Cursul 7

Aplicaţii liniare pe $\mathbb{R}^n$. Reprezentare matriceală

Funcţii reale. Generalităţi

În această secţiune, vom prezenta unele noţiuni fundamentale legate de aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale. Amintim următoarea definiţie a noţiunii de funcţie (v. Cursul 1)

Definiţia 7.1 *Fie X şi Y două mulţimi nevide. O submulţime $f \subseteq X \times Y$ se numeşte* ***funcţie****, dacă au loc următoarele condiţii:*

a) $D(f) \overset{def}{=} \{x \in X \ \mid \exists\, y \in Y, (x, y) \in f\} = X$;

b) $(x, y_1) \in f$ *şi* $(x, y_2) \in f$*, atunci* $y_1 = y_2$, $\forall\, x \in X$.

Vom nota $f : X \to Y$ şi o vom numi ***funcţie*** *sau* ***aplicaţie*** *sau* ***transformare*** *sau* ***operator*** *de la X la Y.*

- **Imaginea (mulţimea valorilor) lui X prin f** este $f(X) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ aşa încât $y = f(x)\}$;

- Dacă $\varnothing \neq A \subseteq X$, mulţimea $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ se numeşte **imaginea lui A prin** $f : X \to Y$;

- Dacă $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ se numeşte **contraimaginea (preimaginea)** mulţimii B prin f.

- **Graficul funcţiei** $f : X \to Y$ este dat de mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

- Dacă $A \subseteq X$, atunci funcţia definită prin $f_{|A} := f \cap (A \times Y)$ ($f_{|A}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$) se numeşte **restricţia funcţiei f la mulţimea** A, iar dacă avem o funcţie $g : A \to Y$, atunci orice aplicaţie $\tilde{g} : \tilde{A} \to Y$, unde $A \subsetneq \tilde{A} \subseteq X$, se numeşte ***prelungire a lui g la mulţimea*** $\tilde{A}$, $(\tilde{g}_{|A} \equiv g)$.

- O funcţie $f : X \to Y$ este **surjectivă** dacă $f(X) = Y$. Spunem că f este o **funcţie injectivă**) dacă pentru orice $x_1, x_2 \in X$, cu $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Funcţia f este **bijectivă** dacă f este injectivă şi surjectivă.

În cele ce urmează, vom considera cazul în care $X = \mathbb{R}^n$ şi $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, adică în cazul funcţiilor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, generic denumite **funcţii reale**.

Dacă $n = m = 1$, este cazul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **real-scalare** (sau **unidimensionale**).

Dacă $n = 1$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, suntem în cazul ***funcţiilor*** reale $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ denumite ***scalar-vectoriale*** (sau ***funcţii de o variabilă reală*** şi ***cu valori reale, vectoriale***). Despre asemenea funcţii, se poate afirma că au m componente scalar-scalare $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, în sensul că

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \forall\, x \in D_f \subseteq \mathbb{R},$$

cu $D_f = \bigcap_{k=1}^{m} D_{f_k}$, unde D_{f_k} - reprezintă mulţimea de definiţie a funcţiei reale, de o variabilă reală, f_k. Studiul unei funcţii $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ se face, de cele mai multe ori, pe baza studiului funcţiilor sale componente $f_k : D_{f_k} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1, m}$.

Fiecare dintre funcţiile f_k $(k = \overline{1, m})$ este:

- fie o **funcţie elementară de bază**, adică o **funcţie reală constantă** (adică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$), sau **funcţia identitate pe** $\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sau **funcţia exponenţială de bază** a $(a > 0, a \neq 1)$ (adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x \in \mathbb{R}_+^*$), sau **funcţia logaritmică cu baza**

a ($a > 0, a \neq 1$) (adică $x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$), sau **funcţia putere de exponent** a ($a \in \mathbb{R}$) (adică $x \in D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow x^a \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}$), sau o **funcţie trigonometrică directă**(sin, cos, tg, ctg), sau o **funcţie trigonometrică inversă** (arcsin, arccos, arctg sau arcctg),

- fie o **funcţie elementară**, adică o funcţie obţinută prin aplicarea, de un număr finit de ori, a unora dintre sau a tuturor celor patru operaţii aritmetice (adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea) asupra funcţiilor elementare de bază,
- fie o **funcţie specială**:
  - **funcţia parte întreagă**, anume $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] \overset{def}{=} \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid t \leq x\}$,
  - funcţia **signum**, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,
  - **funcţia modul**, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$,
  - **funcţia parte zecimală**, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \{x\} = x - [x] \in [0, 1)$,
  - **funcţia lui Dirichlet**, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,
  - **funcţia lui Heaviside**, adică $x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$,
  - **funcţia lui Riemann**, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } x \in (0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \in (0, 1] \cap \mathbb{Q},\ (p, q) = 1 \end{cases}$
- fie o **funcţie rezultată prin compunerea unui număr finit de funcţii elementare de bază, funcţii elementare sau/şi funcţii speciale**.

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m = 1$, orice **funcţie reală** $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte **vectorial-scalară** sau **funcţie de variabilă vectorial-reală şi cu valori scalar-reale** (ori **funcţie de** n **variabile reale, cu valori reale şi scalare**). De asemenea, când A este un subspaţiu liniar, peste $\mathbb{R}$, al spaţiului vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, f se numeşte **funcţională** (***reală***).

Exemple:

1) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = -\sqrt{\sin(x_1^2 + x_2^2)}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2) \in A$, unde $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x_1^2 + x_2^2) \geq 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{N}\}$, reprezintă un exemplu de funcţie de două variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{R}$.

