Outline

Cuprins

1 Recapitulare

Ce s-a discutat la cursul trecut

- problemă rezolvată de un algoritm
  - problemă P
    instanţă (= input): $p \in P$
    rezultat (= output): $P(p)$
  - A rezolvă P:
    σ_p = stare ce codifică $p \in P$
    $\langle A, \sigma_p \rangle \Rightarrow^* \langle \cdot, \sigma' \rangle$, unde σ' codifică $P(p)$
- problemă de decizie: (instance, question)
- problemă rezolvabilă (decidabilă): problemă rezolvată de un algoritm

Ce s-a discutat la cursul trecut

- dimensiunea unei instanţe: dacă $p \in P$, atunci $size_d(p) = size_d(\sigma_p) = \sum_{var \mapsto val \in \sigma} size(val)$, $d \in \{log, unif\}$
- complexitatea timp/spaţiu:
  $\langle A, \sigma_p \rangle = \langle A_0, \sigma_0 \rangle \Rightarrow \langle A_1, \sigma_1 \rangle \Rightarrow \ldots \Rightarrow \langle A_n, \sigma_n \rangle = \langle \cdot, \sigma' \rangle$
  $T_d(A, p) = \sum_i time_d(\langle A_i, \sigma_i \rangle \Rightarrow \langle A_{i+1}, \sigma_{i+1} \rangle)$
  $S_d(A, p) = \max_i size_d(\langle A_i, \sigma_i \rangle) = \max_i size_d(\sigma_i)$
- complexitatea în cazul cel mai nefavorabil $n = \{p \in P \mid size_d(p) = n\}$
  $T_d(A, n) = \max\{T_d(A, p) \mid size_d(p) = n\}$
  $S_d(A, n) = \max\{S_d(A, p) \mid size_d(p) = n\}$

Mai mult despre mărimea unei instanţe
Considerăm algoritmul:

```
//@input: m >= 0
//@output: s == m
s = 0;
for (i = 1; i <= m; ++i)
  s = s + 1;
```

- mărimea uniformă ($n = O(1)$): timp de execuţie constantă!!??
- mărimea logaritmică ($n = O(\log m)$): timp $= \sum_{i=1}^{m} \log m = m \log m = O(2^n)$!!?? (s-au considerat doar comparaţiile)
- cel mai firesc este să luăm $n = m$ (egală cu input-ul)

Mai mult despre mărimea unei instanţe

- testul de primalitate

```
isPrime(n) {
  ...
}
```

De regulă se consideră că dimensiunea instanţei este n
Agrawal et al., 2004: $T(n) = O(\log^{15/2} n \cdot \text{poly}(\log \log n)) = O(\log^{15/2+\varepsilon} n)$.
Acest rezultat este foarte important, deoarece arată că dacă se consideră dimensiunea logaritmică a instanţei ($= \log n$), atunci complexitatea timp este mărginită de un polinom.

- cel mai mare divizor comun

```
gcd(a, b) {
  ...
}
```

input-ul este format din două variabile a şi b
$n = a \cdot b$ numărul de înmuţiri: $O(5 \log_{10} \min(a, b))$
(k înmuţiri $\implies \max(a, b) \geq fib(k + 2)$, $\min(a, b) \geq fib(k + 1)$)

2 Complexitatea problemelor computaţionale

De ce definim complexitatea unei probleme computaţionale
Până acum am clasificat problemele în rezolvabile şi nerezolvabile.

Pentru o problemă rezolvabilă pot exista mai mulţi algoritmi care să o rezolve.

De fapt dacă există unul, atunci există o infinitate. (De ce?)

Am văzut cum se măsoară eficienţa unui algoritm.
Ce putem spune despre eficienţa rezolvării unei probleme?

Definiţiile de la eficienţa algoritmilor pot fi uşor transferate la probleme. De exemplu, complexitatea timp a unei probleme se referă la complexitatea timp a algoritmilor care rezolvă problema. Pentru fiecare versiune a definiţiei pentru algorimi (în cazul cel mai nefavorabil, medie, cost uniform, cost logaritmic,...), vom avea una corespunzătoare pentru probleme.

Definiţia complexităţii $O(f(n))$ a unei probleme
Oferă o margine superioară pentru efortul computaţional necesar rezolvării unei probleme.

Definition
Problema P are complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil $O(f(n))$ dacă există un algoritm A care rezolvă P şi $T_A(n) = O(f(n))$.

Pentru a arăta că o problemă P are complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil $O(f(n))$, este suficient de găsit un algoritm A care rezolvă P şi să arătăm că A are complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil $O(f(n))$. Valoarea lui $f(n)$ ne dă o margine superioară pentru timpul necesar rezolvării unei instanţe de dimensiune n.

Definiţia complexităţii $\Omega(f(n))$ a unei probleme
Oferă o margine inferioară pentru efortul computaţional necesar rezolvării unei probleme.

Definition
P are complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil $\Omega(f(n))$ dacă orice algoritm A care rezolvă P are $T_A(n) = \Omega(f(n))$.

