Setul 9

de probleme şi exerciţii de matematică

(relative la limite de funcţii şi continuitatea funcţiilor)

S9.1 Prin folosirea exclusivă a unor limite fundamentale adecvate, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{\sin(p\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $p\in\mathbb{R}^*$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\dfrac{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}{\sum\limits_{k=1}^{n} n^{kx-1}}\right)^{\frac{1}{x}}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$;

d) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{4}}\left((\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}(2x)}, \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\pi-4x}}, \dfrac{2^{\mathrm{ctg}x}-2}{x-\dfrac{\pi}{4}}, \mathrm{tg}\ 2x\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right), \dfrac{\ln(\mathrm{tg}\ x)}{\cos 2x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^2}, \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}, \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^m}{e^{nx}-e^{mx}}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}, m\neq n$.

S9.2 Să se studieze existenţa şi, atunci când este cazul, să se facă determinarea limitelor iterate $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$, a limitelor parţiale $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ şi $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$, cât şi a limitei globale $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pentru funcţiile $f: A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}\}\to\mathbb{R}$ date mai jos:

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$; b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$; c) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

d) $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; e) $f(x,y)=y^2\ln(x^2+y^2)$; f) $f(x,y)=\dfrac{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6+y^6}$.

S9.3 Să se arate că funcţiile următoare nu au limită globală în origine, deşi au în acest punct limite parţiale, limite iterate şi chiar limite în orice direcţie admisă:

a) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

b) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\mid x=y\}\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\dfrac{x+y}{x-y}, \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)$;

c) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\mid y^2=2x\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;

d) $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2}, (1+|xy|)^{\frac{2}{x^2+y^2}}\right)$.

S9.4 Să se determine următoarele limite:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}, \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\right)$;

b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{1}{xyz} \operatorname{tg} \dfrac{xyz}{1+xyz}, (1+xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \right);$

c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{1-\cos\left(1-\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)}{(x^2+y^2+z^2)^4}, \dfrac{x^2y^2z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2} \right).$

S9.5 Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ e^{\frac{1-\sqrt{1+x}}{x^2 e^x}} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin \dfrac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ \cos \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \end{cases} \quad , \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

b) $f : A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x^2 + y^2 < \dfrac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\, (x^2+y^2)} & , (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ \alpha & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, unde

$$f_1(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^p \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & , (x, y, z) \ne (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0), \end{cases} \quad ,$$

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^p e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & , (x, y, z) \ne (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad , \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

S9.6 Să se determine mulţimea punctelor de discontinuitate pentru fiecare dintre funcţiile reale următoare:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y} e^{-|x|y^{-2}} & , y \ne 0 \\ 1 & , y = 0; \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & , x + y \ne 0 \\ 0 & , x + y = 0; \end{cases}$

c) $f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/3} \ln(x^2 + y^2 + z^2) & , (x, y, z) \ne (0, 0, 0) \\ 1/3 & , (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$

S9.7 Să se arate că funcţiile reale de mai jos sunt parţial continue în origine sau chiar continue pe orice direcţie, în câteva din cazuri, dar nu şi global continue în respectivul punct:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & , (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^3} & , y \ne -x^2 \\ 0 & , y = -x^2; \end{cases}$

c) $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy + yz + xz)}{\sqrt{(x^4 + y^2 + z^4)}} & , (x, y, z) \ne (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0); \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \min\left\{\left|\dfrac{x}{y}\right|, \left|\dfrac{y}{x}\right|\right\} & , (x,y) \in \mathbb{R}^2\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \\ 0 & , \text{ în rest.} \end{cases}$

S9.8 Să se stabilească care dintre următoarele funcţii este uniform continuă pe mulţimea de definiţie indicată:

a) $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} \sin \dfrac{2}{x}$;

b) $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+2}, \dfrac{\arcsin(x+1)}{x+1}\right)$;

c) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sin \dfrac{\pi}{1-x^2-y^2}$;

d) $f : [0,\pi] \times [0, \dfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \big(\sin x + \cos y, e^{-x}\text{tg } y - 1\big)$.

S9.9

a) Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o aplicaţie bijectivă. Să se arate că f este homeomorfism între spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă, pentru orice mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}^p$, are loc relaţia: $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

b) Să se arate că $(\mathbb{R}, d_e)$ şi $(\mathbb{R}, d_d)$, unde d_e desemnează metrica euclidiană, iar d_d metrica discretă, nu sunt homeomorfe.

S9.10 Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^x - 27}{x-3}, \dfrac{x\sin 3 - 3\sin x}{x \sin x - 3 \sin 3}, \dfrac{3^x - x^3}{x-3}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \arcsin \dfrac{x+2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}, \left(\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), (x-y)\text{arctg}\dfrac{1}{2x^2+3y^2}, (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$;

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{2x-3y}{z}, (x+y+z)\ln(1+|xyz|)\right)$.

S9.11 Să se analizeze continuitatea funcţiilor:

a) $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} \text{tg} : x, & x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \text{ctg} : x, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \text{şi } f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 - \dfrac{\pi}{16}, & x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{4x}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases};$$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, unde

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - \sqrt{x^2-y+2}}{y^2-4}, & \text{când } 2 \neq y \leq x^2+2 \\ 2^{-3}, & \text{în rest} \end{cases},$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4-y^2)^2}{x^6}, & \text{când } y^2 \leq x^4 \neq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha e^{x+y+z}, & \text{dacă } x+y+z<0 \\ \beta & \text{dacă } x+y+z \geq 0 \end{cases}$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S9.12 Se pot prelungi, prin continuitate, la $\mathbb{R}^2$, funcţiile date în continuare?

a) $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\dfrac{\ln(1+x^2|y|)}{x^2+y^2}, \big(1+\sin(x^4+y^4)\big)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \right)$;

b) $f:\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \left(\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}, (|x|+|y|)^{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{\sqrt{2x^2+3y^2}} \right)$.

S9.13 Sunt funcţiile de mai jos uniform continue pe $\mathbb{R}^2$ şi respectiv $\mathbb{R}^n$?

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x,y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \dfrac{4}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \\ 1, & \text{dacă } (x,y) \notin B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1) \end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(||x||-1)(2-||x||)}}, & \text{dacă } ||x|| \in (1,2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$.

Bibliografie orientativă

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. R. Gologan, A. Halanay ş. a. - *Probleme de examen. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

3. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

4. D. Hajduković - *Some Problems About the Limit of a Real-Valued Function,* 2002.

5. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică. Exerciţii şi probleme*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

6. A. Foster - *Limits and Continuity of Functions of Two or Three Variables. A Manual For Self-Study,* The City College of The City University of New York, New York, 2014.

7. D. R. Wilkins - *Analysis in Several Real Variables,* Michaemas Term, 2016.