Cursul 13

Integrale multiple

Integralele multiple sunt o extindere naturală a integralei Riemann, pentru cazul funcţiilor de mai multe variabile şi cu valori în $\mathbb{R}$, adică pentru funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. În particular, când $n = 2$, se poate vorbi despre integrala dublă, iar când $n = 3$ se poate defini şi opera cu integrala triplă, pentru calculul unor elemente (volum, masă etc.) ce sunt caracteristice corpurilor din spaţiul euclidian tridimensional.

Măsura Jordan a unei mulţimi. Mulţimi din $\mathbb{R}^n$ măsurabile în sens Jordan

În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, considerăm în cele ce urmează că există dat un reper ortonormat, în raport cu care putem să ne referim la n axe de coordonate.

Definiţia 13.1 *i) Fie $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0 \in \mathbb{R}$ şi $b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0 \in \mathbb{R}$, aşa încât $a_k^0 < b_k^0$, $\forall\, k \in \overline{1,n}$. Se numeşte* ***interval compact** n**-dimensional**, **cu "extremităţile"*** *(după caz,* ***laturile*** *- când $n = 2$,* ***muchiile*** *- când $n = 3$,* ***feţele*** *- când $n \geq 4$)* ***paralele cu axele de coordonate**, mulţimea (**dreptunghiul*** *- când $n = 2$,* ***paralelipipedul*** *- când $n = 3$,* ***hiperparalelipipedul*** *- când $n \geq 4$) definită prin*

$$I_0 = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k^0 \leq x_k \leq b_k^0, \forall\, k \in \overline{1,n}\right\}$$

a cărui ***măsură*** *(Jordan) este, prin definiţie,* ***numărul*** *(cu semnificaţie de* ***arie*** *- când $n = 2$,* ***volum*** *- când $n = 3$,* ***hipervolum*** *- când $n \geq 4$)*

$$\mu(I_0) \overset{not}{=} (b_1^0 - a_1^0)(b_2^0 - a_2^0) \ldots (b_n^0 - a_n^0).$$

ii) Numim ***mulţime elementară**, **măsurabilă în sens Jordan**, orice mulţime din $\mathbb{R}^n$, obţinută ca reuniune finită de intervale compacte n-dimensionale, cu "extremităţile" paralele cu axele de coordonate şi fără puncte interioare comune. Cu alte cuvinte, o mulţime elementară în sens Jordan, în $\mathbb{R}^n$, este o mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care există $q \in \mathbb{N}^*$ intervale compacte n-dimensionale, $I_l = [a_1^l, b_1^l] \times [a_2^l, b_2^l] \times \cdots \times [a_n^l, b_n^l]$, $l = \overline{1,q}$, astfel încât*

$$E = \bigcup_{l=1}^{q} I_l$$

şi $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_l = \varnothing$, $\forall\, j, l \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $j \neq l$. Prin definiţie, ***măsura Jordan a mulţimii elementare*** *E este numărul*

$$\mu(E) = \sum_{l=1}^{q} \mu(I_l),$$

unde $\mu(I_l) = \prod_{k=1}^{n}(b_k^l - a_k^l)$.

Vom nota cu $\mathcal{E}_J^n$ familia tuturor mulţimilor elementare din $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile Jordan, în sensul Definiţiei 13.1, ii).

Definiţia 13.2 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Se numeşte* ***măsură Jordan interioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Analog, se numeşte ***măsură Jordan exterioară a mulţimii*** *A numărul*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid E \supseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}.$$

Atunci când mulţimea A nu include nici o mulţime elementară, măsurabilă Jordan, E, definim $\mu_*(A) = 0$.

Observaţie: Este evident că, pentru orice mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$, există atât $\mu_*(A)$, cât şi $\mu^*(A)$, în $\mathbb{R}_+$, având loc relaţia $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

Definiţia 13.3

*Spunem că o mulţime mărginită $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este **măsurabilă în sens Jordan** dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.*

*Valoarea comună a măsurilor $\mu_*(A)$ şi $\mu^*(A)$ se numeşte **măsura Jordan a mulţimii** A (**aria Jordan** - când $n = 2$, **volumul Jordan** - când $n = 3$ sau **hipervolumul Jordan** - când $n \geq 4$) şi se notează cu $\mu_J(A)$.*

Observaţii:

1) Orice $E \in \mathcal{E}_J^n$ este măsurabilă (în sens Jordan) deoarece $\mu_J(E) = \mu(E) = \sum\limits_{l=1}^{q} \mu(I_l) = \sum\limits_{l=1}^{q} \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k^l - a_k^l)$.

2) Nu orice mulţime mărginită din $\mathbb{R}^n$ este Jordan măsurabilă în sensul Definiţiei 13.3.

