Probabilităţi şi Statistică - Curs 12

Mai, 2018

Teste de semnificaţie

Paşii care trebuie urmaţi când întreprindem un test de semnificaţie:

1-2. Se formulează cele două ipoteze: H_0 şi H_a: H_a va fi acceptată dacă H_0 este respinsă.

3. Se alege un nivel de semnificaţie α - cât de semnificative trebuie să fie evidenţele pentru a respinge H_0.

4. Se calculează statistica sau scorul testului.

5. Se determină valoarea critică.

6. Se compară scorul cu valoarea critică şi, dacă este cazul, se respinge H_0 şi se acceptă H_a, altfel nu se acceptă H_a.

- Testul Z este un test statistic asupra ipotezelor utilizat pentru statistici care urmează o distribuţie normală atunci când ipoteza nulă este adevărată.
- Datorită Teoremei Limite Centrale putem folosi testul Z când populaţia este aproximativ normală, dar doar pentru eşantioane mari ($n \geqslant 30$).
- Am utilizat deja un test de tip Z în cazul testului proporţiilor.
- Testul Z se bazează pe distribuţia normală; pentru eşantioane mici, acest test de semnificaţie poate fi utilizat atunci când eşantionul provine dintr-o populaţie normală sau foarte aproape de una normală.
- Pentru un nivel de semnificaţie dat testul Z oferă doar o valoare critică.

Testul Z - Inferenţă asupra mediei unei populaţii (σ cunoscută)

- Vom considera o populaţie statistică a cărei dispersie (σ^2) este cunoscută.
- Populaţia este normal distribuită şi dorim să testăm o ipoteză asupra mediei populaţiei.
- Testul poate fi întreprins chiar dacă populaţia nu este distribuită normal, dacă utilizăm eşantioane destul de mari.
- Dacă μ_0 este media populaţiei (presupusă în ipoteza nulă), atunci următoarea statistică $\dfrac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ este distribuită normal standard: $N(0, 1)$.
- Testul Z are loc astfel:

Testul Z - Inferenţă asupra mediei unei populaţii (σ cunoscută)

1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susţine că media populaţiei ia o anumită valoare:

$$\boxed{H_0 : \ \mu = \mu_0}$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informaţiilor obţinute din eşantion. Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$\boxed{H_a : \ \mu < \mu_0} \quad (\textit{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$\boxed{H_a : \ \mu > \mu_0} \quad (\textit{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$\boxed{H_a : \ \mu \neq \mu_0} \quad (\textit{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem un nivel de semnificaţie $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
4. Calculăm *scorul z* (*statistica* testului)

$$\boxed{z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α

$\boxed{z^* = qnorm(\alpha)}$ pentru H_a asimetrică la stânga ($z^* < 0$),

$\boxed{z^* = qnorm(1-\alpha)}$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($z^* > 0$),

$\boxed{z^* = -qnorm(\alpha/2) = qnorm(1-\alpha/2)}$ pentru H_a simetrică (z^*

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z; dacă scorul z aparţine *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a şi respingem H_0. Zonele de respingere sunt:

$$(-\infty, z^*] \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga,}$$

$$[z^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(-\infty, -|z^*|] \cup [|z^*|, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Dacă scorul z nu aparţine zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificaţie* α pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge* H_0 *eşuează*).

Exemplu.

- O colonie de şoareci de laborator constă din câteva mii de animale. Greutatea lor urmează o lege normală cu deviaţia standard $\sigma = 5g$ şi o medie de $30g$.
- Pentru un eşantion de 25 de şoareci se găseşte o medie de $32g$; Este aceasta valoare semnificativă statistic (cu 5% nivel de semnificaţie)? dar cu 1% nivel de semnificaţie?

Soluţie.

- Se pare că adevărata medie de greutate a întregii populaţii este diferită de cea afirmată ($\mu_0 = 30g$).
- Ştiind că populaţia urmează o distribuţie normală şi că deviaţia standard a populaţiei este cunoscută putem întreprinde un test Z asupra mediei.

- Colectăm informaţiile legate de populaţie şi de eşantion: $\mu_0 = 30$, $\sigma = 5$, $n = 25$, $\overline{x}_n = 32$.

1-2. Formulăm ipoteza nulă şi o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu = 30 \quad H_a : \mu \neq 30.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{32 - 30}{5/\sqrt{25}} = 2.$$

5. Valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 1.9599$, pentru $\alpha = 5\%$.

6. Cum $|z| > |z^*|$, putem respinge ipoteza nulă, şi să acceptăm că adevărata medie a populaţiei nu este $\mu_0 = 30g$.

- Reluăm ultimii doi paşi pentru celălalt nivel de semnificaţie:

5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 2.5758$.