   Din punct de vedere geometric, mulţimea A, de definiţie a acestei funcţii, este reuniunea mulţimilor de puncte din planul $\mathbb{R}^2$, situate în $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \pi\}$, cu centrul în $\mathbf{0} = (0, 0)$ şi de rază $\sqrt{\pi}$, precum şi în coroanele circulare închise $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x_1^2 + x_2^2 \leq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$, adică în $\overline{B(\mathbf{0}, \sqrt{(\mathbf{2k+1})\pi})} \setminus \{\overset{\circ}{B}(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{2k}\pi})\}$, unde $\overline{B(\mathbf{0}, \sqrt{(\mathbf{2k+1})\pi})}$ este închiderea discului de centru $\mathbf{0} = (0, 0)$ şi de rază egală cu $\sqrt{(2k + 1)\pi}$, în raport cu topologia indusă de metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^2$, iar $\overset{\circ}{B}(\mathbf{0}, \sqrt{2k\pi})$ este interiorul discului cu centrul tot în $\mathbf{0}$ şi cu raza $\sqrt{2k\pi}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

2) Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(\mathrm{x}) = \ln(1 - x_1 - x_2 - x_3) - (x_1 + x_3)^{x_2}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in A$, unde $A = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathrm{x}) \text{ are sens în } \mathbb{R}\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x_1 - x_2 - x_3 > 0 \text{ şi } x_1 + x_3 > 0\} = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 + x_3 < 1 - x_2\}$ este, cu evidenţă, un exemplu de funcţie dependentă de trei variabile reale şi cu valori reale, scalare.

3) **Funcţia polinomială** $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(\mathrm{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

unde $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i_1 = \overline{0,k_1}$, $\forall\, i_2 = \overline{0,k_2}$, $\ldots$, $\forall\, i_n = \overline{0,k_n}$ (cu $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$) reprezintă coeficienţii ***polinomului*** $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ (***de*** n ***nedeterminate şi cu coeficienţi reali***). Fiecare dintre termenii $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ se numeşte ***monom*** (dependent de variabilele reale x_1, dacă $i_1 > 0$, x_2, dacă $i_2 > 0$, $\ldots$ şi/sau x_n, când $i_n > 0$ şi cu coeficientul real $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$). Prin ***gradul monomului*** $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ înţelegem numărul $i_1 + i_2 + \ldots + i_n \in \mathbb{N}$. Cum $P(\mathrm{x})$ este o sumă finită de monoame, definim ***gradul polinomului*** P ca fiind maximul gradelor monoamelor din expresia sa. ***Polinomul*** $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ se numeşte ***omogen*** sau, altfel spus, ***formă***, dacă toate monoamele din suma sa de expresie au acelaşi grad.

Un exemplu de astfel de ***polinom*** este cel ***de gradul întâi***, a cărui expresie, dependentă de n variabile reale - $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

adică o combinaţie liniară de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, în care coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt elemente din $\mathbb{R}$. Acest tip de polinom este o ***formă liniară reală, definită pe*** $\mathbb{R}^n$. Orice polinom $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ se poate exprima, în mod unic, ca o sumă finită de polinoame omogene.

Un ***polinom*** $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ se numeşte ***simetric*** dacă, pentru orice permutare

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

cu $\sigma(i) \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ şi $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, $\forall\, i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, avem

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{k_1,k_2,\ldots,k_n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{k_1,k_2,\ldots,k_n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} x_{\sigma(2)}^{i_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{i_n},$$

când funcţia polinomială corespunzătoare lui P are expresia (1).

Următoarele elemente din $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ se numesc ***polinoame simetrice fundamentale***:

$$\begin{aligned}
&P_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&P_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} X_iX_j \\
&P_3 = X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + \cdots + X_{n-2}X_{n-1}X_n = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n} X_iX_jX_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_k = X_1X_2\ldots X_k + \cdots + X_{n-k+1}X_{n-k+2}\ldots X_n = \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots i_k\leqslant n} X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_n = X_1X_2\ldots X_n
\end{aligned}$$

Un rezultat remarcabil pentru mulţimea polinoamelor simetrice este următorul, prezentat aici fără demonstraţie.

Teorema 7.1 *Pentru orice polinom simetric $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, există un polinom $Q \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, aşa încât*

$$P = Q(P_1, P_2, \ldots, P_n),$$

unde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sunt polinoamele simetrice fundamentale specificate mai sus.

Atunci când $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ şi $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, asemenea **aplicaţii** f se numesc **reale**, **vectorial-vectoriale** (sau ***funcţii de*** n ***variabile reale, cu*** m ***valori reale***). Şi în cazul acestor funcţii, se poate vorbi de o exprimare în care intervin componente funcţionale, potrivit relaţiei

$$f(\mathrm{x}) = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x}))\,, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

unde $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1,m}$, sunt funcţii vectorial-scalare, cu valori reale, aşa încât

$$(f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}), \ldots, f_m(\mathrm{x})) \in B, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,$$

Aplicaţii liniare pe spaţii vectoriale

Definiţia 7.2 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp de scalari K. O* ***aplicaţie*** *$T : V \to W$ se numeşte* ***liniară (operator liniar, transformare liniară*** *sau* ***morfism de K-spaţii vectoriale****) dacă*

(L1) $T(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v}),\ \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V,$ *(aditivitate)*

