Parcours, parcours en largeur

Thomas Bellitto, Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Sorbonne Université
Paris

LU2IN003 Initiation à l'algorithmique

Parcours d'un graphe

1. Le parcours d'un graphe consiste à visiter un à un tous ses sommets dans un certain ordre en passant par les arêtes (ou les arcs).
2. La notion de parcours peut s'appliquer à un graphe orienté ou non.
3. Les algorithmes de parcours sont nombreux, et sont utilisés pour étudier les graphes. Ils permettent par exemple de répondre efficacement aux questions suivantes :
   - Un graphe non orienté est-il connexe ?
   - Un graphe orienté possède t'il un circuit ?
   - Quelles sont les distances minimales (en nombre d'arêtes) de tout sommet à une origine s?

Plan du cours

Parcours générique d'un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et un sommet $s \in V$.

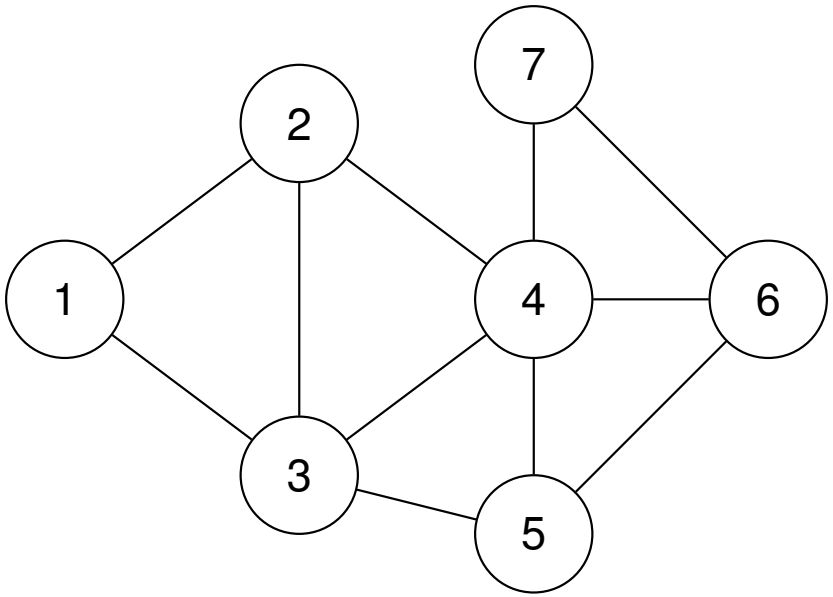
Definition (Parcours d'un graphe non orienté)

Un parcours des sommets de G d'origine s est une liste L des sommets de G telle que :

1. s est le premier sommet de L,
2. chaque sommet apparait exactement une fois dans L,
3. tout sommet $u \in V$ sauf l'origine s est adjacent à au moins un sommet placé avant lui dans la liste.

Est-ce que tout graphe non orienté possède au moins un parcours ?

Parcours d'un graphe non orienté



1. $L = (3, 5, 4, 7, 1, 2, 6)$ est un parcours d'origine 3;
2. $L = (3, 5, 7, 6, 4, 2, 1)$ n'est pas un parcours car 7 n'est pas adjacent à un sommet de $\{3, 5\}$.

Sous-parcours

Definition (sous-parcours)

Un sous-parcours d'origine v_1 d'un graphe orienté $G = (V, E)$ est une sous-liste $L = (v_1, \ldots, v_k)$ pour $k \geq 1$ telle que

1. v_1 est le premier sommet de L,
2. chaque sommet apparait au plus une fois dans L,
3. tout sommet v_α de L sauf l'origine v_1 est adjacent à au moins un sommet placé avant lui dans la liste L.

Definition (sommet visité)

Un sommet $v \in V$ est visité par le sous-parcours L si v apparait dans L. On note $V(L)$ l'ensemble des sommets visités par L.

$L = (2, 4, 5)$ est un sous-parcours d'origine 2. L'ensemble des sommets visités par L est $V(L) = \{2, 4, 5\}$.

Bordure d'un sous-parcours

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et L un sous-parcours de G.

