Logică pentru Informatică - Săptămâna 10
Semantica Logicii de Ordinul I
Exerciții pentru Seminar

December 14, 2017

1. Arătați că următoarele echivalențe au loc:

   (a) $\neg\forall x.\varphi \equiv \exists x.\neg\varphi$;

   (b) $P(e, x) \overset{S_6}{\equiv} P(e, f(x, x))$.

2. Calculați câte o FNP pentru fiecare dintre formulele:

   (a) $(\exists z.P(x, y)) \lor P(z, z)$;

   (b) $(\exists z.P(x, z)) \land (\forall x.P(x, z))$;

   (c) $(\exists z.P(x, z)) \to P(x, x)$.

3. Vom folosi demonstratorul Z3 peste signatura $\Sigma = (<, \leq, >, \geq, =, +, *, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ și Σ-structura $S = (\mathbb{Z}, <, \leq, >, \geq, =, +, *, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$. Vom determina dacă anumite formule sunt satisfiabile în S, iar dacă sunt satisfiabile să găsim o atribuire care le face adevărate.

   Aduc aminte că o formulă φ este satisfiabilă într-o structură S dacă există o S-atribuire α cu proprietatea că $S, \alpha \models \varphi$.

   De exemplu, formula:

   $$>(x, +(y, 2)) \land =(x, +(*(2, z), 10)) \land \leq(+(z, y), 100)$$

   sau, folosind notația infixată:

   $$x > y + 2 \land x = 2 * z + 10 \land z + y \leq 100$$

   este satisfiabilă în structura S de mai sus, iar un martor al satisfiabilității este atribuirea $\alpha : \mathcal{X} \to \mathbb{Z}$, definită prin $\alpha(x) = 10, \alpha(y) = 0, \alpha(z) = 0$. Pentru a testa satisfiabilitatea formulei de mai sus, folosim codul:

```
(declare-const x Int) ;; declaram toate variabilele libere
(declare-const y Int)
(declare-const z Int)

(assert (and (> x (+ y 2)) ;; introducem formula despre care dorim
             (= x (+ (* 2 z) 10)) ;; sa testam daca e adevarata
             (<= (+ z y) 1000))) ;; folosind sintaxa Z3

(check-sat) ;; verificam daca formula e satisfiabila
```

Deoarece formula este satisfiabilă în S, putem folosi următoarea comandă pentru a obține o atribure în care formula este adevărată.

```
(get-model) ;; afiseaza o atribuire care face formula adevarata
```

Modelați următoarele afirmații ca formule de ordinul I peste signatura Σ definită mai sus și folosiți Z3 pentru a determina dacă acestea sunt sau nu satisfiabile.

(a) x este mai mare decât 100, y este mai mic decât 42, iar produsul $x \times y$ este mai mic decât 10. Variabile libere: x, y.

(b) x este un număr par mai mare decât 11. Variabile libere: x. Hint: putem exprima "x este par" prin $\exists x'.(=(x, *(2, x')))$. În Z3, scriem `(exists ((xp Int)) (= x (* 2 xp)))` pentru formula $\exists x'.(=(x, *(2, x')))$.

(c) x este impar, y este par și $x + y$ este mai mare decât 42. Variabile libere: x, y.

(d) x este impar, y este par și $x + y$ este par. Variabile libere: x, y.

(e) $x * y$ este impar, $x + y$ este par, $x > 10$ și $y < 0$. Variabile libere: x, y.

(f) Suma oricăror două numere pare este număr par. Variabile libere: niciuna.

(g) Folosiți Z3 pentru a explica jocul următor: te gândești la un număr, aduni 4 la el, înmulțești rezultatul cu 2, scazi 6 din rezultat, împarți la 2 și la final, scazi din ce obții numărul la care te-ai gândit; rezultatul este întotdeauna 1, indiferent cu ce număr ai început.

Ghid rapid de sintaxa Z3:

Math	Z3
$x \times y$	`(*xy)`
$x + y$	`(+xy)`
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	(`and` φ_1 φ_2)
$\varphi_1 \to \varphi_2$	(=> φ_1 φ_2)
$\exists x.\varphi$	(`exists ((x Int))` φ)