Cursul 10

Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor. Derivate şi diferenţiale. Formule de calcul diferenţial.

Printre conceptele fundamentale ale matematicii, implicate fie în stabilirea vitezei de variaţie a stării unor procese din realitatea fizică, fie în problema exprimării (aproximării) locale a unor funcţii neliniare prin aplicaţii liniare, fie în chestiuni geometrice de tangenţă, se numără şi cele relative la derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor, între care se disting noţiunile de derivată şi diferenţială.

Derivabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală

Definiţia 10.1 *a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. De asemenea, fie $x_0 \in A \cap A'$. Funcţia f se numeşte* ***derivabilă în*** *x_0 dacă*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

există şi este din $\mathbb{R}$.

Vom nota limita cu $f'(x_0)$ sau $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, şi o vom numi ***derivata lui*** *f* ***în punctul*** *x_0.*

b) Dacă f este derivabilă în orice punct al unei mulţimi nevide $\widetilde{A} \subseteq A$, spunem că f este derivabilă pe $\widetilde{A}$.

c) Fie $A_1 \subseteq A$, A_1 nevidă, mulţimea punctelor în care $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă.

Funcţia $x \longrightarrow f'(x)$, $x \in A_1$ se numeşte ***derivata lui*** *f şi se notează cu f' sau $\dfrac{df}{dx}$.*

Definiţia 10.2 *Fie A nevidă, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap A'$ şi fie $f : A \to \mathbb{R}$.*

i) Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte ***derivabilă la stânga*** *în punctul x_0 dacă limita $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există.*

Vom nota această limită cu $f'_s(x_0)$.

ii) Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte ***derivabilă la dreapta*** *în punctul x_0 dacă $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există.*

Vom nota această limită cu $f'_d(x_0)$.

iii) Dacă există $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci spunem că f are ***derivată în*** *x_0.*

Observaţii: O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *derivabilă într-un punct* $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă derivatele sale laterale (la stânga şi la dreapta) în x_0, adică $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$ există, sunt finite şi egale între ele. Atunci: $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

Definiţia 10.3 *Spunem că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este* ***de clasă*** *$\mathcal{C}^1(A)$ dacă f este derivabilă pe A şi are derivata f' continuă pe A.*

Observaţie: Când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este doar continuă pe A, spunem că $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Pentru simplitate, în locul notaţiei $\mathcal{C}^0(A)$, vom folosi notaţia $\mathcal{C}(A)$.

Propoziţia 10.4 *Orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ care este derivabilă pe A este şi continuă pe A. Nu şi reciproc. Altfel scris avem $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$.*

Demonstraţie: Prin ipoteză, pentru orice $x_0 \in A$, există şi este finită $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Cum, $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, avem $f(x) = (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)$ iar $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, deducem că există $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. Cum x_0 este ales arbitrar din A, rezultă că f este continuă pe A. Deci $f \in \mathcal{C}(A)$, din moment ce, iniţial, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Şi aceasta pentru orice f din $\mathcal{C}^1(A)$. În concluzie, avem $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Reciproca acestei propoziţii nu este adevărată. Spre exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x|$, este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $\mathbb{R}^*$. Prin urmare, $\mathcal{C}(A) \not\subseteq \mathcal{C}^1(A)$. ◀

Teorema 10.5 (Reguli de calcul pentru derivate) *a) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f şi g sunt derivabile pe $\widetilde{A} \subseteq A$, $\widetilde{A}$ nevidă, atunci funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ (când $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \widetilde{A}$) sunt derivabile pe $\widetilde{A}$ şi, pe $\widetilde{A}$, avem:*

$$(f+g)' = f' + g'; \quad (\alpha f)' = \alpha f';$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

b) (Regula "lanţului") Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile (fiecare pe mulţimea ei de definiţie). Atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă pe A şi avem:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

c) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă pe A şi $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in A$, atunci funcţia inversă $f^{-1} : B \to A$ este derivabilă pe B şi, pe B, are loc relaţia:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Observaţie: Amintim că derivatele funcţiilor elementare de bază se calculează potrivit următoarelor formule

$$(c)' \equiv \frac{d}{dx}(c) = 0, \forall\, c \in \mathbb{R}; \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D_\alpha \subseteq \mathbb{R};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \forall\, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\sin x)' = \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\cos x)' = -\sin x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

Utilizând regulile din Teorema 10.5, putem determina derivatele unor funcţii care se obţin din funcţii elementare prin operaţii algebrice sau prin operaţii de compunere. Astfel, redescoperim formulele

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall\, x \in (-1, 1); \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall\, x \in (-1, 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}; \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

precum şi relaţia

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right),$$

adevărată atunci când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe A.

Derivabilitatea funcţiilor reale de argument scalar şi cu valori vectoriale

Ţinând seama de Definiţia 10.1 şi de regulile de calcul pentru limite de funcţii cu valori vectoriale (v. Cursul 9), ne dăm seama că, în cazul funcţiilor reale de argument scalar şi cu valori în $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$), noţiunile de derivată şi de derivabilitate se pot defini pe baza următorului rezultat.

Propoziţia 10.6 *Funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, cu $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, q}$, este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ (respectiv pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$) dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile componente $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$). În plus, are loc relaţia:*

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$$

(respectiv $f' = (f_1', f_2' \ldots, f_q')$, pe $\widetilde{A}$).

