Cursul 8

Forme liniare, biliniare şi pătratice

Funcţionale liniare

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K.

Definiţia 8.1 *O aplicaţie liniară $f : V \to K$ se numeşte* ***formă liniară*** *(sau* ***funcţională liniară****) pe V. Vom nota cu $\mathcal{L}(V; K)$, mulţimea aplicaţiilor liniare $f : V \to K$. Când $K = \mathbb{R}$, elementul $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ se numeşte* ***formă (funcţională) liniară reală****.*

Definiţia 8.2 *Mulţimea $\mathcal{L}(V; K)$, privită ca spaţiu liniar peste K - în raport cu operaţia de adunare uzuală a două funcţii şi operaţia de înmulţire a unei funcţii cu un element din K - se numeşte* ***spaţiu dual*** *(sau* ***spaţiul conjugat****) al lui V, şi se notează cu V^*.*

Propoziţia 8.3 *Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K.*

Dacă V este finit dimensional, atunci şi spaţiul dual, V^*, este finit dimensional. În acest caz, avem

$$dim(V^*) = dim(V) \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziţia 8.4 *Fie V este spaţiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ K. Dacă $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(\mathrm{v}) \neq 0 \in K$.*

Din punct de vedere geometric, nucleul unei funcţionale nenule şi liniare pe un spaţiu vectorial V este un aşa-numit ***hiperplan***, adică un subspaţiu propriu, maximal al lui V.

Când $dim(V) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, deoarece $dim(Im(f)) = 1$, $\forall f \in V^*$, avem $dim(Ker(f)) = dim(V) - dim(Im(f)) = n - 1$. În acest caz, în raport cu o bază $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ din V, mulţimea $Ker(f)$, adică hiperplanul în cauză, este

$$Ker(f) = \{\mathrm{x} \in V \mid f(\mathrm{x}) = 0\} = \left\{\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathrm{b}_i) = 0\right\}.$$

Notând $f(\mathrm{b}_i)$ cu a_i, $\forall i = \overline{1, n}$, se poate spune că acest hiperplan este caracterizat de ***ecuaţia***

$$(*) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^3$, ecuaţia $(*)$ caracterizează un ***plan ce trece prin punctul*** $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ (originea lui $\mathbb{R}^3$). În cazul în care $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$, hiperplanul definit de ecuaţia $(*)$ reprezintă o ***dreaptă ce trece prin originea planului real*** $\mathbb{R}^2$.

Mai general, se poate arăta că orice subspaţiu liniar al unui spaţiu vectorial finit dimensional, se caracterizează prin sisteme de ecuaţii de forma $(*)$.

În aceeaşi notă de generalitate, când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$ sau $V = \mathbb{R}^3$, o dreaptă şi, respectiv, un plan care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ şi respectiv prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ sunt, din punct de vedere algebric, nuclee ale unor aşa-numite ***funcţionale afine***, generic introduse prin definiţia ce urmează:

Definiţia 8.5 *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K, $c_0 \in K$, $f \in V^*$ şi fie $f_0 : V \to K$, definită prin $f_0(\mathrm{v}) = c_0$, $\forall \mathrm{v} \in V$. Atunci suma $f + f_0$ se numeşte* ***funcţională afină*** *pe V.*

Altfel spus, o funcţională afină pe un spaţiu liniar V este suma dintre o funcţională liniară pe V (anume f) şi o funcţională constantă pe V (adică f_0).

Dacă V este n-dimensional ($n \in \mathbb{N}^*$), cu o bază $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$, atunci:

$$Ker(f + f_0) = \left\{ \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i \in V \mid (f + f_0)(\mathrm{v}) = 0 \right\} = \left\{ \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i \in V \mid \sum_{i=1}^{n} v_i f(\mathrm{b}_i) + c_0 = 0 \right\}.$$

Dacă notăm cu $f(\mathrm{b}_i) = a_i$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, atunci mulţimea $Ker(f + f_0)$ este caracterizată de ecuaţia:

$$(**) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + c_0 = 0.$$

Aceasta corespunde unei ***drepte reale*** când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$, sau unui ***plan*** (care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$) când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^3$, sau, în general, când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^n$, unui ***hiperplan real***.