   Spre exemplu, când $n = 2$, mulţimea $A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_D(x)\}$, unde $f_D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţia lui Dirichlet, definită prin

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

   nu este măsurabilă Jordan, deoarece $\mu_*(A_D) = 0 \neq 1 = \mu^*(A_D)$, chiar dacă este mărginită în $\mathbb{R}^2$.

3) Există mulţimi neelementare (în sensul Definiţiei 13.1, ii)) care sunt Jordan măsurabile. Un exemplu în acest sens îl constituie mulţimea măsurabilă Jordan, Γ_f - subgraful unei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ integrabile Riemann pe $[a, b]$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), adică mulţimea

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

   pentru care avem: $\mu_J(\Gamma_f) = aria(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

   Într-adevăr, dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a, b]$. Pentru orice diviziune $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ a intervalului $[a, b]$, există m_i (respectiv M_i), din $\mathbb{R}$, ca margine inferioară (respectiv superioară) a funcţiei f pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Considerând mulţimea $E'_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$, avem: $E'_\Delta \in \mathcal{E}_j^2$, $E'_\Delta \subseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E'_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_f(\Delta)$ (suma Darboux inferioară, corespunzătoare lui f şi lui $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$). În consecinţă, rezultă că $s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f)$.

   Similar, considerând $E''_\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$, vedem că $E''_\Delta \in \mathcal{E}_J^2$, $E''_\Delta \supseteq \Gamma_f$ şi $\mu(E''_\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{S}_f(\Delta) \geq \mu^*(\Gamma_f)$, unde $S_f(\Delta)$ este suma Darboux superioară, corespunzătoare lui f şi Δ. Prin urmare, avem: $s_f(\Delta) \leq \mu_*(\Gamma_f) \leq \mu^*(\Gamma_f) \leq S_f(\Delta)$, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$. Dar, cum f este integrabilă pe $[a, b]$, este adevărată relaţia: $\underline{I} = \sup_\Delta s_f(\Delta) = \inf_\Delta S_f(\Delta) = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (v. Teorema 13.2).

   Aşadar, vom avea $\mu_*(\Gamma_f) = \mu^*(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, adică mulţimea Γ_f este măsurabilă în sens Jordan în $\mathbb{R}^2$ şi are aria Jordan egală cu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Mai general, deducem că, dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile pe $[a,b]$, astfel încât $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\big\}$ are arie Jordan iar

$$\mu_J\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int\limits_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\, dx.$$

În cazul în care $0 < \widetilde{a}$, $0 < \widetilde{b}$, $a = -\widetilde{a}$, $b = \widetilde{a}$, $f(x) = -\dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$ şi $g(x) = \dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}$, $\forall\, x \in [a,b] = [-\widetilde{a}, \widetilde{a}]$, caz caracteristic mulţimii punctelor interioare şi de pe frontiera elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} - 1 = 0$:

$$\Gamma_{f,g} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\widetilde{a} \le x \le \widetilde{a}, -\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2} \le y \le \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}\sqrt{\widetilde{a}^2 - x^2}\right\},$$

Prin calcul, găsim că avem: $\mu_J(\Gamma_{f,g}) = \pi\widetilde{a}\widetilde{b}$. Aşadar, aria (Jordan) a elipsei de semiaxe $\widetilde{a}$ şi $\widetilde{b}$ este egală cu $\pi\widetilde{a}\widetilde{b}$.

Propoziţia 13.4 *O mulţime $B \subseteq \mathbb{R}^n$ este* ***de măsură Jordan nulă****, dacă poate fi inclusă într-o mulţime $E \in \mathcal{E}_J^n$, de măsură oricât de mică. Cu alte cuvinte, avem $\mu_J(B) = 0$ dacă, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, astfel încât $B \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu_J(E_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Câteva condiţii necesare şi suficiente pentru ca o mulţime din $\mathbb{R}^n$ să fie măsurablià în sens Jordan sunt reunite în următorul rezultat:

Teorema 13.5 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită. Atunci, afirmaţiile de mai jos sunt echivalente:*

a) A este Jordan măsurabilă;

b) $\forall\, \varepsilon > 0$, există E'_ε şi E''_ε din $\mathcal{E}_J^n$, astfel încât $E'_\varepsilon \subseteq A \subseteq E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E'_\varepsilon) - \mu_J(E''_\varepsilon) < \varepsilon$;

c) $\partial(A)$ este Jordan măsurabilă şi $\mu_J\left(\partial(A)\right) = 0$;

d) Există şirurile $\left(\widetilde{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$ şi $\left(\widehat{E}_m\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $\widetilde{E}_m \subseteq A \subseteq \widehat{E}_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\widetilde{E}_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_J(\widehat{E}_m)$.

Observaţii:

1) Pe baza echivalenţei dintre afirmaţiile a) şi b) din Teorema 13.1, se poate spune că orice mulţime Jordan-măsurabilă este, în mod necesar, mărginită.