Definition (Bordure)

La bordure d'un sous-parcours L de $G = (V, E)$ est l'ensemble des sommets de V qui ne sont pas visités par L et adjacents à un sommet visité par L.

$$\mathcal{B}(L) = \{v \in V - V(L), \exists e = \{u, v\} \in E, \text{ avec } u \in V(L)\}$$

- Pour le sous-parcours $L = (2, 4, 5)$ d'origine 2, $\mathcal{B}(L) = \{1, 3, 6, 7\}$;
- Pour le sous-parcours $L = (7, 6)$ d'origine 7, $\mathcal{B}(L) = \{4, 5\}$.

Que vaut la bordure d'un parcours ?

Racine et Arborescence

Definition (Racine d'un graphe orienté)

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Une racine de G est un sommet $s \in V$ tel que, pour tout $u \in V - \{s\}$, il existe un chemin de s à u.

Definition (Arborescence)

Un graphe orienté $\mathcal{A} = (V, A)$ est une arborescence si on peut l'obtenir à partir d'un arbre en orientant les arêtes de sorte qu'il y ait une racine.

Est-ce que tout graphe orienté connexe contient une racine ?
La racine d'une arborescence est-elle toujours unique ?

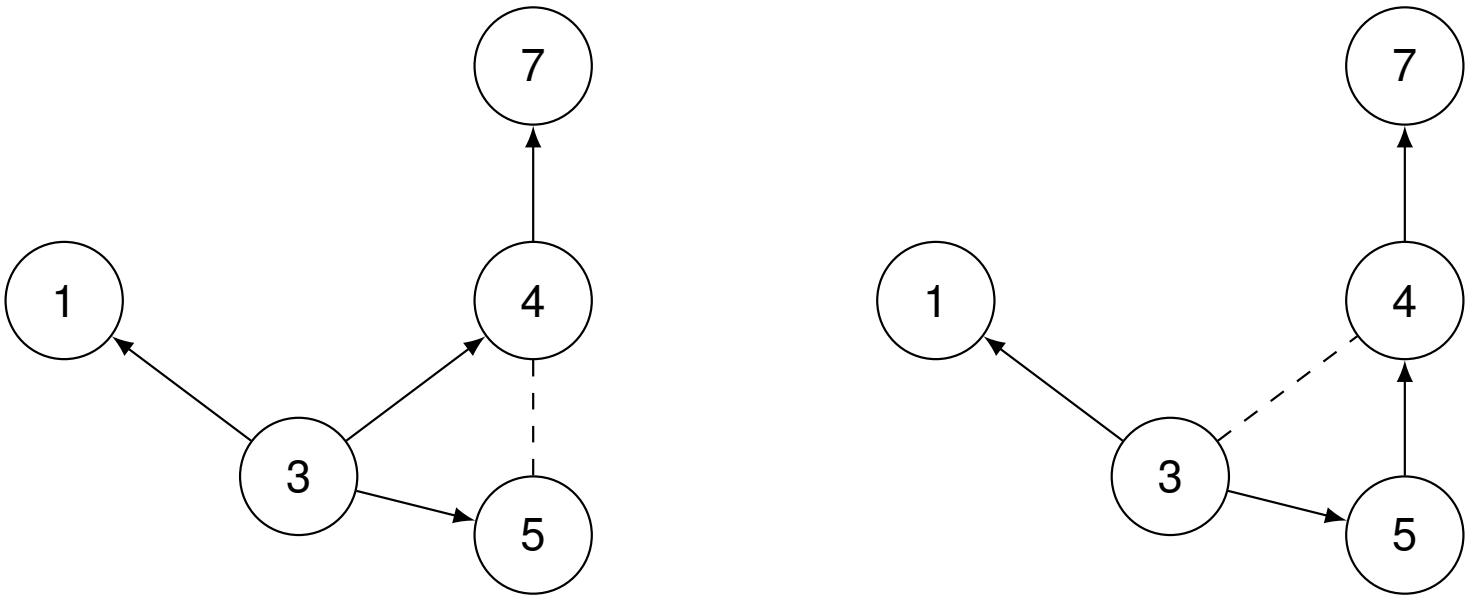
Graphe de liaison associé à un sous-parcours

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et L un sous-parcours d'origine $s \in V$.

