Cursul 6

Cadru metric pentru $\mathbb{R}^n$

Spaţii metrice. Referiri la $\mathbb{R}^n$

Definiţia 6.1 *Fie X o mulţime nevidă.*

*a) Se numeşte **distanţă** (sau **metrică**) pe X, o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ care satisface următoarele condiţii:*

(D1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall\, x, y \in X$;

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$ (simetria);

(D3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiulară);

*b) Perechea (X, d), unde X este o mulţime nevidă iar d este o metrică pe X, se numeşte **spaţiu metric**.*

Propoziţia 6.2 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci au loc:*

a) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in X$;

b) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$;

c) $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$, $\forall x, x', y, y' \in X$ (inegalitatea patrulaterului).

Demonstraţie: Punctul a) se demonstrează utilizând inducţia şi proprietatea (D3).

b) Din (D3) avem

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \stackrel{(D2)}{=} d(x, y) + d(x, z)$$

Din aceste inegalităţi obţinem

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y),$$
$$d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y).$$

Aşadar, punctul b) este demonstrat.

c) Aplicând a) pentru punctele $x,\ x',\ y,\ y'$, obţinem

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y).$$

Schimbând rolurile perechii de puncte (x, y) cu (x', y') obţinem

$$d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Din ultimele două inegalităţi obţinem concluzia. ◀

Observaţie: Inegalitatea de la punctul c) se poate interpreta şi în plan. Într-un patrulater oarecare, diferenţa lungimilor a două laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi.

Exemple de spaţii metrice

1) Fie $X=\mathbb{R}$ şi $d_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, cu $d_1(x,y)=|x-y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. d_1 este o distanţă pe $\mathbb{R}$, numită **distanţa uzuală (metrica uzuală)**. Astfel, $(\mathbb{R},d_1)$ este un spaţiu metric.

2) Fie $X=\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi fie $d_2:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, definită prin

$$d_2(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2},\ \forall\,\mathrm{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\mathrm{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Atunci d_2 este o distanţă, numită **distanţa euclidiană (metrica euclidiană)**, iar $(\mathbb{R}^n,d_2)$ este un spaţiu metric.

Se poate arăta cu uşurinţă că d_2 îndeplineşte (D1) şi (D2). Vom demonstra (D3). Fie $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n),z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$. Arătăm că $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$, adică

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}\qquad(*)$$

Dacă notăm cu $a_k=x_k-y_k,\ b_k=y_k-z_k,\ k=\overline{1,n}$, atunci $(*)$ se rescrie astfel

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\Longleftrightarrow 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

adică

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\qquad(**)$$

Pentru a arăta $(**)$ considerăm următoarea funcţie $\varphi(\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Cum $\varphi(\lambda)\ge 0,\forall\lambda\in\mathbb{R}$, avem

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ge 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Această inegalitate are loc pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k\le 0.$$

Aşadar, are loc $(**)$, deci, d_2 este o metrică. Inegalitatea $(**)$ se mai numeşte **inegalitatea lui Cauchy - Bunyakowski - Schwarz**.

Dacă $n=2$, $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ este distanţa obişnuită între două puncte din plan.

3) Fie $X=\mathbb{R}^n$, atunci următoarele funcţii sunt distanţe pe $\mathbb{R}^n$:

$$d_p(\mathrm{x},\mathrm{y})=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\forall\,p\geqslant 1,\forall\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n,\ \textbf{(distanţa Minkowski)}$$

$$d_1(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|,\forall\,\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n,\ \textbf{(distanţa Manhattan)}$$

$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - y_k|, \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n, \ \textbf{(distanţa Cebîşev)}$$

$$\tilde{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n.$$

4) Dacă X este o mulţime nevidă oarecare, funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definită prin

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă x} \neq \text{y} \\ 0, & \text{dacă x} = \text{y} \end{cases},$$

este o metrică pe X (numită ***metrică discretă***). Spaţiul (X, d) se numeşte ***spaţiu metric discret***.