(L2) $T(\alpha \mathrm{u}) = \alpha T(\mathrm{u}),\ \forall\, \mathrm{u} \in V,\ \alpha \in K,$ *(omogenitate)*

Propoziţia 7.3 *Condiţiile i) şi ii) din Definiţia 7.2 sunt echivalente cu următoarea:*

$$(L) \qquad T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in K.$$

Demonstraţie: Admiţând că $T : V \to W$ satisface condiţiile i) şi ii) din cadrul Definiţiei 7.2, avem:

$$T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = T(\alpha \mathrm{u}) + T(\beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \forall\, \alpha, \beta \in K.$$

Deci T satisface şi iii). Reciproc, în ipoteza că T verifică iii), rezultă că, pentru $\alpha = \beta = 1 \in K$, din iii), avem i), iar pentru $\beta = 0 \in K$, tot din iii), avem şi ii). ◀

Definiţia 7.4 *1. Aplicaţia liniară $T : V \to V$ se numeşte* ***endomorfism liniar*** *pe V sau* ***transformare liniară de la spaţiul V la spaţiul V****.*

2. Dacă endomorfismul liniar $T : V \to V$ este şi bijectiv, atunci el se numeşte ***automorfism liniar*** *pe V.*

3. Dacă V, W sunt două spaţii vectoriale, şi $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară bijectivă, atunci T se numeşte ***izomorfism*** *între spaţiile liniare V si W.*

Observaţii:

1) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci are loc şi următoarea extensie a relaţiei (L):

$$(L') : \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathrm{u}_i), \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n \in V, \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K.$$

2) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci

$$T\left(\mathbf{0}_V\right) = \mathbf{0}_W,$$

unde $\mathbf{0}_V$ şi $\mathbf{0}_W$ sunt vectorul nul din V şi din W. Dacă $\tilde{T}(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, atunci $\tilde{T} : V \to W$ nu este liniară.

3) Mulţimea $\mathcal{L}(V, W)$ a tuturor aplicaţiilor liniare de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial Weste un K-spaţiu vectorial, în raport cu operaţia de adunare a aplicaţiilor şi cu operaţia de înmulţire a unei aplicaţii cu un scalar din K.

4) Fie U, V şi W spaţii vectoriale peste corpul comutativ K. Dacă $T_1 : U \to V$ şi $T_2 : V \to W$ sunt aplicaţii liniare, atunci $T_2 \circ T_1 : U \to W$ este tot o aplicaţie liniară.

5) Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară bijectivă, atunci $T^{-1} : W \to V$ este o aplicaţie liniară.

Definiţia 7.5 *Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V la K-spaţiul vectorial W.*

a) Mulţimea $Ker(T) = T^{-1}(\mathbf{0}_W) = \{\mathrm{v} \in V \mid T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$ se numeşte ***nucleul aplicaţiei liniare*** *T.*

b) Mulţimea $T(V) = \{\mathrm{w} \in W \mid \exists\, \mathrm{v} \in V,$ astfel încât $T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}\}$ se numeşte ***imaginea aplicaţiei liniare*** *T şi se notează cu $Im(T)$.*

Propoziţia 7.6 *Fie V, W două K-spaţii vectoriale şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci $Ker(T)$ este un subspaţiu liniar al lui V, iar $Im(T)$ un subspaţiu liniar al lui W.*

Demonstraţie: Ştim că $T : V \to W$ este aplicaţie liniară dacă are loc:

$$T(\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T), \forall\, \alpha, \beta \in K,$$

adică, am obţinut $\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in Ker(T)$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$.

Pe de altă parte, $\forall \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$, există v_1 şi $\mathrm{v}_2 \in V$, astfel încât $T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{w}_1$ şi $T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_2$. Prin urmare, $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in K, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in Im(T)$:

$$\alpha_1\mathrm{w}_1 + \alpha_2\mathrm{w}_2 = \alpha_1 T(\mathrm{v}_1) + \alpha_2 T(\mathrm{v}_2) = T(\alpha_1\mathrm{v}_1 + \alpha_2\mathrm{v}_2) \in T(V) = Im(T).$$

◀

Propoziţia 7.7 *Dacă V, W sunt K-spaţii liniare finit-dimensionale, iar $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci are loc* ***relaţia dimensiunilor****:*

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,.$$

Demonstraţie: Fie $n = dim(V)$ şi $d = dim\,(Ker(T))$, unde $d, n \in \mathbb{N}$. Dacă $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci $d = 0$ şi, pentru orice bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, se poate spune, pe contul relaţiei (L') din Observaţia 1) de mai sus, că, oricare ar fi $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{v}_k$ (cu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in K$, coordonate ale lui v în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$), avem $T(\mathrm{v}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k T(\mathrm{v}_k)$, ceea ce ar însemna că $T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)$ ar fi un sistem de generatori al subspaţiului liniar $T(V)$, adică al lui $Im(T)$. Cum sistemul de vectori $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este şi liniar independent, căci dacă, pentru $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$, am avea $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k T(\mathrm{v}_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k\right) = \mathbf{0}_W$ şi deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \mathrm{v}_k \in Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Pe de altă parte, cum $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este o bază a lui V, vom obţine $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$, adică $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_n)\}$ este o bază a lui $Im(T)$, ceea ce înseamnă că $\dim\,(Im(T)) = n$. Aşadar, în acest caz, avem $n = 0 + n$, adică:

$$dim(V) = dim\,(Ker(T)) + dim\,(Im(T))\,.$$

Dacă $d \in \mathbb{N}^*$, adică $Ker(T) \neq \{\mathbf{0}_V\}$, atunci oricare bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d\}$ a lui $Ker(T)$ se poate completa la o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_d, \mathrm{b}_{d+1}, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V. Cum orice vector din $Im(T)$ este de forma $T(\mathrm{v})$, cu $\mathrm{v} \in V$, iar v are reprezentarea $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k$ în baza $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ de mai sus, vedem că $T(\mathrm{v}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k T(\mathrm{b}_k) = \sum\limits_{k=d+1}^{n} \alpha_k T(\mathrm{b}_k)$, întrucât $T(\mathrm{b}_k) = \mathbf{0}_W, \forall\, k = \overline{1, d}$. Prin urmare, $\{T(\mathrm{b}_{d+1}), \ldots, T(\mathrm{b}_n)\}$ este un sistem de generatori pentru $Im(T)$. În plus, vectorii $T(\mathrm{b}_{d+1}), \ldots, T(\mathrm{b}_n)$ sunt şi liniar independenţi în W. Într-adevăr, admiţând că am avea o combinaţie liniară a acestora egală cu $\mathbf{0}_W$, ar rezulta, din faptul că $\sum\limits_{k=d+1}^{n} \omega_k T(\mathrm{b}_k) = \mathbf{0}_W$, cu $\omega_{d+1}, \ldots, \omega_n \in K$, existenţa relaţiei $T\left(\sum\limits_{k=d+1}^{n} \omega_k \mathrm{b}_k\right) = \mathbf{0}_W$, în virtutea căreia am deduce că $\sum\limits_{k=d+1}^{n} \omega_k \mathrm{b}_k \in Ker(T)$. Ca atare, ar exista $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d \in K$, aşa încât $\sum\limits_{k=d+1}^{n} \omega_k \mathrm{b}_k = \sum\limits_{k=1}^{d} \eta_k \mathrm{b}_k$. Altfel spus, am avea dependenţa liniară a vectorilor $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ din baza V, ceea ce ar fi absurd. Deci $\{T(\mathrm{b}_{d+1}, \ldots, T(\mathrm{b}_n)\}$ este, de fapt, o bază a lui $Im(T)$ şi acesta are dimensiunea $n - d = dim(V) - dim\,(Ker(T))$. Aşadar, şi în acest caz, are loc relaţia din enunţ a dimensiunilor. ◀

Definiţia 7.8 *Fie V, W două K-spaţii vectoriale, şi fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci, $dim\,(Ker(T))$ se numeşte* ***defectul lui*** *T şi se notează cu $def(T)$, iar $dim\,(Im(T))$ se numeşte* ***rangul lui*** *T şi se notează cu $rang(T)$. Aşadar, formula dimensiunilor poate fi redată atunci sub forma:*

$$dim(V) = rang(T) + def(T). \tag{2}$$

Observaţie: Pe baza relaţiei dimensiunilor, se poate afirma că orice aplicaţie liniară, între K-spaţii vectoriale finit dimensionale, duce un subspaţiu vectorial arbitrar al spaţiului ei de definiţie într-un spaţiu vectorial de dimensiune cel mult egală cu a subspaţiului în cauză.

Propoziţia 7.9 *Fie T o aplicaţie liniară de la K-spaţiul vectorial V, finit-dimensional, la K-spaţiul vectorial W. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) T este aplicaţie injectivă;

b) $def(T) = 0$;

c) $rang(T) = dim(V)$;

d) Dacă $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_p\}$ ($p \in \mathbb{N}^*, p \leq n = dim(V) \in \mathbb{N}^*$) este un sistem liniar independent în V, atunci $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_p)\}$ este sistem liniar independent în W.

Demonstraţie: În virtutea relaţiei dimensiunilor, are loc echivalenţa afirmaţiilor b) şi c).
b)⇒a): Cum $\{\mathbf{0}_V\} = Ker(T)$, rezultă că $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, are loc $T(\mathrm{u}) = T(\mathrm{v})$, adică $T(\mathrm{u} - \mathrm{v}) = \mathbf{0}_W$, s-ar obţine $\mathrm{u} - \mathrm{v} = \mathbf{0}_W$, deci T este injectivă.
a)⇒b): Dacă T este injectivă, atunci $T(\mathrm{u}) = T(\mathrm{v})$ implică $\mathrm{u} = \mathrm{v}$, deci $\mathrm{u} - \mathrm{v} = \mathbf{0}_V$. Pentru $\mathrm{v} = \mathbf{0}_V$, rezultă că $T(\mathrm{u}) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ ar implica, cu necesitate, $\mathrm{u} = \mathbf{0}_V$. Astfel, avem $Ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, adică $def(T) = 0$.
b)⇒d): Presupunând că are loc b) şi că $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_p\}$ este un sistem liniar independent din V, vedem că, dacă $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k T(\mathrm{v}_k) = \mathbf{0}_W$, atunci $T\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathrm{v}_k\right) = \mathbf{0}_W$, adică, conform b), $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathrm{v}_k = \mathbf{0}_V$, de unde, pentru că $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_p\}$ este un sistem liniar independent în V, rezultă : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$. Deci $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_p)\}$ este un sistem liniar independent în W.
d)⇒b): Presupunând că d) este adevărată şi că b) n-ar avea loc, ar exista o bază a lui $Ker(T)$, fie ea $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_p\}$ care, ca sistem liniar independent din V, n-ar mai implica faptul că $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_p)\}$ este sistem liniar independent în W, deoarece $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_p)\} = \{\mathbf{0}_W\}$. Deci b) trebuie, cu necesitate, să aibă loc, în ipoteza că d) este adevărată. ◀

În mod analog, se poate demonstra şi următorul rezultat:

Propoziţia 7.10 *Fie T o aplicaţie liniară de la un K-spaţiu vectorial V la un K-spaţiu vectorial W, finit dimensional. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) T este o surjecţie;
ii) $rang(T) = dim(W)$;
iii) $Im(T) = W$;
iv) Dacă $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_p\}$ este un sistem de generatori pentru V, atunci $\{T(\mathrm{v}_1), T(\mathrm{v}_2), \ldots, T(\mathrm{v}_p)\}$ este un sistem de generatori pentru W.