6'. Cum $|z| < |z^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează cu 1% nivel de semnificaţie (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susţine că adevărata medie a populaţiei este diferită de $30g$).

Testul Z - Inferenţă asupra mediei unei populaţii - Exemplu revăzut

- Privind din nou informaţiile din eşantion putem observa că media de selecţie, $\overline{x}_n$, este mai mare decât media presupusă a populaţiei.
- Într-un astfel de caz am putea formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu = 30 \quad H_a : \mu > 30.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{32 - 30}{5/\sqrt{25}} = 2.$$

5. Valoarea critică: $z^* = qnorm(1-\alpha) = 1.6448$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $z > z^*$, putem respinge ipoteza nulă şi să acceptăm că media adevărată a populaţiei este mai mare decât $\mu_0 = 30g$.

- Pentru celălalt nivel de semnificaţie (1%):

5'. Valoarea critică este $z^* = qnorm(1-\alpha) = 2.3263$.

6'. Deoarece $z < z^*$, nu putem respinge ipotez nulă cu 1% nivel de semnificaţie (nu există dovezi suficiente cu 1% nivel de semnificaţie pentru a susţine că adevărata media a populaţiei este mai mare decât $30g$).

- Merită observat că pentru diverse niveluri de semnificaţie putem avea concluzii diferite: ipoteza nulă poate fi respinsă pentru un anumit nivel de semnificaţie iar cu un alt nivel încercarea poate eşua.
- Dacă ipoteza nulă este respinsă cu 1% nivel de semnificaţie, atunci va fi respinsă şi cu 5%; altfel spus, dacă ipoteza nulă nu poate fi respinsă pentru 5%, nu va putea fi respinsă nici pentru 1%.
- Ipoteza alternativă trebuie formulată conform datelor din eşantion: când $\mu_0 << \overline{x}_n$ putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta, $H_a : \mu > \mu_0$, când $\mu_0 >> \overline{x}_n$ putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la stânga, $H_a : \mu < \mu_0$.
- Dacă media de selecţie nu este nici atât de mare şi nici atât de mică prin comparaţie cu media presupusă a populaţiei, putem presupune că media este doar diferită de valoarea din ipoteza nulă, $H_a : \mu \neq \mu_0$.

I. Reluaţi testul Z pentru exerciţiul anterior cu $\overline{x}_n = 27g$ şi $\sigma = 6$. (Folosiţi ambele nivele de semnificaţie.)

II. Se afirmă că studenţii unei anumite universităţi vor obţine la un anumit test o medie de 35 de puncte cu $\sigma = 4$. Are această afirmaţie susţinere ştiind că pentru un eşantion aleator se obţin următoarele rezultate la test: $33, 42, 38, 37, 30, 42$? Întreprindeţi un test corespunzător pentru $\alpha = 5\%$. Se presupune că rezultatele la acest test sunt normal distribuite.

III. Conform National Center for Health Statistics, înălţimea medie a femeilor din SUA (care este normal distribuită) este de 63.7 in cu o deviaţie standard cunoscută de $\sigma = 2.75$ in. Pentru un eşantion aleator simplu de 50 femei care lucrează în domeniul serviciilor medicale se găseşte o înăţime de 65.2. Testaţi ipoteza că media de înăţime a femeilor care lucrează în sănătate este diferită de 63.7 in. 5% nivel de semnificaţie.

- Testul T testează ipotezele statistice pentru statistici care urmează o distribuţie Student.
- Vom descrie mai întâi un test T pentru a compara media unei populaţii cu o valoare cunoscută din H_0.
- Testul T se foloseşte atunci când deviaţia standard a populaţiei (distribuită normal) este necunoscută.
- Un test T este de asemeni potrivit când avem de-a face cu eşantioane mici ($n < 30$) pentru populaţii care sunt aproximativ normale (din Teorema Limită Centrală).
- Urmând aceste observaţii putem spune că un test T pentru media unei populaţii este complementar unui test Z.
- În secţiunea următoare descriem testul T pentru media unei populaţii cu dispersia necunoscută.