5) Fie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi aşa-numita ***funcţie a lui Baire***, $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}.$$

Atunci, funcţia $d_f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall\, x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

satisface axiomele (D1) - (D3) din Definiţia 6.1. Aşadar, d_f este o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$, iar perechea $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$ este un spaţiu metric.

6) Fie A o mulţime oarecare. Să notăm cu $\mathcal{B}(A)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}$ cu $f(A)$ mărginită în $\mathbb{R}$. Funcţia $d : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$d(f, g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A),$$

este o distanţă.

Definiţia 6.3 *Fie d şi $\hat{d}$ metrici pe o mulţime X. Dacă există două constante reale şi pozitive, α şi β, astfel încât*

$$(*) \quad \alpha \cdot d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y) \leqslant \beta \cdot d(x, y), \forall\, x, y \in X,$$

atunci d şi $\hat{d}$ sunt metrici echivalente.

Exemplu: Metricile d_1, d_2 şi d_∞ sunt echivalente pe $\mathbb{R}^n$. Aceasta întrucât, după cum se poate vedea, (nedificil în fond) au loc relaţiile următoare, de tipul $(*)$:

$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leqslant d_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leqslant \sqrt{n} \cdot d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \text{ şi,}$$

$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leqslant d_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leqslant n \cdot d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Amintim următoarea definiţie (v. Curs 5):

Definiţia 6.4 *Fie X o mulţime nevidă.*
i. O funcţie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte normă pe spaţiul liniar real $(X, +, \cdot)$ dacă satisface următoarele proprietăţi:

(N1) $\|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0;$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{x} \in X;$

(N3) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|, \forall \mathrm{x},\mathrm{y} \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

*ii. Un spaţiu liniar X înzestrat cu o normă se numeşte **spaţiu normat**.*

Propoziţia 6.5 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi fie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, cu $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$. Atunci d este o distanţă pe X cu următoarele două proprietăţi:*

(i) $d(\mathrm{x} + \mathrm{z}, \mathrm{y} + \mathrm{z}) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, pentru orice $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in X$;

(ii) $d(\lambda \mathrm{x}, \lambda \mathrm{y}) = |\lambda| d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$.

*Distanţa d se numeşte **distanţa indusă de norma** $\|\cdot\|$.*

Demonstraţie: Arătăm că $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este distanţă.
(D1) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$;
(D2) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| = \|-(\mathrm{y} - \mathrm{x})\| = |-1| \cdot \|\mathrm{y} - \mathrm{x}\| = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$;
(D3) $d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{z}\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{y} - \mathrm{z}\| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| + \|\mathrm{y} - \mathrm{z}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}), \forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in X$. Aşadar, d este o metrică. În plus, avem:

$$d(\mathrm{x} + \mathrm{z}, \mathrm{y} + \mathrm{z}) = \|\mathrm{x} + \mathrm{z} - (\mathrm{y} + \mathrm{z})\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in X$$

şi

$$d(\lambda \mathrm{x}, \lambda \mathrm{y}) = \|\lambda \mathrm{x} - \lambda \mathrm{y}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{x}\| = |\lambda| d(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ şi } \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in X.$$

◀

Observaţie: 1. Nu orice distanţă este indusă de o normă. Spre exemplu, distanţa $\widetilde{d}$, definită mai sus, nu este indusă de nici o normă, întrucât $\widetilde{d}(x, 0)$ nu satisface (D2).
2. Dacă o distanţă d provine dintr-o normă, atunci această normă este unic determinată de d prin $\|\mathrm{x}\| = d(x, 0)$.