Definition (Graphe de liaison associé à un sous-parcours)

$\mathcal{A}(L) = (V(L), H(L))$ est *un graphe de liaison associé au sous-parcours* L si tout sommet $v \in V(L) - \{s\}$ a pour unique prédécesseur un sommet $u \in V(L)$ tel que u est visité avant v dans L et $\{u, v\} \in E$.

Graphe de liaison associé à un sous-parcours (Example)



Deux graphes de liaison associés au sous-parcours $L = (3, 5, 4, 7, 1)$

Graphe de liaison associé à un sous-parcours

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Theorem

A tout sous-parcours L de G, on peut associer un graphe de liaison $\mathcal{A}(L) = (V(L), H(L))$.

Se démontre par récurrence faible sur $|V(L)|$.

Theorem

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et L un parcours d'origine $s \in V$. Alors le graphe de liaison associée au parcours L est une arborescence de racine s.

A faire en TD.

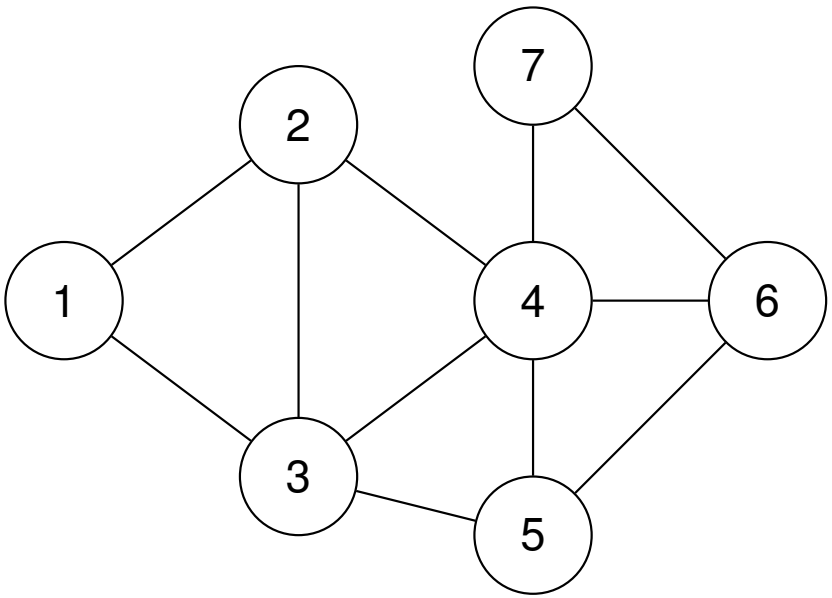
Pour un sous-parcours L fixé, $\mathcal{A}(L)$ n'est pas unique (voir le transparent précédent).

Algorithme de construction d'un parcours

Algorithm 1 Calcul d'un parcours associé à un graphe non orienté $G = (V, E)$

Require: Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un sommet s
Ensure: Un parcours L d'origine s
  $L := (s)$, $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L)$
  while $\mathcal{B} \neq \emptyset$ **do**
    Choisir un sommet $u \in \mathcal{B}$
    $L := L + (u)$
    $\mathcal{B} := \mathcal{B}(L)$
  end while

Exemple d'exécution de l'algorithme



u	L	$\mathcal{B}$
$\star$	(3)	$\{1,2,4,5\}$
5	$(3,5)$	$\{1,2,4,6\}$
4	$(3,5,4)$	$\{1,2,6,7\}$
7	$(3,5,4,7)$	$\{1,2,6\}$
1	$(3,5,4,7,1)$	$\{2,6\}$
2	$(3,5,4,7,1,2)$	$\{6\}$
6	$(3,5,4,7,1,2,6)$	$\emptyset$

Terminaison de l'algorithme de construction d'un parcours

Lemma

Pour tout graphe non orienté $G = (V, E)$ et tout sommet $s \in V$, l'algorithme effectue au plus $n - 1$ itérations.

Theorem

Pour tout graphe non orienté $G = (V, E)$ et tout sommet $s \in V$, l'algorithme se termine.

Validité de l'algorithme de construction d'un parcours

Theorem

Pour tout graphe non orienté $G = (V, E)$ et tout sommet $s \in V$, l'algorithme construit un sous-parcours L de G de racine s et composé de tous les sommets de la composante connexe de s.

Corollaire

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est connexe si et seulement si l'algorithme construit un parcours en partant d'un sommet quelqconque.

