Rappels mathématiques

Thomas Bellitto, Alix Munier-Kordon et Maryse Pelletier

LIP6
Sorbonne Université
Paris

Algorithmique élémentaire

Plan du cours

Le B-A BA du raisonnement

Trois parties :

- hypothèse
- démonstration
- conclusion

Un raisonnement doit être clair, rigoureux, construit.
Toujours préférer la simplicité à d'inutiles complications.

Types de raisonnement

- Calculatoire
- Raisonnement logique
  - raisonnement direct
  - par l'absurde : pour montrer P on montre que $(non(P))$ donne une contradiction
  - par la contraposée : pour montrer que $a \Rightarrow b$ on montre que $non(b) \Rightarrow non(a)$
- Par récurrence

Exemple 1

- Montrer que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a+b)^2 - 4ab$
  Enchaînement de calculs à bien présenter

Un peu de logique

- Implication et contraposée

$$\begin{aligned} a \Rightarrow b &\equiv non(a) \text{ ou } b \\ &\equiv non[non(b)] \text{ ou } non(a) \\ &\equiv non(b) \Rightarrow non(a) \end{aligned}$$

- Négation d'une implication

$$\begin{aligned} non(a \Rightarrow b) &\equiv non[non(a) \text{ ou } b] \\ &\equiv a \text{ et } non(b) \end{aligned}$$

Exemple 2

- Montrer que tout nombre premier supérieur à 2 est impair
  - raisonnement direct

$$P : \forall n \in \mathbb{N}\ [(n \text{ premier et } n > 2) \Rightarrow n \text{ impair }]$$

  - par l'absurde

$$non(P) : \exists n \in \mathbb{N}\ [n \text{ premier, } n > 2 \text{ et } n \text{ pair }]$$

  - par la contraposée

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [n \text{ pair } \Rightarrow (n \text{ non premier ou } n \leq 2)]$$

Exemple 3

- Montrer que

$$[(a \text{ et } b) \Rightarrow c] \Leftrightarrow [(a \text{ et } (\text{non } c)) \Rightarrow (\text{non } b)]$$

C'est encore un enchaînement de calculs à bien présenter

Exemple 3 : preuve

$$\begin{aligned}[(a \text{ et } b) \Rightarrow c] &\equiv \text{non}(a \text{ et } b) \text{ ou } c \\ &\equiv \text{non}(a) \text{ ou non}(b) \text{ ou } c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(a \text{ et } (\text{non } c)) \Rightarrow (\text{non } b)] &\equiv \text{non}(a \text{ et non}(c)) \text{ ou non}(b) \\ &\equiv \text{non}(a) \text{ ou } c \text{ ou non}(b)\end{aligned}$$

Exemple 4 : implications équivalentes

Les implications suivantes sont équivalentes

- (n premier et $n > 2$) $\Rightarrow$ n impair
- (n premier et n pair) $\Rightarrow$ $n \leq 2$
- ($n > 2$ et n pair) $\Rightarrow$ n non premier
- n pair $\Rightarrow$ (n non premier ou $n \leq 2$)
- n premier $\Rightarrow$ (n impair ou $n \leq 2$)
- $n > 2$ $\Rightarrow$ (n non premier ou n impair)

Récurrence faible

Soit $\Pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une propriété à démontrer.
Récurrence faible :

Base : montrer que la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Induction : montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [\Pi(n) \Rightarrow \Pi(n+1)]$$

Exemple. $\Pi(n)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Récurrence forte

Soit $\Pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$ une propriété à démontrer.
Récurrence forte :

Base : montrer que la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Induction : montrer que,

$$\forall n_0 \geq 0 \quad [(\forall n \leq n_0, \Pi(n)) \Rightarrow \Pi(n_0 + 1)]$$

Exemple. Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Suites récurrentes linéaires homogènes

Definition

Une suite *récurrente linéaire homogène d'ordre 2* est une suite définie par une relation de récurrence :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \qquad u_1 = a_1$$

où a, b, a_0, a_1 sont des constantes réelles.

