Algoritmi. Limbaj algoritmic

SD 2017/2018

Conținut

Exemplu

- o secvență de numere: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Exemplu

- o secvență de numere: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- secvența Fibonacci

  definiția matematică: $F_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0 \\ 1, & \text{if } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{if } n > 1 \end{cases}$

Exemplu

- o secvență de numere: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- secvența Fibonacci

  definiția matematică: $F_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0 \\ 1, & \text{if } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{if } n > 1 \end{cases}$
- implemetare C

```
int F(int n) {
   if (n == 0) return 0;
   else if (n == 1) return 1;
   else
      return F(n-1) + F(n-2);
}
```

Algoritmi: etimologie

Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi** - matematician persan; a scris prima carte de algebră (cca. 830).

- metode pentru adunarea, înmulțirea și împărțirea numerelor.

Algoritmi: definiție

- Nu există o definiție standard pentru noțiunea de algoritm.
- Cambridge Dictionary:

  "A set of mathematical instructions that must be followed in a fixed order, and that, especially if given to a computer, will help to calculate an answer to a mathematical problem."
- Schneider and Gersting 1995 (Invitation for Computer Science):

  "An algorithm is a well-ordered collection of unambiguous and effectively computable operations that when executed produces a result and halts in a finite amount of time."
- Gersting and Schneider 2012 (Invitation for Computer Science, 6nd edition):

  "An algorithm is ordered sequence of instructions that is guaranteed to solve a specific problem."

Algoritmi: definiție

- Wikipedia:

  "In mathematics and computer science, an algorithm is a step-by-step procedure for calculations. Algorithms are used for calculation, data processing, and automated reasoning. An algorithm is an effective method expressed as a finite list of well-defined instructions for calculating a function. Starting from an initial state and initial input (perhaps empty), the instructions describe a computation that, when executed, proceeds through a finite number of well-defined successive states, eventually producing "output" and terminating at a final ending state. The transition from one state to the next is not necessarily deterministic; some algorithms, known as randomized algorithms, incorporate random input."

Algoritmi: model de calcul, problema rezolvată

Toate definițiile au ceva în comun:

- datele/informația și procesarea acestora/acesteia în pași. Acestea sunt descrise în general de un model de calcul.
  Un **model de calcul** este format din:
  - **memorie** - modul de reprezentare a datelor.
  - **instrucțiuni**
    sintaxă - descrie sintactic pașii de procesare;
    semantică - descrie pașii de procesare realizați de execuția unei instrucțiuni; în general este dată de o relație de tranziție peste configurații (sistem tranzițional).

- un algoritm trebuie să producă un rezultat, adică un algoritm trebuie să **rezolve o problemă**.
  O problemă este în general reprezentată de o pereche (**input, output**), unde input reprezintă descrierea datelor de intrare (instanță) iar output descrierea datelor de ieșire (rezultatul).

Algoritmi și Structuri de date

- Algoritm: metodă de rezolvare a unei probleme.
- Structuri de date: metodă de a păstra/reprezenta informația.

Algoritmi și Structuri de date

- Algoritm: metodă de rezolvare a unei probleme.
- Structuri de date: metodă de a păstra/reprezenta informația.

Algorithms + Data Structures = Programs. — Niklaus Wirth

I will, in fact, claim that the difference between a bad programmer and a good one is whether he considers his code or his data structures more important. Bad programmers worry about the code. Good programmers worry about data structures and their relationships. — Linus Torvalds

Algoritmi: proprietăți

- **input** (intrare) – zero sau mai multe entități de date furnizate din exterior.
- **output** (ieșire) – algoritmul produce informație.
- **terminare** – pentru orice intrare, algoritmul execută un număr finit de pași.
- **corectitudine** – algoritmul se termină și produce ieșirea corectă pentru orice intrare; spunem că algoritmul **rezolvă** problema dată.

Algoritmi: eficiență

- Un algoritm trebuie să folosească un volum rezonabil de resurse de calcul: [spațiu de] memorie și timp [de execuție].

- Avem nevoie de algoritmi eficienți pentru:
  - a salva timpi de așteptare, spațiu de depozitare, consum energie, etc.;
  - scalabilitate: putem rezolva probleme de dimensiuni mari cu aceleași resurse (CPU, memorie, disc, etc.);
  - soluții optimizate.

