# Cursul 4

## Serii numerice cu termeni oarecare. Serii de funcţii. Serii de puteri

## Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

În cele ce urmează, vom prezenta unele criterii de convergenţă pentru serii de numere reale cu termeni oarecare. Amintim că o serie cu termeni oarecare, este o serie pentru care termenul general $x_n$ nu are acelaşi semn pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**Teorema 4.1 (Criteriul lui Dirichlet)** *Fie seria de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, având şirul sumelor parţiale mărginit. Dacă* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ *este un şir descrescător şi convergent la* $0$*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie:** Fie $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este mărginit, există $M > 0$, astfel încât $|S_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, cum şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent la 0, avem:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ aşa încât}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon : y_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Atunci, aplicˆand criteriul general al lui Cauchy de convergenţă pentru seria cu termenul general $x_n y_n$, obţinem că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon$ de mai sus, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}y_{n+1} + \ldots + x_{n+p}y_{n+p}| &= |(S_{n+1} - S_n)\, y_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})\, y_{n+2} + \ldots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})\, y_{n+p}| \\
&= |-S_n y_{n+1} + S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + S_{n+p}y_{n+p}| \\
&\leq M y_{n+1} + M(y_{n+1} - y_{n+2}) + \ldots + M(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + M y_{n+p}.
\end{aligned}$$

Aşadar, vom obţine

$$|x_{n+1}y_{n+1} + \ldots + x_{n+p}y_{n+p}| \leq 2M y_{n+1} < \varepsilon.$$

Prin urmare, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$ este convergentă. ◀

**Exemplu:** *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ *este convergentă.*

Vom considera $x_n = \cos n$ şi $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Arătăm că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit iar că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător la 0. Într-adevăr, $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n = \dfrac{\cos \frac{n}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|} = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, şirul $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0. Fiind îndeplinite condiţiile criteriului lui Dirichlet, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\cos n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ este convergentă.

**Teorema 4.2 (Criteriul lui Abel)** *Fie seria de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, iar şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}$ *este monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie:** Cum şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător şi mărginit, atunci rezultă că este convergent în $\mathbb{R}$; fie $l=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Aşadar, vom avea $y_n - l\le 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Vom scrie $x_n y_n$ sub forma $x_n y_n = x_n(y_n-l)+lx_n = -x_n(l-y_n)+lx_n$.

Observăm că, atunci când $l=0$, seria cu termenul general $(-x_n)(-y_n)$ este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet ( şirul $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent la 0, pe când şirul sumelor parţiale corespunzător seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-x_n)$ este mărginit, întrucât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este, convergentă).

Când $l\neq 0$, pe baza ipotezei de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, reiese că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} lx_n$ este convergentă (vezi Teorema 3.15 (v. cursul 3)). Pe de altă parte, observăm că şirul $(l-y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}_+$, este descrescător şi convergent la 0, iar şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este mărginit (deoarece seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă). Aşadar, aplicând criteriul lui Dirichlet asupra seriei cu termenul general $x_n(l-y_n)$, vom obţine că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(l-y_n)$ este convergentă şi ea. Rezultă atunci că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$, ca diferenţă a două serii convergente, este convergentă.

În cazul în care $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător şi mărginit, se raţionează asupra seriei cu termenul general $u_n(-v_n)$, deducându-se, la fel, convergenţa acesteia. ◀

**Exemplu:** *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ *este convergentă.*

Observăm că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet. Într-adevăr, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}$ are şirul sumelor parţiale mărginit, iar şirul $\alpha_n=\frac{1}{n}$ este descrescător şi convergent la 0.

Pe de altă parte, şirul $b_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ fiind convergent la 1, este mărginit. Arăt că $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton. Cum pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$$

rezultă că pentru $n\geq 3$, avem $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<n$, de unde $(n+1)^n<n^{n+1}$. Ridicând la puterea $\dfrac{1}{n(n+1)}$ obţinem $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$, pentru $n\geq 3$, aşadar şirul $b_n$ este crescător.

Conform criteriului lui Abel, rezultă că seria dată este convergentă.