Demonstraţie: Observăm că, pentru orice $x \in A \setminus \{x_0\}$, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Deducem de aici că există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, notată cu $f'(x_0)$ şi denumită derivata lui f în x_0, dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$, $\forall\, k = \overline{1, q}$.
Cu alte cuvinte, f este derivabilă în x_0 şi avem egalitatea $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$ dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0. Este evident acum că $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ este derivabilă pe $\widetilde{A}$ dacă şi numai dacă $\forall\, k = \overline{1, q}$, f_k este derivabilă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţie: Un rezultat analog Propoziţiei 10.6 poate fi demonstrat atunci când, în locul lui $f'(x_0)$ şi respectiv $f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0)$, se consideră derivatele corespunzătoare la stânga (sau cele la dreapta). Astfel, funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ va fi derivabilă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0. Evident că, şi într-un astfel de caz, al funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}^q$, putem spune că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă există $f_s'(x_0) = ((f_1)_s'(x_0), (f_2)_s'(x_0), \ldots, (f_q)_s'(x_0))$ şi este din $\mathbb{R}^q$, şi există $f_d'(x_0) = ((f_1)_d'(x_0), (f_2)_d'(x_0), \ldots, (f_q)_d'(x_0)) \in \mathbb{R}^q$ iar $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. Valoarea comună a acestor derivate laterale este tocmai $f'(x_0)$.

Prin utilizarea Propoziţiei 10.6 şi a Teoremei 10.5, se deduc următoarele reguli de calcul pentru derivatele (de ordinul I) ordinare ale unor funcţii reale, scalar-vectoriale:

Teorema 10.7 (Reguli de calcul) *Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$), atunci funcţiile $\alpha f + \beta g$, $\varphi \cdot f$, $\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle$ sunt derivabile în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$) (unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă un produs scalar pe $\mathbb{R}^q$). Mai mult au loc formulele:*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{)},$$

$$(\varphi \cdot f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{) şi}$$

$$(\langle f(x), g(x) \rangle)' = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle, \text{ pentru } x = x_0 \text{ (respectiv } \forall\, x \in \widetilde{A}).$$

În plus, dacă $\psi : B \subseteq \mathbb{R} \to A$ este derivabilă pe $\widetilde{B} \subseteq B$, atunci funcţia $f \circ \psi = (f_1 \circ \psi, f_2 \circ \psi, \ldots, f_q \circ \psi) : B \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă pe $\widetilde{B}$ şi are loc relaţia:

$$(f \circ \psi)'(x) = (\psi' \cdot (f' \circ \psi))(x) = \psi'(x) \cdot \left(f_1'(\psi(x)), f_2'(\psi(x)), \ldots, f_q'(\psi(x)) \right), \forall\, x \in \widetilde{B}.$$

Derivabilitatea după o direcţie

Referindu-ne acum la cazul funcţiilor reale de argument vectorial, este de constatat că, deoarece raportul $\dfrac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}$ nu are sens, nu se poate vorbi despre $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}$ şi deci nu se poate introduce noţiunea de derivată în x_0 prin procedura folosită la funcţiile de argument scalar. Inconvenientul poate fi totuşi surmontat pe una din cele două căi sugerate, pe de o parte, de observaţia potrivit căreia, în cazul unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a unui punct $x_0 \in A$, dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, avem, pe de-o parte, relaţia $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ şi, pe de altă parte, următorul rezultat:

Propoziţia 10.8 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ aşa încât $A \neq \varnothing$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in A$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este derivabilă în x_0;

ii) există o aplicaţie liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-T_0(x-x_0)}{x-x_0}=0.$$

Demonstraţie: Dacă f este derivabilă în x_0, atunci există derivata $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Prin intermediul ei, există aplicaţia liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită potrivit relaţiei $T_0(h) = f'(x_0) \cdot h$, astfel încât:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-T_0(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0.$$

Reciproc, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{x-x_0}=0,$$

atunci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(h) = t \cdot h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$ şi, ca atare, obţinem:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-t\right)=0.$$

Rezultă deci că există $f'(x_0) = t$ şi $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, adică f este derivabilă în x_0. ◄

Folosind prima dintre căile menţionate mai înainte, ajungem la noţiunea de ***diferenţială Gâteaux***, în conformitate cu următoarea definiţie:

Definiţia 10.9 *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde D este o mulţime deschisă în topologia uzuală pe $\mathbb{R}^p$. De asemenea, fie $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, astfel încât $\|\mathrm{v}\|_e = 1$, unde $\|\cdot\|_e$ reprezintă norma euclidiană pe $\mathbb{R}^p$.*

*Dacă există $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t} \in \mathbb{R}^q$, atunci această limită, notată cu $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})$ (sau $\dfrac{df}{d\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$, sau $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$), se numeşte **diferenţiala Gâteaux a lui f în punctul** x_0, **după versorul (direcţia)** v sau **derivata direcţională, după (direcţia)** v, **a funcţiei f, în punctul** x_0.*

Observaţie: Întrucât, când există $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$, avem

$$f'(\mathrm{x}_0;s\mathrm{v})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot s\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t}=s\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot s\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{ts}=sf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),\forall\, s\in\mathbb{R}^*$$

şi

$$f'(\mathrm{x}_0;0\cdot\mathrm{v})=f'(\mathrm{x}_0;\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})-f(\mathrm{x}_0)}{t}=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}=0\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),$$

se poate spune că aplicaţia $\psi : D \times B_{d_e}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p};1) \to \mathbb{R}^q$, definită prin $\psi(\mathrm{x}_0,\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0,\mathrm{v})$, este omogenă în raport cu v.

Aşadar, diferenţiala Gâteaux a lui f în x_0, după direcţia v, are sens chiar şi atunci când v nu este numaidecât versor, deci putem renunţa în Definiţia 10.9, la precizarea $\|v\|_e = 1$.

