Cursul 1
Mulţimi. Relaţii. Funcţii

Mulţimi

Teoria mulţimilor reprezintă un domeniu al matematicii care studiază conceptul de mulţime. Studiul sistematic al mulţimilor a fost iniţiat de către Georg Cantor[1]. In cadrul teoriei descrise de Cantor, prin ***mulţime*** înţelegem un ansamblu de obiecte bine determinate şi distincte în care dispunerea elementelor nu are importanţă. Obiectele din care este constituită mulţimea se numesc *elementele* mulţimii.

Aceasta teorie, cunoscută în matematică şi sub numele de teoria naivă a mulţimilor, conducea însă la paradoxuri. Unul dintre cele mai cunoscute paradoxuri este cel al *"mulţimii tuturor mulţimilor ce nu se conţin ca element"*, propus de către Bertrand Russel[2]. Dacă notăm cu $\mathcal{R}$ mulţimea mulţimilor ce nu se conţin ca element ($\mathcal{R} = \{X \mid X \notin X\}$). Putem observa că dacă $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ atunci, ţinând cont de modul cum a fost definită mulţimea $\mathcal{R}$, rezultă că $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, contradicţie, dacă $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ atunci, având în vedere definiţia mulţimii, rezultă că $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, din nou obţinem contradicţie. Astfel de paradoxuri au putut fi eliminate de teoria axiomatică a mulţimilor propusă în anul 1908 de către Erns Zermelo[3] şi completată ulterior de Abraham Frankel[4] în 1922. Înainte de a prezenta setul de axiome, vom introduce următoarea definiţie

Definiţia 1 *Spunem că o mulţime B este **inclusă** în mulţimea A(sau că B este **submulţime** a lui A), şi notăm $B \subseteq A$, când orice element al lui B se găseşte în A.*

Cele opt axiome formulate de Zermelo-Fraenkel sunt:

1. Axioma determinării (a egalităţii între mulţimi). Spunem că două mulţimi A şi B sunt *egale* dacă orice element al lui A se găseşte în B şi reciproc (altfel scris, $A = B$ dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$).

2. Axioma mulţimilor elementare. Există mulţimi vide, generic notate cu $\varnothing$. Dacă a este un obiect arbitrar, atunci există mulţimea $\{a\}$ ce îl conţine pe a ca unic element. Dacă a şi b sunt "obiecte" arbitrare diferite, atunci există o mulţime $\{a, b\}$ care conţine pe a şi b ca elemente unice.

3. Axioma de regularitate. Orice mulţime nevidă A conţine măcar un element a astfel încât a şi A nu au nimic în comun.

4. Axioma separării. Dacă A este o mulţime şi φ este o proprietate pentru elementele mulţimii A, atunci există o mulţime B ale cărei elemente sunt exact elementele mulţimii A ce satisfac condiţia φ.

5. Axioma submulţimilor. Pentru orice mulţime A există o mulţime $\mathcal{P}(A)$, numită mulţimea părţilor mulţimii A, care conţine exact submulţimile mulţimii A.

6. Axioma reuniunii. Pentru orice mulţime de mulţimi $\mathcal{F}$, există o mulţime A care conţine numai elementele mulţimilor din $\mathcal{F}$.

7. Axioma alegerii. Pentru orice mulţime $\mathcal{F}$ de mulţimi nevide, disjuncte, există o mulţime care conţine exact câte un element din fiecare mulţime din $\mathcal{F}$.

[1]Georg Cantor (1845-1918), matematician german
[2]Bertrand Russell (1872 - 1970), filosof, matematician, istoric britanic
[3]Erns Zermelo(1871-1953), matematician german
[4]Abraham Fraenkel(1891-1965), matematician german

8. Axioma infinitului. Există o mulţime A astfel încât mulţimea vidă $\varnothing$ este un element al lui A şi dacă a este din A, atunci şi $\{a\}$ este din A.

Observaţia 1. Mulţimea părţilor lui A, notată $\mathcal{P}(A)$, conţine $\varnothing$ ca element, deoarece $\varnothing \subseteq A$ oricare ar fi A.

Propoziţia următoare menţionează câteva proprietăţi ale "$\subseteq$":

Propoziţia 2 *Dacă X este o mulţime oarecare, iar $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, atunci:*
i) $A \subseteq A$;
ii) $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$ implică $A \subseteq C$.