Un exemple

La suite de Fibonacci est définie par la relation de récurrence :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

et les conditions initiales :

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1$$

Polynôme caractéristique

Definition

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

est le polynôme :

$$r^2 - ar - b$$

Par exemple, le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci est :

$$r^2 - r - 1$$

Solution d'une suite homogène : cas 1

Cas 1 : le polynôme caractéristique a deux racines r_1 et r_2.
Dans ce cas la solution générale de la récurrence :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2$$

est de la forme :

$$u_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

On détermine α_1 et α_2 en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 &= a_1 \end{aligned}$$

Remarque : les racines peuvent être des nombres complexes

Solution d'une suite homogène : cas 2

Cas 2 : le polynôme caractéristique a une racine double r_1.
Dans ce cas la solution générale est de la forme :

$$u_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_1^n$$

On détermine α_1 et α_2 en utilisant les conditions initiales, comme dans le cas 1.

Exemple : Fibonacci

- Le polynôme caractéristique est : $r^2 - r - 1$.
- Les racines sont : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- La solution générale est de la forme : $\alpha_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \alpha_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
- Les conditions initiales entraînent :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Suites linéaires d'ordre quelconque

La méthode du polynôme caractéristique se généralise aux suites linéaires d'ordre quelconque, définies par une relation de récurrence :

$$u_n = \lambda_1 u_{n-1} + \lambda_2 u_{n-2} + \ldots + \lambda_k u_{n-k} \quad \text{si } n \geq k$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \qquad u_1 = a_1 \qquad \ldots \qquad u_{k-1} = a_{k-1}$$

Remarque : si r est une racine d'ordre m du polynôme caractéristique alors les suites r^n, nr^n, ..., $n^{m-1}r^n$ sont solutions de la relation de récurrence.

Suites récurrentes linéaires non homogènes

Definition

Une suite *récurrente linéaire non homogène* est une suite définie par une relation de récurrence :

$$u_n = \lambda_1 u_{n-1} + \lambda_2 u_{n-2} + \ldots + \lambda_k u_{n-k} + f(n) \quad \text{si } n \geq k$$

et des conditions initiales :

$$u_0 = a_0 \quad , \quad u_1 = a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{k-1} = a_{k-1}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ sont des constantes réelles et f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Suites récurrentes linéaires non homogènes

Pas de méthode générale de calcul d'une solution.
Dans certains cas:

- par substitution (*cf.* TD),
- par une "astuce" de calcul (*cf.* TD),
- par polynôme caractéristique si $f(n)$ est un polynôme,
- par calcul d'une solution particulière,
- par séries génératrices,
- ...

Notations de Landau : Θ, $\mathcal{O}$ et Ω

Definition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$:

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ si $\exists D > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que
$$\forall n > n_0 \quad f(n) \leq Dg(n).$$
2. $f \in \Omega(g)$ si $\exists C > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que,
$$\forall n > n_0 \quad Cg(n) \leq f(n).$$
3. $f \in \Theta(g)$ si $\exists C > 0$, $D > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que,
$$\forall n > n_0 \quad Cg(n) \leq f(n) \leq Dg(n).$$

Exemples

- $5n + 3 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $5n + 3 \in \Theta(n)$
- $5n + 3 \in \Omega(1)$
- $5n^2 + 3n + 4 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $5n^2 + 3n + 4 \in \Theta(n^2)$
- $5n^2 + 3n + 4 \in \Omega(n)$
- $n^5 \in \mathcal{O}(2^n)$
- $2^n \in \Omega(n^5)$

Classement des ordres de grandeur

Inclusions entre ordres de grandeur courants :

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \mathcal{O}(n^3) \subset \mathcal{O}(2^n)$$

Un critère utile

Dans le cas où $\frac{f(n)}{g(n)}$ admet une limite quand $n \to +\infty$:

- si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ alors $f \in \mathcal{O}(g)$ et $f \notin \Omega(g)$
- si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ alors $f \in \Omega(g)$ et $f \notin \mathcal{O}(g)$
- si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \ell$ avec $0 < \ell < +\infty$ alors $f \in \Theta(g)$.

Exercice : donner un exemple de f et g telles que $f \in \Theta(g)$ et auxquelles on ne peut pas appliquer le dernier critère.

Sommes

- Somme des entiers de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Somme algébrique :

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$