Pe baza Propoziţiilor 7.9 şi 7.10, se poate vedea că are loc şi următorul rezultat:

Propoziţia 7.11 *Dacă $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale finit-dimensionale V şi W, atunci afirmaţiile imediat următoare sunt echivalente:*

j) T este o aplicaţie bijectivă;

jj) $dim(V) = dim(W)$;

jjj) $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este o bază a lui V dacă şi numai dacă $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ este o bază a lui W.

Observaţie: Evident, definiţiile 7.2 - 7.8, precum şi rezultatele propoziţiilor 7.6 - 7.11, se aplică şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, iar T este o aplicaţie liniară reală de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$. Astfel, T va fi un izomorfism liniar dacă şi numai dacă $m = n$, caz în care, dacă $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ va fi o bază în $\mathbb{R}^n$ (de exemplu baza canonică $\mathrm{b}_k = e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, cu 1 pe poziţia $k, \forall\, k = \overline{1, n}$), atunci $\{T(\mathrm{b}_1), T(\mathrm{b}_2), \ldots, T(\mathrm{b}_n)\}$ va fi, de asemenea, o bază în $\mathbb{R}^n$ şi reciproc.

Teorema 7.12 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi T un endomorfism pe V.*
Atunci există un unic operator liniar $T^* : V \to V$, astfel încât

$$\langle T^*(\mathrm{u}), \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v})\rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Operatorul T^* se numeşte ***adjunct al lui*** *T.*

Teorema 7.13 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi fie $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$, atunci:*

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$,
2. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$,
3. $(T^*)^* = T$.

Definiţia 7.14 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian.*
O aplicaţie $T \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte ***autoadjunctă*** *sau* ***simetrică*** *dacă $T = T^*$.*

Observaţie: Se poate arăta că un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ definit pe un spaţiu euclidian $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, finit dimensional, este **simetric** dacă şi numai dacă **matricea sa asociată,** în raport cu o bază ortonormată a lui V, **este simetrică**.

Definiţia 7.15 *Un endomorfism T pe un spaţiu euclidian $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este numit* ***antisimetric*** *dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), \mathrm{v}\rangle = -\langle \mathrm{u}, T(\mathrm{v})\rangle, \forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V.$$

Observaţie: Dacă V este finit dimensional, se poate arăta că $T \in \mathcal{L}(V)$ este antisimetric dacă şi numai dacă matricea sa A este antisimetrică, adică $A^T = -A$, unde A^T reprezintă matricea transpusă corespunzătoare.

Definiţia 7.16 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T se numeşte* ***ortogonal*** *dacă*

$$\langle T(\mathrm{u}), T(\mathrm{u})\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V. \tag{3}$$

Observaţie: Ţinând seama de definiţia 7.14, relaţia (3) se poate rescrie sub forma

$$\langle (T^* \circ T)(\mathrm{u}), \mathrm{u}\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle, \forall\, \mathrm{u} \in V,$$

sau, echivalent

$$T^* \circ T = \mathbf{1}_V.$$

Astfel, dacă V este finit dimensional, atunci $T \in \mathcal{L}(V)$ este un endomorfism ortogonal dacă şi numai dacă, într-o bază ortonormată a lui V, matricea A, asociată lui T, este ortogonală ($A^T \cdot A = I$). Deoarece, în acest caz, $det(A) = \pm 1$, înseamnă că A este nesingulară, având rangul egal cu $dim(V)$. Aşadar, $rang(T) = dim(V)$ şi atunci $def(T) = 0$. Prin aplicarea propoziţiilor 7.9 şi 7.10 rezultă că T este simultan injectivă şi surjectivă pe V. Deci T este automorfism pe V. Cu alte cuvinte, orice endomorfism ortogonal pe un spaţiu euclidian finit dimensional este un automorfism pe respectivul spaţiu.

Definiţia 7.17 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi f o aplicaţie de la X la X. Spunem că f este o* ***izometrie*** *pe X dacă $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.*

Propoziţia 7.18 *Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Endomorfismul T este o izometrie dacă şi numai dacă el este ortogonal.*

Demonstraţie: Raţionând în raport cu metrica indusă pe V de norma dată de produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, T ar fi o izometrie pe V dacă $d\left(T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})\right)$, adică $\|T(\mathrm{x})-T(\mathrm{y})\|$, echivalent spus $\langle T(\mathrm{x})-T(\mathrm{y}),T(\mathrm{x})-T(\mathrm{y})\rangle^{1/2}$, ar fi egală cu $d(x,y)$, adică cu $\langle \mathrm{x}-\mathrm{y},\mathrm{x}-\mathrm{y}\rangle^{1/2}$, $\forall\,\mathrm{x},\mathrm{y}\in V$. Ori asta revine la $\langle T(\mathrm{u}),T(\mathrm{u})\rangle=\langle \mathrm{u},\mathrm{u}\rangle$, $\forall\,\mathrm{u}\in V$, ceea ce ar însemna că T este endomorfism ortogonal. La fel, şi reciproc. ◀