Definiţia 10.10 *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$*, unde* D *este o mulţime deschisă,* $\mathrm{x}_0 \in D$*.*

a) Dacă există $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ *pentru orice* $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$*, atunci spunem că funcţia* f *este* ***diferenţiabilă Gâteaux în*** $\mathrm{x}_0 \in D$*.*

b) Dacă aplicaţia $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p \longmapsto f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ *este liniară (nu numai omogenă) şi continuă, atunci elementul din* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$*, notat cu* $f'(\mathrm{x}_0)$ *şi definit prin relaţia*

$$f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

se numeşte ***derivata Gâteaux a funcţiei*** f ***în punctul*** x_0*, iar funcţia* f *se numeşte* ***derivabilă Gâteaux*** *sau* ***derivabilă direcţional, în punctul*** x_0*.*

c) Spunem că funcţia f *este* ***diferenţiabilă Gâteaux pe o mulţime*** $\widetilde{D} \subseteq D$ *dacă* $\exists\ f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$*,* $\forall\ \mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$*,* $\forall \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$*. Analog, dacă derivata Gâteaux* $f'(\mathrm{x}_0)$ *există în orice punct* $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$*, vom spune că funcţia* f *este* ***derivabilă Gâteaux pe mulţimea*** $\widetilde{D}$*.*

Observaţie: Mulţimea funcţiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ Gâteaux-diferenţiabile (respectiv Gâteaux-derivabile) într-un punct din D sau pe o submulţime a lui D este nevidă, deoarece din această mulţime fac parte funcţiile identic-constante ($f(\mathrm{x}) = c \in \mathbb{R}^q$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$), care au diferenţiala Gâteaux egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, în orice punct din D, după orice direcţie v din $\mathbb{R}^p$. De asemenea, aceleiaşi mulţimi îi aparţin şi funcţiile liniare $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, pentru care avem:

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}_0) + tf(\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = f(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{x}_0 \in D, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Deci, în acest caz, $f'(\mathrm{x}_0) = f$, $\forall\, \mathrm{x}_0 \in D$.

Definiţia 10.11 *a) Dacă funcţia* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este Gâteaux-derivabilă într-un punct* x_0 *al mulţimii deschise* D*, atunci elementul* $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$ *defineşte* ***gradientul lui*** f ***în*** x_0*, care se notează cu* $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ *şi se citeşte* ***"nabla" f în*** x_0 *(sau se mai notează cu* $\mathrm{grad}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$*), pe baza relaţiei*

$$(f'(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ *reprezintă produsul scalar euclidian pe* $\mathbb{R}^p$*.*

b) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *este Gâteaux-derivabilă în* $x_0 \in D$*, atunci matricea asociată aplicaţiei liniare* $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ *se numeşte* ***matricea jacobiană a lui*** f ***în*** x_0*, se notează cu* $J_f(\mathrm{x}_0)$*, şi este dată de*

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(\mathrm{x}_0) \\ (\nabla f_2)(\mathrm{x}_0) \\ \vdots \\ (\nabla f_q)(\mathrm{x}_0) \end{pmatrix},$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_q$ *sunt componentele lui* f*.*

c) Când $p = q \geq 2$*, determinantul matricii jacobiene* $J_f(\mathrm{x}_0)$ *(adică* $\det(J_f(\mathrm{x}_0))$*) se numeşte* ***jacobianul lui*** f ***în*** x_0*, sau* ***determinantul funcţional*** *al funcţiilor* $f_1, f_2, \ldots, f_q$*, în raport cu variabilele independente* $x_1, x_2, \ldots, x_q$ *(componente ale unui vector* $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)^T$ *din D) şi calculat în* x_0*, şi notat prin:*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q)}(\mathrm{x}_0).$$

d) În particular, când $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$*,* $k \in \overline{1,p}$*, diferenţiala Gâteaux* $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k)$ *(unde* $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in D$*), dată de limita*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)}{t},$$

se numeşte ***derivata parţială, de ordinul I, a funcţiei*** f*,* ***în raport cu*** x_k *(componenta de rang k a vectorului $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D$),* ***în punctul*** $\mathrm{x}_0 \in D$ *şi se notează cu* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$.

Când există $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) \in \mathbb{R}^q$*, pentru* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$*, cu* $f_j : D \to \mathbb{R}$*,* $\forall\, j = \overline{1, q}$*, avem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) \right).$$

Funcţia f *se numeşte* ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***în punctul*** x_0.

e) *Funcţia* f *se numeşte* ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***pe o mulţime*** $\widetilde{D} \subseteq D$*, dacă există* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$*,* $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{D}$*. Aplicaţia* $\mathrm{x} \in \widetilde{D} \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$*, notată cu* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$*, se numeşte* ***derivata parţială a lui*** f*,* ***de ordinul I, în raport cu*** x_k*,* ***pe mulţimea*** $\widetilde{D}$.

