Cursul 9

Limite de funcţii. Continuitatea funcţiilor

Limite de funcţii

Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, unde d_1 este o metrică pe X, iar d_2 o metrică pe Y, fie $f : A \subseteq X \to Y$ o funcţie şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A. Aşadar $x_0 \in A'$, unde A' este mulţimea derivată corespunzătoare lui A, adică mulţimea tuturor punctelor sale de acumulare.

Definiţia 9.1 *Spunem că **funcţia** $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ **are limita** $l \in Y$ **în punctul** $x_0 \in A'$ dacă, pentru orice vecinătate V a lui l ($V \in \mathcal{V}(l)$), există o vecinătate U a lui x_0 ($U \in \mathcal{V}(x_0)$), astfel încât:*

$$\forall\, x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Vom nota prin $\lim\limits_{x \overset{d_1}{\to} x_0} f(x) \overset{d_2}{=} l$ sau, echivalent, prin $f(x) \overset{d_2}{\to} l$, când $x \overset{d_1}{\to} x_0$.

Ori de câte ori se subînţelege în raport cu ce metrică au loc convergenţele, vom folosi notaţia mai simplă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ sau, echivalent $f(x) \to l$, când $x \to x_0$.

Observaţie: Dacă negăm Definiţia 9.1, vom obţine, următorul rezultat:
Fie funcţia $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, şi fie punctul $x_0 \in A'$. Spunem că funcţia f nu are limita $l \in Y$ în punctul $x_0 \in A'$, dacă şi numai dacă există $V_0 \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât, pentru orice $U \in \mathcal{V}(x_0)$, există $x_U \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$, cu proprietatea că $f(x_U) \notin V_0$. Vom nota acest lucru prin: $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$.

Definiţia 9.2 *Spunem că **funcţia** $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ **are limită** într-un punct $x_0 \in A'$, dacă există $l \in Y$ astfel încât, în conformitate cu Definiţia 9.1, să avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

Dacă vom considera în locul sistemelor de vecinătăţi, mulţimile sferelor (deschise) din X şi, respectiv, din Y, atunci vom putea formula Definiţia 9.1 astfel:

Definiţia 9.3 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $x_0 \in A'$. Spunem că elementul $l \in Y$ este **limita funcţiei** f **în punctul** x_0 dacă:*

$$\forall\, B_{d_2}(l; \varepsilon),\ \exists\, B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \ \textit{astfel încât}\ \forall\, x \in (B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A \ \textit{are loc:}\ f(x) \in B_{d_2}(l, \varepsilon).$$

Altfel spus, ţinând seama de semnificaţia mulţimilor $B_{d_2}(l; \varepsilon)$ şi $B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$, elementul l este limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \textit{aşa încât},\ \forall\, x \in A \ \textit{pentru care}\ 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon),\ \textit{rezultă}\ d_2(f(x), l) < \varepsilon.$$

Pentru situaţia în care X şi Y ar fi înzestrate cu norme, $\| \cdot \|_X$ pe X şi $\| \cdot \|_Y$ pe Y, adică pentru cazul în care $(X, \| \cdot \|_X)$ şi $(Y, \| \cdot \|_Y)$ ar fi spaţii normate, distanţele d_1 şi d_2 ar fi definite prin intermediul normelor $\| \cdot \|_X$ şi $\| \cdot \|_Y$, iar Definiţia 9.3 ar avea următorul enunţ:

Definiţia 9.4 *Fie $f : A \subseteq (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$. Avem $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \textit{aşa încât},\ \forall\, x \in A \ \textit{pentru care}\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon), \textit{rezultă}\ \|f(x) - l\|_Y < \varepsilon.$$

Observaţie: Când $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$ (cu $n, m \in \mathbb{N}^*$), oricare dintre definiţiile 9.1 - 9.4 funcţionează, în raport cu diverse metrici, d_1 pe $\mathbb{R}^n$ şi d_2 pe $\mathbb{R}^m$ (cum sunt, de exemplu, metricile euclidiană şi minkowskiană, de ordin $p \in (0, +\infty)$) sau în raport cu diferite norme pe $\mathbb{R}^n$ şi pe $\mathbb{R}^m$.

În cazul în care (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt spaţii metrice, limita l este, după cum se poate arăta, unică. Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 9.5 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$, A nevidă, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Dacă există, atunci limita funcţiei f în punctul x_0 este **unică**.*

Demonstraţie: Presupunem că există $l_1 \in Y$ şi $l_2 \in Y$, cu $l_1 \neq l_2$, aşa încât $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Cum $l_1 \neq l_2$, avem $d_2(l_1, l_2) > 0$. Atunci, luând $\varepsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ în Definiţia 9.4, rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \delta(\epsilon)$, are loc relaţia: $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$. Pe de altă parte, există $\widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widetilde{\delta}(\varepsilon)$, are loc: $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$.

În consecinţă, pentru $\varepsilon = \frac{d_2(l_1,l_2)}{3} > 0$, există $\widehat{\delta}(\varepsilon) = \min\{\delta(\varepsilon), \widetilde{\delta}(\varepsilon)\}$, astfel încât, pentru orice $x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \widehat{\delta}(\varepsilon)$, au loc, simultan, relaţiile $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$ şi $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1,l_2)}{3}$.
Cum $d_2(l_1, l_2) \leq d_2(f(x), l_1) + d_2(f(x), l_2)$, vom găsi $d_2(l_1, l_2) < \frac{2d_2(l_1,l_2)}{3}$, de unde obţinem o contradicţie.