Exemple de spaţii normate

1. Dacă $X = \mathbb{R}^n$, se poate arăta că funcţia $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\|\mathrm{x}\|_p = d_p(x, 0) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

este o normă, pentru orice $p \in [1, \infty)$. Dacă $p = 2$ vom obţine **norma euclidiană**. Dacă $p \to \infty$ atunci funcţia $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definită prin $\|\mathrm{x}\|_\infty = d_\infty(\mathrm{x}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, este normă.
2. Fie mulţimea $\mathcal{B}(A)$ şi fie $\|\cdot\| : \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+$ definită prin:

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|, \ \forall f \in \mathcal{B}(A).$$

Aplicaţia $\|\cdot\|$ este o normă, numită **norma uniformă**, care induce metrica definită anterior prin

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Vecinătăţile unui punct

Definiţia 6.6 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ arbitrar şi $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

*i. Numim **bilă deschisă** de centru x_0 şi rază r, mulţimea*

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\},$$

ii. *Numim **bilă închisă** de centru x_0 şi rază r, mulţimea*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}.$$

Definiţia 6.7 *Fie (X, d) spaţiu metric şi fie $x_0 \in X$ arbitrar. O submulţime V a spaţiului X se numeşte **vecinătate** a punctului x_0 dacă există o bilă deschisă centrată în x_0, conţinută în V, adică dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset V$.*

Vom nota cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului x_0.

Propoziţia 6.8 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ arbitrar şi fie $\mathcal{V}(x_0)$ un sistem de vecinătăţi pentru punctul x_0. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

(V1) dacă $V \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $V \subseteq U \subseteq X$, atunci $U \in \mathcal{V}(x_0)$;

(V2) dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$;

(V3) $\forall\ V \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow x \in V$;

(V4) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $\forall y \in W,\ V \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstraţie: (V1): Fie $V \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow \exists r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset V$. Cum $V \subset U$, rezultă că $\exists r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset U$, adică $U \in \mathcal{V}(x_0)$.
(V2): Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$. Rezultă că $\exists r_1, r_2 > 0$ astfel încât $B(x_0, r_1) \subset V_1$ şi $B(x_0, r_2) \subset V_2$. Considerând $r = \min\{r_1, r_2\}$ se vede că $B(x_0, r) \subset V_1$ şi $B(x_0, r) \subset V_2 \Rightarrow\ B(x_0, r) \subset V_1 \cap V_2$. Punctul (V3) rezultă imediat din definiţia vecinătăţii unui punct. Demonstrăm (V4). Fie $V \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow \exists r > 0$ a. î. $B(x_0, r) \subset V$. Considerăm $W = B(x_0, r)$. Dacă $y \in W$, rezultă că $d(x_0, y) < r$. Luând r' astfel încât $0 < r' < r - d(x_0, r)$, observăm că $B(y, r') \subset B(x_0, r) \subset V$. Prin urmare, $B(y, r') \subset V$, adică $V \in \mathcal{V}(y)$. ◀

Teorema 6.9 *Orice bilă deschisă dintr-un spaţiu metric, este vecinătate pentru orice punct al său.*

Definiţia 6.10 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $\mathcal{V}(x_0)$ sistemul vecinătăţilor punctului x_0. Se numeşte **sistem fundamental de vecinătăţi** pentru x_0, o familie $\mathcal{U}(x_0)$ de părţi ale lui X, care satisface următoarele proprietăţi:*

i. $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$;

ii. *pentru orice $V \in \mathcal{V}(x_0), \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $U \subset V$.*

Mulţimi deschise. Mulţimi închise

Definiţia 6.11 *Fie (X, d) spaţiu metric şi fie A o submulţime nevidă a spaţiului X. Mulţimea A se numeşte **mulţime deschisă** dacă A este vecinătate pentru orice punct al său, adică*

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x, r) \subset A.$$

Exemple: 1. Orice bilă deschisă dintr-un spaţiu metric este o mulţime deschisă. În particular, dacă $X = \mathbb{R}$, iar d este metrica euclidiană, atunci orice interval de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, este o mulţime deschisă.
2. Mulţimile $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1 < 4, -1 < x_2 < 1\}$ şi $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 1\}$ sunt mulţimi deschise.
3. Mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece mulţimea $(1, 2]$ nu este vecinătate pentru 2 (nu există nici o bilă centrată în 2 care să aparţină intervalului $(1, 2]$.)