## Serii alternate

Amintim că o serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ se numeşte ***serie alternată*** dacă $x_n\cdot x_{n+1}<0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, adică dacă termenii săi alternează ca semn.

Orice serie alternată poate fi scrisă în una din următoarele două forme:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}u_n \text{ sau } \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n u_n,\ \text{ unde } u_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

**Teorema 4.3 (Criteriul lui Leibniz)** *Dacă şirul* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de numere reale pozitive este descrescător şi convergent la* 0*, atunci seria alternată* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n u_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie:** Aplicăm criteriul lui Dirichlet, considerând şirurile $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Întrucât $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \begin{cases} 1, & \text{când } n \text{ este par} \\ 0, & \text{când } n \text{ este impar} \end{cases}$, se observă că $|S_n| \le 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0, ipotezele criteriului lui Dirichlet sunt îndeplinite. Astfel, prin utilizarea acestui criteriu, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$, este convergentă. ◀

**Exemplu:** *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{1}{n}$ *este convergentă întrucât şirul* $x_n = \frac{1}{n}$ *tinde descrescător la zero şi deci sunt satisfăcute condiţiile criteriului lui Leibniz.*

**Definiţia 4.4** *Se numeşte* ***produs Cauchy al seriilor*** *de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$, *unde* $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**Teorema 4.5 (Mertens)** *Dacă două serii de numere reale sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy al celor două serii este convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor celor două serii.*

**Propoziţia 4.6** *Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă, cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.*

**Teorema 4.7 (asupra dezvoltării $p$ -adică a unui număr $a$ real, pozitiv şi subunitar)** *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, *cu* $p > 1$. *Dacă* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir de numere naturale, aşa încât* $0 \le a_k < p$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$ *este convergentă, iar suma sa este un număr real* $a \in [0, 1]$.

**Teorema 4.8 (de dezvoltare $p$ - adică a unui număr $a$ real, pozitiv şi subunitar)** *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $p > 1$ *şi* $a \in (0, 1]$. *Atunci există un şir de numere naturale* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, *neconstant nul de la un rang înainte, aşa încât* $0 \le a_k \le p - 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$

**Teorema 4.9 (de aproximare a sumei unei serii alternate)** *Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n x_n$, *cu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ *descrescător şi convergent la* 0. *De asemenea, fie* $S$ *suma acestei serii şi* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şirul corespunzător al sumelor parţiale. Atunci:*

$$|S - S_n| < x_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

**Teorema 4.10 (de aproximare a sumei unei serii absolut convergente)** *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie absolut convergentă de numere reale,* $S$ *suma sa şi* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şirul corespunzător al sumelor parţiale. Atunci, dacă există* $\lambda \in (0, 1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

*i)* $\sqrt[n]{|x_n|} \le \lambda$, $\forall\, n \ge n_0$, *avem:* $|S - S_n| \le \dfrac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, $\forall\, n \ge n_0$

*sau*

*ii)* $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le \lambda$, $\forall\, n \ge n_0$, *avem:* $|S - S_n| < \dfrac{|x_{n+1}|}{1-\lambda}$, $\forall\, n \ge n_0$.

## Serii de funcţii reale

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Vom numi ***serie de funcţii de termen general*** $f_n$ cuplul $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$, unde şirul de funcţii $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor parţiale, este definit prin

$$S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n.$$

Vom nota o serie de funcţii de termen general $f_n$ prin

$$f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_n + ... \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ sau } \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

Pentru a studia convergenţa seriilor de funcţii, vom utiliza noţiunile şi rezultatele menţionate anterior pentru şiruri de funcţii şi serii numerice.

