Cursul 5

Spaţiul liniar real $\mathbb{R}^n$. Aspecte algebrice

În acest curs, vom prezenta câteva ***aspecte algebrice*** pentru mulţimea $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de n ori}}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $\mathbb{R}$ reprezintă mulţimea numerelor reale.

Legi de compoziţie. Grupuri. Inele. Corpuri

Definiţia 4.1 *Fie M o mulţime nevidă. Numim **operaţie algebrică** sau **lege de compoziţie pe** M o funcţie $\varphi : M \times M \to M$. Pentru $x, y \in M$, elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numeşte **compusul lui** x **cu** y **prin operaţia** φ. Pentru simplificarea scrierii, de regulă, $\varphi(x, y)$ se redă prin $x \circ y$.*

Definiţia 4.2 *Fie M o mulţime nevidă. Spunem că operaţia algebrică "$\circ$" pe M se numeşte*

i) ***asociativă****, dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall\, x, y, z \in M$;*

ii) ***comutativă****, dacă $x \circ y = y \circ x$, $\forall\, x, y \in M$;*

iii) ***cu element neutru****, dacă există $e \in M$, astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall\, x \in M$.*

Definiţia 4.3 *Un dublet $(M, \circ)$, unde M este o mulţime nevidă, iar "$\circ$" este o operaţie algebrică pe M, se numeşte **semigrup** dacă operaţia "$\circ$" este asociativă. În plus, dacă operaţia "$\circ$" are şi element neutru, atunci $(M, \circ)$ se numeşte **monoid**. Dacă "$\circ$" este şi comutativă, **monoidul** $(M, \circ)$ se numeşte **comutativ**.*

Definiţia 4.4 *Fie $(M, \circ)$ un monoid. Un element $x \in M$ se numeşte **inversabil (simetrizabil)** în raport cu "$\circ$", dacă există $\tilde{x} \in M$ (numit **inversul** sau **simetricul** lui x), astfel încât $x \circ \tilde{x} = \tilde{x} \circ x = e$ (unde e este elementul neutru, din M, faţă de "$\circ$").*

Mulţimea tuturor elementelor simetrizabile ale unui monoid $(M, \circ)$ constituie ansamblul unităţilor lui M şi se notează cu $U(M)$.

Definiţia 4.5 *Numim **grup** un monoid $(G, \circ)$ pentru care $U(G) = G$. Un grup $(G, \circ)$ se numeşte **abelian (comutativ)** dacă operaţia "$\circ$" este comutativă.*

Definiţia 4.6 *Un triplet $(A, +, \cdot)$, unde A este o mulţime nevidă, iar "$+$" şi "$\cdot$" sunt operaţii algebrice pe A, se numeşte **inel** dacă:*

i) $(A, +)$ *este grup comutativ;*

ii) $(A, \cdot)$ *este semigrup;*

iii) Operaţia "$\cdot$" este distributivă faţă de "$+$", adică

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ şi}$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,\ \forall\, x, y, z \in A.$$

Dacă "$\cdot$" este o operaţie comutativă, atunci inelul A se numeşte ***comutativ***. Dacă "$\cdot$" are element neutru, atunci inelul A se numeşte ***unitar***. Dacă elementul neutru în raport cu "$+$" coincide cu cel în raport cu "$\cdot$", atunci ***inelul*** se numeşte ***nul***. În caz contrar, el se numeşte ***inel nenul***.

Mulţimea unităţilor unui inel unitar A, notată cu $U(A)$, este următoarea $\{a \in A \mid \exists\, b \in A$ aşa încât $a \cdot b = b \cdot a = 1\}$ (1 fiind notaţia pentru elementul neutru în raport cu "$\cdot$").