Testul T - Inferenţă asupra mediei unei populaţii (σ necunoscută)

- Considerăm o populaţie statistică a cărei dispersie (σ^2) este necunoscută.
- Populaţia este normal distribuită şi dorim să testăm o ipoteză asupra adevăratei medii a populaţiei.
- Testul poate fi întreprins dacă populaţia are o distribuţie foarte apropiată de cea normală, când eşantionul la dispoziţie este mic (altfel se utilizează un test Z).
- Dacă μ_0 este media populaţiei (presupusă în ipoteza nulă), atunci următoarea statistică $\dfrac{\overline{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ este distribuită Student cu $(n-1)$ grade de libertate: $T(n-1)$.
- O diferenţă faţă de un test Z constă în înlocuirea deviaţiei standard a populaţiei, σ, cu deviaţia standard a eşantionului s.
- Testul T decurge astfel:

1. Formulăm mai întâi *ipoteza nulă*, care susţine că media populaţiei ia o anumită valoare:

$$\boxed{H_0 : \ \mu = \mu_0}$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informaţiilor obţinute din eşantion. Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$\boxed{H_a : \ \mu < \mu_0} \quad (\textit{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$\boxed{H_a : \ \mu > \mu_0} \quad (\textit{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$\boxed{H_a : \ \mu \neq \mu_0} \quad (\textit{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem un nivel de semnificaţie $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
4. Calculăm *scorul t* (*statistica* testului)

$$\boxed{t = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}}$$

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α

$\boxed{t^* = qt(\alpha, n-1)}$ pentru H_a asimetrică la stânga ($t^* < 0$),

$\boxed{t^* = qt(1-\alpha, n-1)}$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($t^* > 0$),

$\boxed{t^* = -qt(\alpha/2, n-1) = qt(1-\alpha/2, n-1)}$ pt. H_a simetrică (t^*

6. Comparăm valoarea critică cu scorul t; dacă scorul t aparţine *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a şi respingem H_0. Zonele de respingere sunt:

$$(-\infty, t^*] \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga,}$$

$$[t^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(-\infty, -|t^*|] \cup [|t^*|, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Dacă scorul t nu aparţine zonei de respingere vom spune că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificaţie α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eşuează*).

Exemplu

- Concentraţia de CO (monixid de carbon) se măsoară cu un aparat numit spectrofotometru care are o precizie de aporape 100 ppm. Aceste aparate trebuie calibrate zilnic măsurând concentraţia de CO din eşantioane de gaz industrial care au o concentraţie controlată de 70 ppm. Dacă aparatul dă valori "apropiate" de 70 ppm poate fi folosit, dacă nu, trebuie ajustat.
- Presupunem că această concentraţie urmează o distribuţie normală dar deviaţia standard este necunoscută. Într-o anumită zi se obţin următoarele valori

$$58 \;\; 71 \;\; 67 \;\; 64 \;\; 62.$$

- Patru dintre aceste valori sunt mai mici decât 70; putem explica aceasta doar pe seama întâmplării? Sau aceasta arată că aparatul trebuie ajustat?

Solution

- Este posibil ca aparatul să necesite o ajustare, deci vom testa ipoteza că media este diferită de $\mu_0 = 70$.
- Cum populaţia urmează o distribuţie normală, iar deviaţia standard a populaţiei este necunoscută putem întreprinde un test T asupra mediei.
- Informaţiile privind populaţia şi eşantionul: $\mu_0 = 70$, $s = 4.9295$, $n = 5$, $\overline{x}_n = 64.4$.

1-2. Putem formula ipoteza nulă şi o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu = 70 \quad H_a : \mu \neq 70.$$

3. $\alpha = 0.05$.
4. Scorul t

$$t = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{64.4 - 70}{4.9295/\sqrt{5}} = -2.5402.$$

5. Valoarea critică este $t^* = -qt(\alpha/2, 4) = 2.7764$, for $\alpha = 5\%$.
6. Cum $|t| < |t^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 5% pentru a susţine că adevărata medie a populaţiei este diferită de 70 ppm).

- Reluăm ultimii doi paşi pentru celălalt nivel de semnificaţie:

5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $t^* = -qt(\alpha/2, 4) = 4.6040$.

6'. Since $|t| < |t^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susţine că adevărata medie a populaţiei este diferită de 70 ppm).

- Merită observat că reluarea ultimilor doi paşi cu un α mai mic nu era necesară, deoarece, ştim deja, ipoteza nulă nu a putut fi respinsă cu 5% nivel de semnificaţie.

- Privind din nou la datele din eşantion putem observa că media de selecţie, $\overline{x}_n$, este mai mică decât media presupusă a populaţiei.
- Într-o astfel de situaţie putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la stânga.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu = 70 \quad H_a : \mu < 70.$$

3. $\alpha = 0.05$.
4. Scorul t

$$t = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{64.4 - 70}{4.9295/\sqrt{5}} = -2.5402.$$

Testul T - Inferenţă asupra mediei unei populaţii - Exemplu revăzut

5. Valoarea critică este $t^* = qt(\alpha, 4) = -2.1318$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $t < t^*$, putem respinge ipoteza nulă şi să acceptăm că media adevărată a populaţiei este mai mică decât 70 ppm.

- Cu celălalt nivel de semnificaţie (1%):

5'. Valoarea critică este $t^* = qt(\alpha, 4) = -3.7469$.