Parcours d'un graphe orienté

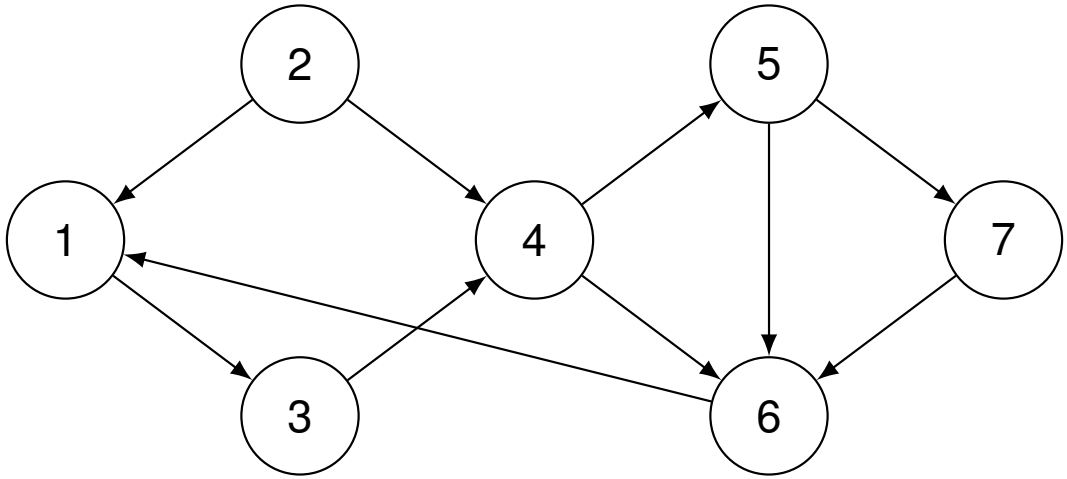
Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et un sommet $s \in V$.

Definition (Parcours d'un graphe orienté)

Un parcours des sommets de G d'origine s est une liste L des sommets de G telle que :

1. s est le premier sommet de L,
2. chaque sommet apparait exactement une fois dans L,
3. tout sommet $u \in V$ sauf l'origine s est successeur d'un sommet v placé avant dans la liste (*i.e* $(v, u) \in A$).

Parcours d'un graphe orienté



1. 2 est une racine de G;
2. $L = (2, 4, 5, 1, 6, 3, 7)$ est un parcours d'origine 2;
3. $L = (2, 1, 3, 6, 4, 5, 7)$ n'est pas un parcours car 6 n'est pas le successeur d'un sommet de $\{1, 2, 3\}$.

A votre avis, à quelle condition G possède un parcours d'origine s ?

Problème de la plus courte chaîne

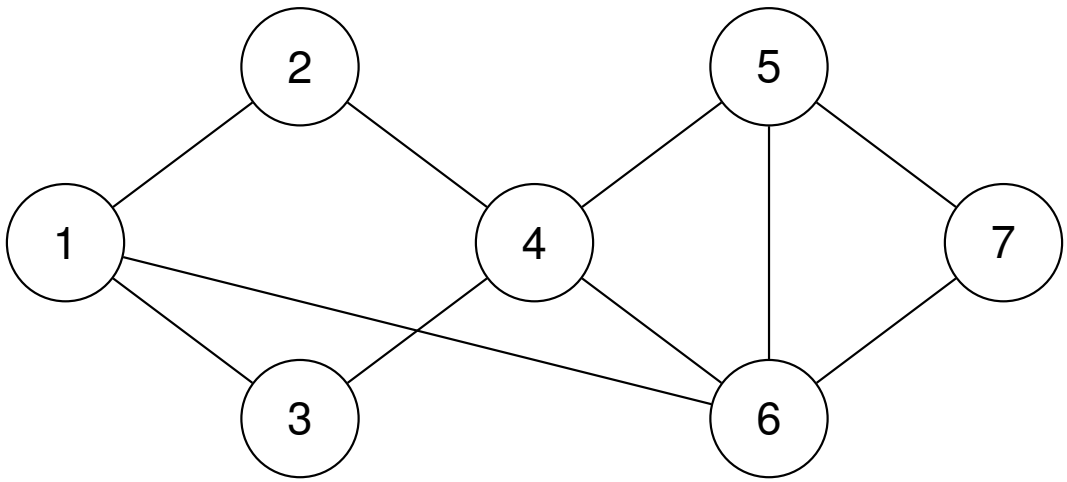
Definition (Longueur d'une chaîne)

La longueur $\mathrm{len}(\mu)$ d'une chaîne μ est le nombre d'arêtes qui la composent.