Definiţia 4.7 *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Un element $a \in A$ se numeşte* ***divizor al lui zero*** *(0)* ***la stânga*** *(respectiv* ***la dreapta****) dacă există $b \in A^*$, aşa încât $a \cdot b = 0$ (respectiv $b \cdot a = 0$).*

Definiţia 4.8 *Numim* ***domeniu de integritate (inel integru)*** *un inel comutativ, nenul şi fără divizori ai lui zero, diferiţi de zero.*

Definiţia 4.9 *Un inel unitar $(K, +, \cdot)$ se numeşte* ***corp*** *dacă $U(K) = K^* \equiv K \setminus \{0\}$.*

Spaţii liniare. Subspaţii liniare

Definiţia 4.10 *Fie V o mulţime nevidă şi K un corp comutativ. Spunem că pe V, este definită o* ***structură algebrică de spaţiu liniar peste corpul*** *K dacă şi numai dacă există o lege internă "$+$" $: V \times V \to V$ şi o lege de compoziţie externă "$\cdot$" $: K \times V \to V$, aşa încât sunt îndeplinite următoarele cerinţe (axiome):*

SL1) *$(V, +)$ este un grup comutativ;*

SL2) *$\alpha \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \alpha \cdot \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{y}$, $\forall\, \alpha \in K$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$;*

SL3) *$(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{x} \in V$;*

SL4) *$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{x} \in V$;*

SL5) *$\mathbf{1} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ (unde $\mathbf{1}$ este elementul unitate din K).*

Ansamblul $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte ***spaţiu liniar*** (sau ***vectorial***) peste K (sau K***-spaţiu liniar***). Elementele K-spaţiului liniar V se numesc ***vectori***, iar elementele lui K se numesc, într-un astfel de context, ***scalari***. Legea de compoziţie internă "$+$" poartă denumirea de ***adunare a vectorilor***, iar legea de compoziţie externă "$\cdot$" se numeşte ***înmulţire cu scalari***.

Când K este corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, atunci ***spaţiul liniar*** în cauză se numeşte ***real***. Elementul neutru (din V) în raport cu operaţia internă "$+$" se numeşte ***vector nul*** şi se notează, uzual, cu $\mathbf{0}$. Simetricul unui element $u \in V$, relativ la "$+$", se numeşte ***vectorul opus*** lui u şi se notează cu $-u$.

Propoziţia 4.11 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar. Atunci:*

i) *$0 \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall\, x \in V, \alpha \in K$;*

ii) *$(-\alpha) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot (-\mathrm{x}) = -\alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$;*

iii) *$(-\alpha) \cdot (-\mathrm{x}) = \alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$;*

iv) *$\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ sau/şi $\mathrm{x} = \mathbf{0}$.*

Demonstraţie: i) $0 \cdot \mathrm{x} = (0 + 0) \cdot \mathrm{x} = 0 \cdot \mathrm{x} + 0 \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \mathrm{x} \in V \Rightarrow 0 \cdot \mathrm{x} + (-0 \cdot \mathrm{x}) = (0 \cdot \mathrm{x} + 0 \cdot \mathrm{x}) + (-0 \cdot \mathrm{x}) \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \mathrm{x} + ((0 \cdot \mathrm{x} + (-0 \cdot \mathrm{x}))) \Rightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot \mathrm{x} + \mathbf{0} = 0 \cdot \mathrm{x}$. Totodată, avem: $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = (\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}) + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + (\alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0})) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$, $\forall\, \alpha \in K$.

ii) $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathrm{x} = (\alpha - \alpha) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x} + (-\alpha) \cdot \mathrm{x} \Rightarrow (-\alpha) \cdot \mathrm{x} = -\alpha \cdot \mathrm{x}$ şi $\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (-\mathrm{x} + \mathrm{x}) = \alpha \cdot (-\mathrm{x}) + \alpha \cdot \mathrm{x} \Rightarrow \alpha \cdot (-\mathrm{x}) = -\alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$.

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathrm{x}) = -\alpha \cdot (-\mathrm{x}) = -(-(\alpha \cdot \mathrm{x})) = \alpha \cdot \mathrm{x}$, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in V$.

iv) Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0}$, atunci: $\mathrm{x} = \mathbf{1} \cdot \mathrm{x} = \left(\alpha^{-1} \cdot \alpha\right) \cdot \mathrm{x} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathrm{x}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Altfel, $\alpha = 0$ şi x este arbitrar în V. ◄

Propoziţia 4.12 *Mulţimea $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, are structură de spaţiu liniar real în raport cu operaţia algebrică internă de adunare a n-uplelor, definită prin*