Observaţii:

i) Conform Definiţiei 10.11, se poate spune că derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ este, de fapt, derivata în x_k^0 a funcţiei de o variabilă scalară $x_k \longmapsto f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0)$, adică funcţia parţială $f_{[k]}$, corespunzătoare lui f, în $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$. Astfel, calculul derivatei parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ poate fi redus, practic, la calculul derivatei pentru o funcţie de o singură variabilă, anume x_k, celelalte variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$ fiind considerate drept nişte constante în respectivul proces de calcul.

ii) Când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o mulţime $\widetilde{D} \subseteq D$, în raport cu orice variabilă x_k, iar funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^q$ sunt continue pe $\widetilde{D}$, spunem că f este ***de clasă*** $\mathcal{C}^1$ ***pe*** $\widetilde{D}$.

iii) În cazul în care $q = 1$ şi, pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, se poate vorbi despre relaţia

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p, \mathrm{x}_0 \in D,$$

luând $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k$, $\forall\, k \in \overline{1, p}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e, \forall\, k \in \overline{1, p}.$$

În virtutea acestui fapt şi a celui potrivit căruia reprezentarea oricărui vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\} \subseteq \mathbb{R}^p$, este $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k \mathbf{e}_k$, obţinem:

$$\langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e = \sum_{k=1}^{p} v_k \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e = \sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right), \mathrm{v} \right\rangle, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Prin urmare, ori de câte ori există, gradientul lui f în x_0, este vectorul din $\mathbb{R}^p$ definit prin

$$(\nabla f)(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right).$$

iv) Pe baza ultimei formule şi a celei care dă matricea jacobiană $J_f(\mathrm{x}_0)$, pentru $q \geq 2$, deducem că, dacă f este derivabilă Gâteaux în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ unde } f_1, f_2, \ldots, f_q \text{ sunt componentele lui } f.$$

v) Conform punctelor i) şi iv), deducem următoarele reguli de calcul cu diferenţiale Gâteaux:

$$(\alpha f+\beta g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})=\alpha f'(x_0;\mathrm{v})+\beta g'(x_0;\mathrm{v}),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

$$(f\cdot g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})=g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})+f(\mathrm{x}_0)\cdot g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})=\frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)}\left[g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})-g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\cdot f(\mathrm{x}_0)\right],$$

pentru orice $f,g:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R},\mathrm{x}_0\in D,\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p$, cu f şi g diferenţiabile Gâteaux în x_0 pe direcţia v.

În general, raportul dintre diferenţiabilitatea Gâteaux a unei funcţii $f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ într-un punct $\mathrm{x}_0\in D$, după o direcţie $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p$, nu implică, ca în cazul $p=q=1$, continuitatea globală a lui f în x_0, ci doar continuitatea pe direcţia v, în x_0, potrivit următorului rezultat.

Teorema 10.12 *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă,* v, $\mathrm{x}_0\in D$ *şi* $f:D\to\mathbb{R}^q$. *Dacă f are derivată direcţională (diferenţială Gâteaux), după* v*, în* x_0*, atunci f este continuă, pe direcţia* v*, în punctul* x_0.

Demonstraţie: Conform Definiţiei 10.9, există $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\in\mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0$, astfel încât, $\forall\, t\in\mathbb{R}^*$ cu $|t|<\delta_\varepsilon$, avem:

$$\left\|\frac{1}{t}\left(f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)\right)-f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q}<\varepsilon.$$

Atunci:

$$\|f(\mathrm{x}_0+tv)-f(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}\le\|f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)-tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\|_{\mathbb{R}^q}+\|tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\|_{\mathbb{R}^q}\le|t|\left(\varepsilon+\|f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\|_{\mathbb{R}^q}\right),\forall\,|t|<\delta_\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $\lim\limits_{t\to0}f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})=f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0, pe direcţia v. ◀

Observaţie: Dacă am considera în Teorema 10.12, $\mathrm{v}=\mathbf{e}_k$, atunci putem spune că derivabilitatea parţială, de ordinul I, a funcţiei f în punctul x_0, în raport cu x_k, implică continuitatea "parţială" (pe direcţia $\mathbf{e}_k$), nu numaidecât continuitatea globală, a lui f în x_0.

Teorema 10.13 *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă,* $\mathrm{x}_0\in D$ *şi* $f=(f_1,f_2,\ldots,f_q):D\to\mathbb{R}^q$.
Dacă există o vecinătate $V\subseteq D$, a punctului x_0*, pe care f este derivabilă parţial, iar funcţiile* $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ *sunt,* $\forall\, k=\overline{1,p}$, $\forall\, j=\overline{1,q}$, *mărginite pe V, atunci f este continuă, în sens global, în punctul* x_0.

Demonstraţie: Continuitatea lui $f=(f_1,f_2,\ldots,f_q)$ în punctul $\mathrm{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)$ este asigurată de continuitatea fiecăreia dintre componentele $f_k,k=\overline{1,q}$ în x_0. Arătăm că există $\lim\limits_{x\to x_0}f_j(\mathrm{x})=f_j(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, j=\overline{1,q}$. În acest sens, prin aplicarea teoremei lui Lagrange (de medie) pentru funcţii de o singură variabilă reală şi prin folosirea ipotezei de mărginire, pe V, a funcţiilor $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ ($k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$), constatăm că, pentru orice $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in V$, $\exists\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)\in\mathbb{R}^p$, cu ξ_k între x_k şi x_k^0, $\forall\, k=\overline{1,p}$, astfel încât:

$$\begin{aligned}|f_j(x_1,\ldots,x_p)-f_j(x_1^0,\ldots,x_p^0)|&\le\left|f_j(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p)-f_j(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p^0)\right|+\\&+\left|f_j(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p^0)-f_j(x_1,\ldots,x_{p-2},x_{p-1}^0,x_p^0)\right|+\cdots+\left|f_j(x_1,\ldots,x_p^0)-f_j(x_1^0,\ldots,x_p^0)\right|\\&=\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_p}(x_1,\ldots,x_{p-1},\xi_p)\right|\left|x_p-x_p^0\right|+\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_{p-1}}(x_1,\ldots,x_{p-2},\xi_{p-1},x_p^0)\right|\left|x_{p-1}-x_{p-1}^0\right|+\cdots\\&+\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi_1,x_2^0,\ldots,x_p^0)\right|\left|x_1-x_1^0\right|\le M_j\sum_{k=1}^{p}\left|x_k-x_k^0\right|,\end{aligned}$$

unde $M_j=\max\limits_{1\le k\le p}\left\{\sup\limits_{x\in V}\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|\right\}$. De aici, rezultă clar că f_j este continuă global în x_0, $\forall\, j=\overline{1,q}$. ◀

Diferenţiala şi diferenţiabilitatea Fréchet a unei funcţii reale

Definiţia 10.14 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$.*

a) *Spunem că funcţia f este **diferenţiabilă Fréchet într-un punct** $\mathrm{x}_0 \in D$, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi*

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ este o normă pe $\mathbb{R}^p$, iar $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^q$.