Algoritmi: eficiență

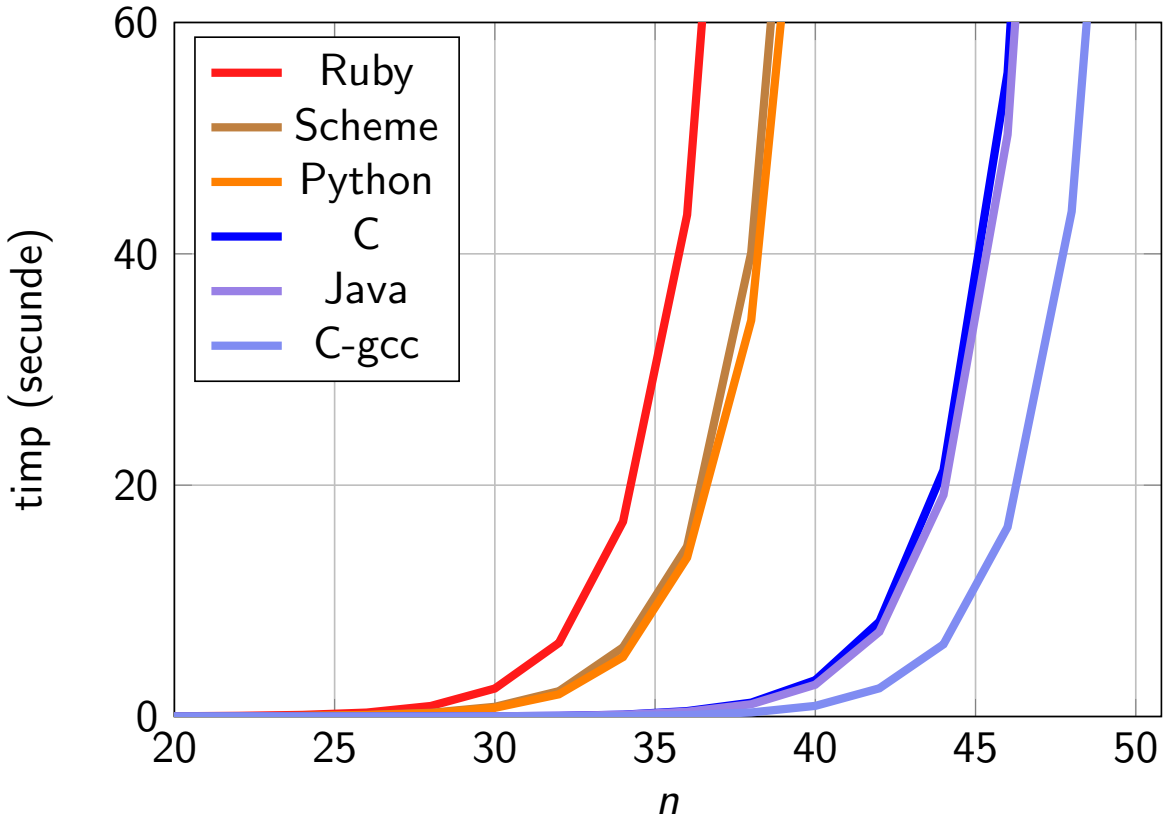


Figura : Execuția algoritmului recursiv F (Fibonacci).

Observație: Comportamentul este diferit în funcție de tipul implementării; totuși diferențele nu sunt atât de substanțiale $\Longrightarrow$ Problema e algoritmul! (complexitate exponențială)

Proiectarea algoritmilor

Rezolvarea algoritmică a problemelor presupune următoarele etape:

- definirea problemei
  - abstractizează detaliile irelevante;
- identificarea clasei din care face parte problema și a unui algoritm de construcție a soluției;
- analiza corectitudinii și a eficienței algoritmului;
- implementarea algoritmului;
- (optimizare și generalizare).

Descrierea algoritmilor

- **informal**: limbaj natural.
- **formal**:
  - notație matematică (mașini Turing, lambda-calcul (Church), funcții recursive, etc.);
  - limbaje de programare: de nivel inalt, de nivel jos, declarative (e.g., programare funcțională, programare logică). Acesta poate fi și un model informal dacă nu există o semnatică formală pentru limbaj.
- **semiformal**:
  - pseudo-cod: combină notația formală a limbajelor de prgramare cu limbajul natural;
  - notație grafică: scheme logice, automate (state machines), diagrame de activități.

Conținut

Limbaj algoritmic

Avem nevoie de un limbaj care este

- **simplu**: pentru a fi ușor de înțeles;
- **expresiv**: pentru a descrie algoritmi;
- **abstract**, în descrierea algoritmului accentul cade pe gândirea algoritmică și nu pe detaliile de implementare;
- un model de calcul adecvat pentru analiza complexității algoritmilor, în special complexitatea timp.