Aşadar, elementul $l_1 = l_2$, deci limita este unică. ◀

Tot în cadrul spaţiilor metrice, are loc următoarea caracterizare a existenţei limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema 9.6 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x_0 \in A'$ şi $l \in Y$. Avem $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă*

$$\forall\, (x_n)_{n\geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\},\ \textit{cu}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \textit{are loc}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Demonstraţie: "$\Rightarrow$:" Dacă $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, atunci, conform Definiţiei 9.3, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$. Cum x_0 este punct de acumulare pentru A, atunci, conform cu Propoziţia 6.32 (vezi Curs 6), există cel puţin un şir $(x_n)_{n\geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. De altfel, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$ şi cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem: pentru $\tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $d_1(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. În virtutea acesteia, avem $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$.

Prin urmare, combinând faptul că $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ cu faptul că $x_n \longrightarrow x_0$, pentru $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, am obţinut:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x_n), l) < \varepsilon.$$

Asta înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

"$\Leftarrow$:" Presupunem că, $\forall (x_n)_{n\geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Totodată, presupunem prin reducere la absurd, că $f(x) \nrightarrow l$, când $x \to x_0$, adică: $\exists \varepsilon_0 > 0$, aşa încât, $\forall \delta > 0$, $\exists\, x_\delta \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d_1(x_\delta\ , x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_\delta), l) \geq \varepsilon_0$, vedem că, pentru $\delta = \frac{1}{n}$, cu n arbitrar din N^*, există x_n în $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x_n\ , x_0) < \delta$ şi $d_2(f(x_n), l) \geq \varepsilon_0 > 0$. Deducem astfel că există un şir $(x_n)_{n\geq 0} \subset A \setminus \{x_0\}$ încât $x_n \to x_0$, pentru $n \to \infty$ şi totuşi $f(x_n) \nrightarrow l$, când $n \to \infty$, în contradicţie cu ipoteza. Prin urmare, $f(x) \overset{d_2}{\to} l$, când $x \overset{d_1}{\to} x_0$. ◀

Observaţii:

1) Funcţia $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu are limită într-un punct $x_0 \in A'$ ori de câte ori putem pune în evidenţă un şir $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, pentru care şirul $(f(x_n))_{n\geq 0} \subseteq Y$ nu are limită.

2) Atunci când se pot determina două şiruri, $(x'_n)_{n\geq 0}$ şi $(x''_n)_{n\geq 0}$, din $A \setminus \{x_0\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1 \in Y$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = l_2 \in Y$, iar $l_1 \neq l_2$, putem susţine că f nu are limită în punctul $x_0 \in A'$.

   De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

   nu are limită în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, punct care este de acumulare pentru $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Într-adevăr, pentru şirul $((x'_n, y'_n))_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ (când $n \to \infty$), avem $f(x'_n, y'_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2} = l_1$, când $n \to \infty$, în timp ce, pentru şirul $((x''_n, y''_n))_{n\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$, convergent şi el la $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, avem $f(x''_n, y''_n) = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{n}{n^2+1} \to 0 = l_2 \neq l_1$, când $n \to \infty$.

Propoziţia 9.7 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice, $A \subseteq X$, A nevidă, $x_0 \in A'$, $f : A \to Y$ şi $g : A \to \mathbb{R}_+$. Dacă*

i) există $l \in Y$ astfel încât $d_2(f(x), l) \leq g(x)$, $\forall\, x \in A$ şi

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie: Acest rezultat poate fi considerat un ***criteriu pentru existenţa***, cu o anumită valoare, a ***limitei unei funcţii într-un punct***.

Din ii), rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in (B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$ (adică $\forall\ x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$), avem $0 < g(x) < \varepsilon$. Folosind şi i), deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, $\forall\, x \in A$, cu $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $0 \leq d_2(f(x), l) \leq g(x) < \varepsilon$. Aşadar, $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ◀

Un ***alt criteriu*** pentru existenţa limitei unei funcţii într-un punct, în cadrul spaţiilor metrice, este cel prezentat de teorema ce urmează:

Teorema 9.8 ***(Cauchy-Bolzano)***

Fie (X, d_1) un spaţiu metric, (Y, d_2) un spaţiu metric complet, $A \subseteq X$, A nevidă, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$. Funcţia f ***are limită în punctul*** *x_0 dacă şi numai dacă*

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,$ *a.î.* $\forall\, x', x'' \in A \setminus \{x_0\}$, *cu* $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$ *şi* $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$, *avem* $d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$

Demonstraţie: "$\Rightarrow$:" Dacă f are limită în x_0, atunci există $l \in Y$ astfel încât $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, adică, potrivit Definiţiei 9.3 (în limbajul "$\varepsilon - \delta$"), avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \text{ aşa încât } \forall\, x \in A, \text{ cu } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici, luând x' şi x'' din $A \setminus \{x_0\}$, aşa încât $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$, obţinem:

$$d_2(f(x'), f(x'')) \leq d_2(f(x'), l) + d_2(f(x''), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, tocmai caracterizarea din enunţ.