Definition (Problème de la plus courte chaîne)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et un sommet $s \in V$. Le problème de la plus courte chaîne consiste à calculer, pour tout sommet $u \in V$, le nombre minimum d'arêtes d'une chaîne de s à u et noté $dist_s(u)$.

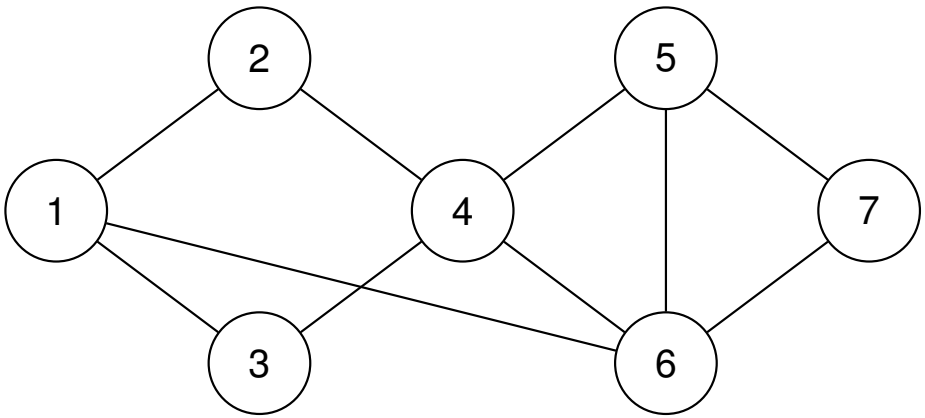
Problème de la plus courte chaîne

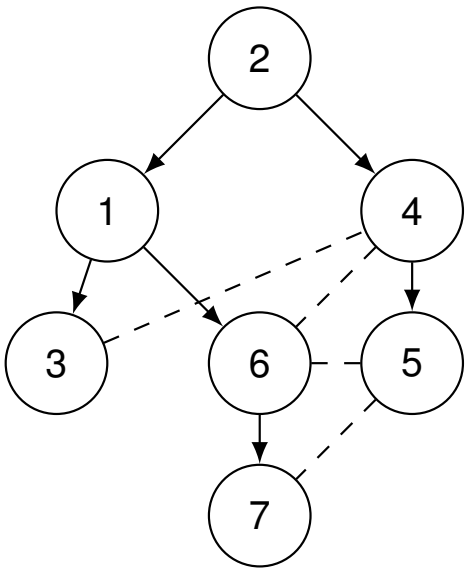


$u \in V$	1	2	3	4	5	6	7
$dist_2(u)$	1	0	2	1	2	2	3

Principe général du parcours en largeur

Le parcours en largeur d'origine s est un parcours qui visite les sommets niveau par niveau: d'abord tous les sommets à distance 1 de s, puis à distance 2, puis 3..etc..
(ce n'est pas une définition)





$L = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 7)$ est un parcours en largeur d'origine 2.

Sommets ouverts, fermés

Definition (sommet ouvert, fermé)

Soit L un sous-parcours. Un sommet visité $u \in V(L)$ est ouvert si il possède au moins un sommet adjacent qui n'est pas dans L. Un sommet visité $u \in V(L)$ est fermé si tous ses adjacents sont dans $V(L)$.

Pour le sous-parcours $L = (2, 1, 3, 6)$ du graphe précédent,

- 2 est ouvert car $4 \notin V(L)$;
- 1 est fermé car tous ses sommets adjacents sont dans $V(L)$.

Parcours en largeur

Definition (Parcours en largeur)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et $L = (v_1, \ldots, v_n)$ un parcours de G d'origine v_1.
L est un parcours en largeur si pour tout sous-parcours $L_k = (v_1, \ldots, v_k)$ avec $k < n$, v_{k+1} est un sommet adjacent du premier sommet ouvert de L_k.