Acest tip de informaţie este mult mai dificil de obţinut deoarece trebuie arătat că nu există algoritmi care să rezolve orice instanţă de dimensiune n într-un timp mai mic decât $f(n)$ multiplicat cu o constantă. Vom studia doar două probleme pentru care există dovedită această margine inferioară: sortarea şi căutarea.

Algoritm optim pentru o problemă

Definition
A este algoritm optim (din punct de vedere al complexităţii timp pentru cazul cel mai nefavorabil) pentru problema P dacă

- A rezolvă P şi
- P are complexitatea timp în cazul cel mai nefavorabil $\Omega(T_A(n))$.

Se poate dovedi că un algoritm este optim din punct de vedere al timpului de execuţie numai dacă se cunoaşte limita inferioară pentru problemă; din acest motiv se cunosc puţini algoritmi optimi.

3 Complexitatea sortării

Problema sortării
Considerăm cazul particular al sortării tablourilor:

SORT	
Input	n şi tabloul $a = [v_0, \ldots, v_{n-1}]$.
Output	tabloul $a' = [w_0, \ldots, w_{n-1}]$ cu proprietăţile: $w_0 \leq \cdots \leq w_{n-1}$ şi $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$ este o permutare a secvenţei $v = (v_0, \ldots, v_{n-1})$.

Notaţii:
sorted(a): tabloul a este sortat, i.e. $\mathtt{a}[0] \leq \cdots \leq \mathtt{a}[n-1]$
perm(v, w): w este o permutare a lui v

Sortare prin interschimbare (BubbleSort) 1/2
Metoda bubble sort se bazează pe următoarea definiţie a predicatului *sorted*(a):

$$sorted(a) \iff (\forall i)(0 \leq i < n-1) \Rightarrow a[i] \leq a[i+1]$$

unde $n = a.size()$. (Aceasta e parte a **domeniului problemei**.)
Dacă a[i] > a[i + 1], spunem că perechea $(i, i+1)$ formează o **inversiune**. În cazul unei inversiuni proprietatea a[i] ≤ a[i + 1] poate fi stabilită printr-o interschimbare. De aici derivă foarte simplu un algoritm care restabileşte relaţia de ordine corectă între elementele care formează inversiuni:

```
for (i=0; i < n-1; ++i)
  if (a[i] > a[i+1])
    swap (a, i, i+1);
```

Sortare prin interschimbare (BubbleSort) 2/2
Procesul de restabilire de mai sus trebuie repetat până nu mai sunt inversiuni:

```
while (posibil să mai existe inversiuni) {
  for (i=0; i < n-1; ++i) {
    if (a[i] > a[i+1]) {
      swap (a, i, i+1);
}
```

(Acesta este pseudocod!)

Segmentul din tablou de la sfârşit care nu include versiuni la o ieraţile while, nu va include inversiuni nici la iteraţiile următoare. De aici rezultă ca testul *nu mai există inversiuni* poate fi verificat ţinând minte poziţia ultimei inversiuni.

BubbleSort: algoritmul

```
bubbleSort(a, n) {
  ultim = n-1;
  while (ultim > 0) {
    n1 = ultim;
    ultim = 0;
    for (i=0; i < n1; ++i) {
      if (a[i] > a[i+1]) {
        swap (a, i, i+1);
        ultim = i;
      }
    }
  }
}
```

```
swap(a, i, j) {
  temp = a[i];
  a[i] = a[j];
  a[j] = temp;
}
```

Evaluarea algoritmului BubbleSort 1/2
Corectitudine
Invariant bucla while: a[ultim+1 .. n−1] include cele mai mari n−1−ultim elemente din a iniţial $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ordonate crescător (i.e., avem *sorted*(a[ultim+1 .. n−1])

Invariant bucla for: a[j] ≤ a[i] pentru $j = 0, \ldots, i$.

Singura instrucţiune care modifică tabloul a este `swap` şi aceasta menţine proprietatea $\text{perm}(u, u')$, unde u este valoarea variabilei `a` înainte de `swap` şi u' cea de după. .

Evaluarea algoritmului BubbleSort 1/2
Timp de execuţie

- dimensiune instanţă: n (= `a.size()`)
- operaţii măsurate: comparaţiile care implică elementele tabloului
- cazul cel mai nefavorabil: când secvenţa de intrare este ordonată descrescător
- numărul de comparaţii pentru acest caz este $(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$

Sortare prin inserţie directă (InsertSort) 1/2
Principiul de bază al algoritmului de sortare prin inserţie este următorul: Se presupune că subsecvenţa `a`$[0\,..\,j-1]$ este sortată. Se caută în această subsecvenţă locul i al elementului $a[j]$ şi se inserează $a[j]$ pe poziţia i. Procesul de mai sus trebuie repetat pentru $j = 1, \ldots, n-1$:

```
for (j=1; j < n; ++j )
  inserează a[j] în a[0..j-1] a.î. sorted(a[0..j])
```

(Acesta este un pseudocod!)