*Aplicaţia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ se numeşte **diferenţiala (derivata) Fréchet, de ordinul I, a funcţiei** f, **în punctul** x_0, depinde de x_0 şi se notează, convenţional, cu $(df)(\mathrm{x}_0)$.*

b) *Spunem că f este **diferenţiabilă Fréchet pe o mulţime** $\widetilde{D} \subseteq D$ dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă Fréchet în orice punct $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$.*

Observaţii: 1. Pe baza Definiţiei 10.14 a), deducem că, f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, dacă $\exists\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$$

sau, încă, echivalent, $\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât $\lim\limits_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \dfrac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0_{\mathbb{R}}$.

2. O altă modalitate de a exprima faptul că f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, este cea care afirmă că dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ şi există $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, definită prin

$$\alpha(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}, & \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0 \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, & \mathrm{x}=\mathrm{x}_0, \end{cases} \quad \mathrm{x} \in D,$$

astfel încât α să fie continuă în x_0 şi, prin asta, să aibă loc relaţia

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|, \forall\, \mathrm{x} \in D,$$

atunci f se poate numi Fréchet-diferenţiabilă în x_0.

Propoziţia 10.15 *Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$ este unică.*

Demonstraţie: Admiţând că $(df)(\mathrm{x}_0)$ nu ar fi unică, ar exista T_1 şi $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0 \ (\in \mathbb{R}).$$

Atunci, am avea pentru orice $\mathrm{x} \in D$, cu $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\|T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \frac{1}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \|(f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)) - (f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))\|_{\mathbb{R}^q} \\ &\leqslant \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} + \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \xrightarrow[\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0]{} 0. \end{aligned}$$

De aici, luând $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}$, cu $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$ şi $t \in \mathbb{R}^*$, ar rezulta:

$$0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\|T_1(t\mathrm{u})-T_2(t\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{|t|\,\|T_1(\mathrm{u})-T_2(\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{|t|\,\|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}.$$

Prin urmare, am avea: $T_1(\mathrm{u}) = T_2(\mathrm{u}), \forall \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$. Dar cum $T_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = T_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, ajungem, la concluzia: $T_1 = T_2$. ◀

Propoziţia 10.16 *a) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu D mulţime deschisă, este o funcţie constantă, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}, \forall\, \mathrm{x} \in D$.*

b) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este liniară, atunci f este diferenţiabilă Fréchet pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in D$.

Demonstraţie: a) Pentru $f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}$, cu $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^q$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq \mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq \mathrm{x}_0}} \frac{\mathrm{c}-\mathrm{c}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

b) pentru $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq \mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq \mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

Deci, există $(df)(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, \mathrm{x}_0 \in D$. ◄

Teorema 10.17 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, D nevidă şi deschisă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi o funcţie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $f_j : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, j \in \overline{1,q}$. Funcţia f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sunt diferenţabile Fréchet în x_0. În plus, are loc egalitatea:*

$$(df)(\mathrm{x}_0) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)),$$

unde $(df_j)(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall j \in \overline{1,q}$.

Demonstraţie: Funcţia f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, dacă şi numai dacă există $T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, cu $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}), \forall k \in \overline{1,q}$, precum şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \overline{1,q}$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D.$$

Pe componente, aceasta înseamnă că, $\forall\, k \in \overline{1,q}$, avem:

$$f_k(\mathrm{x}) = f_k(\mathrm{x}_0) + T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha_k(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D,$$

cu $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \alpha_k(\mathrm{x}_0) = \alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$, $\forall\, k \in \overline{1,q}$. Prin urmare, se poate spune că f_k este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = T_k$, $\forall\, k \in \overline{1,q}$. În plus, are loc relaţia:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)).$$

Reciproc, dacă fiecare funcţie f_k, $k \in \overline{1,q}$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci există $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall\, k = \overline{1,q}$ şi $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, cu $\alpha_k(\mathrm{x}) = \dfrac{(f_k(\mathrm{x}) - f_k(\mathrm{x}_0) - T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, $\alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$ şi $\alpha(\mathrm{x}) = (\alpha_1(\mathrm{x}), \alpha_2(\mathrm{x}), \ldots, \alpha_q(\mathrm{x}))$. Aşadar, f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, cu $(df)(\mathrm{x}_0) = T$. ◄

Propoziţia 10.18 *Dacă D este o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci f este continuă (global) în x_0.*

Demonstraţie: Într-adevăr, dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ şi $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D$.
Ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\| = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, deducem clar că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ există şi este egală cu $f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◄

Observaţie: Reciproca propoziţiei 10.18 nu este adevărată.

Teorema 10.19 (Legătura dintre diferenţiala Fréchet şi diferenţiala Gâteaux) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$.*
Dacă f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă Gâteaux în x_0 şi are loc relaţia:

$$f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

(Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$ şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$).