Pour le sous-parcours en largeur $L = (2, 1, 4, 3, 6, 5)$ du graphe précédent,

- Pour $L_4 = (2, 1, 4, 3)$, 2 est fermé, donc le premier sommet ouvert est 1 et 6 est un adjacent de 1.
- Pour $L_5 = (2, 1, 4, 3, 6)$, 2 et 1 sont fermés, donc le premier sommet ouvert est 4 et 5 est un adjacent de 4.

Pour une origine s fixé, est-ce que un parcours en largeur est unique ?

Graphe de liaison en largeur

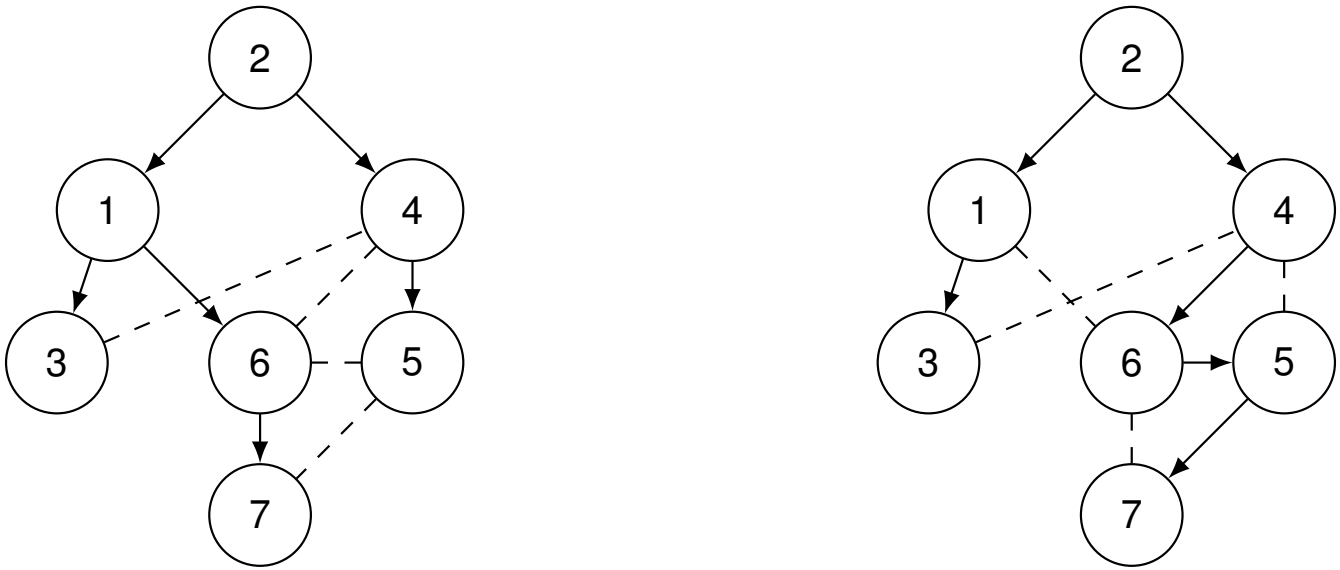
Definition (Graphe de liaison en largeur)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et $L = (v_1, \ldots, v_n)$ un parcours en largeur de G d'origine v_1.
Le graphe orienté $\mathcal{A}^\star(L) = (V(L), H(L))$ est le graphe de liaison en largeur de L si :

- $\mathcal{A}^\star(L) = (V(L), H(L))$ est un graphe de liaison de L;
- Pour tout sous-parcours $L_k = (v_1, \ldots, v_k)$ avec $k < n$, v_{k+1} a pour prédécesseur le plus petit sommet ouvert de L_k.

A votre avis, est-ce que le graphe de liaison en largeur $\mathcal{A}^\star(L)$ associé au parcours en largeur L est unique ?

Graphe de liaison en largeur



$L = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 7)$ est un parcours en largeur d'origine 2.

- A gauche, le graphe de liaison en largeur $\mathcal{A}^\star(L)$ de L;
- A droite un graphe de liaison $\mathcal{A}(L)$ associé à L qui n'est pas le graphe de liaison en largeur de L.

Propriété sur les plus courtes chaînes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe, L un parcours en largeur de G d'origine s et $\mathcal{A}^\star(L)$ le graphe de liaison en largeur de L.

