

Setul 7
de probleme și exerciții de matematică
(relative la funcții reale și aplicații liniare)

S7.1 Să se determine mulțimile de definiție ale următoarelor funcții:

- a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;
- b) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \ln((1 - y)x)$;
- c) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$;
- d) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^{zy}$;
- e) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

S7.2 Să se decidă care dintre aplicațiile date în continuare sunt liniare și care nu:

- i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 4x_3 + 1)$;
- ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = (-x, 4x, 7x^2)$;
- iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$;
- iv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (-4x_1 + 3x_2, x_1 + x_2, 5x_1 - 6x_2)$.

S7.3 Să se demonstreze Propoziția 7.4 din cursul 7.

S7.4 Fie $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfism a cărui matrice în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ este următoarea:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- i) Să se calculeze $T(1, -2, 3)$.
- ii) Să se determine matricea lui T în baza $\{(2, 3, -1), (0, -2, 1), (-1, -1, 1)\}$.
- iii) Să se afle $Im(T)$ și $rang(T)$.
- iv) Să se afle $Ker(T)$ și $def(T)$.

S7.5 Fie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

- a) Să se arate că T este o aplicație liniară și să se scrie matricea corespunzătoare în perechea de baze canonice din \mathbb{R}^2 și \mathbb{R}^3 .
- b) Să se afle matricea operatorului T în raport cu bazele $\hat{B} = \{(1, -1), (2, 3)\}$ și $\hat{B}' = \{(1, 2, 3), (-2, 1, 3), (1, -1, 1)\}$.

S7.6 Care dintre endomorfismele date mai jos este diagonalizabil? În caz afirmativ, să se determine forma diagonală în cauză. Care este ortogonal și care este o izometrie?

- i) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
- ii) $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_2 - 2x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
- iii) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S7.7 Fie endomorfismele

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4),$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

și

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + 4x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

- a) Să se afle valorile proprii și vectorii proprii corespunzători;
- b) Să se afle subspațiile proprii și dimensiunile lor;
- c) Să se analizeze posibilitatea diagonalizării lui T_1 și T_2 . În caz afirmativ, să se afle baza în care se manifestă forma diagonală, matricea schimbării de bază în cauză, precum și forma diagonală ca atare.

S7.8 Fie V și W spații vectoriale peste același corp comutativ de scalari \mathbb{K} . Dacă V este finit dimensional, T este o aplicație liniară de la V la W , X este o submulțime finită a lui $\text{Ker}(T)$, iar Y este o submulțime finită a lui V , să se arate că oricare două din următoarele trei condiții o implică pe cealaltă:

- a) X este bază pentru $\text{Ker}(T)$;
- b) $T(Y)$ este bază pentru $\text{Im}(T)$;
- c) $X \cup Y$ este bază pentru V .

S7.9 Fie $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ endomorfismul care, în raport cu baza alcătuită din $b_1 = (1, -1)$ și $b_2 = (0, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

De asemenea, fie $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfism care, față de vectorii $v_1 = (2, 1)$ și $v_2 = (-1, 1)$, are matricea

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine matricea endomorfismului $T_2 - T_1$ în raport cu sistemul de vectori $\{v_1, v_2\}$, precum și matricea lui $T_2 \circ T_1$ față de baza canonică a lui \mathbb{R}^2 .

S7.10 Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ de scalari \mathbb{K} și $T \in \mathcal{L}(V)$. Să se arate că $\text{rang}(T \circ T) + \text{def}(T|_{\text{Im}(T)}) = \text{rang}(T)$.

S7.11 Fie aplicația liniară $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 5x_2 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Să se determine valorile proprii ale lui T și subspațiile proprii corespunzătoare.
- b) Să se precizeze dacă matricea lui T poate fi adusă la forma diagonală și, în caz afirmativ, să se găsească o bază față de care matricea lui T are forma diagonală.

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (cap.IV)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
2. M. Craioveanu, I. D. Albu- *Geometrie afină și euclidiană. Exerciții (cap. II, V, VI)*, Ed. Facla, Timișoara, 1982.
3. Veronica Teodora Borcea, Cătălina Ileana Davideanu, Corina Forăscu - *Algebră liniară*, Ed. "Gh. Asachi", Iași, 2000.
4. O. Dogaru, Cristina Stamin - *Algebră liniară. Calcul vectorial (exerciții și probleme)*, Editura "Fair Partners", București, 2008.
5. Kenneth Kuttler - *Solutions Manual in Linear Algebra*, The Saylor Foundation, 2013.
6. Erling Stormer - *Positive Linear Maps of Operator Algebras*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 2014.
7. J. L. Kazdan - *Linear Algebra Problems*, University of Pennsylvania, 2016.