



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Ανδρέας Ζορπίδης

Επιβλέπων: Γκόγκος Χρήστος,
Καθηγητής

Άρτα, Ιανουάριος 2021



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΜΕ
ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Ανδρέας Ζορτίδης

Επιβλέπων: Γκόγκος Χρήστος,
Καθηγητής

Άρτα, Ιανουάριος 2021

GRAPH COLORING ALGORITHMS WITH VISUALIZATION

ALGORITHMS AND COMPLEXITY

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος είναι ένα NP-hard πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Αφορά την ανάθεση ενός χρώματος σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα, ενώ παράλληλα χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων. Στην παρούσα εργασία γίνεται η υλοποίηση τεσσάρων αλγορίθμων χρωματισμού γραφημάτων (First Fit, DSATUR, Recursive Largest First, Backtracking DSATUR) και η τρισδιάστατη οπτικοποίηση των γραφημάτων αυτών σε πραγματικό χρόνο. Η υλοποίηση της κύριας εφαρμογής γίνεται με γλώσσα προγραμματισμού JavaScript, η οπτικοποίηση των δεδομένων με WebGL με χρήση της Three.js βιβλιοθήκης 3d-force-graph και η εκτέλεσή της με τρεις διαφορετικούς τρόπους, τοπικά στον υπολογιστή με χρήση του Electron.js με τη μορφή εκτελέσιμης εφαρμογής, στον περιηγητή Browser/Client τοπικά με χρήση του περιβάλλοντος Node.js και στον περιηγητή Browser/Client μέσω του υπολογιστικού νέφους αντίστοιχα.

Λέξεις-κλειδιά: Αλγόριθμοι, Χρωματισμός Γραφημάτων, Νέφος, JavaScript, Οπτικοποίηση Δεδομένων, Οπτικοποίηση Γραφημάτων, First Fit, DSATUR, Recursive Largest First, Backtracking DSATUR.

ABSTRACT

The graph coloring problem is an NP-hard combination optimization problem. It involves assigning a color to each vertex of a graph so that adjacent vertices are colored differently, while the minimum number of different colors is used. In the present assignment, four graph coloring algorithms are implemented (First Fit, DSATUR, Recursive Largest First, Backtracking DSATUR) along with the three-dimensional visualization of these graphs in real time. The main application is built using JavaScript and the visualization of the data is done with WebGL using the Three.js component 3d-force-graph. The application can be executed in three different ways, locally on the computer using Electron.js in the form of an executable application, in the Browser/Client locally using Node.js and in the Browser/Client via the cloud respectively.

Keywords: Algorithms, Graph Coloring, Cloud, JavaScript, Data Visualization, Graph Visualization, First Fit, DSATUR, Recursive Largest First, Backtracking DSATUR.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
ABSTRACT	4
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	6
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ	7
1 Εισαγωγή	8
2 Περιγραφή Προβλήματος	8
3 Δεδομένα Προβλήματος	9
4 Αποτελέσματα	11
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	12
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	13

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

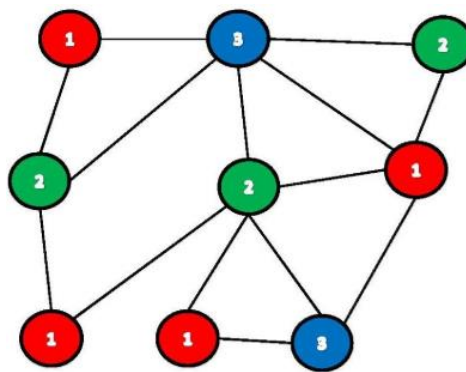
Πίνακας 1 Δεδομένα προβλημάτων.....	10
Πίνακας 2 Αποτελέσματα προβλημάτων.....	11

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Χρωματισμός κορυφών γραφήματος. Το σχήμα είναι από την ιστοσελίδα..... 8

1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος είναι ένα NP-hard πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης [Kar72]. Αφορά την ανάθεση ενός χρώματος σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα (όπως στο Σχήμα 1), ενώ παράλληλα χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων. Στην παρούσα εργασία ζητείται η υλοποίηση τεσσάρων αλγορίθμων χρωματισμού γραφημάτων και η εφαρμογή τους σε γνωστά προβλήματα από τη βιβλιογραφία.