Sortare prin inserţie directă (InsertSort) 2/2
Analiza domeniului problemei
Poziţia i pe care trebuie inserat $a[j]$ este determinată astfel:

- $i = j$ dacă $a[j] \geq a[j-1]$;
- $i = 0$ dacă $a[j] < a[0]$;
- $0 < i < j$ şi satisface $a[i-1] \leq a[j] < a[i]$

Aşadar elementele de pe poziţiile $i..j-1$ trebui deplasate la dreapta cu o poziţie. Condiţia pentru deplasarea la dreapta este $i \geq 0 \wedge a[i] > a[j]$ ($a[j]$ cel iniţial): Algoritmic:

```
i = j - 1;
temp = a[j];
while ((i >= 0) && (a[i] > temp)) {
  a[i+1] = a[i];
  i = i -1;
}
```

InsertSort: algoritmul

```
insertSort(a, n) {
  for (j = 1; j < n;  ++j) {
    i = j - 1;
    temp = a[j];
    while ((i >= 0) && (temp < a[i])) {
      a[i+1] = a[i];
      i = i -1;
    }
    if (i != j-1) a[i+1] = temp;
  }
}
```

Evaluarea algoritmului InsertSort 1/2
Corectitudine
Invariantul buclei `for`: este format din perm(u, v), unde u este valoarea curentă a variabilei `a` (reamintim că v este valoarea iniţială), şi din proprietatea că primele $j-1$ sunt ordonate crescător:

Invariantul buclei `while`: elementele mutate $a[i+1..j-1$ sunt mai mari decât $a[j]$ iniţial ($= temp$): $a[i+1], \ldots, a[j-1] > temp$.

Invariantul buclei `while` şi condiţia de terminare $\texttt{a[i]} \leq \texttt{temp} \vee \texttt{i} < \texttt{0}$ asigură determinarea corectă a lui i, i.e. $sorted(a[0..j])$.

Evaluarea algoritmului InsertSort 2/2
Timp de execuţie

- dimensiune instanţă: n ($= \texttt{a.size}()$)
- operaţii măsurate: comparaţiile care implică elementele tabloului
- cazul cel mai nefavorabil: când secvenţa de intrare este ordonată descrescător
  – căutarea poziţiei i în subsecvenţa $\texttt{a}[0 \,..\, j-1]$ necesită $j-1$ comparaţii
- numărul de comparaţii pentru acest caz este $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$

Selecţia sistematică
Analiza domeniului problemei Se bazează pe structura de date de tip *max-heap*. Proprietatea $maxheap(\texttt{a})$:

$$(\forall i \geq 0) 2i+1 < n \implies a[i] \geq a[2i+1) \wedge$$
$$2(i+1) < n \implies a[i] \geq a[2(i+1))$$

$maxheap(\texttt{a}) \implies \max \texttt{a} = \texttt{a}[0]$

Ideea algoritmului:

- se presupune *maxheap*(a)

- dacă facem interschimbarea `swap(a,0,n-1)`, noua valoarea $a[n-1]$ e pe locul ei final şi tabloul rămas de sortat este $\texttt{a}[0..n-2]$
- $\texttt{a}[0..n-2]$ se sortează în aceeaşi manieră

Ideea algoritmului mai algoritmică

```
heapSort(a, n) {
  stabileşte maxheap( a)
  for (r = n-1; r > 0; --r) {
    swap(a, 0, r);
    restabileşte maxheap( a[0..r − 1])
}
```

(Acesta este pseudocod!)

Stabilirea proprietăţii de max-heap
Analiza domeniului problemei

- *maxheap*$(\texttt{a}, \ell)$:

$$(\forall i \geq \ell) 2i+1 < n \implies a[i] \geq a[2i+1] \wedge$$
$$2(i+1) < n \implies a[i] \geq a[2(i+1)]$$

- $\ell \geq n/2 \implies$ *maxheap*$(\texttt{a}, \ell)$
- dacă *maxheap*$(\texttt{a}, \ell - 1)$ putem stabili *maxheap*$(\texttt{a}, \ell)$ inserând $a[\ell - 1]$ în $\texttt{a}[\ell..n-1]$

De la domeniul problemei la algoritm:

```
  j = ℓ;
  while (există copil/copii a/ai lui j) {
    k = indexul copilului cu valoare maximă;
    if (a[j] < a[k]) swap(a, j, k);
    j = k;
  }
```

Algoritmul HeapSort

```
insertInHeap(a, n, ℓ) {
  isHeap = false; j = ℓ;
  while (2*j+1 <= n-1 && ! isHeap) {
    k = 2*j +1;
    if ((k < n-1) && (a[k] < a[k+1]))  k = k+1;
    if (a[j] < a[k]) swap(a, j, k); else  isHeap = true;
    j = k;
  }
}
```

```
heapSort(a, n) {
  for (l = (n-1)/2; l >= 0; l = l-1)
    insertInHeap(a, n, l);
  r = n-1;
  while (r >= 1) {
    swap(a, 0, r);
    insertInHeap(a, r, 0);
    r = r - 1;
  }
}
```

Evaluarea algoritmului HeapSort 1/2
Corectitudine Se bazează pe corectitudinea implementării operaţiilor peste *max-heap*. *invariantul instrucţiunii* `while` *din* `insertInHeap`: $(\forall i \geq \ell)$ dacă j nu este în arborele cu rădăcina în i, atunci $maxheap(\mathtt{a}, i)$

invariantul lui `for` *din* `heapSort`: $maxheap(\mathtt{a}, \ell)$

invariantul instrucţiunii `while` *din* `heapSort`: $maxheap(\mathtt{a}[0..r-1]) \wedge sorted(\mathtt{a}[r..n-1])$