Theorem

Pour tout sommet $u \in V$, le chemin de s à u de $\mathcal{A}^\star(L)$ est associé à une plus courte chaîne de G entre s et u.

Non démontré dans ce cours

Corollaire

Pour tout sommet $u \in V$, $dist_s(u)$ est égale à la distance du chemin de s à u de $\mathcal{A}^\star(L)$.

Est-ce que ce théorème est vérifié pour tout graphe de liaison $\mathcal{A}(L)$ d'un parcours en largeur L ?

Algorithme de construction d'un parcours en largeur

Definition (File)

Une file est une structure de données telle que les premiers éléments ajoutés à la file seront les premiers à en être retirés (first in, first out).

Les primitives minimales généralement associées sont :

- Enfiler (F,x) qui stocke un elément dans la file F;
- Défiler(F) qui retourne l'élément en tête de la file F
- FileVide(F) qui est vraie si la file F est vide.

Pouvez-vous proposer des structures de données simples pour implanter une file ?

Algorithme de construction d'un parcours en largeur

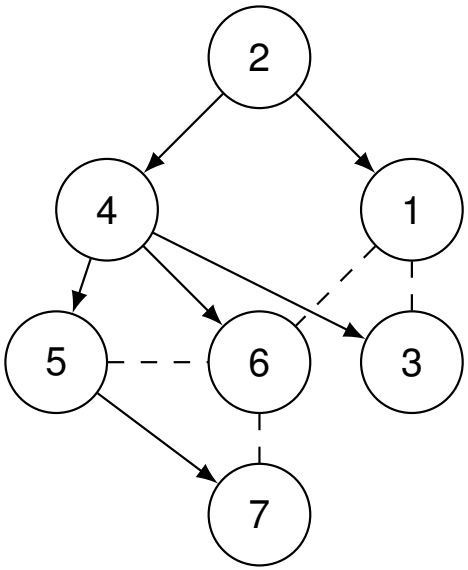
Require: Un graphe non orienté $G = (V, E)$, un sommet s
Ensure: Un parcours en largeur L d'origine s, les valeurs $dist_s(u), u \in V$

for all $u \in V$ **do**
  $dist_s(u) := +\infty$
end for
$L := ()$, Enfiler (F,s), $dist_s(s) := 0$
while not FileVide(F) **do**
  $u :=$Défiler(F), $L := L + (u)$
  for all $\{u, v\} \in E$ **do**
    if $dist_s(v) = +\infty$ **then**
      Enfiler(F,v), $dist_s(v) = dist_s(u) + 1$
    end if
  end for
end while

Algorithme de construction d'un parcours en largeur

- Au démarrage de l'algorithme, les distances sont initialisées à l'infini, sauf celle de l'origine s.
- La file permet de gérer la bordure du sous-parcours en largeur. La gestion de la priorité assure que l'on choisit tout le temps un adjacent du premier sommet ouvert du sous-parcours.
- Le test sur la distance permet aussi de s'assurer que tout sommet placé dans la file n'est ni dans $V(L)$ ni dans F.

Exemple d'exécution de l'algorithme de construction d'un parcours en largeur



$L = (2, 4, 1, 5, 6, 3, 7)$

u	L	F
$\star$	$()$	(2)
2	(2)	$(4, 1)$
4	$(2, 4)$	$(1, 5, 6, 3)$
1	$(2, 4, 1)$	$(5, 6, 3)$
5	$(2, 4, 1, 5)$	$(6, 3, 7)$
6	$(2, 4, 1, 5, 6)$	$(3, 7)$
3	$(2, 4, 1, 5, 6, 3)$	(7)
7	$(2, 4, 1, 5, 6, 3, 7)$	$()$

$u \in V$	1	2	3	4	5	6	7
$dist_2(u)$	1	0	2	1	2	2	3

Conclusion

- Les parcours constituent une classe d'algorithmes importante sur les graphes qui consiste à visiter un à un tous ses sommets dans un certain ordre en passant par les arêtes (ou les arcs) à partir d'une origine fixé s.
- Tout parcours peut être associé à un graphe de liaison qui est une arborescence.
- Le parcours en largeur est une classe de parcours particulière qui permet d'obtenir les valeurs $dist_s(u), u \in V$.