Forme biliniare

Definiţia 8.6 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp comutativ K.*
O aplicaţie $g : V \times W \to K$ care satisface relaţiile:

(i) $g(\alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{u}, \mathrm{w}) = \alpha g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \beta g(\mathrm{u}, \mathrm{w})$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\mathrm{w} \in W$ *şi*

(ii) $g(\mathrm{v}, \lambda \mathrm{w} + \mu \mathrm{z}) = \lambda g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \mu g(\mathrm{v}, \mathrm{z})$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{w}, \mathrm{z} \in W$

*se numeşte **formă (sau funcţională) biliniară** pe $V \times W$.*

Atunci când $W \equiv V$, aplicaţia $g : V \times V \to K$ care satisface (i) şi (ii) se numeşte ***formă*** (***funcţională***) ***biliniară*** pe V.

Dacă V şi W sunt spaţii finit dimensionale, cu bazele $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ şi respectiv $\widehat{B} = \{\widehat{\mathrm{b}}_1, \widehat{\mathrm{b}}_2, \ldots, \widehat{\mathrm{b}}_m\}$, atunci:

$$g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i, \sum_{j=1}^{m} w_j \widehat{\mathrm{b}}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_i w_j g(\mathrm{b}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j), \forall\, \mathrm{v} \in V, \mathrm{w} \in W,$$

unde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ sunt coordonatele lui v în baza B (din V), iar $w_1, w_2, \ldots, w_m \in K$ sunt coordonatele lui w în baza $\widehat{B}$ (din W). Scalarii $a_{ij} = g(\mathrm{b}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j)$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ se numesc ***coeficienţi ai formei biliniare*** g în raport cu perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar matricea acestor coeficienţi este numită ***matricea formei biliniare*** g în cuplul de baze $(B, \widehat{B})$.

Dacă B' şi $\widehat{B}'$ sunt alte baze în V şi respectiv W, iar S şi respectiv $\widehat{S}$ sunt matricile de trecere de la B la B' şi respectiv de la $\widehat{B}$ la $\widehat{B}'$, atunci matricea $A_{B'\widehat{B}'}$, corespunzătoare formei biliniare g în raport cu perechea de baze $(B', \widehat{B}')$ este dată de formula

$$A_{B'\widehat{B}'} = S^T A_{B\widehat{B}} \widehat{S} \tag{1}$$

unde $A_{B\widehat{B}}$ reprezintă matricea formei biliniare g în perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar S^T este transpusa matricii S.

Aplicaţia biliniară $g : V \times W \to K$ defineşte, în raport cu parametrul $\mathrm{w} \in W$, o familie de funcţii liniare $f_{\mathrm{w}} : V \to K$, date prin $f_{\mathrm{w}}(\mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$, precum şi o familie de funcţii liniare $h_{\mathrm{v}} : W \to K$, depinzând de parametrul $\mathrm{v} \in V$, introduse prin formula $h_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{w} \in W$.

Atunci, aplicaţia $\mathrm{w} \to f_{\mathrm{w}}$ este un morfism de la spaţiul liniar W la dualul V^* al lui V. Prin acest morfism, fiecărui element $w \in W$ îi corespunde forma liniară $g'(\mathrm{w}) = f_{\mathrm{w}} \in \mathcal{L}(V, K) = V^*$. De asemenea, aplicaţia $g'' : V \to W^* = \mathcal{L}(W, K)$, definită prin $g''(\mathrm{v}) = h_{\mathrm{v}}$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$ este un morfism de spaţii liniare.

Definiţia 8.7 *Fie $g : V \times W \to K$ o aplicaţie biliniară pe $V \times W$ şi fie g' şi g'' morfismele liniare derivate.*

*a) Subspaţiul liniar $Ker(g')$ (al lui W) se numeşte **nucleul** lui g **la dreapta**, iar subspaţiul liniar $Ker(g'')$, se numeşte **nucleul la stânga** al lui g.*

*b) Dacă $Ker(g') = \{\mathbf{0}_W\}$ şi $Ker(g'') = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci forma biliniară g se numeşte **nedegenerată**.*

Definiţia 8.8 *i) Spunem că o formă biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte **simetrică** dacă*

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{u}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$$

*ii) Spunem că o formă biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte **antisimetrică** dacă*

$$g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -g(\mathrm{v}, \mathrm{u}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Propoziţia 8.9 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară simetrică (sau antisimetrică) pe V, atunci nucleul său la stânga coincide cu nucleul său la dreapta.*

