

Setul 6
de probleme și exerciții de matematică
(relative la aspecte metrice legate de \mathbb{R}^n)

S6.1 Fie (X, d) un spațiu metric și $A \subseteq X$ o mulțime nevidă. Să se arate că are loc egalitatea

$$\mathcal{C}(\overset{\circ}{A}) = \overline{\mathcal{C}(A)}.$$

S6.2 Fie (X, d) spațiu metric și fie $A \subseteq X$. Să se demonstreze că:

- i) Mulțimea A este deschisă dacă și numai dacă $A \cap \partial A = \emptyset$.
- ii) $\overline{A} = A \cup \partial A, \forall A \subseteq X$.

S6.3 Să se găsească interiorul, închiderea, mulțimea derivată, frontiera și exteriorul următoarelor submulțimi din \mathbb{R} sau \mathbb{R}^2 , în raport cu metrica uzuală în cauză:

- i) $A = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n-2}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$
- ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x^2 + 1, x^2 < 1 - y\};$
- iii) $A = A_1 \times A_2$, unde $A_1 = (-3, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_-)$ și $A_2 = \left\{ \frac{(n+2)(-1)^{[\frac{n}{3}]} + 4}{5n-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$

S6.4 Să se verifice că următoarele aplicații definesc metrice pe mulțimile specificate:

- a) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \begin{cases} \min \{1, |x - y|\}, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ \min \{|x - y|, 2\}, & x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$
- b) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{când } x_1 = y_1, \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{când } x_1 \neq y_1, \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$
unde $x = (x_1, x_2)$, și $y = (y_1, y_2)$.
- c) $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$

S6.5 Se consideră $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât:

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ și
- ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (Lindenbaum).

Să se demonstreze că d este o metrice pe \mathbb{R}^n .

S6.6 Dacă d este o metrice pe \mathbb{R}^n , să se arate că au loc relațiile următoare:

- a) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (inegalitatea triunghiului).
- b) $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v), \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ (inegalitatea patrulaterului).

S6.7 Fie $\rho \subseteq \{(d, \hat{d}) \mid d \text{ și } \hat{d} \text{ sunt metrici pe } \mathbb{R}^n \text{ și } \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \text{ așa încât } \lambda d(x, y) \leq \hat{d}(x, y) \leq \mu d(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$. Să se arate că relația binară ρ este una de echivalență pe mulțimea distanțelor definite pe \mathbb{R}^n .

S6.8 Fie X un \mathbb{R} -spațiu liniar și d o metrică pe X . Să se arate că dacă d este compatibilă cu operațiile spațiului liniar X , fiind

i) invariantă la translații, adică

$$d(x+z, y+z) = d(x, y), \forall x, y, z \in X \text{ și}$$

ii) supusă la condiția

$$d(\lambda x, \theta) = |\lambda|d(x, \theta), \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X,$$

atunci aplicația $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$\|x\| = d(x, \theta), \forall x \in X,$$

este o normă pe X (θ este vectorul nul din X).

S6.9 Să se arate că, într-un spațiu metric oarecare (X, d) , aderența unei mulțimi $A \subset X$, în raport cu topologia τ_d , indusă de metrica pe X , coincide cu mulțimea tuturor acelor elemente din X a căror distanță la A este egală cu 0.

S6.10 Să se studieze natura următoarelor șiruri și, atunci când este cazul, să se determine limitele corespunzătoare:

a) $(x_n, y_n, z_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^4$, unde

$$x_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2); \quad y_n = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right),$$

$$z_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)^{\frac{1}{2n}} \text{ și } t_n = n(\pi - 2 \arctg n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^3$, unde $0 \leq 3x_{n+1} \leq y_n + z_n$, $0 \leq 3y_{n+1} \leq x_n + z_n$, $0 \leq 3z_{n+1} \leq x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^2$, unde $x_n = \left(\frac{n!(n+4)!}{[(n+2)!]^2} \right)^n$ și $y_n = \sqrt[n]{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot \dots \cdot C_n^n}$, $\forall n \geq 2$.

d) $(x_n, y_n, z_n, u_n, v_n, w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^6$, unde $x_n = \frac{3n}{5n+2}$, $y_n = \sin \frac{\pi}{n+4}$, $z_n = \left(1 + \frac{7}{n} \right)^n$,
 $u_n = \sqrt[n]{n-1}$, $v_n = 6 + \frac{(-1)^n}{n}$ și $w_n = 3^{-n} - 1$, $\forall n \geq 2$.

S6.11 Să se analizeze natura următoarelor serii:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1)\sqrt[3]{n^2+1}}{n^3+2n+1}, \left(\frac{3+(-1)^n}{5} \right)^n, 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \right);$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}, \frac{3n^2+n-2}{n!} \right);$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n, \frac{n!}{n^{2n}}, \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (3k-1)}, \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(\ln n)^2} \right);$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \frac{\sin(nx)}{n^x} \right), \text{ unde } x \in \mathbb{R}.$$

S6.12 Să se arate că, într-un spațiu metric oarecare (X, d) , avem: $\overline{A} = C(Ext(A))$, $\forall A \subseteq X$.

S6.13 Să se demonstreze că:

- i) o mulțime $A \subset (X, d)$ este închisă dacă și numai dacă $\partial A \subset A$;
- ii) $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, $\forall A \subseteq X$.

S6.14 Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că d este o distanță pe \mathbb{R} și că nu există vreo normă pe \mathbb{R} care să inducă metrica d . Este d echivalentă cu metrica uzuală pe \mathbb{R} ?

S6.15 Să se găsească mulțimile de puncte remarcabile relativ la următoarele mulțimi:

- a) $B = \left\{ \frac{n-1}{n} \cos \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
- b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ sau } y \in \mathbb{Q}\}$;
- c) $A = [(-3, 1) \cap \mathbb{Q}] \cup \left\{ \frac{2 + (-1)^n n}{5n + 3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

S6.16 Să se analizeze șirul și seria date:

- a) $((x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^3$, unde $x_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k(k+3)} \right)$, $y_n = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{k^2 + 3k + 3}$ și $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2 - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}, \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \frac{(n+1) \sin \frac{n\pi}{6}}{n(n^3 + 1)} \right)$.

Bibliografie recomandată

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
2. Anca-Maria Precupanu, Liviu Florescu, Gh. Blendea, M. Cuciureanu - *Spații metrice. Probleme*, Ed. Universității "Al. I. Cuza", Iași, 1990.
3. Ana Niță, Tatiana Stănășilă - *Probleme rezolvate și exerciții fundamentale*, Ed. ALL, București, 2004.
4. C. Drăgușin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, București, 2006.
5. J. Shen - *General Topology*, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2011
6. Paul Garrett - *Review of Metric Spaces*, Univ. of Minnesota Press, 2013.
7. T.W. Körner - *Metric and Topological Spaces*, University of Cambridge, 2015.