auch ein innerer Punkt ist.
- (c) Der Punkt  $(1, 1.5)$  ist kein Punkt in der Menge, aber ein Randpunkt.
- (d) Der Rand der Menge besteht aus vier Geradenstücken und stimmt mit dem anschaulichen Begriff der Randes des Rechtecks überein.
- (e) Die Menge ist nicht abgeschlossen, da der Rand nicht zur Menge gehört.



**7–17 Beispiel :** Betrachten Sie die Teilmenge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \text{ und } 0 < y < 2\} = (0, 1] \times (0, 2)$$

Dies ist ein horizontales Rechteck der Breite 1 und Höhe 2.

- (a) Die Menge ist weder offen noch abgeschlossen.
- (b) Der Rand der Menge besteht auch hier aus vier Geradenstücken.



**7–18 Definition :** Sei  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $\vec{a}$  ein Punkt in  $D$  oder  $\partial D$  und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion. Dann sagen wir, dass  $f$  den **Grenzwert**  $c$  hat für  $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$  falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $r > 0$  gibt mit

$$\vec{x} \in U_{\vec{a}}(r) \cap D \implies |f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$$

Man schreibt auch

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = c \quad \text{oder} \quad f(\vec{x}) \longrightarrow c \quad \text{für } \vec{x} \rightarrow \vec{a}$$

Im Kapitel über Stetigkeit von Funktionen einer Variablen haben wir gesehen, dass es zwei Möglichkeiten gibt, um zu zeigen dass eine Funktion  $f(x)$  stetig ist bei  $a$

(a)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(b) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Nun übertragen wir diese Definition und Resultat auf den Fall mehrerer unabhängiger Variablen.

**7–19 Definition :** Sei  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $\vec{a}$  ein Punkt in  $D$  oder  $\partial D$  und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine reellwertige Funktion.

(a) Die Funktion  $f$  heisst **stetig im Punkt**  $\vec{a} \in D$  falls

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

(b) Die Funktion  $f$  heisst **stetig auf**  $D$  falls sie stetig ist in jedem Punkt  $\vec{a} \in D$ .

**7–20 Theorem :** Eine Funktion  $f : \longrightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig im Punkt  $\vec{a} \in D$  wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) Für jede Folge  $\vec{x}_k$  von Punkten in  $D$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$  gilt  $f(\vec{x}_k) \rightarrow f(\vec{a})$  für  $k \rightarrow \infty$ .

(b) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$x \in D \quad \text{und} \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$$

## 7.2.2 Beispiele und Resultate

**7–21 Beispiel :** Die Funktion

$$f(\vec{x}) = f(x, y) = x + y$$

ist offensichtlich auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert. Wir wollen in aller Ausführlichkeit zeigen, dass die Funktion stetig ist bei  $\vec{a} = (1, 0)$ .

**Lösung:** Wir haben zu zeigen, dass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = f(1, 0) = 1$$

Wir wollen verschiedene Rechenverfahren verwenden um die selbe Aufgabe zu lösen.

**1. Erste Variante**

Sei  $\vec{x}_k = (x_k, y_k)$  eine Folge von Punkten in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$  falls  $k \rightarrow \infty$ . Somit müssen die einzelnen Komponenten konvergieren und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_k &\rightarrow 1 \\ y_k &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{falls } k \rightarrow \infty$$

Aufgrund der Stetigkeit von Funktionen in einer Variablen können wir hieraus leicht folgern, dass

$$f(\vec{x}_k) = x_k + y_k \rightarrow 1 + 0 = f(\vec{a}) \quad \text{falls } k \rightarrow \infty$$

**2. Zweite Variante**

Hierzu eine vorbereitende Rechnung

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| &= |f(x, y) - f(1, 0)| \\ &= |x + y - 1| \\ &\leq |x - 1| + |y| \\ &= \sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{y^2} \\ &\leq \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= 2 \|\vec{x} - \vec{a}\| \end{aligned}$$

Ist nun ein  $\varepsilon > 0$  (typischerweise sehr klein) gegeben, so wählen wir  $\delta = \varepsilon/2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} \in U_{\vec{a}}(\delta) &\implies \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta = \varepsilon/2 \\ &\implies |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| \leq 2 \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq 2 \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

◇

**7–22 Beispiel :** Sei

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{\sin(x_1)}{e^{x_1+x_2}}$$

und wir wollen zeigen, dass diese Funktion auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig ist.

**Lösung:** Sei  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ein beliebiger Vektor in  $\mathbb{R}^2$  und  $\vec{x}_k$  eine Folge von Vektoren mit

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} (x_1)_k \\ (x_2)_k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (x_1)_k &\rightarrow a_1 \\ (x_2)_k &\rightarrow a_2 \end{aligned} \quad \text{falls } k \rightarrow \infty$$

und wegen der Stetigkeit der sin- und exp-Funktion

$$f(\vec{x}_k) = \frac{\sin(x_1)_k}{e^{(x_1)_k + (x_2)_k}} \rightarrow \frac{\sin(a_1)}{e^{a_1 + a_2}} = f(\vec{a}) \quad \text{falls } k \rightarrow \infty$$

Somit ist die Funktion stetig bei  $\vec{a}$ . Da wir  $\vec{a}$  beliebig wählen können ist diese Funktion stetig auf ganz  $\mathbb{R}^2$ .  $\diamond$

Aufgrund des obigen Beispiels kann man leicht einsehen, dass das folgende Resultat richtig ist. Es genügt um in „elementaren Fällen“ zu entscheiden ob eine Funktion stetig ist oder nicht.

**7-23 Satz :** *Rechenregeln für stetige Funktionen.*

- (a) *Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von stetigen Funktionen sind stetig, solange nicht durch Null dividiert wird.*
- (b) *Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig.*

Nun wollen wir noch wenige Spezialfälle untersuchen.

**7-24 Beispiel :** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist diese Funktion überall, ausser bei  $(0, 0)$  stetig. Die Stetigkeit im Ursprung ist separat zu untersuchen.

Für ein festes  $m \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot m t}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Da  $(t, mt)$  die Parametrisierung einer Geraden mit Steigung  $m$  durch den Ursprung ist, sehen wir, dass die Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

von der Richtung abhängt mit der wir uns dem Koordinatenursprung nähern. Somit kann dieser Limes nicht existieren und die Funktion  $f(x, y)$  ist im Ursprung nicht stetig.  $\diamond$

**7-25 Beispiel :** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist diese Funktion überall, ausser bei  $(0, 0)$  stetig. Die Stetigkeit im Ursprung ist separat zu untersuchen.

Für ein festes  $m \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, m t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 m^2 t^2}{t^2 + m^2 t^2} = 0$$

Diese Grenzwerte sind also unabhängig von der Steigung  $m$  der Geraden durch den Ursprung ist. Somit ist 0 ein Kandidat für den Grenzwert. Hier finden Sie noch einen mathematisch exakten Beweis.

Wir haben früher gezeigt, dass das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen  $x$  und  $y$  immer kleiner ist als das arithmetische Mittel. Also

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \text{oder auch} \quad 4xy \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Somit gilt

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Damit gilt für die hier zu untersuchende Funktion

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| |y| \frac{|x| |y|}{x^2 + y^2} \leq |x| |y| \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y^2)} \leq |x| |y| \frac{1}{2}$$

Hieraus folgt leicht, dass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

und somit ist die Funktion  $f(x, y)$  im Ursprung stetig. ◇

Die Übungsaufgabe 7-7 zeigt, dass der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

nicht existieren muss, auch wenn entlang jeder Geraden durch den Ursprung der selbe Grenzwert erscheint, d.h. auch falls

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, m t)$$

ist unabhängig von  $m$ .

Genau wie bei stetigen Funktionen einer Variablen gibt es auch hier einen **Satz vom Maximum**.

**7-26 Satz :** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann nimmt die Funktion ihren Maximalwert in  $D$  an d.h. es gibt einen Punkt  $\vec{x}_M \in D$  mit

$$f(\vec{x}_M) \geq f(\vec{x}) \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in D$$

Auf den Beweis dieses Resultates verzichten wir an dieser Stelle, wollen aber durch drei Beispiele aufzeigen, dass die Voraussetzungen notwendig sind.

**7-27 Beispiel :**

- (a) Falls die Menge  $D$  abgeschlossen aber nicht beschränkt ist, kann es sein, dass die Funktion  $f$  keinen Maximalwert hat. Betrachten Sie hierzu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } y \in \mathbb{R}\} = [0, 1] \times \mathbb{R}$$

und die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

- (b) Falls die Menge  $D$  beschränkt aber nicht abgeschlossen ist, kann es sein, dass die Funktion  $f$  keinen Maximalwert hat. Betrachten Sie hierzu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1\} = (0, 1) \times (0, 1)$$

und die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Der Maximalwert wird auf dem Rand  $\partial D$  angenommen, der aber nicht zu  $D$  gehört.

- (c) Falls die Menge  $D$  beschränkt und abgeschlossen ist, aber die Funktion nicht stetig, kann es sein, dass die Funktion  $f$  keinen Maximalwert hat. Betrachten Sie hierzu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$$

und die nicht stetige Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} -x^2 - y^2 & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ -1 & \text{falls } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Je näher der Punkt  $(x, y)$  beim Ursprung liegt, desto grösser der Funktionswert. Erreicht  $(x, y)$  aber den Ursprung, so springt der Funktionswert nach unten zu  $-1$ . Somit gibt es keinen maximalen Wert der Funktion.

◇

### 7.3 Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\vec{a}$  ein fester Punkt in  $D$ . Für die Definition der partiellen Ableitung ist die partielle Funktion

$$g(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

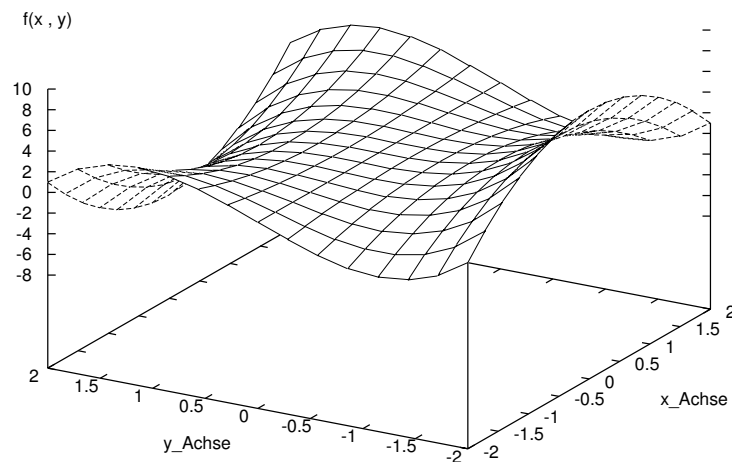
zu betrachten. Die Ableitung der Funktion  $g$  (nur eine Variable) heisst **partielle Ableitung der Funktion  $f$  bezüglich der Variablen  $x_i$** .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) &= \frac{dg}{dx_i}(a_i) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a})) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\vec{a} + h \vec{e}_i) - f(\vec{a})) \end{aligned}$$

Die folgenden Notationen werden oft verwendet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = D_{x_i} f(\vec{a}) = f_{x_i}(\vec{a}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{a}}$$

Die graphische Interpretation der partiellen Ableitungen ist gegeben als Steigung der Isolinien. Wir wollen dies an einem Beispiel illustrieren.

Abbildung 7.9: Der Graph der Funktion  $f(x, y) = 1 + yx^2 - y^3$ 

**7–28 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(x, y) = 1 + yx^2 - y^3$$

sind die partiellen Ableitungen gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2yx \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - 3y^2\end{aligned}$$

Um die partielle Ableitung bezüglich  $x$  zu illustrieren halten wir den Wert von  $y$  fest und variieren nur  $x$ . Für  $y = -2$  ergibt dies zum Beispiel die partielle Funktion

$$g(x) = 1 - 2x^2 + 8$$

mit der Ableitung

$$g'(x) = -4x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)$$

Diese Kurve entspricht einer nach unten geöffneten Parabel mit Scheitel bei  $(x, z) = (0, 9)$ . Diese Parabel ist in [Abbildung 7.9](#) an der rechten Kante der Fläche zu erkennen.

Um die partielle Ableitung bezüglich  $y$  zu illustrieren halten wir den Wert von  $x$  fest und variieren nur  $y$ . Für  $x = -2$  ergibt dies zum Beispiel die partielle Funktion

$$r(y) = 1 + y4 - y^3$$

mit der Ableitung

$$r'(y) = 4 - 3y^2 = \frac{\partial f(-2, y)}{\partial y}$$

Diese Kurve entspricht einer kubischen Funktion mit drei Nullstellen und einer negativen Steigung von 4 bei  $y = 0$ . Diese Kurve ist in [Abbildung 7.9](#) an der vorderen Kante der Fläche zu erkennen. Hierbei ist zu beachten ist, dass die positive Richtung von rechts nach links verläuft.  $\diamond$



**7–29 Beispiel :** Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y, z) = x y^2 + z \cos x$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 - z \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 y x \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos x\end{aligned}$$

◇

**7–30 Beispiel :** Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+2x_2} + 2 x_1 \sin x_3 + x_3^2 x_1 x_2$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= e^{x_1+2x_2} + 2 \sin x_3 + x_3^2 x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2 e^{x_1+2x_2} + x_3^2 x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 2 x_1 \cos x_3 + 2 x_3 x_1 x_2\end{aligned}$$

◇

Das Berechnen von partiellen Ableitungen beinhaltet also keinerlei neue Schwierigkeiten. Die Beherrschung des Ableitens bezüglich einer Variablen genügt vollauf.

### 7.3.1 Gradient und Tangentialebene

**7–31 Definition :** Eine auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierte Funktion  $f$  heisst **stetig differenzierbar** falls alle partiellen Ableitungen auf ganz  $D$  existieren und stetig sind. Man schreibt in diesem Falle  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ .

**7–32 Definition :** Da  $D \subset \mathbb{R}^n$  gibt es für eine Funktion  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$   $n$  partielle Ableitungen. Diese kann man zu einem Vektor zusammenfassen: dem **Gradienten** der Funktion  $f$ .

$$\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Der Gradient sollte immer als Zeilenvektor betrachtet werden.

**7–33 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gilt  $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}, \mathbb{R})$ . Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

gilt

$$\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

oder mit einer einfacheren Notation

$$\text{grad } f = \text{grad } \|\vec{x}\| = \frac{\vec{x}^T}{\|\vec{x}\|}$$

◇

**7–34 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2$$

gilt  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  und

$$\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$$

◇

Im früheren Kapitel über Ableitungen von Funktionen einer Variablen haben wir gesehen, dass eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann differenzierbar ist bei  $x_0$ , falls

$$\frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot x}{|x|} \rightarrow 0 \quad \text{falls } x \rightarrow 0, \quad ,$$

oder

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + o(x)$$

d.h. der Fehler der linearen Approximation ist von kleinerer Ordnung als  $x$ . Nun werden wir dieses Resultat übertragen auf den Fall mehrerer unabhängiger Variablen.

**7–35 Theorem :** Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge, die Funktion  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  und  $\vec{x}_0$  ein fester Punkt in  $D$ , dann gilt

$$\frac{f(\vec{x}_0 + \vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{falls } \vec{x} \rightarrow \vec{0}, \quad ,$$

oder

$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{x} + o(\|\vec{x}\|)$$

Hierbei ist  $\nabla f$  als Zeilenvektor und  $\vec{x}$  als Spaltenvektor aufzufassen.

**7–36 Beispiel :** Die Funktion

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = 2 + x_1^2 x_2 - x_2^3$$

ist offensichtlich stetig differenzierbar und es gilt

$$\nabla f(\vec{x}) = (2x_1 x_2, x_1^2 - 3x_2^2)$$

Wir wählen

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten somit

$$\nabla f(\vec{x}_0) = (4, -11)$$

Also gilt gemäss dem obigen Theorem

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{x}) &= f(1 + x_1, 2 + x_2) \\ &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{x} + o(\|\vec{x}\|) \\ &= -4 + (4, -11) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(\|\vec{x}\|) \\ &= -4 + 4x_1 - 11x_2 + o(\|\vec{x}\|) \end{aligned}$$

◇

**7–37 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(x, y) = 2 + \sin(3x) + y(1 + x)$$

gilt

$$\text{grad } f(x, y) = (3 \cos(3x) + y, 1 + x)$$

und somit

$$\text{grad } f(0, 1) = (3 + 1, 1)$$

Wegen  $f(0, 1) = 2 + 0 + 1 = 3$  gilt

$$\begin{aligned} f(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) &= f(0, 1) + \text{grad } f(0, 1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) \\ &= 3 + (4, 1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) \\ &= 3 + 4\Delta x + 1\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) \end{aligned}$$

Folglich gilt für kleine Werte von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Approximation

$$f(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) \approx g(\Delta x, \Delta y) = 3 + 4\Delta x + 1\Delta y$$

Fasst man in dieser neuen Funktion  $\Delta x$  und  $\Delta y$  als Variablen auf, so ist der Graph von  $g$  eine Ebene in  $R^3$ . Diese Ebene entspricht der **Tangentialebene** und den Graphen von  $f(x, y)$  im Punkte  $(0, 1, 3)$ . ◇

**7–38 Beispiel :** Der Gradient der Funktion

$$f(x, y) = 2 - (x + 1)^2 - 2(y - 2)^2$$

ist gegeben durch

$$\text{grad } f(x, y) = (-2(x + 1), -4(y - 2))$$

Somit ist

$$\text{grad } f(0, 0) = (-2, 8)$$

und für kleine Werte von  $x$  und  $y$  gilt die Approximation

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + \text{grad } f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7 - 2x + 8y$$

Dies ist die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion  $f(x, y)$  bei  $(0, 0, -7)$ . Die beiden Graphen sehen Sie in Abbildung 7.10.  $\diamond$

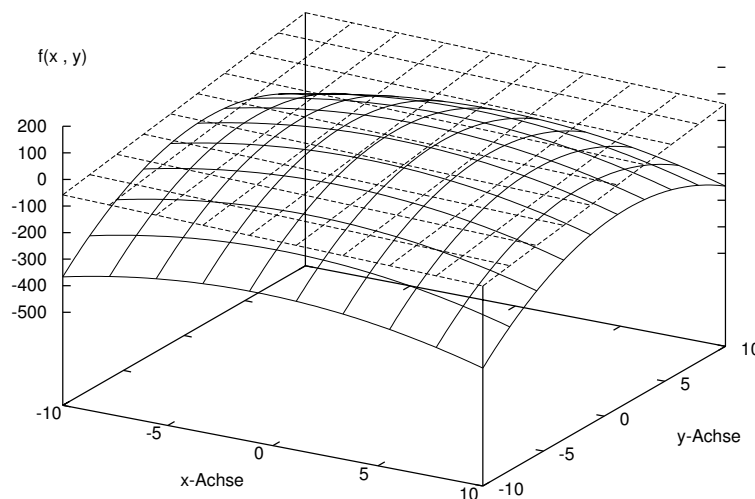


Abbildung 7.10: Der Graph von  $2 - (x + 1)^2 - 2(y - 2)^2$  und der Tangentialebene

Für eine beliebige Funktion  $f(x, y)$  und einen festen Punkt  $(x_0, y_0)$  liefert die neue Funktion

$$\begin{aligned} z = g(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \end{aligned}$$

die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ , wobei  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Für Werte von  $(x, y)$  nahe bei  $(x_0, y_0)$  gilt

$$f(x, y) \approx g(x, y)$$

Die Approximation der Funktion durch eine Ebene heisst auch **Taylorapproximation erster Ordnung**. Für eine Ebenengleichung in der Form

$$ax + by + cz + d = 0$$

entspricht der Vektor  $(a, b, c)$  dem Normalenvektor der Ebene und man kann die Gleichung auch in der Form

$$(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = 0$$

schreiben. Verwenden wir diese Notation für die obigen Tangentialebene, so erhalten wir

$$\left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Somit ist der Vektor

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$$

ein Normalenvektor der Tangentialebene.

**7–39 Beispiel :** Der Graph der Funktion

$$f(x, y) = e^{-y^2+x} x$$

hat einen Punkt mit horizontaler Tangentialebene. Finden Sie diesen Punkt.

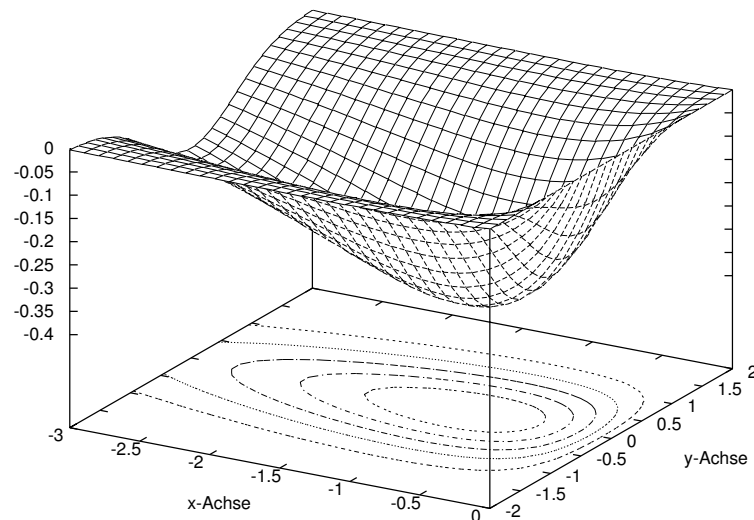


Abbildung 7.11: Der Graph von  $e^{-y^2+x} x$

**Lösung:** Bei einer horizontalen Tangentialebene muss der Normalenvektor in die  $z$ -Richtung zeigen. Somit muss die Bedingung

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right) = (0, 0, -1)$$

erfüllt sein. Das führt auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= e^{-y_0^2+x_0} (1+x_0) = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= -e^{-y_0^2+x_0} 2y_0 x_0 = 0 \end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung  $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ . Dieses Resultat wird durch Abbildung 7.11 bestätigt.  $\diamond$

Wir wollen nun noch ein anderes Verfahren zeigen um den Normalenvektor zu finden. Die Kurve

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \\ f(x_0 + t, y_0) \end{pmatrix}$$

geht für  $t = 0$  durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  auf der Fläche

$$z = f(x, y)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Die Kurve

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + t \\ f(x_0, y_0 + t) \end{pmatrix}$$

geht durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Somit haben wir zwei linear unabhängige Tangentialvektoren an diese Fläche und ihr Vektorprodukt muss einen Normalenvektor ergeben

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 7.3.2 Richtungsableitung

**7–40 Definition :** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiger Vektor, so heisst der Ausdruck

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

**Richtungsableitung** der Funktion  $f$  in Richtung  $\vec{v}$  beim Punkt  $\vec{x}_0$ .

Hat der Richtungsvektor  $\vec{v}$  die Länge 1, so gibt die Richtungsableitung die Steigung der Funktion in diese Richtung an. Die Richtungsableitung kann mittels des Gradienten bestimmt werden.

**7–41 Satz :** Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $\vec{x}_0 \in D$  und  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  so gilt

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

**Beweis :** Wir geben den Beweis im Spezialfall  $n = 2$  und  $\vec{x}_0 = (0, 0)$ . Mit  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (f(t v_1, t v_2) - f(0, 0)) &= \frac{1}{t} (f(t v_1, t v_2) - f(0, t v_2) + f(0, t v_2) - f(0, 0)) \\ &= \frac{f(t v_1, t v_2) - f(0, t v_2)}{t v_1} v_1 + \frac{f(0, t v_2) - f(0, 0)}{t v_2} v_2 \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, t v_2) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, \eta) \\ &\rightarrow v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \quad \text{falls } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wobei  $\xi$  zwischen 0 und  $t v_1$  liegt und  $\eta$  zwischen 0 und  $t v_2$ . Für den letzten Überlegungsschritt ist die Stetigkeit der partiellen Ableitungen wesentlich.  $\square$

**7–42 Beispiel :** Um die Steigung der Fläche

$$z = f(x, y) = e^x (1 + y^2)$$

in  $45^\circ$ -Richtung beim Ursprung zu bestimmen kann man den Richtungsvektor

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (e^x (1 + y^2), 2 e^x y)$$

verwenden und erhält das Resultat

$$D_{\vec{v}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\diamond$

**7–43 Satz : Kettenregel**

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$  und

$$\vec{x} : (a, b) \rightarrow D$$

sei die differenzierbare Parametrisierung einer Kurve, die in  $D$  verläuft. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = D_{\vec{v}(t)} f(\vec{x}(t))$$

wobei  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ .

**Beweis :** Wir zeigen die Gültigkeit der Formel bei  $t = 0$ . Da die Funktion  $f$  stetig differenzierbar ist gilt wegen Theorem 7-35

$$f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}(0)) = \nabla f(\vec{x}(0)) \cdot (\vec{x}(t) - \vec{x}(0)) + R(\vec{x}(t) - \vec{x}(0))$$

wobei

$$\frac{R(\vec{x}(t) - \vec{x}(0))}{\|\vec{x}(t) - \vec{x}(0)\|} \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad \|\vec{x}(t) - \vec{x}(0)\| \rightarrow 0$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}(0))}{t} &= \nabla f(\vec{x}(0)) \cdot \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(0)}{t} + \frac{R(\vec{x}(t) - \vec{x}(0))}{t} \\ &= \nabla f(\vec{x}(0)) \cdot \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(0)}{t} + \frac{R(\vec{x}(t) - \vec{x}(0))}{\|\vec{x}(t) - \vec{x}(0)\|} \frac{\|\vec{x}(t) - \vec{x}(0)\|}{t} \\ &\rightarrow \nabla f(\vec{x}(0)) \cdot \vec{v}(0) + 0 \cdot \|\vec{v}(0)\| \quad \text{falls} \quad t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

**7-44 Beispiel :** Die Temperatur  $T$  in einem Raum sei gegeben durch die Funktion

$$T(x, y, z) = 20 + 0.01z + \frac{x+y}{200}$$

und ein Körper bewegt sich entlang der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

in diesem Raum. Zu bestimmen ist die Änderungsrate der Temperatur bezüglich der Zeit.

**1. Lösung** Mit elementarsten Rechnungen erhält man

$$v(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla T(x, y, z) = \left( \frac{1}{200}, \frac{1}{200}, \frac{1}{100} \right)$$

und mit dem obigen Resultat gilt also

$$\frac{d}{dt} T(\vec{x}(t)) = \nabla T \cdot \vec{v}(t) = \frac{\cos t}{200} - \frac{\sin t}{200} + \frac{1}{100}$$

**2. Lösung** Durch direktes Einsetzen ergibt sich

$$g(t) = T(\vec{x}(t)) = 20 + 0.01t + \frac{\sin t + \cos t}{200}$$

Diese Funktion kann nun bezüglich  $t$  abgeleitet werden mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} g(t) = 0.01 + \frac{\cos t - \sin t}{200}$$

◇



Sei nun  $\vec{v}$  ein Vektor der Länge 1, d.h.  $\|\vec{v}\| = 1$ . Aus der Vektorgeometrie sollte die elementare Formel

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cos \alpha$$

bekannt sein. Hierbei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{v}$  und  $\nabla f(\vec{x}_0)$ . Der Ausdruck gibt die Steigung der Fläche in Richtung  $\vec{v}$  an und ist offensichtlich maximal, falls  $\alpha = 0$ . Zeigt  $\vec{v}$  in die Richtung einer Niveaukurve, so darf sich  $f$  in diese Richtung nicht ändern, d.h.  $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0$ . Falls  $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ , so muss der Zwischenwinkel  $\alpha = 90^\circ$  sein.

**7–45 Satz :** Der Gradient  $\nabla f(\vec{x}_0)$  zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs einer Fläche und die maximale Steigung ist gegeben durch  $\|\nabla f(\vec{x}_0)\|$ . Falls der Gradient nicht Null ist steht er senkrecht auf den Niveaukurven.

**7–46 Beispiel :** Die Höhe  $h$  eines Berges ist gegeben durch die Funktion

$$h = 1000 - x^2 - 10y^2$$

und der Punkt  $P = (10, 1, 890)$  liegt auf der Bergfläche.

- (a) Finde die Richtung des steilsten Anstiegs und den maximalen Winkel.
- (b) Zeigt die Richtung des steilsten Anstiegs zum Gipfel?
- (c) Finde die Richtung der Niveaulinien im Punkt  $P$ .

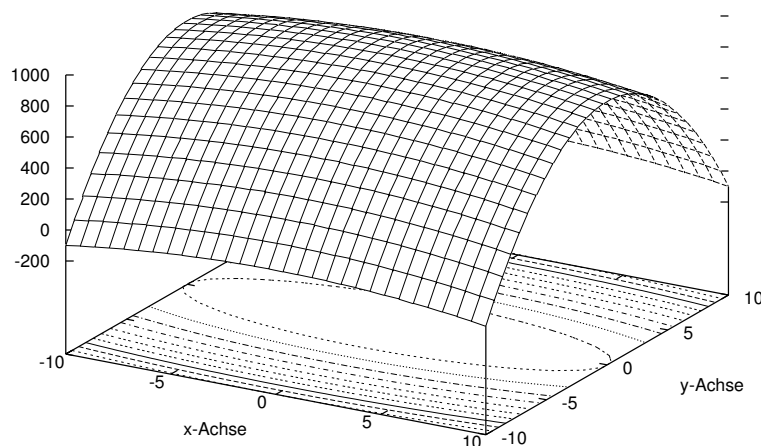


Abbildung 7.12: Kammähnlicher Hügel

**Lösung:** Es gilt

$$\nabla h(x, y) = (-2x, -20y)$$

und somit

$$\nabla h(10, 1) = (-20, -20)$$

- (a) Die Richtung des steilsten Anstiegs ist somit  $(-1, -1)$  und die Steigung in diese Richtung ist  $m = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2} \approx 28.3$ . Der Steigungswinkel ist gegeben durch  $\alpha = \arctan m \approx 87.8^\circ$ .
- (b) Die Richtung des steilsten Aufstiegs zeigt **nicht** zum Gipfel bei  $(0, 0)$ .
- (c) Der Richtungsvektor  $\vec{v}$  einer Niveaulinie muss senkrecht stehen auf dem Gradienten und somit haben wir die Bedingung

$$\nabla h(10, 1) \cdot \vec{v} = (-20, -20) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

◇

Als weitere Anwendung der Kettenregel können wir den **Gradienten für Funktionen gegeben in Polarkoordinaten** herleiten. Sei also eine Funktion  $F(r, \varphi)$  vom Radius  $r$  und Winkel  $\varphi$  abhängig. Es ist zu beachten, dass (leider)

$$\text{grad } F \neq \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

Die einfache Formel mit den partiellen Ableitungen ist nur in kartesischen Koordinaten gültig. Wir setzen

$$F(r, \varphi) = f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

und betrachten

$$\begin{pmatrix} x(r) \\ y(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

als Parametrisierung einer Kurve bezüglich dem Parameter  $r$ . Das selbe wird auch mit dem zweiten Parameter  $\varphi$  durchgeführt. Dann führt die Kettenregel hieraus die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi \end{aligned}$$

Dies kann man als lineares System von Gleichungen für die Unbekannten  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  auffassen und erhält für  $r > 0$  die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

**7–47 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln r = F(r, \varphi)$$

gilt offensichtlich

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

und somit

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left( \frac{\cos \varphi}{r}, \frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

◇

**7–48 Beispiel :** Für die Funktion

$$f(x, y) = r^2 \sin(4\varphi) = F(r, \varphi)$$

gilt offensichtlich

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2r \sin(4\varphi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 4r^2 \cos(4\varphi)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \varphi \cdot 2r \sin(4\varphi) - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot 4r^2 \cos(4\varphi) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \varphi \cdot 2r \sin(4\varphi) + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot 4r^2 \cos(4\varphi) \end{aligned}$$

Man kann auch versuchen zu diesem Resultat zu kommen, indem die Funktion

$$f(x, y) = r^2 \sin(4\varphi) = (x^2 + y^2) \sin\left(4 \arctan \frac{y}{x}\right)$$

direkt nach  $x$  und  $y$  abgeleitet wird. Die Rechnungen werden aber wesentlich mühsamer sein.

◇

### 7.3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oft differenzierbar, so kann man die partiellen Ableitungen erster Ordnung wiederum als Funktionen auffassen und ableiten.

**7–49 Beispiel :** Für die Funktion  $f(x, y) = x^3 y^5$  gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 y^5 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 y^5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 5x^3 y^4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x y^5 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 20x^3 y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (5x^3 y^4) = 15x^2 y^4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^5) = 15x^2 y^4 \end{aligned}$$

◇

**7–50 Beispiel :** Für die Funktion  $f(x, y) = \sin(x + 3xy^2)$  gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sin(x + 3xy^2) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x + 3xy^2) (1 + 3y^2) \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x + 3xy^2) (6xy) \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x + 3xy^2) (1 + 3y^2)^2 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x + 3xy^2) (6xy)^2 + \cos(x + 3xy^2) (6x) \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x + 3xy^2) (6xy)) \\
 &= -\sin(x + 3xy^2) (1 + 3y^2) (6xy) + \cos(x + 3xy^2) (6y) \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x + 3xy^2) (1 + 3y^2)) \\
 &= -\sin(x + 3xy^2) (6xy) (1 + 3y^2) + \cos(x + 3xy^2) (6y)
 \end{aligned}$$

◇

Um Schreibarbeit zu sparen verwendet man auch die kürzere Notation

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

In beiden obigen Beispielen gilt die Identität

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{oder kürzer} \quad f_{xy} = f_{yx}$$

d.h. die Resultate gemischter partieller Ableitungen sind unabhängig von der Reihenfolge bezüglich derer differenziert wird. Das Theorem von Schwarz<sup>1</sup> zeigt, dass dies kein Zufall ist.

**7–51 Theorem :** Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion deren partielle Ableitungen bis und mit zweiter Ordnung alle stetig sind, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{oder kürzer} \quad f_{xy} = f_{yx}$$

Sind alle partiellen Ableitungen stetig, so kann ihre Reihenfolge vertauscht werden.

Das Theorem kann auch mehrfach angewandt werden auf Ableitungen höherer Ordnung um zu zeigen, dass  $f_{xyx} = f_{xxy} = f_{yxx}$  oder  $f_{xyzz} = f_{zzyx}$ , falls nur alle auftretenden partiellen Ableitungen stetig sind.

**Beweis :** Der Beweis beruht auf einer mehrfachen Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Sei  $(x_0, y_0)$  ein fester Punkt in  $\mathbb{R}^2$  und  $t > 0$ . Nun berechnen wir Differenzen von Funktionswerten entlang des Rechtecks in Abbildung 7.13 und schreiben sie um mit Hilfe der Mittelwertsatzes. Wir betrachten die neuen Funktionen

$$\begin{aligned}
 g(x) &:= f(x, y_0 + t) - f(x, y_0) \\
 g'(x) &= f_x(x, y_0 + t) - f_x(x, y_0)
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843–1912), er hat wesentliche Beiträge zum Aufbau der Analysis und der Anwendungen in der Geometrie geleistet

und

$$\begin{aligned}
 h(t) &:= f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0) \\
 &= g(x_0 + t) - g(x_0) \\
 &\stackrel{\text{MWS}}{=} g'(\xi_1) t \\
 &= (f_x(\xi_1, y_0 + t) - f_x(\xi_1, y_0)) t \\
 &\stackrel{\text{MWS}}{=} f_{yx}(\xi_1, \eta_1) t^2
 \end{aligned}$$

wobei  $x_0 < \xi_1 < x_0 + t$  und  $y_0 < \eta_1 < y_0 + t$ .

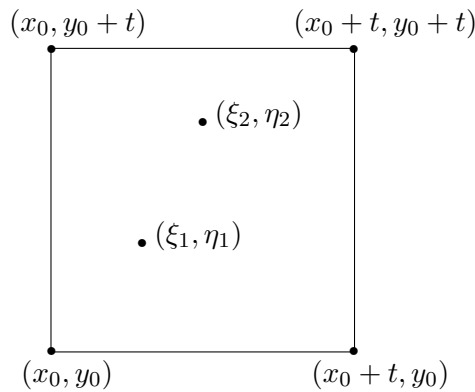


Abbildung 7.13: Beweis des Satzes von Schwarz

Fast die selbe Rechnung führen wir nun noch einmal aus mit der Funktion

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(y) &:= f(x_0 + t, y) - f(x_0, y) \\
 \hat{g}'(y) &= f_y(x_0 + t, y) - f_y(x_0, y)
 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
 h(t) &= f_x(x_0 + t, y_0 + t) - f_x(x_0, y_0 + t) - f_x(x_0 + t, y_0) + f_x(x_0, y_0) \\
 &= \hat{g}(y_0 + t) - \hat{g}(y_0) \\
 &\stackrel{\text{MWS}}{=} \hat{g}'(\eta_2) t \\
 &= (f_y(x_0 + t, \eta_2) - f_y(x_0, \eta_2)) t \\
 &\stackrel{\text{MWS}}{=} f_{xy}(\xi_2, \eta_2) t^2
 \end{aligned}$$

wobei  $x_0 < \xi_2 < x_0 + t$  und  $y_0 < \eta_2 < y_0 + t$ .

Da in beiden Fällen die selbe Funktion  $h(t)$  verwendet wurde gilt

$$h(t) = f_{yx}(\xi_1, \eta_1) t^2 = f_{xy}(\xi_2, \eta_2) t^2$$

Nach Division durch  $t^2$  gilt also

$$f_{yx}(\xi_1, \eta_1) = f_{xy}(\xi_2, \eta_2)$$

In dieser Beziehung lässt man nun  $t$  gegen 0 konvergieren. Somit gilt  $\xi_i \rightarrow x_0$  und  $\eta_i \rightarrow y_0$  und wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen erhalten wir

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

□

**7-52 Definition :** Eine auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierte Funktion  $f$  heisst  **$k$ -mal stetig differenzierbar** falls alle partiellen Ableitungen bis und mit Ordnung  $k$  auf ganz  $D$  existieren und stetig sind. Man schreibt in diesem Falle  $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ .

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen **nicht vertauschbar** sein muss, falls diese nicht stetig sind.

**7-53 Beispiel :** Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Da für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  stets  $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ , gilt  $f_x(0, 0) = 0$  und  $f_y(0, 0) = 0$ . Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ f_y(x, y) &= x \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt für  $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} f_x$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

und für  $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} f_y$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y^2} = 1$$

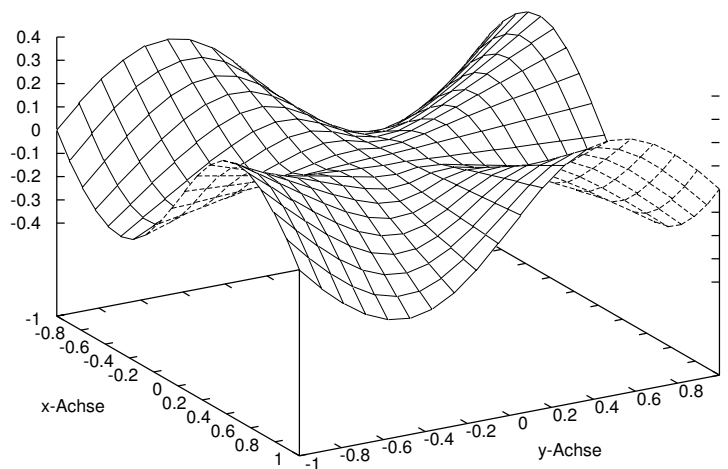
und somit ist  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . Mit einer (mühsamen, langen) Rechnung kann man verifizieren, dass die Ableitungen  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  bei  $(0, 0)$  nicht stetig sind.  $\diamond$

### 7.3.4 Taylorapproximation zweiter Ordnung, Hesse'sche Matrix

Für Funktionen einer Variablen kennen wir die Taylorapproximation zweiter Ordnung, die gegeben ist durch

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) (\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3)$$

Es gibt eine entsprechende Formel für Funktionen von zwei Variablen.

Abbildung 7.14: Graph der Funktion  $xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ **7-54 Theorem :** ( Taylorapproximation zweiter Ordnung )

Für eine Funktion

$$f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

gilt die Approximationsformel

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) \\ & + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y \\ & + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0, y_0) (\Delta y)^2) \\ & + R \end{aligned}$$

wobei der Rest  $R$  von dritter Ordnung (oder höher) ist, d.h.

$$R = O(|\Delta x|^3 + |\Delta x|^2 |\Delta y| + |\Delta x| |\Delta y|^2 + |\Delta y|^3)$$

Mittels Matrizen und Vektoren kann man das selbe Resultat auch anders darstellen.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) \cdot \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + R \end{aligned}$$

Die  $2 \times 2$ -Matrix

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

heisst **Hesse'sche Matrix** der Funktion  $f$  beim Punkt  $(x_0, y_0)$ . Wegen des Theorems von Schwarz muss diese Matrix symmetrisch sein.

**Beweis :** Der Beweis dieses wichtigen Resultates beruht auf dem bereits bekannten Resultat für eine Variable und einem Trick um das mehrdimensionale Problem als eindimensionales zu betrachten. Sei dazu

$$g(t) = f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y)$$

Diese neue Funktion  $g$  hängt nur von einer Variablen  $t$  ab und ist drei mal stetig differenzierbar, da sie eine Komposition differenzierbarer Funktionen ist. Somit können wir für  $g$  die bekannte Taylorformel und die Kettenregel (Resultat 7-43, Seite 266) anwenden.

Mit der Notation  $\vec{x}(t) = (x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y)$  gilt dann

$$\begin{aligned} g(0) &= f(x_0, y_0) = f(\vec{x}(0)) \\ g(1) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(\vec{x}(1)) \\ \dot{g}(t) &= f_x(\vec{x}(t)) \Delta x + f_y(\vec{x}(t)) \Delta y \\ \ddot{g}(t) &= f_{xx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 + f_{yx}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta y + f_{xy}(\vec{x}(t)) \Delta y \Delta x + f_{yy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^2 \\ &= f_{xx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta y + f_{yy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Die dritte Ableitung  $g^{(3)}(t)$  enthält nur Terme dritter Ordnung bezüglich  $\Delta x$  und  $\Delta y$ . Wegen der eindimensionalen Taylorformel

$$g(1) = g(0) + \dot{g}(0) 1 + \frac{1}{2} \ddot{g}(0) 1^2 + \frac{1}{3!} g^{(3)}(\xi) 1^3 \quad \text{für ein } 0 < \xi < 1$$

gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(1)) &= f(\vec{x}(0)) + (f_x(\vec{x}(0)) \Delta x + f_y(\vec{x}(0)) \Delta y) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(\vec{x}(0)) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(\vec{x}(0)) \Delta x \Delta y + f_{yy}(\vec{x}(0)) (\Delta y)^2) + R \end{aligned}$$

wobei der Rest von dritter Ordnung ist. Dies ist genau die Behauptung des Theorems.  $\square$

Die Aufgaben 7-20 und 7-21 sind Modifikationen des obigen Resultates und Beweises.

**7-55 Beispiel :** Um die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x, y) = \cos(xy) + \sin y$$

bei  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  zu bestimmen betrachten wir die folgende Tabelle von partiellen Ableitungen

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(0, 0)$
$f$	$\cos(xy) + \sin y$	1
$f_x$	$-y \sin(xy)$	0
$f_y$	$-x \sin(xy) + \cos y$	1
$f_{xx}$	$-y^2 \cos(xy)$	0
$f_{yy}$	$-x^2 \cos(xy) - \sin y$	0
$f_{xy}$	$-\sin(xy) - xy \cos(xy)$	0

Somit gilt die Approximation

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx 1 + 1 \Delta y$$



oder auch

$$f(x, y) = \cos(xy) + \sin y \approx 1 + y$$

wobei der Fehler von dritter Ordnung bezüglich  $x$  und  $y$  ist.

Der *Mathematica*-Code erzeugt die Graphen der Funktion  $f(x, y)$  und der Approximation. Das Resultat zeigt, dass die beiden Funktionen für einen kleinen Bereich kaum abweichen. Der zweite Block zeigt, dass für einen grossen Bereich nicht mehr von einer Approximation gesprochen werden kann.

#### Mathematica

```
f[x_, y_] = Cos[x*y]+Sin[y];
s=1;
g1=Plot3D[{f[x, y], GrayLevel[0.5]}, {x,-s, s}, {y,-s, s}, DisplayFunction ->Identity];
g2=Plot3D[1+y, {x,-s, s}, {y,-s, s}, DisplayFunction ->Identity];
Show[{g2, g1}, DisplayFunction ->$DisplayFunction];
```

#### Mathematica

```
s=4;
f[x_, y_] = Cos[x*y]+Sin[y];
g1=Plot3D[{f[x, y], GrayLevel[0.5]}, {x,-s, s}, {y,-s, s}];
g2=Plot3D[1+y, {x,-s, s}, {y,-s, s}];
```



**7-56 Beispiel :** Um die Taylorentwicklung der Funktion in Abbildung 7.15

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(3y)$$

bei  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  zu bestimmen betrachten wir die folgende Tabelle von partiellen Ableitungen

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(0, 0)$
$f$	$e^{xy} \cos(3y)$	1
$f_x$	$y e^{xy} \cos(3y)$	0
$f_y$	$x e^{xy} \cos(3y) - 3 e^{xy} \sin(3y)$	0
$f_{xx}$	$y^2 e^{xy} \cos(3y)$	0
$f_{yy}$	$x^2 e^{xy} \cos(3y) - 6 x e^{xy} \sin(3y) - 9 e^{xy} \cos(3y)$	-9
$f_{xy}$	$e^{xy} \cos(3y) + y x e^{xy} \cos(3y) - 3 y e^{xy} \sin(3y)$	1

Somit gilt die Approximation

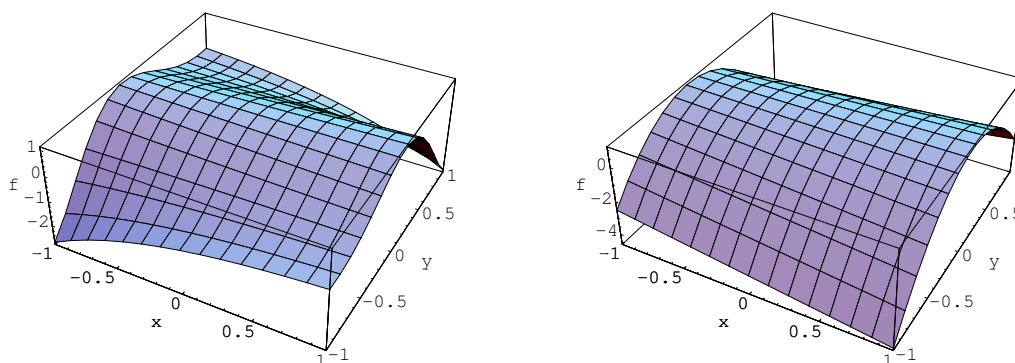


Abbildung 7.15: Graphen der Funktion  $f(x, y) = e^{xy} \cos(3y)$  und der Taylorapproximation zweiter Ordnung

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx 1 + \frac{2}{2} \Delta x \Delta y - \frac{9}{2} (\Delta y)^2$$

oder auch

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(3y) \approx 1 + xy - \frac{9}{2} y^2$$

wobei der Fehler von dritter Ordnung bezüglich  $x$  und  $y$  ist. Für diese Funktion gilt auch

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \quad \text{und} \quad H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

und die obige Approximation kann auch geschrieben werden als

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) \cdot H_f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} e^{xy} \cos(3y) &\approx 1 + (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2} (x, y) \cdot \begin{pmatrix} y \\ x - 9y \end{pmatrix} = 1 + xy - \frac{9}{2} y^2 \end{aligned}$$

Die Approximation ist rechts in Abbildung 7.15 zu sehen. ◇

Funktionen der Form

$$f(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$$

heissen auch **Flächen zweiter Ordnung in  $\mathbb{R}^3$** . Diese Definition ist analog zu Flächen erster Ordnung, die von der Form

$$f(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2$$

sind und genau den Ebenen entsprechen.

**7-57 Beispiel :** Um die Fläche

$$z = f(x, y) = x^y$$

in Punkt  $(2, 3, 2^3)$  möglichst gut durch eine

(a) Ebene

(b) Fläche zweiter Ordnung

zu approximieren verwendet man die Taylorapproximationen von erster (bzw. zweiter) Ordnung. Dazu muss man zuerst die partiellen Ableitungen bis und mit zweiter Ordnung bestimmen.

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(2, 3)$
$f$	$e^{y \ln x}$	8
$f_x$	$e^{y \ln x} \frac{y}{x}$	$8 \frac{3}{2}$
$f_y$	$e^{y \ln x} \ln x$	$8 \ln 2$
$f_{xx}$	$e^{y \ln x} \frac{y^2 - y}{x^2}$	$8 \frac{6}{4}$
$f_{yy}$	$e^{y \ln x} \ln^2 x$	$8 (\ln 2)^2$
$f_{xy}$	$e^{y \ln x} \left( \frac{y \ln x}{x} + \frac{1}{x} \right)$	$8 \left( \frac{3 \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \right)$

Somit gilt beim Punkt  $(2, 3)$

$$f(2, 3) = 8 \quad \text{und} \quad \nabla f(2, 3) = (12, 8 \ln 2)$$

und die Hesse'sche Matrix ist gegeben durch

$$H_f(2, 3) = \begin{bmatrix} 12 & 12 \ln 2 + 4 \\ 12 \ln 2 + 4 & 8(\ln 2)^2 \end{bmatrix}$$

(a) Die Approximation durch eine Ebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(2+x, 3+y) = (2+x)^{3+y} &\approx f(2, 3) + \nabla f(2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 8 + 12x + 8 \ln 2 y \end{aligned}$$

(b) Die Approximation durch eine Fläche zweiter Ordnung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (2+x)^{3+y} &\approx f(2, 3) + \nabla f(2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) \cdot H_f(2, 3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 8 + 12x + 8 \ln 2 y + 6x^2 + (12 \ln 2 + 4)xy + 4(\ln 2)^2 y^2 \end{aligned}$$

◇

## 7.4 Anwendungen

### 7.4.1 Extremalprobleme

Für Funktionen einer Variablen haben wir Ableitungen verwendet um Extrema zu finden. Hierbei sind wir auf das folgende Verhalten der Funktion  $f(x)$  beim Punkt  $x_0$  gestossen.

$f'(x_0) = 0$	$f$ kann ein Extremum bei $x_0$ haben notwendige Bedingung
$f'(x_0) \neq 0$	$f$ hat sicher kein Extremum bei $x_0$ hinreichende Bedingung
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$f$ hat ein Maximum bei $x_0$ hinreichende Bedingung
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$	$f$ hat ein Minimum bei $x_0$ hinreichende Bedingung
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$	$f$ kann bei $x_0$ ein Minimum, Maximum, oder auch einen Sattelpunkt haben

Nun versuchen wir dieses Resultat auf die Situation mehrerer unabhängiger Variablen zu übertragen.

#### 7–58 Theorem : (Notwendige Bedingung für ein Extremum)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{x}_0 \in D$  und  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Falls die Funktion  $f$  bei  $\vec{x}_0$  ein lokales Extremum hat, so gilt

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dieses Resultat sollte anschaulich sofort klar sein, da es der Bedingung einer horizontalen Tangentialebene entspricht. Die Funktion darf in keine Richtung ansteigen, also muss der Gradient ein Nullvektor sein.

**Beweis :** Der Beweis ist analog zum eindimensionalen Fall. Falls die Funktion bei  $\vec{x}_0$  ein lokales Maximum hat gilt  $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}_0 + t e_i)$  für genügend kleine Werte von  $t$ . Somit gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \underbrace{(f(\vec{x}_0 + t e_i) - f(\vec{x}_0))}_{\geq 0} \geq 0$$

und ebenso

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \underbrace{(f(\vec{x}_0 - t e_i) - f(\vec{x}_0))}_{\geq 0} \geq 0$$

Somit muss  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0) = 0$  gelten. Die Bedingung ist richtig für alle Koordinatenrichtungen  $i = 1, 2, \dots, n$  und somit sind alle Komponenten des Gradienten bei  $\vec{x}_0$  Null.  $\square$

**7-59 Beispiel :** Um die Minimalstelle der Funktion

$$f(x, y) = e^{-y^2+x} x$$

zu finden, müssen wir den Punkt mit horizontaler Tangentialebene berechnen (siehe Abbildung 7.16).