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

şi legea de înmulţire a unui n-uplu oarecare cu un scalar real arbitrar, definită prin

$$(\alpha, \mathrm{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \alpha \cdot \mathrm{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie: Asociativitatea şi comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}$ implică, evident, asociativitatea şi respectiv comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}^n$. Totodată, se vede că $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ este vectorul nul, adică elementul neutru al adunării pe $\mathbb{R}^n$ şi, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, există opusul $-\mathrm{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$. Prin urmare, în raport cu adunarea n-uplelor reale, $(\mathbb{R}^n, +)$ este grup (aditiv) comutativ, fiind satisfăcută astfel axioma *SL1)* din Definiţia 4.10. În ceea ce priveşte îndeplinirea axiomelor *SL2)-SL5)* constatăm, pe rând, că avem:

$$\alpha \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) =$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) = \alpha \cdot \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{y},$$
$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{x} = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) =$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) =$$
$$= \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{x}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{x}) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) =$$
$$= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \ldots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha\beta) \cdot \mathrm{x},$$
$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ şi}$$
$$\mathbf{1} \cdot \mathrm{x} = \mathbf{1} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \ldots, 1 \cdot x_n) =$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{x}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În concluzie, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar real. ◀

Alte exemple de spaţii liniare: Fie X o mulţime nevidă, K un corp comutativ, $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste K şi $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \to V\}$. Se poate vedea că $\mathcal{F}(X, V)$ are o structură algebrică de spaţiu liniar în raport cu adunarea funcţiilor, definită în mod obişnuit prin

$$(*) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in X, \forall\, f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

şi înmulţirea funcţiilor cu scalari din K, definită prin

$$(**) \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in X, \forall\, f \in \mathcal{F}(X, V).$$

Aceasta deoarece, în virtutea faptului că V este un K-spaţiu liniar, $\mathcal{F}(X, V)$ satisface, în raport cu operaţiile algebrice menţionate, axiomele *SL1)-SL5)* din Definiţia 4.10.

Particularizând X, K, şi V, obţinem diverse exemple de spaţii vectoriale. Astfel, dacă m şi n sunt numere naturale proprii, iar $X = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F}(X, V)$ se identifică cu mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a tuturor matricilor de tip $m \times n$ şi cu elemente din $\mathbb{R}$, mulţime care, în raport cu adunarea matricilor şi cu înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ este, aşadar, un spaţiu liniar real.

În situaţia în care $X \subseteq \mathbb{R}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, se obţine $\mathbb{R}$-spaţiul liniar $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ al funcţiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X.

Dacă X este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), atunci $\mathcal{F}(X, V)$ reprezintă, în raport cu adunarea $(*)$ şi înmulţirea $(**)$, spaţiul liniar real al funcţiilor de n-variabile reale, definite pe X şi cu valori vectoriale, de câte m componente reale.

Atunci când $X = \mathbb{N}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, mulţimea $\mathcal{F}(X, V)$ este, în raport cu operaţiile $(*)$ şi $(**)$, spaţiul liniar real al şirurilor de numere reale.

Definiţia 4.13 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste un corp comutativ K şi W o submulţime nevidă a lui V. Dacă, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$, rezultă că $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ şi, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in W$, reiese că $\alpha \cdot \mathrm{x} \in W$, atunci $(W, K, +, \cdot)$ este numit* ***subspaţiu liniar*** *al lui $(V, K, +, \cdot)$.*

Exemple:

1) Mulţimea $\{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea n-uplelor din $\mathbb{R}^n$ şi înmulţirea acestora cu scalari din $\mathbb{R}$, un subspaţiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +\cdot)$.

2) Mulţimea $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ a funcţiilor reale, scalare şi pare este un subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Definiţia 4.14 *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt elemente ale unui spaţiu liniar V peste un corp comutativ K, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt scalari din K, atunci elementul*

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$$

*se numeşte **combinaţie liniară** a elementelor $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$.*

Definiţia 4.15 *O submulţime nevidă W a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte **subspaţiu liniar** al lui V dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară de oricare două elemente ale lui W aparţine lui W, adică*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W \Rightarrow \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W.$$

Definiţia 4.16 *Fie U o submulţime nevidă a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare (cu scalari din K) de elemente din U se numeşte **acoperire liniară** a lui U şi se notează cu $Lin(U)$.*

Se poate constata uşor că $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui $(V, K, +, \cdot)$ care o include pe U.

Propoziţia 4.17 *i) Intersecţia oricăror două subspaţii, W_1 şi W_2, ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ este un subspaţiu liniar al lui V.*

ii) Reuniunea a două subspaţii liniare ale lui V nu este întotdeauna un subspaţiu liniar al lui V.

