Graphes non orientés

Thomas Bellitto, Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Sorbonne Université
Paris

LU2IN003 Initiation à l'algorithmique

Plan du cours

1. Exemples
2. Graphes non orientés
3. Degré d'un graphe
4. Arbres
5. Représentation et primitives de base
   - Représentation
   - Primitives de base

Problème d'Euler

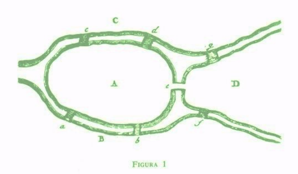


Figure: Plan des 7 ponts de Konigsberg

Peut-on trouver un itinéraire qui passe exactement une fois par chaque pont ?

Modélisation par un graphe non orienté

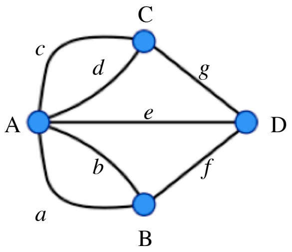


Figure: Graphe $G = (V, E)$. Sommets$\leftrightarrow$quartiers, arêtes$\leftrightarrow$ponts

Peut-on trouver une chaîne qui passe par toutes les arêtes pour le graphe $G = (V, E)$?

Recherche d'un itinéraire

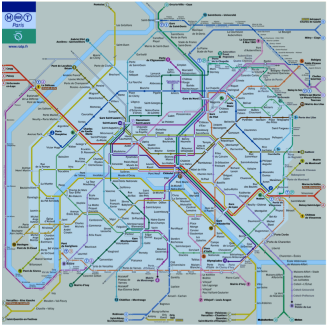


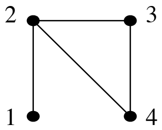
Figure: Plan du métro parisien

Quel est le chemin le plus court (en nombre de stations) pour aller de République à Monparnasse ?

Définition

Definition

Un *graphe non orienté* G est défini par un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes.



$V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$.

Définition

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
Une *boucle* est une arête $\{u, u\}$ avec $u \in V$
Une arête $e = \{u, v\}$ est *multiple* si il existe au moins deux arêtes $\{u, v\}$ dans E.

Definition

Un graphe non orienté *simple* G est un graphe sans boucle ni arête multiple.

Dans ce cours, on suppose a priori que tous les graphes non orientés sont simples.

Terminologie pour les graphes non orientés

- Pour tout sommet $u \in V$, $\Gamma(u) = \{v \in V, \{u, v\} \in E\}$ est l'ensemble des sommets *adjacents* à u (ou les voisins de u).
- Toute arête $e = \{u, v\} \in E$ est *incidente* à u et v.
- Un *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$ est un graphe $H = (V(H), E(H))$ tel que $V(H) \subset V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.
- Le *sous-graphe induit* par un ensemble de sommets $V' \subset V(G)$ est le sous-graphe $G' = (V', E')$ avec $E' = \{e = \{u, v\} \in E, u \in V', v \in V'\}$.

Terminologie pour les graphes non orientés (suite)

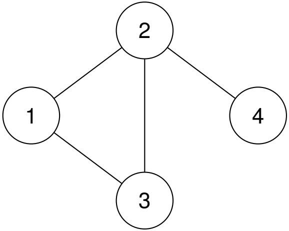
- Une *chaîne*(walk) est une séquence de sommets et d'arêtes $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_n e_n v_{n+1}$ avec $v_i \in V$ pour $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ et $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- Une *chaîne simple*(trail) est une chaîne ne passant pas deux fois par la même arête.
- Une *chaîne élémentaire*(path) est une chaîne simple qui ne passe pas deux fois par le même sommet.

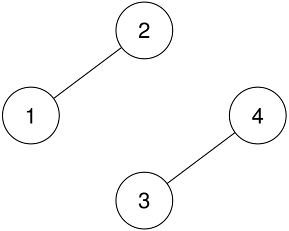
Remarque

Tout chaîne contient une chaîne élémentaire de mêmes extrémités.