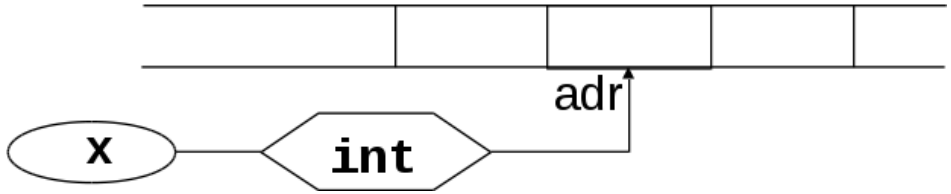
Variabilă

- Nume
- Adresă
- Atribute (tip de date asociat valorilor memorate)

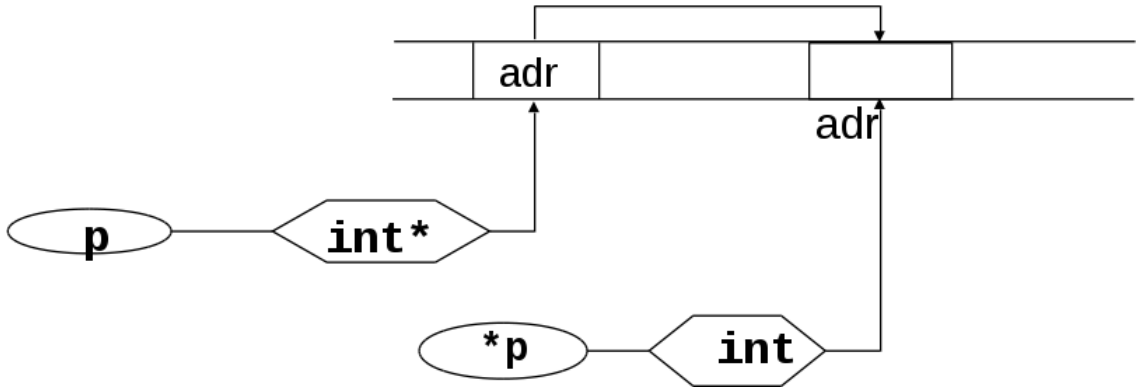
- Instanță a variabilei

Modelul de calcul

- Memoria: structură liniară de celule
  - variabile



  - pointeri



Conținut

Tip de date

- Domeniu (colecția de obiecte)
- Operații

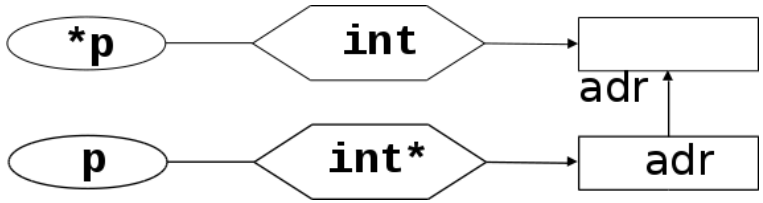
- Categorii de tipuri de date:
  - Tipuri de date elementare
  - Tipuri de date structurate de nivel jos
    - operațiile la nivel de componentă
  - Tipuri de date de nivel înalt
    - operațiile implementate de algoritmi utilizator

Tipuri de date elementare

- Numere întregi
  - valori: numere întregi
  - operații: +, -, ...
- Numere reale
  - valori: numere raționale
  - operații: +, -, ...
- Valori booleene
  - valori: *true*, *false*
  - operații: *and*, *or*, *not*

Tipuri de date elementare

- Caractere
  - valori: 'a', 'b', ...
  - operații: —
- Pointeri
  - valori: adrese de variabile aparținând altui tip, valoarea NULL
  - operații: —
  - referire indirecta: *p



Tipuri de date elementare

- Operatori pentru numere întregi:
  - aritmetici: a+b, a-b, a*b, a/b, a%b
  - relaționali: a==b, a!=b, a<b, a<=b, a>b, a>=b

operatie	timp(operatie)	
	cost uniform	cost logaritmic
$a + b$	$O(1)$	$O(max(loga, logb))$
...		

Instrucțiuni

- Expresii
- Compuse (bloc): {instructiuni}
- Condiționale: **if if-else**
- Iterative: **while repeat for**
- Întreruperea secvenței: **return**

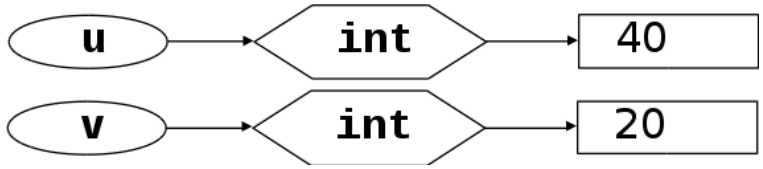
Instrucțiuni

- **Atribuirea**
  - **Sintaxa**: $< \textit{variabila} > \leftarrow < \textit{expresie} >$
  - **Sematica**:
    - se evaluează $< \textit{expresie} >$ și rezultatul obținut se memorează în locația desemnată de $< \textit{variabila} >$
    - este singura instrucțiune cu ajutorul căreia se poate modifica conținutul memoriei
  - cost uniform $O(1)$, cost logaritmic $O(\textit{log} < \textit{expresie} >)$

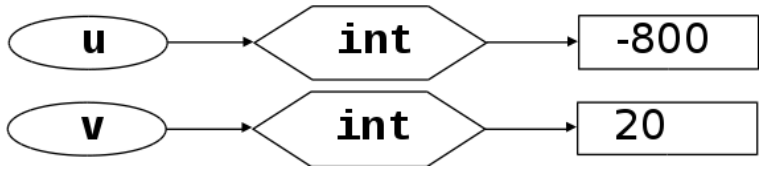
Atribuirea

Exemplu:

- Înainte de atribuire:

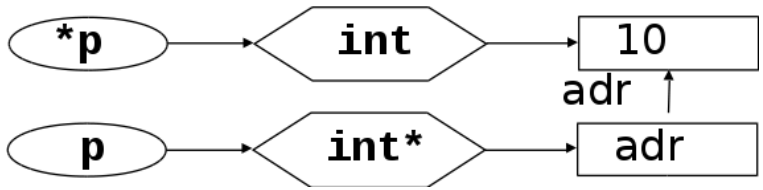


- După atribuirea $u \leftarrow -v * u$:



Instrucțiuni

- Atribuirea în cazul pointerilor
  - **Sintaxa**:
    $* <$ *variabila_pointer* $> \leftarrow <$ *expresie* $>$
  - **Sematica**:
    - se evaluează $<$ *expresie* $>$ și rezultatul obținut se memorează în locația de la adresa stocată în $<$ *variabila_pointer* $>$
  - Exemplu: $*p \leftarrow 10$



Instrucțiuni

- **if**
  - **Sintaxa**:
    if $<$ *expresie* $>$ **then**
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni*$_1$ $>$
    else
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni*$_2$ $>$

    if $<$ *expresie* $>$ **then**
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni*$_1$ $>$

    Observație: $<$ *expresie* $>$ este o expresie cu rezultat boolean după evaluare
  - **Semantica**:
    - Se evaluează $<$ *expresie* $>$. Dacă rezultatul este *true*, atunci se execută $<$ *secventa* $-$ *instructiuni*$_1$ $>$ iar dacă rezultatul este *false*, atunci se execută $<$ *secventa* $-$ *instructiuni*$_2$ $>$ după care instrucțiunea if se termină

Instructiunea if

- cost uniform $O(1)$, cost logaritmic $O(1)$
- Exemplu: calculului minimului a două numere:

if $a < b$ **then**
    $min \leftarrow a$
else
    $min \leftarrow b$

sau
$min \leftarrow a$
if $b < a$ **then**
    $min \leftarrow b$

Instrucțiuni

- **while**
  - **Sintaxa**:
    while $<$ *expresie* $>$ **do**
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni* $>$
  - **Semantica**:
    - Se evaluează $<$ *expresie* $>$
    - Dacă rezultatul este *true* atunci se execută $<$ *secventa* $-$ *instructiuni* $>$ după care se reia procesul începând cu pasul 1. Dacă rezultatul este *false* atunci execuția instrucțiunii while se termină.

Exemplu **while**

- cel mai mic k astfel încât $7^k >= n$ pentru un n dat

  $k \leftarrow 0$

  $sapte\_la\_k \leftarrow 1$

  while $sapte\_la\_k < n$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  $sapte\_la\_k \leftarrow sapte\_la\_k * 7$

Instrucțiuni

- **repeat**
  - **Sintaxa**:
    repeat
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni* $>$
    until $<$ *expresie* $>$;
  - **Semantica**:
    Instrucțiunea:
    repeat
    S
    until e;
    simulează execuția următorului program:
    S
    while *not* e **do**
    S

Exemplu **repeat**

- cel mai mic k astfel încât $7^k >= n$ pentru un n dat

$k \leftarrow 0$

$sapte\_la\_k \leftarrow 1$

repeat

    $k \leftarrow k + 1$

    $sapte\_la\_k \leftarrow sapte\_la\_k * 7$

until $sapte\_la\_k >= n$;

Instrucțiuni

- **for**
  - **Sintaxa**:
    for $<$ *variabila* $>\leftarrow<$ *expresie*$_1$ $>$ **to** $<$ *expresie*$_2$ $>$ **do**
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni* $>$

    sau
    for $<$ *variabila* $>\leftarrow<$ *expresie*$_1$ $>$ **downto** $<$ *expresie*$_2$ $>$ **do**
    $<$ *secventa* $-$ *instructiuni* $>$

    Observație: $<$ *variabila* $>$ este o variabilă de tip întreg, iar $<$ *expresie*$_1$ $>$ și $<$ *expresie*$_2$ $>$ sunt expresii cu rezultat întreg după evaluare

Instrucțiuni

- **for**
  - **Semantica**:

    for $i \leftarrow e1$ **to** $e2$ **do**
    S

    este echivalentă cu:
    $i \leftarrow e1$
    $temp \leftarrow e2$
    while $i <= temp$ **do**
    S
    $i \leftarrow i + 1$

Instrucțiuni

- **for**
  - **Semantica**:

    for $i \leftarrow e1$ **downto** $e2$ **do**
    S

    este echivalentă cu:
    $i \leftarrow e1$
    $temp \leftarrow e2$
    while $i >= temp$ **do**
    S
    $i \leftarrow i - 1$