Definiţia 3 *Fie X o mulţime nevidă şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$.*
*a) Se numeşte **reuniune** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ sau } x \in B\};$$

*b) Se numeşte **intersecţie** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ şi } x \in B\};$$

*c) Se numeşte **diferenţa mulţimilor** A şi B, mulţimea*

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\};$$

***Complementara absolută** a mulţimii A este prin definiţie mulţimea $X \setminus A$, notată cu C_A^X sau C_A. **Complementara relativă** a mulţimii A în raport cu o mulţime $B \supseteq A$, mulţimea $B \setminus A$, notată cu C_A^B.*
*d) Se numeşte **diferenţa simetrică** a mulţimilor A şi B, mulţimea*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Următoarea propoziţie prezintă câteva proprietăţi ale operaţiilor de reuniune, intersecţie, diferenţă, diferenţă simetrică şi complementariere.

Propoziţia 4 *Fie X o mulţime nevidă. Atunci pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, au loc următoarele proprietăţi:*

1. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ *(idempotenţa);*
2. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
3. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitate);*
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociativitatea reuniunii);*
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativitatea intersecţiei);*
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune);*
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie);*
8. $C_{C_A} = A$; $A \cup C_A = X$; $A \cap C_A = \varnothing$;
9. $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B$; $C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$ *(legile lui De Morgan);*
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
11. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
12. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ *(absorbţie);*
13. $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta B = B \Delta A$; $A \Delta \varnothing = A$;
14. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Operaţiile de intersecţie şi reuniune se pot extinde la cazul unei familii de mulţimi.

Definiţia 5 *Fie X o mulţime nevidă. Dacă I este o mulţime nevidă de indici, iar $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie nevidă de submulţimi ale lui X, atunci **reuniunea tuturor mulţimilor** A_i este definită prin*

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ astfel încât } x \in A_i\}$$

*iar **intersecţia mulţimilor** A_i este definită prin*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$$

Propoziţia 6 *Fie X o mulţime nevidă, $B \in \mathcal{P}(X)$ şi $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie nevidă de submulţimi ale lui X. Atunci au loc următoarele:*

i) $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ *şi* $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$ *pentru orice* $i \in I$;

ii) $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$; $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$;

iii) $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$; $X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$.

Dacă I este o mulţime finită, spre exemplu $I = \{1, 2, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci reuniunea şi respectiv intersecţia mulţimilor $A_i,\ i = \overline{1, n}$, se notează $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi respectiv $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Definiţia 7 *Fie A şi B două mulţimi nevide. **Produsul cartezian** al mulţimilor A şi B, notat cu $A \times B$, este mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$, adică mulţimea*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

Propoziţia 8 *Fie X o mulţime nevidă şi $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Atunci au loc egalităţile:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Pentru un număr finit de mulţimi nevide $A_1, A_2, ..., A_n$, produsul cartezian al mulţimilor A_i este definit prin

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ coincid, având $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, atunci produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ se notează, mai simplu, cu A^n.

Relaţii

Definiţia 9 *Fie A şi B două mulţimi nevide arbitrare. O **relaţie** R de la mulţimea A la mulţimea B este, prin definiţie, o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Terminologic, spunem că R este o **relaţie binară** între elemente ale lui A şi elemente ale lui B. Dacă $(x, y) \in R \subseteq A \times B$ citim că x **este în relaţia** R **cu** y, unde $x \in A$ şi $y \in B$. De asemenea, vom scrie xRy pentru a desemna faptul că $(x, y) \in R$.*

*În cazul în care $A = B$, relaţia binară R pe A se numeşte **omogenă**. Relaţia binară definită prin $\{(x, x) \mid x \in A\}$ se numeşte **identitate** pe A şi se notează cu 1_A.*

Definiţia 10 *Fie A şi B două mulţimi nevide şi relaţia binară $R \subseteq A \times B$. Se definesc următoarele noţiuni:*

a) ***Inversa relaţiei binare*** *R, notată cu R^{-1}, este, prin definiţie, relaţia*