"$\Leftarrow$:" Reciproc, dacă are loc caracterizarea din enunţ, pentru existenţa limitei lui f în x_0, deducem că, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0, avem:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ şi $\exists\, n_\varepsilon = n(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \geq n_\varepsilon$, au loc relaţiile $d_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$ şi $d_1(x_m, x_0) < \delta(\varepsilon)$, pe baza cărora rezultă că $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Reţinem de aici că, în condiţiile în care $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ este un şir convergent la x_0, şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy în Y. Cum (Y, d) este un spaţiu metric complet, rezultă că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$. Tot condiţia Cauchy din enunţ ne asigură că l este limita şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ care este convergent la x_0. Aceasta deoarece, dacă, prin absurd, ar exista $(x'_n)_{n\geq 1}$şi $(x''_n)_{n\geq 1}$ din $A \setminus \{x_0\}$, şiruri convergente (în X) la x_0 , astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$, atunci, prin folosirea condiţiei menţionate, ar rezulta: $0 \leq d_2(l_1, l_2) < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Deci $l_1 = l_2$. ◀

Propoziţia 9.9 *Fie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A'$. Dacă f are limită în punctul x_0, atunci există o vecinătate V_0 a lui x_0 încât restricţia funcţiei f la $(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$ este mărginită.*

Demonstraţie: Utilizând Definiţia 9.3 (cu vecinătăţi sferice), deducem că dacă f are limita $l \in Y$ în punctul x_0, atunci, pentru $B_{d_2}(l,1)$, există $V_0 = B_{d_1}(x_0, \delta(1)) \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $A \cap (V_0 \setminus \{x_0\})$, avem $f(x) \in B_{d_2}(l,1)$, adică $d_2(f(x), l) \leq 1$, ceea ce înseamnă că $f|_{(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}}$ este mărginită. ◀

Propoziţia 9.10 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-spaţiu normat, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ şi $f : A \to Y$.*

(i) Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci există şi $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

(ii) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$.

(iii) Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \neq \mathbf{0}_Y$, atunci există $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, $\forall\, x \in (A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$.

Demonstraţie: *(i):* Faptul că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ implică, pentru orice $\varepsilon > 0$, existenţa unui $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, oricare ar fi $x \in A$, cu $0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. Dar cum $|\|f(x)\| - \|l\|| \leq \|f(x) - l\|$, deducem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, cu $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$, avem $|\|f(x)\| - \|l\|| < \varepsilon$. Deci există $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.
(ii): Cum $\|f(x) - \mathbf{0}_Y\| = \|f(x)\|$, $\forall\, x \in A$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = 0$, prin aplicarea Propoziţiei 9.7 şi a Teoremei 9.5, rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există şi este egală cu $\mathbf{0}_Y$.
(iii): Cum $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq \mathbf{0}_Y$, atunci $\|l\| > 0$. Pentru $\varepsilon = \|l\|$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $\forall\, x \in (S_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap A) \setminus \{x_0\}$, avem $\|f(x) - l\| < \|l\|$, de unde: $\|f(x)\| \leq \|f(x) - l\| < 2\|l\|$.
Aşadar, există $V_0 = B_d(x_0, \delta(\|l\|))$, astfel încât f este mărginită pe $(V_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ şi diferită de $\mathbf{0}_Y$, întrucât, în conformitate cu i), avem $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\| \neq 0$, ceea ce înseamnă că, cel puţin pe o submulţime a lui V_0, tot din $\mathcal{V}(x_0)$, f nu se anulează. ◀

Propoziţia 9.11 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat peste $\mathbb{R}$, $A \subseteq X$, A nevidă, şi $x_0 \in A'$.*

(i) Dacă $f, g : A \to Y$ sunt astfel încât există $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, funcţia $\alpha f + \beta g$ are limită în punctul x_0, iar

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f + \beta g) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

(ii) Dacă $f : A \to Y$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt astfel încât există $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, atunci funcţia $\varphi \cdot f : A \to Y$ are limită în punctul x_0 iar $\lim\limits_{x \to x_0} (\varphi \cdot f)(x) = \alpha \cdot l$.

Demonstraţie: *(i):* Se ţine seama că $\|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha l_1 - \beta l_2\| \leq |\alpha| \|f(x) - l_1\| + |\beta| \|g(x) - l_2\|$ şi se aplică existenţa limitelor $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
(ii): Se are în vedere faptul că $\|\varphi(x) f(x) - \alpha l\| = \|(\varphi(x) - \alpha) f(x) + \alpha(f(x) - l)\| \leq \|f(x)\| |\varphi(x) - \alpha| + |\alpha| \|f(x) - l\|$ şi se aplică Propoziţia 9.9, şi caracterizarea existenţei limitelor implicate (în limbajul " $\varepsilon - \delta$ "). ◀

Observaţie: Atât teoremele 9.5 - 9.8, cât şi propoziţiile 9.7 - 9.11 se aplică şi cazului funcţiilor reale, în care, în particular, $X = \mathbb{R}^k$ şi $Y = \mathbb{R}^m$, aceste spaţii fiind, după caz, privite ca nişte spaţii metrice sau normate în mod corespunzător.

Un rezultat specific funcţiilor reale cu valori în $\mathbb{R}^n$ este următorul.