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, vom nota cu τ_d familia tuturor mulţimilor deschise ale lui X. Familia τ_d se numeşte **topologia indusă de metrica** d. Dacă $X = \mathbb{R}^n, \in \mathbb{N}^*$, iar d este metrica euclidiană, atunci topologia indusă de metrica d se numeşte **topologia uzuală** a lui $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.12 *Fie (X, d) spaţiu metric. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

i. *Orice reuniune de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;*

ii. *Intersecţia a două mulţimi deschise este o mulţime deschisă;*

iii. *Orice mulţime deschisă nevidă se poate reprezenta ca reuniune de bile deschise;*

Definiţia 6.13 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Spunem că $F \subset X$ este o* ***mulţime închisă*** *dacă $C_F = X \setminus F$ este o mulţime deschisă.*

Exemple: 1. Dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci X şi $\varnothing$ sunt mulţimi închise.
2. Orice bilă închisă dintr-un spaţiu metric (X, d) este o mulţime închisă.

Observaţie: Un spaţiu metric poate să conţină submulţimi care nu sunt nici deschise nici închise. Spre exemplu, în spaţiul $X = \mathbb{R}$, cu metrica euclidiană, un interval de forma $[a, b)$, cu $a < b$ nu este nici mulţime închisă nici deschisă.

Definiţia 6.14 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $A \subseteq X$ nevidă.*

a) ***Distanţa de la un element*** *$x \in X$* ***la*** *A este dată de*

$$\rho(x, A) := \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

b) ***Distanţa dintre două mulţimi nevide*** *$A, B \subseteq (X, d)$ este definită prin:*

$$\rho(A, B) := \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

c) Se numeşte ***diametru al unei mulţimi nevide*** *$A \subseteq (X, d)$ elementul din $\overline{\mathbb{R}}$ dat de relaţia:*

$$\rho(A) := \sup \{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\}.$$

Prin convenţie, vom considera că $\rho(x, \varnothing) = +\infty \ \forall x \in X$, $\rho(A, \varnothing) = \rho(\varnothing, A) = +\infty, \forall A \subseteq X$ şi $\rho(\varnothing) = -\infty$.

Propoziţia 6.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci, pe baza Definiţiei 6.14, au loc următoarele afirmaţii:*

i) $A \subseteq B \subseteq (X, d) \Rightarrow \rho(A) \leqslant \rho(B)$

ii) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *este formată dintr-un punct;*

Definiţia 6.15 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric (X, d).*

j) A se numeşte ***mărginită*** *dacă $\rho(A) < +\infty$.*

jj) A este numită ***mulţime nemărginită*** *dacă $\rho(A) = +\infty$.*

Teorema 6.16 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci mulţimea nevidă $A \subset X$ este mărginită dacă şi numai dacă există o bilă deschisă $B(x_0, r)$ astfel încât $A \subset B(x_0, r)$.*

Teorema 6.17 *O submulţime A a spaţiului normat $(X, \|\cdot\|)$ este mărginită dacă şi numai dacă*

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } \|x\| < r, \forall x \in A.$$

Interiorul unei mulţimi

Definiţia 6.18 *Fie (X,d) spaţiu metric şi fie A o submulţime nevidă a spaţiului X.*

i. *Un element $x_0 \in A$ se numeşte* ***punct interior*** *al mulţimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică dacă*

$$\exists r > 0, \ \textit{astfel încât } B(x_0, r) \subset A.$$

ii. *Mulţimea tuturor punctelor interioare ale unei mulţimi A se numeşte* ***interiorul mulţimii*** *A şi se notează* int A *sau $\mathring{A}$.*

Exemple: 1. $X = \mathbb{R}$ cu metrica euclidiană, şi fie $A_1 = [a,b), A_2 = (a,b], A_3 = (a,b), A_4 = [a,b]$, cu $a < b$. Atunci: $\mathring{A}_1 = \mathring{A}_2 = \mathring{A}_3 = \mathring{A}_4 = (a,b)$.
2. Fie $X = \mathbb{R}$ cu metrica uzuală şi $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Atunci $\mathring{B} = \varnothing$, deoarece, $\forall x_0 \in B, \nexists r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subset B$, căci orice interval conţine şi numere raţionale.