**Definiţia 4.11** *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcţii definite pe mulţimea nevidă $A \subset \mathbb{R}$. Vom spune că $x_0 \in A$ este un **punct de convergenţă** al seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, dacă seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi **mulţimea de convergenţă** a acestei serii.*

**Definiţia 4.12** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii.*

*i) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este **convergentă punctual** sau **convergentă simplu** pe mulţimea $A$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ este convergent punctual pe mulţimea $A$. Dacă $f$ este limita şirului $S_n$, atunci $f$ se va numi **suma** seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, în sensul convergenţei punctuale.*

*ii) Spunem că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este **uniform convergentă** pe mulţimea $A$, dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe mulţimea $A$.*

*iii) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este **absolut convergentă**, dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual, adică pentru orice $x_0 \in A$, seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x_0)|$ este convergentă.*

**Exemplu:** Fie seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. Arătăm că seria este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

Într-adevăr

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Observăm că $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Aşadar, seria de funcţii reale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă punctual la funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Pe de altă parte, pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem

$$|S_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

## Criterii de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii reale

Ţinând seama de Teorema 2.30 (v. Cursul 2) şi de definiţia convergenţei uniforme, vom obţine următorul criteriu de convergenţă uniformă.

**Teorema 4.13 (Teorema lui Cauchy)** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform pe mulţimea $A$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$ să avem*

$$|f_{n+1} + f_{n+1} + ... + f_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

**Demonstraţie:** Fie $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$. Conform Teoremei 2.30 (v. Cursul 2), $(S_n)$ este convergent uniform pe $A$ dacă şi numai dacă $(S_n)$ este şir uniform Cauchy, adică pentru orice $\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$ avem

$$|S_n(x) - S_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$

sau, echivalent,

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A,$$

aşadar teorema este demonstrată. ◀

De asemenea, putem formula un rezultat analog cu Propoziţia 2.31 - Criteriul majorării pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale (v. Cursul 2), sub forma:

**Teorema 4.14 (Criteriul lui Weierstrass)** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Dacă există un şir de numere reale pozitive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă şi*

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N} \textit{ şi } x \in A,$$

*atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $A$.*

**Demonstraţie:** Aplicând Teorema lui Cauchy seriei numerice $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$ are loc

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + ... + \alpha_{n+p} < \varepsilon. \tag{1}$$

Ţinând seama de (1), rezultă că pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)| \\ &\leq \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + .. + \alpha_{n+p} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

pentru orice $x \in A$.

Aşadar, conform Teoremei lui Cauchy, rezultă că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă. Mai mult, din (2) se obţine că seria este şi absolut convergentă pe A. ◀

**Exemplu:** Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi orice } x \in \mathbb{R},$$

iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, este convergentă. Aşadar, aplicând criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$, este uniform şi absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

În continuare, vom stabili două criterii de convergenţă uniformă (nu şi absolută) pentru serii de funcţii de forma $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$.

**Teorema 4.15 (Criteriul lui Abel pentru serii de funcţii reale)** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ două şiruri de funcţii. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe $A$ iar şirul $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform mărginit şi monoton pentru orice $x \in A$, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă.*

**Demonstraţie:** Presupunem fără a restrânge generalitatea că $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător. Cum şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform mărginit, rezultă că există $K > 0$ astfel încât $|g_n(x)| \leq K,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pe de altă parte, cum seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă, din Teorema 4.13, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ să avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{K},\ \forall x \in A.$$

Aşadar, conform Teoremei 4.2, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, obţinem

$$\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k} g_{n+k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{K} |g_{n+1}(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A.$$

Prin urmare, seria considerată este uniform convergentă. ◀

**Teorema 4.16 (Criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcţii reale)** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi fie $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ două şiruri de funcţii. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ are şirul sumelor parţiale uniform mărginit, iar şirul $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător şi convergent uniform la 0, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă.*

**Demonstraţie:** Cum şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform mărginit, rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $|f_1(x) + ... + f_n(x)| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in A$. Pe de altă parte, cum $g_n \xrightarrow{u} 0$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât, $\forall n \geq n_0$ să avem $|g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M},\ \forall x \in A$. Considerând acum $n \geq n_0, p \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, obţinem că $|f_{n+1}g_{n+1} + ... + f_{n+p}g_{n+p}| < \varepsilon, \forall x \in A$, ceea ce spune că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă pe $A$. ◀

**Teorema 4.17 (Criteriul lui Leibniz pentru serii de funcţii reale)** *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir descrescător (pentru orice $x \in A$) şi uniform convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe $A$.*

# Serii de puteri

În cele ce urmează, vom studia o categorie specială de serii de funcţii, serii care constituie o extindere naturală a noţiunii de funcţie polinomială.