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\};$$

b) ***Domeniul relaţiei*** *R, notat cu $D(R)$, este, prin definiţie, mulţimea*

$$\mathrm{D(R)} := \{x \in A \mid \exists y \in B \text{ astfel încât } xRy\};$$

c) ***Imaginea (sau codomeniul) relaţiei*** *R, notată cu $\mathrm{Im}(R)$, este, prin definiţie, mulţimea*

$$\mathrm{Im(R)} := \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ astfel încât } xRy\}.$$

Definiţia 11 *Fie A, B, C mulţimi nevide şi relaţiile $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$ astfel încât $\mathrm{Im(R)} \cap \mathrm{D(S)} \neq \varnothing$.* ***Compusa relaţiilor*** *S şi R, notată cu $S \circ R$, este relaţia binară de la A la C definită prin*

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ astfel încât } (x, y) \in R \text{ şi } (y, z) \in S\}.$$

Definiţia 12 *Fie A o mulţime nevidă şi fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie binară pe A.*

a) Relaţia R se numeşte ***reflexivă*** *dacă oricare ar fi $x \in A$, avem xRx (altfel spus, dacă $1_A \subseteq R$);*

b) Relaţia R se numeşte ***simetrică*** *dacă oricare ar fi $x, y \in A$, avem $xRy \Rightarrow yRx$ (altfel scris, dacă $R^{-1} = R$);*

c) Relaţia R se numeşte ***antisimetrică*** *dacă pentru orice $x, y \in A$, din xRy şi $yRx \Rightarrow x = y$ (altfel spus dacă $R \cap R^{-1} = 1_A$);*

d) Relaţia R se numeşte ***tranzitivă*** *dacă pentru orice $x, y, z \in A$, din xRy şi yRz rezultă xRz (altfel spus dacă $R \circ R \subseteq R$).*

Definiţia 13 *i) O relaţie $R \subseteq A \times A$ se numeşte* ***relaţie de echivalenţă*** *pe A dacă este simultan reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

ii) Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A, iar $x \in A$, atunci prin ***clasa de echivalenţă*** *a elementului x în raport cu R, notată cu $[x]_R$ sau $\widehat{x}_R$, înţelegem mulţimea*

$$[x]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}.$$

iii) Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de relaţia de echivalenţă R pe A, se numeşte ***mulţime cât*** *şi se notează cu $A_{/R}$ (altfel scris $A_{/R} = \{[x]_R \mid x \in A\}$).*

Exemplu: Considerăm pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaţia $x\rho y \iff x \cdot y > 0$. Arătaţi că ρ este o relaţie de echivalenţă şi determinaţi clase de echivalenţă $[x]_\rho$.
Solutie: Relaţia "ρ" este o relaţie de echivalenţă. Mulţimea cât se găseşte astel:
$\forall x > 0 \Rightarrow [x]_\rho = \{y \in \mathbb{R} \mid y \cdot x > 0\} = (0, +\infty)$.
Similar, pentru fiecare $x < 0$ se obţine $[x]_\rho = (-\infty, 0)$. Prin urmare, $\mathbb{R} \setminus \{0\}_\rho = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$.

Exerciţii:

1. Fie $E = \{1, 2, 3, 4\}$ şi relaţia $\rho \subset \mathbb{R}^2$, $(x, y)\rho(x', y') \iff xy' = x'y$. Să se arate că ρ este o relaţie binară de echivalenţă. Determinaţi clasele de echivalenţă $[(1, 2)]$ şi $[(2, 3)]$.
2. Fie relaţia $R \subset \mathbb{N}^2$ definită astfel $xRy \iff x \mid y$. Să se verifice că R este o relaţie de ordine pe $\mathbb{N}$.
3. Fie următoarele relaţii pe mulţimea $\mathbb{R}$:
   i) $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a^2 = b^2$,
   ii) $(a, b) \in S$ dacă şi numai dacă $a - b \leq 3$.