Teorema 9.12 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $A \neq \varnothing$, $x_0 \in A'$ şi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, unde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1, m}$. Atunci f are limita $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ în punctul x_0 dacă şi numai dacă există simultan*

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i, \forall\, i = \overline{1, m}.$$

Demonstraţie: Rezultatul acesta se obţine pe baza Teoremei 9.6, de caracterizare a limitei lui f în x_0 prin şiruri şi pe baza faptului că, în $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^m$, convergenţa unui şir de elemente echivalează cu convergenţa lui pe coordonate. ◀

Teorema 9.13 ***(Principiul substituţiei)***
Fie $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ *spaţii metrice,* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, A *şi* B *nevide,* $x_0 \in A'$, $y_0 \in B'$, $f : A \to B$ *şi* $g : B \to Z$. *Dacă:*

j) $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

jj) $f(x) \neq y_0, \forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$ *şi*

jjj) $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l \in Z$,

atunci funcţia compusă $g \circ f : A \to Z$ *are limită în punctul* x_0 *şi*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l.$$

Demonstraţie: Cum $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$, rezultă că $\forall\, W \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, V$ din $\mathcal{V}(y_0)$ aşa încât $\forall\, y \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$, avem $g(y) \in W$. În acelaşi timp, deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ şi f ia valori în $B \setminus \{y_0\}$, înseamnă că, pentru V, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, pentru orice x din $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$, să avem $f(x) \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$. Prin urmare, $\forall\, W \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(x_0)$ aşa încât, oricare ar fi $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ să aibă imaginea sa prin $g \circ f$ în W.
Deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$. ◀

Limită iterată. Limită după o direcţie. Limită parţială

În afară de noţiunea de ***limită globală*** a unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (cu $p, q \in \mathbb{N}^*$) într-un punct $x_0 \in A'$, noţiune introdusă prin una dintre definiţiile 9.1 - 9.4, există, în cazul unei astfel de funcţii reale, când $p \geq 2$, şi conceptul de ***limită iterată***, definită după cum urmează.

Pentru funcţia vectorială de p variabile rale ($p \geq 2$) $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, fie ***funcţiile*** sale ***parţiale***

$$f_{[k]} : x_k \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_p), \forall\, k = \overline{1,p}$$

care sunt definite pe $A_{[k]} = \{x_k \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A\}$ şi cu valori în $\mathbb{R}^q$, $\forall\, k = \overline{1,p}$.

În cazul în care x_k^0 este un punct de acumulare al mulţimii $A_{[k]}$ ($k \in \{1, 2, \ldots, p\}$), se poate vorbi despre existenţa limitei $\lim\limits_{x_k \to x_k^0} f_{[k]}(x_k)$ care ar fi să fie un element din $\mathbb{R}^q$ ce depinde parametric de celelalte variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$. S-ar putea apoi considera limita

$$\lim_{x_j \to x_j^0} \left(\lim_{x_k \to x_k^0} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_p) \right), k, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

Aceasta va depinde de celelalte $p-2$ variabile ($i = \overline{1,p}$) diferite de x_j şi x_k. În fine, dacă se consideră limitele după toate variabilele x_i ($i = \overline{1,p}$), luate pe rând, atunci

$$(*) \lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\ldots \lim_{x_{i_p} \to x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ldots \right) \right), \text{ cu } \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} = \{1, 2, \ldots, p\},$$

va reprezenta un element din $\mathbb{R}^q$ care nu mai depinde de nici una dintre variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Definiţia 9.14 *Vom spune că limita*

$$\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^0}\left(\lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^0}\left(\dots\lim_{x_{i_p}\to x_{i_p}^0} f(x_1,x_2,\dots,x_p)\dots\right)\right),\ \text{cu } \{i_1,i_2,\dots,i_p\}=\{1,2,\dots,p\},$$

se numeşte ***limita iterată a funcţiei*** $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ***în punctul*** $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A'$, ***în ordinea*** $(i_1, i_2, \dots, i_p)$.

Observaţie: Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se poate vorbi despre $p!$ *limite iterate*, într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$. De exemplu, pentru cazul $p = 3$, limitele iterate în cauză sunt următoarele:

$$l_{123}=\lim_{x_1\to x_1^0}\left(\lim_{x_2\to x_2^0}\left(\lim_{x_3\to x_3^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right),\quad l_{132}=\lim_{x_1\to x_1^0}\left(\lim_{x_3\to x_3^0}\left(\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right),$$

$$l_{213}=\lim_{x_2\to x_2^0}\left(\lim_{x_1\to x_1^0}\left(\lim_{x_3\to x_3^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right),\quad l_{231}=\lim_{x_2\to x_2^0}\left(\lim_{x_3\to x_3^0}\left(\lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right),$$

$$l_{312}=\lim_{x_3\to x_3^0}\left(\lim_{x_1\to x_1^0}\left(\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right),\quad l_{321}=\lim_{x_3\to x_3^0}\left(\lim_{x_2\to x_2^0}\left(\lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2,x_3)\right)\right).$$

Acestea sunt limitele funcţiei $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^q$ atunci când x_1, x_2 şi x_3 tind succesiv la x_1^0, x_2^0 şi x_3^0, în fiecare dintre cele 3! (adică 6) ordini (i_1, i_2, i_3) posibile.

Propoziţia 9.15 *Fie* $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *şi fie* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A'$. *Dacă pentru funcţia* f *există atât o limită iterată în* x_0, $l_{i_1,i_2,\dots,i_p} = \lim\limits_{x_{i_1}\to x_{i_1}^0}\left(\lim\limits_{x_{i_2}\to x_{i_2}^0}\left(\dots\lim\limits_{x_{i_p}\to x_{i_p}^0} f(x_1,x_2,\dots,x_p)\dots\right)\right)$, *cât şi limita globală* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, *atunci* $l = l_{i_1,i_2,\dots,i_p}$.

