

Setul 8
de probleme și exerciții de matematică
(relative la forme liniare, biliniare și pătratice)

S8.1 Să se determine o formă liniară nenulă $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(0, 1, 1) = f(-1, 1, 1) = 0$. Să se arate apoi că mulțimea tuturor formelor liniare pe \mathbb{R}^3 , cu valori reale, așa încât au valori nule în punctele $(0, 1, 1)$ și $(-1, 1, 1)$, formează un subspațiu vectorial unidimensional.

S8.2 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{28}{5}x_3y_3 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_3 - 2x_3y_1 + 4x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Să se arate că aplicația g este o formă biliniară și simetrică pe \mathbb{R}^3 .
- b) Să se găsească matricea și discriminantul formei g în raport cu baza canonică a lui \mathbb{R}^3 . Să se afle $\text{rang}(g)$.
- c) Să se determine $\text{Ker}(g)$.
- d) Să se găsească matricea și discriminantul formei g în raport cu baza $\{(1, 1, 1), (2, -1, 2), (1, 3, -3)\}$ a lui \mathbb{R}^3 .
- e) Să se scrie forma pătratică h , corespunzătoare lui g și să se stabilească forma normală a lui h . Să se afle indicele pozitiv și cel negativ de inerție pentru h , cât și semnatura lui h . Să se deducă forma biliniară ce corespunde formei normale a lui h .
- f) Să se determine o bază din \mathbb{R}^3 în care se realizează forma normală a lui h . Să se stabilească ce este, din punct de vedere geometric, nucleul lui h .

Să se reia aceleași cerințe și pentru aplicațiile următoare:

$$g_1(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2,$$

$$g_2(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2,$$

$$g_3(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

S8.3 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniară a cărei matrice în raport cu baza canonică a lui \mathbb{R}^3 este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Să se precizeze o scriere sub forma matriceală a lui g și să se calculeze $g((-1, 0, 1), (1, -1, 0))$.
- b) Să se determine forma biliniară simetrică (respectiv antisimetrică) asociată lui g .
- c) Să se evidențieze g' și g'' (aplicațiile liniare asociate lui g) și să se afle $\text{Ker}(g')$ și $\text{Ker}(g'')$.
- d) Să se stabilească forma normală a formei pătratice corespunzătoare lui g_s (forma simetrică asociată lui g) și să se precizeze o bază a lui \mathbb{R}^3 în care se realizează această formă normală.

Să se reia acest exercițiu și pentru forma biliniară a cărei matrice în baza canonică a lui \mathbb{R}^3 este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

S8.4 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniară definită prin:

$$g(x, y) = 3x_1y_1 + 13x_2y_2 + 14x_3y_3 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 - 12x_2y_3 + 2x_3y_1 - 12x_3y_2,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- Să se arate că g determină pe \mathbb{R}^3 o structură de spațiu euclidian (real), în raport cu care vectorii $(1, 0, 0)$ și $(1, 1, 0)$ sunt perpendiculari.
- Să se ortonormalizeze sistemul de vectori $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ în raport cu structura euclidiană determinată de g pe \mathbb{R}^3 .

S8.5 Pe spațiul euclidian canonic \mathbb{R}^3 , se consideră formele pătratice h_1 și $h_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin:

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$$

$$h_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + \sqrt{2}x_1x_3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- Să se verifice că h_1 și h_2 sunt euclidian echivalente.
- Să se aducă cele două forme pătratice la forma canonică, prin schimbări ortogonale de bază.

S8.6 În spațiul \mathbb{R}^4 , raportat la reperul cartezian canonic, se consideră punctele $A(1, -1, 0, 1)$, $B(0, 1, -1, 0)$, $C(1, 0, -1, 0)$ și $D(1, 2, 0, 1)$. Se cer următoarele:

- Ecuția dreptei ce trece prin A și este paralelă cu dreapta prin B și C .
- Ecuția hiperplanului determinat de A, B, C, D .
- Ecuția hiperplanului ce trece prin punctul $(-1, 1, 2, -1)$ și este paralel cu hiperplanul de la b).

S8.7 Să se stabilească ce este, din punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre următoarele aplicații pătratice reale:

- $h_1(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 - 39, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$
- $h_2(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$
- $h_3(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 14x_1 - 2x_2 + 3, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$
- $h_4(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 14x_1 + 16x_2 - 12x_3 - 33, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$
- $h_5(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$
- $h_6(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$
- $h_7(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$
- $h_8(x) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - 1, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

S8.8 Fie $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniară definită prin

$$g(x, y) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_4y_4 + x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_1y_4 + x_2y_1 + 2x_2y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_4 - 2x_4y_1 - x_4y_2 + x_4y_3,$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

- a) Să se determine g', g'' și $Ker(g)$.
- b) Să se găsească matricea și discriminantul formei pătratice h , asociată lui g . Să se afle $rang(h)$.
- c) Să se stabilească forma normală a lui h și o bază din \mathbb{R}^4 în care se realizează această formă normală.
- d) Să se precizeze indicele pozitiv, indicele negativ de inerție și semnatura lui h .

S8.9 Să se afle ce reprezintă din punct de vedere geometric nucleul fiecăreia dintre aplicațiile ale căror expresii sunt date mai jos:

- a) $h(x) = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
- b) $h(x) = x_1 - x_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- 1. $h(x) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- d) $h(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3 - 24x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 180, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- e) $h(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 1, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- f) $h(x) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Bibliografie selectivă

- 1. M. Craioveanu, I. D. Albu - *Geometrie afină și euclidiană*, Ed. Facla, Timișoara, 1982.
- 2. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iași, 2000.
- 3. Pavel Matei - *Algebră liniară și geometrie analitică. Culegere de probleme*, Editura Matrix Rom, București, 2007.
- 4. A. R. Saro, A. R. Moyano - *Algebra y Geometria Quadratica*, Netbiblo, 2007.
- 5. Ecaterina Cioară - *Algebră liniară. Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", București, 2009.
- 6. O. Dogaru, Madalina Constantinescu, Mona-Mihaela Doroftei - *Capitole de algebră liniară și geometrie analitică. Noțiuni teoretice și probleme*, Editura "Fair Partners", București, 2012.
- 7. Z. Dvořák - *Bilinear and Quadratic Forms, Lessons on Linear Algebra*, 2015.
- 8. Elizabeth Denne - *More Quadratic Surfaces. Visions in Math*, Washington & Lee University, 2016.