2) Dacă mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ măsurabilă Jordan, cu $\mu_J(A) = 0$, atunci $\mu^*(A) = 0$.

3) O mulţime Jordan-măsurabilă $A \subset \mathbb{R}^n$ are $\mu_J(A) \ne 0$ dacă şi numai dacă $\overset{\circ}{A} \ne \varnothing$.

4) Graficul oricărei funcţii continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o mulţime din $\mathbb{R}^2$, de arie Jordan nulă. Aceasta întrucât $f \in \mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$ şi deci $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\, 0 \le y \le f(x)\}$ este Jordan - măsurabilă şi, prin echivalenţa afirmaţiilor a) şi c) din enunţul Teoremei 14.1, mulţimea $Fr(\Gamma_f)$ are arie nulă. Astfel, şi $G_f \subset Fr(\Gamma_f)$ are aria nulă.

5) Orice mulţime din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră este o reuniune finită de grafice ale unor funcţii continue are arie Jordan.

6) Orice disc din $\mathbb{R}^2$ are arie, întrucât, există întotdeauna două şiruri de mulţimi din $\mathcal{E}_J^2$, unul al poligoanelor cu n laturi, înscrise în cercul-frontieră al discului şi celălalt al poligoanelor cu n laturi, circumscrise respectivului cerc, aşa încât diferenţa ariilor poligoanelor cu câte n laturi este oricât de mică pentru n suficient de mare.

Dacă notăm cu $\mathcal{M}_J^n$ mulţimea tuturor părţilor lui $\mathbb{R}^n$ care sunt măsurabile în sens Jordan, pot fi evidenţiate unele proprietăţi ale măsurii Jordan şi, implicit, ale elementelor din $\mathcal{M}_J^n$, după cum urmează.

Teorema 13.6 (Proprietăţi ale măsurii Jordan)

1) $\mu_J(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{M}_J^n$ *(proprietatea de nenegativitate).*

2) $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ *cu* $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing$ *(proprietatea de aditivitate finită).*

3) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$*, cu* $B \subseteq A \Longrightarrow A\backslash B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(A\backslash B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$ *(proprietatea de substractivitate).*

4) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$*, cu* $B \subseteq A \Longrightarrow \mu_J(B) \leq \mu_J(A)$ *(proprietatea de monotonie).*

5) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n$*, cu* $\mu_J(A) = 0$ *şi* $\forall\ B \subseteq A \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ *şi* $\mu_J(B) = 0$ *(proprietatea de completitudine).*

Demonstraţie: 1) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \mu_J(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A) \geq \mu_J(E) = \mu(E) \geq 0,\ \forall\, E \in \mathcal{E}_J^n$.
2) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ cu $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \Longrightarrow Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$, $\mu_J(Fr(A)) = 0$, $\mu_J(Fr(B)) = 0$ şi, ca atare, $\mu_J(Fr(A \cup B)) = 0$. Aşadar: $A \cup B \in \mathcal{M}_J^n$. Totodată, $A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ E'_\varepsilon, E''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $E'_\varepsilon \subset A \subset E''_\varepsilon$ şi $\mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. De asemenea, $B \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ F'_\varepsilon, F''_\varepsilon \in \mathcal{E}_J^n$, aşa încât $F'_\varepsilon \subset B \subset F''_\varepsilon$ şi $\mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci: $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A \cup B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$, $\mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F'_\varepsilon) \leq \mu_J(A) + \mu_J(B) \leq \mu_J(E''_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon)$ şi deci $|\mu_J(A \cup B) - \mu_J(A) - \mu_J(B)| \leq \mu_J(E''_\varepsilon) - \mu_J(E'_\varepsilon) + \mu_J(F''_\varepsilon) - \mu_J(F'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\mu_J(A \cup B) = \mu_J(A) + \mu_J(B)$.
3) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n \Longrightarrow Fr(A) \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(Fr(A)) = 0; \forall B \subseteq A$ şi $A \setminus B \subseteq A \Longrightarrow Fr(A \setminus B) \subseteq Fr(A) \Longrightarrow$ $\mu_J(Fr(A \setminus B)) = 0 \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}_J^n$; $A = (A \setminus B) \cup B$ şi $\overset{o}{\widehat{A \setminus B}} \cap \overset{o}{B} = \varnothing \overset{2)}{\Longrightarrow} \mu_J(A) = \mu_J(A \setminus B) + \mu_J(B) \Longrightarrow$ $\mu_J(A \setminus B) = \mu_J(A) - \mu_J(B)$.
4) $\forall A, B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $B \subseteq A \overset{3)+1)}{\Longrightarrow} \mu_J(A) - \mu_J(B) = \mu_J(A \setminus B) \geq 0$.
5) $\forall A \in \mathcal{M}_J^n,\ \mu_J(A) = 0 \Longleftrightarrow \mu^*(A) = 0, \forall\ B \subseteq A \Longrightarrow \mu^*(B) = 0 \Longrightarrow B \in \mathcal{M}_J^n$ şi $\mu_J(B) = 0$. ◄

Integrala multiplă, în sens Riemann, pe mulţimi compacte

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă şi mărginită, astfel încât $D \in \mathcal{M}_J^n$, unde, după cum am specificat mai sus, $\mathcal{M}_J^n$ este mulţimea tuturor submulţimilor Jordan-măsurabile ale lui $\mathbb{R}^n$. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}$.