**Definiţia 4.18** *Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulţime nevidă, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, în care $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $\forall\, x \in A$ ,$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte **serie de puteri** (sau **serie întreagă**), **în variabila** $x$, **centrată în** $x_0$ **şi cu coeficienţii** $a_n$.*

*Numărul real $a_n$ se numeşte **coeficientul termenului de rang** $n$ din seria de puteri*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

**Observaţii:**

a) Toate rezultatele stabilite pentru serii de funcţii oarecari sunt aplicabile, desigur, şi în cazul particular al seriilor de puteri.

b) O chestiune de bază din studiul seriilor de puteri este determinarea mulţimilor de convergenţă punctuală, absolută şi uniformă.

c) Vom nota cu $A_{cp}$ mulţimea de convergenţă punctuală a unei serii de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$. Este uşor de arătat că $A_{cp} \neq \varnothing$.

**Observaţie:** Prin schimbarea de variabilă $x \longrightarrow y = x - x_0$, se poate considera seria de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y^n$.

Orice rezultat stabilit pentru această serie este adevărat, în mod corespunzător, şi pentru seria iniţială, aşa încât, în continuare, ne concentrăm atenţia asupra cazului în care $x_0 = 0$, adică asupra seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

**Teorema 4.19 (Abel)** *Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ există un element $r \in [0, +\infty]$, numit **rază de convergenţă** a seriei în cauză, astfel încât:*

*i) dacă $r = 0$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă numai pentru $x = 0$, adică $A_{cp} = \{0\}$;*

*ii) dacă $r > 0$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este absolut convergentă pe intervalul $(-r, r)$;*

*iii) dacă $0 < r < +\infty$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$;*

*iv) dacă $r = +\infty$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă pe $\mathbb{R}$;*

*v) dacă $r > 0$ şi $\rho \in (0, r)$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este uniform convergentă pe orice interval $[\alpha, \beta] \subseteq [-\rho, \rho]$.*

**Demonstraţie:** Cum $0 \in A_{cp}$ pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, reiese că $A_{cp} \neq \varnothing$. Considerăm:

$$r = \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}.$$

Este evident că $r \in [0, +\infty]$. Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$ şi deci are loc i). Dacă $r > 0$, atunci, pentru orice $|x_0| < r$, există $x_1 \in A_{cp}\backslash\{0\}$, aşa încât $|x_0| < |x_1| < r$. Cum $x_1 \in A_{cp}$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_1^n$ este convergentă şi, ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. În consecinţă, există $M > 0$, astfel ca $|a_n x_1^n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$|a_n x_0^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Cum $\left|\dfrac{x_0}{x_1}\right| < 1$, seria geometrică cu termenul general $\left|\dfrac{x_0}{x_1}\right|^n$ este convergentă şi, utilizând criteriul întâi de comparaţie, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n x_0^n|$ (C), ceea ce înseamnă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_0^n$ (AC), $\forall x_0 \in (-r, r)$. Aşadar, are loc ii). Dacă $r = +\infty$, raţionamentul de mai înainte se poate relua, aplicându-se pentru orice $x_1 \in \mathbb{R}$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}$, cu $|x_0| < |x_1|$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ (deci $A_{cp} = \mathbb{R}$). Astfel, are loc iv). Dacă $r < \infty$ şi seria nu ar fi divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$, ar exista un punct $x_2 \in R$, cu $|x_2| > r$, în care $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_2^n$ ar fi convergentă. De aici ar rezulta că $r < \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}$, în contradicţie cu definiţia lui $r$. Aşadar, iii) are loc. În cazul v), cum $0 < \rho < r$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \rho^n$ (AC), adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\rho^n$(C). Prin urmare, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-\rho, \rho] \subseteq (-r, r)$şi, cu atât mai mult, pe orice subinterval $[\alpha, \beta]$ al lui $[-\rho, \rho]$. ◀

**Observaţii:** 1. Potrivit Teoremei 4.19, se poate spune că, pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, avem:

$$(-r, r) \subseteq A_{cp} \subseteq [-r, r].$$

Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$, iar dacă $r = +\infty$, atunci $A_{cp} = \mathbb{R}$.