Χρωματισμός κορυφών γραφήματος. Το σχήμα είναι από την ιστοσελίδα

2 Περιγραφή Προβλήματος

Το πρόβλημα χρωματισμού γραφήματος τυπικά ορίζεται ως εξής. Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου απλού γραφήματος $G = (V, E)$ με ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο ακμών E , ζητείται η ανάθεση σε κάθε κορυφή $v \in V$ ενός ακραίου $c(v) \in \{1, 2, \dots, k\}$ έτσι ώστε το k να ελαχιστοποιείται και να ισχύει ότι $c(v) \neq c(u) \forall \{v, u\} \in E$.

Το πρόβλημα συναντάται σε μεγάλο αριθμό πρακτικών εφαρμογών όπως ο χρονοπρογραμματισμός εκπαιδευτικών ιδρυμάτων (educational timetabling), ο χρονοπρογραμματισμός αθλητικών γεγονότων (sports scheduling), η ανάθεση συχνοτήτων (frequency assignment), η ανάθεση καταχωρητών στους μεταγλωττιστές (compiler register allocation) και άλλα.

Πολλοί αλγόριθμοι χρωματισμού γραφημάτων έχουν προταθεί τα τελευταία 50 έτη. Στην παρούσα εργασία θα εξεταστούν τέσσερις αλγόριθμοι που ανήκουν στις λεγόμενες κατασκευαστικές τεχνικές (constructive techniques). Οι κατασκευαστικές τεχνικές δημιουργούν λύσεις βήμα προς βήμα, αναθέτοντας στη σειρά, σε κάθε κορυφή, ένα χρώμα,

πιθανά εφαρμόζοντας οπι- σθοχώρηση κατά τη διαδικασία. Οι αλγόριθμοι που θα εξεταστούν είναι ο αλγόριθμος first fit, ο αλγόριθμος DSATUR, ο αλγόριθμος Recursive Largest First και ο αλγόριθμος backtracking DSATUR. Πληροφορίες για τους ανωτέρω αλγορίθμους μπορούν να βρεθούν στο άρθρο [LTMG12] καθώς και στις αναφορές του ίδιου άρθρου.

3 Δεδομένα Προβλήματος

Το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων αφορά φοιτητές που έχουν πραγματοποιήσει εγγραφές σε εξετάσεις μαθημάτων. Για κάθε εξέταση διατίθεται μια λίστα από φοιτητές και κάθε φοιτητής μπορεί να είναι εγγεγραμμένος σε μια ή περισσότερες εξετάσεις. Κάθε εξέταση θα πρέπει να τοποθετηθεί σε μια περίοδο εξέτασης και η λύση του προβλήματος συνίσταται στην ανάθεση όλων των εξετάσεων στο μικρότερο δυνατό αριθμό περιόδων έτσι ώστε να μην υπάρχουν συγκρούσεις, δηλαδή να μην υπάρχουν φοιτητές που θα έπρεπε να συμμετάσχουν σε εξετάσεις σε περισσότερα του ενός μαθήματα στην ίδια περίοδο.

Ως δεδομένα του προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων Toronto τα οποία είναι διαθέσιμα προς μεταφόρτωση στη διεύθυνση <https://github.com/chgogos/datasets/blob/main/UETT/toronto.zip>. Τα δεδομένα Toronto αποτελούνται από 13 προβλήματα και πληροφορίες για κάθε πρόβλημα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Τα αρχεία δεδομένων (κατάληξη .stu) διαθέτουν για κάθε σπουδαστή μια γραμμή που περιέχει τους αριθμούς των μαθημάτων στα οποία είναι εγγεγραμμένος χωρισμένους μεταξύ τους με κενά. Η πρώτη γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί στον πρώτο σπουδαστή, η δεύτερη γραμμή στο δεύτερο σπουδαστή κ.ο.κ. Για παράδειγμα το αρχείο car-f-92.stu περιέχει 18419 σειρές δεδομένων και ξεκινά με τις ακόλουθες σειρές:

0170
0156
0281
0006
0154
0156
0383
0534

0535
0536
0275
0091
0160
0164
...