Demonstraţie: Deoarece f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, având diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$, rezultă că există $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$. Atunci:

$$\frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \frac{((df)(\mathrm{x}_0))(t\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}{t} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\frac{|t|}{t},$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}^*, |t| < r, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p, \|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p} = 1$.

Prin urmare, există $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u})$. De aici, mai departe, avem:

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = f'\left(\mathrm{x}_0; \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot f'\left(\mathrm{x}_0; \frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v})$$

pentru orice $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$. Dar cum şi $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})$, putem conchide că există $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ (deci f este diferenţiabilă Gâteaux în x_0) iar $f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$. Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$, deci f este derivabilă Gâteaux în x_0 şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$. ◀

Observaţii: Pe baza acestei teoreme şi a faptului că $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, putem spune că $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k)$, $\forall\, k \in \overline{1,p}$. Astfel, pentru orice $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k$, avem

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\sum_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} v_k\,((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{p} v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \langle(\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e\,,$$

când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

În cazul unei funcţii vectoriale $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, am avea

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = (J_f((\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le k\le p}}(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

ori de câte ori D este o mulţime deschisă, iar f este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$.

Aşadar, în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^p$ şi respectiv $\mathbb{R}^q$, matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este tocmai Jacobiana $J_f(\mathrm{x}_0)$.

Dacă, în continuare, ţinem seama de faptul că aplicaţiile de proiecţie $pr_k : D \to \mathbb{R}$, definite prin $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, $\forall\, k \in \overline{1,p}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sunt liniare şi deci, diferenţiabile Fréchet pe D, cu $d(pr_k) = pr_k$, $\forall\, k \in \overline{1,p}$, atunci, ori de câte ori funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem:

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)pr_k(\mathrm{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)pr_k\right)(\mathrm{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)d(pr_k)\right)(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Cum $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, diferenţiala $d(pr_k)$, care este independentă de punctul în care o calculăm, se notează, prin convenţie, cu dx_k, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Astfel găsim formula de calcul următoare:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)dx_k.$$

Făcând uz de vectorul $d\mathrm{x} = (dx_1, dx_2, \ldots dx_p)$, se poate scrie

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \langle(\nabla f)(\mathrm{x}_0), d\mathrm{x}\rangle_e\,,$$

ori de câte ori funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

Analog, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$, deducem că are loc formula:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = (J_f(\mathrm{x}_0))(d\mathrm{x}).$$

Teorema 10.20 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi nevidă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este derivabilă Gâteaux pe o vecinătate W a punctului x_0, de forma $\{\mathrm{u} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{v} \mid t \in [0,1], \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p\}$, iar derivata Gâteaux $f'(\cdot)$ este continuă în x_0, atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0)$.*

Acest rezultat, reformulat la nivelul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale componentelor lui f (în raport cu componentele argumentului vectorial x), constituie următorul criteriu de Fréchet-diferenţiabilitate:

"Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu D mulţime nevidă şi deschisă, este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o vecinătate W a punctului $x_0 \in D$ (cu $W \subseteq D$), iar derivatele parţiale $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (ale componentelor lui f) sunt continue în x_0, atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(x_0)$ este chiar Jacobiana lui f în x_0, adică $J_f(x_0)$."

Mai mult, dacă $f \in \mathcal{C}^1(\widetilde{D})$, unde $\varnothing \neq \widetilde{D} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p$, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe $\widetilde{D}$. De aceea, funcţiilor din $\mathcal{C}^1(\widetilde{D})$ li se mai spune ***continuu-diferenţiabile*** (pe $\widetilde{D}$).

Propoziţia 10.21 ***(Reguli de calcul cu diferenţiale Fréchet)***

Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar x_0 un punct din D.

i) Dacă f şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt Fréchet-diferenţiabile în x_0, iar λ şi $\mu \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\lambda f + \mu g : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula

$$(d(\lambda f + \mu g))(\mathrm{x}_0) = \lambda (df)(\mathrm{x}_0) + \mu (dg)(\mathrm{x}_0).$$

ii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $f \cdot g : D \to \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 şi are loc relaţia:

$$(d(f \cdot g))(\mathrm{x}_0) = g(\mathrm{x}_0) \cdot (df)(\mathrm{x}_0) + f(\mathrm{x}_0) \cdot (dg)(\mathrm{x}_0).$$

iii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ şi $g : D \to \mathbb{R}^*$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc egalitatea:

$$\left(d\left(\frac{f}{g}\right)\right)(\mathrm{x}_0) = \frac{1}{g(\mathrm{x}_0)}(df)(\mathrm{x}_0) - \frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)} f(\mathrm{x}_0)(dg)(\mathrm{x}_0).$$

*iv) (**regula "lanţului"**) Dacă Ω este o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^q$, funcţia $f : D \to \Omega$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, iar $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ este Fréchet-diferenţiabilă în $f(\mathrm{x}_0)$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula:*

$$(d(g \circ f))(\mathrm{x}_0) = (dg)(f(\mathrm{x}_0)) \circ (df)(\mathrm{x}_0).$$

Observaţie: La nivelul matricilor Jacobiene, regula "lanţului" se redă prin relaţia

$$J_{g \circ f}(\mathrm{x}_0) = J_g(f(\mathrm{x}_0)) \cdot J_f(\mathrm{x}_0),$$

care, la rândul ei, la nivelul elementelor acestor matrici, adică la nivelul derivatelor parţiale ale componentelor lui $h = g \circ f$, g şi f, se prezintă astfel:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(\mathrm{x}_0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathrm{x}_0), \forall\, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}.$$

În situaţia în care $m = p = q \geq 2$, matricile implicate sunt pătratice şi, prin considerarea determinanţilor lor, avem relaţia:

$$det(J_{g \circ f}(\mathrm{x}_0)) = det(J_g(f(\mathrm{x}_0))) \cdot det(J_f(\mathrm{x}_0)).$$

Altfel spus, avem:

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0) = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}(f(\mathrm{x}_0)) \cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0).$$

Când $f \in \mathcal{C}^1(D; E)$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $E \subseteq \mathbb{R}^p$ sunt mulţimi deschise şi nevide, atunci, dacă f este şi bijectivă, există $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(E; D)$ şi $J_{f^{-1}}(f(\mathrm{x}_0)) = J_f^{-1}(\mathrm{x}_0)$.

Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Mai întâi, în cazul unei funcţii reale scalar-scalare $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fie $D_1 \neq \varnothing$ acea submulţime de puncte din D în care f este derivabilă (ordinar, de ordinul I). Cu alte cuvinte, se poate vorbi despre derivata $f' : D_1 \to \mathbb{R}$. Dacă aceasta, la rândul ei, este derivabilă într-un punct x_0 din $D_1 \cap D_1'$, atunci elementul $(f')'(\mathrm{x}_0)$ se notează cu $f''(\mathrm{x}_0)$ şi se numeşte ***derivata a doua a lui*** f ***în*** x_0, fiind din $\mathbb{R}$. Când $f''(\mathrm{x})$ există şi este finită, pentru orice $\mathrm{x} \in D_2 \subseteq D_1$, atunci spunem că f este de două ori derivabilă pe D_2, iar funcţia $x \in D_2 \longmapsto f''(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}$ se numeşte ***derivata a doua a lui*** f.

Prin recurenţă, spunem că f este derivabilă de n-ori ($n \in \mathbb{N}^*$) în $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D} \subseteq D$ dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă o dată în punctul x_0 şi $f^{(n)}(\mathrm{x}_0)$, adică $\left(f^{(n-1)}\right)'(\mathrm{x}_0)$, se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în x_0. La nivel de funcţii, $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul întâi a derivatei de ordinul $(n-1)$ a lui f. În mod asemănător se introduc şi derivatele laterale de ordin superior ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in D$.

Tot recursiv, se pot defini şi noţiunile de diferenţială Gâteaux, derivată parţială, gradient şi diferenţială Fréchet de ordin superior pentru funcţii reale de argument vectorial.

Astfel, în ceea ce priveşte derivatele parţiale, putem defini, prin recurenţă, derivate parţiale de un ordin oarecare $l \in \mathbb{N}^*$, plecând de la derivatele parţiale de ordinul $l-1$. Dacă, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, există derivata $\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}}$, pe o vecinătate a punctului $\mathrm{x}_0 \in D$, şi această funcţie admite derivată parţială (de ordinul întâi), în raport cu x_{i_1} în x_0, unde $i_1, i_2, \dots, i_l$ sunt elemente ale mulţimii $\{1, 2, \dots, p\}$, atunci:

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_l}}\right)}{\partial x_{i_1}}(\mathrm{x}_0).$$

În general, cum indicii $i_1, i_2, \dots, i_l$ se pot repeta, se preferă exprimarea

$$\left(D^\alpha f\right)(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_p} x_p}(\mathrm{x}_0), \text{ unde } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p, \alpha_k \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1,p},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ numindu-se *multi-indice* p-dimensional. Dacă cel puţin două dintre componentele lui α sunt nenule, atunci ***derivata parţială*** în cauză se numeşte ***mixtă***.

În cazul în care $|\alpha| = 2$, derivatele mixte care pot exista sunt egale, în condiţiile teoremei lui Schwartz sau ale teoremei lui Young, teoreme ale căror enunţuri (fără demonstraţie) le dăm aici, în continuare.

Teorema 10.22 (Criteriul lui Schwartz) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există şi sunt finite derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe o vecinătate a lui $\mathrm{x}_0 \in D$, iar acestea sunt continue în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$.*

Teorema 10.23 (Young) *Dacă toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ există pe o vecinătate a unui punct x_0, interior unei mulţimi nevide $\widetilde{D} \subseteq D$ şi aceste derivate sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$ există şi coincid.*

Mai general, dacă o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale până la ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, continue pe mulţimea nevidă şi deschisă D, atunci

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}}(\mathrm{x}_0),$$

oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $(j_1, j_2, \dots, j_p)$ obţinut prin permutarea lui $(i_1, i_2, \dots, i_p)$.

Definiţia 10.24 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **de clasă $\mathcal{C}^m$ pe** D ($m \geq 2$) dacă f este derivabilă parţial de ordinul m (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate derivatele parţiale de ordin m sunt continue pe D. Mulţimea tuturor funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m$ pe D se notează cu $\mathcal{C}^m(D)$.*

Definind $\mathcal{C}^{\infty}(D)$ ca fiind mulţimea ***funcţiilor indefinit derivabile parţial pe*** D, adică mulţimea funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m(D)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, vedem că are loc relaţia:

$$\mathcal{C}^{\infty}(D) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^m(D) \subset \mathcal{C}^{m-1}(D) \subset \ldots \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D).$$

În ceea ce priveşte diferenţiabilitatea Fréchet de ordin superior a unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, are loc următoarea definiţie.