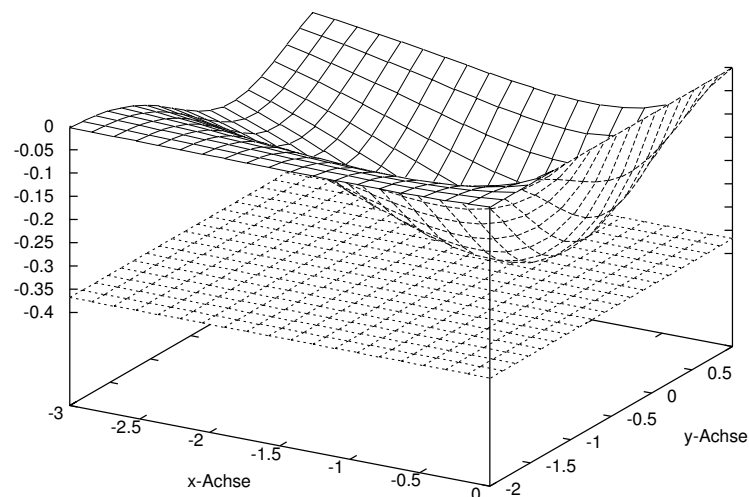


Abbildung 7.16: Der Graph von  $e^{-y^2+x} x$  und der Tangentialebene im Minimalpunkt

Das führt auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= e^{-y_0^2+x_0} (1+x_0) = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= -e^{-y_0^2+x_0} 2 y_0 x_0 = 0 \end{aligned}$$

mit der offensichtlichen Lösung  $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ . Die Funktion nimmt also ihren Minimalwert von  $-e^{-1}$  im Punkt  $(x, y) = (-1, 0)$  an.  $\diamond$

In der eindimensionalen Situation steckt im Vorzeichen der zweiten Ableitung Information über die Art des Extremums. Die Situation bei mehreren Variablen ist durchaus vergleichbar und wir werden den Fall von zwei Variablen sorgfältig durchdiskutieren. Dazu werden wir ein Lemma (Hilfsresultat) verwenden.

**7–60 Lemma :** Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  Konstanten und die Funktion  $f$  gegeben durch

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} b^2 - ac > 0 &\implies \text{die Funktion } f \text{ hat bei } (0, 0) \text{ einen Sattelpunkt} \\ b^2 - ac < 0 \quad \text{und} \quad a < 0 &\implies \text{die Funktion } f \text{ hat bei } (0, 0) \text{ ein Maximum} \\ b^2 - ac < 0 \quad \text{und} \quad a > 0 &\implies \text{die Funktion } f \text{ hat bei } (0, 0) \text{ ein Minimum} \end{aligned}$$

**Beweis :** Offensichtlich gilt

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

und somit ist das Vorzeichen der Funktionswerte zu untersuchen. Betrachte

$$f(x, y) = y^2 \left( a \left( \frac{x}{y} \right)^2 + 2b \frac{x}{y} + c \right) = y^2 (az^2 + 2bz + c) = y^2 g(z)$$

wobei  $z = x/y$ . Die Funktion  $g$  hat Nullstellen bei

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a} \left( -2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac} \right) = \frac{1}{a} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right)$$

- (a) Ist  $D = b^2 - ac > 0$ , so hat die Funktion  $g$  reelle Nullstellen und es gibt somit Bereiche von  $z = x/y$  auf denen  $f$  positiv ist und auch Bereiche auf denen  $f$  negativ ist. Beide Bereiche berühren den Ursprung in der  $xy$ -Ebene. Somit hat die Funktion  $f$  weder ein Maximum, noch ein Minimum.
- (b) Ist  $D = b^2 - ac < 0$ , so hat die Funktion  $g$  keine reelle Nullstellen und ist somit entweder positiv oder negativ. In diesem Falle müssen  $a$  und  $c$  das selbe Vorzeichen haben. Wegen  $g(0) = c$  entscheidet somit das Vorzeichen von  $c$  ob die Funktion  $f$  bei  $(0, 0)$  ein Maximum ( $c < 0$ ) oder ein Minimum ( $c > 0$ ) hat.

□

**7–61 Theorem :** (Hinreichende Bedingung für ein Extremum)

Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $(x_0, y_0) \in D$  und  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ . Weiter sei

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{und} \quad D = (f_{xy}(x_0, y_0))^2 - f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0)$$

Dann gilt

- (a) Ist  $D > 0$ , so hat die Funktion  $z = f(x, y)$  einen Sattelpunkt bei  $(x_0, y_0)$ .
- (b) Ist  $D < 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , so hat die Funktion  $z = f(x, y)$  ein lokales Maximum bei  $(x_0, y_0)$ .
- (c) Ist  $D < 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , so hat die Funktion  $z = f(x, y)$  ein lokales Minimum bei  $(x_0, y_0)$ .
- (d) Ist  $D = 0$ , kann die Funktion  $z = f(x, y)$  bei  $(x_0, y_0)$  ein lokales Minimum, Maximum oder auch einen Sattelpunkt haben.

**Beweis :** Der Beweis beruht auf der Taylorapproximation zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) \\ &\quad + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0, y_0) (\Delta y)^2) \\ &= f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0, y_0) (\Delta y)^2) \end{aligned}$$

und dem obigen Lemma mit  $a = f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $b = f_{xy}(x_0, y_0)$  und  $c = f_{yy}(x_0, y_0)$ . Ist  $D = 0$ , entscheiden die Terme höherer Ordnung über die Art des Punktes.  $\square$

**7-62 Beispiel :** Für die Funktion

$$z = f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x + 3y - 5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x + 4y - 2 \end{aligned}$$

und somit müssen bei einem Extremum die Gleichungen

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

erfüllt sein. Dieses lineare System von Gleichungen wird gelöst durch  $(x_0, y_0) = (2, -1)$ . Wegen

$$f_{xx} = 4, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = 3$$

gilt  $D = 3^2 - 4 \cdot 4 < 0$  und  $f_{xx} > 0$  und somit hat die Funktion bei  $(2, -1)$  ein lokales Minimum von  $f(2, -1) = 1$ . Dies wird bestätigt durch Abbildung 7.17.  $\diamond$

**7-63 Definition :** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Der Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  heisst **kritischer Punkt** der Funktion  $f$ , falls

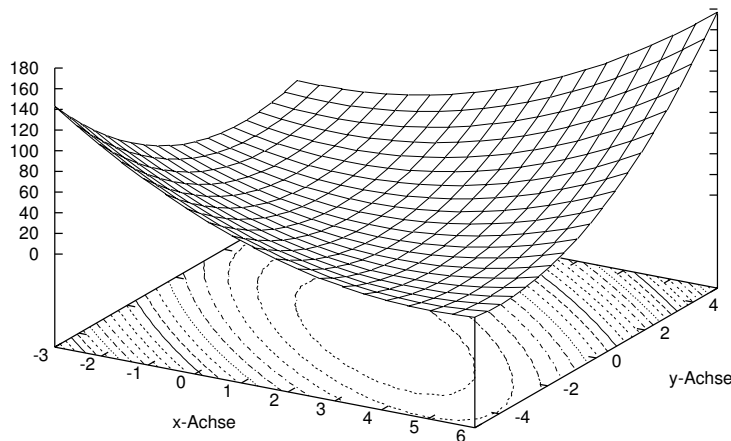
- $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$  oder
- $f$  ist nicht differenzierbar bei  $\vec{x}_0$ .

Gemäss der notwendigen Bedingung für Extrema sind kritische Punkte und Randpunkte von  $D$  Kandidaten für Extrempunkte der Funktion. Diese Situation entspricht genau dem eindimensionalen Fall. Wir können das folgende systematische Vorgehen zum Finden von Extremas einer Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

festlegen:

1. Bestimme den Definitionsbereich  $D$  und dessen Rand  $\partial D$ . Stelle sicher, dass die Funktion stetig ist.
2. Finde alle kritischen Punkte von  $f$  in  $D$  und klassifiziere sie.
3. Untersuche den Rand  $\partial D$  auf eventuelle Extrema.
4. Kombiniere die obigen Resultate und finde das globale Extremum.


 Abbildung 7.17: Der Graph von  $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$ 

**7–64 Beispiel :** Eine rechteckige, oben offene Schachtel der Höhe  $z$ , Breite  $x$  und Tiefe  $y$  muss so dimensioniert werden, dass bei gegebenem Volumen  $V$  die Fläche von Boden und Wänden möglichst klein wird.

**Lösung:** Es gilt

$$\begin{aligned} V &= xyz \\ A &= xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Da das Volumen fest vorgegeben ist, kann die Variable  $z$  durch  $z = V/(xy)$  eliminiert werden und es muss das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = xy + 2x \frac{V}{xy} + 2y \frac{V}{xy} = xy + 2 \frac{V}{y} + 2 \frac{V}{x}$$

gefunden werden. Der Definitionsbereich  $D$  dieser Funktion ist der erste Quadrant der  $xy$ -Ebene. Der Rand  $\partial D$  besteht aus den positiven  $x$ - und  $y$ -Halbachsen. Konvergiert  $(x, y)$  gegen diesen Rand, so konvergiert  $f(x, y)$  gegen  $+\infty$  und somit sicher nicht minimal. Die Bedingung  $\nabla f = \vec{0}$  wird hier zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Wir können mittels der ersten Gleichung  $y$  als Funktion von  $x$  schreiben und in der zweiten Gleichung einsetzen. Das führt auf

$$x - \frac{2V}{y^2} = x - \frac{2V}{(2V/x^2)^2} = x - \frac{x^4}{2V} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach  $x$  auflösen mit dem Resultat

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

Mittels elementarer Algebra erhält man nun

$$x = y = \sqrt[3]{2V} \quad \text{und} \quad z = \frac{2V}{2xy} = \frac{(\sqrt[3]{2V})^3}{2(\sqrt[3]{2V})^2} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} = \frac{x}{2}$$

Somit hat die optimale Schachtel einen quadratischen Grundriss und ist halb so hoch wie breit.  $\diamond$

**7–65 Beispiel :** Die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = x y^2 e^{-(x^2+y^2)/4}$$

sind bestimmt durch die Gleichungen

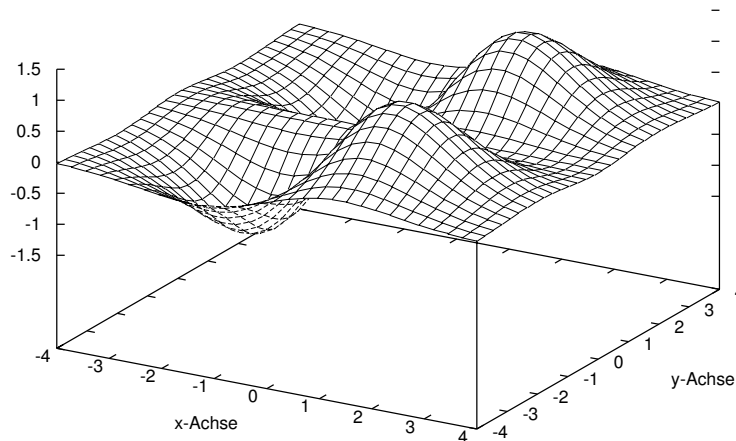


Abbildung 7.18: Der Graph einer Funktion mit vielen kritischen Punkten

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-(x^2+y^2)/4} (y^2 - x^2 y^2 / 2) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-(x^2+y^2)/4} (2xy - x y^3 / 2) \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion nie Null ist entspricht dies dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^2 (2 - x^2) &= 0 \\ xy (4 - y^2) &= 0 \end{aligned}$$

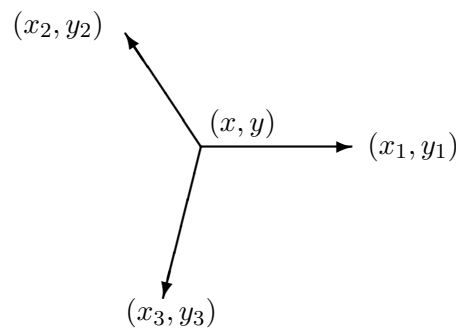
Die Lösungsmenge dieses Systems besteht aus verschiedenen Teilen.

1. Da für  $y = 0$  beide Gleichungen gelöst werden, besteht die  $x$ -Achse aus kritischen Punkten.
2. Für  $x = \pm\sqrt{2}$  ist die erste Gleichung gelöst und damit die zweite Gleichung auch richtig ist, muss  $y = \pm 2$  sein. Das ergibt vier weitere kritische Punkte. Durch Studium der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung kann man auch ohne Abbildung 7.18 entscheiden ob Maxima, Minima oder Sattelpunkte vorliegen.

◇

**7–66 Beispiel :** Gesucht wird der Punkt  $(x, y)$  in der Ebene, so dass die Summe der Abstände zu den festen Punkten  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  und  $(x_3, y_3)$  minimal wird.





**Lösung:** Die Quadrate der Abstände sind gegeben durch

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ d_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ d_3^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 \end{aligned}$$

und zu minimieren ist die Funktion

$$f(x, y) = d_1 + d_2 + d_3$$

Durch sorgfältiges Ableiten kommt man auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x - x_1}{d_1} + \frac{x - x_2}{d_2} + \frac{x - x_3}{d_3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y - y_1}{d_1} + \frac{y - y_2}{d_2} + \frac{y - y_3}{d_3} = 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{d_1} + \frac{x - x_2}{d_2} &= -\frac{x - x_3}{d_3} \\ \frac{y - y_1}{d_1} + \frac{y - y_2}{d_2} &= -\frac{y - y_3}{d_3} \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$1 + 1 + 2 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{d_1 d_2} + 2 \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{d_1 d_2} = 1$$

oder auch

$$\frac{1}{d_1 d_2} ((x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)) = \frac{-1}{2}$$

Verwendet man die Vektoren

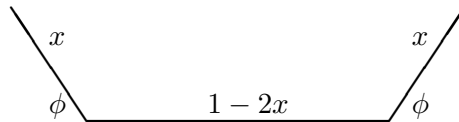
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix}$$

so gilt  $d_1 = \|\vec{v}_1\|$  und  $d_2 = \|\vec{v}_2\|$  und die obige Bedingung kann mit dem Skalarprodukt auch geschrieben werden als

$$\frac{\vec{v}_1^T \cdot \vec{v}_2}{d_1 d_2} = \frac{-1}{2}$$

Somit muss der von  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  eingeschlossene Winkel  $120^\circ$  sein. Mit dem selben Rechenweg zeigt man, dass auch die beiden anderen Winkel je  $120^\circ$  sein müssen.  $\diamond$

**7–67 Beispiel :** Bei einem sehr langen Blech der Breite 1 soll auf beiden Seiten ein Stück der Länge  $x$  um einen Winkel  $\phi$  nach oben gebogen werden, sodass die Querschnittsfläche  $A$  für den zu bildenden Kanal möglichst gross wird. Zu bestimmen sind  $x$  und  $\phi$ .



**Lösung:** Die zu optimierende Fläche besteht aus einem Rechteck und zwei Dreiecken und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= (1 - 2x) x \sin \phi + 2 \frac{1}{2} x \sin \phi x \cos \phi \\ &= x \sin \phi + x^2 (\sin \phi \cos \phi - 2 \sin \phi) \end{aligned}$$

wobei der Bereich  $0 < x < 1/2$  und  $0 < \phi < \pi$  zu untersuchen ist. Diese Funktion ist überall oft differenzierbar. Wir untersuchen zuerst die Nullstellen des Gradienten als Kandidaten für Extrema.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial A}{\partial x} &= \sin \phi + 2x (\sin \phi \cos \phi - 2 \sin \phi) \\ 0 = \frac{\partial A}{\partial \phi} &= x \cos \phi + x^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi - 2 \cos \phi) \end{aligned}$$

Ohne die relevante Lösungsmenge zu ändern darf die erste Gleichung durch  $\sin \phi$  dividiert werden und die zweite durch  $x$  mit den neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + 2x (\cos \phi - 2) &= 0 \\ \cos \phi + x (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi - 2 \cos \phi) &= 0 \end{aligned}$$

Hier führen wir die neue Variable  $z = \cos \phi$  ein und verwenden  $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = 1 - z^2$  um zum nichtlinearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + 2x (z - 2) &= 0 \\ z + x (2z^2 - 1 - 2z) &= 0 \end{aligned}$$

zu gelangen. Hier können wir die erste Gleichung nach  $x = 1/(2(2 - z))$  auflösen und in der zweiten Gleichung einsetzen mit dem Ergebnis

$$z + x (2z^2 - 1 - 2z) = z + \frac{1}{2(2 - z)} (2z^2 - 1 - 2z) = 0$$

Da  $z < 1$  dürfen wir diese Gleichung mit  $2(2 - z)$  multiplizieren und erhalten

$$2(2 - z)z + 2z^2 - 1 - 2z = 2z - 1 = 0$$

Somit muss  $z = \cos \phi = 1/2$  sein und  $\phi = \pi/3 = 60^\circ$ . Daraus folgt sofort  $x = 1/3$ .

Der Rand des Definitionsbereichs besteht aus vier Teilen

$$\begin{aligned} \phi = 0 & \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ \phi = \pi & \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi & \quad \text{und} \quad x = 0 \\ 0 \leq \phi \leq \pi & \quad \text{und} \quad x = 1/2 \end{aligned}$$

Entlang der ersten drei Teilstücke ist die Funktion  $A(x, \phi) = 0$  und somit sicher nicht maximal. Entlang der vierten Kante gilt für  $0 < \phi < \pi$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sin \phi (\cos \phi - 1) < 0$$

Somit nimmt die Funktion zu falls wir uns in den Definitivsbereich hineinbewegen, d.h. falls  $x$  kleiner gemacht wird. Das Maximum wird also auch nicht auf dem vierten Teilstück des Randes angenommen. Somit wird der maximale Wert der Fläche  $A$  angenommen bei

$$x = 1/3 \quad \text{und} \quad \phi = \pi/3 = 60^\circ$$

◇

### 7.4.2 Das Differential, lineare Approximationen und Fehlerrechnung

In diesem Abschnitt werden drei eng verwandte Anwendungen der Differentialrechnung vorgestellt. Die Notationen sind sehr ähnlich, manchmal sogar identisch bei verschiedener Bedeutung. Bei einem konkreten Beispiel muss zuerst abgeklärt werden um welchen Typ Anwendung es sich handelt.

#### Das Differential

Für oft differenzierbare Funktionen einer Variablen gilt

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x - f(x) = f'(x) \Delta x$$

oder etwas kürzer

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

Hierbei wurde die Differenz mittels der richtigen (nichtlinearen) Funktion  $f$  bestimmt. Ersetzt man die Kurve durch die Tangente im Punkt  $(x, f(x))$  und  $\Delta y$  durch die Differenz  $dy$  der Werte der Tangente, so gilt

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x \\ dy &= f'(x) dx \\ dy &\approx \Delta y \quad \text{falls } dx \text{ genügend klein} \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $dy = f'(x) dx$  heisst auch **Differential** der Funktion  $y = f(x)$ .

Für Funktionen mehrerer Variablen kann man die selben Begriffe einführen. Sei also  $z = f(x, y)$  und

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &\approx \nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \end{aligned}$$

wobei wir die Approximation der Fläche  $z = f(x, y)$  durch die Tangentialebene im Punkt  $(x, y, f(x, y))$  verwendet haben. Das **Differential** der Funktion  $f(x, y)$  ist nun charakterisiert durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x \\ dy &= \Delta y \\ df = dz &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ dz &\approx \Delta z \quad \text{falls } dx \text{ und } dy \text{ genügend klein} \end{aligned}$$

**7–68 Beispiel :** Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = e^x \sin(2y)$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin(2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 e^x \cos(2y)\end{aligned}$$

und somit ist das Differential gegeben durch

$$df = e^x \sin(2y) dx + 2 e^x \cos(2y) dy$$

◇

**7–69 Beispiel :** Für das Volumen eines Quaders gilt

$$V = x y z$$

Hieraus kann man das totale Differential bestimmen

$$dV = y z dx + x z dy + x y dz$$

Dies sollte verglichen werden mit der exakten Differenz

$$\begin{aligned}\Delta V &= (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) - x y z \\ &= y z \Delta x + x z \Delta y + x y \Delta z \\ &\quad + x \Delta y \Delta z + y \Delta x \Delta z + z \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

Es sollte klar sein, dass für kleine Werte von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  die Approximation  $\Delta V \approx dV$  gut ist.

◇

### Fehlerrechnung, Abschätzen des maximalen Fehlers mittels einer linearen Approximation

Eine sehr wichtige Anwendung der Differentiale (oder der Taylorapproximation erster Ordnung) ist die **Fehlerrechnung**. Hierzu verwenden wir die folgenden Notationen

$$\begin{aligned}X &= \text{wahrer Wert einer zu messenden Grösse} \\ x &= \text{gemessener Wert einer zu messenden Grösse} \\ \varepsilon = x - X &= \text{wahrer Fehler der zu messenden Grösse} \\ \Delta x &= \text{geschätzter Wert für } \varepsilon\end{aligned}$$

Man schreibt  $X = x \pm \Delta x$  falls  $x - |\Delta x| \leq X \leq x + |\Delta x|$ . Es sind zwei Arten von Fehlern zu unterscheiden

$$\begin{aligned}\Delta x &= \text{absoluter Fehler} \\ \frac{\Delta x}{x} &= \text{relativer Fehler}\end{aligned}$$

Nun ist das folgende Grundproblem zu betrachten: eine Grösse  $Y$  kann nicht direkt gemessen werden, aber aus den messbaren Grössen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  kann mit der Beziehung

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

die Grösse berechnet werden. Die Grössen  $X_i$  können leider nicht exakt gemessen werden, sondern sind durch die fehlerbehafteten Messungen  $X_i = x_i \pm \Delta x_i$  gegeben. Offensichtlich liefert

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eine Schätzung für den wahren Wert  $Y$ . Nun ist der Fehler  $\Delta y$  zu finden. Hierzu bestimmt man das Differential  $dy$  und „hofft“ auf die Approximation  $\Delta y \approx dy$ . Das führt auf

$$\begin{aligned} dy &= \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

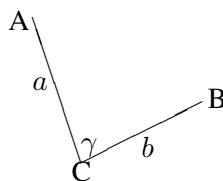
oder auch

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Da wir in den Beziehungen  $X_i = x_i \pm \Delta x_i$  keine Information über das Vorzeichen der Messfehler haben, können wir aus der obigen Beziehung mittels  $dx_i = \Delta x_i$  nur den möglichen Maximalfehler abschätzen durch

$$|\Delta y| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|$$

**7-70 Beispiel :** Von einem Punkt  $C$  aus misst man die Abstände  $a$  und  $b$  zu Punkten  $A$  und  $B$ . Der Winkel zwischen den Verbindungslinien sei durch  $\gamma$  gegeben. Zu bestimmen ist der Abstand  $c$  der Punkte  $A$  und  $B$ .



$$\begin{aligned} a &= 364.76 \text{ m} \pm 5 \text{ cm} \\ b &= 402.35 \text{ m} \pm 5 \text{ cm} \\ \gamma &= 68^\circ 14' \pm 1' \end{aligned}$$

**Lösung:** Der Cosinussatz impliziert

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

und somit

$$c = f(a, b, \gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Durch einsetzen der Werte von  $a$ ,  $b$  und  $\gamma = (68 + \frac{14}{60}) \frac{\pi}{180}$  erhalten wir leicht

$$c = 431.38 \text{ m}$$

Nun geht es darum den Fehler zu finden. Dazu sind die partiellen Ableitungen von  $f$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{a - b \cos \gamma}{c} \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{b - a \cos \gamma}{c} \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= \frac{ab \sin \gamma}{c} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\Delta c| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \gamma} \Delta \gamma \right| \\ &= \left| \frac{a - b \cos \gamma}{c} \Delta a \right| + \left| \frac{b - a \cos \gamma}{c} \Delta b \right| + \left| \frac{ab \sin \gamma}{c} \Delta \gamma \right| \end{aligned}$$

Durch einsetzen von  $\Delta a = \Delta b = 0.05 \text{ m}$  und  $\Delta \gamma = \frac{\pi}{180 \cdot 60}$  erhält man

$$|\Delta c| \leq 0.15 \text{ m}$$

und somit

$$c = 431.38 \text{ m} \pm 0.15 \text{ m}$$

◇

**7-71 Beispiel :** Aus einer Messung der Stromes  $I = (15 \pm 0.3) \text{ A}$  und der Spannung  $U = (110 \pm 2) \text{ V}$  soll mittels des Ohmschen Gesetzes der Widerstand  $R$  und der maximale relative Fehler bestimmt werden.

**Lösung:** Wegen  $U = RI$  gilt

$$R = \frac{U}{I} = f(U, I)$$

und somit  $R = 7.3 \Omega$ . Für den Fehler gilt

$$|\Delta R| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial I} \Delta I \right| = \left| \frac{1}{I} \Delta U \right| + \left| \frac{-U}{I^2} \Delta I \right|$$

Für den maximalen relativen Fehler haben wir also

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| = \frac{I}{U} |\Delta R| \leq \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right| = \frac{2}{110} + \frac{0.3}{15} \approx 0.04$$

Der maximale absolute Fehler ist gegeben durch  $0.04 \cdot 7.3 \Omega \approx 0.3 \Omega$ .

◇

**7-72 Beispiel :** Für ein Pendel der Länge  $l = 118.5 \text{ cm}$  und Schwingungsdauer  $T = 2.180 \text{ s}$  gilt die Beziehung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Somit kann die Gravitationskonstante  $g$  bestimmt werden. Wie genau müssen  $l$  und  $T$  gemessen werden, damit  $\Delta g \leq 1 \text{ cm/s}^2$ ?

**Lösung:** Durch Auflösen der obigen Gleichung erhält man

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = f(l, T)$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial l} = 4\pi^2 \frac{1}{T^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -8\pi^2 \frac{l}{T^3}$$

folgt sofort

$$\Delta g \leq \left| \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right| = \left| \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l \right| + \left| \frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T \right|$$

Verteilt man den tolerierten Fehler von  $0.01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  gleichmässig auf die beiden Beiträge, so sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l &\leq 0.005 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \frac{8\pi^2 l}{T^3} \Delta T &\leq 0.005 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

zu erfüllen. Dies führt auf die Genauigkeitsanforderungen

$$\Delta l \leq 0.0006 \text{ m} \quad \text{und} \quad \Delta T \leq 0.00055 \text{ s}$$

◇

### Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

Bei Messungen sind die Einzelresultate immer mit Messunsicherheiten behaftet. Oft nimmt man an, dass die gemessenen Werte durch eine Normalverteilung um den wahren Wert gegeben sind. Eine solche Verteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  ist beschrieben durch die kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right)$$

Die zu untersuchende Grösse  $y$  hängt von den gemessenen Grössen  $x_i$ . Die Abhängigkeit sei beschrieben durch eine Funktion

$$y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Nun muss mit Hilfe der Standardabweichungen  $\sigma_i$  der Grössen  $x_i$  die Standardabweichung  $\sigma_y$  geschätzt werden. Als Hilfsmittel wird auch hier eine lineare Approximation

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

eingesetzt, die nur gerechtfertigt ist, falls  $\sigma_i$  genügen klein ist.

Mit Hilfe von mühsamen Integralberechnungen<sup>2</sup> kann die Varianz einer Summe von statistisch unabhängigen, normalverteilten Grössen bestimmt werden.

$$V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2)$$

<sup>2</sup> Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$ , dass die Summe  $x_1 + x_2$  bei  $\mu_1 + \mu_2 + x$  liegt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(\mu_1 + \mu_2 + x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\mu_1 + x - z) \cdot p_2(\mu_2 + z) dz \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x - z}{\sigma_1} \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{\sigma_2} \right)^2 \right) dz \end{aligned}$$

Um das Integral zu bestimmen sind die Exponenten etwas genauer anzusehen.

$$\begin{aligned} \text{sum} &= \left( \frac{x - z}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{z}{\sigma_2} \right)^2 \\ \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdot \text{sum} &= \sigma_2^2 (x - z)^2 + \sigma_1^2 z^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) z^2 - 2 \sigma_2^2 x z + \sigma_2^2 x^2 \\ &= \left( (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) z^2 - 2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \frac{\sigma_2^2 x}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} z + \frac{(\sigma_2^2 x)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) + \sigma_2^2 x^2 - \frac{(\sigma_2^2 x)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \text{sum} &= \left( \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1 \sigma_2} z - \frac{\sigma_2 x}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 + \frac{x^2}{\sigma_1^2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} z^2 \right) dz = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

impliziert nun

$$\begin{aligned} p(\mu_1 + \mu_2 + x) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Somit ist die Verteilungsfunktion der Summe  $x = x_1 + x_2$  von zwei normalverteilten Variablen gegeben durch

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 \right)$$

d.h. eine Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu_1 + \mu_2$  und Standardabweichung  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

$$\begin{aligned} V(\alpha_1 x_1) &= \alpha_1^2 V(x_1) \\ V\left(\sum \alpha_i x_i\right) &= \sum \alpha_i^2 V(x_i) \end{aligned}$$

Hängt nun eine Grösse  $y$  von  $\vec{x}$  ab und sind die Varianzen der unabhängigen Grössen  $x_i$  geschätzt durch  $V_i = V(x_i)$  so kann die Varianz der abhängigen Grösse  $y$  wegen

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

geschätzt werden durch

$$V(y) \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 V(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 V(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 V(x_n)$$

Dieses **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss** kann auch für die Standardabweichungen formuliert werden durch

$$\sigma_y \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2}$$

**7-73 Beispiel :** Im Beispiel 7-71 können die Toleranzangaben für Strom ( $I = (15 \pm 0.3) A$ ) und Spannung ( $U = (110 \pm 2) V$ ) auch die Standardabweichungen repräsentieren. Nun soll mittels des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes die Standardabweichung des Widerstandes  $R$  bestimmt werden.

**Lösung:** Wegen  $U = RI$  gilt

$$R = \frac{U}{I} = f(U, I)$$

und somit  $R = 7.3 \Omega$ . Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{-U}{I^2}$$

und somit

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \sigma_U^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 = \left(\frac{1}{I}\right)^2 \sigma_U^2 + \left(\frac{-U}{I^2}\right)^2 \sigma_I^2 \approx 0.04$$

Das führt auf eine Standardabweichung von  $\sigma_R \approx 0.2 \Omega$  für den Widerstand.

Dieser Wert ist kleiner als der maximale absolute Fehler in Beispiel 7-71. Die Berechnungen mittels Gauss'schem Fehlerfortpflanzungsgesetz berücksichtigen, dass die verschiedenen Fehlerbeiträge in verschiedene Richtungen gehen können und sich somit teilweise kompensieren. Es ist zu beachten, dass eine statistische Aussage gemacht und somit der Fehler auch grösser als die berechnete Standardabweichung sein kann.  $\diamond$

### 7.4.3 Lösen von mehreren nichtlinearen Gleichungen (Newton)

#### Repetition: das Verfahren von Newton um eine nichtlineare Gleichung zu lösen

In einem früheren Kapitel haben wir Nullstellen einer nichtlinearen Funktion gesucht, d.h. Lösungen von Gleichungen

$$f(x) = 0$$

Dabei sind wir davon ausgegangen bereits eine gute Näherung  $x_0$  zu kennen. Dann ersetzt man die Funktion  $f(x)$  durch die Gleichung der Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  an die Kurve und löst deshalb

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0 \quad .$$



Löst man diese Gleichung auf nach  $x = x_0 + \Delta x$ , so führt das zu einer (hoffentlich) besseren Näherung

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad .$$

Das führt zu der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad .$$

Dies führt zu einer Folge von Werten  $x_n$  und man hofft, dass  $x_n \rightarrow z$  mit  $f(z) = 0$ . Das folgende Theorem zeigt, dass dieses Verfahren oft zum Erfolg führt, d.h. zu einer Lösung der Gleichung.

**7–74 Theorem :** Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $f(z) = 0$ . Ist  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $z$  und ist  $x_0$  nahe genug bei  $z$  so konvergiert die induktiv definierte Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

gegen die Lösung  $z$  der Gleichung  $f(x) = 0$ .

Ist die Funktion zwei mal stetig differenzierbar (d.h.  $f'(x)$  ist stetig differenzierbar), so konvergiert das Verfahren quadratisch, d.h. die Anzahl der exakten Stellen wird bei jedem Schritt verdoppelt.

### Newton–Verfahren für zwei Gleichungen

Gesucht sind Lösungen eines Systems von zwei Gleichungen in zwei Unbekannten

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad .$$

Statt der ‘richtigen’ Funktionen untersuchen wir die linearen Approximationen

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \end{cases}$$

Nun geht es darum, zu gegebenen  $x_0$  und  $y_0$ , die passenden  $\Delta x$  und  $\Delta y$  zu finden, sodass

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = 0 \\ g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y = 0 \end{cases}$$

Um Schreibarbeit zu sparen wird oft die folgende Notation verwendet:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Somit können die approximativen Gleichungen geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die  $2 \times 2$  Matrix  $\mathbf{A}$  gegeben ist durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist invertierbar, falls die Determinante von Null verschieden ist und in jeder guten Formelsammlung findet man das Resultat

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{f_x g_y - g_x f_y} \begin{bmatrix} g_y & -f_y \\ -g_x & f_x \end{bmatrix}$$

Falls  $\mathbf{A}$  invertierbar ist, kann dieses Gleichungssystem aufgelöst werden nach  $\Delta x$  und  $\Delta y$  durch

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Nun kann genauso wie im Falle von einer Gleichung ein iteratives Verfahren aufgestellt werden. Dadurch erhält man das Iterationsverfahren von Newton zur Lösung von zwei Gleichungen in zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

wobei die partiellen Ableitungen von  $f$  und  $g$  in der Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  (bzw.  $\mathbf{A}$ ) für Argumente  $x_n$  und  $y_n$  ausgewertet werden müssen.

Diese Formel sollte in mit der üblichen Iterationsformel von Newton für das Lösen einer Gleichung verglichen werden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n)$$

Das entsprechende Theorem ist ebenfalls sehr ähnlich.

**7-75 Theorem :** Seien  $f$  und  $g$  zwei stetig differenzierbare Funktionen mit  $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$  und  $g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ . Gilt

$$f_x(\hat{x}, \hat{y}) g_y(\hat{x}, \hat{y}) - g_x(\hat{x}, \hat{y}) f_y(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0$$

und ist der Startpunkt  $(x_0, y_0)$  nahe genug bei  $(\hat{x}, \hat{y})$ , so konvergiert die durch das Newton-Verfahren entstehende Folge  $(x_n, y_n)$  gegen  $(\hat{x}, \hat{y})$ , d.h. die Lösung der beiden Gleichungen

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Falls die Funktionen zwei mal stetig differenzierbar sind und die Matrix  $\mathbf{A}$  invertierbar ist, so konvergiert das Verfahren quadratisch. Somit ist das Verfahren ausserordentlich schnell, falls es anwendbar ist.

Das Newton Verfahren hat einen gravierenden Nachteil: eine erste Schätzung der Lösung muss bereits bekannt sein. Ansonsten kann es sein, dass das Verfahren nicht konvergiert, oder nicht gegen die gewünschte Lösung. Beispiele hierzu wurden beim Newton-Verfahren für eine Gleichung mit einer Unbekannten ausführlich diskutiert. Zusammenfassend kann gesagt werden:

Das Newton Verfahren ist ungeeignet Lösungen zu suchen, aber sehr effizient beim genauen Berechnen der Nullstellen.

**7-76 Beispiel :** Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

$$4x^4 + y^2 = 1$$

mit den geschätzten Startwerten  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 1$ . Nun sollen einige Schritte des Verfahrens von Newton angewandt werden.

Mit  $f_1(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$  und  $f_2(x, y) = 4x^4 + y^2 - 1$  finden wir die Matrix der partiellen Ableitungen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 8y \\ 16x^3 & 2y \end{bmatrix}$$

und für  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  finden wir die Werte  $f_1(x_0, y_0) = 4$  und  $f_2(x_0, y_0) = 4$ . Daraus erzeugen wir ein lineares Gleichungssystem für  $x_1$  und  $y_1$ .

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.8064516 \\ 0.5483870 \end{pmatrix}$$

Das ist das Resultat des ersten Newton Schrittes.

Für den nächsten Schritt verwenden wir  $f_1(x_1, y_1) \approx 0.853$  und  $f_2(x_1, y_1) \approx 0.993$  und erhalten ein lineares Gleichungssystem für  $x_2$  und  $y_2$ .

$$\begin{pmatrix} 0.853 \\ 0.993 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1.6129 & 4.3871 \\ 8.3918 & 1.0968 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - 0.806 \\ y_2 - 0.548 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese und ähnliche Rechnungen führen auf

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = 1 \\ x_1 = 0.8064516 & y_1 = 0.5483870 \\ x_2 = 0.7088993 & y_2 = 0.3897547 \\ x_3 = 0.6837299 & y_3 = 0.3658653 \\ x_4 = 0.6821996 & y_4 = 0.3655839 \\ \vdots & \vdots \\ x_7 = 0.6821941 & y_7 = 0.3655855 \end{array}$$

Wir beobachten eine sehr rasche Konvergenz der Lösung.

Der obige Algorithmus kann auch in Octave implementiert werden. Die unten-stehende Funktion `NewtonSolve()` benötigt den Startwert  $x_0$ , die Funktionen  $f$  und  $DF$  (für die partiellen Ableitungen) als Argument und berechnet eine Lösung des Gleichungssystems  $f(\vec{x}) = \vec{0}$ . Die gewünschte Genauigkeit kann als viertes Argument übergeben werden, ansonsten wird  $10^{-1}$  verwendet. Es werden maximal 20 Iterationsschritte ausgeführt. Als Resultat wird die Lösung und die Anzahl der Iterationsschritte zurückgegeben.

**NewtonSolve.m**

```
function [x,counter] = NewtonSolve(f,Df,x0,atol)

if nargin<4 atol = 1e-10; endif;
maxit = 20; counter = 0; x = x0;
do
    xOld = x;
    x = x-feval(Df,x)\feval(f,x);
    counter++;
until ((counter>=maxit) || (norm(xOld-x)<atol))
endfunction
```

Das obige Beispielproblem kann nun gelöst werden durch

#### Octave

```
%% script file to solve a simple system of equations
x0 = [1;1];

function y = F(x)
    y = [x(1)^2+4*x(2)^2-1;
         4*x(1)^4 + x(2)^2-1];
endfunction

function dy = DF(x)
    dy = [2*x(1) , 8*x(2);
          16*x(1)^3, 2*x(2)];
endfunction

[x,counter] = NewtonSolve('F','DF',x0)
```



**Bemerkung:** Die obige Idee und Rechnungen lassen sich ohne grössere Schwierigkeiten auf mehr als zwei Gleichungen und Variablen übertragen. Ein Beispiel finden Sie in der Lösung von Aufgabe 7-54.

**Bemerkung:** Wird das Verfahren auf ein lineares, eindeutig lösbares Gleichungssystem angewandt, so ergibt sich nach dem ersten Schritt die exakte Lösung, unabhängig vom gewählten Anfangswert. Warum?

**Bemerkung:** Um die verlangten Rechenschritte ausführen zu können, muss man die entsprechenden partiellen Ableitungen bestimmen, in die Formeln einsetzen und die Matrix invertieren, bzw. das lineare Gleichungssystem lösen. Alle diese Schritte können modernen Rechnern (auch Taschenrechnern) übergeben werden. Nur die Wahl des Anfangswertes verlangt meist doch noch etwas Denkarbeit.

Die oben vorgestellte Methode lässt sich sehr gut in *Mathematica* programmieren. Mit wenigen Zeilen lassen sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0 \\ f_2(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

approximativ auflösen nach  $x$  und  $y$ , wobei eine Startnäherung eingegeben werden muss. Die ersten Zeilen Code beinhalten die Formeln für die benötigten Ableitungen und für einen Schritt des Newton-Verfahrens.

#### Mathematica

```
df[x_,y_] = {{D[f1[x,y],x],D[f1[x,y],y]},
              {D[f2[x,y],x],D[f2[x,y],y]}};
zeroSearchStep[x_,y_] = {x,y} - Inverse[df[x,y]] . {f1[x,y],f2[x,y]} ;
```

Betrachtet man die Beispielgleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) &= x - \sin y = 0 \end{aligned}$$

so können approximative Lösungen nun leicht bestimmt werden.

#### Mathematica

```
f1[x_, y_] = x^2 + y^2 - 1.0;
f2[x_, y_] = x - Sin[y];
{xi, yi} = {0.50, 0.10} ;
Print[{0, N[{xi, yi}, 20]}] ;
Do[Print[{i, {xi, yi} = N[zeroSearchStep[xi, yi], 20]}], {i, 7}]
.
```

```
{0, {0.5, 0.1}}
{1, {1.049177805989002, 1.054110970054991}}
{2, {0.7383249480680551, 0.7886530710525955}}
{3, {0.6759171780064423, 0.7411398038178688}}
{4, {0.6736157174035347, 0.7390882024872592}}
{5, {0.6736120291919889, 0.7390851332227394}}
{6, {0.6736120291832149, 0.7390851332151608}}
{7, {0.6736120291832149, 0.7390851332151608}}
```

Beachte, dass durch eine andere Wahl der Anfangswerte auch eine andere Lösung des Systems gefunden wird.

#### Mathematica

```
{xi, yi} = {-0.50, 0.10} ;
Print[{0, N[{xi, yi}, 20]}] ;
Do[Print[{i, {xi, yi} = N[zeroSearchStep[xi, yi], 10]}], {i, 7}]
.
```

```
{0, {-0.5, 0.1}}
{1, {-1.577063244, -1.585316222}}
{2, {-1.010023345, -0.8877139389}}
{3, {-0.7063763008, -0.7779927889}}
{4, {-0.6746496052, -0.7398058757}}
{5, {-0.6736126098, -0.7390856824}}
{6, {-0.6736120292, -0.7390851332}}
{7, {-0.6736120292, -0.7390851332}}
```

Das obige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) &= x - \sin y = 0 \end{aligned}$$

kann auch mit *Octave* oder *MATLAB* gelöst werden mit Hilfe des Befehls `fsolve()`. Dazu muss zuerst die Funktion definiert werden und dann der Funktionsname mit dem Startwert als Parameter dem Befehl `fsolve()` übergeben werden.

#### Octave

```
1; %% assure script file
function y = ff(x)
    y = [x(1)^2 + x(2)^2 - 1; x(1) - sin(x(2))];
endfunction
[Y, FVEC, INFO, OUTPUT] = fsolve('ff', [0.5; 0.1])
```

Da Octave **nicht** symbolisch ableiten kann müssen die Ableitung mit Hilfe von finiten Differenzen bestimmt werden. Das verlangt einige zusätzliche Funktionsauswertungen. Im obigen Beispiel werden für 8 Iterationsschritte 20 Funktionsauswertungen benötigt. Alternativ kann man die Ableitungsformeln auskodieren und anschliessend verwenden.

#### Octave

```
1; %% assure script file
function [y,Dy] = ff2(x)
    y = [x(1)^2 + x(2)^2 - 1; x(1) - sin(x(2))];
    Dy = [2*x(1), 2*x(2); 1, -cos(x(2))];
endfunction

options=optimset('Jacobian','on')
[Y, FVEC, INFO, OUTPUT, FJAC]= fsolve('ff2',[0.5;0.1], options)
```

Nun werde für die 8 Iterationsschritte nur noch 11 Funktionsasuwertungen verwendet.

### Extremalprobleme

Eine offensichtliche Anwendung des obigen Verfahrens liegt in der Bestimmung von Extrema. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion  $f(x, y)$  ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Matrix  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2} \begin{bmatrix} f_{yy} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & f_{xx} \end{bmatrix}$$

und für die Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_n, y_n) \\ f_y(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Ist die Funktion mindestens zwei mal differenzierbar, die Matrix  $\mathbf{A}$  invertierbar und liegen die gewählten Startwerte genügend nahe bei der tatsächlichen Lösung, so wird das Verfahren nach wenigen Schritten eine sehr gute Approximation der Lösung liefern.

Es muss unbedingt herausgestrichen werden, dass dieses Verfahren nur Nullstellen des Gradienten der Funktion bestimmt. Insbesondere sind der Rand des zu untersuchenden Definitionsbereichs und Stellen, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist separat untersucht werden. Ebenso ist separat zu untersuchen, ob ein lokales Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Diese Probleme sind unabhängig von der hier vorgestellten Rechenmethode zu lösen.

Das Rechenverfahren lässt sich auch leicht in *Mathematica* programmieren. Zuerst sollte aber ein Beispiel vollständig von Hand durchgerechnet werden.

**7-77 Beispiel :** Finde den Punkt  $(x, y, z)$  auf der Fläche  $z = x^2 + 2y^2$  der dem Punkt  $(3, 2, 1)$  am nächsten ist.

**Lösung:** Die folgenden Schritte sollten ausgeführt werden.

1. Zeichne die Fläche und mache basierend auf der Figur eine erste grobe Schätzung für den gesuchten Punkt.

2. Zeige, dass grosse Werte von  $(x, y)$  sicher nicht in Frage kommen. Somit muss der gesuchte Punkt ein kritischer Punkt der Distanzfunktion sein.
3. Bestimme die Distanz eines Punktes auf der Fläche vom Punkt  $(3, 2, 1)$  und stelle dann die Gleichungen  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  auf.
4. Löse die Gleichungen approximativ mit dem Newton Verfahren.
5. Verifikation der Lösung.

Nun zur Umsetzung dieses Planes in konkrete Rechnungen.

1. Die Fläche entspricht einem nach oben geöffneten Rotationsparaboloid, welches in  $y$ -Richtung mit den Faktor  $\sqrt{2}$  gestaucht wurde. Als eine erste Schätzung des gewünschten Punktes kann  $(1, 1, 3)$ <sup>3</sup> verwendet werden.

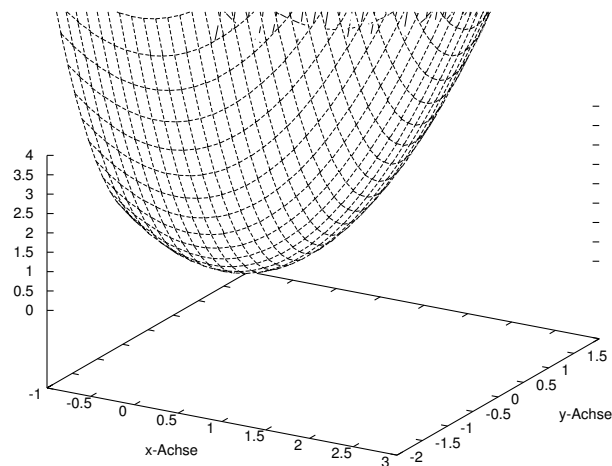


Abbildung 7.19: Der Graph der Funktion  $z = x^2 + 2y^2$

2. Gilt  $|x| \geq 10$  oder  $|y| \geq 10$ , so ist  $z \geq 100$  und somit der Abstand zum Punkt  $(3, 2, 1)$  sicher grösser als 50. Somit können wir uns problemlos auf den beschränkten, abgeschlossenen Bereich  $D = [-10, 10] \times [-10, 10]$  für  $(x, y)$  beschränken und wir wissen auch, dass die minimale Distanz an einer Stelle  $(x, y)$  im Inneren von  $D$  angenommen wird, nicht auf dem Rand von  $D$  (Satz vom Maximum).
3. Wir müssen die Länge des Differenzenvektors

$$(x - 3, y - 2, z - 1)$$

untersuchen. Wegen  $z = x^2 + 2y^2$  ergibt sich

$$d(x, y) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (x^2 + 2y^2 - 1)^2}$$

und wir müssen das Minimum dieser Funktion suchen. Hat  $d(x, y)$  ein Minimum an einer Stelle  $(x, y)$ , so ist auch das Quadrat hiervon minimal. Somit ersetzen wir die obige Funktion  $d$  durch die einfachere Funktion  $f$

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (x^2 + 2y^2 - 1)^2$$

<sup>3</sup>Der Schätzwert  $(2, 0, 4)$  führt zu einem speziell einfach zu lösenden Gleichungssystem

und suchen das Minimum hiervon. Die Berechnung der Gradienten von  $f$  ist einfach und es ergeben sich die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2(x - 3) + 2(x^2 + 2y^2 - 1)2x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2(y - 2) + 2(x^2 + 2y^2 - 1)4y = 0 \end{aligned}$$

4. Diese Gleichungen lassen sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2x + 8xy^2 - 6 &= 0 \\ 8x^2y + 16y^3 - 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Nun muss dieses System von nichtlinearen Gleichungen gelöst werden. Dazu benötigt man die Matrix

$$\mathbf{A}(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 + 8y^2 & 16xy \\ 16xy & 8x^2 + 48y^2 - 6 \end{bmatrix}$$

Als ersten Wert für  $(x, y)$  verwenden wir die obige grobe Schätzung  $(1, 1)$  und somit

$$\mathbf{A}(1, 1) = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 16 & 50 \end{bmatrix}$$

Man berechnet leicht

$$f_x(1, 1) = 4 \quad \text{und} \quad f_y(1, 1) = 14$$

und somit erhalten wir für die verbesserte Approximation  $(x_1, y_1)$  das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 18(x_1 - 1) + 16(y_1 - 1) &= -4 \\ 16(x_1 - 1) + 50(y_1 - 1) &= -14 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(1, 1) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x(1, 1) \\ f_y(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\Delta x = x_1 - 1$  und  $\Delta y = y_1 - 1$ , oder auch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{A}(1, 1)^{-1} \begin{pmatrix} f_x(1, 1) \\ f_y(1, 1) \end{pmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem kann vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} 18x_1 + 16y_1 &= 30 \\ 16x_1 + 50y_1 &= 52 \end{aligned}$$

und hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{167}{161} \quad y_1 = \frac{114}{161}$$

5. Durch Einsetzen kann man verifizieren, dass  $9 = f(1, 1) > f(x_1, y_1) \approx 6.68$ .

◇

Hier wird mit wenigen Zeilen *Mathematica* die selbe Rechnung nachvollzogen.



**Mathematica**

```
df[x_, y_] = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]} ;
ddf[x_, y_] = {{D[f[x, y], {x, 2}], D[f[x, y], x, y]},
               {D[f[x, y], x, y], D[f[x, y], {y, 2}]} };
minSearchStep[x_, y_] = {x, y} - Inverse[ddf[x, y]] . df[x, y] ;
```

Nun wählt man die Startwerte (1, 1) und kann einige Schritte des Newton-Verfahrens durchführen. Die Konvergenz gegen einen festen Wert ist schön ersichtlich.

**Mathematica**

```
Clear[f, x, y];
f[x_, y_] = (x-3)^2+(y-2)^2+(x^2+2y^2-1)^2;
{xi, yi} = {1, 1} ;
Print[{0, N[{xi, yi}, 20]}] ;
Do[Print[{i, {xi, yi} = N[minSearchStep[xi, yi], 7]}], {i, 5}]
.
{0, {1., 1.}}
{1, {1.037267, 0.7080745}}
{2, {1.140259, 0.5304939}}
{3, {1.156657, 0.4812256}}
{4, {1.157273, 0.477959}}
{5, {1.157276, 0.477944}}
```

Man rechnet leicht nach, dass  $f(1.157276, 0.477944) \approx 6.346$ , was zu einem minimalen Abstand von ca. 2.5 Einheiten führt.