Subprograme

- Limbajul este modular: un program conține un număr de module
- Un modul în limbajul prezentat este identificat cu un subprogram
- Subprograme:
  - Proceduri
  - Funcții

Subprograme

- **Proceduri**:
  - **Sintaxa**:

    Procedure *nume (lista-parametri-formali)*
    begin
        secventa-instructiuni
    end

  - **Apel**: NUME(lista-parametri-actuali)
    - interfața între o procedură și modulul care o apelează se realizează doar prin intermediul parametrilor și a variabilelor globale

Proceduri

- Exemplu:

Procedure *SWAP (x,y)*
begin
    $aux \leftarrow x$
    $x \leftarrow y$
    $y \leftarrow aux$
end

Apel:
SWAP(a, b)
SWAP(b, c)

Subprograme

- **Funcții**:
  - **Sintaxa**:

    Function *nume (lista-parametri-formali)*
    begin
        secventa-instructiuni
    end

    secventa-instructiuni conține măcar o instrucțiune *return* $<$ *expr* $>$

  - **Apel**: NUME(lista-parametri-actuali)

    utilizat într-o expresie: valoarea întoarsă de funcție este cea obținută prin evaluarea $<$ *expr* $>$

Funcții

- Exemplu:

Function *max3(x,y,z)*
begin
    $temp \leftarrow x$
    if $y > temp$ **then**
        $temp \leftarrow y$
    if $z > temp$ **then**
        $temp \leftarrow z$
    return *temp*
end

Apel:
max3(a, b, c)
2*max3(a, b, c) $>$ 5

Conținut

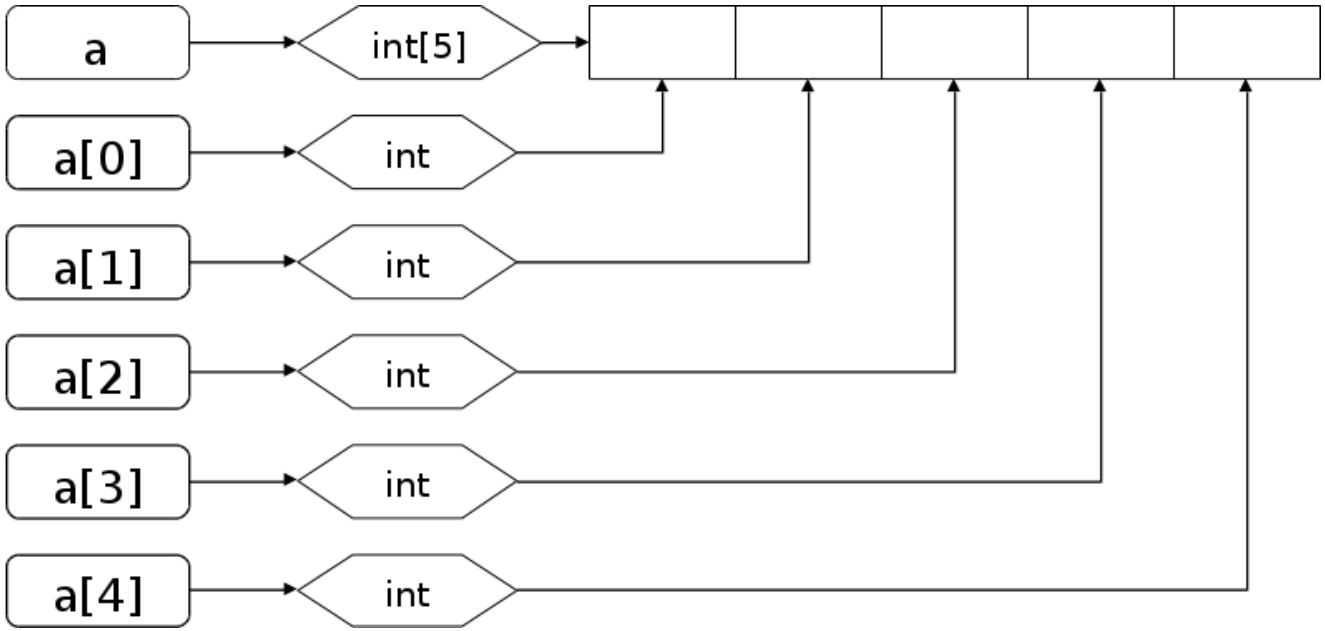
Tablouri

- Ansamblu omogen de variabile numite componentele tabloului
- Toate componentele aparțin aceluiași tip
- Componentele sunt identificate cu ajutorul indicilor

- Tablourile sunt utilizate pentru a reprezenta mulțimi, secvențe (ordinea elementelor este importantă), matrici

- Tablourile pot fi:
  - unidimensionale (1-dimensionale)
  - bidimensionale (2-dimensionale)