Evaluarea algoritmului HeapSort 2/2
Timp de execuţie

- dimensiune instanţă: n (= `a.size()`)
- operaţii măsurate: comparaţiile care implică elementele tabloului
- cazul cel mai nefavorabil: greu de spus
  – complexitatea timp al operaţiei `insertInHeap`: $O(\log(n - \ell))$
  – dar construcţia max-heap-ului necesită $O(n \log n) = O(\log \frac{n-1}{2}) + \cdots + O(\log n)$ (se poate arăta că de fapt e $\Theta(n)$, a se vedea Cormen et al., 6.3)
  – complexitatea lui `while`: $O(\log(n-1)) + O(\log(n-2)) + \cdots + O(\log 1) = O(n \log n)$
- numărul de comparaţii pentru acest caz este $O(n \log n)$

Alţi algoritmi de sortare
Exerciţii pentru seminar.

Două întrebări despre algoritmii de sortare
Algoritmii de sortare prezentaţi până acum se bazează pe executarea a două operaţii primitive: compararea şi interschimbarea a două elemente. Deoarece orice interschimbare este, în general, precedată de o comparaţie (prin care se decide dacă interschimbarea este necesară) putem spune că operaţiile de comparare domină calculul oricărui algoritm prezentat până acum.

Ne punem următoarele două întrebări:

- care este numărul minim de comparaţii executate în cazul cel mai nefavorabil?

- care algoritmi de sortare realizează minimul de comparaţii, i.e. care algoritmi sunt optimali?

Pentru a putea răspunde la cele două întrebări trebuie mai întâi să precizăm modelul de calcul peste care sunt construiţi aceşti algoritmi.

Arborii de decizie pentru sortare: intuitiv
Pentru simplitate vom presupune $a_i \neq a_j$ dacă $i \neq j$. Deoarece răspunsul dat de comparaţia $i \,?\, j$ are numai două posibilităţi de alegere, rezultă că putem reprezenta cele două multi-mulţimi de comparaţii prin intermediul unui arbore binar:

- vârfurile interne conţin comparaţii $i \,?\, j$;
- subarborele din stânga conţine comparaţiile făcute în cazul $a_i < a_j$;
- subarborele din dreapta conţine comparaţiile făcute în cazul $a_i > a_j$;
- vârfurile externe (frontiera) conţin permutări

Algoritmi reprezentaţi ca arborii de decizie (pentru sortare)

Definition
Un **arbore de decizie** pentru n elemente este un arbore binar în care vârfurile interne sunt etichetate cu perechi de forma $i \,?\, j$, iar vârfurile de pe frontieră sunt etichetate cu permutări ale mulţimii $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

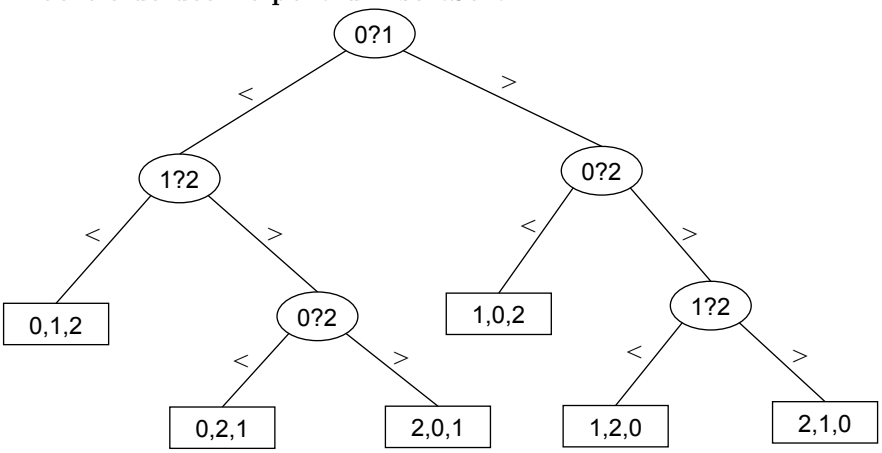
Definition
Fie t un arbore de decizie de dimensiune n şi secvenţa $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$. **Calculul** lui t pentru intrarea a constă în parcurgerea unui drum de la rădăcină la un vârf de pe frontieră definit astfel:

- Iniţial se pleacă din rădăcină.
- Presupunem ca vârful curent este $i \,?\, j$. Dacă $a_i < a_j$ atunci copilul din stânga lui $i \,?\, j$ devine vârf curent; altfel copilul din dreapta devine vârf curent.
- Calculul se opreşte dacă vârful curent este pe frontieră.

Arbori de decizie pentru sortare

Definition
Fie t un arbore de decizie pentru n elemente. Spunem că t **rezolvă problema sortării** dacă pentru orice intrare $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, calculul lui t pentru a se termină într-un vârf cu permutarea π astfel încât $a_{\pi(0)} < \cdots < a_{\pi(n-1)}$. Un arbore de decizie care rezolvă problema sortării va mai fi numit şi **arbore de decizie pentru sortare** iar modelul de calcul va fi numit **modelul arborilor de decizie pentru sortare**.