Demonstraţie: i) Ţinând seama de Propoziţia 4.11 şi de Definiţia 4.13, putem afirma că orice subspaţiu liniar al lui V conţine vectorul nul $\mathbf{0}$. Aşadar $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$.

Fie $x, y \in W_1 \cap W_2$. Cum W_1 şi W_2 sunt subspaţii liniare ale lui $(V, K, +, \cdot)$, reiese că,

$$\forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1 \text{ şi } \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_2.$$

Deci $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, adică $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu liniar al lui V.

ii) Observăm că deşi mulţimile $V_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathbb{R}^n$, iar vectorii $(1, 0, \ldots, 0)$, din V_1 şi $(0, 0, \ldots, 1)$, din V_2, aparţin reuniunii $V_1 \cup V_2$, suma lor, adică vectorul $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, nu mai aparţine acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspaţiilor liniare V_1 şi V_2 nu este un subspaţiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^n$. ◀

Definiţia 4.18 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi U o submulţime nevidă a sa. Se numeşte **subspaţiu generat de submulţimea** U, intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V care conţin elementele lui U. Notăm acest subspaţiu liniar al lui V cu $Sp(U)$.*

Propoziţia 4.19 *Oricare ar fi submulţimea nevidă U a unui subspaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, avem:*

$$Lin(U) = Sp(U) = \{\mathrm{x} \in V \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in K, \mathrm{x}_i \in U, 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ aşa încât } \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i\}.$$

Demonstraţie: Întrucât $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui V care include pe U, intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V cu proprietatea că o includ pe U, cu alte cuvinte $Sp(U) \subseteq Lin(U)$.

Reciproc, cum orice subspaţiu liniar al lui V, care conţine pe U, conţine şi orice combinaţie liniară de elemente din U (cu scalari din K), adică include subspaţiul liniar $Lin(U)$. Considerând intersecţia tuturor acestor subspaţii, obţinem $Lin(U) \subseteq Sp(U)$. Aşadar, obţinem $Lin(U) = Sp(U)$. ◀

Liniară dependenţă şi independenţă

Definiţia 4.20 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ din V.*

a) *Elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ se numesc **liniar dependente** dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, dintre care cel puţin unul nenul, astfel încât combinaţia liniară $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$ să fie vectorul nul $\mathbf{0}$ ($\in V$).*

b) *Elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n \in V$ se numesc **liniar independente** dacă din*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0} \text{ rezultă } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

c) *O **submulţime** nevidă U a unui subspaţiu liniar V se numeşte **liniar independentă** dacă oricare n ($n \in \mathbb{N}^*$) elemente distincte $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ ale lui U sunt liniar independente. Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ elemente din U ce sunt liniar dependente, atunci **mulţimea** U se numeşte **liniar dependentă**.*

Observaţii: O submulţime liniar independentă a unui spaţiu liniar nu conţine vectorul nul $\mathbf{0}$.

Teorema 4.21 *Vectorii $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ ai unui spaţiu liniar sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă unul dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$:" Într-adevăr, dacă vectorii $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt liniar dependenţi, atunci, conform Definiţiei 4.20, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$. Presupunem că $\alpha_1 \neq 0$, ar reieşi atunci că avem: $\mathrm{x}_1 = -\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_k\right) x_k$. Deci, unul dintre elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, aici x_1, ar fi o combinaţie liniară de celelalte.

"$\Leftarrow$:" Dacă $\mathrm{x}_j = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \beta_k \mathrm{x}_k$, atunci $\mathrm{x}_j - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \beta_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că, pentru elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, există scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n$, evident nu toţi nuli, aşa încât se poate vorbi despre o combinaţie liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul. ◀

Dimensiunea unui spaţiu liniar. Bază algebrică. Schimbare de bază

Definiţia 4.22 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar.*

*i) Se numeşte **dimensiune (algebrică)** a spaţiului liniar V numărul maxim de elemente liniar independente din V. Vom nota dimensiunea spaţiului V cu $dim(V)$.*

*ii) Spaţiul liniar V este numit **infinit-dimensional** dacă există cel puţin o submulţime infinită şi liniar independentă a lui V. În caz contrar, V este numit **spaţiu liniar finit-dimensional**.*

Observaţie: Dacă, într-un spaţiu liniar finit-dimensional există n ($n \in \mathbb{N}$) elemente liniar independente şi oricare $n+1$ elemente din acel spaţiu sunt liniar dependente, atunci spunem că respectivul spaţiu este ***n*-dimensional** (sau, echivalent, ***de dimensiune** n*).
Exemple:

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}^n) = m \cdot n$.