Tablouri unidimensionale



Tablouri unidimensionale

- Memoria este o secvență contiguă de locații
- Ordinea de memorare – ordinea indicilor
- Operațiile se realizează prin intermediul componentelor
  Exemple:

  for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $a[i] \leftarrow 0$

  for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $c[i] \leftarrow a[i] + b[i]$

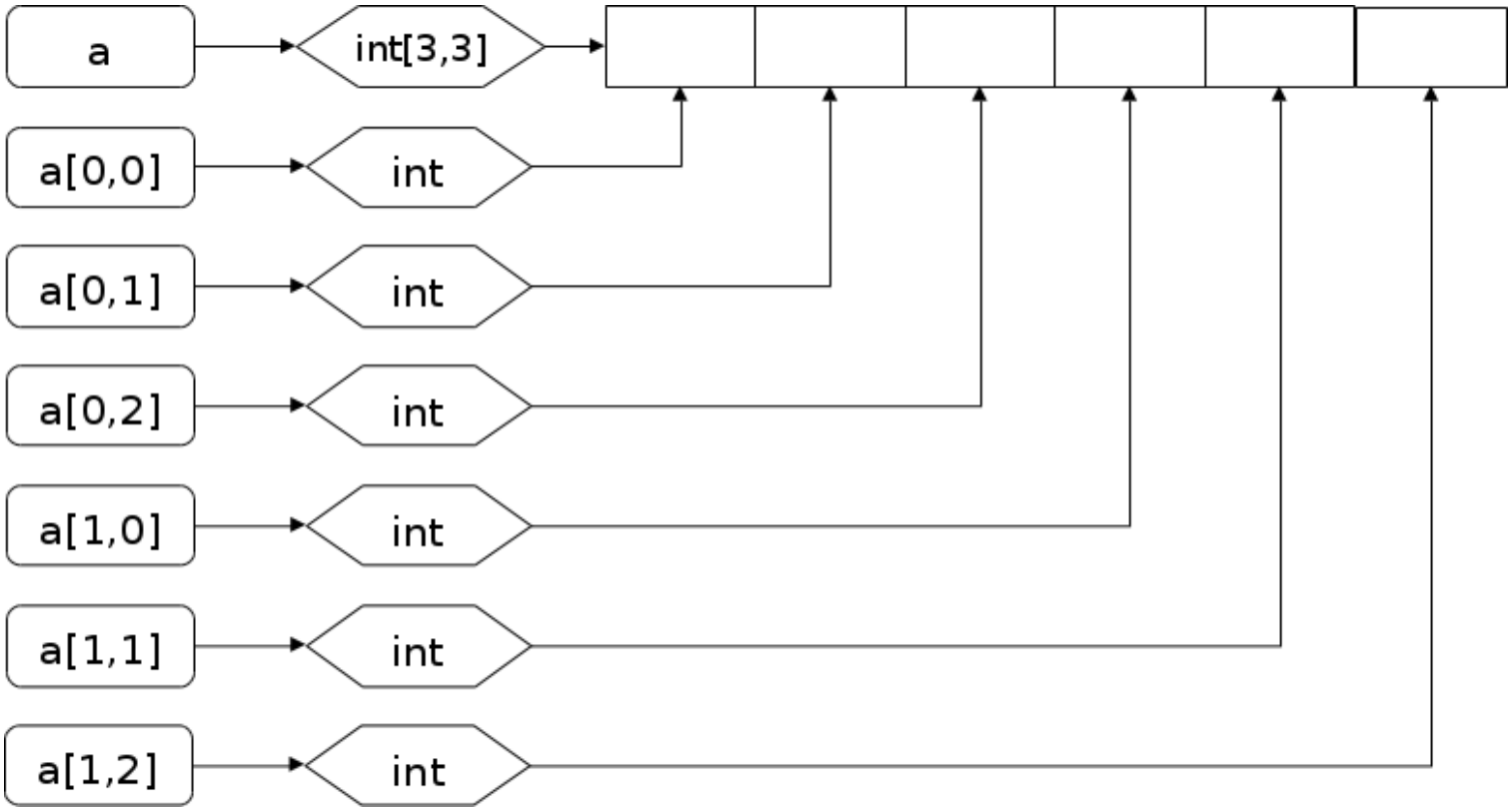
Tablouri

Costul operațiilor:

operatie	timp(operatie)	
	cost uniform	cost logaritmic
$a[i]$	$O(1)$	$O(i + loga_i)$
$a[i] \leftarrow v$	$O(1)$	$O(i + logv)$