Teorema 6.19 *Fie (X,d) un spaţiu metric. Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

I. $\mathring{A} \subseteq A, \forall A \subseteq X$;

II. $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}, \forall A, B \subseteq X$;

III. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \forall A, B \subseteq X$;

IV. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \forall A, B \subseteq X$;

V. *A este deschisă* $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

Demonstraţie: Afirmaţia I. este evidentă.
II. Fie $x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$, şi cum $A \subset B$, rezultă că $B \in \mathcal{V}(x)$, adică $x \in \mathring{B}$.
III. Cum pe baza faptului că $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$ aplicând II., vom găsi că $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A}$ şi $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{B}$,adică $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Arătăm incluziunea inversă. Fie $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A}$ şi $x \in \mathring{B}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$ şi $B \in \mathcal{V}(x)$. Prin urmare, obţinem $A \cap B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. Aşadar, obţinem $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
IV. Cum $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, avem $\mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ şi $\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ (conform II.). Aşadar, avem $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.
V. Presupunem că mulţimea A este deschisă ($A \in \tau_d$), atunci $\forall x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \mathring{A}$. Deci, $A \subset \mathring{A}$. Reciproc, dacă $A = \mathring{A}$, atunci $\forall x \in A$, x este punct interior lui A, şi deci $A \in \mathcal{V}(x)$. ◀

Definiţia 6.20 *Fie (X,d) spaţiu metric şi $A \subset X$, $A \neq \varnothing$.*

i) *Un element $x \in X$ care este punct interior complementarei $X \setminus A$, se numeşte* ***punct exterior*** *al lui A.*

ii) *Mulţimea punctelor exterioare unei mulţimi A se numeşte* ***exteriorul mulţimii*** *A şi se notează $Ext(A)$.*

Propoziţia 6.21 *Fie (X,d) un spaţiu metric. Un element $x \in X$ este punct exterior pentru o mulţime $A \subseteq X$ dacă şi numai dacă există cel puţin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$.*

Aderenţa unei mulţimi

Definiţia 6.22 *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$.*

i. *Un punct $x_0 \in X$ se numeşte* ***punct aderent al mulţimii*** *A dacă pentru orice vecinătate V a punctului x_0, avem $V \cap A \neq \varnothing$.*

ii. *Mulţimea tuturor punctelor aderente mulţimii A se numeşte* ***aderenţa*** *sau* ***închiderea*** *mulţimii A. Vom nota aderenţa mulţimii A cu $\overline{A}$.*

Teorema 6.23 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Un punct $x_0 \in X$ este aderent mulţimii A dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0,\ B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Teorema 6.24 *Fie (X, d) spaţiu metric. Atunci au loc următoarele relaţii şi afirmaţii:*

I. $A \subseteq \overline{A}$, $\forall A \subseteq X$;

II. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

III. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

IV. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

V. *A este o mulţime închisă* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demonstraţie: I. este evidentă în baza Definiţiei 6.22.

II. Dacă $x \in \overline{A}$, atunci $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem $V \cap A \neq \varnothing$. Cum $A \subseteq B$, rezultă că $V \cap B \neq \varnothing$, adică $x \in \overline{B}$. Prin urmare, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

III. Ţinând seama de II., din $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$ rezultă că $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ şi $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Aşadar, avem $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Reciproc, dacă $x \in \overline{A \cup B}$ avem $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă presupunem prin reducere la absurd că $x \notin \overline{A}$ şi $x \notin \overline{B}$, atunci ar exista $V, W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$ şi $W \cap B = \varnothing$. Însă $U = V \cap W \in \mathcal{V}(x)$ şi $U \cap (A \cup B) = \varnothing$. Aşadar am obţinut o contradicţie, întrucât $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{V}(x)$.