*În acest caz, oricare dintre nucleele coincidente (fie cel la stânga, fie cel la dreapta) se numeşte, pur şi simplu, **nucleul lui** g şi se notează cu simbolul $Ker(g)$.*

Demonstraţie: Pentru orice $\mathrm{v} \in Ker(g') = \{\mathrm{y} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{x} \in V\}$, avem $g(\mathrm{x}, \mathrm{v}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$. Dar cum g este simetrică (sau antisimetrică), rezultă că avem $g(\mathrm{v}, \mathrm{x}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{v} \in Ker(g'') = \{\mathrm{x} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{y} \in V\}$. Prin urmare, $Ker(g') \subseteq Ker(g'')$. Incluziunea contrară se demonstrează utilizând acelaşi raţionament. Prin urmare, vom avea: $Ker(g') = Ker(g'')$. ◄

Propoziţia 8.10 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul vectorial V, finit dimensional, peste corpul K, atunci*

$$rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V),$$

*unde $rang(g)$ este **rangul matricii asociate lui** g **în raport cu o bază** B **din** V.*

Demonstraţie: Fie $n = dim(V)$ şi $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ o bază a lui V, în care matricea lui g este $A = (g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$. Atunci, pentru orice $x, y \in V$, cu $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{v}_i$ şi $\mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{v}_i$, avem:

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j, \text{ unde } a_{ij} = g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j), \forall\, 1 \le i, j \le n.$$

Cum $Ker(g) = \{\mathrm{x} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{y} \in V\}$ iar $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) y_j$, putem spune că $\mathrm{x} \in Ker(g)$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0$, $\forall\, j = \overline{1, n}$, adică dacă x este o soluţie a acestui sistem de ecuaţii omogene.

Prin urmare, $Ker(g)$ coincide cu mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem, relativ la care se ştie că rangul matricii sale, adică $rang(g)$, este egal cu diferenţa dintre numărul necunoscutelor şi dimensiunea spaţiului soluţiilor. Aşadar, avem: $rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V)$. ◄

Observaţie: Conform Propoziţiei 8.10, putem afirma că o condiţie necesară şi suficientă ca o formă biliniară şi simetrică $g : V \times V \to K$ să fie nedegenerată este ca rangul ei să fie maxim, adică egal cu $dim(V)$.

Definiţia 8.11 *Fie V un K-spaţiu vectorial şi fie $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V.*

a) Spunem că doi vectori u *şi* v *din V se numesc **ortogonali** (sau **conjugaţi**) în raport cu g dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 0$.*

*b) Dacă U este un subspaţiu liniar al lui V, atunci mulţimea $\{\mathrm{y} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{x} \in U\}$ este un subspaţiu vectorial al lui V, ce se numeşte **complementul ortogonal al lui** U **faţă de** g şi se notează cu $U^{\perp_g}$.*

Observaţie: Dacă spaţiul vectorial V este finit dimensional şi $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_p\}$ este o bază a subspaţiului liniar $U \subseteq V$, atunci $\mathrm{y} \in U^{\perp_g}$ dacă şi numai dacă $g(\mathrm{u}_l, \mathrm{y}) = 0$, $\forall\, l = \overline{1, p}$.

Teorema 8.12 *Fie V un K-spaţiu vectorial finit dimensional şi fie $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V. Atunci, oricare ar fi baza $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g (aşa încât $g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j) = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$), exact un număr egal cu $rang(g)$ dintre scalarii $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), ..., g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt diferiţi de zero.*

Demonstraţie: Fie $r = rang(g)$ şi fie s numărul scalarilor $g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i)$ diferiţi de 0. Astfel, $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1) \neq 0$, $g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2) \neq 0, \ldots, g(\mathrm{b}_s, \mathrm{b}_s) \neq 0$ şi $g(\mathrm{b}_j, \mathrm{b}_j) = 0$, $\forall\, j = \overline{s+1, n}$. Atunci:

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \in Ker(g) \Longleftrightarrow g(\mathrm{b}_i, \mathrm{x}) = x_i g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i) = 0, \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Deci $Ker(g) = \left\{ \mathrm{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0 \right\}$ şi, în consecinţă,

$$dim(Ker(g)) = dim(V) - rang(g) = n - r.$$

Aşadar, rezultă că avem: $n - s = n - r$. De aici, găsim: $s = r$. ◀

Când $K = \mathbb{R}$, se poate spune chiar mai mult despre g decât în Teorema 8.12 şi anume:

Teorema 8.13 ***(Teorema inerţiei a lui Sylvester)***
Fie V un spaţiu vectorial real şi fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi simetrică pe V, nedegenerată. Atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât, dacă $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a spaţiului finit dimensional V, ortogonală faţă de g, exact p dintre numerele $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt pozitive iar $q = n - p$ dintre ele sunt negative.