Demonstraţie: Dacă $\exists\, l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ şi $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$), atunci $\forall\,\varepsilon > 0$, există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in (U \cap A) \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, avem $\|f(x_1, x_2, \dots, x_p) - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ (unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ este o normă (de exemplu una euclidiană) pe $\mathbb{R}^q$).

Prin trecere la limită, succesiv după $x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1}$, la respectiv $x_{i_p}^0, x_{i_{p-1}}^0, \dots$ şi $x_{i_1}^0$, obţinem că, atât timp cât există limita iterată $l_{i_1,i_2,\dots,i_p}$, are loc relaţia $(\cdot)$ $\|l_{i_1,i_2,\dots,i_p} - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$. Prin urmare, cum $(\cdot)$ are loc pentru orice $\varepsilon > 0$, obţinem $l_{i_1,i_2,\dots,i_p} = l$. ◀

Observaţii:

a) *Dacă funcţia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *are două limite iterate diferite într-un acelaşi punct* $\mathrm{x}_0 \in A'$, *atunci* f *nu are limită globală în punctul respectiv.*

b) *Dacă există numai o parte dintre limitele iterate ale unei funcţii* $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *într-un punct* $\mathrm{x}_0 \in A'$, *nu înseamnă că există şi celelalte limite iterate. Cu atât mai puţin că există limita globală a lui* f *în* x_0.

c) *Chiar dacă toate limitele iterate există şi sunt egale, nu se poate afirma că există limita globală.*
De exemplu, funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$, are limitele iterate $l_{12} = \lim\limits_{x_1\to 0}\left(\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)\right) = 0 = \lim\limits_{x_2\to 0}\left(\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\right) = l_{21}$, dar nu şi limita globală $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$, deoarece există şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ pentru care $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = l_1$ şi $f\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = l_2$, dar $l_1 \neq l_2$.

d) *Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, este posibil să nu existe limitele iterate într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi totuşi să existe limita globală, a lui f, în acel punct.*

Într-adevăr, considerând mulţimea $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0 \text{ şi } x_2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}$, $\forall\ (x_1, x_2) \in A$, observăm că nu există l_{12} şi nici l_{21}, deoarece nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.

În schimb, pe baza relaţiei

$$0 \leq |f(x_1, x_2)| = \left|(x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}\right| \leq |x_1 + x_2|, \forall\, (x_1, x_2) \in A,$$

prin trecere la limită ($(x_1, x_2) \to (0, 0)$), se obţine faptul că există $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0$.

Pentru o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pe lângă noţiunile de limită globală şi limită iterată într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A'$, se mai poate vorbi despre ***limită după o direcţie dată*** şi ***limită parţială*** în x_0.

Definiţia 9.16 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, o mulţime nevidă, $f : A \to \mathbb{R}^q$ şi $\mathbf{x}_0 \in A'$.*

*a) Spunem că funcţia f are **limită în $\mathbf{x}_0$, după direcţia** $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ dacă funcţia*

$$t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \text{ cu } t \in \{t \geq 0 \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\} \neq \varnothing,$$

are limită în $t = 0$, adică dacă există $l^0_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^q$ astfel încât:

$$l^0_{\mathbf{u}} = \lim_{t \searrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}).$$

*b) Când $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, atunci $l^0_{\mathbf{e}_k}$ se numeşte **limita parţială a funcţiei f în punctul** x_0.*

Observaţie: *Nu pentru orice funcţie se poate defini limita într-un punct după o direcţie $\mathbf{u}$ sau $\mathbf{e}_k$, $k \in \overline{1,p}$,* deoarece mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in A\}$, respectiv mulţimea $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in A\}$, ar putea fi mulţimea vidă sau 0 ar putea să nu fie punct de acumulare pentru asemenea mulţimi, ori, pur şi simplu, să nu existe limita în cauză.

Totuşi, dacă există limita globală, atunci se poate vedea că există şi limita după orice direcţie, în conformitate cu următorul rezultat.

Propoziţia 9.17 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, A nevidă, $\mathrm{x}_0 \in A'$ şi $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, aşa încât $\mathbf{x}_0$ să fie punct de acumulare şi pentru mulţimea $A \cap \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \mid t \geq 0\} \neq \varnothing$.*

Dacă există $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ şi este egală cu $l \in \mathbb{R}^q$, atunci există şi $\lim\limits_{t \searrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = l_{\mathbf{u}}$ şi avem $l_{\mathbf{u}} = l$.

Demonstraţie: Pentru orice şir $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, cu $t_n \to 0$, când $n \to \infty$, avem $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + t_n\mathbf{u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{x}_0$.

În plus, deducem că

$$l_{\mathbf{u}} = \lim_{t_n \to 0} f(\mathbf{x}_0 + t_n\mathbf{u}) = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = l.$$

◀

În particular, pentru $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$, Propoziţia 9.17 se referă la raportul dintre limita globală a lui f în x_0 şi limita parţială, de rang k, a lui f în x_0: *dacă există $l = \lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$, atunci există şi $l_k = \lim\limits_{t \searrow 0} f(\mathrm{x}_0 + t\mathbf{e}_k)$ şi $l = l_k$.*

Observaţie: *Existenţa limitei după una sau mai multe direcţii (chiar şi după toate direcţiile posibile) nu garantează existenţa limitei globale a unei funcţii într-un punct.*

Astfel, de exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ nu are, după cum am văzut deja, limită globală în punctul $(0, 0)$, dar are limită după orice direcţie $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, căci:

$$\lim_{t \searrow 0} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) = \lim_{t \searrow 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{t^2(u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Când $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ sau $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$, limitele parţiale ale acestei funcţii în punctul $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ sunt egale cu 0.