Reprezentarea matriceală a aplicaţiilor liniare

Fie V şi W două K-spaţii vectoriale, finit-dimensionale ($dim(V)=n$ şi $dim(W)=m$), iar $T:V\to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ este o bază a lui V, iar $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$ este o bază a lui W, atunci, pentru orice $\mathrm{v}=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\mathrm{v}_k\in V$, unde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K$, sunt coordonatele lui v în baza $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$, avem

$$\mathrm{y}=T(\mathrm{v})=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kT(\mathrm{v}_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\sum_{l=1}^{m}a_{lk}\mathrm{w}_l\right)=\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\alpha_k\right)\mathrm{w}_l,\quad\forall k\in\{1,2,\ldots,n\},$$

unde $\{a_{1k},a_{2k},\ldots,a_{mk}\}$ sunt coordonatele vectorului $T(\mathrm{v}_k)$ în baza $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$. Cum, de fapt,

$$\mathrm{y}=\sum_{l=1}^{m}y_l\mathrm{w}_l,\tag{4}$$

unde $y_l\in K,\forall\,l=\overline{1,m}$ sunt coordonatele lui y, în baza $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_n\}$, se poate deduce că avem:

$$y_l=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\alpha_k,\forall\,l=\overline{1,m}.\tag{5}$$

Dacă notăm $A=(a_{lk})_{\substack{1\le l\le m\\1\le k\le n}}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, putem scrie $\mathrm{y}=A\mathrm{v}$, ceea ce înseamnă că aplicaţia liniară T induce, în raport cu bazele $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$, matricea A.

Reciproc, uşor de observat că, prin intermediul matricii A şi a relaţiei $\mathrm{y}=A\mathrm{v}$, putem introduce de fapt aplicaţia $T:V\to W$, definită prin $T(\mathrm{v})=A\mathrm{v}=\mathrm{y}$ şi, în plus, T este liniară.

Aşadar, pentru orice aplicaţie liniară între două K-spaţii vectoriale finit dimensionale, putem să asociem, în raport cu o pereche de baze, o matrice cu elemente din corpul scalarilor K.

Studiul unei asemenea aplicaţii T se reduce la studiul matricii asociate care, raportată la perechea de baze $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ şi $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$, are, de fapt, drept coloane, vectorii coordonatelor lui $T(\mathrm{v}_1),T(\mathrm{v}_2),\ldots,T(\mathrm{v}_n)$ în baza $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$.

Notând cu B baza $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$ a lui V, cu B' baza $\{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\ldots,\mathrm{w}_m\}$ a lui W, cu $\mathrm{y}_{B'}$ vectorul coordonatelor lui y, din W, în baza B' şi cu v_B vectorul coordonatelor lui v în baza B, se poate spune că relaţia (5), care înseamnă relaţia $\mathrm{y}=T(\mathrm{v})$, se poate reda,cu ajutorul matricii $A_{BB'}$, asociată lui T, prin:

$$\mathrm{y}_{B'}=A_{BB'}\mathrm{v}_B.\tag{6}$$

Aceasta reprezintă expresia analitică a operatorului liniar $T:V\to W$, în raport cu perechea de baze (B,B').

Trecând acum, în V, de la baza B la baza $\hat{B}$, prin matricea de schimbare S (potrivit relaţiei $\widehat{B}=BS$) şi de la baza B' la baza $\hat{B}'$, în W, prin matricea de schimbare S' (adică $\hat{B}'=B'S'$), se vede că, pe baza relaţiei (6) şi a relaţiilor de transformare a coordonatelor lui y şi respectiv v, adică a relaţiilor $\mathrm{y}_{\hat{B}'}=\left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'}$ şi $\mathrm{v}_B=S\mathrm{v}_{\hat{B}}$, în raport cu perechea nouă de baze $(\hat{B},\hat{B}')$, avem:

$$\mathrm{y}_{\hat{B}'}=\left(S'\right)^{-1}\mathrm{y}_{B'}=\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}\mathrm{v}_B=\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S\mathrm{v}_{\hat{B}}.\tag{7}$$

Aceasta înseamnă că, faţă de $(\hat{B},\hat{B}')$ matricea asociată lui T este $\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S$, adică are loc relaţia

$$A_{\hat{B}\hat{B}'}=\left(S'\right)^{-1}A_{BB'}S,\tag{8}$$

care reprezintă formula schimbării matricii unei aplicaţii liniare la o schimbare de baze. Dacă $W = V$, se poate considera că $B' = B$ şi $\hat{B}' = \hat{B}$, ceea ce ar însemna că $S' = S$. Astfel, formula (8) s-ar reduce la

$$A_{\hat{B}} = S^{-1} A_B S, \tag{9}$$

unde A_B şi $A_{\hat{B}}$ ar fi matricile asociate lui T în bazele B şi respectiv $\hat{B}$, iar S ar fi matricea de schimbare de la B la $\hat{B}$. În virtutea relaţiei (9), matricile pătratice $A_{\hat{B}}$ şi A_B sunt asemenea.