Demonstraţie: Fie $c_i = g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i)$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. După o eventuală renumerotare a elementelor bazei, putem zice că avem $c_1, c_2, \ldots, c_p > 0$ şi $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n < 0$.

Considerăm o altă bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g, în raport cu care avem $d_i = g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i)$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ astfel încât $d_1, d_2, \ldots, d_l > 0$ şi $d_{l+1}, d_{l+2}, \ldots, d_n < 0$. Arătăm că vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt liniar independenţi în V. Aşadar, presupunând că avem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_{l+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ aşa ca

$$\alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots \alpha_p \mathrm{b}_p + \beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n = \mathbf{0}_V,$$

putem scrie: $\mathrm{w} = \alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathrm{b}_p = -(\beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n)$. Calculând $g(\mathrm{w}, \mathrm{w})$, obţinem, pe de o parte, $c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2$ şi, pe de alta, $d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2$, adică

$$0 \leq c_1 \alpha_1^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2 = d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2 \leq 0,$$

ceea ce nu este posibil decât dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_{l+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Prin urmare, vectorii $\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt liniar independenţi.

În consecinţă, avem $p + n - l \leq n$, adică $p \leq l$. Similar, avem şi relaţia reciprocă. Aşadar, vom obţine $p = l$. Deci p este un invariant al lui g (indiferent de baza lui V). ◀

Observaţie: Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul liniar real, finit dimensional, V, atunci, pentru orice bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g, numărul elementelor pozitive, numărul elementelor nule şi cel al elementelor negative din şirul $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2)$, $g(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_3), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt mereu aceleaşi, invariabile în raport cu baza considerată.

Definiţia 8.14 *Tripletul (p, q, r), în care numărul natural p este egal cu numărul elementelor pozitive din suita $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$, q este numărul elementelor negative din aceeaşi suită, iar r (adică $n - p - q$) este numărul elementelor egale cu zero din respectivul şir, se numeşte **signatura lui** g.*

Forme şi funcţii pătratice

Definiţia 8.15 *Fie V spaţiu vectorial peste corpul comutativ K şi fie $g : V \times V \to K$ o funcţie biliniară şi simetrică. Funcţia $h : V \to K$, definită prin*

$$h(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}, \mathrm{x}), \ \forall\, \mathrm{x} \in V, \tag{2}$$

*se numeşte **formă (funcţională) pătratică** pe V, asociată formei biliniare g. Funcţia h, dată de (2), este restricţia lui g la mulţimea $\{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in V\} \subseteq V \times V$.*

Observaţie: Deoarece

$$h(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = g(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{x}+\mathrm{y}) = g(\mathrm{x},\mathrm{x}) + g(\mathrm{x},\mathrm{y}) + g(\mathrm{y},\mathrm{x}) + g(\mathrm{y},\mathrm{y})$$

şi $g(\mathrm{x},\mathrm{y}) = g(\mathrm{y},\mathrm{x})$, avem

$$h(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = h(\mathrm{x}) + 2g(\mathrm{x},\mathrm{y}) + h(\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in V,$$

de unde deducem formula:

$$g(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{2}\left[h(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - h(\mathrm{x}) - h(\mathrm{y})\right], \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in V. \tag{3}$$

Aşadar, dacă ştim forma pătratică h pe V, atunci, în baza relaţiei (3), putem determina forma biliniară şi simetrică g, asociată lui h, pe V.

Dacă $dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$ şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci matricea asociată lui g în raport cu B este, de fapt, şi matricea asociată lui h. Funcţia polinomială şi omogenă, de gradul 2, $h(\mathrm{x})$, definită prin

$$h(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \text{ pentru } \mathrm{x} = \sum_{i=1} x_i \mathrm{b}_i,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ este matricea asociată lui $h(\mathrm{x})$, se numeşte ***expresie a formei pătratice*** h. Scalarii a_{ij}, verificând relaţia de simetrie $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i,j = \overline{1,n}$, se numesc ***coeficienţi ai lui*** h ***în baza*** B. Determinantul matricii $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ se numeşte ***discriminantul*** formei pătratice h.