Pentru funcţii reale de argument scalar $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ se poate vorbi şi despre noţiunea de ***limită laterală*** într-un punct $x_0 \in A'$.

- Dacă x_0 este un ***punct de acumulare la stânga*** pentru A, adică, prin definiţie, punct de acumulare al mulţimii $A_s = \{x \in A \mid x > x_0\}$, atunci spunem că f are ***limită la stânga în*** x_0 (notată cu l_s, sau cu $f(x_0^-)$, ori $f(x_0 - 0)$) dacă $f_{|_{A_s\}}}$ are limită globală în x_0, în sensul Definiţiei 9.1.
- Dacă x_0 este un ***punct de acumulare la dreapta*** pentru A, adică punct de acumulare al mulţimii $A_d = \{x \in A \mid x > x_0\}$, atunci se spune că f are limită la dreapta în x_0 (notată cu l_d, sau cu $f(x_0^+)$ ori $f(x_0 + 0)$) dacă $f_{|_{A_d\}}}$ are limită (globală) în x_0, în sensul Definiţiei 9.1.

Ţinând seama de Teorema 9.6 şi de definiţiile de mai sus pentru limitele la dreapta şi la stânga (în cazul $p = 1$), se poate face caracterizarea limitei laterale a unei funcţii reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale şi prin intermediul şirurilor:

Astfel, se poate arăta că l_s (respectiv l_d) $\in \mathbb{R}^q$ este limita la stânga (respectiv la dreapta) a unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ într-un punct x_0 de acumulare la stânga (respectiv la dreapta) a lui A dacă şi numai dacă, pentru orice şir strict crescător (respectiv descrescător) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$, cu $x_n \to x_0$, are loc $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}^q} l_s$ (respectiv l_d).

De asemenea, tot pe baza Teoremei 9.6, ca şi în cazul funcţiilor reale scalar-scalare, se poate vedea că *o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ are limită (globală) într-un punct de acumulare x_0 a lui A dacă şi numai dacă există atât limita la dreapta, cât şi limita la stânga a lui f în x_0 şi cele două limite laterale sunt egale.*

În general, din punct de vedere practic, pentru funcţiile reale scalar-scalare sau scalar-vectoriale (luate pe componente), calculul limitei într-un punct se realizează, mai ales în cazuri de nedeterminare, prin folosirea unor limite remarcabile (fundamentale), cum sunt următoarele:

1) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e;$

2) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e;$

3) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1;$

4) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t - 1}{t} = \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1;$

5) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^r - 1}{t} = r,\ r \in \mathbb{R};$

5) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1;$

6) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1;$

7) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1;$

8) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t} = 1;$

9) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1.$

Continuitatea funcţiilor

Definiţia 9.18 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, iar A o parte nevidă a lui X. De asemenea fie $f : A \to Y$, $x_0 \in A$ şi $\widetilde{A} \subseteq A$, cu $\widetilde{A} \neq \varnothing$.*

i) ***Funcţia*** *f se numeşte* **continuă în** *x_0 dacă există limita (globală) a lui f în x_0 şi valoarea acestei limite este egală cu $f(x_0)$, sau dacă x_0 este punct izolat al lui $\widetilde{A}$.*

ii) ***Funcţia*** *f se spune că este* **continuă pe mulţimea** *$\widetilde{A}$ dacă f este continuă în orice punct al lui $\widetilde{A}$.*

Vom nota mulţimea funcţiilor continue de la X la Y cu $\mathcal{C}(X;Y)$, $\mathcal{C}(X;Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ continuă }\}$.

Evident, ţinând seama de toate cele precizate în legătură cu noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct, se pot da diverse caracterizări (în limbajul vecinătăţilor, în limbajul metricilor, în limbajul normelor, în limbajul " $\varepsilon - \delta$ ", în limbajul şirurilor) noţiunii de continuitate a lui f în $x_0 \in A$, prin înlocuirea lui l cu $f(x_0)$. În acelaşi timp, prin utilizarea lui $f(x_0)$ în locul lui l, acolo unde este cazul, şi rezultatele cuprinse în propoziţiile şi teoremele de până aici se pot reformula, în spiritul continuităţii lui f în x_0 (fie global, în raport cu toate variabilele implicate, fie după o direcţie, fie utilizând limitele parţiale).

Definiţia 9.19 *O funcţie $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ care nu este continuă într-un punct $x_0 \in A$ se numeşte* ***funcţie discontinuă în*** *x_0, iar punctul x_0 se numeşte* ***punct de discontinuitate*** *al lui f.*

Teorema 9.20 ***(de caracterizare a continuităţii unei funcţii pe un spaţiu metric)***
Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, iar $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci sunt echivalente următoarele afirmaţii:

1) f este continuă pe X;

2) $\forall\, D \in \tau_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$;

3) $\forall\, F \subseteq Y$, cu $Y \setminus F \in \tau_{d_2} \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) \in \tau_{d_1}$;

4) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$,

unde τ_{d_1} şi τ_{d_2} sunt topologiile induse de metricile d_1, şi, respectiv d_2.