**7-78 Beispiel :** In einer früheren Aufgabe (Seite 285) sind wir auf die Funktion

$$f(x, \theta) = x \sin \theta + x^2 \sin \theta (\cos \theta - 2)$$

gestossen, deren Maximum auf dem Bereich  $0 < x \leq 1/2$  und  $0 < \theta < \pi$  gesucht wurde. Wähle die Mittelpunkte der Intervalle als erste Schätzwerte für die Lage eines Extremums und bestimme dann die ersten drei Schritte des Newton Verfahrens. Vergleiche die Resultate mit der exakten Lösung  $x = 1/3$  und  $\theta = \pi/3$

**Mathematica**

```
Clear[f, x, y];
f[x_, y_] = x*Sin[y] + x^2*Sin[y](Cos[y] - 2) ;
{xi, yi} = {1/4, Pi/4} ;
Print[{0, N[{xi, yi}, 20]}] ;
Do[Print[{i, {xi, yi} = N[minSearchStep[xi, yi], 10]}], {i, 5}]
.
{0, {0.25, 0.78539816339744830962}}
{1, {0.3867295402, 1.199611726}}
{2, {0.3497433685, 1.023429329}}
{3, {0.332756528, 1.048218298}}
{4, {0.3333326724, 1.04719836}}
{5, {0.3333333333, 1.047197551}}
```



### 7.4.4 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen, Verfahren von Lagrange

In diesem Abschnitt suchen wir Extrema einer Funktion  $f(\vec{x})$ , wobei aber nur Punkte  $\vec{x}$  zugelassen werden für welche die **Nebenbedingung**  $g(\vec{x})$  erfüllt ist. Im Falle von zwei unabhängigen Variablen ergibt sich also die Situation

$$\begin{array}{ll} \text{Finde Extremum von} & f(x, y) \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x, y) = 0 \end{array}$$

Wir wollen eine **notwendige Bedingung** herleiten. Sei also das Extremum angenommen im Punkt  $(x_0, y_0)$  und  $(x(t), y(t))$  eine beliebige Kurve mit

$$\begin{aligned} (x(0), y(0)) &= (x_0, y_0) \\ g(x(t), y(t)) &= 0 \quad \text{für alle } t \end{aligned}$$

Somit muss die Funktion  $h(t) = f(x(t), y(t))$  bei  $t = 0$  ein Extremum haben und es gilt  $\frac{d}{dt} h(0) = 0$ . Somit gilt

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = 0$$

Weil die Funktion  $g$  konstant ist entlang der untersuchten Kurve gilt auch  $\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = 0$  oder

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = 0$$

Somit stehen der Gradient von  $f$  und der Gradient von  $g$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  senkrecht auf dem selben Geschwindigkeitsvektor und die beiden Vektoren müssen parallel sein. Es muss also eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  geben mit

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch zusammenfassen der obigen Schritte erhalten wir für gegebene Funktionen  $f$  und  $g$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

für die drei Unbekannten  $x_0, y_0$  und  $\lambda$ . Dieses Verfahren heisst auch **Lagrange-Methode** und der unbekannte Faktor  $\lambda$  ist ein **Lagrange-Multiplikator**.

**7–79 Beispiel :** Zu finden sind die Extremalwerte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$$

auf dem Rand der Ellipse  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

**Lösung:** In diesem Beispiel ist die Nebenbedingung gegeben durch

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

Die Gradienten der Funktionen  $f$  und  $g$  lassen sich mittels partieller Ableitung leicht bestimmen und wir erhalten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 8y + 2 \end{pmatrix}^T \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}^T$$

Somit ist das zu lösende nichtlineare Gleichungssystem gegeben durch

$$\begin{aligned} 2x - 1 + \lambda 2x &= 0 \\ 8y + 2 + \lambda 8y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} 2(1+\lambda)x &= 1 \\ 4(1+\lambda)y &= -1 \\ x^2 + 4y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren der ersten beiden Gleichungen wird hieraus

$$\begin{aligned} 4(1+\lambda)^2(x^2 + 4y^2) &= 2 \\ x^2 + 4y^2 &= 1 \end{aligned}$$

und somit ist offensichtlich

$$(1+\lambda)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die Werte von  $x$  und  $y$  erhält man nun aus

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(1+\lambda)} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-1}{4(1+\lambda)} = \frac{-1}{\pm 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Die Abbildung 7.20 zeigt, dass das Maximum bei  $(-1/\sqrt{2}, 1/(2\sqrt{2}))$  angenommen wird und das Minimum bei  $(1/\sqrt{2}, -1/(2\sqrt{2}))$ .  $\diamond$

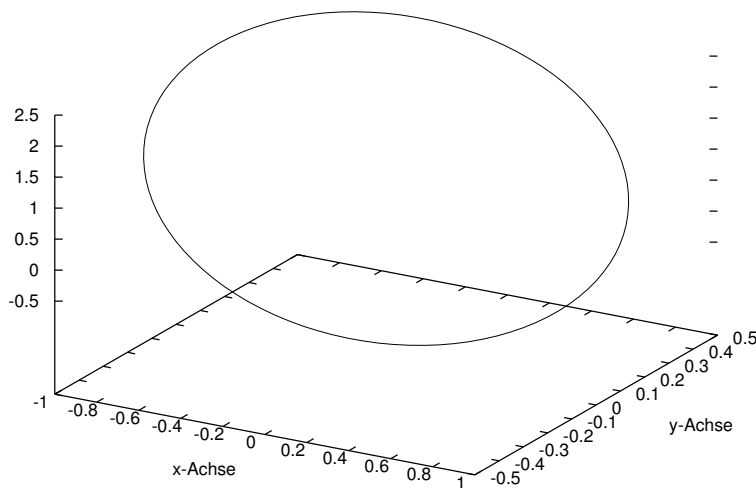


Abbildung 7.20: Der Graph der Funktion  $x^2 + 4y^2 - x + 2y$  entlang einer Ellipse

Das Verfahren von Lagrange ist nicht nur bei zwei unabhängigen Variablen anwendbar sondern es gilt das folgende Theorem.

**7–80 Theorem :** (Lagrange'sche Multiplikatorenregel)

Seien  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $g(\vec{x}_0) = 0$ . Falls die Funktion  $f(\vec{x})$  bei  $\vec{x}_0$  ein relatives Extremum hat bezüglich der Nebenbedingung  $g(\vec{x}) = 0$  und ist  $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ , so gibt es einen Multiplikator  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\nabla f(\vec{x}_0) + \lambda \nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

d.h. die beiden Gradienten sind parallel zueinander.

**7–81 Beispiel :** Eine rechteckige, oben offene Schachtel der Höhe  $z$ , Breite  $x$  und Tiefe  $y$  muss so dimensioniert werden, dass bei gegebenem Volumen  $V$  die Fläche von Boden und Wänden möglichst klein wird. Diese Aufgabe haben wir auf Seite 282 gelöst, indem die Höhe  $z$  mittels der Beziehung  $V = x y z$  eliminiert wurde. Nun soll die Methode der Lagrangemultiplikatoren verwendet werden.

**Lösung:** Die zu optimierende Funktion ist

$$A = x y + 2 x z + 2 y z$$

bezüglich der Nebenbedingung

$$V = x y z$$

Alle Funktionen sind beliebig oft differenzierbar. Gemäss dem Verfahren von Lagrange ist also die Gleichung

$$\nabla A(x, y, z) + \lambda \nabla V(x, y, z) = \vec{0}$$

zu lösen. Das führt in diesem Fall auf

$$\begin{aligned} y + 2z + \lambda y z &= 0 \\ x + 2z + \lambda x z &= 0 \\ 2x + 2y + \lambda x y &= 0 \\ x y z &= V \end{aligned}$$

Das sind vier Gleichungen für die Unbekannten  $x, y, z$  und  $\lambda$ . Nun multipliziert man die erste Gleichung mit  $x$ , die zweite mit  $y$  und bildet die Differenz.

$$2z(x - y) = 0$$

Somit muss  $x = y$  sein und aus den obigen zweiten und dritten Gleichung wird

$$\begin{aligned} x + 2z + \lambda x z &= 0 \\ 4 + \lambda x &= 0 \end{aligned}$$

Mittels der zweiten Gleichung kann  $\lambda$  eliminiert werden und wir erhalten

$$x + 2z - 4z = x - 2z = 0$$

Somit hat die optimale Schachtel einen quadratischen Grundriss und ist halb so hoch wie breit.  $\diamond$

Die Lösung der obigen Aufgabe auf Seite 282 liefert selbstverständlich dasselbe Resultat. Das obige Verfahren hat den Vorteil, dass die drei Variablen gleichberechtigt behandelt werden, die Höhe  $z$  nimmt keine Sonderstellung ein. Als Nachteil erhalten wir ein System von vier zu lösenden Gleichungen. Allerdings sind diese Gleichungen auch bei komplizierteren Problemen leicht hinzuschreiben, einzig das Lösen der Gleichungen kann Probleme verursachen. Hierzu können auch numerische Verfahren (Newton) eingesetzt werden.

**7–82 Beispiel :** Sei  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

eine **symmetrische** Matrix. Dann suchen wir die Extrema der Funktion

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x}$$

unter der Nebenbedingung

$$\|\vec{x}\| = 1$$

**Lösung:** Die Funktion  $f$  können wir auch schreiben als

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1a_{11}x_1 + x_1a_{12}x_2 + x_1a_{13}x_3 \\ &\quad + x_2a_{21}x_1 + x_2a_{22}x_2 + x_2a_{23}x_3 \\ &\quad + x_3a_{31}x_1 + x_3a_{32}x_2 + x_3a_{33}x_3 \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Matrix ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) erhält man den Gradienten

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x})^T &= 2 \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung schreiben wir als

$$g(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

und der Gradient ist somit

$$\nabla g(\vec{x})^T = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\vec{x}$$

Die Lagrange-Bedingung

$$\nabla f - \lambda \nabla g = \vec{0}$$

lautet somit

$$2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss eine von Null verschiedene Lösung haben. Das ist nur möglich, falls die Determinante der Matrix Null ist. Um die Werte von  $\lambda$  zu finden muss man die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades finden. Die Werte von  $\lambda$  heissen **Eigenwerte** der Matrix **A** und die entsprechenden Vektoren sind **Eigenvektoren**. Für die Lösungen gilt dann

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

und somit

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}^T \cdot \vec{x} = \lambda \|\vec{x}\|^2$$

Man kann zeigen, dass es immer drei reelle Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$  gibt und somit

$$\lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} \leq \lambda_3 \|\vec{x}\|^2$$

für beliebige Vektoren. ◇

Als Anwendung des obigen Beispiels können wir nun Extrema von Funktionen in drei Variablen klassifizieren. Sei also  $f(x, y, z)$  eine oft differenzierbare Funktion mit einem kritischen Punkt im Ursprung, d.h.

$$\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Dann gilt die Taylorapproximation

$$f(x, y, z) \approx f(0, 0, 0) + \frac{1}{2} (x, y, z) \cdot H_f(0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{A} = H_f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\vec{0}) & f_{xy}(\vec{0}) & f_{xz}(\vec{0}) \\ f_{yx}(\vec{0}) & f_{yy}(\vec{0}) & f_{yz}(\vec{0}) \\ f_{zx}(\vec{0}) & f_{zy}(\vec{0}) & f_{zz}(\vec{0}) \end{bmatrix}$$

Seien nun  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$  die Eigenwerte der Matrix **A**. Als Konsequenz des obigen Beispiels erhalten wir nun das Kriterium

$\lambda_3 < 0$	$f$ hat ein lokales Maximum bei $(0, 0, 0)$
$0 < \lambda_1$	$f$ hat ein lokales Minimum bei $(0, 0, 0)$
$\lambda_1 < 0 < \lambda_3$	$f$ hat einen Sattelpunkt bei $(0, 0, 0)$
hinreichende Bedingungen	
$\lambda_3 = 0$	$f$ kann ein lokales Maximum haben bei $(0, 0, 0)$
$\lambda_1 = 0$	$f$ kann ein lokales Minimum haben bei $(0, 0, 0)$

Dieses Verfahren lässt sich auch auf Funktionen mehrerer Variablen anwenden. Bei kritischen Punkten zeigen der grösste und der kleinste Eigenwert der Hesse'schen Matrix die Art des kritischen Punktes an. Sind alle Eigenwerte strikt negativ, so liegt ein lokales Maximum vor. Sind alle Eigenwerte strikt positiv, so liegt ein lokales Minimum vor.

## 7.5 Aufgaben

### 7.5.1 Aufgaben zu Grundlagen

#### • Aufgabe 7-1:

Untersuche den Graphen der Funktion

Examiner le graphe de la fonction

$$z = f(x, y) = -(y - 2)^2 - 4(x + 1)^2 + 4$$

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien. Die Schnittkurve mit der <math>xy</math>-Ebene ist möglichst genau anzugeben.</p> <p>(b) Zeichne den oberhalb der <math>xy</math>-Ebene liegenden Teil des Graphen.</p> | <p>(a) Esquisser quelques courbes de niveau. Donner la courbe d'intersection avec le plan des <math>xy</math> avec des détails.</p> <p>(b) Esquisser la section du graphe au-dessus du plan des <math>xy</math>.</p> |
|--|--|

#### • Aufgabe 7-2:

Finden Sie die Gleichungen für die Niveaukurven und Isolinien der Funktion

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

und skizzieren Sie anschliessend die Fläche.

#### • Aufgabe 7-3:

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2 - 2y^2}$$

- (a) Zeichnen Sie in einer ersten Figur die Isolinien  $x = 0$ ,  $x = -1$  und  $x = 2$ .
- (b) Zeichnen Sie in einer zweiten Figur die Isolinien  $y = 0$ ,  $y = 1$  und  $y = 5$ .
- (c) Zeichnen Sie in einer dritten Figur die Niveaulinien für die Niveaus  $c = 2$ ,  $c = 1$  und  $c = 0.5$ .

Die Resultate müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

#### • Aufgabe 7-4:

Finden Sie die Gleichungen für die Niveaukurven und Isolinien der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und skizzieren Sie anschliessend die Fläche.

#### • Aufgabe 7-5:

Finden Sie die Gleichungen für die Niveaukurven und Isolinien der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

und skizzieren Sie anschliessend die Fläche.

#### • Aufgabe 7-6:

Skizziere den Graphen der Funktion

Dessiner le graphe de la fonction

$$f(x, y) = -x^2 + 4x - 4 - 3y^2 + 4$$

Insbesondere sind mindestens zwei Niveaukurven zu berechnen und zu zeichnen. Die für das Zeichnen notwendigen Rechnungen **müssen** gezeigt werden.

Calculer et dessiner deux (minimale) courbes de niveau. On **doit** montrer tous les calculs nécessaire pour les dessins.

**• Aufgabe 7-7:**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} & \text{falls } x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist diese Funktion überall, ausser bei  $(0, 0)$  stetig. Die Stetigkeit im Ursprung ist separat zu untersuchen.

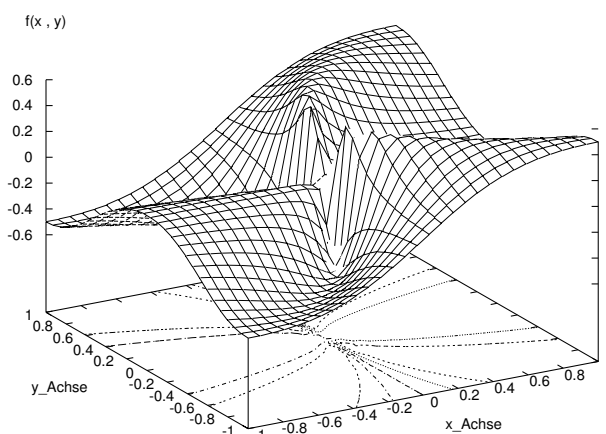
Zeigen Sie, dass jedes festes  $m \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, m t) = 0$$

Trotzdem ist diese Funktion nicht stetig bei  $(0, 0)$ , da

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) \neq 0$$

Zur Illustration sei hier der Graph der Funktion in der Nähe des Ursprungs gegeben.


**• Aufgabe 7-8:**

Bestimmen Sie zuerst die partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(x, y) = x^2 y + 2 x^2 - 3 y + 4$$

und anschliessend die Werte der partiellen Ableitungen in Punkt  $(x, y) = (1, 3)$ .

**• Aufgabe 7-9:**

Regarder la fonction / Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y^4/x^2} & \text{si/falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{si/falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Trouver  $\nabla f$ , si  $x \neq 0$ .

Bestimmen Sie  $\nabla f$ , falls  $x \neq 0$ .

(b) Designer quelques courbes de niveau.

Skizzieren Sie einige Niveaukurven



(c) Prouver que cette fonction n'est pas continue à l'origin, même si elle est continue sur chaque droite  $y = m x$ .

Beweisen Sie, dass diese Funktion **nicht** stetig ist im Ursprung, obwohl sie entlang jeder Geraden  $y = m x$  stetig ist.

• **Aufgabe 7–10:**

Die Funktion

$$V(x, t) = e^{-qt} \sin(x - vt)$$

gibt die Amplitude einer Welle an, die sich entlang einer Geraden mit Geschwindigkeit  $v$  bewegt.

- (a) Mit welcher Rate ändert sich die Amplitude bezüglich der Zeit  $t$ .  
 (b) Mit welcher Rate ändert sich die Amplitude bezüglich des Ortes  $x$ .

• **Aufgabe 7–11:**

Betrachten Sie den Punkt  $\vec{P} = (2, 1, -2)$  auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

- (a) Finden Sie die Gleichung der Tangentialebene in Punkt  $\vec{P}$ .  
 (b) Finden Sie eine Parametrisierung einer Geraden durch  $\vec{P}$ , welche die Kugel senkrecht durchstößt.

• **Aufgabe 7–12:**

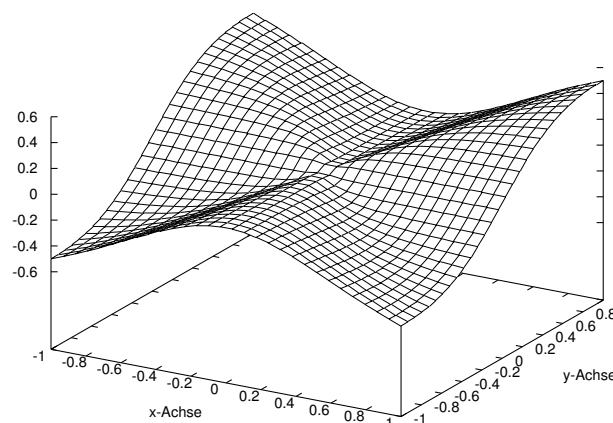
Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

bei  $(0, 0)$  existieren, aber die für Richtungsableitungen ist die Rechenregel

$$D_{\vec{v}} f(\vec{0}) = \nabla f(\vec{0}) \cdot \vec{v}$$

falsch. Die untenstehende Figur illustriert dieses Verhalten. Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz auf Seite 266?



**• Aufgabe 7-13:**

Untersuche den Graphen der Funktion

$$z = f(x, y) = -(y - 2)^2 - 4(x + 1)^2 + 4$$

Zeichne den oberhalb der  $xy$ -Ebene liegenden Teil des Graphen. Insbesondere sind einige Niveaukurven und Isolinien zu berechnen und zu zeichnen. Die Schnittkurve mit der  $xy$ -Ebene ist möglichst genau anzugeben.

**• Aufgabe 7-14:**

Eine Funktion  $f$  ist gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ c & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Die Zahl  $c$  ist so zu wählen, sodass die Funktion überall stetig ist.
- (b) Wo und warum ist die Funktion differenzierbar?
- (c) Zeige, dass die Funktion bei  $(0, 0)$  nicht differenzierbar ist.

**• Aufgabe 7-15:**

Regarder / Betrachte

$$f(x, y) = \ln \frac{x \cdot y}{\pi} \sin(x^2 y)$$

- (a) Trouver la matrice Hessienne de la fonction  $f$  pour  $x_0 = 1, y_0 = \pi$ .  
Finden Sie die Hesse'sche Matrix von  $f$  für  $x_0 = 1, y_0 = \pi$ .
- (b) Trouver le polynôme de Taylor de l'ordre 2 pour  $x_0 = 1, y_0 = \pi$ .  
Finden Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von  $f$  für  $x_0 = 1, y_0 = \pi$ .

**• Aufgabe 7-16:**

Approximieren Sie die Fläche

$$z = f(x, y) = x^y$$

in Punkt  $(1, 2, 1)$  möglichst gut durch eine

- (a) Ebene.
- (b) Fläche zweiter Ordnung.

**• Aufgabe 7-17:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$z = f(x, y) = \cosh(2x - y) - \sin(3y) + 3e^x$$

in der Nähe des Ursprunges  $(0, 0)$ .

proche à l'origine  $(0, 0)$ .

- |  |   |
|--|---|
| (a) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Ebene.   | (a) Trouver la meilleure approximation de la fonction par un plan.  |
| (b) In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten und wie gross ist die Steigung in diese Richtung? | (b) Dans quelle direction monte la surface le plus rapidement possible et quelle est la pente dans cette direction? |
| (c) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Fläche zweiter Ordnung.                          | (c) Trouver la meilleure approximation de la fonction par une surface de degré deux.                                |

**• Aufgabe 7–18:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$z = f(x, y) = \cosh\left(x + \frac{y}{2} - xy\right) - \sin(3yx) + 3$$

in der Nähe des Ursprunges  $(0, 0)$ .proche à l'origine  $(0, 0)$ .

- |  |   |
|--|---|
| (a) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Ebene.   | (a) Trouver la meilleure approximation de la fonction par un plan.  |
| (b) In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten und wie gross ist die Steigung in diese Richtung? | (b) Dans quelle direction monte la surface le plus rapidement possible et quelle est la pente dans cette direction? |
| (c) Approximieren Sie die Funktion möglichst gut durch eine Fläche zweiter Ordnung.                          | (c) Trouver la meilleure approximation de la fonction par une surface de degré deux.                                |

**• Aufgabe 7–19:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$z = f(x, y) = \sin(x \cdot y) - x \cdot y^2$$

in der Nähe des Punktes  $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ .proche du point  $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ .

- |   |   |
|---|---|
| (a) In welche Richtung (in der $xy$ -Ebene) hat die Fläche $z = f(x, y)$ die grösste Steigung und wie steil (als Winkel) ist die Fläche beim Punkt $(x_0, y_0)$ ? | (a) Dans quel direction (dans le plan des $xy$ ) la surface monte le plus rapide possible et quel est l'angle de montée au point $(x_0, y_0)$ ? |
| (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgerade der Tangential-Ebene an den Punkt $(x_0, y_0, ?)$ mit der $xy$ -Ebene.  | (b) Trouver l'équation de la droite d'intersection du plan tangentiel au point $(x_0, y_0, ?)$ avec le plan des $xy$ .                          |

**• Aufgabe 7–20:**

(Taylorapproximation dritter Ordnung)

Verwenden Sie den Beweis der Taylorapproximation zweiter Ordnung (siehe Seite 274) um die Taylorapproximation dritter Ordnung bei  $(0, 0)$  einer Funktion

$$f \in C^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

zu finden.

**• Aufgabe 7–21:**

(Taylorapproximation zweiter Ordnung in drei Variablen)

Verwenden Sie den Beweis der Taylorapproximation zweiter Ordnung (siehe Seite 274) um die Taylorapproximation zweiter Ordnung bei  $(x_0, y_0, z_0)$  einer Funktion

$$f \in C^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

 $f(x, y, z)$  zu finden.

Verifizieren Sie, dass das Resultat auch in der Form

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \begin{bmatrix} f_{xx}(\vec{x}_0) & f_{xy}(\vec{x}_0) & f_{xz}(\vec{x}_0) \\ f_{yx}(\vec{x}_0) & f_{yy}(\vec{x}_0) & f_{yz}(\vec{x}_0) \\ f_{zx}(\vec{x}_0) & f_{zy}(\vec{x}_0) & f_{zz}(\vec{x}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Hierbei wurde die Abkürzung  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  verwendet. Die  $3 \times 3$ -Matrix

$$H_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\vec{x}_0) & f_{xy}(\vec{x}_0) & f_{xz}(\vec{x}_0) \\ f_{yx}(\vec{x}_0) & f_{yy}(\vec{x}_0) & f_{yz}(\vec{x}_0) \\ f_{zx}(\vec{x}_0) & f_{zy}(\vec{x}_0) & f_{zz}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

heisst **Hesse'sche Matrix** der Funktion  $f$  beim Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Wegen des Theorems von Schwarz muss die Hesse'sche Matrix symmetrisch sein.

## 7.5.2 Extremalprobleme

### • Aufgabe 7-22:

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x, y) = 2x^3 + 3xy - 2y^3 + 5$$

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) In welche Richtung (in der <math>xy</math>-Ebene) hat die Fläche <math>z = f(x, y)</math> die grösste Steigung bei <math>(x, y) = (-1, \frac{1}{3})</math> und wie steil (als Winkel) ist die Fläche?</p> <p>(b) Finden Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion</p> <p>(c) Klassifizieren Sie die obigen kritischen Punkte als lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte</p> | <p>(a) Dans quel direction (dans le plan des <math>xy</math>) la surface monte le plus rapide possible au point <math>(x, y) = (-1, \frac{1}{3})</math> et quel est l'angle de montée?</p> <p>(b) Trouver tous les points critiques de cette fonction.</p> <p>(c) Décider si les points critiques sont des maxima, minima ou des points de col.</p> |
|--|---|

### • Aufgabe 7-23:

Examiner la fonction

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = (1 - 2y) \sin(x + 2y) + xy - x^2$$

- |   |   |
|---|---|
| <p>(a) Trouver l'approximation de Taylor <math>g(x, y)</math> de l'ordre 2 pour les valeurs de <math>x</math> et <math>y</math> proche à 0.</p> <p>(b) Cette approximation <math>g(x, y)</math> possède un point critique. Trouver le système des équations pour la location de ce point critique et puis trouver le point.</p> | <p>(a) Finden Sie die Taylorapproximation <math>g(x, y)</math> zweiter Ordnung dieser Funktion für Werte von <math>x</math> und <math>y</math> in der Nähe von 0.</p> <p>(b) Die Taylorapproximation hat einen kritischen Punkt. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf für die Lage des kritischen Punktes und bestimmen Sie diesen.</p> |
|---|---|

**• Aufgabe 7–24:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 10x + 2y - 4$$

- |  |   |
|--|---|
| (a) In welche Richtung (in $xy$ -Ebene) hat die Fläche $z = f(x, y)$ die grösste Steigung bei $(x, y) = (1, 3)$ und wie steil (als Winkel) ist die Fläche? | (a) Dans quel direction (dans le plan des $xy$ ) la surface monte le plus rapide possible au point $(x, y) = (1, 3)$ et quel est l'angle de montée? |
| (b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion und entscheiden Sie ob ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.                        | (b) Trouver tous les points critiques de cette fonction et décider si il s'agit d'un minimum, maximum ou d'un point de col.                         |

**• Aufgabe 7–25:**

Untersuchen Sie die Funktion

Examiner la fonction

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3 + 37$$

- |   |   |
|---|---|
| (a) Finden Sie alle kritischen Punkte dieser Funktion   | (a) Trouver tous les points critiques de cette fonction.                          |
| (b) Klassifizieren Sie die obigen kritischen Punkte als lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte | (b) Décider si les points critiques sont des maxima, minima ou des points de col. |

**• Aufgabe 7–26:**

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{2} (x, y) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (4x^2 - 2xy + 3y^2) + 7x - 6y
 \end{aligned}$$

- |   |   |
|---|---|
| (a) Untersuchen Sie die Extremas der Funktion $f(x, y)$ . Finden Sie ein Gleichungssystem für die Lage des Extremums. Bestimmen Sie anschliessend den Wert des Extremums. | (a) Examiner les extrema de la fonction $f(x, y)$ . Trouver un système des équations pour la position de l'extremum. Puis déterminer la valeur de l'extremum. |
| (b) Geben Sie die Gleichungen an, um das Extremum der untenstehenden Funktion $g(\vec{x})$ zu bestimmen.  | (b) Puis donner les équations pour la location de l'extrema de la fonction $g(\vec{x})$ ci-dessous.   |

$$\begin{aligned}
 g(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{x}^T \cdot \vec{b} \\
 &= \frac{1}{2} (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**• Aufgabe 7–27:**

Betrachte die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$$

- (a) Finde alle kritischen Punkte und klassifiziere sie als lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelpunkte.
- (b) Finden Sie Lage und Wert von Maximum und Minimum dieser Funktion auf der Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

• **Aufgabe 7–28:**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$$

- (a) Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion  $f$ .
- (b) Untersuchen Sie ob bei den obigen kritischen Punkten Maximas oder Minimas vorliegen.

• **Aufgabe 7–29:**

Finde die Koordinaten des Punktes  $P = (x, y, z)$  im Raum, sodass die Summe der Quadrate der Abstände zu den vier gegebenen Punkten  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$  und  $P_4 = (x_4, y_4, z_4)$  minimal wird.

• **Aufgabe 7–30:**

Eine rechteckige, oben offene Schachtel der Höhe  $z$ , Breite  $x$  und Tiefe  $y$  muss so dimensioniert werden, dass bei gegebener Oberfläche  $A$  das Volumen  $V$  möglichst gross wird.

• **Aufgabe 7–31:**

Betrachten Sie die Fläche

$$z = 3x^3 - 4y^{-4}$$

- (a) Finde die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkt mit den Koordinaten  $x = 1$  und  $y = 2$ .
- (b) Berechne den Abstand dieser Ebene vom Koordinatenursprung.

• **Aufgabe 7–32:**

Betrachte die folgende Fläche im Halbraum  $z > 0$

Regarder la surface suivante dans l'espace  $z > 0$

$$9x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

- (a) Skizziere die Fläche.  
Dessiner cette surface.
- (b) Finde die Punkte  $P = (x, y, z)$  auf der Fläche die minimalen oder maximalen Abstand vom Punkt  $Q = (1, 2, 0)$  haben. Geben Sie an ob der Abstand minimal oder maximal ist.  
Trouver les points  $P = (x, y, z)$  sur la surface, tels que la distance au point  $Q = (1, 2, 0)$  est maximale ou minimale. Indiquer si la distance est minimale ou maximale.

• **Aufgabe 7–33:**

Finde den Ort und Wert des Minimums der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

wobei nur Punkte  $(x, y)$  untersucht werden, für die gilt  $x^2 + y^2 \leq 3$ .

Tip: Polarkoordinaten

• **Aufgabe 7–34:**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = y e^{(x-1)^2 - y} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 3$$

Zu bestimmen sind Lage und Wert des Minimums und des Maximums.

Tip: untersuchen Sie die Bereiche, in denen die Vorzeichen der beiden partiellen Ableitungen positiv/negativ sind.

### 7.5.3 Approximationen erster und zweiter Ordnung

#### • Aufgabe 7–35:

Von einem Zylinder werden der Radius  $r$ , die Höhe  $h$  und die Masse  $m$  gemessen, mit den untenstehenden Resultaten und Toleranzen.

D'un cylindre mesuré le rayon  $r$ , la hauteur  $h$  et la masse  $m$  avec les résultats et tolérances ci-dessous.

$$r = 0.1 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$h = 0.2 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$m = 50 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Verwenden Sie lineare Approximationen um die folgenden Fragen zu beantworten.

Utiliser une approximation linéaire pour répondre aux questions suivantes:

- (a) Bestimmen Sie die Oberfläche  $S$  und die zugehörige Toleranz  $\Delta S$ .
- (b) Bestimmen Sie die Dichte  $\rho$  und die zugehörige Toleranz  $\Delta \rho$ .
- (c) Bestimmen Sie die relative Toleranz (in %) der Dichte.

- (a) Trouver la surface  $S$  et la tolérance  $\Delta S$ .
- (b) Trouver la densité  $\rho$  et la tolérance  $\Delta \rho$ .
- (c) Trouver la tolérance relative de la densité en %.

#### • Aufgabe 7–36:

Die Oberfläche  $S$  eines Zylinders lässt sich aus der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$  gemäss der untenstehenden Formel bestimmen. Es wurde folgende Werte gemessen

La surface  $S$  d'un cylindre dépend de la hauteur  $h$  et du rayon  $r$  selon la formule ci-dessous. On a mesuré les valeurs suivantes:

$$S(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi h r$$

$$r = 20.5 \pm 0.4 \text{ cm}$$

$$h = 25.0 \pm 0.5 \text{ cm}$$

Verwenden Sie lineare Approximationen um die folgenden Fragen zu beantworten.

Utiliser une approximation linéaire pour répondre aux questions suivantes:

- (a) Wie gross ist die absolute Messunsicherheit der Oberfläche  $S$ ?
- (b) Wie gross ist die relative Messunsicherheit der Oberfläche  $S$ ?
- (c) Wie genau müssen  $h$  und  $r$  bestimmt werden, damit der relative Fehler von  $S$  kleiner als 1% ist?

- (a) Quelle est l'incertitude de mesure absolue pour l'aire  $S$ ?
- (b) Quelle est l'incertitude de mesure relative pour l'aire  $S$ ?
- (c) Avec quelles tolérances doit-on mesurer  $h$  et  $r$  pour que l'erreur relative en  $S$  soit plus petite que 1% ?

#### • Aufgabe 7–37:

Eine oben offene Schachtel hat Innenmasse von Breite  $b = 100 \text{ mm}$ , Länge  $l = 200 \text{ mm}$  und Höhe  $h = 50 \text{ mm}$ . Die Wandstärke der Metalwand ist  $d = 1.5 \text{ mm}$ .

Une boîte est ouvert en haut et les dimension dans intérieur sont: profondeur  $b = 100 \text{ mm}$ , longueur  $l = 200 \text{ mm}$  et hauteur  $h = 50 \text{ mm}$ . L'épaisseur du parois métallique est  $d = 1.5 \text{ mm}$ .

- (a) Bestimmen Sie das Innenvolumen  $V_i$  und das Aussenvolumen  $V_a$  exakt.
- (b) Bestimmen Sie das Volumen der Metalwand mit Hilfe einer **linearen Approximation** für die Volumendifferenz  $\Delta V = V_a - V_i$ .

- (a) Calculer le volume intérieur  $V_i$  et le volume extérieur  $V_a$  d'une façon exacte.
- (b) Déterminer le volume du parois métallique à l'aide d'une **approximation linéaire** de la différence des volumes  $\Delta V = V_a - V_i$ .

• **Aufgabe 7–38:**

Ein Rohr der Länge  $L$ , Innenradius  $R_1$  und Außenradius  $R_2$  wird durch ein Moment  $M$  um den Winkel  $\alpha$  verdreht. Untersuchen Sie den Winkel  $\alpha$  als Funktion der beiden Radien  $R_1$  und  $R_2$ .

On applique un moment  $M$  à une tube de longueur  $L$ , rayon intérieur  $R_1$  et rayon extérieur  $R_2$ . Elle est déformée par un angle  $\alpha$ . Examiner  $\alpha$  comme fonction des deux rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)L}{EJ} M \quad \text{wobei/avec} \quad J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

- (a) Für kleine Änderungen  $\Delta R_1 \ll R_1$  und  $\Delta R_2 \ll R_2$  ist die resultierende Winkeländerung  $\Delta\alpha$  mit Hilfe einer linearen Approximation zu bestimmen.
- (b) Drücken Sie die relative Änderung  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$  als Funktion von  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\frac{\Delta R_1}{R_1}$  und  $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ .
- (c) Verwenden Sie die untenstehenden Werte für ein Aluminium-Rohr. Bestimmen Sie  $\alpha$  im Bogenmass und im Gradmass. Um wieviel dürfen die Radien  $R_1$  und  $R_2$  variieren, damit  $|\Delta\alpha| \leq 1^\circ$ ?

- (a) Pour des petits changements  $\Delta R_1 \ll R_1$  et  $\Delta R_2 \ll R_2$  trouver le changement  $\Delta\alpha$  de l'angle à l'aide d'une approximation linéaire.
- (b) Exprimer le changement relative  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$  comme fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\frac{\Delta R_1}{R_1}$  et  $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ .
- (c) Utiliser les valeurs ci-dessous pour une tube en aluminium. Calculer  $\alpha$  en radian et degré. Quel sont les changements permissible en  $R_1$  et  $R_2$  tel que  $|\Delta\alpha| \leq 1^\circ$ ?



Symbol symbole	Wert valeur	Einheit unité
$M$	1	N m
$L$	1	m
$R_1$	3	mm
$R_2$	5	mm
$E$	$7 \cdot 10^{10}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\nu$	0.34	

• **Aufgabe 7–39:**

Werden zwei Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  parallel geschaltet, so ergibt sich der neue Widerstand

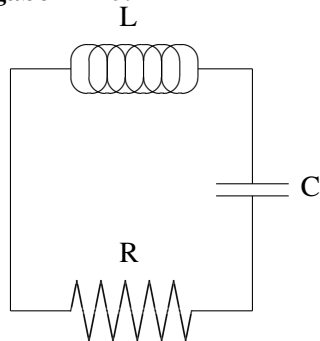
Si on met deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle on obtient une nouvelle résistance

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



- (a) Die beiden Widerstände ändern sich um  $\Delta R_1$ , resp.  $\Delta R_2$ . Beide Änderungen sind klein im Vergleich zu  $R_1$ , resp.  $R_2$ . Bestimmen Sie die Änderung  $\Delta R$  von  $R$  mit Hilfe einer linearen Approximation.
- (b) Schreiben Sie das Resultat um, sodass der relative Fehler von  $R$  als Funktion der relativen Fehler von  $R_1$  und  $R_2$  erscheint.
- (c) Die relativen Fehler von  $R_1$  und  $R_2$  gleich sind, gegeben durch  $\alpha$ , wobei  $|\alpha| \ll 1$ . Finden Sie eine sehr einfache Formel für den relativen Fehler von  $R$ .

• **Aufgabe 7–40:**



Betrachte einen einfachen LRC–Stromkreis mit kleinem Widerstand  $R$ . Die Differentialgleichung für den Strom  $i(t)$  durch den Widerstand lautet

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

- (a) Leite die Formel für die Kreisfrequenz  $\omega$  des Stromes  $i(t)$  her, als Funktion von  $L$ ,  $C$  und  $R$ .
- (b) Ist  $R = 0$ , so hat die Schaltung einen natürliche Kreisfrequenz  $\omega_0$ . Finde eine einfache Formel für die Abweichung  $\omega - \omega_0$  für kleine Werte von  $R$ . Nimmt  $\omega$  zu oder ab, falls  $R$  ansteigt?
- (c) Es sei  $R = 1 \, \Omega$ ,  $C = \frac{1}{500} \, \text{F}$  und  $L = \frac{1}{20} \, \text{H}$ . Bestimme den relativen Fehler von  $\omega$ , falls  $R$ ,  $C$  und  $L$  je eine Toleranz vom 10% aufweisen.

• **Aufgabe 7–41:**

Ein Balken der Länge  $L$ , Breite  $B$ , Höhe  $H$  und Masse  $M$  ist gegeben.

Regarder une poutre avec longueur  $L$ , largeur  $B$ , hauteur  $H$  et masse  $M$ .

$$L = 1.05 \, \text{m}, \quad B = 5 \, \text{cm}, \quad H = 3 \, \text{cm} \quad M = 4.240 \, \text{kg} \pm 1 \, \text{g}$$

- (a) Bestimme die spezifische Masse  $\rho$ .
- (b) Mit welcher relativen Genauigkeit müssen  $L$ ,  $B$  und  $H$  bestimmt sein, damit die spezifische Masse  $\rho$  maximal einen relativen Fehler von 0.1% aufweist.

(a) Calculer la masse spécifique  $\rho$ .

(b) Trouver la précision relative nécessaire pour  $L$ ,  $B$  et  $H$ , tel que l'erreur relative de  $\rho$  est plus petite que 0.1%.

• **Aufgabe 7–42:**

Von einem festen Punkt  $A$  aus in einer Ebene sieht man die zwei Punkte  $B$  und  $C$  unter einem Winkel von  $35^\circ$ . Der Abstand von  $A$  zu  $B$  ist 35 Meter, derjenigen von  $A$  zu  $C$  ist 43 Meter.

- (a) Berechne den Abstand von  $B$  zu  $C$ .

- (b) Wie genau (in Grad oder Metern) müssen der Winkel und die Distanzen gemessen werden, damit der relative Fehler der Distanz von  $B$  zu  $C$  kleiner als 1% ist? Sie dürfen annehmen, dass die drei Messungen je den selben Beitrag zum Gesamtfehler leisten.

• **Aufgabe 7–43:**

- (a) Eine Grösse  $P$  sei abhängig von  $x$ ,  $y$  und  $z$  in der Form

$$P(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$$

Zeigen Sie, dass der relative Fehler von  $P$  als Summe der relativen Fehler von  $f$ ,  $g$  und  $h$  geschrieben werden kann.

- (b) Zeigen Sie am elementaren Beispiel

$$f(x, y) = 1 + xy$$

das der relative Fehler von  $f$  nicht durch die Summe der relativen Fehler von  $x$  und  $y$  gegeben ist.

### 7.5.4 Aufgaben zum Verfahren von Newton

• **Aufgabe 7–44:**

Betrachte die Gleichungen

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

$$4x^4 + y^2 = 1$$

mit den Schätzwerten  $x = 1$  und  $y = 1$  für die Lösung. Berechne die ersten zwei Schritte des Newton-Verfahrens.

• **Aufgabe 7–45:**

Untersuchen Sie das untenstehende Gleichungssystem mit der approximativen Lösung  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

Examiner le système des équations suivantes avec la solution approximative  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

$$x + x^2 y - 1 = 0$$

$$x^2 y - y^3 = 0$$

- |   |   |
|---|---|
| (a) Führen Sie einen Schritt des Verfahrens von Newton <b>exakt</b> aus.  | (a) Calculer un pas de la méthode de Newton d'une façon <b>exacte</b> .                                     |
| (b) Stellen Sie das für den zweiten Schritt zu lösende lineare Gleichungssystem auf. Die Gleichungen sind nicht aufzulösen. | (b) Trouver le système des équations linéaires à résoudre pour le deuxième pas. Ne pas résoudre ce système. |

• **Aufgabe 7–46:**

Untersuchen Sie das untenstehende Gleichungssystem mit der approximativen Lösung  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

Examiner le système des équations suivantes avec la solution approximative  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

$$x^4 + x^2 y^3 - 1 = 0$$

$$x^3 y^2 - y^5 + 1 = 0$$

- |   |   |
|---|---|
| (a) Führen Sie einen Schritt des Verfahrens von Newton <b>exakt</b> aus.  | (a) Calculer un pas de la méthode de Newton d'une façon <b>exacte</b> .                                     |
| (b) Stellen Sie das für den zweiten Schritt zu lösende lineare Gleichungssystem auf. Die Gleichungen sind nicht aufzulösen. | (b) Trouver le système des équations linéaires à résoudre pour le deuxième pas. Ne pas résoudre ce système. |

**•Aufgabe 7–47:**

Betrachten Sie die Fläche

Regarder la surface

$$z = f(x, y) = 2x + x^2 + 2y^2 - 4$$

- |  |  |
|--|--|
| (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die obige Fläche im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, ?)$ .<br>(b) Die Schnittkurve der obigen Tangentialebene und der Ebene $z = 7x - 8y$ durchstösst die $xy$ -Ebene. Finden Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $(x_1, y_1)$ .<br>(c) Was haben die obigen Rechnungen mit dem Verfahren von Newton und dem untenstehenden Gleichungssystem und dem Punkt $(1, 1)$ zu tun? Bestimmen Sie $f(x_1, y_1)$ . | (a) Trouver l'équation du plan tangent à la surface au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, ?)$ .<br>(b) La courbe d'intersection du plan tangent et du plan $z = 7x - 8y$ coupe le plan des $xy$ . Trouver les coordonnées $(x_1, y_1)$ du point d'intersection.<br>(c) Quel est l'importance des calculs ci-dessus pour le système ci-dessous et le point $(1, 1)$ ? Calculer $f(x_1, y_1)$ . |
|--|--|

$$\begin{aligned} 2x + x^2 + 2y^2 - 4 &= 0 \\ 7x - 8y &= 0 \end{aligned}$$

**•Aufgabe 7–48:**

Untersuchen Sie Extremas der Funktion

Examiner des extrema de la fonction

$$f(x, y) = -0.36x + x^2 + 2.64y + 2.4xy + 1.1y^2 + xy^2$$

- |  |   |
|--|---|
| (a) Stellen sie ein Gleichungssystem auf, dass zu lösen ist um eventuelle Extremas zu finden.<br>(b) Ein lokales Minimum ist in der Nähe des Punktes $(x_0, y_0) = (1, -1)$ . Führen Sie einen Schritt des Verfahrens von Newton aus, um die Lage des Minimums genauer zu bestimmen. | (a) Donner un système des équations à résoudre pour trouver un extremum.<br>(b) Un minimum est proche au point $(x_0, y_0) = (1, -1)$ . Appliquer un pas de la méthode de Newton pour trouver une meilleur approximation de la location du minimum. |
|--|---|

**•Aufgabe 7–49:**

Gegeben ist die Fläche  $x^2 + 2y^2 + z = 1$  und der Punkt  $P = (2, 1, 0)$ . Gesucht ist der Punkt auf der Fläche mit möglichst kleinem Abstand zu  $P$ , d.h. die Werte von  $x$  und  $y$ , welche die untenstehende Funktion  $f$  minimieren.

Une surface est donné par  $x^2 + 2y^2 + z = 1$  et on a aussi le point  $P = (2, 1, 0)$ . On cherche le point sur la surface avec la distance la plus petite possible du point  $P$ . On cherche les valeurs de  $x$  et  $y$ , tel que la fonction  $f(x, y)$  est minimale.

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (1 - x^2 - 2y^2)^2$$

- |  |  |
|--|--|
| (a) Stellen Sie das zu lösende System von Gleichungen für $x$ und $y$ auf.<br>(b) Führen Sie <b>einen Schritt</b> des Newtonverfahrens aus um das System in (a) zu lösen. Wählen Sie als Startwert $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$ . | (a) Produire le system des équations à résoudre pour les variables $x$ et $y$ .<br>(b) Calculer <b>un pas</b> de la méthode de Newton pour résoudre les équations en (a) avec des valeurs initiales $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ . |
|--|--|

• **Aufgabe 7–50:**

Finde die Koordinaten des Punktes  $P = (x, y)$  in der Ebene, sodass die Summe der Quadrate der Abstände zu den vier Punkten  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 0)$ ,  $P_3 = (2, 3)$  und  $P_4 = (0, 1)$  minimal wird.

Für dieses Problem wird das Newton–Verfahren schon nach einem Schritt die **exakte** Lösung liefern, unabhängig vom Anfangswert. Warum?

• **Aufgabe 7–51:**

Finde die Koordinaten des Punktes  $P = (x, y)$  in der Ebene, sodass die Summe der Abstände zu den drei Punkten  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 0)$  und  $P_3 = (0, 1)$  minimal wird.

### 7.5.5 Aufgaben zum Verfahren von Lagrange

• **Aufgabe 7–52:**

Die Eckpunkte  $(\pm x, \pm y)$  eines Rechtecks liegen auf der Ellipse  $x^2 + 4y^2 = 1$ . Die Werte von  $x$  und  $y$  sind so zu wählen, dass die Rechteckfläche maximal wird.

(a) Stellen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Lagrange ein System von drei Gleichungen auf, das zu lösen ist.

(b) Lösen Sie die Gleichungen und bestimmen Sie die maximale Fläche.

• **Aufgabe 7–53:**

Seien  $0 \leq x_i \leq 1$  gegeben. Finden Sie das Maximum der Funktion

$$\prod_{i=1}^n x_i$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Was zeigt diese Rechnung für das geometrische und arithmetische Mittel? (etwas schwieriger zu beantworten)

• **Aufgabe 7–54:**

Eine Ellipse ist gegeben durch die Gleichung

Une ellipse est donnée par l'équation

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + 4x + 4y - 10 = 0$$

Verwenden Sie die Methode der Lagrange–Multiplikatoren um den Punkt auf der Ellipse zu finden, der den kleinst möglichen Abstand vom Ursprung hat. Sie müssen nur das entsprechende Gleichungssystem aufstellen. Die Gleichungen sind **nicht** zu lösen.

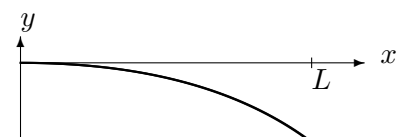
Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour chercher le point sur l'ellipse le plus proche de l'origin. On doit que produire les équations et **ne pas résoudre**.

### 7.5.6 Vermischte Aufgaben

• **Aufgabe 7–55:**

Die maximale Auslenkung eines einseitig eingespannten Balken mit Querschnittsfläche  $A$  und einem Flächenträgheitsmoment  $I$  des Querschnittes ist gegeben durch

$$y(L) = Y = -\frac{\rho g A L^4}{8 E I}$$



Sind alle anderen Daten bekannt, kann dadurch das Elastizitätsmodul  $E$  der Materials bestimmt werden. Für einen runden Aluminiumstab der Länge  $L = 0.5$  m gilt

$$\rho = 2.7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad r = 0.001 \text{ m}$$

Eine Messung ergibt  $Y = -0.011$  m.

- (a) Bestimmen Sie das Elastizitätsmodul  $E$ .
- (b) Wie genau (absolut und relativ) müssen  $Y$  und  $r$  bekannt sein, damit der relative Fehler von  $E$  kleiner als 1% ist? Alle anderen Größen werden als exakt vorausgesetzt. Die Überlegungen und Rechnungen sind zu begründen.

• **Aufgabe 7–56:**

Sei  $a \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Betrachten Sie die Fläche

Soit  $a \in \mathbb{R}$  un paramètre. Examiner la surface

$$z = f(x, y) = -a(x - 2)^2 - y^2 + 5$$

und die Tangentialebene  $E$  im Punkt  $(1, 1, f(1, 1))$  an diese Ebene.

et le plan tangent  $E$  au point  $(1, 1, f(1, 1))$  à cette surface.

- (a) Finden Sie die Gleichung dieser Tangentialebene.
- (a) Déterminer l'équation de ce plan tangent.
- (b) Für welchen Wert von  $a$  liegt der Ursprung  $(0, 0, 0)$  in der Ebene  $E$ ?
- (b) Pour quelle valeur de  $a$  l'origine  $(0, 0, 0)$  se trouve dans le plan  $E$ ?
- (c) Skizzieren Sie einige Niveaukurven der Fläche  $z = f(x, y)$ , wobei der Wert von  $a$  aus der vorangehenden Teilaufgabe zu verwenden ist.
- (c) Esquisser quelques courbe de niveau de la surface  $z = f(x, y)$ . Utiliser la valeur  $a$  déterminée ci-dessus.

• **Aufgabe 7–57:**

Die Leistung  $P$ , die in einem elektrischen Widerstand verbraucht wird, ist gegeben durch

La puissance  $P$  consommé par une résistance électrique est donnée par

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Es gelte  $U = 200$  V und  $R = 8 \Omega$ . Die Rechnungen sind mit Hilfe von **linearen Approximationen** auszuführen.

Soit  $U = 200$  V et  $R = 8 \Omega$ . Calculer avec des **approximations linéaires**.

- (a) Wie stark ändert sich die Leistung, wenn  $\Delta U = -5$  V und  $\Delta R = -0.2 \Omega$ ?
- (a) Trouver la variation de la puissance, si on sait que  $\Delta U = -5$  V et  $\Delta R = -0.2 \Omega$ .
- (b) Wie stark ändert sich die Leistung maximal, wenn die relativen Fehler von  $U$  und  $R$  je 5% sind.
- (b) Trouver la variation maximale de la puissance, si les erreurs relatives de  $U$  et  $R$  sont 5%.

• **Aufgabe 7–58:**

Examiner le parabolöide à droite

Zu untersuchen ist das nebenstehende Rotationsparaboloid

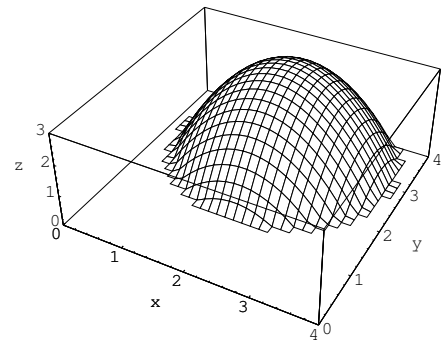
$$z = f(x, y) = 3 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2$$

- (a) Trouver l'équation du plan tangent attaché au point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Finden Sie die Gleichung der Tangentialebene welche beim Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  angeheftet wird.