Ţinând cont de formula (2), putem spune că, şi în cazul formei h, matricea sa asociată într-o bază B' a lui V, notată cu $A_{B'}$, este dată de

$$A_{B'} = S^T A_B S, \tag{4}$$

unde A_B este matricea asociată formei h în baza B, S este matricea de trecere de la B la B', iar S^T este transpusa matricii S.

În virtutea legăturii dintre h şi g, se poate spune că h este o ***formă pătratică nedegenerată*** dacă şi numai dacă g este nedegenerată, adică dacă $det(A) \neq 0$, unde A este matricea asociată lui g şi respectiv lui h. Altfel, spunem că h este o ***forma pătratică degenerată***.

Definiţia 8.16 *Se numeşte* ***formă canonică (redusă)*** *a funcţiei pătratice h acea expresie în care, în raport cu o anumită bază a lui V, matricea asociată are formă diagonală.*

Forma canonică a lui h este numită ***normală*** *atunci când matricea (diagonală) asociată lui h conţine, pe diagonala numai elementele 0, 1 şi -1 (din K).*

Teorema 8.17 ***(Metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la expresia ei redusă)***

Fie V un spaţiu liniar real, n-dimensional şi fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V şi scalarii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$, aşa încât, pentru orice $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \in V$, avem:

$$h(\mathrm{x}) = \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2.$$

Demonstraţie: Fie $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ o bază oarecare a lui V, faţă de care expresia lui $h(\mathrm{x})$ este $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$, unde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ sunt coordonatele lui x în raport cu această bază, iar a_{ij} sunt coeficienţii din $\mathbb{R}$ ai lui h relativ la baza respectivă. Pentru reducerea formei $h(\mathrm{x})$ la doar o sumă algebrică de pătrate ale coordonatelor lui x într-o altă anumită bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, căutăm dacă cel puţin unul dintre coeficienţii a_{ii}, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, este diferit de zero. Dacă acest lucru nu are loc din start, iar h nu este o formă identic nulă, atunci expresia lui h are cel puţin un termen $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ cu $a_{ij} \neq 0$.

Efectuând transformarea de bază ce corespunde schimbării de coordonate următoare

$$\tilde{x}_1 = \hat{x}_1, \tilde{x}_2 = \hat{x}_2, ..., \tilde{x}_{i-1} = \hat{x}_{i-1}, \tilde{x}_i = \hat{x}_i + \hat{x}_j, \tilde{x}_{i+1} = \hat{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_{j-1} = \hat{x}_{j-1}, \tilde{x}_j = \hat{x}_i - \hat{x}_j, \tilde{x}_{j+1} = \hat{x}_{j+1}, ..., \tilde{x}_n = \hat{x}_n$$

termenul $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ devine $2a_{ij}\left(\hat{x}_i^2 - \hat{x}_j^2\right)$ şi, astfel, de exemplu, coeficientul lui $\hat{x}_i^2$ este nenul.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea că, în expresia lui h, $a_{11} \neq 0$. Aşadar, vom considera suma tuturor acelor termeni (din h) care îl conţin pe $\tilde{x}_1$. Completăm această sumă până la un pătrat perfect, aşa încât expresia lui h să se redea sub forma

$$\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2 + \cdots,$$

în care termenii din zona "..." conţin numai coordonatele $x_2, \ldots, x_n$ ale lui x în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$.

Expresia sumei din zona "..." este similară aceleia din start, cu diferenţa că ea nu mai conţine deloc pe $\tilde{x}_1$. Repetând asupra ei raţionamentul de până aici, obţinem:

$$h(\mathrm{x}) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2 + \frac{1}{a_{22}^*}\left(a_{22}^*\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}^*\tilde{x}_n\right)^2 + \cdots$$

Mai departe, prin continuarea unui asemenea proces de calcul, se ajunge, după un număr finit de paşi, la expresia dorită a lui $h(\mathrm{x})$, adică la $\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \cdots + \omega_n x_n^2$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt noile coordonate ale lui x, iar $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sunt noii coeficienţi ai lui h într-o bază ce corespunde schimbării de coordonate guvernată de relaţiile