unde a este un tablou de dimensiune n, cu valorile $a[0], ..., a[n-1]$

Tablouri bidimensionale

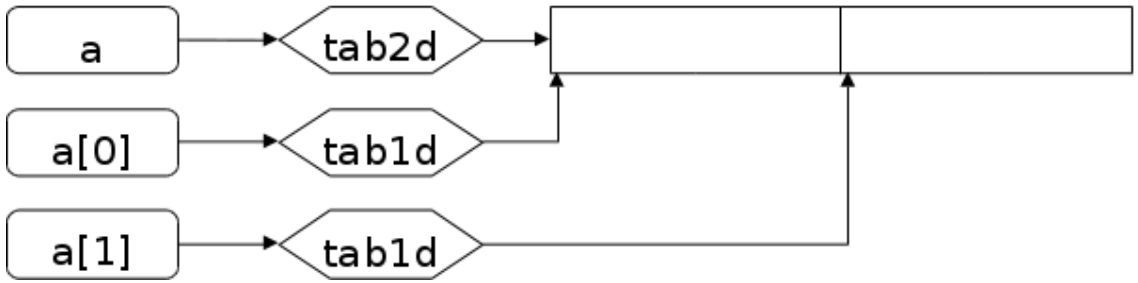


Tablouri bidimensionale

- Memorie contiguă de *mxn* locații
- Componentele sunt identificate cu ajutorul a 2 indici:
  - primul indice are valori $\{0, 1, \ldots, m-1\}$
  - al doilea indice are valori $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
  - variabilele componente :
    $a[0,0], a[0,1], \ldots, a[0,n-1], a[1,0], a[1,1], \ldots, a[1,n-1], \ldots, a[m-1,0], a[m-1,1], \ldots, a[m-1,n-1]$
- Ordinea de memorare a componentelor este dată de ordinea lexicografică a indicilor

Tablouri bidimensionale

- Cu analogia de la matrici, un tablou 2-dimensional poate fi privit ca un tablou 1-dimensional în care fiecare componentă este un tablou 1-dimensional.
- Notație: $a[0][0], a[0][1], \ldots, a[0][n-1], \ldots, a[m-1][0], a[m-1][1], \ldots, a[m-1][n-1]$



Tablouri bidimensionale

- Operațiile cu tablori 2-dimensionale se realizează prin intermediul componentelor

for $i \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
    for $j \leftarrow 0$ **to** n–1 **do**
        $c[i, j] \leftarrow 0$
        for $k \leftarrow 0$ **to** p–1 **do**
            $c[i, j] \leftarrow c[i, j] + a[i, k] * b[k, j]$

Șiruri de caractere

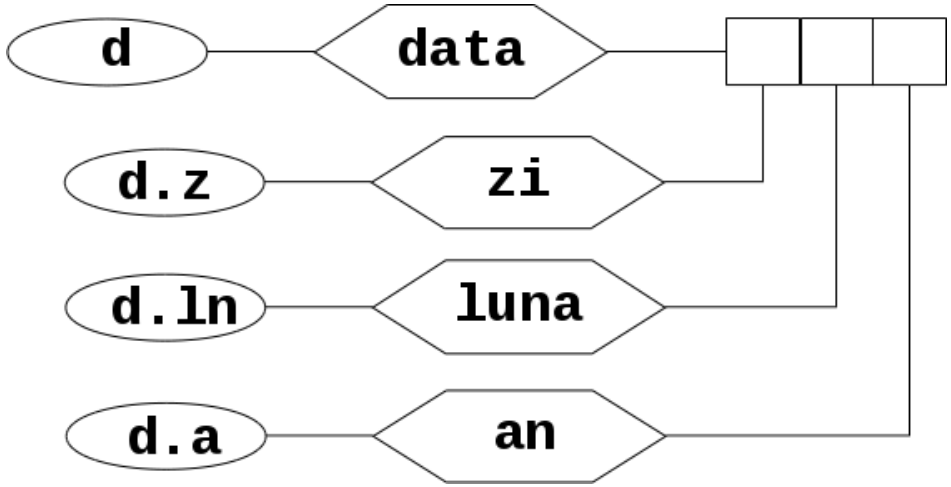
- Pot fi considerate ca fiind tablouri unidimensionale cu elemente de tip caracter
- Constantele șir de caracter se notează utilizând " ":
  "Șir-de-caractere"
- Operații: Concatenarea, notată cu +:
  "un sir" + "alt sir" = "un siralt sir"