- (b) Un plan est attaché à l'axe des  $x$  et il touche le parabolöide. Trouver les coordonnées du point de contact.

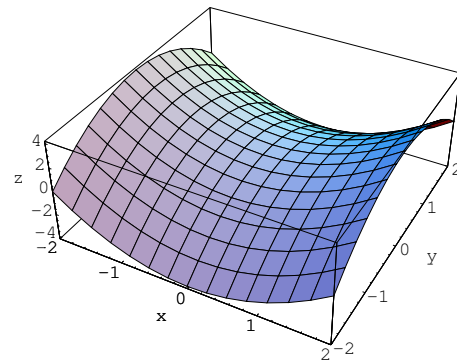
- (b) Die  $x$ -Achse liegt in einer Ebene, die zusätzlich das Paraboloid berührt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Berührungspunktes.



• Aufgabe 7–59:

Suchen Sie den Punkt auf der Fläche  $z = x^2 - y^2$  der minimalen Abstand vom Punkt  $P = (1, -2, 4)$  hat.

Chercher le point sur la surface  $z = x^2 - y^2$ , tel que la distance au point  $P = (1, -2, 4)$  est minimale.



- (a) Finden Sie den Abstand  $f(x, y)$  eines Punktes  $(x, y, z)$  auf der Fläche vom Punkt  $P$ .  
Trouver la distance  $f(x, y)$  du point  $(x, y, z)$  sur la surface au point  $P$ .
- (b) Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem für die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Punktes auf.  
Trouver le système d'équations pour les coordonnées  $x$  et  $y$  de ce point.
- (c) Aufgrund der obigen Zeichnung sollte der Punkt  $Q = (1, -1, 0)$  nicht allzuweit vom Punkt mit minimalem Abstand von  $P$  entfernt sein. Führen Sie **einen Schritt** des Newtonverfahrens aus, um eine bessere Approximation zu bekommen. Bestimmen Sie den Abstand dieses neuen Punktes von  $P$ .  
Du dessin ci-dessus, on sait que le point  $Q = (1, -1, 0)$  n'est pas trop loin du point situé à une distance minimale de  $P$ . Appliquer **un pas** de la méthode de Newton pour trouver une meilleur approximation. Calculer la distance entre ce nouveau point et  $P$ .

• Aufgabe 7–60:

Pour déterminer le module d'élasticité d'un fil on mesure la longueur  $l$  et le diamètre  $d$ . Une force  $F$  allonge le fil par un changement de longueur  $\delta$ . On trouve

Um das Elastizitätsmodul eines Drahtes zu bestimmen, misst man dessen Länge  $l$  und den Durchmesser  $d$ . Durch eine am Draht angreifende Kraft  $F$  ergibt sich eine Längenänderung  $\delta$ . Es gilt

$$\begin{aligned} l &= 2473 \pm 3 \text{ mm} \\ d &= 0.292 \pm 0.001 \text{ mm} \\ F &= 0.1 \pm 0.005 \text{ N} \\ \delta &= 1.750 \pm 0.05 \text{ mm} \end{aligned}$$

Le module d'élasticité est déterminé par

Das Elastizitätsmodul  $E$  ist bestimmt durch

$$F \cdot l = \pi \cdot E \left( \frac{d}{2} \right)^2 \delta$$

Trouver  $E$  et les erreurs absolu et relative à l'aide d'une approximation linéaire.

Bestimmen Sie  $E$  und die zugehörigen absoluten und relativen Fehler mit Hilfe einer linearen Approximation.

• **Aufgabe 7–61:**

Die Tiefe eines Sees, dessen Fläche ein Gebiet  $D$  der  $xy$ -Ebene einnimmt ist beim Punkt  $(x, y)$  gegeben durch

La profondeur en un point  $(x, y)$  d'un lac dont la surface occupe une région  $D$  du plan des  $xy$  est donnée par

$$z = f(x, y) = 300 - 2x^2 - y^2$$

Hier besitzen  $x$  und  $y$  die Einheit Kilometer und  $z$  die Einheit Meter. Die Uferlinie ist beschrieben durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$ .

où  $x, y$  sont mesurés en kilomètres et  $z$  en mètres. Le bord du lac est donc définie par l'équation  $f(x, y) = 0$ .

- (a) Ein Boot befindet sich beim Punkt  $P = (4, 8)$ . In welche Richtung  $\vec{a}$  muss es fahren, damit die Tiefe **möglichst rasch zunimmt**?
- (b) Der Kapitän des Schiffes wählt den Kurs so, dass in jedem Punkt die Richtung identisch ist mit der Richtung der stärksten Tiefenzunahme. Hier sind  $g_1$  und  $g_2$  die Komponenten des Vektors  $\vec{g}$ . Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Fahrkurve, wenn sich das Schiff zum Zeitpunkt  $t = 0$  beim Punkt  $(2, 5)$  befand.

- (a) Un bateau se trouve au point  $P = (4, 8)$ . Dans quelle direction  $\vec{a}$  doit il naviguer de manière à ce que la profondeur de l'eau **augmente le plus rapidement**?
- (b) Le capitaine du bateau choisit le cap de telle manière que la direction soit toujours identique avec la direction de la plus grande augmentation de la profondeur. Ici  $g_1$  et  $g_2$  sont des composantes du vecteur  $\vec{g}$ . Déterminer la représentation paramétrique de la trajectoire du bateau, si celui-ci se trouve au point  $(2, 5)$  à l'instant  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= g_1(x, y) \\ \frac{d}{dt} y(t) &= g_2(x, y) \end{aligned}$$

### 7.5.7 Lösungen zu einigen Aufgaben

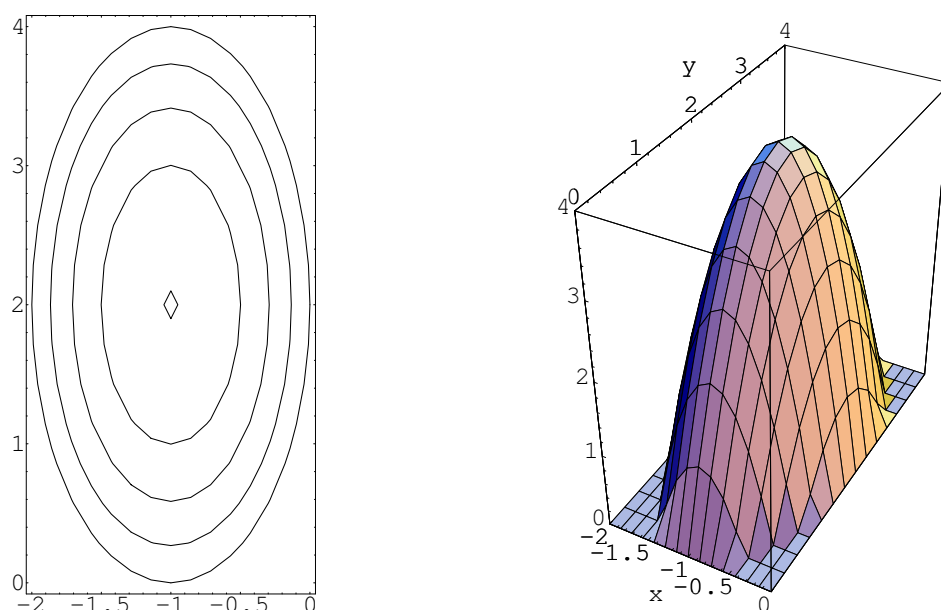
**Lösung zu Aufgabe 7–1 :**

- (a) Die Niveaukurve auf Höhe  $c$  ist gegeben als Lösungsmenge der Gleichung

$$\begin{aligned} -(y-2)^2 - 4(x+1)^2 + 4 &= c \\ (y-2)^2 + 4(x+1)^2 &= 4-c \end{aligned}$$

Die Niveaukurven sind Ellipsen mit Zentrum bei  $(-1, 2)$  und Halbachsen der Länge  $\frac{\sqrt{4-c}}{2}$  und  $\sqrt{4-c}$ . Für  $c > 4$  gibt es somit keine Niveaukurven. Die Halbachsen der Ellipse in der  $xy$ -Ebene sind 1 und 2. Unten finden Sie Niveaukurven auf den Höhen 0, 1, 2, 3 und 3.99 .

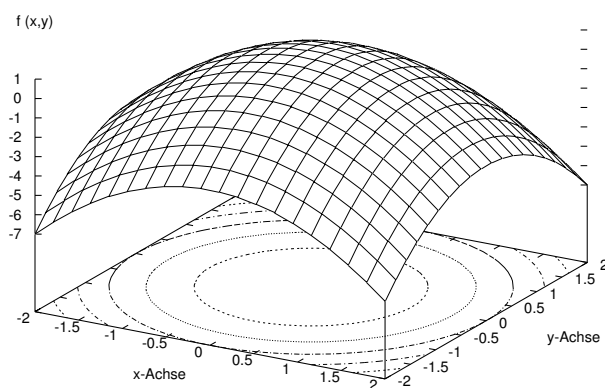
- (b) Die Isolinien in beide Richtungen sind nach unten geöffnete Parabeln. Der Maximalwert 4 wird erreicht bei  $(x, y) = (-1, 2)$  .



**Lösung zu Aufgabe 7-2 :** Die Niveaukurven für das Niveau  $c < 1$  sind Kreise mit Radius  $\sqrt{1-c}$  und Zentrum im Ursprung. Die Isolinien in  $x$ -Richtung sind gegeben durch die Funktion

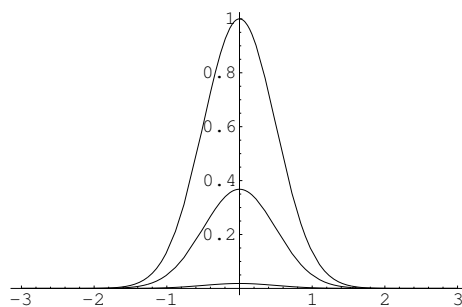
$$g(x) = 1 - y^2 - x^2$$

und somit nach unten geöffnete Parabeln mit Scheitel bei  $(x, z) = (0, 1 - y^2)$ .



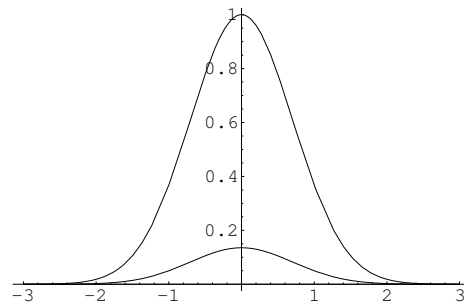
**Lösung zu Aufgabe 7-3 :**

(a) Zu zeichnen sind  $f(0, y)$ ,  $f(-1, y)$  und  $f(2, y)$ . Die Kurve bei  $x = 2$  ist kaum mehr zu erkennen.





- (b) Zu zeichnen sind  $f(x, 0)$ ,  $f(x, 1)$  und  $f(x, 5)$ . Die Kurve bei  $y = 5$  ist nicht zu erkennen, da die Werte zu klein sind.

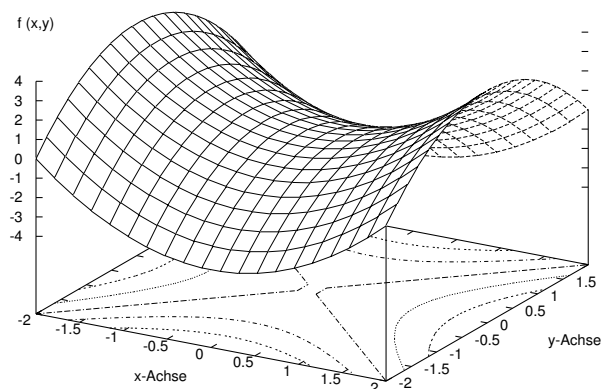


- (c) Da  $-x^2 - 2y^2 \leq 0$  sind alle Funktionswerte der Funktion  $f$  kleiner oder gleich 1.

- Die Niveaukurve auf Niveau 2 ist die leere Menge.
- Die Niveaukurve auf Niveau 1 besteht nur aus dem Ursprung  $(0, 0)$ .
- $f(x, y) = 0.5$  ist äquivalent zu  $-x^2 - 2y^2 = \ln 0.5 = -\ln 2$ . Somit ist die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 + 2y^2 = \ln 2$ . Dies ist eine Ellipse mit Achsen in den Koordinatenrichtungen. Die Länge der Halbachse in  $x$ -Richtung ist  $\sqrt{\ln 2} \approx 0.83$ . Die Länge der Halbachse in  $y$ -Richtung ist  $\sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \approx 0.59$ .

**Lösung zu Aufgabe 7-4 :** Die Niveaukurven für das Niveau  $c > 0$  sind Kreise mit Radius  $c$  und Zentrum im Ursprung. Die Fläche entspricht einem nach oben geöffneten Kegelmantel, dessen Achse mit der  $z$ -Achse übereinstimmt. Der Öffnungswinkel ist  $90^\circ$ .

**Lösung zu Aufgabe 7-5 :** Die Niveaukurven sind Hyperbeln. Die Isolinien sind Parabeln, die entweder nach oben oder unten geöffnet sind. Die Fläche gleicht einem Sattel.



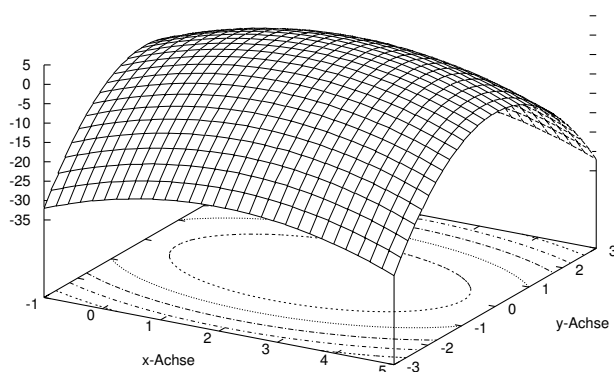
**Lösung zu Aufgabe 7-6 :** Mittels Vervollständigung des Quadrates erhält man

$$f(x, y) = -(x^2 - 4x + 4) - 3y^2 + 4 = -(x - 2)^2 - 3y^2 + 4$$

Folglich sind die Niveaukurven Ellipsen mit Zentrum  $(2, 0)$ . Für  $c > 4$  hat die Gleichung

$$f(x, y) = -(x - 2)^2 - 3y^2 + 4 = c$$

keine Lösungen und somit sind diese Niveaumengen leer. Dies wird bestätigt durch den Graphen.



**Lösung zu Aufgabe 7-7 :**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, m t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t m^2 t^2}{t^2 + m^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t m^2}{1 + m^4 t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

**Lösung zu Aufgabe 7-8 :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2xy + 4x \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(1,3)} &= 10 \\ \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(1,3)} &= -2 \end{aligned}$$

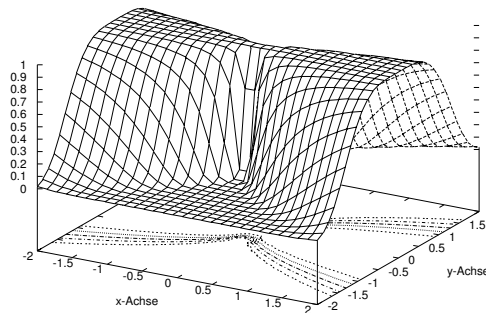
**Lösung zu Aufgabe 7-9 :**

(a)

$$\nabla f(x, y) = \left( e^{-y^4/x^2} \frac{2y^4}{x^3}, -e^{-y^4/x^2} \frac{4y^3}{x^2} \right)$$

(b)

$$f(x, y) = e^{-y^4/x^2} = c \iff x = k y^2 \quad \text{mit/avec} \quad k = \pm \sqrt{\frac{-1}{\ln c}}$$



Die Niveaukurven sind nach rechts und links geöffnete Parabeln mit Scheitel im Ursprung.

- (c) Man kann sich entlang der Parabel  $x = y^2$  den Ursprung nähern und den Grenzwert berechnen. Er stimmt nicht mit  $f(0, 0)$  überein und somit ist die Funktion nicht stetig.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = e^{-1} \neq 0 = f(0, 0)$$

#### Lösung zu Aufgabe 7–10 :

(a)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -q e^{-qt} \sin(x - vt) - v e^{-qt} \cos(x - vt)$$

(b)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = e^{-qt} \cos(x - vt)$$

**Lösung zu Aufgabe 7–11 :** In der Nähe des Punktes  $\vec{P}$  kann die Gleichung aufgelöst werden nach  $z$  und man erhält

$$z = f(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Der Gradient dieser Funktion ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} (x, y)$$

Also ist

$$\nabla f(2, 1) = \frac{1}{2} (2, 1) = \left( 1, \frac{1}{2} \right)$$

(a) Die Gleichung der Tangentialebene ist gegeben durch

$$\left( 1, \frac{1}{2}, -1 \right) \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z + 2 \end{pmatrix} = x - 2 + \frac{y - 1}{2} - z - 2 = 0$$

oder auch

$$x + \frac{y}{2} - z - \frac{9}{2} = 0$$

- (b) Der Vektor  $(1, \frac{1}{2}, -1)$  steht senkrecht auf der Fläche im Punkt  $\vec{P}$  und somit können wir leicht eine Parametrisierung angeben

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–12 :** Wegen  $f(x, 0) = 0$  und  $f(0, y) = 0$  gilt

$$\frac{\partial f(\vec{0})}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(\vec{0})}{\partial y} = 0$$

Somit gilt für beliebige Vektoren  $\vec{v}$

$$\nabla f(\vec{0}) \cdot \vec{v} = 0$$

Wir wählen einen Vektor  $\vec{v} = (1, 1)$  und rechnen

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(\vec{0}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{v}) - f(\vec{0})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 t}{t^2 + t^2} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Somit ist die verlangte Rechenregel für den Vektor  $(1, 1)$  falsch. Dies ist kein Zufall. Die partielle Ableitung ist für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

und diese Funktion kann im Ursprung nicht stetig sein. Somit ist die Funktion  $f$  nicht stetig differenzierbar, obwohl alle partiellen Ableitungen existieren.

**Lösung zu Aufgabe 7–16 :** Man verwendet die Taylorapproximationen von erster (bzw. zweiter) Ordnung. Dazu muss man zuerst die partiellen Ableitungen bis und mit zweiter Ordnung bestimmen.

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(1, 2)$
$f$	$e^{y \ln x}$	1
$f_x$	$e^{y \ln x} \frac{y}{x}$	2
$f_y$	$e^{y \ln x} \ln x$	0
$f_{xx}$	$e^{y \ln x} \frac{y^2 - y}{x^2}$	2
$f_{yy}$	$e^{y \ln x} \ln^2 x$	0
$f_{xy}$	$e^{y \ln x} \left( \frac{y \ln x}{x} + \frac{1}{x} \right)$	1

somit gilt beim Punkt  $(1, 2)$

$$f(1, 2) = 1 \quad \text{und} \quad \nabla f(1, 2) = (2, 0)$$

und die Hesse'sche Matrix ist gegeben durch

$$H_f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Die Approximation durch eine Ebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) &= (1 + \Delta x)^{2+\Delta y} \approx f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2 \Delta x \end{aligned}$$

(b) Die Approximation durch eine Fläche zweiter Ordnung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (1 + \Delta x)^{2+\Delta y} &\approx f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) \cdot H_f(1, 2) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= 1 + (2, 0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2 \Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 7–17 :

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(0, 0)$
$f$	$\cosh(2x - y) - \sin(3y) + 3e^x$	4
$f_x$	$2 \sinh(2x - y) + 3e^x$	3
$f_y$	$-\sinh(2x - y) - 3 \cos(3y)$	-3
$f_{xx}$	$4 \cosh(2x - y) + 3e^x$	7
$f_{xy}$	$-2 \cosh(2x - y)$	-2
$f_{yy}$	$+\cosh(2x - y) + 9 \sin(3y)$	1

(a)

$$f(x, y) \approx 4 + 3x - 3y$$

(b) Wegen

$$\nabla f(0, 0) = (3, -3)$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist die  $-45^\circ$ -Richtung und die Steigung ist  $\|\nabla f(0, 0)\| = 3\sqrt{2}$ .

(c)

$$f(x, y) \approx 4 + 3x - 3y + \frac{1}{2} (7x^2 - 4xy + 1y^2)$$

### Lösung zu Aufgabe 7–18 :

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(0, 0)$
$f$	$\cosh(x + \frac{y}{2} - xy) - \sin(3yx) + 3$	4
$f_x$	$(1 - y) \sinh(x + \frac{y}{2} - xy) - 3y \cos(3yx)$	0
$f_y$	$(\frac{1}{2} - x) \sinh(x + \frac{y}{2} - xy) - 3x \cos(3yx) + 3$	0
$f_{xx}$	$(1 - y)^2 \cosh(x + \frac{y}{2} - xy) + 9y^2 \sin(3yx)$	1
$f_{yy}$	$(\frac{1}{2} - x)^2 \cosh(x + \frac{y}{2} - xy) + 9x^2 \sin(3yx)$	$\frac{1}{4}$
$f_{xy}$	$-\sinh(x + \frac{y}{2} - xy) + (1 - y)(\frac{1}{2} - x) \cosh(x + \frac{y}{2} - xy) - 3 \cos(3yx) + 9yx \sin(3yx)$	$-\frac{5}{2}$

(a)

$$f(x, y) \approx 4$$

(b) Wegen

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

Der Gradient ist der Nullvektor. Folglich ist die Tangentialebene horizontal und es gibt keine Richtung des steilsten Anstieges.

(c)

$$f(x, y) \approx 4 + \frac{1}{2} \left( x^2 - 5xy + \frac{1}{4}y^2 \right)$$

**Lösung zu Aufgabe 7–19 :**

	bei/au point $(x, y)$	bei/au point $(\pi, 1)$
$f(x, y)$	$= \sin(x \cdot y) - x \cdot y^2$	$-\pi$
$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$	$= y \cos(x \cdot y) - y^2$	$-2$
$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$	$= x \cos(x \cdot y) - 2x \cdot y$	$-3\pi$

(a) Der Gradient bestimmt Richtung und Steigung.

$$\text{grad } f(\pi, 1) = (-2, -3\pi)$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist somit  $(-2, -3\pi)$  und der Steigungswinkel  $\alpha$  ist bestimmt durch

$$\tan \alpha = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| = \sqrt{4 + 9\pi^2} \approx 9.63$$

und somit

$$\alpha \approx 1.467 \approx 84.1^\circ$$

(b) Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &= -\pi - 2(x - \pi) - 3\pi(y - 1) \end{aligned}$$

Für die gesuchte Schnittgerade ist  $z = 0$  zu setzen und somit ist die Gerade beschrieben durch

$$\begin{aligned} 0 &= -\pi - 2(x - \pi) - 3\pi(y - 1) = +4\pi - 2x - 3\pi y \\ y &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3\pi}x \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–20 :** Der Beweis ist eine Erweiterung des Beweises für Approximationen zweiter Ordnung.

$$g(t) = f(0 + t\Delta x, 0 + t\Delta y)$$

Mit der Notation  $\vec{x}(t) = (t \Delta x, t \Delta y)$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 g(0) &= f(0, 0) = f(\vec{x}(0)) \\
 g(1) &= f(\Delta x, \Delta y) = f(\vec{x}(1)) \\
 \dot{g}(t) &= f_x(\vec{x}(t)) \Delta x + f_y(\vec{x}(t)) \Delta y \\
 \ddot{g}(t) &= f_{xx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 + f_{yx}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta y + f_{xy}(\vec{x}(t)) \Delta y \Delta x + f_{yy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^2 \\
 &= f_{xx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta y + f_{yy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^2 \\
 g^{(3)}(t) &= f_{xxx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^3 + f_{yxx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 \Delta y \\
 &\quad + 2 f_{xxy}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 \Delta y + 2 f_{yyx}(\vec{x}(t)) \Delta x (\Delta y)^2 \\
 &\quad + f_{yyy}(\vec{x}(t)) \Delta x (\Delta y)^2 + f_{yyy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^3 \\
 &= f_{xxx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^3 + 3 f_{yxx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 \Delta y \\
 &\quad + 3 f_{xyx}(\vec{x}(t)) \Delta x (\Delta y)^2 + f_{yyy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^3
 \end{aligned}$$

Die vierte Ableitung  $g^{(3)}(t)$  enthält alle Terme vierter Ordnung bezüglich  $\Delta x$  und  $\Delta y$ . Wegen der eindimensionalen Taylorformel

$$g(1) = g(0) + \dot{g}(0) 1 + \frac{1}{2} \ddot{g}(0) 1^2 + \frac{1}{3!} g^{(3)}(0) 1^3 + \frac{1}{4!} g^{(4)}(\xi) 1^3 \quad \text{für ein } 0 < \xi < 1$$

gilt nun die Approximationsformel

$$\begin{aligned}
 f(\Delta x, \Delta y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0) \Delta x + f_y(0, 0) \Delta y \\
 &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) (\Delta x)^2 + 2 f_{xy}(0, 0) \Delta x \Delta y + f_{yy}(0, 0) (\Delta y)^2) \\
 &\quad + \frac{1}{6} (f_{xxx}(0, 0) (\Delta x)^3 + 3 f_{xxy}(0, 0) (\Delta x)^2 \Delta y \\
 &\quad \quad + 3 f_{xyy}(0, 0) \Delta x (\Delta y)^2 + f_{yyy}(0, 0) (\Delta y)^3) \\
 &\quad + R
 \end{aligned}$$

wobei der Rest  $R$  von vierter Ordnung (oder höher) ist.

**Lösung zu Aufgabe 7–21 :** Mit der Funktion

$$g(t) = f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y, z_0 + t \Delta z)$$

und der Notation

$$\vec{x}(t) = (x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y, z_0 + t \Delta z)$$

gilt

$$\begin{aligned}
 g(0) &= f(x_0, y_0, z_0) = f(\vec{x}(0)) \\
 g(1) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(\vec{x}(1)) \\
 \dot{g}(t) &= f_x(\vec{x}(t)) \Delta x + f_y(\vec{x}(t)) \Delta y + f_z(\vec{x}(t)) \Delta z \\
 \ddot{g}(t) &= f_{xx}(\vec{x}(t)) (\Delta x)^2 + f_{yy}(\vec{x}(t)) (\Delta y)^2 + f_{zz}(\vec{x}(t)) (\Delta z)^2 \\
 &\quad + 2 f_{xy}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta y + 2 f_{yz}(\vec{x}(t)) \Delta y \Delta z + 2 f_{xz}(\vec{x}(t)) \Delta x \Delta z
 \end{aligned}$$

Die dritte Ableitung  $g^{(3)}(t)$  enthält alle Terme dritter Ordnung bezüglich  $\Delta x$  und  $\Delta y$ . Wegen der eindimensionalen Taylorformel

$$g(1) = g(0) + \dot{g}(0) 1 + \frac{1}{2} \ddot{g}(0) 1^2 + \frac{1}{3!} g^{(3)}(\xi) 1^3 \quad \text{für ein } 0 < \xi < 1$$

gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(1)) &= f(\vec{x}(0)) + (f_x(\vec{x}(0)) \Delta x + f_y(\vec{x}(0)) \Delta y + f_z(\vec{x}(0)) \Delta z) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(\vec{x}(0)) (\Delta x)^2 + f_{yy}(\vec{x}(0)) (\Delta y)^2 + f_{zz}(\vec{x}(0)) (\Delta z)^2) \\ &\quad + f_{xy}(\vec{x}(0)) \Delta x \Delta y + f_{xz}(\vec{x}(0)) \Delta x \Delta z + f_{yz}(\vec{x}(0)) \Delta y \Delta z + R \end{aligned}$$

wobei der Rest  $R$  von dritter Ordnung ist. Dies Approximation kann auch dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) &= f(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad + f_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(\vec{x}_0) (\Delta x)^2 + f_{yy}(\vec{x}_0) (\Delta y)^2 + f_{zz}(\vec{x}_0) (\Delta z)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (2 f_{xy}(\vec{x}_0) \Delta x \Delta y + 2 f_{xz}(\vec{x}_0) \Delta x \Delta z + 2 f_{yz}(\vec{x}_0) \Delta y \Delta z) \\ &\quad + R \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 7–22 :

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \text{grad } f(x, y) = (6x^2 + 3y, 3x - 6y^2) \\ \nabla f(-1, 1/3) &= (6 + 1, -3 - 6/9) = (7, -\frac{11}{3}) \end{aligned}$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist somit  $(7, -11/3)$ . Somit zeigt diese Richtung in den vierten Quadranten und der Winkel  $\beta$  zur **positiven**  $x$ -Achse ist bestimmt durch  $\tan \beta = \frac{11}{21}$  und somit  $\beta \approx 0.483 \approx 27.6^\circ$ . Der Steigungswinkel  $\alpha$  ist bestimmt durch

$$\tan \alpha = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| = \sqrt{7^2 + (11/3)^2} \approx 7.9$$

und somit  $\alpha \approx 1.44 \approx 82.8^\circ$ .

(b) Kritische Punkte sind Nullstellen des Gradienten.

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = (6x^2 + 3y, 3x - 6y^2) = (0, 0)$$

Somit ist das folgende Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} 6x^2 + 3y &= 0 & \text{oder auch} & & y &= -2x^2 \\ 4x - 3y^2 &= 0 & & & x &= +2y^2 \end{aligned}$$

Somit müssen  $x \geq 0$  und  $y \leq 0$  sein. Setzt man die erste Gleichung in der zweiten ein, so erhält man eine Gleichung vierter Ordnung.

$$\begin{aligned} x = +2y^2 &= +4x^4 \\ x(1 - 8x^3) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = +\frac{1}{2}$ . Somit gibt es zwei kritische Punkte

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) = (+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$



- (c) Zu bestimmen sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und die Diskriminante  $D = f_{xx}^2 - f_{xx} f_{yy}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= +12x \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= -12y \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) &= +3\end{aligned}$$

- An der Stelle  $(0, 0)$  gilt

$$D = 3^2 - 0 \cdot 0 = 9 > 0$$

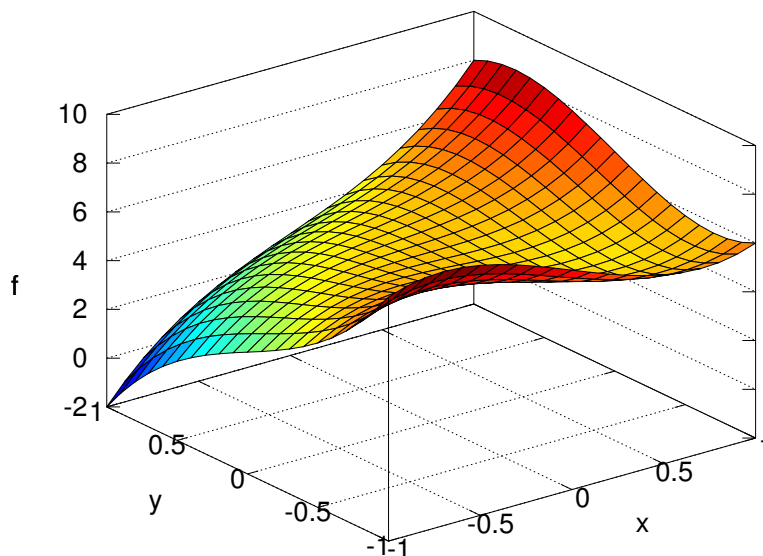
und somit hat die Funktion einen Sattelpunkt im Ursprung.

- An der Stelle  $(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  gilt

$$D = 3^2 - 12 \frac{1}{2} 12 \frac{1}{2} < 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} > 0$$

und somit liegt ein lokales Minimum vor.

Die obigen Rechnungen werden bestätigt durch den Graphen der Funktion.



### Lösung zu Aufgabe 7-23 :

- (a) Man verwendet die Taylorapproximationen zweiter Ordnung. Dazu muss man zuerst die partiellen Ableitungen bis und mit zweiter Ordnung bestimmen.

Funktion	bei $(x, y)$	bei $(0, 0)$
$f$	$(1 - 2y) \sin(x + 2y) + xy - x^2$	0
$f_x$	$(1 - 2y) \cos(x + 2y) + y - 2x$	1
$f_y$	$2(1 - 2y) \cos(x + 2y) - 2 \sin(x + 2y) + x$	2
$f_{xx}$	$-(1 - 2y) \sin(x + 2y) - 2$	-2
$f_{yy}$	$-4(1 - 2y) \sin(x + 2y) - 8 \cos(x + 2y)$	-8
$f_{xy}$	$-2(1 - 2y) \sin(x + 2y) - 2 \cos(x + 2y) + 1$	-1

Nun ist

$$f(x, y) \approx g(x, y) = 0 + 1x + 2y + \frac{1}{2} (-2x^2 - 2xy - 8y^2)$$

(b) Zu lösen ist das Gleichungssystem  $\nabla g = \vec{0}$ , d.h.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 &= 1 + \frac{1}{2}(-4x - 2y) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 &= 2 + \frac{1}{2}(-2x - 16y)\end{aligned}$$

oder mit Hilfe vom Matrizen

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit der exakten Lösung  $(x, y) = (0.4, 0.2)$ . Wegen  $D = g_{xy}^2 - g_{xx} g_{yy} = 1 - 32 < 0$  und  $g_{xx} = -2 < 0$  liegt ein lokales Maximum vor. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass die ursprüngliche Funktion  $f(x, y)$  ein lokales Maximum hat bei  $(x, y) = (0.3327, 0.1852)$ . Somit haben wir die Lage des Maximums der ursprünglichen Funktion approximativ bestimmt.

### Lösung zu Aufgabe 7–24 :

	bei/au point $(x, y)$	bei/au point $(1, 3)$
$f(x, y)$	$= 3x^2 + y^2 - 2xy - 10x + 2y - 4$	$-2$
$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$	$= 6x - 2y - 10$	$-10$
$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$	$= 2y - 2x + 2$	$6$

(a) Der Gradient bestimmt Richtung und Steigung.

$$\text{grad } f(1, 3) = (-10, 6)$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist somit  $(-10, 6)$ . Somit zeigt diese Richtung in den zweiten Quadranten und der Winkel  $\beta$  zur **negativen**  $x$ -Achse ist bestimmt durch  $\tan \beta = \frac{6}{10} = 0.6$  und somit  $\beta \approx 0.54 \approx 30.96^\circ$ .

Der Steigungswinkel  $\alpha$  ist bestimmt durch

$$\tan \alpha = \|\text{grad } f(1, 3)\| = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} \approx 11.66$$

und somit

$$\alpha \approx \arctan 11.6 = 1.48526 = 85.1^\circ$$

(b) Beide Komponenten des Gradienten müssen verschwinden. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}6x - 2y &= 10 \\ -2x + 2y &= -2\end{aligned}$$

mit der einzigen Lösung  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ . Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0) &= 6 > 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0, y_0) &= 2 > 0 \\ D &= (f_{xy}(x_0, y_0))^2 - f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) = 2^2 - 6 \cdot 2 < 0\end{aligned}$$

liegt ein Minimum vor.

**Lösung zu Aufgabe 7–25 :** Quelle [PapuII01, §2.5.3]

(a) Kritische Punkte sind Nullstellen des Gradienten.

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = (3y - 3x^2, 3x - 3y^2) = (0, 0)$$

Somit ist das folgende Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 0 \\ x - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man die erste Gleichung in der zweiten ein, so erhält man eine Gleichung vierter Ordnung  $x - x^4 = 0$ . Wegen

$$x - x^4 = x(1 - x^3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Somit gibt es zwei kritische Punkte

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

(b) Zu bestimmen sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= -6x \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= -6y \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) &= +3 \end{aligned}$$

- An der Stelle  $(0, 0)$  gilt

$$D = 3^2 - 0 \cdot 0 = 9 > 0$$

und somit hat die Funktion einen Sattelpunkt im Ursprung.

- An der Stelle  $(1, 1)$  gilt

$$D = 3^2 - (-6) \cdot (-6) = -27 < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1, 1) = -6 < 0$$

und somit hat die Funktion ein lokales Maximum bei  $(1, 1)$ .

**Lösung zu Aufgabe 7–26 :**

(a) Der Gradient der Funktion muss  $\vec{0}$  sein, d.h.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/11 \\ +17/11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.36364 \\ +1.54545 \end{pmatrix}$$

(b) Eine sorgfältige Rechnung führt zur Bedingung

$$\text{grad } g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–28 :**

(a)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x^2 + 4y \\ 4x - 6y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System von zwei Gleichungen wird offensichtlich gelöst durch

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = 0$$

Ist  $y \neq 0$ , so muss  $x = \frac{3}{2}y^2$  und auch  $x^2 = -\frac{2}{3}y$  sein. Das führt auf  $\frac{9}{4}y^4 = -\frac{2}{3}y$ . Somit gilt

$$y_2 = \frac{-2}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

(b) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x \\ f_{yy} &= -12y \\ f_{xy} &= 4 \end{aligned}$$

Beim kritischen Punkt  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  gilt  $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -16 < 0$  und somit liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor. Beim kritischen Punkt  $(x_2, y_2) = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3})$  gilt  $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 16 - 64 < 0$  und  $f_{xx} = 8 > 0$ . Somit liegt ein lokales Minimum vor.

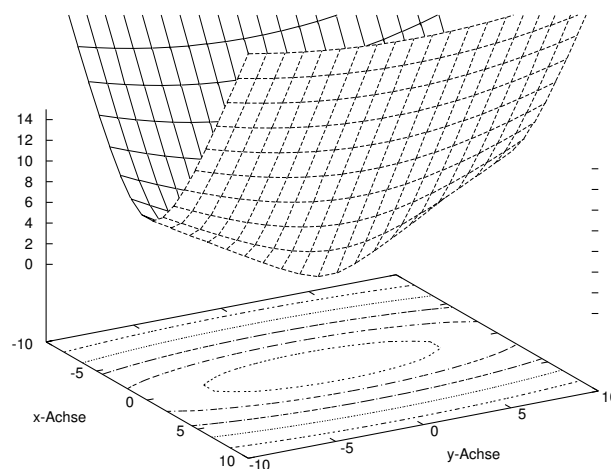
**Lösung zu Aufgabe 7–30 :** Die optimale Schachtel hat einen quadratischen Grundriss und ist halb so hoch wie breit.

**Lösung zu Aufgabe 7–32 :**

(a) Offensichtlich ist

$$z = \sqrt{(3x)^2 + y^2}$$

Somit sind die Niveaukurven Ellipsen, deren Halbachse in die  $x$ -Richtung kürzer ist.



(b) Das Quadrat der Distanz ist gegeben durch

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 9x^2 + y^2$$

Diese Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar und somit die Punkte zu finden mit verschwindendem Gradienten

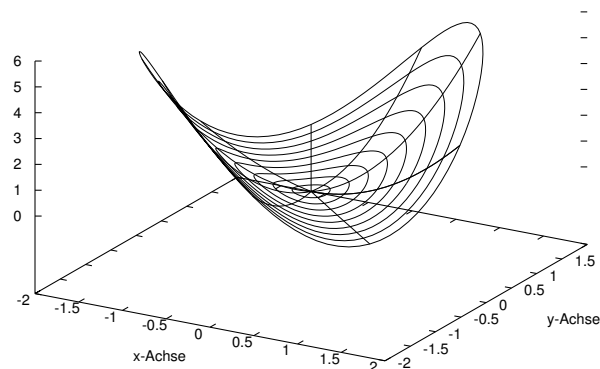
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x - 1) + 18x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(y - 2) + 2y = 0 \end{aligned}$$

Die offensichtlichen Lösungen sind  $x = 1/10$  und  $y = 1$ . Der Wert von  $z$  ist gegeben durch  $z = \sqrt{(3x)^2 + y^2} = \sqrt{1.09}$ . Der Abstand ist minimal in diesem Punkt.

**Lösung zu Aufgabe 7–33 :** Wegen  $x = r \cos \phi$  und  $y = r \sin \phi$  können wir auch die neue Funktion

$$g(r, \phi) = r^2 \cos^2 \phi - 3r^2 \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \phi = r^2 (1 - 3 \sin \phi \cos \phi) = r^2 (1 - \frac{3}{2} \sin(2\phi))$$

untersuchen. Hierbei sind die Werte  $0 \leq r \leq \sqrt{3}$  und  $0 \leq \phi < 2\pi$  in Betracht zu ziehen. Die Funktion  $\sin(2\phi)$  nimmt das Maximum von 1 bei  $\phi = \pi/4$  und  $\phi = \pi/4 + \pi$  an. Somit nimmt die Funktion  $f(x, y)$  das Minimum von  $3(1 - \frac{3}{2}) = -3/2$  bei  $\pm(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$  an. Die Funktion  $\sin(2\phi)$  nimmt das Minimum von -1 bei  $\phi = 3\pi/4$  und  $\phi = 3\pi/4 + \pi$  an. Somit nimmt die Funktion  $f(x, y)$  das Maximum von  $3(1 + \frac{3}{2}) = 15/2$  bei  $\pm(\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$  an. Dies wird bestätigt durch die Abbildung.

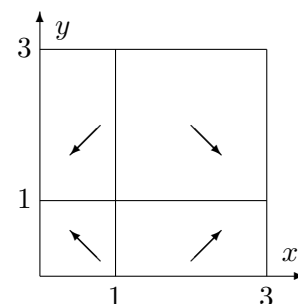


**Lösung zu Aufgabe 7–34 :** Zu untersuchen sind die Nullstellen des Gradienten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = e^{(x-1)^2 - y} 2(x - 1) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = e^{(x-1)^2 - y} (1 - y) \end{aligned}$$

Die offensichtliche Lösung ist  $x = 1$  und  $y = 1$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} x < 1 &\implies \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) < 0 \\ x > 1 &\implies \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) > 0 \\ 0 < y < 1 &\implies \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) > 0 \\ y > 1 &\implies \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) < 0 \end{aligned}$$



Die

Pfeile in der Graphik zeigen an, in welche Richtungen die Funktion ansteigt.

Somit wird das Maximum bei  $(0, 1)$  oder bei  $(3, 1)$  angenommen. Wegen  $f(0, 1) = e^1 < f(3, 1) = e^3$  wird das Maximum bei  $x = 3, y = 1$  angenommen.

Das Minimum wird bei  $(1, 0)$  oder bei  $(1, 3)$  angenommen. Wegen  $f(0, 1) = 0 < f(3, 1) = 3e^{-2}$  wird das Minimum bei  $x = 1, y = 0$  angenommen. Effektiv ist der Wert entlang der Kante  $y = 0$  immer Null.

### Lösung zu Aufgabe 7–35 :

(a)

$$\begin{aligned} S(r, h) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h) \approx 0.1885 \text{ m}^2 \\ \frac{\partial}{\partial r} S(r, h) &= 4\pi r + 2\pi h \\ \frac{\partial}{\partial h} S(r, h) &= 2\pi r \\ \Delta S &\leq \left| \frac{\partial S}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial S}{\partial h} \right| \Delta h \\ &= (4\pi r + 2\pi h) \Delta r + (2\pi r) \Delta h \approx 3.14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \rho(r, h, m) &= \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h} \approx 7957.7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, h, m) &= -\frac{2m}{\pi r^3 h} = -\frac{2\rho}{r} \\ \frac{\partial}{\partial h} \rho(r, h, m) &= -\frac{m}{\pi r^2 h^2} = -\frac{\rho}{h} \\ \frac{\partial}{\partial m} \rho(r, h, m) &= \frac{1}{\pi r^2 h} = +\frac{\rho}{m} \\ \frac{\partial}{\partial h} S(r, h) &= 2\pi r^2 \\ \Delta \rho &\leq \left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial \rho}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \Delta m \\ &= \frac{2\rho}{r} \Delta r + \frac{\rho}{h} \Delta h + \frac{\rho}{m} \Delta m \approx 214.9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 0.027 = 2.7\%$$

**Lösung zu Aufgabe 7–36 :** Diese Aufgabe wurde aus [PapuII01, §2.5.5, p. 347] übernommen. Eine lineare Approximation liefert

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx \frac{\partial S}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial S}{\partial r} \Delta r = 2\pi r \Delta h + (4\pi r + 2\pi h) \Delta r \\ |\Delta S| &\leq 2\pi r |\Delta h| + (4\pi r + 2\pi h) |\Delta r| \end{aligned}$$

(a) Mit den gegebenen Werten erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= 5860.64 \text{ cm}^2 \\ |\Delta S| &\leq (128.8 \cdot 0.5 + 414.7 \cdot 0.4) \text{ cm}^2 \approx 230.27 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(b) Der relative Fehler lässt sich nun sehr leicht bestimmen

$$\frac{|\Delta S|}{S} \leq \frac{230.27}{5860.64} \approx 0.039 = 3.9\%$$

(c) Die zu erfüllende Bedingung ist

$$\frac{|\Delta S|}{S} \leq \frac{2\pi r}{S} |\Delta h| + \frac{4\pi r + 2\pi h}{S} |\Delta r| \approx 0.021978 |\Delta h| + 0.0707585 |\Delta r| \leq 0.01$$

Es sind nun verschiedene, korrekte Lösungen möglich

- Gleich grosser absoluter Fehler  $|\Delta h|$  und  $|\Delta r|$

$$|\Delta h| = |\Delta r| \leq \frac{0.01}{0.021978 + 0.0707585} \approx 0.108 \text{ cm}^2$$

- Gleich grosse relative Fehler

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta S|}{S} &\leq \frac{2\pi r h}{S} \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{4\pi r^2 + 2\pi h r}{S} \frac{|\Delta r|}{r} \leq 0.01 \\ \frac{|\Delta r|}{r} = \frac{|\Delta h|}{h} &\leq \frac{0.01 S}{2\pi r h + 4\pi r^2 + 2\pi h r} = \frac{0.01 S}{4\pi r(h+r)} \approx 0.005 = 0.5\% \\ |\Delta h| &\leq 0.125 \text{ cm} \\ |\Delta r| &\leq 0.1025 \text{ cm} \end{aligned}$$

- gleicher Beitrag zum Fehler

$$\begin{aligned} |\Delta S| &\leq 0.01 S \approx 58.6 \text{ cm}^2 \\ |\Delta h| &\leq \frac{29.3 \text{ cm}^2}{2\pi r} \approx 0.22 \text{ cm} \\ |\Delta r| &\leq \frac{29.3 \text{ cm}^2}{4\pi r + 2\pi h} \approx 0.071 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 7–37 :

(a)

$$V_i = b \cdot l \cdot h = 10^6 \text{ mm}^3$$

$$V_a = (b + 2\Delta b) \cdot (l + 2\Delta l) \cdot (h + \Delta h) = 103 \cdot 203 \cdot 51.5 \text{ mm}^3 = 1.0768135 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

(b) Für die lineare Approximation sind die partiellen Ableitungen des Volumens  $V$  bezüglich  $b$ ,  $l$  und  $h$  zu verwenden.

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \frac{\partial V}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial V}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h \\ &= l \cdot h \cdot \Delta b + b \cdot h \cdot \Delta l + b \cdot l \cdot \Delta h \\ &= (200 \cdot 50 \cdot 3 + 100 \cdot 50 \cdot 3 + 200 \cdot 100 \cdot 1.5) \text{ mm}^3 \\ &= 75000 \text{ mm}^3 = 0.075 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Dieser Wert ist sehr nahe bei der Volumendifferenz  $V_a - V_i$ .

## Octave

```
b = 100; db = 3;
l = 200; dl = 3;
h = 50 ; dh = 1.5;
```

```
Vi = b*l*h
Va = (b+db)*(l+dl)*(h+dh)
dV = b*l*dh + b*dl*h + db*l*h
DV = Va-Vi
```

Für den zweiten Teil kann das Volumen auch als Funktion der Wandstärke  $x$  aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
 V(x) &= (100 + 2x)(200 + 2x)(50 + x) \\
 \frac{d}{dx} V(x) &= 2(200 + 2x)(50 + x) + (100 + 2x)2(50 + x) + (100 + 2x)(200 + 2x)1 \\
 \frac{d}{dx} V(0) &= 2 \cdot 200 \cdot 50 + 100 \cdot 2 \cdot 50 + 100 \cdot 200 = 50000 \\
 \Delta V &\approx \frac{d}{dx} V(0) \cdot \Delta x = 50000 \cdot 1.5 \text{ mm}^3 = 75000 \text{ mm}^3
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–38 :** Verwende eine lineare Approximation  $f(\vec{x}_0 + \vec{\Delta x}) \approx f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{\Delta x}$ . Die unabhängige Variablen sind  $R_1$  und  $R_2$  und die abhängige Variable ist der Winkel  $\alpha$ .

(a) Verwende die Kettenregel um die partiellen Ableitungen bezüglich  $R_1$  und  $R_2$  zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} &= \frac{2(1+\nu) L M}{E} \frac{\frac{\pi}{2} 4 R_1^3}{J^2} = \frac{2(1+\nu) L M}{E J} \frac{4 R_1^3}{(R_2^4 - R_1^4)} = \alpha \frac{4 R_1^3}{(R_2^4 - R_1^4)} \\
 \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} &= \dots = -\alpha \frac{4 R_2^3}{R_2^4 - R_1^4} \\
 \Delta \alpha &\approx \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \Delta R_2 \\
 &= \alpha \frac{4 R_1^3}{R_2^4 - R_1^4} \Delta R_1 - \alpha \frac{4 R_2^3}{R_2^4 - R_1^4} \Delta R_2 = \frac{4 \alpha}{R_2^4 - R_1^4} (R_1^3 \Delta R_1 - R_2^3 \Delta R_2)
 \end{aligned}$$

(b) Division durch  $\alpha$  führt auf

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{4}{R_2^4 - R_1^4} (R_1^3 \Delta R_1 - R_2^3 \Delta R_2)$$

(c) Der Fehler wird in dieser Lösung gleichmässig auf Beiträge von  $\Delta R_1$  und  $\Delta R_2$  aufgeteilt. Andere Lösungen sind möglich.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2(1+\nu) L}{E} \frac{2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} \approx 0.0448 = 2.57^\circ \\
 |\Delta \alpha| &< \alpha \frac{4 R_1^3}{R_2^4 - R_1^4} |\Delta R_1| + \alpha \frac{4 R_2^3}{R_2^4 - R_1^4} |\Delta R_2| \\
 &\approx 8.89 |\Delta R_1| + 41.2 |\Delta R_2| \leq \frac{\pi}{180} \approx 0.017453 \\
 |\Delta R_1| &\leq 0.00098 \text{ m} \approx 1.0 \text{ mm} \\
 |\Delta R_2| &\leq 0.00021 \text{ m} \approx 0.2 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Diese Variation ist zu gross um noch mittels einer linearen Approximation behandelt werden zu können. Besser wäre eine Toleranz von  $0.1^\circ$  zu verlangen.



Stellt man die Bedingung  $|\Delta R_1| = |\Delta R_2| = |\Delta R|$  so erhält man

$$\frac{\pi}{180} \geq (8.89 + 41.2) |\Delta R| \implies \Delta R = 0.35 \text{ mm}$$

### Lösung zu Aufgabe 7–39 :

(a) Taylorapproximation erster Ordnung

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{\partial R}{\partial R_1} &= \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \\ \frac{\partial R}{\partial R_2} &= \dots = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \\ \Delta R &\approx \frac{\partial R}{\partial R_1} \Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} \Delta R_2 \\ &= \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_2 \end{aligned}$$

(b) Der relative Fehler ist gegeben durch  $\frac{\Delta R}{R}$ . Dividieren der obige Beziehung durch  $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  ergibt

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{\Delta R_2}{R_2}$$

(c) Wegen  $\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = \alpha$  gilt

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} \alpha + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \alpha = \alpha$$

Somit ist der relative Fehler von  $R$  ebenfalls  $\alpha$ .