Arborele de decizie pentru InsertSort



Complexitatea sortării
Notaţii:
$ADS(n)$ = mulţimea arborilor de decizie pentru sortarea secvenţelor de lungime n
$Fr(t)$ = frontiera arborelui de decizie t
$length(\pi, t)$ = lungimea în t de la rădăcina la $\pi \in Fr(t)$ Putem defini acum timpul de execuţie minim pentru cazul cel mai nefavorabil prin expresia:

$$T(n) = \min_{t \in ADS(n)} \max_{\pi \in Fr(t)} length(\pi, t)$$

unde length(π, t) reprezintă lungimea drumului de la rădăcină la vârful pe frontieră etichetat cu π în arborele de decizie pentru sortare t.

Theorem
Problema sortării are timpul de execuţie pentru cazul cel mai nefavorabil $\Omega(n \log n)$ în modelul arborilor de decizie pentru sortare.

Demonstraţie. Un arbore de decizie de dimensiune n care rezolvă problema sortării are $n!$ vârfuri pe frontieră. Un arbore de înălţime k are cel mult 2^k vârfuri pe frontieră. De aici rezultă

$$2^{T(n)} \geq n!$$

care implică $T(n) \geq \log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$. sfdem

Corollary
Algoritmul HeapSort este optimal în modelul arborilor de decizie pentru sortare.

4 Complexitatea căutării divide-et-impera

Problema căutării

Instance o mulţime univers $\mathcal{U}$, o submulţime $S \subseteq \mathcal{U}$ şi un element a din $\mathcal{U}$;
Question $a \in S$?

Presupunem că $\mathcal{U}$ este total ordonată şi mulţimea S este reprezentată de tabloul `s[0..n-1]` cu $s[0] < \cdots < s[n-1]$.

Algoritm generic divide-et-impera de căutare: ideea
Mai întâi generalizăm problema presupunând că se caută a în secvenţa $(s[p], \ldots, s[q])$. Reamintim că are loc $s[p] < \cdots < s[q]$. Algoritmii de căutare bazaţi pe paradigma divide-et-impera au o descriere recursivă definită după următoarea strategie:

- se determină m cu $p \leq m \leq q$;
- dacă $a = s[m]$ atunci căutarea se termină cu succes;
- dacă $a < s[m]$ atunci căutarea continuă cu subsecvenţa $(s[p], \ldots, s[m-1])$;
- dacă $a > s[m]$ atunci căutarea continuă cu subsecvenţa $(s[m+1], \ldots, s[q])$;

În funcţie de modul de alegere a valorii m prin instrucţiunile 2 şi 5, se disting mai mulţi algoritmi de căutare. Cei mai cunoscuţi dintre acestia sunt:

- **Căutare liniară** (secvenţială). Se alege $m = p$.
- **Căutare binară**. Se alege $m = \lceil \frac{p+q}{2} \rceil$.
- **Căutare Fibonacci**. Se presupune $q + 1 - p = Fib(k) - 1$ unde $Fib(k)$ este la k-lea număr Fibonacci. Se alege m astfel încât $m-p = Fib(k-1)-1$ şi $q - m = Fib(k-2) - 1$.

Algoritm generic divide-et-impera de căutare

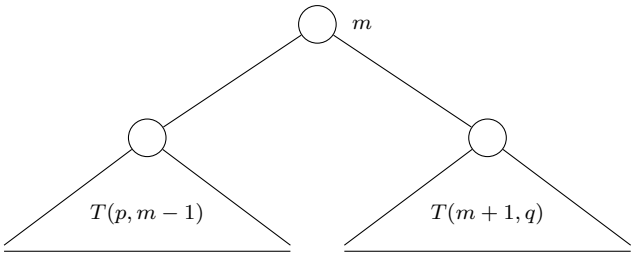
```
pos(s, n, a) {
  p = 0; q = n - 1;
  2: alege m între p şi q
  while ( (a != s[m]) && (p < q)) {
    if (a < s[m]) q = m -1; else  p = m + 1;
    5: alege m între p şi q
  }
  if (a == s[m]) return m; else return -1;
}
```

Algoritmi reprezentaţi ca arbori de decizie (pentru căutare)

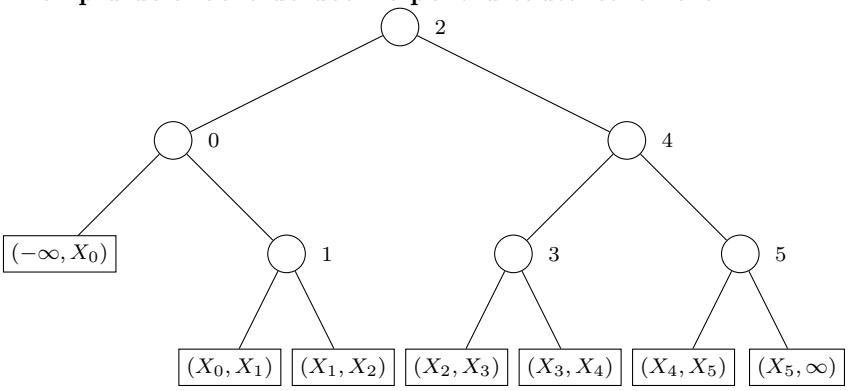
Definition
Arborele de decizie pentru căutare de dimensiune n ataşat unui algoritm bazat pe metoda divide-et-impera este definit după cum urmează:

- Mai întâi se defineşte recursiv arborele $T(p, q)$ astfel:
  - dacă $p > q$ atunci $T(p, q)$ este arborele vid;
  - altfel, rădăcina este m calculat de instrucţiunea 2 sau 5, iar subarborele stâng este $T(p, m-1)$ şi cel drept este $T(m+1, q)$.
- Arborele de decizie pentru căutare de dimensiune n este $T(0, n-1)$ la care se adaugă vârfurile externe având ca etichete intervalele $(-\infty, X_0), (X_0, X_1), \ldots, (X_{n-1}, +\infty)$ în această ordine de la stânga la dreapta, unde $X_0, \ldots, X_{n-1}$ sunt n variabile.

$T(p, q)$ **grafic**



Exemplu de arbore de decizie pentru căutarea binară



Algoritmi reprezentaţi ca arbori de decizie (pentru căutare)

Definition
Calculul unui arbore de decizie pentru intrarea $x_0, \ldots, x_{n-1}, a$, unde $x_0 < \cdots < x_{n-1}$, constă în:

1. etichetarea nodurilor interne cu $x_0, \ldots, x_{n-1}$ astfel încât lista inordine ne dă ordinea crescătoare a etichetelor, şi
2. parcurgerea unui drum de la rădăcină spre frontieră determinat astfel: dacă vârful curent v este etichetat cu x_m (reamintim că m este dat de instrucţiunea 2 sau 5 din schema procedurală divide-et-impera) atunci:
   (a) dacă v este vârf extern etichetat cu (X_i, X_{i+1}) atunci $a \in (x_i, x_{i+1})$ (variabila X_i este interpretată ca având valoarea x_i) şi calculul se **termină cu insucces**;
   (b) dacă $a = x_m$ atunci calculul se **termină cu succes**;
   (c) dacă $a < x_m$ atunci rădăcina subarborelui stâng devine vârf curent;
   (d) dacă $a > x_m$ atunci rădăcina subarborelui drept devine vârf curent.

Cazul particular al căutării binare

Lemma
Fie t arborele de decizie pentru căutare cu n vârfuri corespunzător căutării binare. Dacă $2^{h-1} \leq n < 2^h$, atunci înălţimea lui t este h.

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după n. Dacă $n = 1$, atunci sfirmaţia din lemă este evident adevărată. Presupunem $n > 1$. Valoarea m corespunzătoare rădăcinii este $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Din definiţia părţii întregi superioare rezultă următoarele inegalităţi:

$$2^{h-2} \leq m < 2^{h-1} + 1. \tag{1}$$

Subarborii rădăcinii au m şi respectiv $n-m-1$ vârfuri astfel încât $m-1 \leq n-m-1 \leq m$. Dacă $m = n-m-1$, atunci $m = \frac{n-1}{2}$. Deoarece $n \leq 2^h - 1$, rezultă că $m \leq 2^{h-1} - 1 < 2^{h-1}$. Dacă $m-1 = n-m-1$, atunci $m = \frac{n}{2} < 2^{h-1}$. Rezultă $m < 2^{h-1}$ în toate cazurile. Aplicând ipoteza inductivă, rezultă că subarborele cel mai înalt (cel cu m vârfuri şi aflat la stânga rădăcinii) are înălţimea $h-1$. Din definiţia înălţimii arborelui binar, rezultă că înălţimea lui t este h. sfdem

Corollary
Timpul de execuţie pentru cazul cel mai nefavorabil al căutării binare este $O(\log_2 n)$.

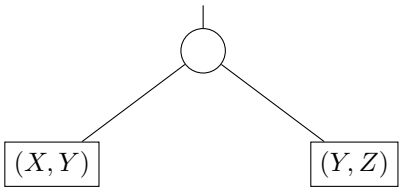
Proprietăţi ale arborilor de decizie pentru căutare

Definition
Fie t un arbore de decizie pentru căutare. **Lungimea internă** a lui t, notată IntLength(t), este suma lungimilor drumurilor de la rădăcină la vârfurile interne. **Lungimea externă** a lui t, notată ExtLength(t), este suma lungimilor drumurilor de la rădăcină la vârfurile de pe frontieră (pendante).