2. Pentru găsirea mulţimii $A_{cp}$, se determină raza de convergenţă $r$ şi apoi se stabileşte dacă $x = -r$ şi $x = r$ sunt sau nu puncte de convergenţă ale seriei în cauză.

**Propoziţia 4.20** *Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ o serie de puteri şi $r$ raza ei de convergenţă.*

*j) Dacă există $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci raza de convergenţă a seriei este dată de*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{când } \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{când } 0 < \rho < +\infty \\ \infty, & \text{când } \rho = 0 \end{cases}.$$

*Dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, vom calcula $r$ similar, doar că de data asta, $\rho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

*jj) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ aşa încât $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ şi există $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci: fie $r = \dfrac{1}{\ell}$, când $0 < \ell < \infty$, fie $r = 0$, când $\ell = \infty$, fie $r = \infty$, când $\ell = 0$.*

**Demonstraţie:** j) Prin aplicarea criteriului rădăcinii asupra seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n||x|^n$, deducem că, dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n}$ şi aceasta este subunitară, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$este absolut (şi, implicit) convergentă. Cum $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, se poate spune că, dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, atunci absoluta convergenţă a (convergenţa) seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ are loc pentru $|x| < \frac{1}{\rho}$, atunci când $0 < \rho < \infty$, sau doar pentru $x = 0$, când $\rho = +\infty$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, când $\rho = 0$. Dacă nu există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci există $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ şi seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este absolut convergentă pentru orice $x \in (-r, r)$, unde $r$ este dat de formula din enunţ, în care, $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (*Cauchy-Hadamard*). ◀

**Propoziţia 4.21** *Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ o serie de puteri şi $r$ raza ei de convergenţă. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ aşa încât $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ şi există $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci:*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{când } \rho = +\infty \\ \frac{1}{\ell}, & \text{când } 0 < \rho < +\infty \\ \infty, & \text{când } \rho = 0 \end{cases} .$$

**Demonstraţie:** În condiţiile prezentei teoreme, seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n x^n|$ i se aplică criteriul raportului (*D' Alembert*). Astfel, se obţine convergenţa seriei de faţă, în situaţia în care $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$. Atunci când $|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Prin urmare, cum $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, reiese că $r = \frac{1}{\ell}$, atunci când $0 < \ell < \infty$, ori $r = 0$, când $\ell = \infty$, sau $r = \infty$, când $\ell = 0$. ◀

**Propoziţia 4.22** *Orice serie de puteri $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, cu raza de convergenţă $r \in (0, \infty)$, are suma o funcţie care este continuă pe $(-r, r)$.*

**Teorema 4.23 (Abel)** *Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, cu raza de convergenţă $r$. Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă în punctul $x = r$ (respectiv $x = -r$), atunci suma sa, funcţia $f$, este continuă în $x = r$ (respectiv $x = -r$).*

**Observaţie:** Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă de orice ordin în $x_0 \in A$, atunci vom numi **serie Taylor asociată funcţiei $f$, în punctul** $x_0$, seria de puteri $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, adică seria de puteri pentru care $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Pentru $x_0 = 0$ vom numi **serie MacLaurin ataşată funcţiei $f$, în punctul** $x_0 = 0$, seria de puteri $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

## Bibliografie orientativă

[1] Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 10)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[2] V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (Cap. 10, 11 şi 12)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[3] Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[4] E. Macovei, F. Iacob - *Matematică pentru anul I)*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2005.

[5] W. F. Trench - *Introduction to Real Analysis (Chap. 4)*, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2010.

[6] M. Postolache - *Analiză matematică ( teorie şi aplicaţii )*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

[7] Steven Heilman - *Sequences and Series of Functions.Convergence*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2015.

[8] M. Deisenroth, M. Cheraghchi - *Mathematical Methods (Chap.4:Power Series)*, Imperial College London, Department of Computing, 2016.