Demonstraţie: 1) $\Rightarrow$ 4): Fie $A \in \mathcal{P}(X)$ şi $y \in f(\overline{A})$. Există atunci $x \in \overline{A}$ astfel ca $y = f(x)$. Cum $x \in \overline{A}$, potrivit Propoziţiei 6.32, există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq A$ aşa încât $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_1} x$. Deoarece f este continuă pe X, deci şi în x, rezultă, în conformitate cu Teorema 9.6, că $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d_1} f(x) = y$. Prin urmare, există un şir $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq f(A)$ aşa încât $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d_1} y$, ceea ce înseamnă că $y \in \overline{f(A)}$. Astfel, incluziunea $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ este arătată.

4) $\Rightarrow$ 3): Fie F o mulţime închisă din (Y, d_2), adică $F = \overline{F}$ în Y şi fie $A = f^{-1}(F)$. Deoarece 4) are loc, avem:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} = \overline{F} = F.$$

De aici, rezultă că $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) = f^{-1}(F) = A$. Cum $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$, reiese că $A = \overline{A}$, ceea ce ne spune că $f^{-1}(F)$ este închisă în X.

3) $\Rightarrow$ 2): Fie $D \in \tau_{d_2}$. Atunci $Y \setminus D$ este închisă în Y şi, prin 3), $f^{-1}(Y \setminus D)$ este închisă în X. În consecinţă, mulţimea $X \setminus f^{-1}(Y \setminus D)$, adică $X \setminus \left(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)\right)$, mai exact spus $f^{-1}(D)$, este deschisă în X.

2) $\Rightarrow$ 1): Fie x_0 arbitrar din X. Pentru a vedea că f este continuă în x_0, fie $D = B_{d_2}(f(x_0), \varepsilon) \in \mathcal{V}(f(x_0))$. Folosind 2), avem: $f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$. În plus, $x_0 \in f^{-1}(D)$ (căci $f(x_0) \in D$). Deci $f^{-1}(D) \in \mathcal{V}(x_0)$. Astfel, există o bilă deschisă $B_{d_1}(x_0, \delta)$, centrată în x_0, încât $B_{d_1}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(D)$.

De aici, reiese că $f(B_{d_1}(x_0, \delta)) \subseteq D = B_{d_2}(f(x_0), \varepsilon)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◀

Definiţia 9.21 ***(Prelungirea prin continuitate a unei funcţii)***
Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A \cap A'$. De asemenea, fie $f : A \setminus \{x_0\} \to Y$, pentru care există $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in Y$. Atunci funcţia $\widetilde{f} : A \to Y$, definită prin

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ l, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases},$$

se numeşte ***prelungire a lui f la A, prin continuitate în punctul*** *x_0.*

Faptul că $\widetilde{f}$ este continuă în x_0, reiese imediat utilizând că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l = \widetilde{f}(x_0)$.

Definiţia 9.22 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice.*

*a) Spunem că o aplicaţie $f : X \to Y$ se numeşte **homeomorfism** dacă f este bijecţie, iar f şi f^{-1} sunt continue pe X şi respectiv Y (altfel spus, f este o **bijecţie bicontinuă**).*

*b) Două spaţii metrice (X, d_1) şi (Y, d_2) se numesc **homeomorfe** dacă există un homeomorfism $f : X \to Y$.*

Definiţia 9.23 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, A nevidă, şi fie $f : A \to \mathbb{R}^q$.*
*Spunem că funcţia f se numeşte **uniform continuă** pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ astfel încât } \forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in \widetilde{A}, \text{ cu } \|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon, \text{ are loc: } \|f(\mathrm{x}') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Propoziţia 9.24 *O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uniform continuă pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ este, în mod necesar, continuă pe $\widetilde{A}$ şi deci continuă în fiecare punct din $\widetilde{A}$.*

Demonstraţie: Luând, în Definiţia 9.23, unul din punctele x' şi x'' fixate pe moment, spre exemplu $x'' = x_0$, $x_0 \in \widetilde{A}$, deducem că f este continuă în x_0. Cum x_0 este arbitrar fixat în $\widetilde{A}$, obţinem că f este continuă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţii:

a) Reciproca Propoziţiei 9.24 nu este adevărată, întrucât există funcţii continue (pe o mulţime) care nu sunt uniform continue (pe respectiva mulţime).

b) Dacă o funcţie reală, cu valori vectoriale este uniform continuă pe o mulţime, atunci şi funcţiile ei componente sunt uniform continue pe acea mulţime. Nu şi reciproc.

Definiţia 9.25 *a) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **lipschitziană** dacă există $L \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq L\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, x', x'' \in A.$$

*b) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte **hölderiană,** de ordin $\alpha \in (0, 1]$, dacă există $M \in \mathbb{R}_+^*$ aşa încât*

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^\alpha, \forall\, x', x'' \in A.$$

Observaţie: Orice funcţie lipschitziană este o funcţie hölderiană de ordin $\alpha = 1$.

Teorema 9.26 *Orice funcţie hölderiană $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie: Folosind Definiţia 9.25, b), deducem că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon = \left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} > 0$, astfel încât, $\forall\, x', x'' \in A$, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$, are loc relaţia:

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^\alpha < M\delta_\varepsilon^\alpha = \varepsilon, \forall\, x', x'' \in A.$$

Deci f este uniform continuă pe A. ◀

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi

Teorema 9.27 ***(Compunerea funcţiilor continue)***
Fie $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ şi $C \subset \mathbb{R}^p$, cu $m, n, p \geq 1$ şi fie funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$.