### Lösung zu Aufgabe 7–42 : Hier ist ein möglicher Lösungsweg mit *Mathematica*.

#### Mathematica

```
Clear[a,b,c,al,a0,b0,c0,a10];
b0 = 43;
c0 = 35;
a10 = 35;
a[b_,c_,al_] = Sqrt[b^2 + c^2 - 2 b c Cos[al Degree]]
a0 = a[b0,c0,a10];
N[a0]
.
      2      2
Sqrt[b  + c  - 2 b c Cos[al Degree]]
24.6648
```

#### Mathematica

```
d1[b_,c_,al_] = Simplify[Derivative[1,0,0][a][b,c,al]]
d2[b_,c_,al_] = Simplify[Derivative[0,1,0][a][b,c,al]]
d3[b_,c_,al_] = Simplify[Derivative[0,0,1][a][b,c,al]]
.
      b - c Cos[al Degree]
```

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2 b c \cos[a \text{ Degree}]}$$

$$c - b \cos[a \text{ Degree}]$$

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2 b c \cos[a \text{ Degree}]}$$

$$b c \text{ Degree} \sin[a \text{ Degree}]$$

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2 b c \cos[a \text{ Degree}]}$$

### Mathematica

```
{N[d1[b0,c0,a10]],N[d2[b0,c0,a10]],N[d3[b0,c0,a10]]}
{0.580977, -0.00906303, 0.61084}
```

### Mathematica

```
db = N[a0/(300 d1[b0,c0,a10])]
dc = N[a0/(300 d2[b0,c0,a10])]
dal = N[a0/(300 d3[b0,c0,a10])]
{
0.141513
-9.07158
0.134595
}
```

### Lösung zu Aufgabe 7–43 :

(a) Die absoluten Fehler der Einzelgrößen sind gegeben durch

$$\Delta f = f'(x) \Delta x, \quad \Delta g = g'(y) \Delta y \quad \text{und} \quad \Delta h = h'(z) \Delta z$$

und die relativen Fehler somit durch

$$\frac{f'}{f} \Delta x, \quad \frac{g'}{g} \Delta y \quad \text{und} \quad \frac{h'}{h} \Delta z$$

Die partiellen Ableitungen von  $P$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= f'(x) g(y) h(z) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= f(x) g'(y) h(z) \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= f(x) g(y) h'(z) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} |\Delta P| &\leq \left| \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial z} \Delta z \right| \\ &= |f' g h \Delta x| + |f g' h \Delta y| + |f g h' \Delta z| \end{aligned}$$

Für den relativen Fehler gilt also

$$\left| \frac{\Delta P}{P} \right| = \left| \frac{\Delta P}{f g h} \right| \leq \left| \frac{f'}{f} \Delta x \right| + \left| \frac{g'}{g} \Delta y \right| + \left| \frac{h'}{h} \Delta z \right|$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

(b) Der relative Fehler von  $f$  ist abgeschätzt durch

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \frac{1}{|1 + xy|} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right| \leq \frac{1}{|1 + xy|} (|x \Delta x| + |x \Delta y|)$$

und diese Grösse ist offensichtlich verschieden von

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

**Lösung zu Aufgabe 7–44 :** Mit  $f_1(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$  und  $f_2(x, y) = 4x^4 + y^2 - 1$  erhalten wir die partiellen Ableitungen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 8y \\ 16x^3 & 2y \end{bmatrix}$$

und mit  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  erhalten wir ein Gleichungssystem für  $x_1$  und  $y_1$ .

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.8064516 \\ 0.5483870 \end{pmatrix}$$

Mit ähnlichen Rechnungen erhält man

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = 1 \\ x_1 = 0.8064516 & y_1 = 0.5483870 \\ x_2 = 0.7088993 & y_2 = 0.3897547 \\ \vdots & \vdots \\ x_7 = 0.6821941 & y_7 = 0.3655855 \end{array}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–45 :** Die Iterationsvorschrift für das Verfahren von Newton ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + 2x_0 y_0 & x_0^2 \\ 2x_0 y_0 & x_0^2 - 3y_0^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 + x_0^2 y_0 - 1 \\ x_0^2 y_0 - y_0^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Mit  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Die Gleichung kann in einer der folgenden Formen vorliegen.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 y_1 & x_1^2 \\ 2x_1 y_1 & x_1^2 - 3y_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_1^2 y_1 - 1 \\ x_1^2 y_1 - y_1^3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 34 & 9 \\ 18 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - x_2 \\ \frac{3}{4} - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11}{64} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2.125 & 0.5625 \\ 1.125 & -1.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.75 - x_2 \\ 0.75 - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1.172 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2.125 & 0.5625 \\ 1.125 & -1.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1.8437 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.6860 \\ 0.6860 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese approximative Lösung stimmt sehr gut mit einer der exakten Lösung überein ( $x = y \approx 0.682328$ ).

Es gibt noch andere Lösungen,  $(x, y) = (1, 0)$  und  $x = -y \approx -1.32472$ .

**Lösung zu Aufgabe 7–46 :** Die Iterationsvorschrift für das Verfahren von Newton ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 4x_0^3 + 2x_0 y_0^3 & 3x_0^2 y_0^2 \\ 3x_0^2 y_0^2 & 2x_0^3 y_0 - 5y_0^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0^4 + x_0^2 y_0^3 - 1 \\ x_0^3 y_0^2 - y_0^5 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Das Gleichungssystem kann in einer der folgenden Formen vorliegen.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4x_1^3 + 2x_1 y_1^3 & 3x_1^2 y_1^2 \\ 3x_1^2 y_1^2 & 2x_1^3 y_1 - 5y_1^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1^4 + x_1^2 y_1^3 - 1 \\ x_0^3 y_1^2 - y_1^5 + 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{26348}{6561} & \frac{4900}{2187} \\ \frac{4900}{2187} & \frac{-14380}{2187} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{9} - x_2 \\ \frac{10}{9} - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11560}{59049} \\ \frac{-739}{6561} \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4.01585 & 2.24051 \\ 2.24051 & -6.57522 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.777778 - x_2 \\ 1.111111 - y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.19577 \\ -0.112635 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4.01585 & 2.24051 \\ 2.24051 & -6.57522 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.41713 \\ -5.45054 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–47 :** Es gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 + 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

(a) Wegen  $f(1, 1) = 1$  ist die Tangentialebene an  $z = f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  gegeben durch

$$z = 1 + 4(x - 1) + 4(y - 1) = 4x + 4y - 7$$

(b) Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 7 \\ 7x - 8y &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$x = \frac{14}{15} \quad \text{und} \quad y = \frac{49}{60}$$

(c) Es handelt sich um einen Schritt des newton Verfahrens mit Startpunkt  $(1, 1)$ . Direktes Einsetzen ergibt

$$f(x_1, y_1) = f\left(\frac{14}{15}, \frac{49}{60}\right) \approx 0.0716667$$

Der Wert ist viel kleiner als  $f(1, 1)$ , was die Effizienz des Verfahrens von Newton bestätigt.

**Lösung zu Aufgabe 7–48 :** Um die Rechnungen auszuführen sind partielle Ableitungen der Funktion zu berechnen.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.36x + x^2 + 2.64y + 2.4xy + 1.1y^2 + xy^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= -0.36 + 2x + 2.4y + y^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 2.64 + 2.4x + 2.2y + 2xy \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= 2 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= 2.2 + 2x \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) &= 2.4 + 2y \end{aligned}$$

(a) Bei einem Minimum muss der Gradient Null sein, d.h. die beiden partiellen Ableitungen müssen Null gesetzt werden. Das ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -0.36 + 2x + 2.4y + y^2 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2.64 + 2.4x + 2.2y + 2xy \end{aligned}$$

- (b) Die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung sind bei  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  zu bestimmen und das passende lineare Gleichungssystem ist dann

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(1, -1) \\ f_y(1, -1) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} f_{xx}(1, -1) & f_{xy}(1, -1) \\ f_{yx}(1, -1) & f_{yy}(1, -1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0.4 \\ 0.4 & 4.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} +0.24 \\ +0.84 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.918447 \\ -1.19223 \end{pmatrix}$$

Diese Approximation stimmt bereits recht gut mit der exakten Lösung  $(0.9, -1.2)$  überein.

### Lösung zu Aufgabe 7–52 :

(a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4xy \quad \text{zu maximierende Funktion} \\ g(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \quad \text{Nebenbedingung} \end{aligned}$$

Die Bedingung von Lagrange

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4y + \lambda 2x &= 0 \\ 4x + \lambda 8y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 1 \end{aligned}$$

- (b) Die erste Gleichung kann mit  $4y$  multipliziert werden und dann vom  $x$ -fachen der zweiten Gleichung subtrahiert werden. Das ergibt

$$16y^2 - 4x^2 = 4(4y^2 - x^2) = 0$$

Wegen der dritten Gleichung gilt  $x^2 = 1 - 4y^2$  und wir erhalten

$$4y^2 - x^2 = 4y^2 - 1 + 4y^2 = 0$$

mit der offensichtlichen Lösung  $y = \pm \sqrt{1/8} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ . Daraus erhalten wir  $x^2 = 1 - 4y^2 = 1 - 1/2 = 1/2$ . Wir verwenden die positiven Lösungen

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Das führt auf die maximale Fläche  $4xy = 1$ .

### Lösung zu Aufgabe 7–53 : Sei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Wegen

$$f(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1}\end{aligned}$$

und der Gradient von

$$g(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - 1$$

ist offensichtlich

$$\nabla g(\vec{x}) = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

Gemäss dem Verfahren von Lagrange ist also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n + \lambda &= 0 \\ x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n + \lambda &= 0 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n + \lambda &= 0 \\ &\vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1} + \lambda &= 0\end{aligned}$$

zu lösen. Multiplizieren Sie nun die  $i$ -te Gleichung mit  $x_i$  und man sieht sofort das

$$\lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \dots = \lambda x_n$$

Da  $\lambda \neq 0$  (wieso?) folgt hieraus das alle  $x_i$ -Werte gleich sein müssen. Da ihre Summe 1 ist, muss  $x_i = 1/n$  sein und in diesem Falle gilt

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

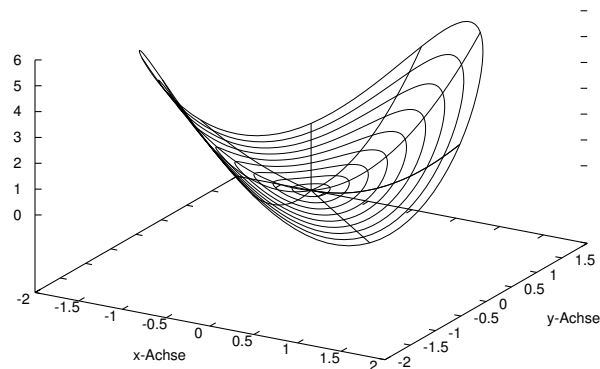
d.h. das geometrische Mittel ist gleich dem arithmetischen Mittel. Da die Funktion  $f$  sicher stetig ist und der Definitionsbereich abgeschlossen und beschränkt, muss die Funktion ihr Maximum annehmen. Die obige Rechnung zeigt, dass es nur einen kritischen Punkt gibt und auf dem Rand des Definitionsbereichs ( $x_i = 0$  oder  $x_i = 1$ ) ist  $f(\vec{x}) = 0$ . Somit muss die Funktion im kritischen Punkt das Maximum annehmen. Somit gilt für beliebige Zahlen die Ungleichung

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

d.h. das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel.

**Lösung zu Aufgabe 7–54 :** Die Figur zeigt alle Lösungen der Gleichung

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + 4x + 4y - 10 = 0$$



Mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

gilt

$$\nabla f(x, y) = 2(x, y)$$

und für die Funktion  $g$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x + y + 4 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 4y + x + 4 \end{aligned}$$

und somit entsteht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + \lambda(2x + y + 4) &= 0 \\ 2y + \lambda(4y + x + 4) &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + xy + 4x + 4y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

für die Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ . Die obenstehende Figur zeigt, dass der Punkt in der Nähe von  $(x, y) = (1, 1)$  liegt. Man könnte also mit dem Verfahren von Newton versuchen die obigen Gleichungen zu lösen. Der Startwert für  $\lambda$  kann zum Beispiel mittels der ersten Gleichung als  $-2/7$  gewählt werden. Die folgende, mit *Mathematica* ausgeführte Berechnung betätigt dies.

#### Mathematica

```
f1[x_, y_, la_] := 2 x + la (2 x + y + 4)
f2[x_, y_, la_] := 2 y + la (4 y + x + 4)
f3[x_, y_, la_] := x^2 + 2 y^2 + x y + 4 x + 4 y - 10
FindRoot[{f1[x, y, la]==0, f2[x, y, la]==0, f3[x, y, la]==0},
  {x, 1.}, {y, 1.}, {la, -2/7}]

{ x -> 0.729254, y -> 0.979503, la -> -0.226546 }
```

Das Newton-Verfahren kann auch „von Hand“ mit *Mathematica* programmiert werden

#### Mathematica

```
A[x_, y_, la_] = {
  {D[f1[x, y, la], x], D[f1[x, y, la], y], D[f1[x, y, la], la]},
  {D[f2[x, y, la], x], D[f2[x, y, la], y], D[f2[x, y, la], la]},
  {D[f3[x, y, la], x], D[f3[x, y, la], y], D[f3[x, y, la], la]}
}
newtonstep[{x_, y_, la_}] :=
  {x, y, la} - Inverse[A[x, y, la]] .
  {f1[x, y, la], f2[x, y, la], f3[x, y, la]}
```



und dann kann die sehr schnelle Konvergenz des Verfahrens beobachtet werden

### Mathematica

```
Clear[ start ]
start={1.0,1.0,-2/7};
Table[ start=newtonstep[ start ], {n,1,5}]
start[[1]]^2 + start[[2]]^2
.
```

{ {0.725664, 0.99115, -0.230088},  
 {0.729305, 0.979493, -0.226561},  
 {0.729254, 0.979503, -0.226546},  
 {0.729254, 0.979503, -0.226546},  
 {0.729254, 0.979503, -0.226546} }

1.49124

### Lösung zu Aufgabe 7–55 :

(a)

$$E = -\frac{\rho g A L^4}{8 I Y} = -\frac{\rho g \pi r^2 L^4}{8 \pi r^4 Y} = -\frac{\rho g L^4}{2 r^2 Y} \approx 7.52 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 7.52 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(b) Rechnung mit Differentialen

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\partial E}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial E}{\partial Y} \Delta Y \\ &= +2 \frac{\rho g L^4}{2 r^3 Y} \Delta r + \frac{\rho g L^4}{2 r^2 Y^2} \Delta Y \\ &= +2 \frac{E}{r} \Delta r + \frac{E}{Y} \Delta Y \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Bedingung

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta Y}{Y} \right| \leq 0.01$$

Nun verlangen wir (etwas willkürlich), dass die relativen Fehler von  $r$  und  $Y$  gleich gross sein sollen. Das führt auf

	relativer Fehler	absoluter Fehler
Radius $r$	$\frac{1}{3}\%$	$3.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Auslenkung $Y$	$\frac{1}{3}\%$	$3.8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Diese Zahlen deuten an, dass diese Art das Elastizitätsmodul zu messen ungeeignet ist.

### Lösung zu Aufgabe 7–56 :

(a)

$$f(1,1) = -a - 1 + 5$$

$$\nabla f(x,y) = (-2a(x-2), -2y)$$

$$\nabla f(1,1) = (-2a(1-2), -2 \cdot 1) = (2a, -2)$$

Sei  $\Delta x = x - 1$  und  $\Delta y = y - 1$ . Nun ist die Gleichung der Tangentialebene gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ z &= -a + 4 + (2a, -2) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ z &= -a + 4 + 2a \Delta x - 2 \Delta y \\ z &= -a + 4 + 2a(x - 1) - 2(y - 1) \\ -2ax + 2y + z &= -a + 4 - 2a + 2 \\ -2ax + 2y + z &= -3a + 6 \end{aligned}$$

(b) Der Ursprung liegt auf der Ebene, falls die Gleichung durch  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  gelöst wird, d.h. für

$$a = 2$$

(c) Ellipsen, Mittelpunkt bei  $(2, 0)$ , die Achse in  $y$ -Richtung ist um den Faktor  $\sqrt{2}$  länger als diejenige in  $x$ -Richtung.

**Lösung zu Aufgabe 7-57 :** Diese Aufgabe ist aus [Ayre75, p. 265] übernommen. Die lineare Approximation ist

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx \frac{\partial P}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial P}{\partial R} \Delta R \\ &= \frac{2U}{R} \Delta U - \frac{U^2}{R^2} \Delta R \\ &= 2P \frac{\Delta U}{U} - P \frac{\Delta R}{R} \end{aligned}$$

Im gegebenen Beispiel gilt  $P = \frac{40\,000}{8} \text{ W} = 5\,000 \text{ W}$

(a)

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx 2P \frac{\Delta U}{U} - P \frac{\Delta R}{R} \\ &= 5\,000 \left( 2 \frac{-5}{200} - \frac{-0.2}{8} \right) \text{ W} \\ &= -125 \text{ W} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{|\Delta P|}{P} < 2 \frac{|\Delta U|}{U} + \frac{|\Delta R|}{R} = 0.15 = 15\%$$

Diese prozentuale Änderung entspricht einer absoluten Änderung von  $\pm 750 \text{ W}$ .

**Lösung zu Aufgabe 7-58 :**

(a) Sei  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Es gilt

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2(x_0 - 2) \\ -2(y_0 - 3) \end{pmatrix}$$

und somit ist die Gleichung der Tangentialebene gegeben durch

$$z - z_0 = -2(x_0 - 2)(x - x_0) - 2(y_0 - 3)(y - y_0)$$

oder auch

$$\Delta z = -2(x_0 - 2) \Delta x - 2(y_0 - 3) \Delta y$$

- (b) Die gesuchte Tangentialebene ist parallel zur  $x$ -Achse, deshalb muss der Koeffizient von  $x$  verschwinden, d.h.  $x_0 - 2 = 0$ . Der Koordinatenursprung muss in der Ebene liegen und somit

$$0 - z_0 = 0(0 - x_0) - 2(y_0 - 3)(0 - y_0)$$

oder auch

$$\begin{aligned} -(3 - (y_0 - 3)^2) &= 2(y_0 - 3)y_0 \\ y_0^2 - 6y_0 + 6 &= 2y_0^2 - 6y_0 \\ y_0^2 &= 6 \\ y_0 &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

Also ist der Kontaktpunkt bei  $(x_0, y_0) = (2, \pm\sqrt{6})$  und  $z_0 = 3 - (\pm\sqrt{6} - 3)^2$ .

### Lösung zu Aufgabe 7–59 :

- (a)

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (x^2 - y^2 - 4)^2}$$

- (b) Wir minimieren die Funktion

$$g(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x^2 - y^2 - 4)^2$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) &= 2(x-1) + 2(x^2 - y^2 - 4)2x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) &= 2(y+2) - 2(x^2 - y^2 - 4)2y = 0 \end{aligned}$$

- (c) Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= x - 1 + (x^2 - y^2 - 4)2x = 0 \\ h_2(x, y) &= y + 2 - (x^2 - y^2 - 4)2y = 0 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= 2x^3 - 2xy^2 - 7x - 1 = 0 \\ h_2(x, y) &= 2y^3 - 2x^2y - 7y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die partiellen Ableitungen

	bei $(x, y)$	bei $(x, y) = (1, -1)$
$\frac{\partial}{\partial x} h_1(x, y) =$	$1 + (x^2 - y^2 - 4)2 + 2x \cdot 2x$	$= -3$
$\frac{\partial}{\partial y} h_1(x, y) =$	$-2y \cdot 2x$	$= 4$
$\frac{\partial}{\partial x} h_2(x, y) =$	$-2x \cdot 2y$	$= 4$
$\frac{\partial}{\partial y} h_2(x, y) =$	$1 - (x^2 - y^2 - 4)2 + 2y \cdot 2y$	$= 13$

Es gilt

$$\begin{aligned} h_1(1, -1) &= -8 \\ h_2(1, -1) &= -7 \end{aligned}$$

Um einen Schritt des Newton-Verfahrens auszuführen, ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{-55} \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{55} \begin{pmatrix} -8 \cdot 13 + 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{55} \begin{pmatrix} -21 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–60 :** Die Gleichung kann nach  $E$  aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} F \cdot l &= \pi \cdot E \left( \frac{d}{2} \right)^2 \delta \\ E &= \frac{4 \cdot F \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot \delta} \\ &= \frac{4 \cdot 0.1 \cdot 2473}{\pi \cdot 0.292^2 \cdot 1.750} \frac{\text{N mm}}{\text{mm}^3} \\ &= 2110 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Der relative Fehler kann nun bestimmt werden

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx \frac{\partial E}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial E}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial E}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial E}{\partial \delta} \Delta \delta \\ \frac{\Delta E}{E} &\approx \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta d}{d} - \frac{\Delta \delta}{\delta} \\ &\text{Abschätzung der Absolutwerte} \\ \frac{\Delta E}{E} &\leq \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \delta}{\delta} \\ &= \frac{0.005}{0.1} + \frac{3}{2473} + 2 \frac{0.001}{0.292} + \frac{0.05}{1.750} \\ &= 0.05 + 0.00121 + 2 \cdot 0.00342 + 0.0286 = 0.087 \end{aligned}$$

Der relative Fehler ist somit 9%. Für den absoluten Fehler  $\Delta E$  gilt

$$\Delta E = \frac{\Delta E}{E} E \approx 0.087 \cdot 2100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 183 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

**Lösung zu Aufgabe 7–61 :** Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs einer Funktion, hier in die Richtung der schnellsten Tiefenzunahme. Es gilt

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} -4x \\ -2y \end{pmatrix}$$

(a) Wegen

$$\vec{a} = \text{grad } f(4, 8) = \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Richtung der grössten Tiefenzunahme gegeben durch die Winkelhalbierende des dritten Quadranten.

(b) Es ergibt sich ein System von einfachen linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x(t) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -4x \\ \frac{d}{dt} y(t) &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y\end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) e^{-4t} \\ y(0) e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 e^{-4t} \\ 5 e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{wobei } t \in \mathbb{R}$$

## 7.6 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- mit den Begriffen Niveaukurve und Isolinie vertraut sein.
- Graphen von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen skizzieren können.
- entscheiden können ob eine Funktion stetig ist.
- entscheiden können ob eine Funktion stetig differenzierbar ist.
- die partiellen Ableitungen und den Gradienten einer Funktion bestimmen können.
- in der Lage sein, die Gleichungen von Tangentialebenen an Flächen zu finden.
- mit den geometrischen Interpretationen von Gradient und Richtungsableitungen umgehen können.
- Taylorapproximationen erster und zweiter Ordnung von Funktionen in zwei und drei Variablen zuverlässig bestimmen können.
- in der Lage sein Extremalprobleme in mehreren Variablen zu lösen.
- mit Idee und Rechnungen für Fehlerdiskussionen vertraut sein.
- die Idee, Vor- und Nachteile des Verfahrens von Newton zur Lösung von mehreren Gleichungen verstehen und ein bis zwei Approximationsschritte für einfache Probleme von Hand ausführen können.
- einfache Extremalprobleme mit Nebenbedingungen mit der Methode von Lagrange lösen können.

## Kapitel 8

# Mehrfache Integrale

In diesem Kapitel werden Verfahren gezeigt, um Funktionen von zwei oder drei Variablen zu integrieren. Wir werden als über Bereiche in der  $xy$ -Ebene oder im Raum  $\mathbb{R}^3$  integrieren in kartesischen-, Zylinder- oder Kugel-Koordinaten. Neben den Integrationstechniken ist der Divergenzsatz ein wesentliches Resultat dieses Kapitels.

### 8.1 Integrale über Bereiche in $\mathbb{R}^2$

#### 8.1.1 Integrale über Rechtecke

**8-1 Beispiel :** Gesucht wird das Volumen zwischen der  $xy$ -Ebene und der Fläche  $z = f(x, y) = 1 + y$  für  $0 \leq x \leq 2$  und  $0 \leq y \leq 2$ . Als erstes ist die Situation zu zeichnen, anschliessend zu rechnen.  $\diamond$

**8-2 Beispiel :** Gesucht wird das Volumen zwischen der  $xy$ -Ebene und der Fläche  $z = f(x, y) = 1 + x + y$  für  $0 \leq x \leq 2$  und  $0 \leq y \leq 3$ .

**Lösung:**

**1. Idee:** Zerschneiden in dünne Scheiben in  $x$ -Richtung.

Wir zerschneiden das Volumen in  $x$ -Richtung bei  $y \approx y_i$  in eine Scheibe der Dicke  $\Delta y_i$ . Die Frontfläche  $A_i$  dieser Scheibe ist gegeben durch

$$A_i = \int_0^2 f(x, y_i) dx = \int_0^2 1 + x + y_i dx = 4 + 2 y_i$$

Nun zerlegen wir das Intervall  $[0, 3]$  durch eine Partition  $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = 3$  und erhalten

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n A_i \Delta y_i \\ &= \sum_{i=1}^n (4 + 2 y_i) \Delta y_i \\ &\longrightarrow \int_0^3 (4 + 2 y) dy \quad \text{falls } \Delta y_i \longrightarrow 0 + \\ &= 21 \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden obigen Formeln zusammen, so ergibt sich

$$V = \int_0^3 \left( \int_0^2 1 + x + y dx \right) dy = 21$$

**2. Idee:** Zerschneiden in dünne Scheiben in  $y$ -Richtung.

Wir zerschneiden das Volumen in  $y$ -Richtung bei  $x \approx x_i$  in eine Scheibe der Dicke  $\Delta x_i$ . Die Frontfläche  $A_i$  dieser Scheibe ist gegeben durch

$$A_i = \int_0^3 f(x_i, y) dy = \int_0^3 1 + x_i + y dy = 7.5 + 3x_i$$

Nun zerlegen wir das Intervall  $[0, 2]$  durch eine Partition  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 3$  und erhalten

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (7.5 + 3x_i) \Delta x_i \\ &\longrightarrow \int_0^2 (7.5 + 3x) dx \quad \text{falls } \Delta x_i \longrightarrow 0 + \\ &= 21 \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden obigen Formeln zusammen, so ergibt sich

$$V = \int_0^2 \left( \int_0^3 1 + x + y dy \right) dx = 21$$

Nicht ganz überraschend liefern beide Ansätze das selbe Volumen, d.h.

$$V = \int_0^3 \left( \int_0^2 1 + x + y dx \right) dy = \int_0^2 \left( \int_0^3 1 + x + y dy \right) dx = 21$$

◇

**8–3 Beispiel :** Gesucht wird das Volumen zwischen der  $xy$ -Ebene und der Fläche  $z = f(x, y) = x^2 + 3y$  für  $1 \leq x \leq 2$  und  $3 \leq y \leq 5$ .

**Lösung:**

**1. Idee:** Zerschneiden in dünne Scheiben in  $x$ -Richtung.

Wir zerschneiden das Volumen in  $x$ -Richtung bei  $y \approx y_i$  in eine Scheibe der Dicke  $\Delta y_i$ . Die Frontfläche  $A_i$  dieser Scheibe ist gegeben durch

$$A_i = \int_1^2 f(x, y_i) dx = \int_1^2 x^2 + 3y_i dx = \frac{7}{3} + 3y_i$$

Nun zerlegen wir das Intervall  $[3, 5]$  durch eine Partition  $3 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = 5$  und erhalten

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n A_i \Delta y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{7}{3} + 3y_i \right) \Delta y_i \\ &\longrightarrow \int_3^5 \left( \frac{7}{3} + 3y \right) dy \quad \text{falls } \Delta y_i \longrightarrow 0 + \\ &= \frac{86}{3} \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden obigen Formeln zusammen, so ergibt sich

$$V = \int_3^5 \left( \int_1^2 x^2 + 3y dx \right) dy = \frac{86}{3}$$



**2. Idee:** Zerschneiden in dünne Scheiben in  $y$ -Richtung.

Wir zerschneiden das Volumen in  $y$ -Richtung bei  $x \approx x_i$  in eine Scheibe der Dicke  $\Delta x_i$ . Die Frontfläche  $A_i$  dieser Scheibe ist gegeben durch

$$A_i = \int_3^5 f(x_i, y) dy = \int_3^5 x_i^2 + 3y dy = 2x_i^2 + 24$$

Nun zerlegen wir das Intervall  $[1, 2]$  durch eine Partition  $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 2$  und erhalten

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (2x_i^2 + 24) \Delta x_i \\ &\longrightarrow \int_1^2 (2x^2 + 24) dx \quad \text{falls } \Delta x_i \longrightarrow 0 \\ &= \frac{86}{3} \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden obigen Formeln zusammen, so ergibt sich

$$V = \int_1^2 \left( \int_3^5 x^2 + 3y dy \right) dx = \frac{86}{3}$$

Nicht ganz überraschend liefern beide Ansätze das selbe Volumen und es gilt

$$V = \int_3^5 \left( \int_1^2 x^2 + 3y dx \right) dy = \int_1^2 \left( \int_3^5 x^2 + 3y dy \right) dx = \frac{86}{3}$$

◇

#### 8-4 Definition : (Integrale über Rechtecke)

Sei

$$D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

und  $f \in C(D, \mathbb{R})$  eine auf  $D$  definierte, stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &:= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

### 8.1.2 Integrale über beliebige Bereiche

Selbstverständlich kann nicht nur über rechteckige Bereiche integriert werden. Als Illustration sehen wir uns ein Integral über einen dreieckigen Grundbereich an.

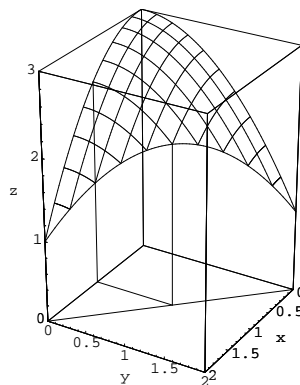


Abbildung 8.1: Integration über einen dreieckigen Bereich

**8–5 Beispiel :** Das Dreieck  $D$  ist bestimmt durch die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  und  $(0, 2)$ . Zu bestimmen ist das Volumen über diesem Dreieck, oben begrenzt durch die Fläche  $z = f(x, y) = 3 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Für einen festen Wert von  $x$  wird die Fläche  $A(x)$  des Schnittes senkrecht zur  $x$  Achse bestimmt. In Figur 8.1 ist der Schnitt bei  $x = 1$  gezeichnet.

Für einen festen Wert von  $x$  variiert  $y$  von 0 bis zu  $2 - x$ . Somit gilt

$$A(x) = \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^{2-x} 3 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy = \frac{14}{3} - x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

Die möglichen Werte von  $x$  sind  $0 \leq x \leq 2$ . Das Volumen wird zerlegt in Schichten mit Volumen  $\Delta V = A(x) \Delta x$ . Für das Gesamtvolumen erhält man somit

$$V = \int_0^2 A(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{14}{3} - x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \frac{14}{3}$$

Insgesamt erhält man das Doppelintegral

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^2 \left( \int_0^{2-x} f(x, y) dy \right) dx = \frac{14}{3}$$

◇

### 8–6 Definition : (Gebiete vom Typ I)

Sind  $h_1$  und  $h_2$  zwei stetige Funktionen und ist das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Bedingung

$$h_1(x) \leq y \leq h_2(x) \quad \text{und} \quad a \leq x \leq b$$

und ist  $f \in C(G, \mathbb{R})$  eine auf  $G$  definierte, stetige Funktion, dann gilt

$$\iint_G f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

### 8–7 Definition : (Gebiete vom Typ II)

Sind  $h_1$  und  $h_2$  zwei stetige Funktionen und ist das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Bedingung

$$g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \quad \text{und} \quad c \leq y \leq d$$

und ist  $f \in C(G, \mathbb{R})$  eine auf  $G$  definierte, stetige Funktion, dann gilt

$$\iint_G f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**8–8 Beispiel :** Sei  $G$  das Innere eines Kreises mit Radius 2 und Zentrum im Ursprung. Zu integrieren ist die Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  über den Bereich  $G$ .

**Lösung: Als Gebiet vom Typ I**

Der Kreis ist beschrieben durch die Bedingung

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \quad \text{und} \quad -2 \leq x \leq 2$$

und somit muss das Doppelintegral

$$\iint_G f(x, y) dA = \int_{-2}^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2 dy \right) dx$$

berechnet werden. Für das innere Integral erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2 dy = \left( yx^3 + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = 2\sqrt{4-x^2} \left( x^2 + \frac{1}{3}(4-x^2) \right)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dA &= \int_{-2}^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2 dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( 2\sqrt{4-x^2} \left( x^2 + \frac{1}{3}(4-x^2) \right) \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( \frac{8}{3}\sqrt{4-x^2} + \frac{4x^2}{3}\sqrt{4-x^2} \right) dx \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Das letzte Integral kann mit Hilfe einer Tabelle oder der Substitution  $x = 2 \sin u$  bestimmt werden. ◇

**8–9 Beispiel :** Vom Halbzylinder  $x^2 + y^2 \leq 9, y > 0$  wird durch eine Ebene durch den Punkt  $(0, 3, 3)$  und die  $x$ -Achse ein Schnitz abgeschnitten. Zu bestimmen ist das Volumen  $V$  dieses Schnitzes.

**Lösung: Als Gebiet vom Typ I**

Die Grundfläche (Halbkreis) ist bestimmt durch

$$0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \quad \text{und} \quad -3 \leq x \leq 3$$

Die Höhe in einem beliebigen Punkt  $(x, y)$  ist gegeben durch  $f(x, y) = y$ . Somit muss das untenstehende Doppelintegral berechnet werden

$$\begin{aligned} V = \iint_G f(x, y) dA &= \int_{-3}^3 \left( \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y dy \right) dx \\ &= \int_{-3}^3 \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{9-x^2} \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (9 - x^2) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left( 9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-3}^3 \\
&= \left( 27 - \frac{27}{3} \right) = 18
\end{aligned}$$

**Als Gebiet vom Typ II**

Die Grundfläche (Halbkreis) ist bestimmt durch

$$-\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 3$$

Die Höhe in einem beliebigen Punkt  $(x, y)$  ist gegeben durch  $f(x, y) = y$ . Somit muss das untenstehende Doppelintegral berechnet werden

$$\begin{aligned}
V = \iint_G f(x, y) \, dA &= \int_0^3 \left( \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{+\sqrt{9-y^2}} y \, dx \right) dy \\
&= \int_0^3 (2y \sqrt{9-y^2}) \, dy \\
&= \frac{-2}{3} (9-y^2)^{3/2} \Big|_{y=0}^3 = 18
\end{aligned}$$

**Mit Hilfe von Mathematica**

Die folgenden vier Blöcke zeigen, dass die mechanischen Rechnungen mit *Mathematica* leicht ausgeführt werden können. Allerdings ist auf die richtige Integrationsreihenfolge zu achten.

**Mathematica**

```
Integrate [ Integrate [y, {y, 0, Sqrt[9-x^2]}], {x, -3, 3}]
```

```
.
18
```

**Mathematica**

```
Integrate [ Integrate [y, {x, -Sqrt[9-y^2], Sqrt[9-y^2]}], {y, 0, 3}]
```

```
.
18
```

**Mathematica**

```
Integrate [y, {x, -3, 3}, {y, 0, Sqrt[9-x^2]}]
```

```
.
18
```

Aber auch ein falsches Resultat kann erreicht werden

**Mathematica**

```
Integrate [y, {y, 0, Sqrt[9-x^2]}, {x, -3, 3}]
```

```
.
      2
3 (9 - x )
```



### 8.1.3 Integrale in Polarkoordinaten

In kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  setzen wir unseren Bereich zusammen aus kleinen Rechtecken

$$x_i \leq x \leq x_i + \Delta x \quad \text{und} \quad y_i \leq y \leq y_i + \Delta y \implies \Delta A = \Delta x \Delta y$$

In Polarkoordinaten  $(\rho, \phi)$  betrachten wir kleine Ringsegmente

$$\rho_i \leq \rho \leq \rho_i + \Delta \rho \quad \text{und} \quad \phi_i \leq \phi \leq \phi_i + \Delta \phi \implies \Delta A \approx \rho \Delta \rho \Delta \phi$$

Diese Rechnungen werden durch Abbildung 8.2 illustriert.

**8–10 Definition :** (Integrale über Ringsegmente)

Sei

$$D = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid R_0 \leq \rho \leq R_1 \quad \text{und} \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1\}$$

und  $f \in C(D, \mathbb{R})$  eine auf  $D$  definierte, stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &:= \int_{R_0}^{R_1} \left( \int_{\phi_0}^{\phi_1} f(\rho, \phi) \rho d\phi \right) d\rho \\ &= \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left( \int_{R_0}^{R_1} f(\rho, \phi) \rho d\rho \right) d\phi \end{aligned}$$

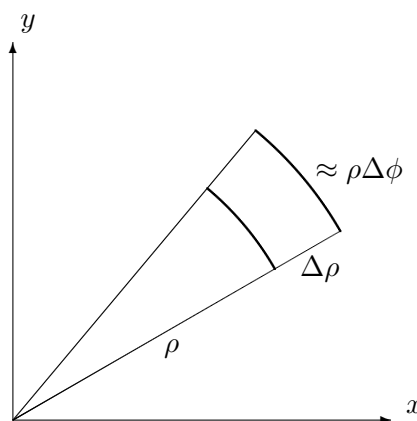


Abbildung 8.2: Flächenelement in Polarkoordinaten

**8–11 Beispiel :** Vom Halbzylinder  $x^2 + y^2 \leq 9, y > 0$  wird durch eine Ebene durch den Punkt  $(0, 3, 3)$  und die  $x$ -Achse ein Schnitt abgeschnitten. Zu bestimmen ist das Volumen  $V$  dieses Schnittes.

**Lösung:** Offensichtlich ist der Integrationsbereich gegeben durch

$$0 \leq \rho \leq 3 \quad \text{und} \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

und die zu integrierende Funktion ist

$$y = \rho \sin \phi$$

Somit erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} V = \iint_D f dA &= \int_{R_0}^{R_1} \left( \int_{\phi_0}^{\phi_1} f(\rho, \phi) \rho d\phi \right) d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^3 \left( \int_{\phi=0}^{\pi} \rho \sin \phi \rho d\phi \right) d\rho \\ &= \left( \int_{\rho=0}^3 \rho^2 d\rho \right) \left( \int_{\phi=0}^{\pi} \sin \phi d\phi \right) = 9 \cdot 2 = 18 \end{aligned}$$

Die Rechnungen sind hier wesentlich einfacher als beim Einsatz von kartesischen Koordinaten (vergleiche Seite 358).  $\diamond$

**8–12 Beispiel :** Bestimme das durch die Ungleichungen

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

bestimmte Volumen.

**Lösung:** Dieses Integral lässt sich selbstverständlich auch mit kartesischen Koordinaten aufstellen. Die Beschreibung in Zylinderkoordinaten ist allerdings viel einfacher

$$0 \leq z \leq \rho^2 \quad \text{und} \quad \rho \leq a$$

Somit erhalten wir das einfache Integral

$$\begin{aligned} V = \iint_D h \, dA &= \int_{\rho=0}^a \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho^2 \, \rho \, d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^a \rho^3 \, d\rho \\ &= 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\rho=0}^a = \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

$\diamond$

### 8.1.4 Integrale in beliebigen Koordinaten

Für eine grosse Zahl von Problemen genügen die vorgestellten Koordinatensysteme. Es gibt aber auch Probleme die mit allgemeineren Verfahren gelöst werden müssen. Deshalb stellen wir hier das Verfahren vor um über „beliebige“ Bereiche zu integrieren.

Ein Bereich  $A$  in  $\mathbb{R}^2$  kann oft durch eine Parametrisierung mittels zweier Parameter  $u$  und  $v$  beschrieben werden, d.h.

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Für kleine Werte von  $(\Delta u, 0)$  und  $(0, \Delta v)$  spannen die zwei Vektoren  $(\Delta u, 0)$  und  $(0, \Delta v, 0)$  ein kleines Rechteck auf (in  $uv$ -Koordinaten) das wir im festen Punkt  $(u_0, v_0)$  anheften. Die Fläche dieses Rechtecks ist gegeben durch  $\Delta u \cdot \Delta v$ .

Bilden wir dieses Rechteck mit der obigen Parametrisierung in die  $xy$ -Ebene  $\mathbb{R}^2$  ab, so entsteht ein parallelogrammähnliches gekrümmtes Flächenstück (siehe Abbildung 8.3). Mit Hilfe einer linearen Approximation sehen wir, dass

$$\vec{x}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \vec{x}(u_0, v_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u$$

und

$$\vec{x}(u_0, v_0 + \Delta v) \approx \vec{x}(u_0, v_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v$$

Also wird das Parallelogramm (linearisierte Figur) aufgespannt durch die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v$$

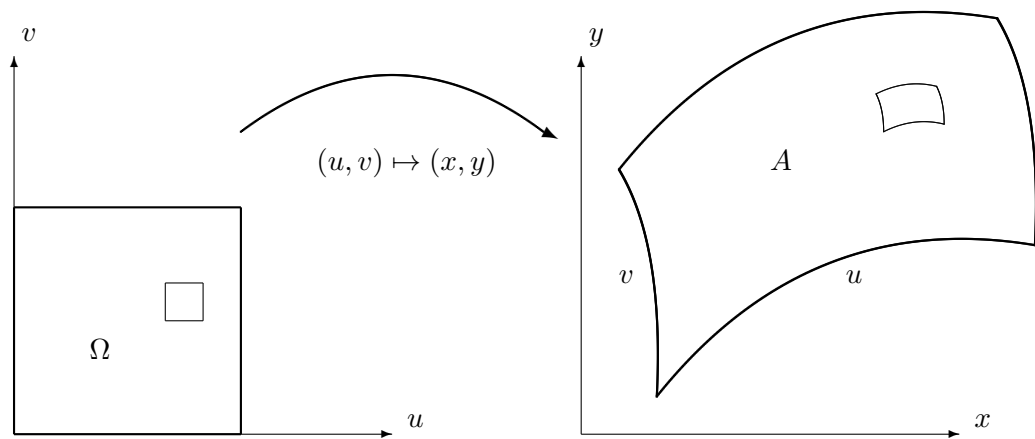


Abbildung 8.3: Integration in beliebigen Koordinaten

Aus der Geometrie wissen wir, dass die Fläche dieses Parallelogramms gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v \\
 &= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v \\
 &= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \Delta u \Delta v \\
 &= \left| \det \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| \Delta u \Delta v
 \end{aligned}$$

Um Schreibarbeit zu sparen schreibt man diese **Jacobi-Determinante** abkürzend als

$$\det \left( \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Sie wird auch **Funktional-Determinante** genannt. Der Ausdruck

$$\left| \det \left( \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right) \right| du dv$$

entspricht dem Flächenelement in  $(u, v)$ -Koordinaten. Diese Konstruktion erlaubt es nun das Integral einer skalaren Funktion über eine parametrisierte Fläche  $A$  auszurechnen.

**8-13 Definition :** Eine Fläche  $A \subset \mathbb{R}^2$  ist beschrieben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Dann ist das Integral einer skalaren Funktion  $f(\vec{x}) = f(x, y)$  über diese Fläche definiert durch

$$\iint_A f = \iint_A f dA := \iint_{\Omega} f(\vec{x}(u, v)) \left| \det \left( \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right) \right| du dv$$

**8–14 Beispiel :** (Polarkoordinaten)

Statt der Parameter  $u$  und  $v$  können wir natürlich auch die Notation  $u = \rho$  und  $v = \phi$  verwenden. Die Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten sind

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\det \left( \frac{\partial (x, y)}{\partial (\rho, \phi)} \right) &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} \\&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho \cos \phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \cos \phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial \phi} \end{bmatrix} \\&= \det \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} \\&= \rho (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho\end{aligned}$$

Somit erhalten wir den bekannten Integrationsfaktor für eine Integration in Polarkoordinaten. Dies darf nicht erstaunen.  $\diamond$

**8–15 Beispiel :** Untersuchen Sie den Bereich  $A \subset \mathbb{R}^2$ , ein Parallelogramm mit den Ecken in den Punkten  $(1, 2)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(3, 3)$  und  $(2, 5)$ . Zu berechnen ist das Integral

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

und anschliessend die  $x$ -Koordinate  $\bar{x}_s$  des Schwerpunktes.

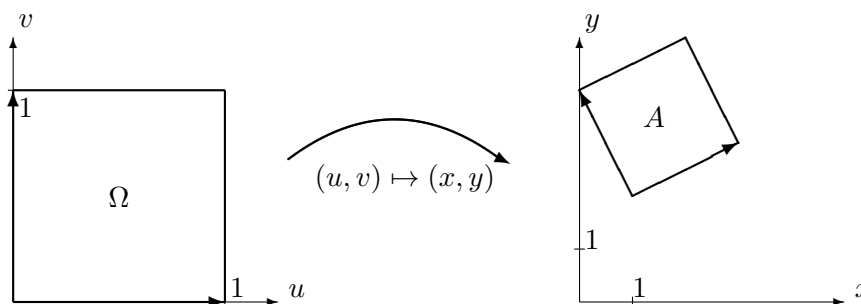


Abbildung 8.4: Integration über ein Parallelogramm

**Lösung:** Das Parallelogramm kann beschrieben werden durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq u, v \leq 1$$

Als Parameterbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  erhält man das Einheitsquadrat  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Die Jacobi-Determinante ist gegeben durch

$$\det \left( \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right) = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -5$$



Also gilt

$$\begin{aligned}
 \iint_A x \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} x(u, v) \left| \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right| du \, dv \\
 &= \int_{[0,1] \times [0,1]} (1 - u + 2v) 5 \, du \, dv \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (1 - u + 2v) 5 \, du \right) dv \\
 &= 5 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + 2v \right) dv \\
 &= 5 \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

Die Fläche ist gegeben durch

$$A = \iint_A 1 \, dx \, dy = \iint_{\Omega} 1 \left| \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right| du \, dv = \dots = 5$$

Also gilt

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_A x \, dx \, dy = \frac{3}{2}$$

Eine Zeichnung wird Sie davon überzeugen, dass dieses Resultat richtig ist. ◇

### 8.1.5 Der Satz von Green, Divergenzatz

#### 8–16 Theorem : (Satz von Green)

Sei das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  umschlossen durch die Kurve  $C$ . Diese Kurve sei positiv orientiert, d.h. das Gebiet  $G$  liegt zur Linken, falls man der Kurve entlangwandert. Weiter sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

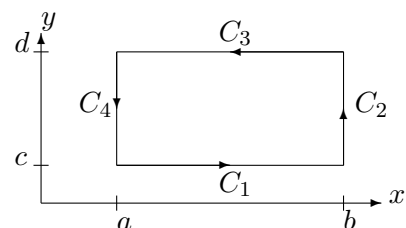
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint_C F_1 \, dx + F_2 \, dy = \iint_G \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dA$$

**Beweis :**

Wir untersuchen nur den Spezialfall eines Rechtecks. Der Rand  $C$  des rechts abgebildeten Rechtecks  $R$

$$\begin{aligned}
 R &= [a, b] \times [c, d] \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ und } c < y < d\}
 \end{aligned}$$

besteht aus vier geraden Teilstücken  $C_i$ . Folglich spalten wir das Linienintegral über den Rand auf in vier einfachere Teilintegrale.



$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{ds} + \int_{C_4} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b F_1(x, c) dx + \int_c^d F_2(b, y) dy + \int_b^a F_1(x, d) dx + \int_d^c F_2(a, y) dy \\
&= \int_a^b F_1(x, c) - F_1(x, d) dx + \int_c^d F_2(b, y) - F_2(a, y) dy \\
&= - \int_a^b F_1(x, d) - F_1(x, c) dx + \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\
&= - \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} dy \right) dx + \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\
&= \iint_R -\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} dA
\end{aligned}$$

□

**8-17 Beispiel :** Für ein konservatives Vektorfeld  $\vec{F}$  gilt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und somit

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_G \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \iint_G 0 dA = 0$$

Da die Kurve  $C$  geschlossen ist, muss dieses Integral Null ergeben.

◇

**8-18 Beispiel :** Sei  $C$  der positiv orientierte Rand des Gebietes  $G$ , wobei  $G$  in Polarkoordinaten gegeben ist durch die Bedingungen

$$a \leq \rho \leq b \quad \text{und} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Zu berechnen ist das Linienintegral

$$\oint_C \begin{pmatrix} 4 - e^{\sqrt{x}} \\ \sin y + 3x^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$$

**Lösung: Mit Hilfe der Linienintegrale**

Die Kurve besteht aus vier leicht parametrisierbaren Teilstücken. Die entstehenden Integrale können aber ziemlich kompliziert werden. Wir versuchen diesen Rechenweg zu vermeiden.

**Mit dem Satz von Green**

Wegen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6x$$

gilt (Integration in Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned}
\oint_C \begin{pmatrix} 4 - e^{\sqrt{x}} \\ \sin y + 3x^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} &= \iint_G 6x dA \\
&= \int_{\rho=a}^b \left( \int_{\phi=0}^{\pi/2} 6\rho \cos \phi \rho d\phi \right) d\rho \\
&= 6 \left( \int_{\rho=a}^b \rho^2 d\rho \right) \left( \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos \phi d\phi \right) \\
&= 6 \frac{b^3 - a^3}{3} 1 = 2 (b^3 - a^3)
\end{aligned}$$

◇

Der Satz von Green kann verwendet werden um eine durch eine Kurve umschlossene Fläche mit Hilfe eines Kurvenintegrals zu bestimmen. Verfahren dieser Art wurden früher verwendet um Planimeter zu konstruieren.

**8–19 Satz :** (Flächenberechnung)

Sei ein Gebiet  $G$  gegeben durch die positiv orientierte, umschliessende Kurve  $C$ . Wir versuchen den Flächeninhalt  $A$  zu bestimmen. Offensichtlich gilt

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{\partial (-y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right)$$

Aufgrund des Satzes von Green gilt also

$$\begin{aligned} A &= \iint_G 1 \, dA \\ &= \oint_C x \, dy = \oint_C \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \oint_C -y \, dx = \oint_C \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \oint_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \end{aligned}$$

**8–20 Beispiel :** (Flächeninhalt einer Ellipse)

Eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  ist gegeben durch die Bedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Der positiv orientierte Rand  $C$  kann parametrisiert werden durch

$$C : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

und somit

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

Mit dem Satz von Green können wir nun den Flächeninhalt bestimmen mittels des Integrales

$$\begin{aligned} A &= \iint_G 1 \, dA = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -b \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = ab\pi \end{aligned}$$

Selbstverständlich kann auch eine der beiden anderen Formeln des vorangehenden Satzes verwendet werden.  $\diamond$

Nun betrachten wir ein Vektorfeld  $\vec{F}$  und ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit Randkurve  $C$  mit den selben Voraussetzungen wie beim Satz von Green. Der „Vektor“

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

hat die Länge  $ds$  mit

$$ds = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

und ist tangential zur Randkurve, das Gebiet  $G$  liegt auf der linken Seite. Somit hat der neue Vektor

$$\vec{n} ds = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt$$

die selbe Länge  $ds$  und er steht senkrecht zur Randkurve. Eine Skizze veranschaulicht, dass er „aus dem Gebiet herauszeigt“. Der Vektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

heißt deshalb auch **äusserer Einheitsnormalenvektor**.

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

berechnet den **Fluss** der Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch das Randstück der Länge  $ds$ . Durch Integration erhalten wir den **Gesamtfluss** aus dem Gebiet heraus durch

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt$$

Nun können wir in beiden Vektoren die Komponenten vertauschen und die Vorzeichen richtig wählen und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \oint_C \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \oint_C \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \oint_C \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} \\ &= \iint_G \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dA \end{aligned}$$

In der untersten Umformung wurde der Satz von Green verwendet.