Terminologie pour les graphes non orientés (fin)

- Un *cycle* est une chaîne fermée (*i.e.* telle que $v_{n+1} = v_1$).
- Un *cycle élémentaire* est une chaîne élémentaire fermée.
- Un graphe *connexe* est tel que, pour tout couple $(u, v) \in V^2$, il existe une chaîne élémentaire entre u et v.





Est-ce que ces deux graphes sont connexes ?

Degré d'un graphe

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Le degré de tout sommet $v \in V$ est égal à $d(v) = |\Gamma(v)|$.

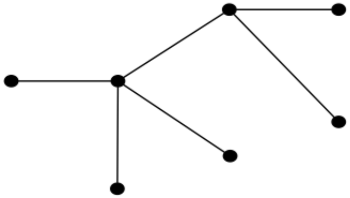
Theorem

Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Définition d'un arbre

Definition

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. T est un arbre si T est connexe sans cycle élémentaire.



Minimal connexe, maximum acyclique

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est minimal connexe si, G est connexe et pour tout $e \in E$, $G' = (V, E - \{e\})$ n'est pas connexe.

Definition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est maximal acyclique si, G est sans cycle élémentaire et pour tout couple de sommets $\{x, y\}$ non adjacents dans G, $G' = (V, E \cup \{\{x, y\}\})$ contient un cycle élémentaire.

Caractérisation d'un arbre

Theorem

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *T est un arbre.*
2. *T est minimal connexe.*
3. *T est maximal acyclique.*
4. *Entre deux sommets quelconques, il existe une chaîne élémentaire unique.*

Relation entre $|E|$ et $|V|$

Theorem

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| \geq |V|$, alors G contient un cycle élémentaire.

Theorem

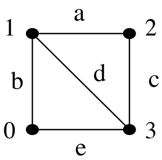
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si $|E| < |V|$-1, alors G n'est pas connexe.

Theorem

Si $T = (V, E)$ est un arbre, alors $|E| = |V| - 1$.

Que pensez-vous de la réciproque ?

Matrice sommet-arête pour $G = (V, E)$ non orienté

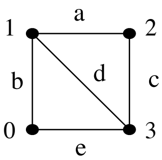


Pour tout couple $(i, j) \in V \times E$,

1. $M[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $M[i, j] = 1$ ssi i est incident à j.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice sommet-sommet pour $G = (V, E)$ non orienté

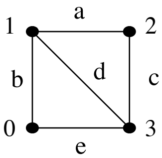


Pour tout couple $(i, j) \in V \times V$,

1. $R[i, j] \in \{0, 1\}$;
2. $R[i, j] = 1$ ssi i est adjacent à j.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes d'adjacence pour $G = (V, E)$ non orienté



Pour $i \in V$, $L[i]$ est la liste des sommets adjacents à i.

$$\begin{aligned} L[0] &= [1, 3] \\ L[1] &= [0, 2, 3] \\ L[2] &= [1, 3] \\ L[3] &= [0, 1, 2] \end{aligned}$$

Taille en mémoire des deux représentations

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

	Taille mémoire
Matrice sommet-arête	$\Theta(\lvert V\rvert \times \lvert E\rvert)$
Matrice sommet-sommet	$\Theta(\lvert V\rvert^2)$
Listes d'adjacence	$\Theta(\max(\lvert V\rvert, \lvert E\rvert))$

Complexité des primitives d'accès aux arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté :

1. `G.existeArete(i,j)` : pour tout couple $(i, j) \in V^2$, *True* ssi $\{i, j\} \in E$;
2. `G.adjacents(i)` : pour $i \in V$, $\Gamma(i)$.

Représentation	`G.existeArete(i,j)`	`G.adjacents(i)`
Matrice som-a	$\mathcal{O}(m)$	$\mathcal{O}(m \times n)$
Matrice som-som	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Matrice Adj.	$\mathcal{O}(d(i))$	$\Theta(1)$

$n = |V|$, $m = |E|$.