6'. Deoarece $t > t^*$, nu putem respinge ipotez nulă cu 1% nivel de semnificaţie (nu există dovezi suficiente cu 1% nivel de semnificaţie pentru a susţine că adevărata media a populaţiei este mai mică decât 70 ppm.

I. O asociaţie studenţească susţine că un student călătoreşte în fiecare zi, în medie, 25 de minute pe drumul către universitate. Universitatea determină un eşantion aleator obţinut de la 32 de studenţi. Eşantionul are o medie de selecţie de 19.4 minute şi o deviaţie standard de 9.6 minute. Datele acestea sunt suficiente statistic pentru a respinge afirmaţiile asociaţiei? Folosiţi $\alpha = 0.01$. (Presupunem că timpul unei călătorii urmează o distribuţie normală.)

II. Se ştie că tinerii adulţi cheltuie săptămânal 40$ pentru mâncare de tip fast food. Un studiu bazat pe un eşantion aleator fromat din 1000 de tineri adulţi (Greenfield Online - USA Today Snapshot) determină o medie săptămânală de 35$ cheltuiţi pe fast food cu o deviaţie standard de 14.50$. Presupunând ca aceste cheltuieli urmează o distribuţie normală întreprindeţi un test statistic potrivit asupra mediei acestor cheltuieli pentru întreaga populaţie.

III. Locuinţele dintr-un oraş au o valoare medie de 88950\$. Se presupune că locuinţele din apropierea universităţii au un preţ mediu mai mare. Pentru a testa aceasta, se foloseşte un eşantion aleator simplu format din 12 case alese în apropierea universităţii. Media lor de selecţie este 92460\$, cu o deviaţie standard de 5200\$. Întreprindeţi un test statistic pe baza acestor date cu $\alpha = 5\%$. (Se presupune că preţurile caselor sunt normal distribuite.)

- Vom discuta procedurile prin care se fac inferenţe asupra a două populaţii.
- Atunci când se compară două populaţii avem nevoie de două eşantioane, câte unul din fiecare populaţie.
- Pot fi utilizate două tipuri de eşantioane: independente sau dependente. Dependenţa sau independenţa a două eşantioane este determinată de sursele datelor.
- O sursă poate fi o persoană, un obiect sau orice altceva care poate dă naştere la date. Dacă acelaşi set de surse sau surse înrudite sunt folosite pentru a obţine datele pentru amândouă populaţiile, atunci avem de-a face cu eşantioane dependente.
- Dacă sunt folosite surse care nu au legătură între ele vom obţine eşantioane independente. Un exemplu poate clarifica aceste idei.
- Noi vom utiliza populaţii/eşantioane independente.

- Se concepe un test pentru compararea a două noi tipuri de anvelope auto.
- Automobilele selectate vor fi echipate cu cele două tipuri de anvelope şi apoi conduse în condiţii "normale" timp de o lună. Apoi se vor face măsurători pentru a determina comportamentul lor. Au fost propuse două planuri:
  - Plan I: Un eşantion format din maşini alease aleator vor fi echipate cu tipul A de anvelope, apoi vor fi conduse timp de o lună. Un alt eşantion aleator de maşini va fi selectat şi echipat cu anvelopele B, apoi vor fi conduse pentru o lună întreagă.
  - Plan II: Fiecare maşină dintr-un eşantion aleator va avea o anvelopă de tip A şi o anvelopă de tip B (celelalte două anvelope nu participă la test) şi apoi vor fi conduse pentru o lună.
- Planul I oferă date independente (sursele sunt neînrudite), iar planul II dă eşantioane dependente (sursele sunt comune).

- Considerăm două populaţii statistice ale căror dispersii (σ_1^2 şi σ_2^2) sunt cunoscute.
- Populaţiile sunt normal distribuite şi dorim să testăm o ipoteză asupra diferenţei mediilor.
- Dorim să ştim, de exemplu, dacă una dintre medii este mai mică decât cealaltă sau dacă sunt diferite.
- Alegem două eşantioane aleatoare simple independente cu mediile de selecţie $\overline{x}_{n_1}$ şi $\overline{x}_{n_2}$. Considerăm (în condiţiile ipotezei nule) că mediile celor două populaţii sunt μ_1 şi μ_2, respectiv.
- Următoarea statistică este distribuită normal standard

$$z = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Testul Z - Inferenţe asupra mediilor a două populaţii (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)

- Putem utiliza testul Z chiar dacă cele două populaţii sunt doar aproximativ normal distribuite, dacă cele două eşantioane sunt suficient de mari ($n_1, n_2 \geqslant 30$).
- Testul se desfăşoară astfel:

1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susţine că diferenţa mediilor celor două populaţii ia o valoare fixată:

$$\boxed{H_0 : \mu_1 - \mu_2 = m_0}$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informaţiilor obţinute din eşantioane.

Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 < m_0}$$ (*asimetrică la stânga*) sau

$$\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 > m_0}$$ (*asimetrică la dreapta*) sau

$$\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 \neq m_0}$$ (*simetrică*).

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem un nivel de semnificaţie $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.

4. Calculăm *scorul z* (*statistica* testului)

$$\boxed{z = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}$$

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α

$\boxed{z^* = qnorm(\alpha)}$ pentru H_a asimetrică la stânga ($z^* < 0$),

$\boxed{z^* = qnorm(1-\alpha)}$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($z^* > 0$),

$\boxed{z^* = -qnorm(\alpha/2) = qnorm(1-\alpha/2)}$ pt. H_a simetrică ($z^* >$

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z; dacă scorul z aparţine *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a şi respingem H_0. Zonele de respingere sunt:

$$(-\infty, z^*] \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga,}$$

$$[z^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(-\infty, -|z^*|] \cup [|z^*|, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Dacă scorul z nu aparţine zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificaţie α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eşuează*).

Observaţii

- Atunci când întreprindem un test asupra mediilor a două populaţii, cel mai adesea vom presupune, în ipoteza nulă, că cele două medii sunt egale (i. e., $\mu_1 - \mu_2 = 0$, sau $m_0 = 0$).
- Sintagma "să se testeze mediile" are următorul înţeles: testăm $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ versus $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$.
- O altă observaţie este aceea că paşii 3, 5 şi 6 ai testului curent sunt identici cu cei ai testului Z asupra mediei unei populaţii (vezi cursul 11).

Examplu.

- Un studiu arată că studenţii din primul an lucrează în fiecare săptămână având o deviaţie standard de 8.7 ore (cei din universităţile publice) şi cu o deviaţie standard de 8.9 (cei din universităţile private). Folosind eşantioane aleatoare independente (unul din universităţile publice de dimensiune 900 şi unul din universităţile private de dimensiune 1000) se determină mediile de selecţie 16.1 şi 15.2 de ore pe săptămână, respectiv.
- Această diferenţă între medii este datorată şansei? Dacă nu, ce altă explicaţie ar putea avea? Folosiţi 5% şi 1% nivel de semnificaţie.

Soluţie.

- Este posibil ca cele două medii ale populaţiilor să fie diferite.
- Nu ştim dacă cele două populaţii urmează distribuţii normale, dar eşantioanele sunt suficient de mari pentru a folosi un test Z.

- Datele privind cele două populaţii/eşantioane sunt: $m_0 = 0$, $\sigma_1 = 8.7$, $n_1 = 1000$, $\overline{x}_{n_1} = 16.1$, $\sigma_2 = 8.9$, $n_2 = 900$, and $\overline{x}_{n_2} = 15.2$.

1-2. Formulăm ipoteza nulă şi o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

3. $\alpha = 0.05$.
4. Scorul z

$$z = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2.2244.$$

5. Valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 1.9599$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $|z| > |z^*|$, putem respinge ipoteza nulă, şi să acceptăm că mediile celor două populaţii diferă: diferenţa dintre mediile eşantioanelor nu se datorează hazardului.

- Pentru celălalt nivel de semnificaţie:

5'. Cu $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 2.5758$.

6'. Cum $|z| < |z^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează cu 1% nivel de semnificaţie (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susţine că mediile celor două populaţii diferă).

Testul Z - Inferenţe asupra mediilor a două populaţii - Exemplu revăzut

- Privind din nou informaţiile din eşantion putem observa că media de selecţie a studenţilor din universităţile publice este mai mare decât aceea a celor din universităţile private.
- Am putea formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2.2244.$$

5. Valoarea critică: $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 1.6448$, pentru $\alpha = 5\%$.

6. Deoarece $z > z^*$, putem respinge ipoteza nulă, şi să acceptăm că media primei populaţii este mai mare decât a celei de-a doua: în medie un student la o instituţie publică munceşte mai mult decât unul de la o instituţie privată.

- Pentru 1% nivel de semnificaţie:

5'. Valoarea critică este $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 2.3263$.

6'. Cum $z < z^*$, nu putem respinge ipotez nulă cu 1% nivel de semnificaţie (nu există dovezi suficiente, cu 1% nivel de semnificaţie, pentru a susţine că prima medie este mai mare decât cea de-a doua).