**8–21 Definition :** Für ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F} \in C^2(G, \mathbb{R}^2)$  in kartesischen Koordinaten heisst der Ausdruck

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

**Divergenz** des Vektorfeldes.

**8–22 Theorem :** (Divergenzsatz)

Sei das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  umschlossen durch die Kurve  $C$ . Diese Kurve sei positiv orientiert, d.h. das Gebiet  $G$  liegt zur Linken, falls man der Kurve entlangwandert. Weiter sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_C F_1 \, dy - F_2 \, dx = \iint_G \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA = \iint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dA$$

Die Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  eines Vektorfeldes kann auch physikalisch interpretiert werden. Sei dazu  $K_r$  ein Kreis mit Radius  $r$  um den Punkt  $\vec{x}$  mit Rand  $C_r$ . Also gilt für ein glattes Vektorfeld und einen kleinen Radius  $r$

$$\oint_{C_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{K_r} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dA \approx \operatorname{Vol}(K_r) \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Somit gilt

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(K_r)} \oint_{C_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

(„Fluss pro Flächeneinheit“) die Divergenz misst den aus der Flächeneinheit heraustretenden Fluss;  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x})$  ist die **Quellstärke** der Feldes  $\vec{F}$  im Punkt  $\vec{x}$ . Man nennt den Punkt  $\vec{x}$  eine **Quelle** (bzw. **Senke**), wenn  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) > 0$  (bzw.  $< 0$ ). Das Vektorfeld  $\vec{F}$  heisst **quellfrei** (divergenzfrei), wenn überall  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 0$ .

Der Divergenzsatz hat einige wichtige physikalische Anwendungen. Die **Wärmeleitungsgleichung**, elektrostatische und elektrodynamische Probleme und Strömungsgleichungen in der Hydrodynamik können mit seiner Hilfe behandelt werden. Einige Beispiele sind in Tabelle 8.1 aufgeführt. Siehe hierzu auch [MeybVach90, p. 497].

## 8.2 Integrale über Bereiche in $\mathbb{R}^3$

### 8.2.1 Integrale in kartesischen Koordinaten

Mit den selben Ideen wie im zweidimensionalen Fall können wir auch Integrale über Quader in  $\mathbb{R}^3$  konstruieren. Das führt auf die folgende natürliche Definition.

Gebiet	Beziehung	Bedeutung der Begriffe
Strömungen	$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = f$	$\vec{v}$ Geschwindigkeit
		$\rho$ Dichte
		$f$ Quellstärke
Wärmeleitung	$\rho \sigma \dot{T} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$	$T$ Temperatur
		$\rho$ Dichte
		$\sigma$ spezifische Wärme
		$k$ Wärmeleitfähigkeit
Elektrostatik	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ elektrisches Feld
		$\rho$ Ladungsdichte
Magnetostatik	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\vec{B}$ magnetisches Feld

Tabelle 8.1: Beispiele zu Divergenz

**8–23 Definition :** (Integrale über Quader)

Sei

$$D = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1] \subset \mathbb{R}^3$$

und  $f \in C(D, \mathbb{R})$  eine auf  $D$  definierte, stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \iiint_D f(x, y, z) \, dV &:= \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} \left( \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{z_0}^{z_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z) \, dy \right) dz \right) dx \\
 &= \int_{z_0}^{z_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} f(x, y, z) \, dy \right) dx \right) dz \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Insgesamt sind sechs verschiedene Integrationsreihenfolgen möglich. Für stetige Funktionen führen sie alle zum selben Resultat.

**8–24 Beispiel :** Ein Bereich in  $\mathbb{R}^3$  sei bestimmt durch

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \quad \text{und} \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

und die spezifische Masse (Masse/Volumen) ist eine bekannte Funktion  $\rho(x, y, z)$ .

- Stellen Sie das Integral auf um die Gesamtmasse  $M$  zu bestimmen.
- Stellen Sie das Integral auf um die  $x$ -Koordinate  $x_s$  des Schwerpunktes zu bestimmen.
- Stellen Sie das Integral auf um die  $z$ -Koordinate  $z_s$  des Schwerpunktes zu bestimmen.

**Lösung:**

(a)

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dV = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} \rho(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

(b)

$$M_{x_s} = \iiint_D x \rho(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} x \rho(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

(c)

$$M_{z_s} = \iiint_D z \rho(x, y, z) dV = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} z \rho(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

◇

**8–25 Beispiel :** Sei  $G$  beschränkt durch die drei Koordinatenebenen und die Ebene  $x + y + z = a > 0$ .

(a) Berechnen Sie

$$\iiint_G 1 dV$$

und geben Sie eine mögliche physikalische Interpretation.

(b) Berechnen Sie

$$\iiint_G x dV$$

und geben Sie eine mögliche physikalische Interpretation.

(c) Berechnen Sie

$$\iiint_G x^2 + y^2 dV$$

und geben Sie eine mögliche physikalische Interpretation.

**Lösung:** Aufgrund der gegebenen Bedingung ist der Bereich bestimmt durch  $0 \leq z \leq a - x - y$  und für einen festen Wert von  $x$  sind  $y$ -Werte mit  $0 \leq y \leq a - x$  zu untersuchen.

(a)

$$\begin{aligned} \iiint_G 1 dV &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} \left( \int_{z=0}^{a-x-y} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} (a - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \frac{1}{2} (a - x)^2 dx = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Volumen des Gebietes. Mit Hilfe der Höhe  $a$  und der Grundfläche  $a^2/2$  kann das Resultat leicht überprüft werden.

(b)

$$\begin{aligned} \iiint_G x dV &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} \left( \int_{z=0}^{a-x-y} x dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} x (a - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \frac{1}{2} x (a - x)^2 dx = \frac{a^4}{24} \end{aligned}$$

- Dies entspricht der Gesamtmasse, falls die spezifische Masse durch  $x$  gegeben ist. Dies ist kaum eine realistische Annahme.
- Mit Hilfe von

$$V x_s = \iiint_G x \, dV$$

kann auch die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes bestimmt werden durch

$$x_s = \frac{a^4/24}{a^3/6} = \frac{a}{4}$$

(c)

$$\begin{aligned} \iiint_G x^2 + y^2 \, dV &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} \left( \int_{z=0}^{a-x-y} x^2 + y^2 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{a-x} (x^2 + y^2) (a - x - y) \, dy \right) dx \\ &= \dots = \frac{a^5}{30} \end{aligned}$$

- Dies entspricht der Gesamtmasse, falls die spezifische Masse durch  $x^2 + y^2$  gegeben ist. Dies ist kaum eine realistische Annahme.
- Bei konstanter spezifische Masse  $\rho = 1$  entspricht dieser Ausdruck auch dem Massenträgheitsmoment bei Drehungen um die  $z$ -Achse.

◇

## 8.2.2 Integrale in Zylinderkoordinaten

**8–26 Definition :** Ist der Bereich  $D \subset \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Bedingungen

$$R_0 \leq \rho \leq R_1 \quad , \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1 \quad \text{und} \quad z_0 \leq z \leq z_1$$

und ist  $f \in C(D, \mathbb{R})$  eine auf  $D$  definierte, stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iiint_D f \, dV &:= \int_{R_0}^{R_1} \left( \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left( \int_{z_0}^{z_1} f(\rho, \phi, z) \rho \, dz \right) d\phi \right) d\rho \\ &= \dots \end{aligned}$$

Insgesamt sind auch hier sechs verschiedene Integrationsreihenfolgen möglich.

## 8.2.3 Integrale in Kugelkoordinaten

**8–27 Definition :** Ist der Bereich  $D \subset \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Bedingungen

$$R_0 \leq r \leq R_1 \quad , \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1 \quad \text{und} \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

und ist  $f \in C(D, \mathbb{R})$  eine auf  $D$  definierte, stetige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iiint_D f \, dV &:= \int_{R_0}^{R_1} \left( \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left( \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta \, d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= \dots \end{aligned}$$

Insgesamt sind auch hier sechs verschiedene Integrationsreihenfolgen möglich.

Die wesentliche Information um Integrale über dreidimensionale Bereiche in einem der obigen Koordinatensysteme berechnen zu können ist in Tabelle 8.2 zusammengestellt.



	Variablen	$dV$
kartesische Koordinaten	$x, y, z$	$dx dy dz$
Zylinderkoordinaten	$\rho, \phi, z$	$\rho d\rho d\phi dz$
Kugelkoordinaten	$r, \phi, \theta$	$r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$

Tabelle 8.2: Volumenelemente

**8–28 Beispiel :** Eine Kugel mit Radius  $R$  und konstanter Massendichte  $\rho$  wird mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert. Zu bestimmen ist das Massenträgheitsmoment

$$J = \iiint_{\text{Kugel}} \rho r^2 dV$$

wobei  $r$  der Abstand von der Rotationsachse ist. Die Rotationsenergie ist gegeben durch

$$E = \iiint_{\text{Kugel}} \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 dV = \frac{1}{2} J \omega^2$$

(a) Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} J &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^2 r dz dr d\phi \\ &= \rho 4\pi \int_0^R r^3 \sqrt{R^2-r^2} dr \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Radius in Zylinderkoordinaten mit  $r$  bezeichnet um Verwechslungen mit der Dichte  $\rho$  zu vermeiden. Das Integral kann mit Hilfe einer Tabelle oder mit *Mathematica* berechnet werden.

(b) Mit Hilfe von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} J &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho 2\pi \left( \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^R r^4 dr \right) \\ &= \rho 2\pi \left( \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^R r^4 dr \right) \\ &= \rho 2\pi \left( -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right) \left( \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \right) \\ &= \rho 2\pi \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{2}{5} R^2 = M \frac{2}{5} R^2 \end{aligned}$$

Dies ist die aus Formelsammlungen bekannte Formel für das Massenträgheitsmoment einer Kugel.

◇

**8–29 Beispiel :** Ein Torus kann durch rotieren der Kreisfläche

$$(x - R_0)^2 + z^2 \leq R_1^2$$

um die  $z$ -Achse erzeugt werden. Hierbei muss  $0 < R_1 < R_0$  gelten.

(a) Bestimmen Sie das Volumen mit Hilfe der Satzes von Guldin (Pappus).

- (b) Versuchen Sie das Integral in kartesischen Koordinaten aufzustellen, um das Volumen zu bestimmen. Sie werden feststellen, dass dies keine leichte Aufgabe ist.
- (c) Stellen Sie das Integral in Zylinderkoordinaten auf um das Volumen zu bestimmen.
- (d) Berechnen Sie das Volumen mit Hilfe eines der obigen Integrale.

**Lösung:**

(a)

$$V = 2 \pi R_0 \pi R_1^2$$

(b) Bei einer Integration sind verschiedene Bereiche zu unterscheiden und die zu integrierende Funktion wird Wurzelausdrücke enthalten. Eine solche Rechnerei sollte wenn möglich vermieden werden.

(c)

$$\begin{aligned}
 V = \iiint_D f \, dV &= \int_{R_0-R_1}^{R_0+R_1} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\sqrt{R_1^2-(R_0-\rho)^2}}^{\sqrt{R_1^2-(R_0-\rho)^2}} 1 \, \rho \, dz \right) d\phi \right) d\rho \\
 &= 2\pi \int_{R_0-R_1}^{R_0+R_1} \left( \int_{-\sqrt{R_1^2-(R_0-\rho)^2}}^{\sqrt{R_1^2-(R_0-\rho)^2}} \rho \, dz \right) d\rho \\
 &= 4\pi \int_{R_0-R_1}^{R_0+R_1} \rho \sqrt{R_1^2 - (R_0 - \rho)^2} \, d\rho \\
 &= 4\pi \int_{R_1}^{-R_1} (R_0 - u) \sqrt{R_1^2 - u^2} \, (-du) \\
 &= 4\pi \int_{-R_1}^{R_1} R_0 \sqrt{R_1^2 - u^2} \, du \\
 &= 2\pi R_0 \pi R_1^2
 \end{aligned}$$

Für eine der obigen Umformungen wurde die Substitution  $u = R_0 - \rho$  verwendet.

**8.2.4 Integrale in beliebigen Koordinaten**

Für eine grosse Zahl von Problemen genügen die vorgestellten Koordinatensysteme. Es gibt aber auch Probleme die mit allgemeineren Verfahren gelöst werden müssen. Deshalb stellen wir hier das Verfahren vor um über „beliebige“ Volumen zu integrieren.

Ein Körper  $K$  in  $\mathbb{R}^3$  kann oft durch eine Parametrisierung mittels dreier Parameter  $u, v$  und  $w$  beschrieben werden, d.h.

$$\vec{x}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v, w) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Für kleine Werte von  $(\Delta u, 0, 0)$ ,  $(0, \Delta v, 0)$  und  $(0, 0, \Delta w)$  spannen die drei Vektoren  $(\Delta u, 0, 0)$ ,  $(0, \Delta v, 0)$  und  $(0, 0, \Delta w)$  einen kleinen Quader auf den wir im festen Punkt  $(u_0, v_0, w_0)$  anheften. Das Volumen dieses Quaders ist gegeben durch  $\Delta u \Delta v \Delta w$ .

Bilden wir diesen Quader mit der obigen Parametrisierung in den Raum  $\mathbb{R}^3$  ab, so entsteht ein parallel-epipedähnliches gekrümmtes Volumenstück. Mit Hilfe einer linearen Approximation sehen wir, dass

$$\vec{x}(u_0 + \Delta u, v_0, w_0) \approx \vec{x}(u_0, v_0, w_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\vec{x}(u_0, v_0 + \Delta v, w_0) \approx \vec{x}(u_0, v_0, w_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v$$

und

$$\vec{x}(u_0, v_0, w_0 + \Delta w) \approx \vec{x}(u_0, v_0, w_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \Delta w$$

Also wird das Parallelepiped (linearisierte Figur) aufgespannt durch die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \Delta w$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass das Volumen dieses Parallelepipedes gegeben ist durch das Spatprodukt der drei Vektoren. Dieses ist gegeben durch den Wert der Determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \Delta v \Delta u \Delta w$$

Um Schreibarbeit zu sparen schreibt man diese **Jacobi-Determinante** abkürzend als

$$\det \left( \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Sie wird auch **Funktional-Determinante** genannt. Der Ausdruck

$$\left| \det \left( \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right) \right| du dv dw$$

entspricht dem Volumenelement in  $(u, v, w)$ -Koordinaten. Diese Konstruktion erlaubt es nun das Integral einer skalaren Funktion über einen parametrisierten Körper  $K$  auszurechnen.

**8–30 Definition :** Eine Körper  $K \subset \mathbb{R}^3$  ist beschrieben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v, w) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Dann ist das Integral einer skalaren Funktion  $f(\vec{x}) = f(x, y, z)$  über diesen Körper definiert durch

$$\iiint_K f = \iiint_K f dV := \iiint_{\Omega} f(\vec{x}(u, v, w)) \left| \det \left( \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right) \right| du dv dw$$

**8–31 Beispiel :** (Zylinderkoordinaten)

Statt der Parameter  $u, v$  und  $w$  können wir natürlich auch die Notation  $u = \rho$ ,  $v = \phi$  und  $w = z$  verwenden. Das führt auf

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\x &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\det \left( \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\rho, \phi, z)} \right) &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \\&= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho \cos \phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \cos \phi}{\partial \phi} & \frac{\partial \rho \cos \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial \phi} & \frac{\partial \rho \sin \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \\&= \det \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\&= \rho (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho\end{aligned}$$

Somit erhalten wir den bekannten Integrationsfaktor für eine Integration in Zylinderkoordinaten. Dies darf nicht erstaunen.  $\diamond$

**8.3 Divergenzsatz**

**8–32 Definition :** Für ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F} \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$  in kartesischen Koordinaten heisst der Ausdruck

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

**Divergenz** des Vektorfeldes.

**8–33 Theorem :** (Divergenzsatz)

Sei das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  umschlossen durch die Fläche  $S$  mit dem äusseren Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}$ . Weiter sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iiint_G \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$$

Es ist zu beachten, dass die Formel für die Berechnung der Divergenz eines Vektorfeldes vom verwendeten Koordinatensystem abhängt. Eine Zusammenstellung finden Sie in Tabelle 8.6 auf Seite 377.

## 8.4 Oberflächenintegrale

Die folgenden Resultate über Einheitsnormalenvektoren und Flächenelemente **müssen** durch passende Skizzen illustriert werden. Anschliessend sollten einige Beispiele durchgerechnet werden.

### 8.4.1 In kartesischen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  kennen wir die drei üblichen Koordinatenrichtungen

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten Tabelle 8.3 für die typischen Flächenelemente.

Variablen	$x, y$	$y, z$	$x, z$
Flächenelement $dA$	$dx \, dy$	$dy \, dz$	$dx \, dz$
Normalenvektor	$\pm \vec{e}_z = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\pm \vec{e}_x = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\pm \vec{e}_y = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 8.3: Flächenelemente in kartesischen Koordinaten

### 8.4.2 In Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  sind die Koordinateneinheitsvektoren gegeben durch

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander. Wir erhalten Tabelle 8.4 für die typischen Flächenelemente in Zylinderkoordinaten.

Variablen	$\rho, \phi$	$\phi, z$	$\rho, z$
Flächenelement $dA$	$\rho \, d\rho \, d\phi$	$\rho \, d\phi \, dz$	$d\rho \, dz$
Normalenvektor	$\pm \vec{e}_z$	$\pm \vec{e}_\rho$	$\pm \vec{e}_\phi$

Tabelle 8.4: Flächenelemente in Zylinderkoordinaten

### 8.4.3 In Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten  $(r, \phi, \theta)$  gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Variablen	$r, \phi$	$\phi, \theta$	$r, \theta$
Flächenelement $dA$	$r \sin \theta \, dr \, d\phi$	$r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$	$r \, dr \, d\theta$
Normalenvektor	$\pm \vec{e}_\theta$	$\pm \vec{e}_r$	$\pm \vec{e}_\phi$

Tabelle 8.5: Flächenelemente in Kugelkoordinaten

und die Koordinateneinheitsvektoren sind gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren haben alle Länge 1 und stehen paarweise senkrecht aufeinander. Wir erhalten Tabelle 8.5 für die typischen Oberflächenelemente in Kugelkoordinaten.

Damit das Divergenztheorem nicht nur in kartesischen Koordinaten verwendet werden kann, sollte man  $\operatorname{div} \vec{F}$  auch in anderen Koordinatensystemen berechnen können. In Tabelle 8.6 finden Sie einen kleinen Auszug aus einer Formelsammlung.

Koordinaten	$\vec{F}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}$
kartesisch	$F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Zylinder	$F_\rho \vec{e}_\rho + F_\phi \vec{e}_\phi + F_z \vec{e}_z$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Kugel	$F_r \vec{e}_r + F_\phi \vec{e}_\phi + F_\theta \vec{e}_\theta$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta}$

Tabelle 8.6: Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen

#### 8.4.4 Oberflächenintegrale in beliebigen Koordinaten

Für eine grosse Zahl von Problemen genügen die vorgestellten Koordinatensysteme. Es gibt aber auch Probleme die mit allgemeineren Verfahren gelöst werden müssen. Deshalb stellen wir hier das Verfahren vor um über „beliebige“ Flächen zu integrieren.

Eine Fläche  $O$  in  $\mathbb{R}^3$  kann oft durch eine Parametrisierung mittels zweier Parameter  $u$  und  $v$  beschrieben werden, d.h.

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Für kleine Werte von  $\Delta u$  und  $\Delta v$  spannen die beiden Vektoren  $(\Delta u, 0)$  und  $(0, \Delta v)$  ein kleines Rechteck auf, das wir im festen Punkt  $(u_0, v_0)$  anheften. Bilden wir dieses Rechteck mit der obigen Parametrisierung

auf die Fläche  $O$  ab, so entsteht ein parallelogrammähnliches gekrümmtes Flächenstück. Mit Hilfe einer linearen Approximation sehen wir, dass

$$\vec{x}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \vec{x}(u_0, v_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u$$

und

$$\vec{x}(u_0, v_0 + \Delta v) \approx \vec{x}(u_0, v_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v$$

Also wird das parallelogrammähnliche Flächenstück aufgespannt durch die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \Delta u \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \Delta v$$

Nun betrachten wir den neuen Vektor

$$\vec{n}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor hat die folgenden beiden, wichtigen Eigenschaften

1. Er steht senkrecht auf der Fläche  $O$ .
2. Die Fläche des oben beschriebenen Parallelogramms ist (approximativ) gegeben durch

$$\Delta A \approx \|\vec{n}\| \Delta u \Delta v$$

Um ein Oberflächenintegral zu bestimmen ist der Bereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  in kleine Rechtecke zu zerlegen, eine entsprechende approximierende Summe zu berechnen, dann der Grenzwert für  $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$  bestimmen.

Diese Konstruktion erlaubt es nun das Integral einer skalaren Funktion über eine parametrisierte Fläche  $O$  auszurechnen.

**8–34 Definition :** Eine Fläche  $O \subset \mathbb{R}^3$  ist beschrieben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Dann ist das Integral einer skalaren Funktion  $f(\vec{x}) = f(x, y, z)$  über diese Fläche definiert durch

$$\iint_O f = \iint_O f \, dA := \iint_{\Omega} f(\vec{x}(u, v)) \|\vec{n}\| \, du \, dv$$

**8–35 Beispiel :** Ist eine Fläche gegeben durch  $z = g(x, y)$  (wobei  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ) so können wir (künstlich)  $x = u$  und  $y = v$  setzen und erhalten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und somit

$$n(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun sieht man leicht, dass

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

Für das Integral einer skalaren Funktion  $f$  über eine solche Fläche  $z = g(x, y)$  gilt also

$$\int_{\text{Fläche}} f \, dA = \iint_{\Omega} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

◇

**8–36 Beispiel :** Ein Teilstück einer Ebene im Raum sei gegeben durch

$$z = 1 + x + 2y \quad \text{wobei} \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad 0 < y < 2$$

Offensichtlich gilt

$$n(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Die Fläche dieses Ebenenstücks sollte man erhalten durch Integration der konstanten Funktion 1

$$\text{Fläche} = \int_{\text{Fläche}} 1 \, dA = \int_0^1 \int_0^2 1 \sqrt{6} \, dy \, dx = 2\sqrt{6}$$

◇

**8–37 Beispiel :** (Zylinderkoordinaten)

Statt der Parameter  $u$  und  $v$  können wir natürlich auch die Notation  $u = \phi$  und  $v = z$  verwenden. Das führt mit einem fixen Radius  $\rho$  auf

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\vec{n}(\phi, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist der wohlbekannte Normalenvektor auf eine Zylinderwand und die Länge  $\|\vec{n}\| = \rho$ . Das Oberflächenelement einer Zylinderwand ist also  $dA = \rho \, d\phi \, dz$  (vergleiche Tabelle 8.4). ◇



Basierend auf der selben Idee kann auch der Fluss eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch eine parametrisierte Fläche bestimmt werden. Dazu muss das Skalarprodukt von  $\vec{F}$  mit dem **Einheitsnormalenvektor**  $\vec{n}_e = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$  integriert werden. Somit kürzt sich der Faktor  $\|\vec{n}\|$  weg und wir erhalten das folgende Resultat.

**8–38 Satz :** Eine Fläche  $O \subset \mathbb{R}^3$  ist beschrieben durch die Parametrisierung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Dann ist der Fluss der Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch diese Fläche gegeben durch das Integral

$$\iint_O \vec{F} = \iint_O \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \iint_O \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, dA = \iint_\Omega \vec{F}(\vec{x}(u, v)) \cdot \vec{n}(\vec{x}(u, v)) \, du \, dv$$

**8–39 Beispiel :** Die Fläche  $O$  sei bestimmt durch  $z = 9 - x^2 - y^2$  und  $z > 0$ . Zu bestimmen ist der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ z \end{pmatrix}$$

durch diese Fläche.

**Lösung:** Als Parameter wählen wir  $x$  und  $y$  und somit ist der Kreis  $x^2 + y^2 < 9$  mit Radius 3 zu untersuchen. Mit  $z = g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  erhalten wir

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_O \vec{F} \cdot \vec{n}_e &= \iint_{x^2+y^2 < 9} \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 < 9} 6x^2 + 6y^2 + (9 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 < 9} 5x^2 + 5y^2 + 9 \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} 5\rho^2 + 9 \, d\phi \right) \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^3 5\rho^3 + 9\rho \, d\rho \\ &= \frac{567\pi}{2} \end{aligned}$$

◇

**8–40 Beispiel :** Die Fläche  $O$  sei bestimmt durch  $z = 9 - x^2 - y^2$  und  $z > 0$ . Zu bestimmen ist der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ z \end{pmatrix}$$

durch diese Fläche.

**Lösung:** Die Aufgabe ist identisch mit der vorangehenden, aber wir wählen eine andere Parametrisierung. Als Parameter wählen wir nun  $u$  und  $v$  mit

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= 9 - u^2 \end{aligned}$$

Somit ist der Bereich  $0 \leq u \leq 3$  und  $0 \leq v \leq 2\pi$  zu betrachten. Wir erhalten

$$\vec{n}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ -2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u^2 \cos v \\ 2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \iint_O \vec{F} \cdot \vec{n}_e &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} 3u \cos v \\ 3u \sin v \\ 9 - u^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u^2 \cos v \\ 2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 6u^3 \cos^2 v + 6u^3 \sin^2 v + 9u - u^3 du dv \\ &= 2\pi \int_0^3 5u^3 + 9u du \\ &= \frac{567\pi}{2} \end{aligned}$$

◇

### 8.4.5 Beispiele

**8–41 Beispiel :** Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den Zylinder  $G$  mit Oberfläche  $O$ , gegeben durch

$$x^2 + y^2 \leq 2^2 \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq 1$$

(a) Zu berechnen ist das Integral

$$\iint_O \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

mit Hilfe des Divergenzsatzes.

(b) Berechne das obige Integral durch direktes Berechnen der Oberflächenintegrale.

**Lösung:**

(a) Offensichtlich gilt

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

und somit (Divergenzsatz)

$$\iint_O \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iiint_G \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = 0$$

(b) Wir teilen die Oberfläche des Zylinders auf in einen Boden  $S_1$ , einen Deckel  $S_2$  und die Mantelfläche  $S_3$ .

1. Bodenfläche  $S_1$

Hier ist der äussere Normalenvektor  $\vec{n} = -\vec{e}_z$  und somit

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{S_1} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dA = \iint_{S_1} -1 \, dA = -\pi 2^2$$

2. Deckel  $S_2$

Hier ist der äussere Normalenvektor  $\vec{n} = \vec{e}_z$  und somit

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{S_2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_{S_2} 1 \, dA = \pi 2^2$$

3. Mantelfläche  $S_3$

Hier setzen wir mit Vorteil Zylinderkoordinaten ein mit den Variablen  $z$  und  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ dA &= \rho \, d\phi \, dz = 2 \, d\phi \, dz \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint_{S_3} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_\rho \, dA \\ &= \iint_{S_3} \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} 2 \, d\phi \, dz \\ &= \iint_{S_3} 0 \, d\phi \, dz = 0 \end{aligned}$$

Somit können wir die drei Resultate zusammensetzen und erhalten

$$\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = -\pi + \pi + 0 = 0$$



**8–42 Beispiel :** Berechne

$$\iint_S \vec{x} \cdot \vec{n} \, dA$$

wobei die geschlossene Fläche  $S$  Rand des Gebietes  $G$  ist und  $\vec{n}$  der äussere Einheitsnormalenvektor.

**Lösung:** Wegen

$$\vec{\nabla} \vec{x} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

und dem Divergenzsatz gilt

$$\iint_S \vec{x} \cdot \vec{n} \, dA = \iiint_G \vec{\nabla} \vec{x} \, dV = \iiint_G 3 \, dV = 3 V$$

Das Volumen kann somit durch ein Oberflächenintegral bestimmt werden.  $\diamond$

**8–43 Beispiel :** Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel mit Hilfe der Methode des vorangehenden Beispiels.

**Lösung:** In Kugelkoordinaten ist die Oberfläche  $S$  einer Kugel vom Radius  $R$  gegeben durch

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

und somit

$$\begin{aligned} 3 V &= \iint_S \vec{x} \cdot \vec{n} \, dA \\ &= \iint_S \begin{pmatrix} R \cos \phi \sin \theta \\ R \sin \phi \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} dA \\ &= \iint_S R \, dA \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= R^3 \int_{\phi=0}^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\pi} d\phi \\ &= 4 \pi R^3 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für das Kugelvolumen die bekannte Formel

$$V = \frac{4 \pi}{3} R^3$$

$\diamond$

**8–44 Beispiel :** Sei  $G$  eine Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung und das Vektorfeld  $\vec{F}$  gegeben durch

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4yz \end{pmatrix} = 4yz \, \vec{e}_z$$

Zu berechnen ist der Fluss dieses Feldes aus der Kugel heraus.

- (a) Durch ein Oberflächenintegral  
 (b) Durch ein Volumenintegral

**Lösung:**

- (a) Wegen

$$4yz = 4R^2 \sin \theta \sin \phi \cos \theta$$

gilt

$$\begin{aligned} \text{Fluss} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA \\ &= \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4R^2 \sin \theta \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} dA \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (4R^2 \sin \theta \sin \phi \cos^2 \theta) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4R^4 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (\sin \phi \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \, d\theta \, d\phi \\ &= 4R^4 \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi \, d\phi \right) \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta \right) = 0 \end{aligned}$$

- (b) Offensichtlich ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = 4y = 4r \sin \theta \sin \phi$$

und wegen des Divergenzsatzes

$$\begin{aligned} \text{Fluss} &= \iiint_G \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA \\ &= \iiint_G 4y \, dV \\ &= \int_0^R \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \left( \int_{\theta=0}^{\pi} (4r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta \, d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= 4 \int_0^R \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \left( \int_{\theta=0}^{\pi} (r^3 \sin^2 \theta \sin \phi) \, d\theta \right) d\phi \right) dr \\ &= 4 \left( \int_0^R r^3 \, dr \right) \left( \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi \, d\phi \right) \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \right) = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen wie erhofft überein. ◇

## 8.5 Potential und Kraftfeld einer Vollkugel

Ist eine feste Masse  $M$  gegeben im Punkt  $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist die potentielle Energie  $U$  eines zweiten Massenpunktes bei  $\vec{x}$  mit Masse  $m$  gegeben durch

$$U(\vec{x}) = \frac{-G m M}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

Die Kraft auf die Masse  $m$  ist dann gegeben durch

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{x}) = \frac{-G m M}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

Für den wichtigen Spezialfall  $\vec{y} = \vec{0}$  ( $M$  im Ursprung) hängen die potentielle Energie  $U$  und die Kraft nur von Radius  $r = \|\vec{x}\|$  ab und es gilt

$$U(r) = \frac{-G m M}{r} \quad \text{und} \quad F(r) = \frac{-G m M}{r^2}$$

Nun betrachten wir eine Kugel mit Radius  $R_0$ , Zentrum im Ursprung und Massendichte  $\rho$ . Eine punktförmige Masse  $m$  wird an einem beliebigen Ort im Raum betrachtet und wir versuchen die potentielle Energie  $U$  und das durch die Kugel erzeugte Kraftfeld  $\vec{F}$  zu bestimmen. Es ist „klar“, dass die Resultate nur vom Abstand  $R$  des Massenpunktes vom Ursprung abhängen. Um die gewünschten Resultate zu erhalten ist eine Integral über die dreidimensionale Kugel zu berechnen.

### 8.5.1 Integration in Kugelkoordinaten

Wir plazieren die Testmasse  $m$  beim Punkt  $(0, 0, R)$  auf der  $z$ -Achse. Der Abstand dieses Punktes vom Punkt mit den Kugelkoordinaten  $r, \phi, \theta$  ist gegeben durch

$$\sqrt{(R - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}$$

Somit ist das Integral

$$U(R) = \iiint_V \frac{-G m \rho}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} dV$$

zu berechnen. Wir bringen zuerst die physikalischen Konstanten auf die andere Seite der Gleichung und betrachten

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= \iiint_V \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} dV \\ &= \int_{r=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} d\theta dr \end{aligned}$$

Hier tritt als Teilproblem das folgende Integral auf, das mit Hilfe der Substitution  $u = \cos \theta$  ( $du = -\sin \theta d\theta$ ) gelöst werden kann

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}} d\theta &= \int_{u=1}^{-1} \frac{-1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r u}} du \\ &= \int_{u=-1}^1 (R^2 + r^2 - 2 R r u)^{-1/2} du \\ &= \frac{-1}{r R} \sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r u} \Big|_{u=-1}^1 \\ &= \frac{1}{r R} \left( \sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(R-r)^2} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r R} ((R+r) - (R-r)) = \frac{2}{R} & \text{falls } R > r \\ \frac{1}{r R} ((R+r) - (r-R)) = \frac{2}{r} & \text{falls } r > R \end{cases} \end{aligned}$$

Somit gilt für  $R \geq R_0$

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= 2\pi \int_{r=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta}} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{R_0} r^2 \frac{2}{R} dr \\ &= \frac{4\pi R_0^3}{3 R} \end{aligned}$$

Für  $R \leq R_0$  ist das Integral aufzuteilen

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= 2\pi \int_{r=0}^{R_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 r R \cos \theta}} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^R r^2 \frac{2}{R} dr + 2\pi \int_{r=R}^{R_0} r^2 \frac{2}{r} dr \\ &= \frac{4\pi R^3}{3 R} + 2\pi (R_0^2 - R^2) \\ &= 2\pi R_0^2 - \frac{2}{3} \pi R^2 \end{aligned}$$

Für  $r = R_0$  liefern beide Formeln das selbe Resultat. Somit gilt für die potentielle Energie

$$U(R) = \begin{cases} -\frac{4\pi R_0^3 \rho}{3} G m \frac{1}{R} & \text{für } R > R_0 \\ \rho G m \left( \frac{2}{3} \pi R^2 - 2\pi R_0^2 \right) & \text{für } R < R_0 \end{cases}$$

Um hieraus die Kraft zu bestimmen muss  $U(R)$  nach  $R$  abgeleitet werden mit dem Resultat

$$F(R) = -\frac{\partial}{\partial R} U(R) = \begin{cases} -\frac{4\pi R_0^3 \rho}{3} G m \frac{1}{R^2} & \text{für } R > R_0 \\ -\rho G m \frac{4\pi}{3} R & \text{für } R < R_0 \end{cases}$$

Für  $R < R_0$  kann man auch schreiben

$$F(R) = -\frac{4\pi R^3 \rho}{3} G m \frac{1}{R^2}$$

und somit entspricht die Kraft genau der Kraft einer im Ursprung konzentrierten Masse einer Kugel mit Radius  $R$ .

## 8.5.2 Integration in Zylinderkoordinaten

Auch hier wird die Testmasse  $m$  beim Punkt  $(0, 0, R)$  auf die  $z$ -Achse gesetzt. Der Abstand dieses Punktes vom Punkt in Zylinderkoordinaten  $r, \theta$  und  $z$  ist gegeben durch

$$\sqrt{(R-z)^2 + r^2}$$

Um Verwechslungen mit der Dichte  $\rho$  zu vermeiden verwenden wir auch hier die Notation  $r$  für den Radius in Zylinderkoordinaten. Es ist aber zu beachten, dass die Radien in Zylinder- und Kugelkoordinaten nicht übereinstimmen. Somit ist das folgende Integral zu berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= \iiint_V \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2 + r^2}} dV \\ &= \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=-\sqrt{R_0^2-r^2}}^{\sqrt{R_0^2-r^2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2 + r^2}} r d\phi dz dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{R_0} \int_{z=-\sqrt{R_0^2-r^2}}^{\sqrt{R_0^2-r^2}} \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2+r^2}} r \, dz \, dr$$

Dieses Integral kann nicht leicht von Hand berechnet werden. Auch *Mathematica* scheitert an diesem Doppelintegral. Wir versuchen deshalb die Reihenfolge der Integration zu vertauschen.

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= \iiint_V \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2+r^2}} \, dV \\ &= \int_{z=-R_0}^{R_0} \int_{r=0}^{\sqrt{R_0^2-z^2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R-z)^2+r^2}} r \, d\phi \, dr \, dz \\ &= 2\pi \int_{z=-R_0}^{R_0} \int_{r=0}^{\sqrt{R_0^2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{(R-z)^2+r^2}} \, dr \, dz \\ &= 2\pi \int_{z=-R_0}^{R_0} \sqrt{(R-z)^2+r^2} \Big|_{r=0}^{\sqrt{R_0^2-z^2}} \, dz \\ &= 2\pi \int_{z=-R_0}^{R_0} \left( \sqrt{(R-z)^2+R_0^2-z^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right) \, dz \\ &= 2\pi \int_{z=-R_0}^{R_0} \left( \sqrt{R^2-2Rz+R_0^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right) \, dz \end{aligned}$$

Ist  $R > R_0$ , so gilt  $\sqrt{(R-z)^2} = R-z > 0$  und somit

$$\begin{aligned} \frac{-U(R)}{G m \rho} &= 2\pi \int_{z=-R_0}^{R_0} \left( \sqrt{R^2-2Rz+R_0^2} - (R-z) \right) \, dz \\ &= 2\pi \left( \frac{-1}{3R} (R^2-2Rz+R_0^2)^{3/2} - Rz + \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{z=-R_0}^{R_0} \\ &= 2\pi \left( \frac{-1}{3R} ((R-R_0)^3 - (R+R_0)^3) - 2RR_0 \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{-1}{3R} (-6R^2R_0 - 6R_0^3) - 2RR_0 \right) \\ &= 2\pi \frac{2R_0^3}{3R} \end{aligned}$$

Falls  $0 < R < R_0$ , so ist das Integral wiederum in zwei Teile zu zerlegen.

$$\frac{-U(R)}{G m \rho} = 2\pi \int_{z=-R_0}^R \left( \sqrt{R^2-2Rz+R_0^2} - (R-z) \right) \, dz$$



$$\begin{aligned}
& + 2\pi \int_{z=R}^{R_0} \left( \sqrt{R^2 - 2Rz + R_0^2} - (z - R) \right) dz \\
& = 2\pi \left( \frac{-1}{3R} (R^2 - 2Rz + R_0^2)^{3/2} - Rz + \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{z=-R_0}^R \\
& \quad + 2\pi \left( \frac{-1}{3R} (R^2 - 2Rz + R_0^2)^{3/2} + Rz - \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{z=R}^{R_0} \\
& = 2\pi \left( \frac{-1}{3R} ((R_0^2 - R^2)^{3/2} - (R + R_0)^3) - R(R + R_0) + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \right) \\
& \quad + 2\pi \left( \frac{-1}{3R} ((R_0 - R)^3 - (R_0^2 - R^2)^{3/2}) + R(R_0 - R) - \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \right) \\
& = 2\pi \left( \frac{-1}{3R} ((R_0 - R)^3 - (R + R_0)^3) - 2R^2 + (R^2 - R_0^2) \right) \\
& = 2\pi \left( \frac{-1}{3R} (-6R_0^2 R - 2R^3) - R^2 - R_0^2 \right) \\
& = 2\pi \left( R_0^2 - \frac{1}{3} R^2 \right)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{-U(R)}{Gm\rho} = \begin{cases} 2\pi \frac{2R_0^3}{3R} & \text{für } R > R_0 \\ 2\pi \left( R_0^2 - \frac{1}{3} R^2 \right) & \text{für } R \leq R_0 \end{cases}$$

Dieses Resultat stimmt wie zu erwarten war mit der Rechnung in Kugelkoordinaten überein.

## 8.6 Einfache Wärmeleitungsprobleme

### 8.6.1 Physikalische Begriffe

Die **Wärmekapazität**  $c$  eines Materials gibt an wieviel Energie aufzuwenden ist um eine Masseneinheit um  $1\text{ K}$  aufzuheizen. Die **Wärmeleitfähigkeit**  $\lambda$  gibt an wie gross der Energiefluss ist aufgrund eines Temperaturgefälles im Material. In Tabelle 8.7 sind die Werte von  $c$  und  $\lambda$  für einige Materialien aufgeführt.

Material	Wärmekapazität bei $20^\circ\text{C}$	Wärmeleitfähigkeit
Symbol	$c$	$\lambda$
Einheiten	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
Eisen	0.452	74
Stahl	0.42 - 0.51	45
Kupfer	0.383	384
Wasser	4.182	0.598

Tabelle 8.7: Einige Werte von Wärmekonstanten

Für den Wärmeenergiefluss  $\vec{q}$  bei einer durch die Funktion  $T$  gegebenen Temperatur gilt

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

Diese Gleichung ist allgemein gültig. Sie kann bei sehr einfachen Verhältnissen auch umgeschrieben werden. Bei einem Temperaturunterschied von  $\Delta T$  über eine Strecke  $\Delta l$ , senkrecht zu einer ebenen Fläche  $A$ , gemessen über eine Zeitdauer  $\Delta t$  ergibt sich also eine Energieverschiebung  $\Delta Q$  pro Zeitbereich  $\Delta t$  von

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta l}$$

	Symbol	Einheiten
Energiedichte	$u$	$\frac{J}{m^3}$
Temperatur	$T$	$K$
Wärmekapazität	$c$	$\frac{J}{K \cdot kg}$
Dichte	$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda$	$\frac{J}{s \cdot m \cdot K}$
Wärmefluss	$\vec{q}$	$\frac{J}{s \cdot m^2}$

Tabelle 8.8: Begriffe der Wärmeleitungstheorie

Zwischen diesen Grössen gelten die physikalischen Gesetze

$$\begin{aligned} u &= c \cdot \rho \cdot T \\ \vec{q} &= -\lambda \nabla T \end{aligned}$$

Sei nun  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein durch die Kurve  $C$  berandetes Gebiet einer dünnen Platte mit Dicke  $h$  in der  $xy$ -Ebene.  $\vec{n}$  ist der äussere Einheitsnormalenvektor. Wir gehen davon aus, dass die Temperatur  $T$  nur von der Zeit  $t$  und den Koordinaten  $x$  und  $y$  abhängt. Weiter sei die Energiequelle (oder Senke) beschrieben durch

$$f(x, y) \quad \text{mit den Einheiten} \quad \frac{J}{s \cdot m^3}$$

Nun ist die Gesamtenergie in Gebiet  $G$  gegeben durch

$$E(t) = h \iint_G u \, dA = h \rho c \iint_G T \, dA$$

Dann gilt aufgrund der Energieerhaltung

$$h \rho c \iint_G \frac{\partial T}{\partial t} \, dA = -h \oint_C \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds + h \iint_G f \, dA$$

und mit Hilfe des Divergenzsatzes gilt also

$$\begin{aligned} \rho c \iint_G \frac{\partial T}{\partial t} \, dA &= - \iint_G \operatorname{div} \vec{q} \, dA + \iint_G f \, dA \\ &= - \iint_G \operatorname{div} (-\lambda \nabla T) \, dA + \iint_G f \, dA \end{aligned}$$

Sind  $c$ ,  $\rho$  und  $\lambda$  konstant, so vereinfacht sich das zu

$$\iint_G \frac{\partial T}{\partial t} dA = \iint_G \frac{\lambda}{c \rho} \operatorname{div}(\nabla T) + \frac{1}{\rho c} f dA$$

Nun setzen wir

$$k = \frac{\lambda}{c \rho}$$

Da die obige Energieerhaltung für beliebige Gebiete  $G$  gilt, müssen die beiden Funktionen unter dem Integralzeichen gleich sein, d.h. wir erhalten die **allgemeine Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \operatorname{div}(\nabla T) + \frac{1}{\rho c} f$$

Da die Funktionen  $T$  und  $f$  je von  $(t, x, y)$  abhängig sind können wir auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, x, y) = k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t, x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(t, x, y) \right) + \frac{1}{\rho c} f(t, x, y)$$

oder kürzer

$$\frac{\partial}{\partial t} T = k \Delta T + \frac{1}{\rho c} f$$

### 8.6.2 Der Laplaceoperator in verschiedenen Koordinatensystemen

Der Differentialoperator  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  heisst **Laplaceoperator**. Er kann auch für Funktionen von drei Variablen bestimmt werden. Die Tabelle 8.9 zeigt den Laplaceoperator in verschiedenen Koordinatensystemen mit zwei leicht verschiedenen Notationen. Im Folgenden zeigen wir am Beispiel von Zylinderkoordinaten wie diese Tabelle erstellt wurde.

Funktion $u$	$\Delta u$
kartesische Koordinaten $u(x, y, z)$	$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Zylinderkoordinaten $u(\rho, \phi, z)$	$\frac{1}{\rho} (\rho u_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\phi\phi} + u_{zz}$ $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Kugelkoordinaten $u(r, \phi, \theta)$	$\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta$ $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$

Tabelle 8.9: Laplaceoperator in verschiedenen Koordinatensystemen

In kartesischen Koordinaten ist der Operator definiert durch

$$\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$\Delta u(x, y, z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Für Zylinderkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x_\rho &= \cos \phi & x_\phi &= -\rho \sin \phi \\ y_\rho &= \sin \phi & y_\phi &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

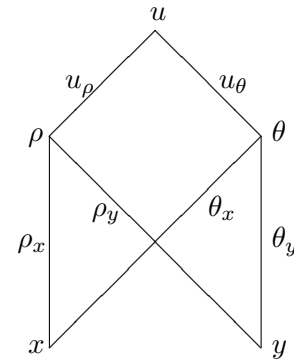
Man kann auch nach  $\rho^2$  und  $\tan \theta$  auflösen.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Das ergibt die partiellen Ableitungen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{x}{\rho} = \cos \theta & \rho_y &= \frac{y}{\rho} = \sin \theta \\ \theta_x &= \frac{-\sin \theta}{\rho} & \theta_y &= \frac{\cos \theta}{\rho} \end{aligned}$$

Das Diagramm ([Far182, p. 294] rechts zeigt die Abhängigkeiten der Variablen auf.  $u$  hängt von  $\rho$  und  $\theta$  ab, die je von  $x$  und  $y$  abhängig sind. Abhängigkeit ist durch Linien illustriert. Nun müssen wir  $u_{xx}$  durch  $\rho$  und  $\theta$  ausdrücken. Wir bestimmen zuerst  $u_x$  indem wir die Pfade von  $u$  zu  $x$  (via  $\rho$  und  $\theta$ ) addieren. Dies entspricht der Kettenregel für mehrere Variablen.



Das führt auf die Gleichungen

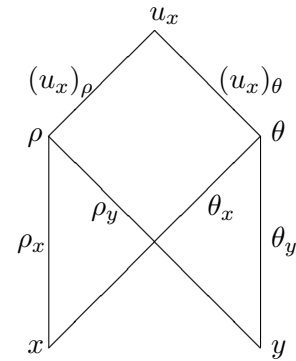
$$\begin{aligned} u_x &= u_\rho \rho_x + u_\theta \theta_x = u_\rho \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \\ u_y &= u_\rho \rho_y + u_\theta \theta_y = u_\rho \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \end{aligned}$$

Nun führen wir die selben Rechnungen noch einmal aus, aber mit  $u_x$  statt  $u$  als Funktion.

<sup>1</sup>Hier ist eine der vier notwendigen Berechnungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan \theta &= \frac{d}{dx} \frac{y}{x} \\ \frac{\theta_x}{\cos^2 \theta} &= \frac{-y}{x^2} = \frac{-\rho \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta} \\ \theta_x &= \frac{-\sin \theta}{\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= (u_x)_\rho \rho_x + (u_x)_\theta \theta_x \\
&= \left( u_\rho \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \right)_\rho \cos \theta \\
&\quad - \left( u_\rho \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \right)_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \\
&= \left( u_{\rho\rho} \cos \theta - u_{\theta\rho} \frac{\sin \theta}{\rho} + u_\theta \frac{\sin \theta}{\rho^2} \right) \cos \theta \\
&\quad - \left( u_{\rho\theta} \cos \theta - u_\rho \sin \theta - u_{\theta\theta} \frac{\sin \theta}{\rho} - u_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \right) \frac{\sin \theta}{\rho}
\end{aligned}$$



Eine sehr ähnliche Rechnung für  $u_{yy}$  zeigt, dass

$$\begin{aligned}
u_{yy} &= \left( u_{\rho\rho} \sin \theta + u_{\theta\rho} \frac{\cos \theta}{\rho} - u_\theta \frac{\cos \theta}{\rho^2} \right) \sin \theta \\
&\quad + \left( u_{\rho\theta} \sin \theta + u_\rho \cos \theta + u_{\theta\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} - u_\theta \frac{\sin \theta}{\rho} \right) \frac{\cos \theta}{\rho}
\end{aligned}$$

Nun kann man die beiden Gleichungen addieren und erhält

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + u_{\rho\theta} 0 + u_{\theta\theta} \frac{1}{\rho^2} + u_\rho \frac{1}{\rho} + u_\theta 0$$

und somit erhalten wir das in allen guten Formelsammlungen (oder auch Tabelle 8.9) aufgeführte Resultat

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}$$

### 8.6.3 Stationäre Randwertprobleme

Wir untersuchen nun ein festes Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit Rand  $\partial G$  und wollen das Verhalten der Temperatur  $T$  oder der Energiedichte  $u$  untersuchen. Wir untersuchen „nur“ den stationären Zustand, d.h. die Funktionen sind unabhängig von der Zeit  $t$ . Die Wärmeleitungsgleichung

$$-\lambda \Delta T = f$$

beschreibt das Verhalten im Inneren des Gebietes, wobei die Wärmequelle  $f$  bereits bekannt sei. Es gibt verschiedene mögliche Verhalten auf dem Rand.

#### Vorgegebene Temperatur

Auf dem Rand  $\partial G$  sei die Temperatur fixiert und durch eine Funktion  $g(x, y)$  gegeben. Dann ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
-\lambda \Delta T(x, y) &= f(x, y) & \text{für } (x, y) \in G \\
T(x, y) &= g(x, y) & \text{für } (x, y) \in \partial G
\end{aligned}$$

nach der unbekannten Funktion  $T(x, y)$  aufzulösen. Dies ist eine **partielle Differentialgleichung** zweiter Ordnung. Leider steht in diesem Kurs die Zeit nicht zur Verfügung um solche Probleme zu lösen und wir müssen uns auf einfache (wichtige) Spezialfälle beschränken.

### Isolierter Rand

Ist der Rand des Gebietes thermisch isoliert, so muss die Komponente des Wärmeflusses  $\vec{q}$  in die Richtung des Normalenvektors  $\vec{n}$  des Randes verschwinden. Die Wärmeenergie darf nicht durch den Rand fließen, sondern nur parallel zum Rand. Dies führt auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta T(x, y) &= f(x, y) && \text{für } (x, y) \in G \\ -\lambda \vec{n} \cdot \nabla T(x, y) &= 0 && \text{für } (x, y) \in \partial G \end{aligned}$$

### 8.6.4 Wärmefluss durch eine Rohrwand

Sei ein Rohr der Länge  $L$  mit Innenradius  $R_i$  und Aussenradius  $R_a$  gegeben. Auf der Innenseite herrsche eine Temperatur von  $T_0$  und aussen eine solche von  $T_1$ . Wir werden Effekte der Seitenwände des Rohres vernachlässigen, da wir von  $L \gg R_a$  ausgehen. Wir gehen von einem System im Gleichgewicht aus, damit wird die Temperatur nicht von der Zeit abhängig sein.