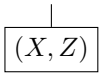
Lemma
Fie t un arbore de decizie pentru căutare cu n vârfuri interne. Atunci:

$$\text{ExtLength}(t) - \text{IntLength}(t) = 2n.$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ avem IntLength(t) = 0 şi ExtLength(t) = 2. Presupunem $n > 1$. Fie i un vârf intern cu ambii fii pe frontieră. Înlocuim subarborele:



cu subarborele:



Noul arbore t' este un arbore de decizie cu $n-1$ vârfuri interne şi conform ipotezei inductive avem

$$\text{ExtLength}(t') - \text{IntLength}(t') = 2(n-1).$$

Deoarece $\text{ExtLength}(t) = \text{ExtLength}(t')+k+2$ şi $\text{IntLength}(t) = \text{IntLength}(t')+k$, unde k este lungimea drumului de la rădăcină la i, rezultă:

$$\begin{aligned} \text{ExtLength}(t) - \text{IntLength}(t) &= \text{ExtLength}(t') + k + 2 - (\text{IntLength}(t') + k) \\ &= 2n - 2 + k + 2 - k \\ &= 2n. \end{aligned}$$

sfdem

Lemma
Lungimea internă minimă a unui arbore de decizie cu n vârfuri interne este:

$$(n+1)(h-1) - 2^h + 2$$

unde $h = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Demonstraţie. Considerăm formula:

$$x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1} - x}{x-1}.$$

Derivăm:

$$1 + 2x + \cdots + kx^{k-1} = \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2}.$$

Înmulţim cu x:

$$x + 2x^2 + \cdots + kx^k = x \cdot \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2}.$$

Luăm $k = h-1$ şi $x = 2$:

$$2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (h-1) \cdot 2^{h-1} = 2^h(h-2) + 2.$$

Lungimea internă minimă a unui arbore de decizie este suma primilor n termeni din seria:

$$0+1+1+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3+3+\cdots$$

şi corespunde arborelui binar complet. Dacă presupunem $n+1 = 2^h$ atunci această sumă este egală cu:

$$2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (h-1)2^{h-1} = 2^h(h-2) + 2.$$

Pentru cazul general trebuie să scădem suma drumurilor care unesc rădăcina cu vârfurile de pe nivelul h care lipsesc:

$$2^h(h-2) + 2 - (2^h - 1 - n)(h-1) = (n+1)(h-1) - 2^h + 2.$$

sfdem

Corollary
Lungimea externă minimă a unui arbore de decizie este

$$(n+1)(h+1) - 2^h.$$

Complexitatea căutării

Theorem
Problema căutării are timpul de execuţie în cazul cel mai nefavorabil $\Omega(\log n)$ în modelul arborilor de decizie pentru căutare.

Demonstraţie. Arborele binar cu lungimea internă minimă considerat în lema 43 are şi înălţime minimă. Acum concluzia teoremei rezultă din faptul că $2^{h-1} \leq n < 2^h$, unde n este numărul de noduri iar h este înălţimea arborelui. sfdem

Corollary
Căutarea binară este optimă în modelul arborilor de decizie pentru căutare.

Demonstraţie. Se observă că arborele de decizie asociat căutării binare are lungimea externă minimă. sfdem

5 Reducerea polinomială a problemelor computaţionale

Motivaţie
Mentalitate: "Dacă ştiu să rezolv problema Q, pot utiliza acel algoritm să rezolv P?"

Intuitiv: Problema P se reduce la Q dacă un algoritm care rezolvă Q poate ajuta la rezolvarea lui P.

Aplicaţii:

- proiectarea de algoritmi
- demonstrarea limitelor: daca P este dificilă atunci şi Q este dificilă
- clasificarea problemelor

Reducerea Turing/Cook
Problema P se reduce polinomial la problema (rezolvabilă) Q, notăm $P \propto Q$, dacă se poate construi un algoritm care rezolvă P după următoarea schemă:

1. se consideră la intrare o instanţă p a lui P;
2. preprocesează în timp polinomial intrarea p
3. se apelează algoritmul pentru Q, posibil de mai multe ori (un număr polinomial)
4. se postprocesează rezultatul dat de Q în timp polinomial

Dacă paşii de preprocesare şi postprocesare necesită $O(g(n))$ timp, atunci scriem $P \propto_{g(n)} Q$.

Exemplu: MAX $\propto$ SORT
Fie MAX problema determinării elementului maxim dintr-o mulţime:

Input	O mulţime S total ordonată.
Output	Cel mai mare element din S.

Următorul algoritm rezolvă MAX:

1. reprezintă S cu un tablou s (preprocesare);
2. apelează un algoritm de sortare pentru s;
3. întoarce ultimul element din s (postprocesarea);

Deoarece algoritmul de mai sus este mai complex decât algoritmul care determină maximul enumerând toate elementele din S, rezultă că $\propto$ nu este întotdeauna o "reducere de la o problemă mai complexă la una mai simplă". De aceea termenul de *"transformare"* este mai potrivit. Menţinem totuşi şi termenul de reducere pentru că aşa este cunoscut în literatură.

Variante pentru submulţimea de sumă dată

SSD1	
Input	O mulţime S de numere întregi, M număr întreg pozitiv.
Output	Cel mai mare număr întreg M^* cu proprietăţile $M^* \leq M$ şi există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M^*$.
SSD2	
Instance	O mulţime S de numere întregi, M, K două numere întregi pozitive cu $K \leq M$.
Question	Există număr întreg M° cu proprietăţile $K \leq M^\circ \leq M$ şi $\sum_{x \in S'} x = M^\circ$ pentru o o submulţime oarecare $S' \subseteq S$?
SSD3	
Instance	O mulţime S de numere întregi, M un număr întreg pozitiv.
Question	Există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M$?