Verificaţi dacă relaţiile R şi S sunt reflexive, simetrice, antisimetrice, sau tranzitive. (gasiti contraexemple pentru cazul in care nu verifica unele dintre proprietati)

4. Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Definiţia 14 *j) O relaţie $R \subseteq A \times A$ care este simultan reflexivă şi tranzitivă se numeşte* ***relaţie de preordine*** *pe A.*

jj) O relaţie de preordine $R \subseteq A \times A$ care este în plus şi antisimetrică se numeşte ***relaţie de parţială ordine*** *pe A.*

jjj) O relaţie de ordine R, pe mulţimea A, se numeşte ***totală*** *dacă oricare două elemente $x, y \in A$ sunt "comparabile", adică oricare ar fi $x, y \in A$ avem xRy sau yRx.*

jv) Dacă A este o mulţime nevidă şi R este o relaţie de preordine/parţială ordine/ordine totală pe A, atunci perechea (A, R) se numeşte, respectiv, ***mulţime preordonată/parţial ordonată/total ordonată****.*

Definiţia 15 *Fie o mulţime parţial ordonată (A, R) şi $B \subseteq A$ o mulţime nevidă.*

l) Se numeşte ***majorant*** *pentru mulţimea B orice element $x \in A$ astfel încât $yRx, \forall y \in B$. Dacă există majorant pentru mulţimea B, atunci spunem că B este o* ***mulţime majorată*** *în raport cu R.*

ll) Analog, se numeşte ***minorant*** *pentru B un element $x \in A$ aşa încât $xRy, \forall y \in B$. Dacă B are cel puţin un minorant, atunci spunem că B este o* ***mulţime minorată****.*

lll) Dacă mulţimea B este simultan minorată şi majorată, atunci spunem că B este o ***mulţime mărginită****.*

lv) Dacă $x \in A$ este un minorant pentru A în raport cu relaţia de parţială ordine R, atunci x se numeşte ***cel mai mic element*** *al lui A, relativ la R, şi se notează cu $\min_R A$.*

v) Dacă $y \in A$ este un majorant pentru A în raport cu relaţia de parţială ordine R, atunci y se numeşte ***cel mai mare element*** *al mulţimii A, notat cu $\max_R A$*

Definiţia 16 *Dacă (A, R) este o mulţime parţial ordonată şi $\varnothing \neq B \subseteq A$ este o mulţime majorată, iar cel mai mic majorant există pentru B, atunci acesta se numeşte* ***margine superioară*** *a mulţimii B, şi se notează cu $\sup_R B$.*

Analog, dacă B este minorată şi există un cel mai mare minorant pentru B, atunci acesta se numeşte ***margine inferioară*** *a lui B, şi se notează cu $\inf_R B$.*

Definiţia 17 *O mulţime parţial ordonată (A, R), se numeşte* ***relativ completă*** *(sau complet ordonată) dacă pentru orice $B \subseteq A, B \neq \varnothing$, minorată, există $\inf_R B$ şi pentru orice $C \subseteq A, A \neq \varnothing$ majorată, există $\sup_R C$.*

O mulţime total ordonată strict este numită ***bine ordonată*** *dacă orice submulţime nevidă a ei are cel mai mic element.*

Exemplu: Mulţimea numerelor naturale $(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, în schimb mulţimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, împreună cu relaţia uzuală de ordine, "$\leq$", nu sunt bine ordonate.

Funcţii

Definiţia 18 *Fie A şi B două mulţimi nevide. O submulţime $f \subseteq A \times B$ se numeşte* ***funcţie*** *(sau* ***relaţie funcţională****) dacă au loc următoarele condiţii:*

1) pentru orice $x \in A$ există $y \in B$, astfel încât $(x, y) \in f$ (altfel scris, $D(f) = A$);

2) pentru orice $x \in A$, şi orice $y, z \in B$, astfel încât $(x, y) \in f$ şi $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

Domeniul funcţiei $f \subseteq A \times B$ poartă numele de ***mulţime de definiţie*** *a funcţiei f, iar codomeniul lui f se numeşte* ***mulţimea în care f ia valori****.*

Notaţia consacrată pentru o funcţie f cu domeniul de definiţie A şi codomeniul B este $f : A \to B$.

Definiţia 19 *i) Pentru $f : A \to B$, mulţimea $G_f \subseteq A \times B$ definită prin $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte* ***graficul funcţiei*** *f.*

ii) Spunem că două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt ***egale*** *dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in A = C$.*

Definiţia 20 *Fie funcţia $f : A \to B$ şi fie $C \subset A$ şi $D \subseteq B$ o mulţimi nevide.*

a) Se numeşte ***imagine a mulţimii C prin f****, mulţimea $f(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C$ astfel încât $y = f(x)\}$.*

b) Se numeşte ***preimaginea lui*** D *prin* f *(sau* ***imaginea inversă a mulţimii*** D *prin* f*) mulţimea* $f^{-1}(D) = \{x \in A \mid y \in D$ *astfel încât* $y = f(x)\}$.