Reciproc, dacă A şi $\tilde{A}$ din $\mathcal{M}_n(K)$ sunt două matrici pătratice asemenea (există $L \in \mathcal{M}_n(K)$ nesingulară, astfel încât $\tilde{A} = L^{-1}AL$), atunci A şi $\tilde{A}$ reprezintă un acelaşi endomorfism liniar T, pe un spaţiu vectorial de dimensiune n, în două baze ale respectivului spaţiu pentru care matricea de trecere de la una la cealaltă este L.

Observaţie: Formula (8) se păstrează şi în cazul particular în care $V = \mathbb{R}^n$ şi $W = \mathbb{R}^m$, iar formula (9) funcţionează şi atunci când $W = V = \mathbb{R}^n$.

Vectori şi valori proprii

Definiţia 7.19 *Fie V un K-spaţiu liniar şi $T \in \mathcal{L}(V)$.*

a) Un vector $\mathrm{v} \in V, \mathrm{v} \neq \mathbf{0}_V$, se numeşte ***vector propriu*** *pentru T dacă*

$$\exists\ \lambda \in K \ \text{aşa încât}\ T(\mathrm{v}) = \lambda \cdot \mathrm{v}. \tag{10}$$

Scalarul λ din (10) se numeşte ***valoare proprie*** *a lui T, corespunzătoare vectorului propriu v.*

b) Mulţimea $Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) = \{\mathrm{u} \in V \mid T(x) = \lambda \cdot \mathrm{u}\}$ se numeşte ***subspaţiu propriu*** *corespunzător valorii proprii λ.*

Relativ la valorile proprii şi vectorii proprii ai unui endomorfism T pe un K-spaţiu vectorial V, remarcăm următoarele:

1. Un vector nenul $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu, corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$, pentru T, dacă şi numai dacă $\mathrm{v} \in Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$.

2. Unui vector propriu al lui T îi corespunde o singură valoare proprie $\lambda \in K$ nu şi reciproc.

3. Vectorii proprii ce corespund unor valori proprii distincte pentru T sunt liniar independenţi.

4. Orice subspaţiu propriu corespunzător unei valori proprii a lui T este invariant în raport cu T, adică are loc relaţia: $T\,(Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)) \subseteq Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)$.

5. La două valori proprii distincte ale lui T corespund subspaţii proprii ce au în comun doar vectorul nul $\mathbf{0}_V$.

6. Dacă V este finit dimensional, iar A este matricea lui $T \in \mathcal{L}(V)$ într-o bază B a lui V, atunci $\mathrm{v} \in V$ este vector propriu pentru T dacă şi numai dacă este soluţie nebanală a sistemului (algebric, omogen)

$$(A - \lambda I)\mathrm{v} = \mathbf{0}_V,$$

iar λ este valoare proprie ce corespunde lui v dacă şi numai dacă este rădăcină a ecuaţiei

$$det(A - \lambda I) = 0, \tag{11}$$

numită **ecuaţie caracteristică**. Polinomul $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ se numeşte **polinom caracteristic** al matricii A şi, implicit, al lui T.

Dacă λ este rădăcină a polinomului $P_A(\lambda)$, adică este valoare proprie simplă pentru T, atunci

$$def\,(T - \lambda \mathbf{1}_V) = 1$$

Altfel spus, dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii simple λ este egală cu 1. În rest, când λ este valoare proprie de multiplicitate $m > 1$, atunci $dim\,(Ker\,(T - \lambda \mathbf{1}_V)) \leq n$.

Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ îşi verifică propria ecuaţie caracteristică, adică $P_A(A) = 0_n$ în sens matriceal (teorema Cayley-Hamilton).

7. Orice endomorfism simetric de la un spaţiu euclidian $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la acelaşi spaţiu are numai valori proprii reale, iar subspaţiile proprii corespunzătoare valorilor proprii distincte sunt ortogonale.

Definiţia 7.20 *Un* ***endomorfism*** *pe un spaţiu liniar finit dimensional este denumit* ***diagonalizabil*** *dacă există o bază B a respectivului spaţiu în raport cu care matricea A_B, asociată endomorfismului, este una de formă diagonală, adică $A_B = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, unde n este dimensiunea spaţiului respectiv şi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt scalari din corpul peste care este structurat spaţiul liniar considerat.*

Se pot constata următoarele:

1. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, se poate diagonaliza dacă şi numai dacă există o bază a lui V alcătuită din vectori proprii ai lui T.

2. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil pe spaţiul liniar finit dimensional V dacă şi numai dacă ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile în corpul K (peste care este structurat V) şi subspaţiile proprii în cauză au dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii corespunzătoare.

3. Un endomorfism simetric pe un spaţiu euclidian finit dimensional este întotdeauna diagonalizabil. În acest caz, diagonalizabilitatea are loc într-o bază ortonormată a respectivului spaţiu.

   Pentru diagonalizarea endomorfismului, se parcurg următoarele etape:

   - Se determină matricea A a endomorfismului vizat, într-o bază fixată a spaţiului euclidian considerat. În particular, dacă spaţiul este $\mathbb{R}^n$, se consideră matricea A în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$;
   - Se determină valorile proprii ale endomorfismului respectiv, prin rezolvarea ecuaţiei algebrice caracteristice $P_A(\lambda) = 0$;
   - Dacă rangul matricii $A - \lambda I$ este, pentru λ egal cu fiecare valoare proprie, identic cu dimensiunea spaţiului euclidian luat în consideraţie, diminuată cu multiplicitatea valorii proprii în cauză, atunci se decide că endomorfismul este diagonalizabil. În caz contrar, se concluzionează că endomorfismul din context nu este diagonalizabil.
   - Pentru situaţia în care endomorfismul este diagonalizabil, se determină o bază a spaţiului euclidian considerat alcătuită din vectorii proprii ai endomorfismului, vectori v ce se găsesc prin rezolvarea sistemelor algebrice şi omogene
   $$(A - \lambda_j I)\,\mathrm{v} = \mathbf{0}_V, \forall\, j = \overline{1, l},$$
   unde λ_j sunt valorile proprii găsite în prealabil.
   - Baza în care endomorfismul are formă diagonală se determină prin transformarea bazei iniţiale (de start), matricea transformării fiind aleasă drept aceea care are, pe coloane, coordonatele vectorilor proprii ortogonali găsiţi, în raport cu baza de start.
   - Se scrie matricea ce corespunde formei ortogonale a endomorfismului avut în vedere prin respectarea exprimării $diag(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \lambda_l, \ldots, \lambda_l)$, unde fiecare din valorile proprii λ_j este luată de atâtea ori cât îi este ordinul de multiplicitate.

În fond, ne bazăm pe următorul rezultat:

Teorema 7.21 *Fie V un spaţiu euclidian n-dimensional ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Spunem că vectorii proprii ai endomorfismului T generează întreg spaţiul V dacă şi numai dacă matricea asociată lui T are formă diagonală în raport cu baza vectorilor proprii. În acest caz, fiecare valoare proprie a lui T apare, pe diagonala respectivă, de un număr de ori egal cu dimensiunea spaţiului propriu asociat.*

Demonstraţie: Admitem că V este dotat deja cu o bază alcătuită din vectorii proprii ai lui T. Fie aceştia $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii (nu numai decât distincte) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Avem deci: $T(\mathrm{v}_i) = \lambda_i \mathrm{v}_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Dacă baza respectivă este ortonormată, ceea ce este, de fapt, posibil întotdeauna, în virtutea faptului că subspaţiile proprii asociate valorilor λ_i sunt mutual (două câte două) ortogonale şi, pentru fiecare dintre respectivele spaţii, se poate pune în evidenţă, prin algoritmul lui Gram-Schmidt, câte o bază ortonormată (alcătuită, evident, din combinaţii liniare ale vectorilor proprii corespunzători unei aceleiaşi valori proprii, combinaţii care sunt tot vectori proprii ai respectivei valori), atunci reiese că matricea endomorfismului T, faţă de această bază a lui V, este matricea diagonală

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Reciproc, dacă matricea asociată lui T, în raport cu o bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, are forma diagonală A_T, atunci avem relaţiile $T(\mathrm{b}_k) = \lambda_k \mathrm{b}_k$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n$ sunt vectori proprii ai lui T, corepsunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Dacă, în raport cu baza aceasta a lui V, alcătuită deci din vectori proprii ai lui T, am avea un anume element din V, fie el notat cu v_0, tot vector propriu al lui T, corespunzător unei valori proprii λ_0, atunci ar trebui să aibă loc relaţia $T(\mathrm{v}_0) = \lambda_0 \mathrm{v}_0$, cu $\mathrm{v}_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{b}_k \neq \mathbf{0}_V$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sunt coordonatele lui v_0 în baza $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n\}$. Altfel zis, am avea:

$$\lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = \lambda_0 v_0 = T(v_0) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k b_k.$$

De aici, ar rezulta că $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_k - \lambda_0)\mathrm{b}_k = \mathbf{0}_V$. Cum $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n$ sunt liniar independenţi, ar reieşi că am avea $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, n}$. Deoarece scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nu au cum să fie toţi egali cu zero, am avea $\lambda_0 \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, ceea ce înseamnă că T nu admite şi alte valori proprii în afară de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Considerând că am avea $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \lambda_0$ şi $\lambda_i \neq \lambda_0$, $\forall\, i \in \{r+1, \dots, n\}$, unde $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ ar fi ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_0, putem conta pe faptul că orice vector de tipul $c_1\mathrm{b}_1 + c_2\mathrm{b}_2 + \cdots c_r\mathrm{b}_r$ (cu $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$) ar fi vector propriu al lui T, corespunzător valorii proprii λ_0. Ar rezulta atunci, pe baza relaţiilor $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_0) = 0$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, de mai înainte, că, în mod necesar, găsim: $\alpha_k = 0$, $\forall\, k = \overline{r+1, n}$. Prin urmare, subspaţiul propriu asociat lui λ_0 coincide, în realitate, cu subspaţiul generat de vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_r$, având dimensiunea egală cu multiplicitatea lui λ_0. ◀

Bibliografie

1. Elena Macovei, F. Iacob - *Matematică (pentru anul I - ID,Informatică) (Funcţii scalar-reale elementare, pp. 47-49*, Editura Universităţii “Al. I. Cuza”, 2005-2006.

2. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră (Cap. III) (inele de polinoame şi polinoame simetrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

3. D. Drăghici - *Algebră (Cap. X)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

4. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie (Cap. V)*, Ed. Didactică şi Pedag., Bucureşti, 1979.

5. Irinel Radomir - *Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

6. E. Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică,* Ed. ”Fair Partners”, Buc., 2010.

7. Kenneth Kuttler - *Linear Algebra, Theory And Applications,* The Saylor Foundation, 2013.

8. Jim Hefferon - *Linear Algebra,* Amazon for Students, 2014.

9. Sheldon Axler - *Linear Algebra Done Right,* Springer International Publishing AG, 2015.

10. S. Heilman - *Linear Transformations and Matrices*, UCLA Department of Mathematics, Los Angeles, 2016.