IV. Cum $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$, din II. obţinem că $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

V. Fie A o mulţime închisă. Atunci $(X \setminus A)$ este deschisă. Deci $X \setminus A = \mathrm{int(X \setminus A)} = \mathrm{Ext(A)} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{X} \setminus \mathrm{Ext(A)} = \overline{\mathrm{A}}$. Reciproc, dacă $A = \overline{A}$, rezultă că $A = X \setminus \mathrm{Ext(A)}$, adică $X \setminus A = \mathrm{Ext(A)} = \mathrm{int(X \setminus A)}$. Prin urmare, $X \setminus A$ este o mulţime deschisă, de unde rezultă că A este închisă. ◀

Definiţia 6.25 *Fie (X, d) spaţiu metric şi fie $A \subseteq X$.*

*i) Se numeşte **frontieră a mulţimii** A mulţimea $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, notată cu* $\mathrm{Fr(A)}$ *(sau ∂A).*

*ii) O **mulţime** $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte **densă în** X, atunci când $\overline{A} = X$.*

Exemple: Fie $X = \mathbb{R}$ şi fie d metrica euclidiană.

1. Dacă $A = [a, b]$, atunci $\mathrm{Fr}(A) = \{a, b\}$.
2. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.
3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{R}$. Aşadar, cum $\overline{A} = \mathbb{R}$, rezultă că A este o mulţime densă în $\mathbb{R}$, în raport cu metrica euclidiană.

Mulţimea derivată a unei mulţimi

Definiţia 6.26 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $A \subseteq X$.*

*a) Un element $x \in X$ se numeşte **punct de acumulare** pentru mulţimea A dacă, pentru orice vecinătate V a lui x, are loc relaţia*

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

*b) Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale unei mulţimi A se numeşte **mulţime derivată** a lui A şi se notează cu A'.*

Propoziţia 6.27 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci sunt adevărate următoarele relaţii:*

1°. $A' \subseteq \overline{A}$, $\forall A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$, $\forall A, B \subseteq X$;

3°. $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\forall A, B \subseteq X$.

Demonstraţie: 1°. $\forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{A}$.

2°. $\forall x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x) \stackrel{A \subseteq B}{\Longrightarrow} \varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap B \Rightarrow x \in B'$.

3°. $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B \Rightarrow A' \subseteq (A \cup B)'$ şi $B' \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Pe de altă parte, $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((U \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((U \setminus \{x\}) \cap B) \neq \varnothing, \forall U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am avea $x \notin A'$ şi $x \notin B'$, atunci ar există două vecinătăţi $V, W \in \mathcal{V}(x)$ aşa încât $(V \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$ şi $(W \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$, de unde, notând cu $U = V \cap W$, am obţine contradicţia $(U \setminus \{x\}) \cap A = (U \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$. Aşadar, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ şi, ca atare, are loc 3°. ◀

Teorema 6.28 *Dacă $A \subseteq (X, d)$, atunci:*

i) $\overline{A} = A \cup A'$;

ii) $A = \overline{A} \Longleftrightarrow A' \subseteq A$.

Demonstraţie: i) $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Invers, dacă $x \in \overline{A}$, atunci $V \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. În această situaţie, există două posibilităţi: sau $x \in A$ sau $x \notin A$ şi, inevitabil, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$, adică $x \in A'$. Aşadar: $x \in A \cup A'$. Altfel spus, avem şi incluziunea $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

ii) Dacă $A = \overline{A}$, ţinând seama de i), avem: $A = \overline{A} = A \cup A'$. Adică: $A' \subseteq A$. Reciproc, dacă $A' \subseteq A$, atunci: $\overline{A} = A \cup A' = A$. ◀