Definiţia 4.23 *O mulţime $B \neq \varnothing$, dintr-un spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, se numeşte **bază algebrică** (sau **bază Hamel**) a lui V dacă B este liniar independentă şi $Sp(B) = V$ (adică subspaţiul liniar generat de B este V).*

În cazul unui spaţiu liniar n-dimensional V, o bază a lui V este o mulţime B alcătuită din n elemente, $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$, liniar independente, din V. Fiecare element $\mathrm{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{b}_k,$$

K-scalarii $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ numindu-se ***coordonatele lui*** x ***în baza*** B .

Orice bază a unui spaţiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V. Altfel spus, $dim(V)$ nu depinde de baza lui V.

Propoziţia 4.24 *Spaţiul liniar $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ este n-dimensional. O mulţime de m ($m \leqslant n$) elemente din $\mathbb{R}^n$ este liniar independentă dacă şi numai dacă matricea având drept coloane cele m n-uple reale corespunzătoare elementelor în cauză are rangul egal cu m.*

Demonstraţie: În $\mathbb{R}^n$ există elementele $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ care alcătuiesc o bază, numită ***baza canonică a lui*** $\mathbb{R}^n$.

Într-adevăr, mulţimea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ este liniar independentă în $\mathbb{R}$, întrucât avem

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

În plus, $Sp(B) = \mathbb{R}^n$, deoarece orice element $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se exprimă (în mod unic) prin $\mathrm{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$. Aşadar, $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

În al doilea rând, dacă $\mathrm{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathrm{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, $\ldots$ şi $\mathrm{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ (cu $m \leqslant n$) sunt m elemente din $\mathbb{R}^n$, atunci acestea sunt liniar independente dacă şi numai dacă relaţia $\alpha_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{x}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \mathrm{x}_m = \mathbf{0}$ este posibilă doar când $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Altfel spus, dacă şi numai dacă sistemul liniar algebric (de n ecuaţii, cu m necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$) şi omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{m1} & = & 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{m2} & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_m x_{mn} & = & 0 \end{cases}$$

are numai soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, lucru care se petrece dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului, ale cărei coloane sunt tocmai n-uplele celor m elemente $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$ din $\mathbb{R}^n$, este exact m. ◀

Observaţie: O submulţime nevidă a unui spaţiu liniar finit dimensional $(V, K, +, \cdot)$, $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$, este o bază a lui V dacă şi numai dacă orice vector $\mathrm{x} \in V$ se exprimă, în mod unic, sub forma $\mathrm{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$, scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din K fiind coordonatele lui x în baza B.

Dacă notăm cu X_B matricea coloană

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a coordonatelor vectorului x în baza B şi cu $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n]$ matricea linie a vectorilor bazei B, relaţia $\mathrm{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$ se poate reda, matriceal, sub forma:

$$\mathrm{x} = \tilde{B} \cdot X_B.$$

Propoziţia 4.25 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar cu $dim(V) = n$. Atunci*

1. *Orice mulţime de m elemente din V, cu $m > n$, este liniar dependentă;*

2. *Orice mulţime de n elemente din V este bază a lui V dacă şi numai dacă este mulţime liniar independentă.*
3. *Orice mulţime de n vectori din V este bază a lui V dacă şi numai dacă mulţimea este un sistem de generatori al lui V.*

Exemplu: Să se arate că mulţimea $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$. Determinaţi coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în această bază.
Soluţie: Cum mulţimea $\mathcal{B}$ are 3 elemente, iar $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, este suficient să arătăm, conform Propoziţiei 4.25, că $\mathcal{B}$ este o mulţime liniar independentă.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(2, 1, 0) + \alpha_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Atunci, utilizând proprietăţiile operaţiilor "+" şi "·" pe mulţimea $\mathbb{R}^3$, deducem:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Avem astfel un sistem liniar şi omogen de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Deoarece determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

este nenul, rezultă că sistemul omogen are soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Aşadar, vectorii mulţimii $\mathcal{B}$ sunt liniar independenţi.