#### Mit Energieerhaltung und Divergenzsatz

Die Wärmeenergiedichte und die Temperatur sind proportionale Größen, deshalb können wir als unbekannte Funktion  $T$  direkt die Temperatur nehmen. Da die Situation radialsymmetrisch ist wird die Temperatur  $T(r)$  nur vom Radius  $R_i \leq r \leq R_a$  abhängen und der Energiefluss durch die Fläche  $r = \text{const}$  muss unabhängig von  $r$  sein. Dies ist eine Konsequenz des Energieerhaltungssatzes und des Divergenzsatzes. Somit können wir den Energiefluss durch die Fläche mit Radius  $r$  bestimmen als

$$\text{Energiefluss} = c_0 = -\lambda 2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r}$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit unabhängiger Variablen  $r$  und abhängiger Variablen  $T$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-c_0}{2\pi r L \lambda} = \frac{-c_0}{2\pi L \lambda} \frac{1}{r}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$T(r) = \frac{-c_0}{2\pi L \lambda} \ln r + c_1$$

Die beiden Konstanten  $c_0$  und  $c_1$  lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen

$$T(R_i) = T_0 \quad \text{und} \quad T(R_a) = T_1$$

bestimmen. Zu lösen ist das System

$$T_0 = c_0 \frac{-1}{2\pi L \lambda} \ln R_i + c_1 \quad \text{und} \quad T_1 = c_0 \frac{-1}{2\pi L \lambda} \ln R_a + c_1$$

Daraus erhält man für den Wärmefluss

$$c_0 = \lambda L 2\pi \frac{T_0 - T_1}{\ln(R_a/R_i)}$$

#### Als Randwertproblem

Das selbe Problem kann auch als Randwertproblem aufgefasst werden. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta T(x, y) &= 0 && \text{für } R_i^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_a^2 \\ T(x, y) &= T_0 && \text{für } x^2 + y^2 = R_i^2 \\ T(x, y) &= T_1 && \text{für } x^2 + y^2 = R_a^2 \end{aligned}$$

Aufgrund der Radialsymmetrie sollte man hier unbedingt Polarkoordinaten verwenden. Da die Funktion  $T$  nur vom Radius  $r$  abhängt erhält man

$$\begin{aligned}\Delta T(r) &= 0 && \text{für } R_i \leq r \leq R_a \\ T(r) &= T_0 && \text{für } r = R_i \\ T(r) &= T_1 && \text{für } r = R_a\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 0 && \text{für } R_i \leq r \leq R_a \\ T(R_i) &= T_0 \\ T(R_a) &= T_1\end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Nebenbedingungen. Sie kann direkt integriert werden. Aus der ersten Gleichung kann man sofort ablesen, dass

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = k_1$$

konstant sein muss. Diese separable Gleichung erster Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$T(r) = k_1 \ln r + k_2$$

Die beiden Randbedingungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}k_1 \ln R_i + k_2 &= T_0 \\ k_1 \ln R_a + k_2 &= T_1\end{aligned}$$

uns somit auf die Lösung

$$k_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln R_a - \ln R_i} = \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_a/R_i)}$$

Die Radialkomponente des Gradienten der Temperatur ist somit gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial r} T(r) = k_1 \frac{1}{r} = \frac{T_1 - T_0}{r \ln(R_a/R_i)}$$

Da die Oberfläche eines Rohres mit Radius  $r$  gegeben ist durch

$$A = 2 \pi r L$$

erhalten wir den Wärmeenergiefluss

$$\lambda A \frac{\partial}{\partial r} T(r) = \lambda 2 \pi r L \frac{T_1 - T_0}{r \ln(R_a/R_i)} = \lambda 2 \pi L \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_a/R_i)}$$

Diese Grösse ist, wie erwartet, unabhängig vom Radius  $r$ .

### Temperaturänderung entlang des Rohrs

Durch die obigen Rechnungen wissen wir wieviel Energie pro Zeit in einem Rohr der Länge  $\Delta L$  verloren geht. Somit können wir die Temperaturänderung  $\Delta T_0$  der Flüssigkeitstemperatur auf einem Stück der Länge  $\Delta L$  bestimmen.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \lambda 2 \pi \Delta L \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_a/R_i)} = \rho c \Delta L \pi R_i^2 \frac{\Delta T_0}{dt} \\ \frac{\Delta T_0}{dt} &= \frac{\lambda 2 \pi}{\rho c \pi R_i^2} \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_a/R_i)}\end{aligned}$$

Bewegt sich die Flüssigkeit mit Geschwindigkeit  $v$  so benötigt sie die Zeit  $\Delta t = \frac{\Delta L}{v}$  um das Stück der Länge  $\Delta L$  zu durchlaufen. In dieser Zeit wird die Flüssigkeit um  $\Delta T_0/dt$  abgekühlt. Somit können wir auch die Abkühlung pro Länge berechnen.

$$\frac{\Delta T_0}{\Delta L} = \frac{\Delta T_0}{dt} \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \frac{\lambda 2}{\rho c R_i^2} \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_a/R_i)}$$

Bezeichnet die Koordinate  $z$  die Position entlang des Rohres, so wird aus dem Obigen eine Differentialgleichung für die unabhängige Grösse  $T_0(z)$

$$\frac{dT_0(z)}{dz} = \frac{2\lambda}{v \rho c R_i^2 \ln(R_a/R_i)} (T_1 - T_0(z)) = \alpha (T_1 - T_0(z))$$

Diese lineare, inhomogene Differentialgleichung hat die Lösung

$$T_0(z) = T_1 + c e^{-\alpha z}$$

wobei die Konstante  $c$  durch eine Anfangsbedingung zu bestimmen wäre.

### Approximation für dünne Wände

Ist  $\Delta R = R_a - R_i \ll R_i$ , so gilt wegen der Taylorapproximation

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

und

$$\frac{R_a}{R_i} = \frac{R_i + \Delta R}{R_i} = 1 + \frac{\Delta R}{R_i}$$

die Approximation

$$\ln(R_a/R_i) = \ln\left(1 + \frac{\Delta R}{R_i}\right) \approx \frac{\Delta R}{R_i}$$

Somit können wir den Energiefluss durch ein Rohr mit dünner Wand approximieren durch

$$\lambda L 2 \pi R_i \frac{T_0 - T_1}{\Delta R}$$

Für die Temperaturänderung pro Länge erhalten wir hier

$$\frac{\Delta T_0}{\Delta L} = \frac{1}{v} \frac{\lambda 2 \pi}{\rho c \pi R_i} \frac{T_1 - T_0}{\Delta R}$$

### 8.6.5 Wärmeleitwertmessung

In einem kupfernen Becher mit Aussendurchmesser  $2R_a = 84 \text{ mm}$ , Innenhöhe  $h = 102 \text{ mm}$  und Wand- und Bodendicke  $2 \text{ mm}$  wird eine unbekannte Flüssigkeit mit Masse  $m = 563.5 \text{ g}$  gelagert. Die Flüssigkeit wird gleichmässig erhitzt. Nach dem Abschalten der Heizung wird zu einigen Zeitpunkten die Temperatur im Innern des Bechers gemessen. Der Becher wird Wärme durch Boden und Wand abstrahlen, der Deckel sei ein perfekter Isolator.

1. Finde die Temperatur  $T(t)$  der Flüssigkeit als Funktion der Zeit  $t$ .
2. Wie kann aus den gemessenen Daten auf die Wärmekapazität  $c$  der unbekannten Flüssigkeit geschlossen werden?



Sei  $T_0$  die konstante Aussentemperatur. Somit ist der Energiefluss durch den Boden gegeben durch

$$-\lambda \frac{\pi R^2}{\Delta R} (T(t) - T_0)$$

Für den Fluss durch die Wand gilt

$$-\lambda \frac{2\pi h}{\ln(R_a/R_i)} (T(t) - T_0)$$

Wegen  $\Delta R/R = 1/20$  kann die Approximation für dünne Wände verwendet werden (schätzen Sie den Fehler ab) und es ergibt sich daraus für den Gesamtenergieverlust pro Zeiteinheit

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\lambda \left( \frac{\pi R_i^2}{\Delta R} + \frac{2\pi R_i h}{\Delta R} \right) (T(t) - T_0)$$

Die in der unbekannten Flüssigkeit gespeicherte Energie ist

$$E(t) = c m (T(t) - T_0) \quad .$$

Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(t) - T_0) = -\lambda \frac{\pi R_i^2 + 2\pi R_i h}{c m \Delta R} (T(t) - T_0) = -k (T(t) - T_0)$$

wobei sich die Konstante  $k$  aus den physikalischen Daten bestimmen lässt. Die Lösung ist gegeben durch

$$T(t) = (T(0) - T_0) e^{-kt} + T_0$$

Durch messen der Temperatur kann mittels einer einfachen Datenanalyse (Regression)  $k$  bestimmt werden. Aus der Beziehung

$$k = -\lambda \frac{\pi R_i^2 + 2\pi R_i h}{c m \Delta R}$$

findet man

$$c = -\lambda \frac{\pi R_i^2 + 2\pi R_i h}{k m \Delta R} \quad .$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Die Rechnungen können auch ohne die Approximation für dünne Wände durchgeführt werden. Vergleichen Sie die erhaltenen numerischen Ergebnisse.

### 8.6.6 Wie heiss wird diese Pfanne?

Eine Pfanne mit einem Radius von  $R = 8 \text{ cm}$  und einer Höhe von  $h = 12 \text{ cm}$  hat eine Seitenwand und Deckel aus Stahl mit Dicke  $\Delta R = 0.2 \text{ cm}$  und einen kupfernen Boden der  $d = 1 \text{ cm}$  dick ist. Die Heizplatte sei auf einer festen Temperatur von  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  und die Umgebungstemperatur ist  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Wie heiss wird das Wasser in der Pfanne maximal?

Die Maximaltemperatur  $T$  wird erreicht, falls durch den Boden genausoviel Energie in das Wasser fließt wie durch Wand und Deckel verloren geht. Somit kann die folgende Energiebilanz aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \text{Aufgenommene Energie} &= \text{Abgegebene Energie durch Deckel und Wand} \\ \lambda_c \pi R^2 \frac{T_1 - T}{d} &= \lambda_s \pi R^2 \frac{T - T_0}{\Delta R} + \lambda_s 2\pi R h \frac{T - T_0}{\Delta R} \end{aligned}$$

Hierbei wurde bereits die Approximation für dünne Wände berücksichtigt und  $\lambda_c$  (bzw.  $\lambda_s$ ) ist die Wärmeleitfähigkeit von Kupfer (bzw. Stahl). Die Gleichung kann vereinfacht werden zu

$$\lambda_c R \frac{T_1 - T}{d} = \lambda_s (R + 2h) \frac{T - T_0}{\Delta R}$$

und wir haben eine Gleichung für die einzige Unbekannte  $T$ .

$$\begin{aligned}\lambda_c R (T_1 - T) \Delta R &= \lambda_s (R + 2h) (T - T_0) d \\ \lambda_c R T_1 \Delta R + \lambda_s (R + 2h) T_0 d &= T (\lambda_s (R + 2h) d + \lambda_c R \Delta R)\end{aligned}$$

Das führt auf die Lösung

$$T = \frac{T_1 \lambda_c R \Delta R + T_0 \lambda_s (R + 2h) d}{\lambda_c R \Delta R + \lambda_s (R + 2h) d}$$

In diese Formel kann man nun die gegebenen Daten einsetzen. Die Rechnungen können auch ohne die Approximation für dünne Wände durchgeführt werden. Vergleichen Sie die erhaltenen numerischen Ergebnisse. Mit einer  $100^\circ\text{C}$  heißen Kochplatte wird das Wasser also kaum zum Sieden gebracht.

#### Mathematica

```
R=0.08; h=0.12; dR = 0.002; d = 0.01;
T1= 100 ; T0 = 20;
ls = 45 ; lc = 384;
T:= (T1 lc R dR + T0 ls (R + 2 h) d) / (lc R dR + ls (R+ 2h) d)
T
.
43.9252
```

### 8.6.7 Wärmeübergangskoeffizienten

Die oben vorgestellten Überlegungen führen bei einem Temperaturunterschied von  $\Delta T$  über eine Strecke  $l$ , senkrecht zu einer ebenen Fläche  $A$ , gemessen über eine Zeitdauer  $\Delta t$  zu einer Energieverschiebung  $\Delta Q$  von

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda}{l} A \Delta T$$

Diese Formel geht davon aus, dass die Temperaturen in den Flüssigkeiten oder Gasen, die eine Wand berühren eine konstante Temperatur haben, bis hin zur Kontaktfläche. Dies ist in der linken linken Hälfte von Abbildung 8.5 illustriert.



Abbildung 8.5: Korrektur durch Wärmeübergangskoeffizienten

Tatsächlich wird sich die Temperatur wie in der rechten Hälfte von Abbildung 8.5 verhalten. Bei der selben totalen Temperaturdifferenz fällt die Temperatur im mittleren Material etwas weniger steil ab. Der Energiefluss wird also verkleinert. Um diese Korrekturen zu berücksichtigen führt man die **Wärmeübergangskoeffizienten**  $\alpha_1, \alpha_2$  der ersten und zweiten Kontaktfläche ein und ersetzt in der obigen Formel  $\lambda/l$  durch  $k$ , wobei

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

Somit erhalten wir die Basisformel

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k A \Delta T$$

Die Werte  $\alpha_i$  hängen von der Flüssigkeit (Gas) und seiner Bewegung und der Form der Oberfläche ab, nicht aber vom Material des festen Körpers. Es gibt Tabellen für die häufig auftretenden Situationen.

## 8.7 Aufgaben

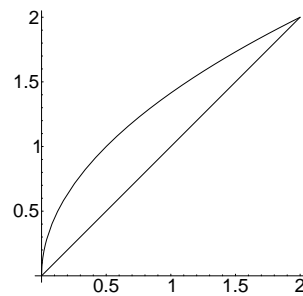
### 8.7.1 Zweidimensionale Bereiche

#### • Aufgabe 8–1:

Untersuchen Sie das rechtsstehende Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  zwischen  $y = \sqrt{2x}$  und der Geraden. Zu bestimmen ist

$$S = \iint_G x \, dA$$

Examiner la domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$  à droite, entre un  $y = \sqrt{2x}$  et la droite. Examiner l'intégral ci-dessus.



(a) Stellen Sie ein explizites Doppelintegral auf für  $S$ .

(a) Trouver un double intégral explicite pour  $S$ .

(b) Anschliessend ist  $S$  zu berechnen, die Zwischenschritte sind zu zeigen. Die Rechnungen sollten exakt sein.

(b) Puis calculer  $S$ , montrer les calculs intermédiaires. Rendre des calculs exactes.

#### • Aufgabe 8–2:

(a) Skizzieren Sie das durch die Kurven  $y = x^2$ ,  $x = 2$  und  $y = 1$  eingeschlossene Gebiet  $G$  und untersuchen Sie das Integral

$$\iint_G x^2 + y^2 \, dA$$

(b) Zerlegen Sie das Gebiet  $G$  in vertikale Streifen.

(c) Zerlegen Sie das Gebiet  $G$  in horizontale Streifen.

#### • Aufgabe 8–3:

Untersuchen Sie das Integral

Examiner l'intégrale

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy \, dx$$

(a) Skizzieren Sie das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  über das integriert wird.

(a) Esquisser la domaine d'intégration  $G \subset \mathbb{R}^2$ .

(b) Schreiben Sie das Integral um zu einem Integral in Polarkoordinaten.

(b) Réécrire l'intégrale en utilisant des coordonnées polaires.

(c) Berechnen Sie das Integral.

(c) Calculer l'intégrale.

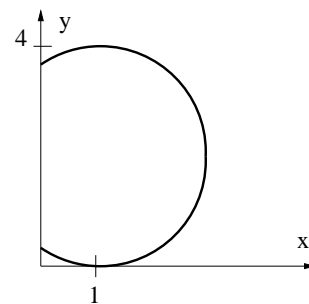
• **Aufgabe 8–4:**

Das untenstehende, vertikale Tor (Radius  $R = 2$ ) eines Tankes ist vollständig unter Wasser. Die Wasseroberkante stimmt mit der Toroberkannte überein. Das Wasser übt einen Druck  $p = \rho g h$  auf eine Seite des Tors aus. Das Tor ist nur entlang der  $y$ -Achse befestigt.

- (a) Stellen Sie ein Integral auf um das durch den Druck erzeugte Moment bezüglich der  $y$ -Achse zu bestimmen.
- (b) Berechnen Sie das Integral.

La porte ci-dessous d'un réservoir est vertical et de rayon  $R = 2$ . Elle est immergée dans l'eau. Le niveau de l'eau coïncide avec le point le plus haut de la porte. L'eau applique une pression  $p = \rho g h$  sur la porte. La porte est supportée par l'axe des  $y$ .

- (a) Donner un intégral pour le couple total par rapport à l'axe des  $y$ , créée par l'eau.
- (b) Calculer cette intégral.



• **Aufgabe 8–5:**

Considerer l'intégrale dans le plan des  $x$  et  $y$

Untersuchen Sie das folgende Integral in der  $xy$ -Ebene

$$\int_1^e \int_{\ln y}^1 y \, dx \, dy$$

- (a) Dessiner le domaine d'intégration.
- (b) Changer l'ordre d'intégration.
- (c) Calculer l'intégrale.

- (a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich.
- (b) Ändern Sie die Integrationsreihenfolge.
- (c) Berechnen Sie das Integral.

• **Aufgabe 8–6:**

Untersuchen Sie

$$I = \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y \, dx \, dy$$

- (a) Schreiben Sie dieses Integral um in ein Doppelintegral in Polarkoordinaten.
- (b) Berechnen Sie das Integral exakt.

• **Aufgabe 8–7:**

Betrachten Sie das Integral

$$\iint_G f \, dA = \int_{-3}^3 \left( \int_0^{x^2} x y \, dy \right) dx$$

- (a) Skizzieren Sie den Bereich  $G$ .

(b) Schreiben Sie das Integral um, indem Sie die Integrationsreihenfolge vertauschen.

• **Aufgabe 8–8:**

Examiner la double intégral

Betrachten Sie das Doppelintegral

$$A = \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x(x^2 + y^2) dy dx$$

(a) Changer l'ordre d'intégration.

(a) Ändern Sie die Integrationsreihenfolge.

(b) Réécrire l'intégral avec des coordonnées polaires.

(b) Schreiben Sie das Integral um in ein Integral bezüglich Polarkoordinaten.

(c) Calculer l'intégral.

(c) Berechnen Sie das Integral.

• **Aufgabe 8–9:**

Berechnen Sie

$$\iint_G x dA$$

wobei  $G$  ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken bei  $(0, -1)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$  und  $(0, 1)$ .

• **Aufgabe 8–10:**

Das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  liegt zwischen den Kurven  $y_1 = x$  und  $y_2(x) = x^2 - 2x + 2$ . Stellen Sie ein Doppelintegral auf um den untenstehenden Ausdruck zu berechnen. Bestimmen Sie anschliessend den Wert von  $S$ .

La domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$  est entre les deux courbes  $y_1 = x$  et  $y_2(x) = x^2 - 2x + 2$ . Trouver un double intégral explicite pour l'expression ci-dessous. Puis trouver la valeur de  $S$ .

$$S = \iint_G x dA$$

• **Aufgabe 8–11:**

Berechnen Sie

$$\iint_G y^2 dA$$

wobei  $G$  die Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 1$  ist.

Quelle: [JordSmit94, 518]

• **Aufgabe 8–12:**

Considerer l'intégral dans le plan des  $x$  et  $y$

Untersuchen Sie das folgende Integral in der  $xy$ -Ebene

$$\int_{x=1}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^3 x dy dx$$

- |  |   |
|--|---|
| (a) Calculer l'intégral.   | (a) Berechnen Sie das Integral.   |
| (b) Dessiner la domaine d'intégration                                | (b) Skizzieren Sie den Integrationsbereich.                                 |
| (c) Réécrire l'intégral dans la form (changer l'ordre d'intégration) | (c) Schreiben Sie das Integral in der Form (Integrationsreihenfolge ändern) |

$$\int \int \dots dx dy$$

• **Aufgabe 8–13:**

Berechnen Sie

$$\iint_G x y \, dA$$

wobei  $G$  der Sektor  $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/2$  ist.

Quelle: [JordSmit94, 518]

• **Aufgabe 8–14:**

Betrachten Sie das Volumen  $V$  im ersten Oktanten unter der Fläche

$$z = 2 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$$

- (a) Stellen Sie ein Doppelintegral auf um  $V$  zu berechnen.
- (b) Berechnen Sie  $V$ .

• **Aufgabe 8–15:**

Aus der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  wird der Zylinder  $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$  ausgebohrt. Wie gross ist das Restvolumen? Stellen Sie das Integral auf, die Berechnung ist etwas schwieriger, kann aber mit *Mathematica* erledigt werden.

• **Aufgabe 8–16:**

Bestimmen Sie

$$\iint_G e^{-x^2-y^2} \, dA$$

wobei der Bereich  $G$  bestimmt ist durch  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Bestimmen Sie auch den Grenzwert des obigen Integrales, falls  $R \rightarrow \infty$ .

• **Aufgabe 8–17:**

Betrachte einen aufrechten Zylinder der Höhe  $H = 20 \text{ cm}$  und Radius  $R = 10 \text{ cm}$ , wobei die  $z$ -Achse auch die Zylinderachse ist. Dieser Zylinder ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wird er um die  $z$ -Achse rotiert so nimmt die Wasseroberfläche die Form

$$h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

an, wobei  $r$  der Abstand von der  $z$ -Achse ist.

Wieviel Wasser (in  $\text{cm}^3$ ) kann eingefüllt werden, damit das Gefäss bei 10 Umdrehungen pro Sekunde ( $\omega = 20\pi/\text{sec}$ ) nicht überläuft? Rechnen Sie mit  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ .

• **Aufgabe 8–18:**

Quelle: [Spie71, p. 156]

Berechne das Volumen, das von den Zylindern  $x^2 + y^2 = a^2$  und  $x^2 + z^2 = a^2$  eingeschlossen wird.

• **Aufgabe 8–19:**

Ein Volumen  $V$  ist unten und oben beschränkt durch die Flächen  $z = 0$  und  $z^2 = x^2 + y^2$ . Die Seitenfläche ist gegeben durch den Zylinder  $x^2 + y^2 = x$ . Das Volumen ist mittels Integration in Zylinderkoordinaten zu berechnen. Wieso liefert das Integral

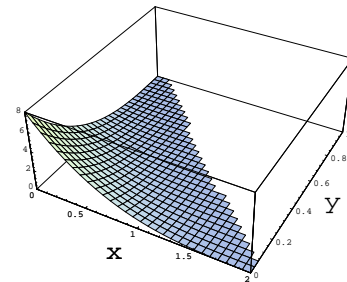
$$V = \int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r^2 dr d\theta$$

ein falsches Ergebnis?

• **Aufgabe 8–20:**

Ein Bereich im Raum  $\mathbb{R}^3$  über dem **ersten Quadranten** in der  $xy$ -Ebene wird eingeschlossen durch die  $xy$ -Ebene und die Fläche  $z = (2 - x - 2y)^3$ .

- (a) Stellen Sie ein Doppelintegral auf um das eingeschlossene Volumen zu berechnen.  
 (b) Berechnen Sie das Integral.



• **Aufgabe 8–21:**

Examiner l'intégral

Untersuchen Sie das Integral

$$I = \iint_G x dA = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x dx dy$$

- |  |  |
|--|--|
| (a) Esquisser la domaine d'intégration $G$ . | (a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich $G$ . |
| (b) Changer l'ordre d'intégration.           | (b) Ändern Sie die Integrationsreihenfolge.      |
| (c) Calculer l'intégral.                     | (c) Berechnen Sie das Integral.                  |

• **Aufgabe 8–22:**

Examiner

Untersuchen Sie

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} x^2 dx dy$$

- |  |  |
|--|--|
| (a) Esquisser la domaine d'intégration $G$ . | (a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich $G$ . |
| (b) Calculer l'intégral.                     | (b) Berechnen Sie das Integral.                  |

• **Aufgabe 8–23:**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

auf Kreisen  $K_r$  mit variablem Radius  $r$  und Mittelpunkt im Ursprung.

- (a) Wie gross muss  $r > 0$  gewählt werden, damit

$$\iint_{K_r} f(x, y) \, dA = 0$$

- (b) Wie gross muss die Konstante  $c$  sein, damit

$$\iint_{K_2} f(x, y) + c \, dA = 1$$

• **Aufgabe 8–24:**

Untersuchen Sie das unten gezeigte Dreieck  $D$  in  $\mathbb{R}^3$  mit den Ecken in der  $xz$ -Ebene.

Examiner le triangle  $D$  en  $\mathbb{R}^3$  avec les coins dans le plan  $xz$  montré ci-dessous.

- (a) Rotieren Sie das Dreieck um die  $z$ -Achse und bestimmen Sie das entstehende Volumen  $V$ .

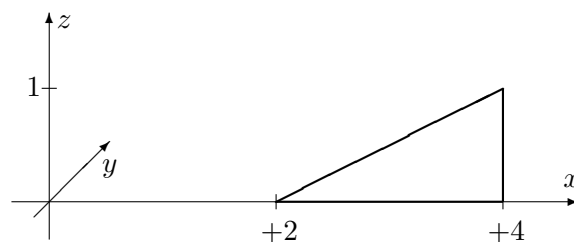
- (a) Appliquer une rotation par rapport à l'axe  $z$ . Calculer le volume  $V$ .

- (b) Das Dreieck stelle eine dünne Platte dar, mit Massendichte  $\rho$  (Einheit  $[\text{kg}/\text{m}^2]$ ). Diese Platte wird um die  $z$  Achse rotiert mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Finden und vereinfachen Sie eine Formel für die kinetische Energie  $E_z$ .

- (b) Le triangle représente une plaque mince avec densité de masse  $\rho$  (unité  $[\text{kg}/\text{m}^2]$ ). On applique une rotations par rapport à l'axe  $z$  avec vitesse angulaire  $\omega$ . Trouver et simplifier la formule pour l'énergie cinétique  $E_z$ .

- (c) Die Platte in (b) wird um die  $y$ -Achse rotiert. Berechnen Sie die kinetische Energie  $E_y$  als Doppelintegral.

- (c) Réexaminer la plaque en (b). Une applique une rotation par rapport à l'axe  $y$  avec vitesse angulaire  $\omega$ . Calculer l'énergie cinétique  $E_y$  à l'aide d'une double intégral.



## 8.7.2 Dreidimensionale Bereiche

• **Aufgabe 8–25:**

Examiner la fonction  $f(x, y, z) = z$  et calculer la triple intégrale sur le domaine dans le premier octant limitée par  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + 2y = 6$  et le cylindre  $y^2 + z^2 = 4$ .

Tip: dessiner d'abord

Berechnen Sie das Dreifachintegral der Funktion  $f(x, y, z) = z$  über den Bereich im ersten Oktanten, beschränkt durch  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + 2y = 6$  und den Zylinder  $y^2 + z^2 = 4$ .

Tipp: zuerst zeichnen

• **Aufgabe 8–26:**



Das Massenträgheitsmoment eines Körpers  $K$  mit konstanter Dichte  $\rho$  ist gegeben durch

Le moment d'inertie d'un solide  $K$  de densité  $\rho$  constante est donné par

$$J = \rho \iiint_K r^2 dV$$

Hierbei ist  $r$  der Abstand von der Rotationsachse und somit von  $(x, y, z)$  abhängig. Sei  $K$  nun der Einheitswürfel, d.h.  $0 \leq x, y, z \leq 1$ .

$r$  représente la distance de l'axe de rotation et dépend donc de  $(x, y, z)$ . Examiner le cube unité  $K$ , c'est-à-dire  $0 \leq x, y, z \leq 1$ .

- (a) Stellen Sie das Integral auf um das Massenträgheitsmoment  $J_z$  einer Rotation um die  $z$  Achse zu berechnen.
- (b) Berechnen Sie  $J_z$ .
- (c) Als neue Rotationsachse wird nun eine zur  $z$ -Achse parallele Gerade durch den Schwerpunkt verwendet. Stellen Sie das Integral für das Massenträgheitsmoment  $J$  zu, anschliessend ist  $J$  zu berechnen.

- (a) Donner l'intégrale pour le moment d'inertie  $J_z$  pour une rotation par rapport à l'axe des  $z$ .
- (b) Calculer  $J_z$ .
- (c) Comme nouvel axe de rotation, prenez une droite par le centre de gravité, parallèle à l'axe des  $z$ . Trouver l'intégrale pour le moment d'inertie  $J$ , puis calculer  $J$ .

• **Aufgabe 8–27:**

Un volume est limité par les trois plans des coordonnées et le plan

Ein Volumen ist begrenzt durch die drei Koordinatenebenen und die Ebene

$$x + 2y - z = 2$$

la densité du gaz inclu est

und die Dichte des eingeschlossenen Gases ist

$$\rho(x, y, z) = 2 - z$$

- (a) Trouver l'intégral pour calculer la masse totale du gaz.
- (b) Calculer l'intégral.

- (a) Stelle das Integral auf um die eingeschlossene Masse zu berechnen.
- (b) Berechne das Integral.

• **Aufgabe 8–28:**

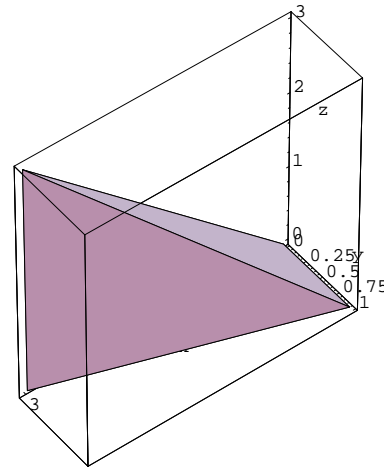
Ein Körper mit konstanter Dichte  $\rho$  ist beschrieben durch die vier Eckpunkte

Un solide avec une densité constante  $\rho$  est donné par les quatre points

$$(0, 0, 0) \quad , \quad (3, 0, 0) \quad , \quad (0, 1, 0) \quad \text{und/et} \quad (3, 0, 3)$$

- (a) Stellen Sie ein Doppel- oder Dreifach-Integral auf, um das Volumen des Körpers zu berechnen. Bestimmen Sie anschliessend das Volumen.
- (b) Die Gravitationskraft wirke in die negative  $z$ -Richtung. Stellen Sie das Integral auf um das Moment  $M$  bezüglich der  $y$ -Achse zu bestimmen. Berechnen Sie  $M$ .

- (a) Trouver un double ou triple intégrale pour calculer le volume de cette solide. Puis calculer le volume.
- (b) Tenez compte de la force de gravitation dans la direction des  $z$  négative. Trouver l'intégral pour le moment  $M$  par rapport à l'axe des  $y$ . Calculer  $M$ .



### • Aufgabe 8–29:

Ein Körper mit konstanter Dichte  $\rho$  ist beschrieben durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq x$$

Dieser Körper wird um die  $z$ -Achse rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

- (a) Stellen Sie ein Doppelintegral auf, um die Rotationsenergie  $E$  berechnen zu können.
- (b) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

Un solide avec une densité constante  $\rho$  est donné par les inégalités

Ce solide tourne par rapport à l'axe des  $z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

- (a) Trouver un double intégrale pour calculer l'énergie de rotation  $E$ .
- (b) Trouver la valeur exacte de cette intégrale.

### • Aufgabe 8–30:

Ein Körper mit konstanter Dichte  $\rho$  ist beschrieben durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq x$$

Dieser Körper wird um die  $y$ -Achse rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

- (a) Stellen Sie ein Doppelintegral auf, um die Rotationsenergie  $E$  zu berechnen.
- (b) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals.

Un solide avec une densité constante  $\rho$  est donné par les inégalités

Ce solide tourne par rapport à l'axe des  $y$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

- (a) Trouver un double intégrale pour calculer l'énergie de rotation  $E$ .
- (b) Trouver la valeur exacte de cette intégrale.

### • Aufgabe 8–31:

Examiner la fonction  $f(x, y, z) = z$  et calculer le triple intégral sur la domaine dans le premier octant limitée par  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + 2y = 6$  et le cylindre  $x^2 + z^2 = 4$ .

Tip: designer d'abord

Berechnen Sie das Dreifachintegral der Funktion  $f(x, y, z) = z$  über den Bereich im ersten Oktanten, beschränkt durch  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $x + 2y = 6$  und den Zylinder  $x^2 + z^2 = 4$ .

Tipp: zuerst zeichnen

**•Aufgabe 8–32:**

Examiner la domaine bornée  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , limitée par la surface  $y = x^2$  et les deux plans  $y + z = 4$  et  $z = 0$ .

- Déterminer la volume  $V$  de cette domaine. Rendre l'intégral et la valeur exacte de l'intégral.
- La densité  $\rho$  du matériel est constante et le volume fait des rotations par rapport à l'axe des  $z$  avec vitesse angulaire  $\omega$ . Trouver l'intégral pour l'énergie cinétique de cette rotation.
- Trouver la valeur numérique de  $E$ .

Untersuchen Sie den beschränkten Bereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  der beschränkt ist durch die Fläche  $y = x^2$  und die beiden Ebenen  $y + z = 4$  und  $z = 0$ .

- Bestimmen Sie das Volumen  $V$  des Bereichs. Das Integral ist aufzustellen und exakt auszurechnen.
- Die Dichte  $\rho$  des Materials ist konstant und das Volumen wird um die  $z$ -Achse rotiert mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Stellen Sie das Integral auf um die kinetische Energie  $E$  zu berechnen.
- Bestimmen Sie den numerischen Wert von  $E$ .

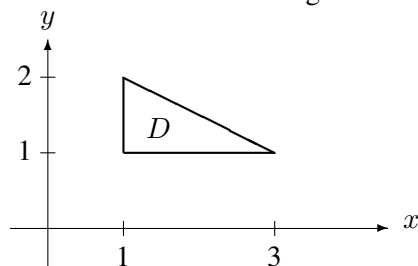
**8.7.3 Zum Divergenzatz**
**•Aufgabe 8–33:**

Für das untenstehende Dreieck  $D$  mit positiv orientierter Randkurve  $C$  und äusserem Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}$  ist das Integral  $A$  zu bestimmen

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot y \end{pmatrix}$$

$$A = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

Pour le triangle  $D$  ci-dessous avec courbe  $C$  (orientation positive) et le vecteur d'unité normale extérieur  $\vec{n}$  calculer l'intégrale  $A$ .


**•Aufgabe 8–34:**

Pour le disque  $D$  de rayon 3, le centre à l'origine et ayant le cercle  $C$  comme bord (orientation positive), calculer les expressions suivantes d'une façon exacte:

Für eine Kreisscheibe  $D$  mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung und dem positiv orientierten Kreis  $C$  als Rand sind die folgenden Integrale exakt zu bestimmen:

$$a = \iint_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) x \\ (x^2 + y^2) y \end{pmatrix} dA$$

$$b = \oint_C \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds}$$

$$c = \oint_C \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$d = \oint_C (1 + y + x) \, ds$$

**•Aufgabe 8–35:**

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \end{pmatrix}$$

und das Stück der Geraden  $x + y = 1$  im ersten Quadranten. Bestimme den Fluss dieses Feldes durch die Kurve.

• **Aufgabe 8–36:**

Die rechts gezeigte Kurve ist gegeben durch die Parametrisierung

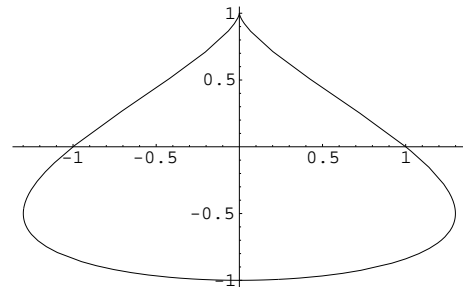
La courbe á droite est donnée par la paramétrisation

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t - \frac{1}{2} \sin(2t) \\ y(t) &= \sin t \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche exakt.

Trouver la valeur exacte l'aire de la surface entourée par la courbe.

Tip: Satz 8–19 auf Seite 366.



• **Aufgabe 8–37:**

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \end{pmatrix}$$

und das Einheitsquadrat mit Ecken im Ursprung und im Punkt  $(1, 1)$ . Bestimme den Fluss des Feldes durch den Rand des Bereiches mit zwei verschiedenen Methoden.

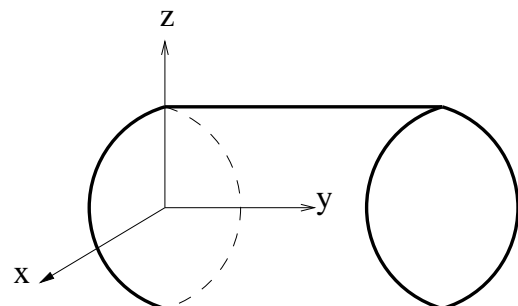
• **Aufgabe 8–38:**

Untersuchen Sie den Zylinder  $G$  mit Radius  $R = 2$  und der  $y$ -Achse als Zylinderachse. Die Breite sei 4, gegeben durch  $0 \leq y \leq 4$ . Zu untersuchen ist das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$ .  $S$  sei die Aussenwand des Zylinders, ohne Boden und Deckel. Berechnen Sie das Flächenintegral  $a$  über die Oberfläche  $S$ .

Examiner le cylindre  $G$  de rayon  $R = 2$  avec l'axe des  $y$  comme axe central du cylindre. La hauteur est 4, donnée par  $0 \leq y \leq 4$ . Utiliser le champ de vitesse  $\vec{F}$ . Soit  $S$  la surface latéral du cylindre, sans fond et plafond. Calculer l'intégral  $a$  pour cette surface  $S$ .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$a = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$$



• **Aufgabe 8–39:**

Untersuchen Sie den Zylinder  $G$  mit Radius  $R = 3$  und der  $y$ -Achse als Zylinderachse. Die Höhe sei 10, gegeben durch  $0 \leq y \leq 10$ . Zu untersuchen ist das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$ .

Examiner le cylindre  $G$  de rayon  $R = 3$  avec l'axe des  $y$  comme axe central du cylindre. La hauteur est 10, donnée par  $0 \leq y \leq 10$ . Utiliser le champ de vitesse  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie den Gesamtfluss dieses Geschwindigkeitsfeldes aus dem Zylinder heraus. (a) Trouver le flux total hors du cylindre de ce champ de vitesse.
- (b) Geben Sie das Integral an um den Fluss durch die Mantelfläche des Zylinders zu bestimmen. (b) Donner l'intégral pour le flux par la face latéral du cylindre.
- (c) Berechnen Sie das oben aufgestellte Integral. (c) Calculer la valeur de l'intégral ci-dessus.

• **Aufgabe 8–40:**

Sei  $R \subset \mathbb{R}^3$  le cylindre  $x^2 + y^2 \leq 4$  et  $0 \leq z \leq 3$  avec la surface  $S$  avec trois sections. Le vecteur normal extérieure est  $\vec{n}$ . Calculer

Sei  $R$  der Zylinder  $x^2 + y^2 \leq 4$  und  $0 \leq z \leq 3$  mit der dreiteiligen Oberfläche  $S$  mit dem äusseren Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}$ . Berechne

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{wobei} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

à l'aide de théorème de divergence.

mit Hilfe des Divergenzsatzes.

• **Aufgabe 8–41:**

Sei  $R$  der Zylinder  $x^2 + y^2 \leq 3$  und  $0 \leq z \leq 1$  mit der dreiteiligen Oberfläche  $S$  mit dem äusseren Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}$ . Berechne

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{wobei} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \cosh(y^2 + z^2) \\ z^3 \\ z \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 8–42:**

Untersuchen Sie den Zylinder  $G$  mit Radius  $R = 2$  und der  $z$ -Achse als Zylinderachse. Die Höhe sei 5, gegeben durch  $0 \leq z \leq 5$ . Zu untersuchen ist das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$ .

Examiner le cylindre  $G$  de rayon  $R = 2$  avec l'axe des  $z$  comme axe central du cylindre. La hauteur est 5, donnée par  $0 \leq z \leq 5$ . Utiliser le champ de vitesse  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie den Gesamtfluss aus dem Zylinder. (a) Trouver le flux total hors du cylindre de ce champ de vitesse.
- (b) Geben Sie das Integral an um den Fluss durch die Mantelfläche des Zylinders zu bestimmen. Das Integral ist nicht zu berechnen, sondern zu vereinfachen. (b) Donner l'intégral pour le flux par la face latéral du cylindre. Ne calculer pas l'intégral, mais simplifier.

• **Aufgabe 8–43:**

Das Volumen  $V$  ist beschrieben durch die Ungleichungen

Le volume  $V$  est donné par les inégalités

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad z > 0 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 < 4$$

und das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Zu betrachten ist der Fluss aus dem Volumen  $V$  hinaus.

- Stellen Sie die vier Oberflächenintegrale auf um den Fluss zu berechnen.
- Berechnen Sie den Fluss möglichst effizient.

• **Aufgabe 8–44:**

Examiner le champ vectoriel et les intégrals

Untersuchen Sie das Vektorfeld und die Integrale

$$I_1 = \iiint_Z \operatorname{div} \vec{F} dV \quad \text{et/und} \quad I_2 = \iint_A \vec{F} \cdot \vec{n} dA \quad \text{avec/mit} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ xy \\ -z \end{pmatrix}$$

et le cylindre  $Z$  donné par  $x^2 + z^2 \leq 4$  et  $0 \leq y \leq 3$ . La surface de  $Z$  est nommée  $A$ .

und den Zylinder  $Z$  beschrieben durch  $x^2 + z^2 \leq 4$  und  $0 \leq y \leq 3$ . Die Oberfläche von  $Z$  wird mit  $A$  bezeichnet.

- Écrire  $I_1$  comme triple intégrale simple. Calculer l'intégrale si facilement possible.
- Écrire  $I_2$  comme somme de trois intégrales doubles. Calculer ces intégrales si facilement possible.

- Schreiben Sie  $I_1$  als möglichst einfaches Dreifachintegral. Berechnen Sie dieses Integral, falls leicht möglich.
- Schreiben Sie  $I_2$  als Summe von drei Doppelintegralen. Berechnen Sie dieses Integral, falls leicht möglich.

• **Aufgabe 8–45:**

In einer Hohlkugel (Innenradius  $R_i$ , Aussenradius  $R_a$ ) ist eine Flüssigkeit gelagert. Vom Kugelmaterial kennt man die Wärmekapazität  $c \left[ \frac{J}{K kg} \right]$  und die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda \left[ \frac{J}{sm K} \right]$ . Die Flüssigkeit erzeugt Wärme pro Volumen und Zeit, gegeben durch  $w, \left[ \frac{J}{m^3 s} \right]$ . Die Aussentemperatur bei  $r = R_a$ , ist gegeben durch  $T_a [K]$ .

Dans une sphère creuse (rayon intérieure  $R_i$ , rayon extérieur  $R_a$ ) on trouve un fluide. Du matériel de la sphère on sait la capacité de chaleur  $c \left[ \frac{J}{K kg} \right]$  et conductibilité calorifique  $\lambda \left[ \frac{J}{sm K} \right]$ . Le fluide produit de la chaleur par temps et volume, donner par  $w \left[ \frac{J}{m^3 s} \right]$ . La température pour  $r = R_a$  est donnée par  $T_a [K]$ .

- Bestimmen Sie die Temperatur  $T_i$  bei  $r = R_i$  als Funktion von  $w, \lambda, c, R_i$  und  $R_a$ .
- Zeigen Sie, dass die Innentemperatur maximal ist bei  $R_i = \frac{2}{3} R_a$

- Trouver la température  $T_i$  au point  $r = R_i$  comme fonction de  $w, \lambda, c, R_i$  et  $R_a$ .
- Montrer que la température  $T_i$  est maximale pour  $R_i = \frac{2}{3} R_a$

Anleitung:

1. In  $0 \leq r \leq R_i$  erzeugte Wärmeenergie pro Zeit bestimmen.
2. Energieerhaltung verwenden um eine Differentialgleichung für die Temperatur  $T$  als Funktion von  $r$  zu erhalten ( $R_i \leq r \leq R_a$ )
3.  $T(r)$  bestimmen.
4.  $T_i = T(R_i)$  bestimmen.

Instructions:

1. Calculer l'énergie de chaleur produit par temps pour  $0 \leq r \leq R_i$ .
2. Utiliser la conservation l'énergie de chaleur pour trouver une équation différentielle pour la température  $T$  comme fonction de  $r$  ( $R_i \leq r \leq R_a$ ).
3. Trouver  $T(r)$ .
4. Trouver  $T_i = T(R_i)$ .

• **Aufgabe 8–46:**

In einem Zylinder mit Radius  $R$  und Länge  $L$  ( $L$  sehr gross) wird konstant geheizt. Die Temperatur  $T_0$  an der Aussenfläche kann gemessen werden. Gegeben sind die folgenden Daten.

L'intérieur d'un cylindre de rayon  $R$  et longueur  $L$  ( $L$  très grand) est chauffé. La température  $T_0$  à la surface est mesurée. Sont connus:

$w$	spezifische Heizleistung	puissance de chauffage	$\frac{J}{s m^3}$
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	conductivité de chaleur	$\frac{J}{s m K}$
$c$	Wärmekapazität	capacité de chaleur	$\frac{J}{kg K}$
$\rho$	spezifische Masse	masse spécifique	$\frac{kg}{m^3}$
$L$	Länge	longueur	$m$
$R$	Aussenradius	rayon extérieure	$m$
$T_0$	Aussentemperatur	température à la surface	$K$

(a) Zu bestimmen ist die Temperatur  $T(r)$  als Funktion des Radius  $r$  für  $0 \leq r \leq R$ .

(a) Trouver la température  $T(r)$  comme fonction du rayon  $r$  pour  $0 \leq r \leq R$ .

(b) Skizzieren Sie ein Temperaturprofil.

(b) Esquisser le profile de la température.

Tipp: Zuerst hypothetischen Zylinder mit Radius  $r$  betrachten und dessen Heizleistung bestimmen.

Tip: d'abord examiner un cylindre de rayon  $r$  et l'énergie produite à l'intérieur.

• **Aufgabe 8–47:**

Eine Kurve  $C$  ist gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sqrt{9 - t^2}, \quad -3 \leq t \leq 3$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

mit

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y + x^4 \\ 17 + x - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

Die Überlegungen müssen begründet werden.

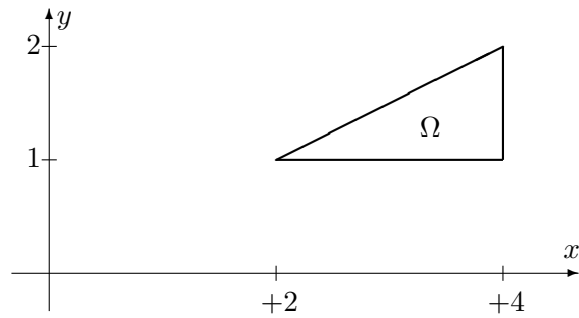
**•Aufgabe 8–48:**

Untersuchen Sie das untenstehende Integrationsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit Rand  $\Gamma$  und äusserem Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}$ . Zu berechnen ist der Wert des Integrals  $A$ .

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 - x \\ y^2 + \sin(\pi x) \end{pmatrix}$$

$$A = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

Examiner le domaine d'intégration  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avec bord  $\Gamma$  et de vecteur unité normal extérieur  $\vec{n}$ . Calculer la valeur de l'intégrale  $A$ .


**•Aufgabe 8–49:**

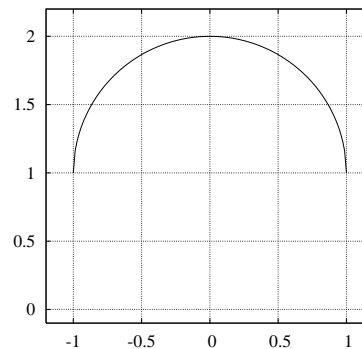
Bestimmen Sie den Fluss  $A$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  von unten durch die Halbkreislinie bestimmt durch  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  und  $y \geq 1$ .

Tipp : Divergenzatz

Calculer le flux total  $A$  du champ vectoriel  $\vec{F}$  ci-dessous depuis le bas au travers de la courbe demi-cercle donné par  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  et  $y \geq 1$ .

Tuyau: théorème de divergence

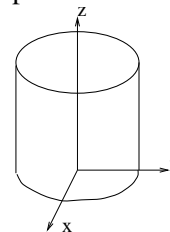
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$


**•Aufgabe 8–50:**

Untersuchen Sie das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ e^{x^2+y^2} - e \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Examiner le champ vectorielle





Das Integrationsgebiet  $G$  im Raum  $\mathbb{R}^3$  ist ein Zylinder, beschränkt durch die Flächen  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  und  $z = 1$ . Berechnen Sie das untenstehende Integral.

Tip: es ist nicht notwendig langwierige Rechnungen auszuführen.

La domaine d'intégration  $G$  en  $\mathbb{R}^3$  est un cylindre borné par les surfaces  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  et  $z = 1$ . Calculer l'intégral ci-dessous.

Tip: pas nécessaire de faire des calculs très longues.

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

### • Aufgabe 8–51:

Un liquide passe par une demi sphère ouvert au fond (rayon 3, centre à l'origine et  $z > 0$ ) suivant le champs vectorielle de vitesse  $\vec{F}$ .

(a) Trouver un double intégrale en coordonnées sphérique pour calculer le flux qui passe par la demie sphère. Ne **calculer pas** la valeur de l'intégrale.

(b) Trouver le flux  $I$  qui passe par la sphère à l'aide du théorème de divergence. Calculs exactes sont nécessaires.

Tip: Examiner d'abord le cercle  $x^2 + y^2 \leq 3^2$  dans le plan des  $xy$ .

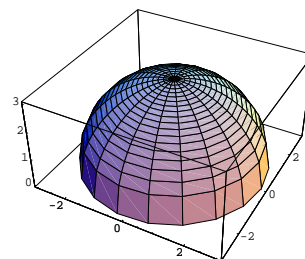
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Flüssigkeit durchströmt die unten offene Halbkugelfläche (Radius 3, Zentrum im Ursprung und  $z > 0$ ) gemäss dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$ .

(a) Stellen Sie ein Doppelintegral in sphärischen Koordinaten auf um den Fluss durch die Fläche zu bestimmen. Das Integral ist **nicht** zu berechnen.

(b) Berechnen Sie den Fluss  $I$  durch diese Fläche mit Hilfe des Divergenzsatzes. Die Rechnungen sind exakt auszuführen.

Tipp: Zuerst Fluss durch den Kreis  $x^2 + y^2 \leq 3^2$  in der  $xy$ -Ebene bestimmen



### • Aufgabe 8–52:

Die Funktion

La fonction

$$f(t, \vec{x}) = g(t) \exp \frac{-\|\vec{x}\|^2}{4k^2 t}$$

heisst eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Hierbei ist die Funktion  $g(t)$  (noch) nicht bekannt. Für jede Zeit  $t > 0$  ist die Wärmeenergie gegeben durch das Dreifachintegral

est dit solution fondamentale de l'équation de chaleur. La fonction  $g(t)$  n'est (pas encore) connue. Pour chaque temps  $t > 0$  l'énergie thermique est donnée par le triple intégral

$$E(t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(t, \vec{x}) \, dV$$

- (a) Zeigen Sie, dass (für einen festen Wert von  $t > 0$ ) dieses uneigentliche Dreifachintegral existiert.
- (b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals durch Integration in einem geeigneten Koordinatensystem. Das schlussendlich zu bestimmende eindimensionale uneigentliche Integral ist in guten Formelsammlungen tabelliert.
- (c) Die Funktion  $E(t)$  muss konstant sein (Energieerhaltung). Es gilt  $E(t) = 1$ . Finden Sie damit die Formel für Funktion  $g(t)$ .

• **Aufgabe 8-53:**

Bestimmen Sie den Fluss  $A$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  von unten durch die Halbkugeloberfläche bestimmt durch  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  und  $z \geq 1$ .

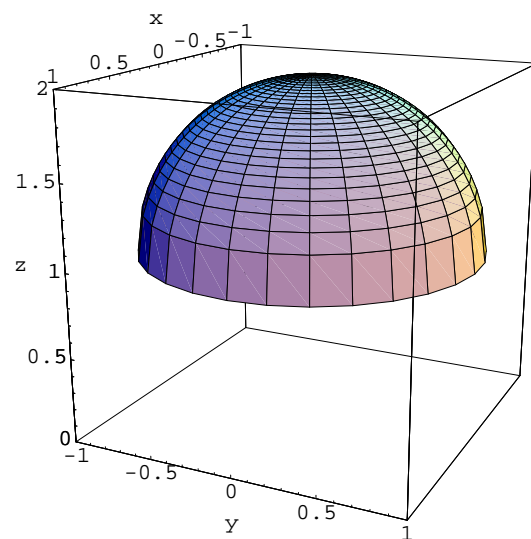
Tipp : Divergenzatz

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que cette triple intégral impropre existe (pour une valeur fixe de  $t$ ).
- (b) Trouver la valeur de cette intégral en utilisant des coordonnées adaptées au problème. Vous trouvez l'intégral impropre (en une dimension) à calculer finalement l'aide d'une table.
- (c) La fonction  $E(t)$  doit être constante (conservation de l'énergie) On sait que  $E(t) = 1$ . Trouver donc une formule pour la fonction  $g(t)$

Calculer le flux total  $A$  du champ vectoriel  $\vec{F}$  ci-dessous depuis le bas au travers de la demi-sphère donné par  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  et  $z \geq 1$ .