Definiţia 10.25 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

*a) Spunem că f este **de** m **ori** ($m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$) **diferenţiabilă Fréchet într-un punct** $\mathrm{x}_0 \in D$ dacă f este derivabilă parţial de $(m-1)$ ori într-o vecinătate $V \subseteq D$ a lui x_0 şi toate derivatele parţiale de ordinul $(m-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile Fréchet, de ordinul întâi, în x_0.*

*b) Spunem că f este **de** m **ori diferenţiabilă Fréchet pe** $\widetilde{D} \subseteq D$ dacă f este de m ori Fréchet diferenţiabilă în orice punct $\mathrm{x} \in \tilde{D}$.*

*c) Numim **diferenţială Fréchet de ordinul** m a funcţiei f în $\mathrm{x}_0 \in D$, aplicaţia $(d^m f)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$((d^m f)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0)\right)^{<m>}, \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p,$$

unde expresia din membrul secund înseamnă că paranteza se ridică, formal, la puterea simbolică m, după formula polinomială a lui Newton.

De exemplu, pentru $m = 2$, avem:

$$\left((d^2 f)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{u}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j, \forall\, \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 10.26 (Formula lui Taylor) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(m+1)$ ori diferenţiabilă Fréchet pe D, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $B_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$ o bilă deschisă inclusă în D.*
Atunci, $\forall\, \mathrm{x} \in B_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$, există un punct ξ, aparţinând segmentului cu extremităţile x_0 şi x, astfel încât:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) &= f(\mathrm{x}_0) + \frac{1}{1!}(df)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{m!}(d^m f)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!}\left(d^{m+1} f\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0). \end{aligned}$$

Demonstraţie: Considerând un versor oarecare $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$ şi $t \in (-r, r)$, se defineşte $\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$, prin $\varphi(t) = f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})$. Cum f este de $(m+1)$-diferenţiabilă pe D, rezultă că şi φ este la fel pe $(-r, r)$. În plus, vedem că avem

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^{p} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})\right)^{<k>}, \forall\, k = \overline{1, m+1}.$$

De aici, pentru $\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{t}$, cu $t \in (-r, r) \setminus \{0\}$, găsim:

$$t^k \varphi^{(k)}(0) = \left(d^k f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0), \forall\, k = \overline{1, m}.$$

Pe de altă parte, are loc egalitatea

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\tau),$$

unde $\tau = \lambda t$, cu $\lambda \in (0, 1)$, $\forall\, t \in (-r, r)$.

Astfel, întrucât $t^{m+1}\varphi^{(m+1)}(\tau) = \left(d^{(m+1)} f\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$, cu $\xi = \mathrm{x}_0 + \tau\mathrm{v}$, deducem că este adevărată formula din enunţ. ◀

Dacă vom considera în Teorema 10.26, $p = 1$, obţinem următorul rezultat:

Teorema 10.27 (Formula lui Taylor pentru cazul funcţiilor reale scalar-scalare) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(m+1)$ ori derivabilă pe D. Atunci, $\forall\ \mathrm{x} \in D$, $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0$, există un punct $\xi \in (\mathrm{x}_0, \mathrm{x})$ sau $\xi \in (\mathrm{x}, \mathrm{x}_0)$, astfel încât:*

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + \frac{f'(\mathrm{x}_0)}{1!}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \frac{f''(\mathrm{x}_0)}{2!}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(\mathrm{x}_0)}{m!}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^{m+1}.$$

Mai mult, considerând $x_0 = 0$, vom obţine formula lui MacLaurin.

Teorema 10.28 (Formula lui MacLaurin) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $0 \in D$ şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(m+1)$ ori derivabilă pe D. Atunci, $\forall\ \mathrm{x} \in D$, $\mathrm{x} \neq 0$, există un punct $\xi \in (0, \mathrm{x})$ sau $\xi \in (\mathrm{x}, 0)$, astfel încât:*

$$f(\mathrm{x}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\mathrm{x} + \frac{f''(0)}{2!}\mathrm{x}^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}\mathrm{x}^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\mathrm{x}^{m+1}.$$

Exemple: Cum în formula lui MacLaurin avem $\xi \in (0, x)$ sau $\xi \in (x, 0)$, putem considera ξ în forma $\xi = \theta x$, $\theta \in (0, 1)$. Astfel vom obţine următoarele dezvoltări :

1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Cum funcţia f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$, rezultă pe baza Teoremei 10.28 că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $\theta \in (0, 1)$, astfel încât

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta x}.$$

2) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Cum f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$, rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\sin(\theta x).$$

Analog, pentru funcţia $f(x) = \cos(x)$ obţinem următoarea dezvoltare în serie MacLaurin

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos(\theta x).$$

3) Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$. Atunci, pentru orice $x \in (-1, \infty)$, are loc dezvoltarea:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^m}{m} + (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{m+1}}$$

4) Pentru funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$, avem următoarea dezvoltare în serie MacLaurin

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}x^m + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)}{(m+1)!}x^{m+1}(1+\theta x)^{\alpha-m-1}$$

Dacă $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$, atunci $f^{(m+1)}(0) = 0$. Aşadar, formula lui MacLaurin coincide în acest caz cu formula binomului lui Newton:

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 + \cdots + C_m^m x^m.$$

Bibliografie recomandată

1. F. Iacob - *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.

2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. 11)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5 şi 6)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 6 şi 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. Rodica Mihaela Dăneţ, Florica Voicu, S. D. Niţă, Iuliana Popescu, M. V. Popescu - *Curs modern de analiză matematică*, Editura ”Fair Partners”, Bucureşti, 2010.

6. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică*, Editura ”Fair Partners”, Bucureşti, 2010.

7. David B. Massey - *Worldwide Multivariable Calculus,* Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2015.

8. D. Guichard & al. - *Single and Multivariable Calculus,* Creative Commons, San Francisco, 2016.