Setul 2
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la şiruri numerice şi de funcţii şi inegalităţi remarcabile din $\mathbb{R}$)

S2.1 Să se demonstreze Propoziţia 2.6 din cursul 2.

S2.2 Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$. Să se arate că $\beta = \inf A$ $(\in \mathbb{R})$ dacă şi numai dacă

(i) $\beta \leq x,\ \forall\, x \in A$ şi

(i) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A$ astfel încât $x_\epsilon < \beta + \epsilon$.

S2.3 Să se stabilească care dintre şirurile cu termenii generali următori este şir Cauchy şi care nu este:

1) $x_n = \dfrac{\sin a}{2} + \dfrac{\sin 2a}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin na}{2^n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (unde a este un parametru real dat).

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

S2.4 (Lema lui O. Stolz) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir oarecare, iar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ un şir monoton şi nemărginit. Să se arate că, dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},\ \text{în } \overline{\mathbb{R}},$$

atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, având loc egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

S2.5 Să se arate că şirul cu termenul general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent în $\mathbb{R}$ (limita sa fiind aşa numita constantă a lui Euler, $c = 0,577215... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

S2.6 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, unde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent (limita sa este egală cu $\dfrac{\pi^2}{6}$, după cum se poate stabili pe o cale abordabilă ulterior).

S2.7 Să se calculeze următoarele limite

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}}; \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \qquad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}.$$

S2.8 Să se determine $L(x_n)$ pentru fiecare din şirurile cu termenul general x_n, unde:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}^*$; b) $x_n = 2+(-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$; c) $x_n = \dfrac{(-1)^n + n\ \mathrm{tg}\frac{n\pi}{4}}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

S2.9 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, în $[0,+\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, având loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

S2.10 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, definit prin $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) x_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent şi să i se afle limita.

S2.11 Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}$.

S2.12 Să se găsească $L(x_n)$ pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, unde

$$x_n = [1+(-1)^n]\cdot n^{(-1)^n} + \cos\frac{n\pi}{6},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

S2.12 Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă a următoarelor şiruri de funcţii:

$a)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$; $b)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx(1-x)^n$;

$c)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{\dfrac{n^2x^2+1}{n^2}}$; $d)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{1+n(n+1)x^2}$;

$e)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \left(|\sin x|^n + |\cos x|^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^{1/n}$;

$f)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$; $g)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = n^2x^2e^{-n^2x^2}$.

S2.13 Ce se poate spune despre convergenţa uniformă a următoarelor şiruri de funcţii?

$a)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{n-(x-1)e^{nx}}{e^{nx}+n}$; $b)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k(k+1)}$;

$c)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ f_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\dfrac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$.

S2.14 Să se demonstreze inegalitatea lui Hölder:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\Big)^{1/q}$$

pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi orice $p, q \in (1, +\infty)$ astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

S2.15 Să se arate că, pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ şi $p \geq 1$, are loc inegalitatea lui Minkowski

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\Big)^{1/p}.$$

S2.16 *(Inegalitatea generalizată a mediilor)* Să se arate că pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, 1]$ cu $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, avem

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot ... \cdot x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n.$$

S2.17 *(Inegalitatea lui Carleman)* Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k)^{1/k} \leq e\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

unde e este un coeficient optimal când $n \to \infty$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

S2.18 *(Inegalitatea lui Titu Andreescu)* Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, are loc

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

S2.19 Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$, avem

$$\min(a_1, a_2, ..., a_n) \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{n}\right)^{1/2} \leq \max(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Bibliografie selectivă

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, (§1.5), ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.

2. W. J. Kaczor, M. T. Nowak - *Problems in Mathematical Analysis. Real numbers, sequences, series*, Student Mathematical Library, vol. 4, AMS Publ., 2000.

3. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. N. Cotfas, L. A. Cotfas - *Elemente de analiză matematică,* Ed. Universit. din Bucureşti, 2010.

7. W. Anscombe - *Cauchy Sequences: Cauchy's Criterion as a useful test for convergence*, University of Leeds, United Kingdom, 2013.

8. L. Fehér, G. Kós, Á. Tóth - *Mathematical Analysis. Problems and Exercises-II*, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Typotex, 2014.