Definiţia 6.29 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subseteq X$ nevidă.*

i) Un element x, din A, care nu este din A', se numeşte ***punct izolat*** *al lui A. Altfel spus, $x \in A$ este izolat dacă există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \{x\}$.*

ii) Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A se numeşte ***partea discretă a mulţimii*** *A şi se notează cu $Iz(A)$ (sau cu $\mathcal{D}(A)$)*

ii) Mulţimea A se numeşte ***discretă*** *dacă şi numai dacă orice punct al său este un punct izolat, adică dacă $A = Iz(A)$ (sau $A \cap A' = \varnothing$).*

Şiruri şi serii de elemente din $\mathbb{R}^n$

Cum, după cum am văzut deja, $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu o distanţă, poate fi apreciat, în pereche cu metrica respectivă, ca un spaţiu metric, consideraţiile ce urmează sunt potrivite şi pentru cazul în care, în particular, X, mulţimea la care ne referim în general, este $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 6.30 *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare şi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de puncte din X.*

a) Spunem că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este ***mărginit*** *dacă mulţimea elementelor sale este mărginită, adică dacă există $\tilde{x} \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_n \in B(\tilde{x}, r), \forall n \in \mathbb{N}$.*

b) Spunem că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este ***fundamental (şir Cauchy)*** *dacă:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{aşa încât},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon \text{ şi } \forall p \in \mathbb{N}:\ d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon,$$

sau, echivalent

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \text{aşa încât},\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geqslant n_\varepsilon:\ d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

c) Spunem că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este ***convergent*** *la un $x_0 \in X$ dacă şirul de numere reale $(d(x_n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la 0. Vom nota cu $x_n \xrightarrow{X} x_0$ sau $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Punctul x_0 se numeşte limita şirului.*

Teorema 6.31 *Fie $X = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), dotat cu metrica euclidiană d_2.*

I. Un şir de puncte din $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m)$ este convergent în $\mathbb{R}^m$, dacă şi numai dacă, cele m şiruri componente sunt convergente. Mai mult, limita şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ este punctul ale cărui coordonate sunt limitele celor m şiruri.

II. Un şir de puncte din $\mathbb{R}^m$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$. La fel, studiul unei serii din $\mathbb{R}^m$, revine la studiul componentelor sale în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: I. Fie $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ un şir pentru care $\mathrm{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \dots x_n^m\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_n^k \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k = \overline{1, m}$. Totodată, $\forall \mathrm{y} = \left(y^1, y^2, \dots, y^m\right) \in \mathbb{R}^m$, este adevărată relaţia:

$$|y^k| \leqslant \|y\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y^i)^2}, \ \forall k = \overline{1, m} \quad (*).$$

Presupunem că $\mathrm{x}_n \xrightarrow{d_2} \mathrm{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m\right) \in \mathbb{R}^m$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_0) = 0$ în $\mathbb{R}$. Luând $y^k = x_n^k - x_0^k$, $\forall k = \overline{1, m}$, atunci conform relaţiei $(*)$, avem:

$$|x_n^k - x_*^k| \leqslant d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_n^i - x_0^i|, \forall k = \overline{1, m}. \qquad (**)$$

Întrucât $d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_0) \longrightarrow 0$, reiese că $|x_n^k - x_0^k| \longrightarrow 0$, $\forall k = \overline{1, m}$, ceea ce înseamnă că toate cele m şiruri componente ale şirului $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$, la coordonatele corespunzătoare ale lui x_0. Reciproca rezultă pe baza inegalităţii din partea dreaptă a relaţiei $(**)$.

II. Dacă vom considera $y^k = x_{n+p}^k - x_n^k$, $\forall k = \overline{1, m}$, în relaţia $(*)$, obţinem că şirul $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ este şir Cauchy. La fel şi concluzia privitoare la o serie din $\mathbb{R}^m$. ◀

Propoziţia 6.32 ***(de caracterizare a punctelor aderente cu ajutorul şirurilor)***
Fie A o submulţime a unui spaţiu metric (X, d). Un punct $x \in X$ este aderent pentru A dacă şi numai dacă există un şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din A care să conveargă la x.