1. *Dacă f este continuă în $x_0 \in A$, iar g este continuă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.*

2. *Dacă f este continuă pe A, iar g este continuă pe B, atunci $g \circ f$ este continuă pe A.*

Teorema 9.28 ***(Operaţii cu funcţii continue)***

Fie (X, d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat, $A \subset X$, fie funcţiile $f, g : A \to Y$ şi fie $x_0 \in A \cap A'$.

1. *Dacă funcţiile f şi g sunt continue în x_0, atunci funcţia g este continuă în x_0.*
2. *Dacă funcţia f şi funcţia $\alpha : A \to \mathbb{R}$ sunt continue în x_0, atunci funcţia $\alpha \cdot f$ este continuă în x_0.*

Definiţia 9.29 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Spunem că mulţimea $A \subset X$ este **compactă** dacă din orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se poate extrage un subşir convergent la un punct din A.*

Observaţii:

1. Orice interval de forma $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este o mulţime compactă. (Orice şir convergent cu termeni din acest interval are limita tot în $[a, b]$).
2. Intervalele $(a, b]$, $[a, b)$ şi intervalul deschis (a, b) nu sunt compacte deoarece nu sunt închise. Există şiruri care converg la fiecare din extremităţile intervalelor.
3. În $\mathbb{R}^n$ o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

În cele ce urmează, prezentăm câteva proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi compacte.

Teorema 9.30 *O funcţie continuă $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ transformă orice submulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$ într-o mulţime $f(\widetilde{A})$ compactă.*

Demonstraţie: Mulţimea $\widetilde{A}$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă, sau, în limbajul şirurilor, dacă orice şir din $\widetilde{A}$ conţine cel puţin un subşir convergent, cu limita în $\widetilde{A}$, deducem, pe baza continuităţii lui f, că imaginea prin f a respectivului subşir constituie un subşir al şirului $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent la imaginea prin f a limitei subşirului din $\widetilde{A}$, punct ce se află în mulţimea $f(\widetilde{A})$. Prin urmare, rezultă că, odată cu $\widetilde{A}$ şi mulţimea $f(\widetilde{A})$ este compactă în $\mathbb{R}^q$. ◀

Teorema 9.31 (Teorema lui Weierstrass) *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ continuă, unde A este o mulţime compactă (în raport cu toplogia uzuală pe $\mathbb{R}^p$). Atunci funcţia f este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile.*

Demonstraţie: Prin aplicarea Teoremei 9.30, rezultă că $f(A)$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}$. Deci $f(A)$ este mărginită şi închisă (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$). Fie $m = \inf\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$ şi $M = \sup\limits_{x\in A} f(\mathrm{x})$. Cum $f(A)$ este închisă, reiese că m şi M aparţin lui $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ şi există $x_m, x_M \in A$ astfel încât $f(x_m) = m$ şi $f(x_M) = M$. ◀

Teorema 9.32 (Teorema lui Cantor) *Dacă o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă pe o mulţime compactă $\widetilde{A} \subseteq A$, atunci ea este uniform continuă pe $\widetilde{A}$.*

Demonstraţie: Prin reducere la absurd, presupunem că f nu este uniform continuă pe $\widetilde{A}$, adică:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \text{ aşa încât } \forall\, \delta > 0, \exists\ x'_\delta, x''_\delta \in \widetilde{A}, \text{ cu } \|x'_\delta - x''_\delta\|_{\mathbb{R}^p} < \delta \text{ şi } \|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$ sunt normele euclidiene uzuale.

Atunci, pentru $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\ x'_n, x''_n \in \widetilde{A}$, cu $\|x'_n - x''_n\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{1}{n}$ şi $\|f(x'_n) - f(x''_n)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0$. Cum $\widetilde{A}$ este compactă în $\mathbb{R}^p$, şirul $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ conţine un subşir convergent la un element $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Din relaţia $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\|_{\mathbb{R}^p} < \dfrac{1}{n_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, deducem că şirul $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \widetilde{A}$ este convergent şi el la $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$. Astfel, în virtutea continuităţii lui f, obţinem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k})$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia $\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0 > 0$. Prin urmare, presupunerea iniţială este falsă, ceea ce înseamnă că, de fapt, f este uniform continuă pe mulţimea compactă $\widetilde{A}$. ◀

Propoziţia 9.33 *Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o aplicaţie liniară, atunci f este continuă.*

Demonstraţie: Cum f este liniară de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$, considerând raportarea la bazele canonice din $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, se poate spune că există o matrice $A \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$ aşa încât $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$. De aici, prin utilizarea normelor euclidiene pe $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^q$, deducem că avem $\|f(\mathrm{x})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^p$, unde $\|A\| = \left\|(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}}\right\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{p,q} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. În consecinţă, are loc relaţia

$$\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| \leq \|A\|\,\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|, \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^p,$$

în virtutea căreia rezultă că f este continuă (chiar uniform continuă) pe $\mathbb{R}^p$. ◄

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. VI)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. IV)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

3. C-tin Drăguşin, Octav Olteanu, Marinică Gavrilă - *Analiză matematică (cap. V, vol I)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (cap. 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Ch. 5.2)*, Trinity University, 2009.

7. S. R. Ghorpade, B. V. Limaye - *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science, 2010.

8. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

9. C. Canuto, Anita Tabacco - *Mathematical Analysis II (Second Edition)*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

10. Roger Heath-Brown - *Analysis II. Continuity and Differentiability*, Hilary Term, 2016.