Exemplu: SSD1 $\propto$ SSD2

SSD1	
Input	O mulţime S de numere întregi, M număr întreg pozitiv.
Output	Cel mai mare număr întreg M^* cu proprietăţile $M^* \leq M$ şi există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M^*$.
SSD2	
Instance	O mulţime S de numere întregi, M, K două numere întregi pozitive cu $K \leq M$.
Question	Există număr întreg M° cu proprietăţile $K \leq M^\circ \leq M$ şi $\sum_{x \in S'} x = M^\circ$ pentru o o submulţime oarecare $S' \subseteq S$?

1. nu există preprocesare;
2. caută binar pe M^* în intervalul $(0, M]$ apelând un algoritm care rezolvă SSD2;

Acesta este un exemplu de reducerea unei probleme de optim la versiunea ei ca problemă de decizie.

Exemplu: SSD2 $\propto$ SSD1

SSD1
Input O mulţime S de numere întregi, M număr întreg pozitiv.
Output Cel mai mare număr întreg M^* cu proprietăţile $M^* \leq M$ şi există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M^*$.

SSD2
Instance O mulţime S de numere întregi, M, K două numere întregi pozitive cu $K < M$.
Question Există număr întreg M° cu proprietăţile $K \leq M^\circ \leq M$ şi $\sum_{x \in S'} x = M^\circ$ pentru o o submulţime oarecare $S' \subseteq S$?

1. nu există preprocesare;
2. calculează $M^* \leq M$ apelând un algoritm care rezolvă SSD1;
3. dacă $M^* \geq K$ întoarce 'DA', altfel întoarce 'NU';

Exemplu: SSD3 $\propto$ SSD1

SSD1
Input O mulţime S de numere întregi, M număr întreg pozitiv.
Output Cel mai mare număr întreg M^* cu proprietăţile $M^* \leq M$ şi există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M^*$.

SSD3
Instance O mulţime S de numere întregi, M un număr întreg pozitiv.
Question Există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M$?

1. nu există preprocesare;
2. calculează $M^* \leq M$ apelând un algoritm care rezolvă SSD1;
3. dacă $M^* = M$ întoarce 'DA', altfel întoarce 'NU';

Reducerea Karp
Se consideră P şi Q probleme de decizie.
Problema P se reduce polinomial la problema (rezolvabilă) Q, notăm $P \propto Q$, dacă se poate construi un algoritm care rezolvă P după următoarea schemă

1. se consideră la intrare o instanţă p a lui P;
2. preprocesează în timp polinomial intrarea p
3. se apelează (o singură dată) algoritmul pentru Q
4. răspunsul pentru Q este acelaşi cu cel al lui P (fără postprocesare)

Dacă pasul de preprocesare necesită $O(g(n))$ timp, atunci scriem $P \propto_{g(n)} Q$.

Reducerea Karp este un caz particular de reducere Turing/Cook.

Exemplu: SSD3 $\propto$ SSD2

SSD2
Instance O mulţime S de numere întregi, M, K două numere întregi pozitive cu $K \leq M$.
Question Există număr întreg M° cu proprietăţile $K \leq M^\circ \leq M$ şi $\sum_{x \in S'} x = M^\circ$ pentru o o submulţime oarecare $S' \subseteq S$?

SSD3
Instance O mulţime S de numere întregi, M un număr întreg pozitiv.
Question Există o submulţime $S' \subseteq S$ cu $\sum_{x \in S'} x = M$?

1. nu există preprocesare;
2. apelează un algoritm care rezolvă SSD2 pentru instanţa S, M, M;

Exemplu: 3-SUM $\propto$ 3-COLLINEAR

3-SUM
Instanţă O mulţime de n întregi.
Întrebare Există 3 numere a căror sumă este 0?

3-COLLINEAR
Instanţă O mulţime cu n puncte în plan.
Întrebare Există 3 puncte coliniare (pe aceeaşi linie)?

3-SUM $\propto$ 3-COLLINEAR:

1. se consideră la intrare o instanţă $S = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ a lui 3-SUM;
2. calculează $t(S) = \{(a_0, a_0^3), (a_1, a_1^3), \ldots, (a_{n-1}, a_{n-1}^3)\}$
3. întoarce rezultatul întors de un algoritm care rezolvă 3-COLLINEAR pentru instanţa $t(S)$.

Lemma 1. *Dacă a, b, c sunt distincte, atunci $a+b+c = 0$ ddacă (a, a^3), (b, b^3) şi (c, c^3) sunt coliniare.*

Reducerea: proprietăţi

Theorem
a) Dacă P are complexitatea timp $\Omega(f(n))$ şi $P \propto_{g(n)} Q$ (versiunea Karp) atunci Q are complexitatea timp $\Omega(f(n) - g(n))$.[2ex] b) Dacă Q are complexitatea $O(f(n))$ şi $P \propto_{g(n)} Q$ (versiunea Karp) atunci P are complexitatea $O(f(n) + g(n))$.