I. Întreprindeţi din nou testul Z anterior modificând $n_1 = 1000$.

II. Se ştie că un colegiu privat are costuri mai mari decât unul public. Este această diferenţă valabilă şi pentru costurile manualelor universitare? Aceste costuri per curs urmează legi normale cu deviaţia standard de 18.55\$ (pentru colegiile publice) and 13.12\$ (pentru colegiile private). Se aleg două eşantioane aleatoare; folosind $\alpha = 5\%$ să se determine dacă costurile medii per curs ale manualelor şcolare diferă pentru cele două tipuri de colegii.

$$Public:$$

64.69 89.6 101.49 101.75 103.59 106.38 106.77 110.69 118.94 135.94

$$Privat:$$

71.00 96.19 97.14 96.47 98.56 98.94 107.79 112.58 114.00 116.55

- Când se compară două populaţii, în mod natural vom pune faţă în faţă parametrii fundamentali ai distribuţiei, "centrele" şi "împrăştierea", adică mediile şi deviaţiile standard.
- Am descris deja o procedură pentru compararea mediilor a două populaţii folosond eşantioane independente, când se ştiu dispersiile.
- Există şi o altă procedură pentru cazul când dispersiile nu se cunosc. Dar pentru acest caz trebuie mai întâi ştiut dacă dispersiile sunt egale.
- Următorul pas (logic) va fi compararea deviaţiilor standard.

- Procedura de inferenţă prezentată aici va fi un test de semnificaţie pentru deviaţiile standard (sau dispersiile) a două populaţii normale.
- Pentru acest test prezumţia de normalitate este foarte importantă.
- Alegem două eşantioane aleatoare independente (de dimensiuni n_1 şi n_2, respectiv) cu deviaţiile standard s_1 şi s_2.
- Considerăm că, în condiţiile ipotezei nule, adevăratele deviaţii standard σ_1 şi σ_2 sunt egale.
- Următoarea statistică este distribuită Fisher

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

- Distribuţia Fisher, face parte dintr-o familie de distribuţii. Fiecare distribuţie F se identifică prin două numere de grade de libertate (câte unul pentru fiecare eşantion).
- Proprietăţi ale distribuţiei F:
  - F are valori nenegativă;
  - F este asimetrică;
- Pentru inferenţele din această secţiune numerele de grade de libertate sunt $r_1 = n_1 - 1$, $r_2 = n_2 - 1$.

- Testul se desfăşoară astfel:

1. Formulăm *ipoteza nulă*:

$$\boxed{H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1}$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informaţiilor obţinute din eşantion. Putem avea două[1] tipuri de ipoteză alternativă

$$\boxed{H_a : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1}$$ (*asimetrică la dreapta*) pentru un *un test one-t*

$$\boxed{H_a : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1}$$ (*simetrică*) pentru un *un test two-tailed*.

[1] Este recomandat ca dispersia mai mare sau care e de aşteptat sa fie mai mare să fie pusă la numărător.

3. Alegem nivelul de semnificaţie $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
4. Calculăm *scorul F* (*statistica* testului)

$$\boxed{F = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare pentru α

$\boxed{F^* = qf(1-\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)}$ pentru H_a asimetrică la dreapta ,

$$\boxed{F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1), F_d^* = qf(1-\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)}$$

pentru H_a simetrică.

6. Comparăm valoarea critică cu scorul F; dacă scorul F aparţine *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a şi respingem H_0. Zonele de respingere sunt:

$$[F^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(0, F_s^*] \cup [F_d^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Dacă scorul F nu aparţine zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificaţie* α pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge* H_0 *eşuează*).

Exemplu.

- O companie care îmbuteliază băuturi răcoritoare deţine o maşină care umple sticle de 16 uncii. Compania trebuie să controleze deviaţia standard σ (sau dispersia σ^2) cantităţii de băutură din sticle. O medie corectă a cantităţii de băutură nu garantează faptul ca maşina este bine calibrată. Dacă dispersia este prea mare multe sticle vor avea prea multă sau prea puţină băutură.
- Astfel, maşina trebuie să aibă o deviaţie standard (sau dispersie) cât mai mică posibil.
- Compania doreşte să decidă dacă să instaleze o maşină de îmbuteliat mai modernă şi mai rapidă.
- Una dintre îngrijorări este aceea că o viteză mai mare de îmbuteliere corespunde unei dispersii mai mari, iar o asemenea creştere nu este acceptabilă.

Testul F - Inferenţe asupra raportului dintre dispersii - Exemplu

- Producătorul noii maşini de îmbuteliat susţine că dispersia nu este mai mare decât cea a vechii maşini.
- Un eşantion de 25 de sticle îmbuteliate de maşina nouă are o dispersie de 0.0018, în timp ce un eşantion de 22 sticle îmbuteliate de maşina curentă are o dispersie de 0.0008.

Soluţie.