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n \\ x_2 &= a_{22}^*\tilde{x}_2 + a_{23}^*\tilde{x}_3 + \cdots + a_{2n}^*\tilde{x}_n \\ & \vdots \\ x_m &= \overline{a}_{mm}\tilde{x}_m + \cdots + \overline{a}_{mn}\tilde{x}_n, \end{cases}$$

în care $1 \leq m \leq n$. ◀

Observaţie: Pe baza Teoremei 8.13, se poate spune că, dacă (p, q, r) este signatura formei biliniare g şi, implicit, a formei pătratice h, asociată lui g, exact p dintre coeficienţii formei canonice obţinută prin Teorema 8.17 sunt pozitivi, q sunt negativi şi r sunt egali cu zero. Şi acest lucru se produce în raport cu baza faţă de care h are formă redusă în V.

Teorema 8.18 ***(Metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice la forma canonică)***

Fie V un spaţiu liniar real, finit dimensional ($\dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$) şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de expresie $h(\mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, în raport cu o bază a lui V în care x are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă toţi minorii principali ai matricii asociate $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ sunt nenuli, adică dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix},$$

atunci există o bază $B' = \{\mathrm{b}_1', \mathrm{b}_2', \ldots, \mathrm{b}_n'\}$ a spaţiului V aşa încât

$$h(\mathrm{x}) = \mu_1\check{x}_1^2 + \mu_2\check{x}_2^2 + \cdots + \mu_n\check{x}_n^2,$$

unde $\mu_j = \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, cu $\Delta_0 = 1$ şi $\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots, \check{x}_n$ sunt coordonatele lui x în baza B'.

Demonstraţie: Plecând de la baza $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, considerăm vectorii $\mathrm{b}_1', \mathrm{b}_2', \ldots, \mathrm{b}_n'$, unde

$$\begin{cases} \mathrm{b}_1' &= s_{11}\mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2' &= s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 \\ & \vdots \\ \mathrm{b}_n' &= s_{n1}\mathrm{b}_1 + s_{n2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{nn}\mathrm{b}_n, \end{cases}$$

cu $s_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq j \leq i \leq n$, astfel încât

$$(\diamondsuit) \quad \begin{cases} g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_j) = 0, & \text{dacă } 1 \leq j < i \leq n \text{ şi} \\ g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_i) = 1, & \text{dacă } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Condiţiile $(\diamondsuit)$ determină în mod unic elementele matricii $S = (s_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}$, în ipotezele din enunţul prezentei teoreme. Aceasta întrucât, de exemplu, pentru obţinerea lui b'_i, avem de rezolvat sistemul algebric liniar

$$(\bullet) \quad \begin{cases} a_{11}s_{i1} + a_{12}s_{i2} + \cdots + a_{1i}s_{ii} & = & 0 \\ a_{21}s_{i1} + a_{22}s_{i2} + \cdots + a_{2i}s_{ii} & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{i-1,1}s_{i1} + a_{i-1,2}s_{i2} + \cdots + a_{i-1,i}s_{ii} & = & 0 \\ a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \cdots + a_{ii}s_{ii} & = & 1 \end{cases}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$. Deci sistemul $(\bullet)$ este compatibil determinat, având o soluţie unică, ce se poate obţine prin regula lui Kramer.

După găsirea tuturor vectorilor $\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n$, se poate arăta că ei alcătuiesc o bază în V, bază în raport cu care matricea asociată lui h este una de formă diagonală, cu elementele $\dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$ şi $\Delta_0 = 1$, pe respectiva diagonală.

Într-adevăr, pe baza condiţiilor $(\diamondsuit)$ şi ţinând cont de simetria lui g, avem:

$$g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_j) = g(\mathrm{b}'_i, s_{j1}\mathrm{b}_1 + s_{j2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{jj}\mathrm{b}_j) = s_{j1}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_1) + s_{j2}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_2) + \cdots + s_{jj}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_j) = 0,$$

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ (ţinând cont şi de simetria lui g).}$$

În acelaşi timp, avem:

$$g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_i) = s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \forall\, i = \overline{1,n} \text{ (cu } \Delta_0 = 1).$$