Structuri

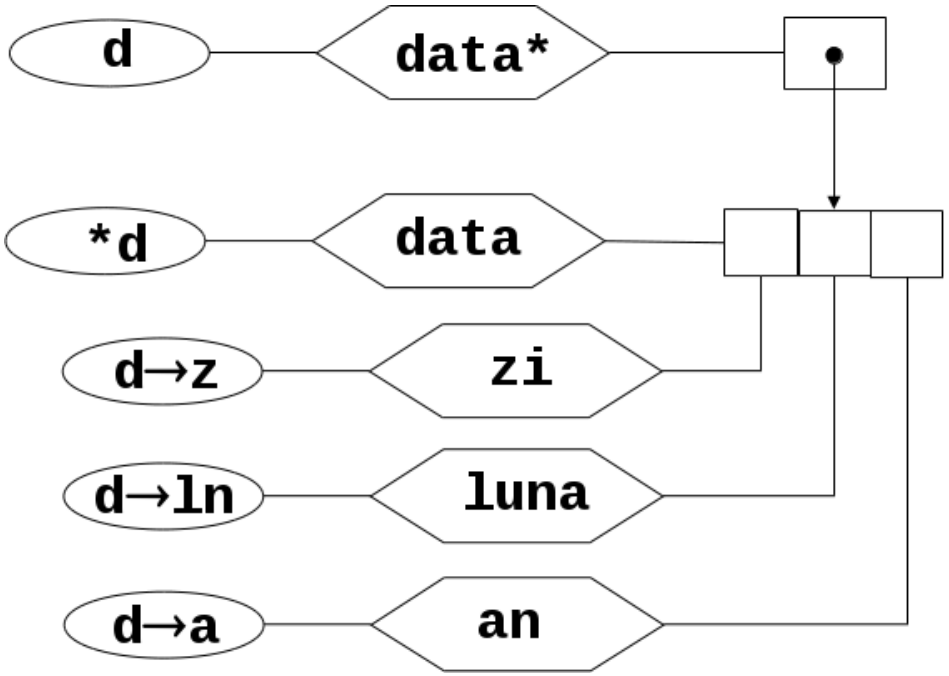
- Structura: ansamblu eterogen de variabile numite câmpuri.
- Structura are un nume și fiecare câmp are propriul nume și propriul tip.
- Exemple: o structură pentru a reprezenta puncte în plan are două câmpuri: x și y; o structură pentru a reprezenta o persoană poate avea trei câmpuri: nume, vârstă, adresă;
- Numele complet al unui câmp:
  punct.x, punct.y
  persoana.nume, persoana.varsta, persoana.adresa.strada
  dacă p este pointer la persoana: $p->varsta$

Structuri

- Memoria alocată este o zonă contiguă; elementele sunt memorate în ordinea declarării în structură



Structuri si pointeri



Costul operațiilor:

operatie	timp(operatie)	
	cost uniform	cost logaritmic
$S.x$	$O(1)$	$O(logS_x)$
$S.x \leftarrow v$	$O(1)$	$O(logv)$

Execuția unui algoritm

$x \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
while $i < 6$ **do**
    $x \leftarrow x * 10 + i$
    $i \leftarrow i + 2$

Pasul	Instrucțiunea	i	x
0	$x \leftarrow 0$	–	–
1	$i \leftarrow 1$	–	0
2	$1 < 6$	1	0
3	$x \leftarrow x * 10 + i$	1	0
4	$i \leftarrow i + 2$	1	1
5	$3 < 6$	3	1
6	$x \leftarrow x * 10 + i$	3	1
7	$i \leftarrow i + 2$	3	13
8	$5 < 6$	5	13
9	$x \leftarrow x * 10 + i$	5	13
10	$i \leftarrow i + 2$	5	135
11	$7 < 6$	7	135
12		7	135

Execuția unui algoritm

- **Calcul**: succesiunea de pași elementari determinați de execuția instrucțiunilor ce compun algoritmul.
- **Configurație**: starea memoriei + instrucțiunea curentă;

$x \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
while $i < 6$ **do**
    $x \leftarrow x * 10 + i$
    $i \leftarrow i + 2$

Pasul	Instrucțiunea	i	x
0	$x \leftarrow 0$	–	–
1	$i \leftarrow 1$	–	0
2	$1 < 6$	1	0
3	$x \leftarrow x * 10 + i$	1	0
4	$i \leftarrow i + 2$	1	1
5	$3 < 6$	3	1
6	$x \leftarrow x * 10 + i$	3	1
7	$i \leftarrow i + 2$	3	13
8	$5 < 6$	5	13
9	$x \leftarrow x * 10 + i$	5	13
10	$i \leftarrow i + 2$	5	135
11	$7 < 6$	7	135
12		7	135

Execuția unui algoritm

- **Calcul**: succesiunea de pași elementari determinați de execuția instrucțiunilor ce compun algoritmul.
- **Configurație**: starea memoriei + instrucțiunea curentă;
- În exemplul de mai jos calculul este dat de secvența de configurații $(c_0 \mapsto c_1 \mapsto \cdots \mapsto c_{12})$.

$x \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
while $i < 6$ **do**
    $x \leftarrow x * 10 + i$
    $i \leftarrow i + 2$

Pasul	Instrucțiunea	i	x
0	$x \leftarrow 0$	–	–
1	$i \leftarrow 1$	–	0
2	$1 < 6$	1	0
3	$x \leftarrow x * 10 + i$	1	0
4	$i \leftarrow i + 2$	1	1
5	$3 < 6$	3	1
6	$x \leftarrow x * 10 + i$	3	1
7	$i \leftarrow i + 2$	3	13
8	$5 < 6$	5	13
9	$x \leftarrow x * 10 + i$	5	13
10	$i \leftarrow i + 2$	5	135
11	$7 < 6$	7	135
12		7	135