Demonstraţie: Fie $x \in \overline{A}$. Atunci, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \varnothing$. În particular, pentru $V = B_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right)$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $B_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alegând câte un punct $x_n \in B_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ pentru care $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$. Cu alte cuvinte, $x_n \xrightarrow{d} x$.

Reciproc, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ este un şir convergent la un punct x din X, atunci,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon, \text{ să avem } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Altfel spus, $x_n \in B_d(x; \varepsilon)$. Deci: $B_d(x; \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, $\forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow x \in \overline{A}$. ◀

Observaţie: Conform Propoziţiei 6.32, putem afirma că o mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) (şi, în particular, din $\mathbb{R}^n$) este închisă, dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A.

Propoziţia 6.33 ***(de caracterizare a punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor)***
Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subseteq X$. Atunci $x \in A'$ dacă şi numai dacă există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$, astfel încât:

a) $x_n \neq x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Altfel spus, $x \in A'$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Definiţia 6.34 *a) Un spaţiu metric (X, d) se numeşte* ***complet*** *dacă şi numai dacă orice şir Cauchy din X este convergent la un punct din X.*

b) Un spaţiu prehilbertian şi complet (ca spaţiu metric, cu metrica indusă de norma dată, la rândul ei, de produsul scalar în cauză) se numeşte ***spaţiu Hilbert***.

c) Un spaţiu normat şi complet (în raport cu metrica indusă de norma existentă) se numeşte ***spaţiu Banach***.

Teorema 6.35 *Spaţiul $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian, este un spaţiu Hilbert. Dotat cu norma euclidiană, $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu Banach, fiind un spaţiu complet în raport cu metrica euclidiană.*

Teorema 6.36 *Orice şir fundamental dintr-un spaţiu metric este mărginit.*

Demonstraţie: Fie (x_n) şir Cauchy în spaţiul metric (X, d). Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_m) < 1$. În particular, pentru $n = n_1$, avem $\forall m \geq n_1 \rightarrow d(x_{n_1}, x_m) < 1$.

Considerând $r = \max\{1, d(x_1, x_{n_1}), d(x_2, x_{n_1}), ..., d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\} > 0$, putem observa că bila deschisă de centru x_{n_1} şi de rază r conţine toţi termenii şirului (x_n), adică şirul (x_n) este mărginit. ◀

Teorema 6.37 *Orice şir convergent într-un spaţiu metric este şir fundamental.*

Demonstraţie: Fie (X, d) un spaţiu metric, şi fie $x_n \xrightarrow{X} x_0$.

Atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $d(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dacă $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_\varepsilon$, atunci avem $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ◀

Observaţie: Reciproca Teoremei 6.37 nu este adevărată. Spre exemplu, fie $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ înzestrat cu metrica euclidiană. Atunci şirul $x_n = \dfrac{1}{n} \in A$, fiind convergent la 0 în $\mathbb{R}$, este un şir Cauchy în A, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \notin A$.

Bibliografie

1. W. G. Chinn, N. E. Steenrod - *Introducere în topologie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.
2. Olga Costinescu - *Elemente de topologie generală*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.
3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. (Cap. 3)*, Ed. Tehnopress, Iaşi, 2005.
4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calc. dif. (Cap. 4)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată. Analiză matematică (Cap. IV)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
6. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 4)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.
7. D. Lehmann - *Initiation à la Topologie Générale*, Ellipses Marketing, 2004.
8. Silvia-Otilia Corduneanu - *Capitole de analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2010.
9. L.C. Li - *Basic Topology*, Pensylvania State University, 2010.
10. T. W. Körner - *Metric and Topological Spaces*, DPMMS, University of Cambridge, 2014.
11. S. A. Morris - *Topology without Tears*, University of South Australia, 2015.