◀

Definiţia 8.19 *a) O formă pătratică $h : V \to K$ se numeşte* ***pozitiv definită*** *pe V, dacă în signatura (p, q, r) a lui h, indexul pozitiv este egal cu dimensiunea (finită) a lui V.*

b) Forma pătratică h se numeşte ***pozitiv semidefinită*** *pe V când, în signatura (p, q, r) a lui h, r este nenul şi $q = 0$.*

c) Forma h se numeşte ***negativ definită*** *dacă $p = r = 0$ şi $q = dim(V)$.*

d) Forma h se numeşte ***negativ semidefinită*** *atunci când $p = 0, r > 0$ şi $q = dim(V) - r > 0$.*

e) Forma pătratică h se numeşte ***nedefinită*** *când $p > 0$ şi $q > 0$.*

Observaţie: Conform Teoremei 8.18, putem concluziona că, o formă pătratică $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, este ***pozitiv definită*** atunci când toţi determinanţii Δ_j sunt pozitivi.
Forma h este ***negativ definită*** dacă $(-1)^{j+1}\Delta_j < 0$, $\forall\, j = \overline{1,n}$ şi, respectiv, ***nedefinită*** atunci când nu toţi determinanţii nenuli Δ_j au acelaşi semn.

Teorema 8.20 ***(Metoda valorilor proprii şi a vectorilor proprii pentru reducerea unei forme pătratice la expresia sa canonică)***

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe spaţiul liniar real, finit dimensional V. Dacă V este un spaţiu euclidian, atunci există o bază ortonormată a lui V faţă de care h are forma canonică

$$h(\mathrm{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricii asociate lui h, în baza iniţială, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele lui x în acea bază.

Demonstraţie: Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V, în raport cu care matricea A_B, corespunzătoare lui h, are vectorii proprii $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ca şi în cazul diagonalizării lui A_B, putem admite că sistemul $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n\}$ este ortonormat faţă de produsul scalar cu care este înzestrat spaţiul V.

Atunci, în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, matricea lui h va avea forma diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, iar expresia lui h va fi cea a formei canonice indicate în enunţ. ◀

Definiţia 8.21 *Fie V spaţiu vectorial peste un corp comutativ K, h o formă pătratică pe V şi f o funcţională afină pe V. Atunci suma $h + f$ se numeşte* ***funcţională pătratică de expresie neomogenă*** *pe V.*

În raport cu o anumită bază a lui V, expresia lui $h + f$ este

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, $b_i \in K$, $\forall\, i = \overline{1, n}$ şi $c \in K$ sunt coeficienţii respectivei funcţii pătratice în acea bază, iar $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt coordonatele unui vector x din V, în baza considerată.

Dacă V este spaţiu euclidian, atunci expresia funcţiei pătratice $\rho = h + f$ se poate reda prin

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x} \rangle + c, \forall\, \mathrm{x} \in V,$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ şi $\mathrm{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Matricea A se poate considera întotdeauna simetrică, întrucât, prin intermediul egalităţii,

$$\begin{aligned} \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{x}, A\mathrm{x} \rangle = \\ &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle A^T\mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle = \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \left(A + A^T\right)\mathrm{x}, \mathrm{x} \right\rangle, \end{aligned}$$

unde $\left(A + A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$, se poate conta mereu pe aportul matricii simetrice $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$, chiar dacă $A \neq A^T$.

Efectuând o transformare de coordonate, de forma

$$\mathrm{x}' = S\mathrm{x} + \mathrm{x}_0,$$

unde S este o matrice nesingulară, iar $\mathrm{x}_0 \in V$ este fixat arbitrar, obţinem:

$$\begin{aligned} \rho(\mathrm{x}) &= \left\langle AS^{-1}(\mathrm{x}' - \mathrm{x}_0), S^{-1}(\mathrm{x}' - \mathrm{x}_0) \right\rangle + \left\langle \mathrm{b}, S^{-1}(\mathrm{x}' - \mathrm{x}_0) \right\rangle + c \\ &= \left\langle \left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}', \mathrm{x}' \right\rangle - \left\langle 2\left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}_0 + \left(S^{-1}\right)^T \mathrm{b}, \mathrm{x}' \right\rangle + c_0. \end{aligned}$$

Dacă S este o matrice ortogonală (de exemplu având drept coloane vectorii proprii, ortonormaţi, ai lui A), atunci $S^{-1} = S^T$ şi $S \cdot A \cdot S^T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A. În consecinţă, avem:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}' \rangle - 2\left\langle S\left(AS^T\mathrm{x}_0 + \frac{\mathrm{b}}{2}\right), \mathrm{x}' \right\rangle + c_0.$$

În cazul în care A este nesingulară, se poate lua $\mathrm{x}_0 = -\frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$ şi atunci:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}' \rangle + c_0,$$

unde $c_0 = \langle D\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0 \rangle - \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}_0 \rangle + c$.