Pentru a doua parte a exerciţiului, trebuie să determinăm scalarii $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cu proprietatea că

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3.$$

Aşadar, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \\ -\beta_1 + \beta_3 = 3, \end{cases}$$

ce are soluţia $\beta_1 = -3, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0$.

Definiţia 4.26 *Se numeşte **rang al unei mulţimi** U de vectori din spaţiul vectorial $(V, K, +, \cdot)$ dimensiunea subspaţiului generat de U, adică $\dim(Sp(U))$ şi se notează cu $rang(U)$.*

Observaţie: Dacă V este un K-spaţiu liniar n-dimensional, atunci orice mulţime de n vectori liniar independenţi din V este o bază a lui V şi, de asemenea, orice sistem de n vectori din V care generează spaţiul liniar V alcătuieşte o bază a lui V.

Definiţia 4.27 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar cu $\dim(V) = n$, $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a sa şi $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_m\}$ o mulţime de m elemente ale lui V.*

*Se numeşte **matrice de trecere (schimbare) de la baza** B **la sistemul de vectori** B' matricea $S = (s_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, unde $1 \leqslant i \leqslant n$ şi $1 \leqslant j \leqslant m$, care are, pe coloane, coordonatele vectorilor din B' în baza B, adică*

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \ldots & s_{m1} \\ s_{12} & s_{22} & \ldots & s_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \ldots & s_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $s_{ij} \in K$ sunt aşa încât

$$\begin{cases} \mathrm{b}'_1 & = & s_{11}\mathrm{b}_1 + s_{12}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{1n}\mathrm{b}_n \\ \mathrm{b}'_2 & = & s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{2n}\mathrm{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{b}'_m & = & s_{m1}\mathrm{b}_1 + s_{m2}\mathrm{b}_2 + \ldots + s_{mn}\mathrm{b}_n \end{cases}.$$

Altfel spus, matricial, avem $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, unde $\tilde{B}' = [\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_m]$ şi $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n]$.

Observaţie: Când $m = n$, sistemul de vectori B' este o bază pentru V dacă şi numai dacă matricea S, adică matricea $\tilde{B}^{-1}\tilde{B}'$, de trecere de la B la B', este nesingulară (adică cu determinantul diferit de 0).

Propoziţia 4.28 *Fie B şi B' două baze distincte ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, finit-dimensional şi* $\mathrm{x} \in V$*. Dacă X_B şi $X_{B'}$ sunt matricile coloane ale coordonatelor lui* x *în baza B şi respectiv în baza B', iar S este matricea de trecere de la B la B', atunci **formula de transformare a coordonatelor lui** x **la schimbarea bazei de la** B **la** B' este următoarea:*

$$X_{B'} = S^{-1}X_B.$$

Demonstraţie: Întrucât $\mathrm{x} = \tilde{B}X_B = \tilde{B}'X_{B'}$ şi $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, avem: $\tilde{B}X_B = \tilde{B}SX_{B'}$. De aici, cum $\tilde{B}$ este nesingulară, prin înmulţirea la stânga cu $\tilde{B}^{-1}$, rezultă: $X_B = SX_{B'}$. În fine, deoarece S este nesingulară, reiese că are loc formula $X_{B'} = S^{-1}X_B$. ◀

Definiţia 4.29 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, finit-dimensional şi două baze ale sale, B şi B'. Spunem că **bazele** B şi B' sunt **la fel orientate** dacă determinantul matricii S de trecere de la B la B' este pozitiv. Bazele B şi B' se numesc **contrar orientate** dacă $det(S) < 0$.*

Produs scalar. Norme în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 4.30 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ şi ordonat K.*

a) *Se numeşte **produs scalar** pe V o aplicaţie $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V$ la K, care satisface următoarele proprietăţi:*

PS1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este **pozitiv definită**, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ *şi*

ii. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle = 0$, *dacă şi numai dacă* $\mathrm{x} = \mathbf{0} \in V$;

PS2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este **simetrică**, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$;

PS3) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *este **biliniară**, adică*

i. $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle = \alpha\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle + \beta\langle \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle$, *şi*

ii. $\langle \mathrm{x}, \alpha \cdot \mathrm{y} + \beta \cdot \mathrm{z}\rangle = \alpha\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \beta\langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle$, $\forall\, \alpha, \beta \in K, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$.

b) *Perechea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, în care V este un spaţiu liniar peste un corp comutativ şi ordonat, iar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar pe V se numeşte **spaţiu prehilbertian**.*

c) *Un spaţiu prehilbertian pentru care $K = \mathbb{R}$ se numeşte **spaţiu euclidian**.*

Propoziţia 4.31 *Spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, dotat cu produsul scalar canonic, definit prin*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu euclidian.