Tuyau: théorème de divergence



### 8.7.4 Lösungen zu einigen Aufgaben

**Lösung zu Aufgabe 8-1 :** Die Gleichung der Geraden ist  $y = x$  und die andere Kurve ist bestimmt durch  $y = \sqrt{2}x$  oder  $x = y^2/2$ .

- (a) Es gibt zwei mögliche Lösungen

$$S = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{2}x} x \, dy \, dx \quad \text{oder} \quad S = \int_0^2 \int_{y^2/2}^y x \, dx \, dy$$

- (b) Mit der ersten Variante von oben ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left( x\sqrt{2}x - x^2 \right) dx = \int_0^2 \left( \sqrt{2}x^{3/2} - x^2 \right) dx \\ &= \left( \sqrt{2} \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \left( \sqrt{2} \frac{2}{5} 2^{5/2} - \frac{1}{3} 2^3 \right) = \frac{16}{5} - \frac{8}{3} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–2 :** Quelle: [Spie71, p. 155]

- (a) Ein Gebiet unter der Parabel  $y = x^2$ , links der vertikalen Geraden  $x = 2$  und oberhalb der horizontalen Geraden  $y = 1$ .

(b)

$$\iint_G x^2 + y^2 \, dA = \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=1}^{x^2} x^2 + y^2 \, dy \right) dx = \int_{x=1}^2 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{1006}{105}$$

- (c) Hierzu ist zuerst die Beziehung  $y = x^2$  nach  $x$  aufzulösen mit dem Resultat  $x = \sqrt{y}$ .

$$\begin{aligned} \iint_G x^2 + y^2 \, dA &= \int_{y=1}^4 \left( \int_{x=\sqrt{y}}^2 x^2 + y^2 \, dx \right) dy \\ &= \int_{y=1}^4 \left( \frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{y^{3/2}}{3} - y^{5/3} \right) dy = \frac{1006}{105} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–3 :**

- (a) Viertelkreis im ersten Quadranten, Radius  $R = 2$ .

(b)

$$I = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r \cos \theta \, r \, d\theta \, dr$$

(c)

$$I = \left( \int_0^2 r^2 \, dr \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) = \frac{8}{3} \cdot 1$$

**Lösung zu Aufgabe 8–4 :**

- (a) Vertikal zerlegen in schmale, vertikale Streifen

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 2^2 \\ (y-2) &= 4 - (x-1)^2 \\ y &= 2 \pm \sqrt{4 - (x-1)^2} \\ dM &= x \rho g h \, dA = \rho g (4 - y) \, dA \\ M &= \iint_G dM = \rho g \iint_G x (4 - y) \, dA \\ &= \rho g \int_0^3 \left( \int_{2-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{2+\sqrt{4-(x-1)^2}} 4x - xy \, dy \right) dx \end{aligned}$$

- (b) Kann gut mit dem Taschenrechner/Mathematica/MATLAB erledigt werden.

$$\begin{aligned} M &= \rho g \int_0^3 \left( \left( 4xy - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{2-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{2+\sqrt{4-(x-1)^2}} \right) dx \\ &= \rho g \int_0^3 \left( \left( 8x\sqrt{4-(x-1)^2} - 4x\sqrt{4-(x-1)^2} \right) \right) dx \\ &= 4\rho g \int_0^3 x \sqrt{4-(x-1)^2} \, dx = \dots \\ &= 4\rho g \left( \frac{8\pi + 9\sqrt{3}}{6} \right) \approx \rho g \, 27.15 \end{aligned}$$

Eine grobe Schätzung mit Hilfe von Kreisfläche, mittlerer Eintauchtiefe und mittlerem Abstand von der  $y$ -Achse sollte den Wert bestätigen.

**Lösung zu Aufgabe 8–5 :**

- (a) Der Integrationsbereich ist die Fläche zwischen den Kurven  $y = 1$  und  $y = e^x$  für  $0 \leq x \leq 1$ .  
 (b) und (c)

$$\begin{aligned}
 \int_{y=1}^e \int_{x=\ln y}^1 y \, dx \, dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^{e^x} y \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \left( \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{e^x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (e^{2x} - 1) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x}}{2} - x \right) \Big|_{x=0}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} - 1 \right) = \frac{-3 + e^2}{4}
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–6 :** Das Gebiet ist ein Viertelkreis mit Radius 2

$$I = \int_{-\pi/2}^0 \int_0^2 \rho \sin \theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = \left( \int_{-\pi/2}^0 \sin \theta \, d\theta \right) \cdot \left( \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{8}{3}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–7 :**

- (a)  $G$  ist der Bereich zwischen der  $x$ -Achse und der Parabel  $y = x^2$ , wobei  $-3 \leq x \leq 3$ .  
 (b)

$$\begin{aligned}
 \iint_G f \, dA &= \int_{-3}^3 \left( \int_0^{x^2} x y \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^9 \left( \int_{-3}^{-\sqrt{y}} x y \, dx + \int_{\sqrt{y}}^3 x y \, dx \right) dy
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–8 :**

- (a)

$$A = \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

- (b)

$$A = \int_0^3 \int_0^\pi \rho \cos \theta \, \rho^2 \, d\theta \, d\rho$$

- (c) Wegen  $\int_0^\pi \cos \theta \, d\theta = 0$  ist  $A = 0$ .

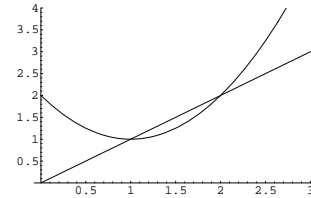
**Lösung zu Aufgabe 8–9 :** 1, Quelle: [JordSmit94, 518]

**Lösung zu Aufgabe 8–10 :**

Zuerst sind die Schnittpunkte der Kurven zu bestimmen

$$\begin{aligned} y_1(x) = y_2(x) &\iff x = x^2 - 2x + 2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff x_{1,2} = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{9-8}) \\ &\iff x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Durch vertikales schneiden erhält man



$$\begin{aligned} S &= \iint_G x \, dA = \int_1^2 \left( \int_{x^2-2x+2}^x x \, dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left( x y \Big|_{y=x^2-2x+2}^x \right) dx \\ &= \int_1^2 (x^2 - (x^2 - 2x + 2)x) \, dx \\ &= \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) \, dx \\ &= \left( -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right) \Big|_{x=1}^2 = \left( -\frac{16}{4} + 8 - 4 \right) - \left( -\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

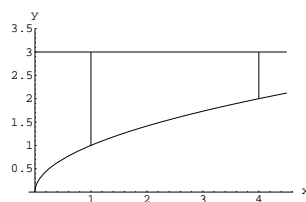
**Lösung zu Aufgabe 8–11 :**  $\pi/4$

**Lösung zu Aufgabe 8–12 :**

(a)

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^4 \int_{y=\sqrt{x}}^3 x \, dy \, dx &= \int_{x=1}^4 \left( y x \Big|_{y=\sqrt{x}}^3 \right) dx \\ &= \int_{x=1}^4 \left( 3x - x^{3/2} \right) dx \\ &= \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_{x=1}^4 \\ &= \left( \frac{3}{2} 16 - \frac{2}{5} 32 \right) - \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{5} \right) = \frac{101}{10} \end{aligned}$$

(b) Der Integrationsbereich liegt zwischen den vier hier gezeigten Kurven.



(c)

$$\int_{y=1}^2 \int_{x=1}^{y^2} x \, dx \, dy + \int_{y=2}^3 \int_{x=1}^4 x \, dx \, dy$$

**Lösung zu Aufgabe 8–13 :** 15/8

**Lösung zu Aufgabe 8–14 :** Bei  $z = 0$  gilt  $0 = 2 - x/2 - y/4$  oder auch

$$y = 8 - 2x$$

und das Integral

$$\int_{x=0}^4 \left( \int_{y=0}^{8-2x} \left( 2 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \right) dy \right) dx = \int_{x=0}^4 \left( \left( 2 - \frac{x}{2} \right) (8 - 2x) - \frac{(8 - 2x)^2}{8} \right) dx \dots = \frac{32}{3}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–15 :** Der entfernte Zylinder kann auch durch die Bedingungen

$$0 \leq x \leq 2a \quad \text{und} \quad -\sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2}$$

beschrieben werden. Zuerst wird das weggebohrte Volumen bestimmt durch das Integral

$$\begin{aligned} V_{\text{weg}} &= 2 \iint_G \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dA \\ &= 2 \cdot 2 \int_{x=0}^{2a} \left( \int_{y=0}^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx = \dots = \frac{16a^3 (3\pi - 4)}{9} \end{aligned}$$

Somit ist das verbleibende Volumen gegeben durch

$$V = V_{\text{Kugel}} - V_{\text{weg}} = \frac{4}{3} \pi (2a)^3 - \frac{16a^3 (3\pi - 4)}{9} \approx 0.71 V_{\text{Kugel}}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–16 :** In Polarkoordinaten

$$\iint_G e^{-x^2-y^2} dA = \iint_G e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi = 2\pi \int_{\rho=0}^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pi$$

**Lösung zu Aufgabe 8–17 :**

$$h(10) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} 10^2 = 20 \implies h_0 \approx -181.2$$

$R_0$  bestimmt durch die Bedingung  $h(R_0) = 0$ , somit  $R_0 \approx 9.49$ .

$$\begin{aligned} V &= \int_{R_0}^R 2\pi r h(r) dr \\ &= 2\pi \int_{R_0}^R r \left( h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) dr \\ &\approx 312 \text{ [cm}^3\text{]} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–18 :** Wir bestimmen den Volumenanteil im ersten Oktanten durch ein Integral und multiplizieren das Resultat mit 8.

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} z dy \right) dx \\ &= 8 \int_{x=0}^a \left( \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy \right) dx \\ &= 8 \int_{x=0}^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 8 \left( a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{x=0}^a = \frac{16a^3}{3} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–19 :** Für einen gegebenen Punkt  $(x, y)$  in der Ebene ist die Zylinderhöhe  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Die Gleichung der Seitenwand lautet in Polarkoordinaten  $r^2 = r \cos \theta$  oder einfacher  $r = \cos \theta$ . Somit kann man durchaus auf das Integral

$$V = \int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r^2 dr d\theta = \dots = 0$$

kommen. Das Resultat ist offensichtlich falsch. Beachten Sie, dass ist die Lösungskurve von  $x^2 + y^2 = x$  ein Kreis mit Zentrum in  $(0.5, 0)$  und Radius  $1/2$  ist. Damit der Radius  $r$  immer positiv ist muss also der Winkel  $\theta$  zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$  liegen. Das führt auf das korrekte Integral

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r^2 dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left( \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–20 :**

$$\begin{aligned} V &= \iint_G \text{Höhe } dA \\ &= \iint_G (2 - x - 2y)^3 dA \\ &= \int_0^2 \left( \int_0^{1-x/2} (2 - x - 2y)^3 dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{-(2 - x - 2y)^4}{8} \Big|_{y=0}^{1-x/2} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{(2 - x)^4}{8} \right) dx \\ &= -\frac{(2 - x)^5}{40} \Big|_{x=0}^2 \\ &= \frac{2^5}{40} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Die Graphik wurde erzeugt mit *Mathematica* durch

**Mathematica**

```
Plot3D[(2-x-2y)^3,{x,0,2},{y,0,1},
  PlotPoints -> 30,
  PlotRange ->{0,8},
  AxesLabel ->{FontForm["x",{ "Courier",20}],
    FontForm["y",{ "Courier",20}], " "},
  ClipFill -> None];
```

**Lösung zu Aufgabe 8–21 :**

(a) Ein Bogen unter der Kurve  $y = \sin x$ , wobei  $0 \leq x \leq \pi$ .

(b)

$$I = \iint_G x \, dA = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x \, dy \, dx$$

(c)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi x y \Big|_{y=0}^{\sin x} dx \\ &= \int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 8–22 :

(a) Kreis mit Radius  $\sqrt{2}$

(b) Umwandlung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} x^2 \, dA \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \theta \, \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \\ &= \pi \frac{\sqrt{2}^4}{4} = \pi \end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 8–23 :

$$\iint_{K_r} f \, dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2) \, \rho \, d\phi \, d\rho = 2\pi \int_0^r \rho - \rho^3 \, d\rho = 2\pi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \pi r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{2} \right)$$

(a) Die Bedingung ist erfüllt falls  $1 - \frac{r^2}{2} = 0$ , d.h. für  $r = \sqrt{2}$ .

(b)

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{K_2} f(x, y) + c \, dA = \pi 2^2 \left( 1 - \frac{2^2}{2} \right) + c \pi 2^2 \\ &= \pi 4 \left( 1 - \frac{4}{2} \right) + c \pi 4 \\ &= \pi 4 (c - 1) \\ c &= \frac{1}{4\pi} + 1 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–24 :** Die Funktion der Oberkante des Dreiecks ist gegeben durch  $z = \frac{x}{2} - 1$ .



- (a) Zerlegen in vertikale Streifen und diese rotieren. Somit wird das Volumen zerlegt in Zylinderwände.

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi x \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \\ V &= \int_2^4 2\pi x \left( \frac{x}{2} - 1 \right) dx = \pi \int_2^4 x^2 - 2x dx \\ &= \pi \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right) \Big|_{x=2}^4 = \pi \left( \frac{64-8}{3} - (16-4) \right) = \pi \frac{20}{3} \approx 20.943951 \end{aligned}$$

Diese Aufgabe ist auch mit der Regel von Guldin lösbar: Weg des Schwerpunktes mit der Fläche des Dreiecks multiplizieren.

$$V = 2\pi r_s A = 2\pi \left( 2 + 2 \frac{2}{3} \right) 1 = \pi \frac{20}{3}$$

- (b) Zerlegen in vertikale Streifen.

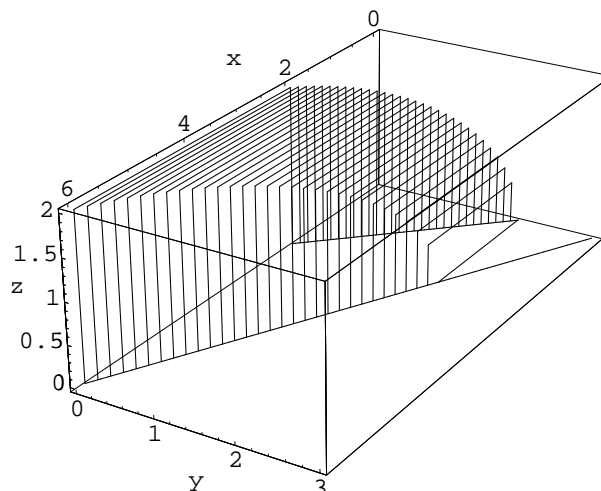
$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} (\omega x)^2 \rho h(x) dx \\ E &= \frac{\rho \omega^2}{2} \int_2^4 x^2 \left( \frac{x}{2} - 1 \right) dx = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_2^4 \frac{x^3}{2} - x^2 dx = \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=2}^4 \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{256-16}{8} - \frac{64-8}{3} \right) = \frac{\rho \omega^2}{2} \left( 30 - \frac{56}{3} \right) = \rho \omega^2 \frac{17}{3} \end{aligned}$$

- (c) Muss Doppelintegral sein.

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} (\omega \sqrt{x^2 + z^2})^2 \rho dA \\ E &= \frac{\rho \omega^2}{2} \iint_D (x^2 + z^2) dA = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_2^4 \left( \int_0^{x/2-1} x^2 + z^2 dz \right) dx \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \int_2^4 \left( \left( \frac{x}{2} - 1 \right) x^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{2} - 1 \right)^3 \right) dx \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \int_2^4 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) x^3 + \left( -1 - \frac{1}{4} \right) x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{3} dx \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{13}{24} x^3 - \frac{5}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{3} \right) \Big|_{x=2}^4 = \dots = \rho \omega^2 \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Es sollte keine Überraschung sein, dass die Antworten in (b) und (c) nur wenig voneinander abweichen.

**Lösung zu Aufgabe 8–25 :** Diese Aufgabe wurde aus [Klin77, Problem 14 p.819] übernommen.



$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} z \, dV \\
&= \int_0^2 \left( \int_{2-y}^{6-2y} \left( \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z \, dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left( \int_{2-y}^{6-2y} \frac{4-y^2}{2} dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left( (4-y) \frac{4-y^2}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (y^3 - 4y^2 - 4y + 16) dy \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} - 2y^2 + 16y \right) \Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \left( 4 - \frac{32}{3} - 8 + 32 \right) = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–26 :**

(a) Der Abstand von der  $z$ -Achse ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Somit erhalten wir

$$J_z = \rho \iiint_K x^2 + y^2 \, dV = \rho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$$

(b) Die Integration kann von Innen nach Aussen ausgeführt werden.

$$\begin{aligned}
J_z &= \rho \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \rho \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) \, dx \\
&= \rho \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \rho \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(c) Der Abstand von der neuen Rotationsachse ist gegeben durch  $r^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ . Das führt auf

$$\begin{aligned}
J &= \rho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \, dz \, dy \, dx \\
&= \rho \int_0^1 \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \, dy \, dx = \rho \int_0^1 \left( (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{3 \cdot 8} \right) \, dx \\
&= \rho \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) = \rho \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Eine elegantere Argumentation verschiebt den Würfel damit der Schwerpunkt auf der  $z$ -Achse liegt, dann wird um diese Achse rotiert. Das führt auf

$$J = \rho \iiint_K x^2 + y^2 \, dV = \rho \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx = \dots = \rho \frac{1}{6}$$

Die Lösung kann mit Hilfe des Satzes von Steiner kontrolliert werden. Der Abstand von der  $z$ -Achse zur Achse durch den Schwerpunkt ist  $a = \sqrt{2}/2$  und für das Volumen gilt  $V = 1$ . Somit erhalten wir

$$J_z = J + a^2 \cdot \rho \cdot V = \rho \frac{1}{6} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \rho = \rho \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \rho \frac{2}{3}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–27 :**  $z = x + 2y - 2$ 

$$M = \iiint_V \rho \, dV = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{2-2y} \int_{z=x+2y-2}^0 (2-z) \, dz \, dx \, dy = \dots = \frac{5}{3}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–28 :**

- (a) Im Volumen  $0 \leq z \leq x$  und die Vorderseite ist beschrieben durch  $x + 3y = 3$ , d.h.  $y = 1 - x/3$ . Somit erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{1-x/3} \int_0^x 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^3 \int_0^{1-x/3} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 x - \frac{x^2}{3} \, dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_{x=0}^3 = \frac{9}{2} - \frac{27}{9} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- (b) Der Beitrag eines Volumentelementes  $dV$  zum Moment ist bestimmt durch das Produkt der Kraft mit dem horizontalen Abstand von der  $y$ -Achse, d.h.  $dM = \rho g x \, dV$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} M &= \rho g \int_0^3 \int_0^{1-x/3} \int_0^x x \, dz \, dy \, dx = \rho g \int_0^3 \int_0^{1-x/3} x^2 \, dy \, dx = \rho g \int_0^3 x^2 - \frac{x^4}{3} \, dx \\ &= \rho g \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \Big|_{x=0}^3 = \rho g \left( \frac{27}{3} - \frac{81}{12} \right) = \rho g \left( 9 - \frac{27}{4} \right) = \rho g \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Aufgrund der Formel  $M = m g x_s$  kann die  $x$ -Koordinate  $x_s$  des Schwerpunktes bestimmt werden.

$$x_s = \frac{M}{\rho V g} = \frac{\rho g 9 \cdot 2}{4 \rho g 3} = \frac{3}{2}$$

Dies ist korrekt.

**Lösung zu Aufgabe 8–29 :**

- (a)

$$E = \int_0^3 \int_0^1 \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 x \, dy \, dx = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^3 \int_0^1 x^3 + x y^2 \, dy \, dx$$

- (b) Rechne

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^3 \int_0^1 x^3 + x y^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^3 \left( y x^3 + \frac{x y^3}{3} \Big|_{y=0}^1 \right) dx = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^3 \left( x^3 + \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_{x=0}^3 = \frac{\rho \omega^2}{2} \left( \frac{81}{4} + \frac{9}{6} \right) = \frac{87}{8} \rho \omega^2 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–30 :**

- (a) Integration über Dreieck in der  $xz$  Ebene. Die Stäbe der Höhe 1 ( $0 < y < 1$ ) in  $y$ -Richtung haben alle den selben Abstand  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  von der Rotationsachse und ein Volumen von  $dV = 1 \, dz \, dx$ .

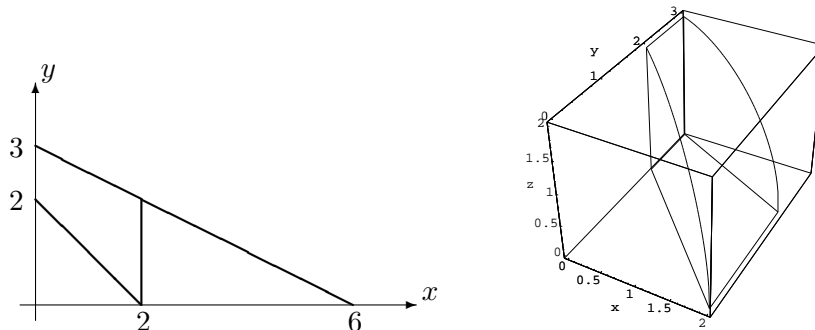
$$E = \int \frac{\rho}{2} v^2 \, dV = \int_0^3 \int_0^x \frac{\rho}{2} \omega^2 r^2 \, dz \, dx = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_0^3 \int_0^x x^2 + z^2 \, dz \, dx$$

(b) Rechne

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\rho\omega^2}{2} \int_0^3 \int_0^x x^2 + z^2 dz dx = \frac{\rho\omega^2}{2} \int_0^3 \left( z x^2 + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{z=0}^x \right) dx \\
 &= \frac{\rho\omega^2}{2} \int_0^3 \left( x^3 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_{z=0}^x \right) dx = \frac{\rho\omega^2}{2} \int_0^3 \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{\rho\omega^2}{2} \frac{1}{3} x^4 \Big|_{x=0}^3 = \frac{\rho\omega^2}{2} 27
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–31 :** Diese Aufgabe wurde mit einer minimalen Modifikation [Klin77, Problem 14, p.819] entnommen.

Die beiden Gleichungen  $x + y = 2$  und  $x + 2y = 6$  führen auf zwei Ebenen, die Parallel zur  $z$ -Achse sind. Die Gleichung  $x^2 + y^2 = 4$  ergibt einen Zylinder mit Radius 2 und der  $y$ -Achse als Zylinderachse. Die untenstehenden Abbildungen zeigen die Schnitte in der  $xy$ -Ebene (links) und eine mit *Mathematica* erzeugte 3D-Graphik (rechts).



Nun kann das Integral aufgestellt werden. Zu Berechnung können auch *Mathematica* oder ein Taschenrechner eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} z dV \\
 &= \int_0^2 \left( \int_{2-x}^{\frac{6-x}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left( \int_{2-x}^{3-\frac{x}{2}} \frac{4-x^2}{2} dy \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \frac{4-x^2}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 (2+x) \cdot (4-x^2) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 dx \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{-x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 8x \right) \Big|_{x=0}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left( -4 - \frac{16}{3} + 8 + 16 \right) = \frac{1}{4} \left( 20 - \frac{16}{3} \right) = \frac{1}{4} \frac{44}{3} = \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–32 :**

(a)

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} 1 dz dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (4-y) dy dx \\
&= \int_{-2}^2 \left( 4y - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^4 \right) dx = \int_{-2}^2 \left( 8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \left( 8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{x=-2}^2 = \frac{256}{15} \approx 17.0667
\end{aligned}$$

(b) und (c). Verwende  $dE = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dV$  und integriere.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\rho \omega^2}{2} \iiint_{\Omega} r^2 dV = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} x^2 + y^2 dz dy dx \\
&= \frac{\rho \omega^2}{2} \frac{23552}{315} \approx \frac{\rho \omega^2}{2} 74.77
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–33 :** Die Berechnung der drei Kurvenintegrale ist möglich, aber sehr mühsam. Verwende den Divergenzsatz und  $\operatorname{div} \vec{F} = 1 + x$ . Die Gleichung der Geraden der Obergrenze des Dreiecks ist  $y = \frac{5-x}{2}$  oder  $x = 5 - 2y$ .

$$\begin{aligned}
A &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} dA \\
&= \int_1^3 \left( \int_1^{(5-x)/2} 1+x dy \right) dx = \int_1^3 (1+x) \left( \frac{5-x}{2} - 1 \right) dx = \int_1^3 (1+x) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \right) dx \\
&= \int_1^3 -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} dx = \left( -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \right) \Big|_{x=1}^3 \\
&= \left( -\frac{1}{6}26 + \frac{1}{2}8 + \frac{3}{2}2 \right) = \frac{-26+24+18}{6} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Das Flächenintegral kann auch in der anderen Reihenfolge integriert werden, allerdings ist die Berechnung ebenso mühsam.

$$\begin{aligned}
A &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} dA \\
&= \int_1^2 \left( \int_1^{5-2y} 1+x dx \right) dy = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{x=1}^{5-2y} dy = \int_1^2 \left( (5-2y) + \frac{1}{2}(5-2y)^2 - \frac{3}{2} \right) dy \\
&= \int_1^2 (2y^2 - 12y + 16) dy = \left( \frac{2}{3}y^3 - 6y^2 + 16y \right) \Big|_{y=1}^2 = \frac{2}{3}7 - 6 \cdot 3 + 16 = \frac{14-6}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–34 :** Eine einfache Parametrisierung des Kreises ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Somit gilt dann

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt \quad \text{und} \quad ds = 3$$

$$\begin{aligned}
a &= \iint_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) x \\ (x^2 + y^2) y \end{pmatrix} dA \quad \text{verwende Divergenzsatz} \\
&= \oint \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) x \\ (x^2 + y^2) y \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds = \oint \begin{pmatrix} 9x \\ 9y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} ds \\
&= \oint 27 \cdot 3 ds = 162 \pi \\
b &= \oint_C \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \cos t + 3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -9 \sin t \cos t - 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t dt = 0 \\
&\quad \text{Integral muss 0 ergeben, da das Vektorfeld konservativ ist} \\
c &= \oint_C \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} dA = \iint_D 1 dA = 9\pi \\
d &= \oint_C (1+y+x) ds = \int_0^{2\pi} (1+3 \cos t + 3 \sin t) 3 dt = 6\pi
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–35 :** Die Kurve kann parametrisiert werden durch  $x(t) = t$  und  $y(t) = 1 - t$  mit  $0 \leq t \leq 1$ . Somit gilt  $\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{2}$ . Der nach rechts–oben zeigende Normalenvektor  $\vec{n}$  mit Länge 1 ist gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit berechnet sich der Fluss durch

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ t+1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{2} dt \\
&= \int_0^1 2t + 1 dt = 2
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–36 :** Es gilt

$$\vec{ds} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t - \cos(2t) \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

Die Fläche kann bestimmt werden durch das Kurvenintegral

$$A = \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \vec{ds} = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} \left( \cos t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \cos t dt = \dots = \pi$$

oder auch

$$\begin{aligned}
A &= - \int_C y dx \\
A &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–37 :**

## 1. Mittels Berechnung der Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}
\text{Fluss} &= \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds \\
&= \int_0^1 2t \cdot 0 + (t+0) \cdot (-1) \, dt + \int_0^1 2 \cdot 1 + (2+t) \cdot 0 \, dt \\
&\quad + \int_0^1 2(1-t) \cdot 0 + (t+1) \cdot 1 \, dt + \int_0^1 0 \cdot (-1) + (0+1-t) \cdot 0 \, dt \\
&= \frac{-1}{2} + 2 + \frac{3}{2} + 0 = 3
\end{aligned}$$

## 2. Mittels Divergenzatz

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{\nabla} \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix} = 2+1=3$$

Da die Fläche des Einheitsquadrates  $R$  sehr leicht zu finden ist ergibt sich

$$\text{Fluss} = \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \vec{\nabla} \vec{v} \, dx \, dy = \iint_R 3 \, dx \, dy = 3$$

**Lösung zu Aufgabe 8–38 :** Verwende Zylinderkoordinaten mit Zylinderachse in Richtung der  $y$ -Achse.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ y \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad dA = 2 \, d\phi \, dy$$

Bezüglich der üblichen Koordinaten sind  $y$  und  $z$  zu vertauschen. Es sind mindestens zwei Lösungswege möglich.

- Durch direkte Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\iint_{Wand} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ 2 \cos \phi - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix} 2 \, d\phi \, dy \\
&= 2 \int_0^4 \int_0^{2\pi} y \cos \phi + (2 \cos \phi - y) \sin \phi \, d\phi \, dy = 0
\end{aligned}$$

- Verwende den Divergenzatz.  
Wegen  $\operatorname{div} \vec{F} = 2y$  gilt

$$\begin{aligned}
\iiint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_G 2y \, dV \\
&= \int_0^4 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} 2y \rho \, d\phi \right) d\rho \right) dy \\
&= \pi 2^2 \int_0^4 2y \, dy = \pi 64
\end{aligned}$$

Für die Integrale über den Boden ( $y = 0$ ) und den Deckel ( $y = 4$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_{\text{Boden}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} y \, \rho \, d\phi \right) d\rho = 0 \\ \iint_{\text{Deckel}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4 \\ 4^2 \\ x-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \, \rho \, d\phi \right) d\rho \\ &= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} 16 \, \rho \, d\phi \right) d\rho = \pi \cdot 16 \cdot 4\end{aligned}$$

Der Divergenzsatz ergibt nun

$$\begin{aligned}\iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint_{\text{Wand}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{\text{Boden}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{\text{Deckel}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA \\ \iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= 64\pi - 64\pi = 0\end{aligned}$$

### Lösung zu Aufgabe 8–39 :

(a) Wegen  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial 3x}{\partial x} + \frac{\partial \sin(x)}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} = 3 + 0 + 0 = 3$  gilt

$$\begin{aligned}\iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_G 3 \, dV \\ &= 3 \cdot (\text{Volumen des Zylinders}) = 3 \cdot 3^2 \pi \cdot 10 = 270\pi\end{aligned}$$

(b) Mantelfläche kann durch modifizierte Zylinderkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \\ y \\ 3 \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \leq y \leq 10 \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Der äussere Einheitsnormalenvektor ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und das Flächenelement auf der Mantelfläche durch  $dA = 3 \, d\varphi \, dy$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cos(\varphi) \\ \sin(3 \cos(\varphi)) \\ y \end{pmatrix} \\ \iint_{\text{Mantel}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^{10} \left( \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 9 \cos(\varphi) \\ \sin(3 \cos(\varphi)) \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} 3 \, d\varphi \right) dy\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{10} \left( \int_0^{2\pi} 27 \cos^2 \varphi + 3y \sin \varphi \, d\varphi \right) dy \\
&= \int_0^{10} \left( 27 \frac{2\pi}{2} + 0 \right) dy = 270\pi
\end{aligned}$$

(c) siehe oben

Als Kontrolle kann der Fluss durch Boden und Deckel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\iint_{\text{Boden}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 0 \\
\iint_{\text{Deckel}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(x) \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 0
\end{aligned}$$

Da beide Integrale Null ergeben muss der Gesamtfluss aus dem Zylinder heraus gleich dem Fluss durch die Mantelfläche sein. Diese Beobachtung ist eine Kontrolle der obigen Ergebnisse.

**Lösung zu Aufgabe 8–40 :** Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

und somit

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_R 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV$$

Dieses Volumenintegral wird am einfachsten in zylindrischen Koordinaten ausgerechnet.

$$\begin{aligned}
\iiint_R 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3(\rho^2 + z^2) \rho \, d\phi \, dr \, dz \\
&= 6\pi \int_0^3 \int_0^2 (\rho^3 + \rho z^2) \, d\rho \, dz = 6\pi \int_0^3 \left( \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} z^2 \right) \Big|_{\rho=0}^2 dz \\
&= 6\pi \int_0^3 (4 + 2z^2) \, dz = 6\pi \left( 4z + 2\frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^3 \\
&= 6\pi (12 + 18) = 180\pi
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–41 :**

$$\vec{\nabla} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

In Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \vec{F} \, dV \\
&= \int_{z=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{3}} r \cdot r \, dr \, d\phi \, dz = \dots = 2\pi\sqrt{3}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–42 :**

(a) Wegen  $\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 - 1 + 1 = 3x^2$  gilt

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_G 3x^2 \, dV \\ &= \int_0^2 \pi \left( \int_0^5 \left( \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cos^2 \phi \, d\phi \right) dz \right) d\rho \\ &= 15 \cdot \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \right) \cdot \left( \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) = 15 \cdot \pi \frac{16}{4} = 60\pi \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Mantel}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^5 \left( \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8 \cos^3 \phi \\ -2 \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} 2 \, d\phi \right) dz \\ &= 10 \int_0^{2\pi} 8 \cos^4 \phi - 2 \sin^2 \phi \, d\phi = 40\pi \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8-43 :** Es handelt sich um einen Achtel einer Kugel vom Radius 2 mit Zentrum im Ursprung.

(a) Es sind die drei Bereiche in den Koordinatenebenen zu betrachten und der Anteil auf dem Kugelmantel. Die Integrale sind „nur“ aufzustellen und nicht auszurechnen.

1.  $xy$ -Ebene ( $z = 0$ )

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 0 \, dx \, dy = 0$$

2.  $xz$ -Ebene ( $y = 0$ )

$$I_2 = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx \, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} x \, dx \, dz = \frac{8}{3}$$

3.  $yz$ -Ebene ( $x = 0$ )

$$I_3 = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} -y \, dy \, dz = -\frac{8}{3}$$

4. Kugelschale mit Hilfe von Kugelkoordinaten  $\theta$  und  $\phi$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{2} 2^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} z^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2^2 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
&= 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \left. \frac{-\cos^3 \theta}{3} \right|_{\theta=0}^{\pi/2} d\phi \\
&= 8 \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \pi
\end{aligned}$$

(b) Es ist leicht zu sehen, dass  $\operatorname{div} \vec{v} = 1$  und somit mit Hilfe des Divergenzsatzes

$$\begin{aligned}
\text{Fluss} &= \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \\
&= \iiint_{Vol} \operatorname{div} \vec{v} \, dV \\
&= \iiint_{Vol} 1 \, dV = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi 2^3 = \frac{4}{3} \pi
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–44 :** Es sind „neue“ Zylinderkoordinaten einzuführen, da die Zylinderachse in  $y$  Richtung zeigt. Mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ y \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

gilt  $dV = r \, d\alpha \, dr \, dy$  und das Flächenelement der Aussenwand ist  $dA = r \, d\alpha \, dy$ .

(a) Man sieht leicht, dass  $\operatorname{div} \vec{F} = z + x - 1$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iiint_Z \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\
&= \int_{y=0}^3 \int_{r=0}^2 \int_{\alpha=0}^{2\pi} (r \sin \alpha - r \cos \alpha - 1) r \, d\alpha \, dr \, dy \\
&= - \int_{y=0}^3 \int_{r=0}^2 \int_{\alpha=0}^{2\pi} r \, d\alpha \, dr \, dy = -\text{Volumen} = -12 \pi
\end{aligned}$$

(b) • Boden bei  $y = 0$

$$\iint_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{\text{Kreis}} \begin{pmatrix} xz \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 0$$

• Deckel bei  $y = 3$

$$\iint_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{\text{Kreis}} \begin{pmatrix} xz \\ x3 \\ -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 0$$

- Zylinderwand bei  $r = 2$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\text{Wand}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \iint_{\text{Wand}} \begin{pmatrix} r^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ y r \cos \alpha \\ -r \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} dA = 0 \\
 &= \int_{y=0}^3 \int_{\alpha=0}^{2\pi} (4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) 2 \, d\alpha \, dy \\
 &= \dots = -12\pi
 \end{aligned}$$

- Das totale Obeflächenintegral ergibt sich als Summe der drei Integrale und das Ergebniss ist  $-12\pi$ , wie aufgrund des Divergenzsatzes zu erwarten war.

**Lösung zu Aufgabe 8–45 :** Die pro Zeit erzeugte Energie (Leistung)  $P$  erhält man durch Multiplikation des Volumens mit der gegebenen Konstanten  $w$ .

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = w \frac{4\pi}{3} R_i^3$$

Diese Energie muss durch die Kugelschale mit Radius  $r$  abfließen. Wegen dem Gesetz von Fourier gilt also für  $R_i \leq r \leq R_a$

$$\begin{aligned}
 P &= -\lambda 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \\
 \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{P}{\lambda 4\pi r^2} \\
 T(r) &= \frac{P}{\lambda 4\pi r} + k
 \end{aligned}$$

Nun kann man die Bedingung  $T(R_a) = T_a$  verwenden und rechnet

$$\begin{aligned}
 T_a &= \frac{P}{\lambda 4\pi R_a} + k \\
 k &= T_a - \frac{P}{\lambda 4\pi R_a} \\
 T(r) &= \frac{P}{\lambda 4\pi r} + T_a - \frac{P}{\lambda 4\pi R_a} \\
 T(r) &= T_a + \frac{P}{\lambda 4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} \right) \\
 T_i &= T_a + \frac{P}{\lambda 4\pi} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right) = T_a + \frac{P}{\lambda 4\pi} \frac{R_a - R_i}{R_i R_a} \\
 \Delta T = T_i - T_a &= \frac{w 4\pi R_i^3}{3 \lambda 4\pi} \frac{R_a - R_i}{R_i R_a} = \frac{w}{3 \lambda R_a} R_i^2 (R_a - R_i)
 \end{aligned}$$

Um dem maximal möglichen Wert von  $T_i$  zu bestimmen kann man die Ableitung von  $\Delta T$  nach  $R_i$  Null setzen und auflösen

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial \Delta T}{\partial R_i} &= \frac{w}{3 \lambda R_a} (2 R_i (R_a - R_i) - R_i^2) \\
 0 &= R_i (2 R_a - 3 R_i) \implies R_i = 0 \quad \text{oder} \quad R_i = \frac{2}{3} R_a
 \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–46 :**

- Wärme-Leistung in hypothetischem Zylinder mit Radius  $r$ . Es ist nur das eingeschlossene Volumen zu berücksichtigen, dieses ist vom Radius  $r$  abhängig.

$$P(r) = w L \pi r^2$$

- Gesetz von Fourier um den Fluss durch Zylinderwand mit Radius  $r$  zu bestimmen

$$-\lambda L 2\pi r \frac{\partial T(r)}{\partial r} = P(r)$$

- Berechnen der Temperatur durch eine Integration

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r)}{\partial r} &= -\frac{P(r)}{\lambda L 2\pi r} = -\frac{w L \pi r^2}{\lambda L 2\pi r} = -\frac{w}{2\lambda} r \\ T(r) &= -\frac{w}{4\lambda} r^2 + k \\ T_0 = T(R) &= -\frac{w}{4\lambda} R^2 + k \\ k &= T_0 + \frac{w}{4\lambda} R^2 \\ T(r) &= \frac{w}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0 \end{aligned}$$

Das Temperaturprofil ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt bei  $r = 0$ .

**Lösung zu Aufgabe 8–47 :** Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$$

und somit ist das Vektorfeld konservativ und das Linienintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig. Deshalb ersetzen wir die Kurve  $C$  durch eine einfachere Kurve  $C'$  welche dieselben Anfangs- und Endpunkte verbindet.

$$C' : \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad -3 \leq t \leq 3$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \, d\vec{s} &= \int_{C'} \vec{F} \, d\vec{s} \\ &= \int_{-3}^3 \begin{pmatrix} t^4 \\ 17+t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-3}^3 t^4 dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} \right|_{t=-3}^3 = 2 \frac{3^5}{5} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–48 :** Divergenzatz

$$\begin{aligned} A &= \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \iint_{\Omega} (-1 + 2y) \, dA \\ &= \int_2^4 \left( \int_1^{x/2} (-1 + 2y) \, dy \right) dx = \int_2^4 \left( -y + y^2 \Big|_{y=1}^{x/2} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^4 \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - 0 \right) dx = \left( -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{x=2}^4 \\
&= \left( -\frac{16}{4} + \frac{64}{12} \right) - \left( -\frac{4}{4} + \frac{8}{12} \right) = -3 + \frac{56}{12} = \frac{-9 + 14}{3} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–49 :** Der Halbkreisbogen kann unten durch eine Gerade abgeschlossen werden, dann ergibt sich ein geschlossenes Gebiet  $G$  für welches der Divergenzsatz verwendet werden kann.

$$\iint_G \operatorname{div} \vec{F} dA = \oint_{\text{Rand}} \vec{n} \cdot \vec{F} ds = \int_{\text{Kreis}} \vec{n} \cdot \vec{F} ds + \int_{\text{Gerade}} \vec{n} \cdot \vec{F} ds$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = 2y - 2y = 0$  muss der Fluss durch den Boden (von unten) gleich dem Fluss durch die Halbkreisbogen sein.

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x, 1) &= \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
A &= \int_{-1 \leq x \leq 1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{-1}^1 x^2 - 1 dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Die Aufgabe kann notfalls auch durch eine direkte Integration gelöst werden, ohne Divergenzsatz.

$$\vec{s}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 1 + \sin \phi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad \vec{ds}(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} d\phi, \quad ds = d\phi$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} 2 \cos \phi (1 + \sin \phi) \\ \cos^2 \phi - (1 + \sin \phi)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} d\phi \\
&= \int_0^\pi 2 \cos^2 \phi (1 + \sin \phi) + \cos^2 \phi \sin \phi - (1 + \sin \phi)^2 \sin \phi d\phi \\
&= \int_0^\pi 3 \cos^2 \phi \sin \phi + 2 \cos^2 \phi - \sin \phi - 2 \sin^2 \phi - \sin^3 \phi d\phi \\
&= \int_0^\pi 4 \cos^2 \phi \sin \phi + 2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - 2 \sin \phi d\phi \\
&= \int_0^\pi 4 \cos^2 \phi \sin \phi d\phi + 2 \int_0^\pi \cos^2 \phi - \sin^2 \phi d\phi - 2 \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\
&= \frac{-4}{3} \cos^3 \phi \Big|_{\phi=0}^\pi + 0 + 2 \cos \phi \Big|_{\phi=0}^\pi = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–50 :** Mit Hilfe des Divergenzsatzes kann dieses Integral umgeformt werden in ein Oberflächenintegral.

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

Dieses besteht aus drei Teilen.

1. Zylinderwand ( $x^2 + y^2 = 1$ ): Hier gilt

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Dieses Vektorfeld zeigt in die  $z$ -Richtung und somit ist die Normalkomponente 0. Der Integralbeitrag ist 0.

2. Boden ( $z = 0$ ): Hier ist die äussere Normale gegeben durch  $\vec{n} = (0, 0, -1)$  und somit  $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ . Der Integralbeitrag ist 0.
3. Deckel ( $z = 1$ ): Hier ist die äussere Normale gegeben durch  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  und somit  $\vec{F} \cdot \vec{n} = z^2 = 1$ . Der Integralbeitrag ist gleich der Fläche des Kreises, d.h.  $\pi$ .

Somit gilt

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = 0 + 0 + \pi = \pi$$

Es ist möglich die Divergenz auszurechnen und das Dreifach-Integral direkt auszurechnen. Die Rechnungen sind länger.

#### Lösung zu Aufgabe 8–51 :

(a)

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3 \sin \theta \cos \phi - 3 \sin \theta \sin \phi \\ 3 \sin \theta \cos \phi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

(b) Der Fluss aus der Halkugel durch den Boden nach aussen ist

$$I_u = \iint_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \iint_{\text{Kreis}} \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dA = -9\pi$$

Da die Divergenz gegeben ist durch  $\operatorname{div} \vec{F} = 1$  gilt für die Halbkugel  $K$

$$\begin{aligned} I + I_u &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \frac{2}{3} \pi 3^3 \\ I &= \frac{2}{3} \pi 27 + 9\pi = 27\pi \end{aligned}$$

#### Lösung zu Aufgabe 8–52 : Integration in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} f(t, \vec{x}) \, dV &= g(t) \iiint_{R^3} \exp\left(\frac{-\|\vec{x}\|^2}{4k^2 t}\right) dV \\ &= g(t) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp\left(\frac{-r^2}{4k^2 t}\right) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\ &= g(t) 4\pi \int_0^\infty \exp\left(\frac{-r^2}{4k^2 t}\right) r^2 \, dr \\ &= g(t) 4\pi \frac{(4k^2 t)^{3/2} \sqrt{\pi}}{4} = g(t) 8k^3 (t\pi)^3 = 1 \end{aligned}$$

- (a) Da die Funktion überall positiv ist, und das uneigentliche Integral in Kugelkoordinaten existiert, ist die Funktion offensichtlich integrierbar. Die Exponentialfunktion konvergiert (für grosse Werte von  $r$ ) schneller gegen Null als jedes Polynom.
- (b) Integration in Kugelkoordinaten: siehe oben.
- (c) Somit muss gelten

$$g(t) = \left( \frac{1}{2k\sqrt{t\pi}} \right)^3$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \left( \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \right)^3 \exp \frac{-\|\vec{x}\|^2}{4k^2 t}$$

**Lösung zu Aufgabe 8–53 :** Aufgrund des Divergenzsatzes muss der Fluss durch den Boden (von unten) gleich dem Fluss durch die Halbkugeloberfläche sein.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) &= 2 * x + 2 * z - 4z = 0 \\ \vec{F}(x, y, 1) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A &= \int \int_{x^2+y^2 < 1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int \int_{x^2+y^2 < 1} x^2 + y^2 - 2 \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (\rho^2 - 2) \rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^3 - 2\rho \, d\rho = 2\pi \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{-3\pi}{2} \end{aligned}$$



## 8.8 Zusammenfassung

Nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels sollten Sie

- Integrale über Bereiche in der Ebene aufstellen können, in verschiedenen Koordinatensystemen.
- einfache Integrale über Bereiche in der Ebene ausrechnen können.
- Integrale über Bereiche im Raum aufstellen können, in verschiedenen Koordinatensystemen.
- einfache Integrale über Bereiche im Raum ausrechnen können.
- den Divergenzsatz in zwei und drei Dimensionen richtig anwenden können.
- Oberflächenintegrale aufstellen können, und in einfachen Fällen berechnen.

# Literaturverzeichnis

- [Ayre75] F. Ayres Jr. *Differential und Integralrechnung*. McGraw–Hill, London, 1975.
- [BurgHafWill90] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band IV Vektoranalysis und Funktionentheorie*. Teubner, Stuttgart, 1990.
- [Farl82] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*. Dover, New York, 1982.
- [JordSmit94] D. Jordan and P. Smith. *Mathematical Techniques*. Oxford University Press, Oxford, England, 1994.
- [Klin77] M. Kline. *Calculus, an Intuitive and Physical Approach*. John Wiley and Sons, 1977.
- [MeybVach90] K. Meyberg and P. Vachenauer. *Höhere Mathematik I*. Springer, Berlin, 1990.
- [PapuII01] L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*. Vieweg, Braunschweig, 10. edition, 2001.
- [Pres86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes (in PASCAL)*. Cambridge University Press, 1986.
- [Pres92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [Spie71] M. R. Spiegel. *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists, SI edition*. McGraw–Hill, London, 1971.
- [Swok92] E. W. Swokowski. *Calculus, late Trigonometry Version*. PWS–Kent Publishing Company, Boston, fifth edition, 1992.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Approximation de l'aire	1
1.2	Somme intégrale	3
1.3	Théorème de la moyenne du calcul intégral	6
1.4	Preuve du théorème fondamental	7
1.5	L'aire sous un arc de $y = \sin x$	9
1.6	Interpolation linéaire	30
1.7	Simpson's 3/8-Regel	34
2.1	Flexion d'une poutre	83
2.2	Moment d'inertie	83
2.3	l'énergie pour déformation d'une poutre	84
2.4	flexion d'une poutre fixée	86
2.5	Flexion d'une poutre soutenue	89
3.1	Archimedische Spirale	124
3.2	Die Kurven $(\sin(2t), t)$ , $(\sin t, \sin^3 t)$ und $(\sin(2t), \cos t)$	125
3.3	Die Kurve $(2 \cos(3t), \sin(3t))$	126
3.4	Orts- und Geschwindigkeitsvektor	126
3.5	Eine logarithmische Spirale	128
3.6	Wurfdistanz als Funktion des Winkels bei $\omega = 10$	130
3.7	Wurfdistanz als Funktion des Winkels bei $\omega = 2$	130
3.8	Eine gewöhnliche Zykloide	130
3.9	Eine verkürzte Zykloide	131
3.10	Eine verlängerte Zykloide	132
3.11	Die Kurve $y = \cos x$ und ein Krümmungskreis	137
3.12	Eine Ellipse mit Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$	139
3.13	Eine einfache Kurve in $\mathbb{R}^3$	140
3.14	Eine Spirale auf einer Kugeloberfläche	141
3.15	Lösungskurve zur Aufgabe 3-3	151
3.16	Seil von einer Rolle abrollen	154
4.1	Vektorfeld und Linienintegral	176
4.2	Gesetz von Biot-Savart	178
4.3	Magnetfeld in einer Stromschleife, in der Ebene	181
4.4	Magnetfeld in einer Stromschleife, entlang der Symmetrieachse	182
4.5	Magnetfeld in einer Stromschleife, entlang einer Achse	182
4.6	Magnetfeld in einer Stromschleife	183
4.7	Magnetfeld in einer einfachen Spule	184
4.8	Einige Feldlinien eines einfachen Stromkreises	185
4.9	Einige Feldlinien einer einfachen Spule	185
4.10	$z$ -Komponente des Feldes in einer Helmholtzspule	186

4.11	$z$ -Komponente des Feldes in einer Helmholtzspule, homogenes Feld	187
4.12	Magnetfeld in einer Helmholtzspule	187
7.1	Graph der Funktion $z = 1 - x + y/2$	246
7.2	Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$	247
7.3	Niveaukurven der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$	248
7.4	Graph der Funktion $f(x, y) = xy$	249
7.5	Eine Isolinie der Funktion $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$	249
7.6	Graph der Funktion $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$	249
7.7	Der Graph der Funktion $f(x, y) = \exp(-0.2x^2) \sin(0.9y)$	250
7.8	Der Graph einer Funktion in Polarkoordinaten	251
7.9	Der Graph der Funktion $f(x, y) = 1 + yx^2 - y^3$	259
7.10	Der Graph von $2 - (x + 1)^2 - 2(y - 2)^2$ und der Tangentialebene	263
7.11	Der Graph von $e^{-y^2+x}x$	264
7.12	Kammähnlicher Hügel	268
7.13	Beweis des Satzes von Schwarz	272
7.14	Graph der Funktion $xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$	274
7.15	Graphen der Funktion $f(x, y) = e^{xy} \cos(3y)$ und der Taylorapproximation zweiter Ordnung	276
7.16	Der Graph von $e^{-y^2+x}x$ und der Tangentialebene im Minimalpunkt	279
7.17	Der Graph von $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5$	282
7.18	Der Graph einer Funktion mit vielen kritischen Punkten	283
7.19	Der Graph der Funktion $z = x^2 + 2y^2$	298
7.20	Der Graph der Funktion $x^2 + 4y^2 - x + 2y$ entlang einer Ellipse	302
8.1	Integration über einen dreieckigen Bereich	357
8.2	Flächenelement in Polarkoordinaten	360
8.3	Integration in beliebigen Koordinaten	362
8.4	Integration über ein Parallelogramm	363
8.5	Korrektur durch Wärmeübergangskoeffizienten	397

# Tabellenverzeichnis

3.1	Formeln für Krümmungsradien . . . . .	138
8.1	Beispiele zu Divergenz . . . . .	369
8.2	Volumenelemente . . . . .	372
8.3	Flächenelemente in kartesischen Koordinaten . . . . .	376
8.4	Flächenelemente in Zylinderkoordinaten . . . . .	376
8.5	Flächenelemente in Kugelkoordinaten . . . . .	377
8.6	Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen . . . . .	377
8.7	Einige Werte von Wärmekonstanten . . . . .	388
8.8	Begriffe der Wärmeleitungstheorie . . . . .	389
8.9	Laplaceoperator in verschiedenen Koordinatensystemen . . . . .	390