Definiţia 21 *Fie* A *şi* B *două mulţimi nevide. Atunci funcţia* $f : A \to B$ *se numeşte:*

i) ***injectivă*** *(sau injecţie) dacă pentru orice* $x_1, x_2 \in A$ *cu* $x_1 \neq x_2$*, rezultă* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *(sau echivalent: pentru orice* $x_1, x_2 \in A$*, din* $f(x_1) = f(x_2)$*, rezultă* $x_1 = x_2$*);*

ii) ***surjectivă*** *(sau surjecţie) dacă* $\mathrm{Im}(f) = B$ *(altfel scris, dacă pentru orice* $y \in B$*, există* $x \in A$ *astfel încât* $f(x) = y$*);*

iii) ***bijectivă*** *(sau bijecţie) dacă* f *este injectivă şi surjectivă.*

Propoziţia 22 *Fie* $f : A \to B$ *şi* $g : B \to C$ *două funcţii.*

i) Dacă f *şi* g *sunt injective/surjective/bijective atunci* $g \circ f$ *este injectivă/surjectivă/bijectivă. În acest ultim caz avem* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ii) Dacă $g \circ f$ *este injectivă/surjectivă/bijectivă atunci* f *este injectivă/*g *este surjectivă/* f *este injectivă şi* g *este surjectivă.*

Demonstraţie: i) Fie $x, y \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Atunci $g(f(x)) = g(f(y))$ şi cum g este injectivă, deducem că $f(x) = f(y)$, iar cum şi f este injectivă deducem că $x = y$, adică $g \circ f$ este injectivă.

Să presupunem acum că f şi g sunt surjective şi fie $z \in C$. Cum g este surjectivă, rezultă $z = g(y)$ cu $y \in B$ şi cum şi f este surjectivă, avem $y = f(x)$ cu $x \in A$. Astfel avem $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, adică $g \circ f$ este surjectivă.

Dacă f şi g sunt bijective, atunci faptul că $g \circ f$ este bijectivă rezultă imediat din cele expuse mai sus. Pentru a proba în acest caz egalitatea $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Fie $z \in C$. Avem că $z = g(y)$ cu $y \in B$ şi $y = f(x)$ cu $x \in A$. Deoarece $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, deducem că $(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$, adică $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ii) Să presupunem că $g \circ f$ este injectivă şi fie $x, x' \in A$ astfel încât $f(x) = f(x')$. Atunci $g(f(x)) = g(f(x')) \Longleftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'$, adică f este injectivă.

Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci, pentru $z \in C$, există $x \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x) = z \Longleftrightarrow g(f(x)) = z$, adică g este surjecţie.

Dacă $g \circ f$ este bijecţie, atunci, în particular, $g \circ f$ este injecţie şi surjecţie, deci, conform celor de mai sus, cu necesitate rezultă că f este injecţie iar g surjecţie.

Definiţia 23 *O funcţie* $f : A \to B$ *se numeşte* ***inversabilă*** *dacă există o funcţie* $g : B \to A$ *astfel încât* $g \circ f = 1_A$ *şi* $f \circ g = 1_B$*. Dacă există, funcţia unică* g *se numeşte* ***inversa*** *lui* f *şi se notează uzual cu* f^{-1}.

Exerciţiu: O funcţie este bijectivă dacă şi numai dacă este inversabilă.

Definiţia 24 *Fie funcţia* $f : A \to B$ *şi* $\varnothing \neq C \subseteq A$*. Se numeşte* ***restricţie*** *a lui* f *pe* C*, şi se notează* $f_{|C}$*, funcţia* $f_{|C} : C \to B$ *definită prin* $f_{|C}(x) = f(x), \forall x \in C$*. În acest caz funcţia* f *se numeşte prelungire a funcţiei* $f_{|C}$ *la mulţimea* A.

Definiţia 25 *Fie* (A, R) *şi* (B, S) *două mulţimi parţial ordonate şi fie* $f : A \to B$ *o funcţie. Spunem că* f *este* ***monotonă*** *dacă pentru orice* $x_1, x_2 \in A$*, cu* $x_1 R x_2$*, avem* $f(x_1) S f(x_2)$.