που σημαίνουν ότι ο φοιτητής 1 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0170, ο φοιτητής 2 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0156, ο φοιτητής 3 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0281, ο φοιτητής 4 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0006, ο φοιτητής 5 στα μαθήματα 0154 0156 κ.ο.κ

Πίνακας 1 Δεδομένα προβλημάτων

Πρόβλημα	Αρχείο Δεδομένων	Εξετάσεις	Φοιτητές	Εγγραφές
hec-s-92	hec-s-92.stu	81	2823	10632
sta-f-83	sta-f-83.stu	139	611	5751
yor-f-83	yor-f-83.stu	181	942	6034
ute-s-92	ute-s-92.stu	184	2749	11793
ear-f-83	ear-f-83.stu	190	1125	8109
tre-s-92	tre-s-92.stu	261	4360	14901
lse-f-91	lse-f-91.stu	381	2726	10918
kfu-s-93	kfu-s-93.stu	461	5349	25113
rye-s-93	rye-s-93.stu	486	11483	45051
car-f-92	car-f-92.stu	543	18419	55522
uta-s-92	uta-s-92.stu	622	21266	58979
car-s-91	car-s-91.stu	682	16925	56877
pur-s-938	pur-s-938.stu	2419	30029	120681

Θεωρώντας κάθε εξέταση ως κόμβο ενός γραφήματος και κάθε ακμή ανάμεσα σε δύο κόμβους να υποδηλώνει την ύπαρξη κοινών φοιτητών ανάμεσα στις δύο εξετάσεις που

βρίσκονται στα άκρα της ακμής, το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα χρωματισμού γραφήματος όπου κάθε χρώμα είναι και μια περίοδος εξέτασης.

4 Αποτελέσματα

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται για κάθε σύνολο δεδομένων τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία: **αριθμός κορυφών ($|V|$)**, **πυκνότητα (Density) συγκρούσεων**, **ελάχιστη (Min) / μέση (Mean) / μέγιστη (Max) τιμή κορυφών (degrees)** καθώς και **ο αριθμός χρωμάτων που δημιουργήθηκαν από την εκτέλεση του αλγορίθμου First-Fit**.

Πίνακας 2 Αποτελέσματα προβλημάτων

Dataset Name	$ V $	Density	Min	Med	Max	Mean	CV	# of Colors
hec-s-92	82	0.41	9	32	62	33.2		22
sta-f-83	140	0.14	7	16	61	19.7		13
yor-f-83	182	0.28	7	51	117	51.7		26
ute-s-92	185	0.084	2	13	58	15.5		12
ear-f-83	191	0.26	4	45	134	50.2		28
tre-s-92	262	0.18	0	45	145	46.8		28
lse-f-91	382	0.062	0	16	134	23.7		21
kfu-s-93	462	0.055	0	18	247	25.5		24
rye-s-93	487	0.076	0	24	274	36.4		30
car-f-92	544	0.14	0	63	381	74.7		40
uta-s-92	623	0.12	1	65	303	77.8		42
car-s-91	683	0.13	0	77	472	87.3		43
pur-s-938	2420	0.029	0	47	857	71.3		47

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο πλήρης κώδικας της υλοποίησης είναι διαθέσιμος στη διεύθυνση <https://github.com/AndreasZorpidis/aac> μέσω του GitHub.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[Kar72] Daniel Brélaz. New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4):251–256, 1979.

[LTMG12] Rhyd Lewis, J Thompson, C Mumford, and J Gillard. A wide-ranging computational comparison of high-performance graph colouring algorithms. *Computers & Operations Research*, 39(9):1933–1950, 2012.