Aşadar, în cazul în care matricea A este nesingulară, prin transformarea $\mathrm{x}' = S\mathrm{x} - \frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$, s-ar aduce funcţia pătratică ρ la o formă redusă, sumă dintre o formă pătratică canonică şi o formă constantă.

Când A este singulară, se ia $x_0 = \mathbf{0}_V$ şi se ajunge, prin transformarea liniară $\mathrm{x}' = S\mathrm{x}$, la

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle + \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}'\rangle + c_0,$$

ceea ce ne spune că forma redusă a lui ρ are şi o componentă ce depinde liniar de x', iar partea ei principală $\langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle$ este o formă pătratică canonică cu $1 \leq r < n$ termeni. Mai departe, efectuând o adecvată transformare liniară de coordonate, de aici, se poate ajunge la o expresie a lui ρ de forma

$$\rho(\mathrm{x}) = \sum_{i=r} \lambda_i \left(x_i''\right)^2 + \gamma_{r+1} x_{r+1}'',$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ şi $\gamma_{r+1} \in \mathbb{R}$, iar $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ sunt coordonatele lui x în noua bază a lui V (r este rangul lui ρ).

Din punct de vedere geometric, nucleul lui ρ este, pentru $V = \mathbb{R}^n$, o ***conică***, atunci când $n = 2$, o ***cuadrică***, când $n = 3$ şi o ***hipercuadrică***, când $n \geq 4$.

În cazul în care $n = 1$, expresia redusă (normală) a funcţiei pătratice ρ poate fi $x_1^2 + 1$ (şi atunci $Ker(g)$ este mulţimea a două puncte imaginare, conjugate) sau $x_1^2 - 1$ ($Ker(g)$ fiind atunci mulţimea a două puncte distincte) sau x_1^2 (situaţie în care $Ker(g)$ este o mulţime de două puncte confundate).

Când $n = 2$, avem următoarele nouă tipuri de ecuaţii (reduse) de conice:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ ***- elipsă "imaginară"***
2. $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ ***- hiperbolă***
3. $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ ***- elipsă***
4. $x_1^2 - 2x_2 = 0$ ***- parabolă***
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ***- un punct; două drepte imaginare, conjugate***
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ ***- două drepte concurente***
7. $x_1^2 + 1 = 0$ ***- două drepte imaginare***
8. $x_1^2 - 1 = 0$ ***- două drepte paralele***
9. $x_1^2 = 0$ ***- două drepte confundate***

Când $n = 3$, cuadricele în cauză sunt de 17 feluri, caracterizându-se prin ecuaţiile reduse următoare:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ ***- elipsoid "imaginar"***
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ ***- elipsoid***
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ ***- hiperboloid cu o pânză***
4. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ ***- hiperboloid cu două pânze***
5. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$ ***- paraboloid eliptic***
6. $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$ ***- paraboloid hiperbolic***
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ***- con imaginar; punct***
8. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ ***- con real***

În completare, sunt cele 9 expresii de ecuaţii reduse din cazul $n = 2$, care, acum, în $\mathbb{R}^3$, reprezintă ***cilindri*** de diferite tipuri. Primele 6 clase reprezintă ***cuadrice nesingulare***, iar celelalte, ***cuadrice singulare***.

Bibliografie recomandată

1. D. Drăghici - *Algebră (Cap. VIII)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

2. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

3. Irinel Radomir - *Matematică. Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

4. C. Costinescu - *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

5. Simona Roatesi, M. Ariciuc - *Lecţii de algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2008.

6. M. Neagu - *Geometria curbelor şi suprafeţelor. Teorie şi aplicaţii*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2013.

7. P. Ott - *Bilinear and Quadratic Forms*, Prof. Robert Beezer's Notes on Advanced Linear Algebra, 2014.

8. K. Conrad - *Bilinear Forms,* Notes on Advanced Linear Algebra, 2015.

9. KC Border - *More than you wanted to know about quadratic forms*, Caltech, 2016.