În cele ce urmează, vom introduce noţiunea de funcţie caracteristică (indicatoare) a unei mulţimi.

Definiţia 26 *Fie* A *o mulţime nevidă oarecare. Se numeşte* ***funcţie caracteristică (indicatoare)*** *a mulţimii* A*, şi se notează* χ_A*, funcţia definită prin*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dacă $A = \varnothing$*, atunci* $\chi_A \equiv 0$.

Propoziţia 27 *Fie* X *o mulţime nevidă. Funcţia caracteristică a unei mulţimi satisface următoarele proprietăţi:*

i) $\chi_A^2 = \chi_A, \quad \chi_{C_A} = 1 - \chi_A, \forall A \in \mathcal{P}(X)$*, unde* $C_A = X \setminus A$,

ii) $\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow A = B$,

iii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$,

iv) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Exerciţii:

Fie $X \neq \varnothing$ şi $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice, arătaţi că:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Longleftrightarrow A \cap (B \Delta C) = \varnothing$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Longleftrightarrow A \cap (B \Delta C) = \varnothing$;

c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) \Longleftrightarrow A = \varnothing$;

d) $(A \cap B) \cup (C \setminus A) = C \Longleftrightarrow A \cap (B \Delta C) = \varnothing$;

e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Numere cardinale

Încă din şcoala generală am învăţat să stabilim numărul elementelor unor mulţimi numărându-le, adică realizând o corespondenţă bijectivă între elementele mulţimii pe care dorim să o numărăm şi o mulţime de numere naturale $\{1, 2, ..., n\}$. Această idee poate fi aplicată pentru cazul general al mulţimilor oarecare.

Fie X o mulţime nevidă fixată.

Definiţia 28 *Spunem că două mulţimi $A, B \in \mathcal{P}(X)$ sunt **echipotente** sau **cardinal echivalente** dacă există o funcţie bijectivă de la A la B. Vom nota $A \sim B$.*

Observaţie: Se poate arăta cu uşurinţă că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{P}(X)$.

Definiţia 29 *Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ vom numi **cardinalul mulţimii** A, notată cu* card(A)*, clasa de echivalenţă a mulţimii A, adică familia tuturor submulţimilor lui X echipotente cu A.*

Aşadar pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(X)$, spunem că A este echipotent cu B dacă şi numai dacă card(A) = card(B).

Definiţia 30 *(i) O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ echipotentă cu o mulţime de numere naturale de forma $\{1, 2, ..., n\}$ se numeşte **mulţime finită** iar în acest caz vom spune că A are **cardinalul** n.*

*(ii) O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ care nu este finită se numeşte **mulţime infinită**. Cardinalul unei mulţimi infinite se numeşte **cardinal transfinit**.*

Observaţie: Prin convenţie mulţimea vidă este considerată finită, având cardinalul 0.

Definiţia 31 *O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ echipotentă cu $\mathbb{N}$ se numeşte **mulţime numărabilă**, iar cardinalul său se notează prin $\aleph_0$ (alef zero). O mulţime $A \in \mathcal{P}(X)$ care este finită sau numărabilă se numeşte **cel mult numărabilă.***

Definiţia 32 *Fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Spunem că avem* card(A) $\leq$ card(B) *dacă există o funcţie injectivă de la mulţimea A la mulţimea B.*

Lemma 33 *Fie $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Dacă $A \supset B \supset C$ şi* card(A) = card(C)*, atunci* card(A) = card(B).

Propoziţia 34 *(i) Dacă $\alpha =$ card(A), atunci*

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{A})) = 2^{\alpha}.$$

(ii) Pentru orice număr cardinal α are loc inegalitatea

$$\alpha < 2^{\alpha}$$

Teorema 35 *(i) Orice submulţime a unei mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

(ii) Produsul cartezian al două mulţimi cel mult numărabile este o mulţime cel mult numărabilă.

Bibliografie

[1] F. Iacob, *Curs Matematică*, `https://profs.info.uaic.ro/~fliacob/`

[2] F.L. Ţiplea, *Introducere în teoria mulţimilor*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

[3] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2011.

[4] G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, **398**, pp. 45. (`http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/`)

[5] G. O'Regan, *Mathematics in Computing*, Springer Verlag, London, 2013.