- Vom testa amândouă tipurile de ipoteză alternativă: mai întâi faptul că dispersiile celor două maşini sunt diferite, iar apoi că noua maşină are o dispersie mai mare.
- Datele relativ la cele două populaţii/eşantioane: $n_1 = 25$, $s_1^2 = 0.0018$, $n_2 = 22$ şi $s_2^2 = 0.0008$.

1-2. Formulăm ipoteza nulă şi o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

3. Alegem $\alpha = 5\%$.

4. Calculăm scorul F al testului

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 2.2500$$

5. Valorile critice sunt $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1-1, n_2-1) = 0.4327$, $F_d^* = qf(1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1) = 2.3675$, pentru $\alpha = 5\%$.

6. Deoarece $F \in [F_s^*, F_d^*]$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează cu 5% nivel de semnificaţie (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 5% pentru a susţine că dispersiile celor două maşini sunt diferite): diferenţele sunt datorate hazardului.

- Reluăm ultimii doi paşi pentru celălalt nivel de semnificaţie:

5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valorile critice vor da un interval mai mare: $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.3294$, $F_d^* = qf(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 3.1473$.

6'. Concluzia este aceeaşi: nu putem respinge ipoteza nulă.

- La fel ca şi în cazul testelor Z şi T, dacă H_0 nu se respinge pentru $\alpha = 5\%$ nu se va respinge nici pentru $\alpha = 1\%$ (pentru că zona de respingere în al doilea caz o înglobează pe prima).

- Deoarece dispersia primului eşantion este mai mare decât cea de-a doua vom întreprinde un al doilea test cu o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1.$$

3. Alegem $\alpha = 5\%$.

4. Scorul testului va fi acelaşi

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 2.2500$$

5. Valoarea critică este $F^* = qf(1-\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = 2.0540$, pentru $\alpha = 5\%$.

6. Deoarece $F \in [F_d^*, +\infty)$, putem să respingem ipoteza nulă şi să acceptăm ipoteza alternativă: dispersia noii maşini este mai mare decât a celei vechi.

- Pentru $\alpha = 1\%$

5'. Valoarea critică este $F^* = qf(1-\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = 2.8010$.

6'. Cum $F < F^*$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează cu 1% nivel de semnificaţie (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susţine că maşina nouă are o dispersie mai mare).

- Considerăm două populaţii statistice ale căror dispersii (σ_1^2 şi σ_2^2) sunt necunoscute.
- Populaţiile sunt normal distribuite şi dorim să testăm o ipoteză asupra diferenţei mediilor.
- Dorim să ştim, de exemplu, dacă una dintre medii este mai mare decât cealaltă sau dacă sunt diferite.
- Alegem două eşantioane aleatoare simple independente cu mediile de selecţie $\overline{x}_{n_1}$ şi $\overline{x}_{n_2}$ şi deviaţiile standard s_1 şi s_2, respectiv.
- Considerăm (în condiţiile ipotezei nule) că mediile celor două populaţii sunt μ_1 şi μ_2, respectiv.
- Expresia scorului testului depinde de faptul dacă cele două dispersii sunt egale sau diferite. Astfel, **înainte de a întreprinde testul T vom desfăşura un test F relativ la raportul celor două dispersii**.

- Atunci când cele două dispersii sunt egale următoarea statistică este repartizată Student cu $(n_1 + n_2 - 2)$ grade de libertate

$$t = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n_1} + \dfrac{s^2}{n_2}}},$$

unde $s = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

- Dacă cele două dispersii sunt diferite următoarea statistică este repartizată Student cu $\min(n_1 - 1, n_2 - 1)$ grade de libertate

$$t = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}.$$

Testul decurge astfel:

1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susţine că diferenţa mediilor celor două populaţii ia o anumită valoare:

$$\boxed{H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = m_0}$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform datelor din eşantioane.
   Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

   $\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 < m_0}$ (*asimetrică la stânga*) sau

   $\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 > m_0}$ (*asimetrică la dreapta*) sau

   $\boxed{H_a: \ \mu_1 - \mu_2 \neq m_0}$ (*simetrică*).

   Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem nivelul de semnificaţie $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.

4. Calculăm *scorul t* (*statistica* testului)

   a) dacă dispersiile sunt egale:

$$\boxed{t = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n_1} + \dfrac{s^2}{n_2}}}}$$

   unde $s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, iar numărul de grade de libertate este $df = n_1 + n_2 - 2$.

   b) dacă dispersiile sunt diferite:

$$\boxed{t = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}}$$

   numărul de grade de libertate fiind $df = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare

$$\boxed{t^* = qt(\alpha, df)} \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga } (t^* < 0),$$

$$\boxed{t^* = qt(1-\alpha, df)} \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta } (t^* > 0),$$

$$\boxed{t^* = -qt(\alpha/2, df) = qt(1-\alpha/2, df)} \text{ pt. } H_a \text{ simetrică } (t^* > 0).$$

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z; dacă scorul z aparţine *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a şi respingem H_0.
Zonele de respingere sunt:

$$(-\infty, t^*] \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga,}$$

$$[t^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(-\infty, -|t^*|] \cup [|t^*|, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Dacă scorul t nu aparţine zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificaţie α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eşuează*).