Demonstraţie: Se verifică uşor că aplicaţia

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R},$$

unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, satisface axiomele *PS1)-PS3)* din Definiţia 4.30 a), fiind într-adevăr un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Astfel, pentru *PS1)*, avem $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi

$< \mathrm{x}, \mathrm{x} >_c = 0$, adică $\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 = 0$, dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ceea ce înseamnă $\mathrm{x} = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Pentru *PS2)*, vedem că $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} y_i x_i = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle_c$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$. În fine, pentru *PS3)*, avem: $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle_c = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} y_i z_i = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle_c + \beta \langle \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle_c$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$. Analog şi pentru *PS3)*. Prin urmare, $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_c)$ este un spaţiu euclidian. ◀

Observaţie: Produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ pe $\mathbb{R}^n$ se mai numeşte şi ***produs scalar euclidian***.

Definiţia 4.32 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu prehilbertian, dotat cu produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

*a) Două **elemente** x şi y din V se numesc **ortogonale** dacă şi numai dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0$.*

*b) Spunem că un vector $\mathrm{x} \in V$ este **ortogonal pe o mulţime** $U \subset V$ $(U \neq \varnothing)$ dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{y} \in U$.*

*c) Un **sistem** de vectori din V se numeşte **ortogonal** dacă este alcătuit din vectori ortogonali doi câte doi. Mai exact, dacă $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y}$ din respectivul sistem, cu $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.*

*d) Dacă U este o submulţime nevidă a lui V, atunci prin **suplimentul ortogonal al lui** U, notat cu $U^{\perp}$, înţelegem mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe U.*

Observaţie: Notăm prin $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ faptul că vectorul $\mathrm{x} \in V$ este ortogonal pe vectorul $\mathrm{y} \in V$. De asemenea, ortogonalitatea unui element x pe o submulţime U a lui V o vom marca prin notaţia $\mathrm{x} \perp U$.

Definiţia 4.33 *Fie $(V, K, +, \cdot, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. **Unghiul dintre vectorii** x **şi** y, notat prin $\sphericalangle(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ sau $\widehat{(\mathrm{x}, \mathrm{y})}$, se defineşte prin relaţia:*

$$\widehat{(\mathrm{x}, \mathrm{y})} = \arccos \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle}{\sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle}}.$$

Observaţie: Într-un spaţiu euclidian, doi vectori sunt ortogonali dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$.

Definiţia 4.34 *Fie $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real.*

a) *Se numeşte **normă** pe V o aplicaţie de la V la $\mathbb{R}$, notată simbolic prin $\|\cdot\|$, care satisface următoarele axiome:*

AN1) $\|\mathrm{x}\| \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ *şi* $\|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$;

AN2) $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\| = |\alpha| \|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$;

AN3) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leqslant \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$.

b) *Perechea $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte **spaţiu normat**.*

Propoziţia 4.35 *Spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, înzestrat cu aşa-numita normă euclidiană, definită prin*

$$\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu normat.

Demonstraţie: Se verifică lesne axiomele *AN1)*, *AN2)* şi *AN3)*, din Definiţia 4.34. Astfel, pentru *AN1)*, avem $\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\|\mathrm{x}\|_e = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$. Pentru *AN2)*, vedem că $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. În fine, ţinând seama de inegalitatea lui Minkowski, cu $p = 2$, are loc şi *AN3)*, cu $\|\cdot\|_e$. ◀

Observaţie: Orice spaţiu euclidian V este şi spaţiu normat. Într-adevăr, prin intermediul produsului scalar din dotarea spaţiului euclidian respectiv, fie el notat cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se poate defini o normă (numită *norma indusă de produsul scalar* în cauză) prin:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle}, \forall\, \mathrm{x} \in V.$$

Există şi norme neinduse de vreun produs scalar.