Exemplu.

- National Assesment of Educational Progress (NAEP) monitorizează tendinţele performanţei şcolare. În fiecare an NAEP desfăşoară la nivel naţional teste asupra mai multor subiecte pe eşantioane de elevi care au 17 ani. Se ştie că rezultatele acestor teste sunt normal distribuite.
- Testul de lectură a fost dat în 1990 şi din nou în 2004. Pentru două eşantioane de 1000 de elevi scorul mediu a scăzut de la 290 la 285, deviaţiile standard ale eşantioanelor fiind 40 şi 37, respectiv.
- Diferenţa este de 5 puncte; este aceasta datorată hazardului sau este o diferenţă reală? ($\alpha = 1\%$)

Soluţie.

- Deoarece populaţii sunt distribuite normal, iar deviaţiile standard ale populaţiilor nu sunt cunoscute vom întreprinde un test T pentru cele două medii.
- *Mai întâi întreprindem testul F asupra raportului celor două dispersii.*
- Informaţiile legate de eşantioane sunt $s_1 = 40$, $n_1 = 1000$, $\overline{x}_{n_1} = 290$, $s_2 = 37$, $n_2 = 1000$, $\overline{x}_{n_2} = 285$.

1-2. $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$

3. Alegem $\alpha = 1\%$.
4. Calculăm scorul F al testului

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.0810$$

5. Valorile critice sunt $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1-1, n_2-1) = 0.8494$, $F_d^* = qf(1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1) = 1.1771$, pentru $\alpha = 1\%$.
6. Deoarece $F \in [F_s^*, F_d^*]$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eşuează cu 1% nivel de semnificaţie (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susţine că cele două dispersii sunt diferite); diferenţa dintre dispersiile celor două eşantioane este datorată întâmplării.

- *În cele ce urmează vom presupune că cele două dispersii sunt egale.*

- Întreprindem acum testul T pentru diferenţa mediilor.

1-2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

3. $\alpha = 1\%$,

4. Calculăm scorul t al testului

$$t = \frac{(\overline{x}_{n_1} - \overline{x}_{n_2})}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}} = 2.9003,$$

unde $s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 38.5292.$

5. Valoarea critică: $t^* = -qt(\alpha/2, df) = 2.5782$, unde $df = n_1 + n_2 - 2 = 1998$ ($\alpha = 1\%$).

6. Deoarece $|t| > |t^*|$, putem respinge ipoteza nulă, şi să acceptăm că cele două medii sunt diferite: între 1990 şi 2004 rezultatul mediu al testului de lectură s-a schimbat.

- Întreprindem acum un test cu ipoteză alternativă asimetrică la dreapta:

1-2'. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

5'. Valoarea critică este $t^* = qt(1 - \alpha, df) = 2.3282$, unde $df = n_1 + n_2 - 2 = 1998$.

6'. Cum $t > t^*$, putem respinge ipoteza nulă, şi să acceptăm că prima medie (din 1990) este mai mare decât cea de-a doua (din 2004): rezultatul mediu a scăzut.

- (Exerciţiu) A fost necesar acest al doilea test T?

I. Femeile au în medie cu 8 perechi de pantofi mai mult decât bărbaţii (conform unui Snapshot USA Today). Un studiu recent efectuat la un colegiu a determinat următoarele valori

	n	media	dev. std.
Bărbaţi	21	8.48	4.43
Femei	30	26.63	21.83

Diferenţa dintre cele două eşantioane este mai mare decât 8, testaţi această ipoteză cu $\alpha = 5\%$. (Populaţiile sunt normale.)

II. Se consideră de mult timp că chiria medie a unei maşini în New York este egală cu aceea din Boston. Un studiu din 2007 însă a dat următoarele valori:

	n	media	dev. std.
Boston	10	95.94	7.50
New York	16	127.75	15.83

Este această diferenţă semnficativă sau este datorată şansei? (1%, 5%)

Sfârşit

- Freedman, D., R. Pisani, R. Purves, *Statistics*, W. W. Norton & Company, 4th edition, 2007.
- Johnson, R., P. Kuby, *Elementary Statistics*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 11th edition, 2012.
- Shao, J., *Mathematical Statistics*, Springer Verlag, 1998.
- Spiegel, M. R., L. J. Stephens, *Theory and Problems of Statistics*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 3rd edition, 1999.