Definiţia 4.36 *a) Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat şi $\mathrm{x} \in V$. Elementul x se numeşte **versor** dacă $\|\mathrm{x}\| = 1$.*

*b) Fie V un spaţiu euclidian şi U un sistem nevid de vectori din V. U se numeşte **ortonormat** dacă, în raport cu produsul scalar de pe V, avem:*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \\ 1, & \text{când } \mathrm{x} = \mathrm{y} \end{cases}, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in U.$$

Baze ortonormate. Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt

Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots \mathrm{b}_n\}$ o bază a unui spaţiu euclidian, finit-dimensional, V (cu $dim(V) = n$).

Vom nota cu $G = (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matricea cu elementele $g_{ij} = \langle \mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j \rangle$, unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar definit pe V. Determinantul matricii G se numeşte ***determinant Gram***.

Dat fiind faptul că, pentru doi vectori arbitrari din $x, y \in V$, avem reprezentările (în baza B) $\mathrm{x} = BX_B$ şi $\mathrm{y} = BY_B$, unde X_B şi respectiv Y_B sunt matricile unicolonare ale coordonatelor lui x şi respectiv y în baza B, găsim ***expresia analitică a produsului scalar*** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ***în baza*** B, şi anume

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X_B^T G Y_B,$$

în care $X_B^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este transpusa matricei unicolonare de coordonate ale lui x în baza B.

Baza B este numită ***ortogonală*** ori de câte ori matricea G este diagonală, adică $g_{ij} = 0, \forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Spunem că baza B este ***ortonormată*** dacă şi numai dacă G este matricea unitate I_n.

Teorema 4.1 ***(Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt)***
În orice spaţiu euclidian finit-dimensional există baze ortonormate.

Demonstraţie: Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui.

Plecând de la B, se poate construi o bază $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiaşi spaţiu V, utilizând **algoritmul lui Gram-Schmidt**, după cum urmează:

1. Pasul 1: $\mathrm{b}'_1 = \mathrm{b}_1$.
2. Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, aşa încât vectorul $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 + \lambda_1 \mathrm{b}'_1$ să fie ortogonal pe b'_1, adică să avem $0 = \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2 \rangle + \lambda_1 \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1 \rangle$. Rezultă $\lambda_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1 \rangle}$. Astfel, $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2 \rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1 \rangle} \mathrm{b}'_1$.

3. Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 şi μ_2 din $\mathbb{R}$, aşa încât $b_3' = b_3 + \mu_1 b_1' + \mu_2 b_2'$ să fie ortogonal pe sistemul $\{b_1', b_2'\}$, adică să avem $\langle b_3', b_1'\rangle = 0$ şi $\langle b_3', b_2'\rangle = 0$.

   Găsim $\mu_1 = -\dfrac{\langle b_1', b_3\rangle}{\langle b_1', b_1'\rangle}$ şi $\mu_2 = -\dfrac{\langle b_2', b_3\rangle}{\langle b_2', b_2'\rangle}$. Prin urmare, avem: $b_3' = b_3 - \dfrac{\langle b_1', b_3\rangle}{\langle b_1', b_1'\rangle} b_1' - \dfrac{\langle b_2', b_3\rangle}{\langle b_2', b_2'\rangle} b_2'$.

4. Pasul k: Continuând procedeul, obţinem formula generală:

$$b_k' = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_i', b_k\rangle}{\langle b_i', b_i'\rangle} b_i', k = \overline{2, n}.$$

În cele din urmă, plecând de la baza B', putem obţine baza ortonormată $B'' = \{b_1'', b_2'', \ldots, b_n''\}$, dacă luăm $b_k'' = \dfrac{b_k'}{\|b_k'\|}$, $k = \overline{1, n}$, unde $\| \cdot \|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, considerat pe V. ◀

Bibliografie orientativă

[1] D. Buşneag, D. Piciu - *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[2] Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

[3] Mihai Onucu Drâmbe - *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, 2000.

[5] F. L. Ţiplea - *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.

[6] T. Albu, I.D. Ion - *Itinerar elementar in algebra superioară*, Matrix Rom Bucureşti, 2012.

[7] J. Harcet, L Heinrichs, P. M. Seiler - *Mathematics. Higher Lever*, Oxford Univ. Press, 2012.

[8] R. Solomon - *Notes on Ordinals and Cardinals*, math.uconn.edu, 2014.