Definiţia 13.7 *a) Se numeşte* ***partiţie*** *a lui* D *orice familie finită de subdomenii* $D_i \subset D$*,* $i \in \overline{1,p}$*, astfel încât* $D_i \in \mathcal{M}_J^n$*,* $\forall i \in \overline{1,p}$*,* $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$*,* $\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}$*,* $i \neq j$ *şi* $D = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$.

b) Notând cu Δ *o asemenea partiţie, se defineşte* ***norma*** *ei, notată cu* $\|\Delta\|$*, prin* $\max\limits_{1 \leq i \leq p} \{\operatorname{diam}(D_i)\}$*, unde* $\operatorname{diam}(D_i)$ *înseamnă diametrul subdomeniului* D_i *(în raport cu distanţa euclidiană pe* $\mathbb{R}^n$*).*

Observaţie: În virtutea proprietăţii de aditivitate finită (v. Teorema 13.6), avem: $\mu_J(D) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_J(D_i)$.

Definiţia 13.8 *Fie* $\Delta = \{D_i\}_{i \in \overline{1,p}}$ *o partiţie a lui* D *şi* $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i) \in D_i$ *un punct arbitrar ales,* $\forall i \in \overline{1,p}$*. Notăm cu* ξ_Δ *mulţimea de puncte* $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$*. Se numeşte* ***sumă Riemann*** *ataşată funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$*, partiţiei* Δ *şi setului de puncte* $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$ *din* ξ_Δ*, numărul*

$$\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi^i) \mu_J(D_i).$$

Definiţia 13.9 *Spunem că funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$*, mărginită pe mulţimea conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă* $D \subset \mathbb{R}^n$*, este* ***Riemann integrabilă*** *pe* D*, dacă există* $I \in \mathbb{R}$*, cu proprietatea că,* $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$*, aşa încât,* $\forall\ \Delta = \{D_i\}_{i \in \overline{1,p}}$ *o partiţie a lui* D *cu* $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ *şi oricare ar fi punctele* $\xi^i \in D_i$*,* $i \in \overline{1,p}$*, avem:*

$$|\sigma_f(\Delta; \xi_\Delta) - I)| < \varepsilon.$$

Numărul I *se numeşte* ***integrala multiplă (dublă*** *- când* $n = 2$*,* ***triplă*** *- când* $n = 3$ *etc.) a funcţiei* f *pe* D *şi se notează cu*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Ca şi în cazul unidimensional, pentru o funcţie mărginită $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\Delta = \{D_i\}_{i\in\overline{1,p}}$, o partiţie oarecare a lui D, se pot defini sumele Darboux inferioară $s_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i\mu_J(D_i)$ şi respectiv superioară $S_f(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i\mu_J(D_i)$, unde $m_i = \inf\limits_{x\in D_i}\{f(x)\}$ şi $M_i = \sup\limits_{x\in D_i}\{f(x)\}$, $\forall i \in \overline{1,p}$.

Este uşor de văzut că are loc relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le s_f(\Delta) \le S_f(\Delta) \le M \cdot \mu_J(D)$$

pentru orice partiţie Δ a lui D, cu $m = \inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$ şi $M = \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

Pe baza ei, notând cu I_* supremumul din $\{s_f(\Delta)\}$ în raport cu partiţiile de tip Δ ale lui D, iar cu I^* infimumul din $\{S_f(\Delta)\}$ pe mulţimea partiţiilor Δ ale lui D, deducem relaţia

$$m \cdot \mu_J(D) \le I_* \le I^* \le M \cdot \mu_J(D).$$

Ca şi pentru $n = 1$, se poate arăta că este adevărat următorul rezultat:

Propoziţia 13.10 ***(Criteriul lui Darboux de $\mathcal{R}-$integrabilitate pentru funcţii mărginite)***
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, mărginită, închisă şi Jordan-măsurabilă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci, f este $\mathcal{R}$-integrabilă (multiplu) pe D, dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice partiţie $\Delta = \{D_i\}_{i\in\overline{1,p}}$ a lui D, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, să avem $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.

Echivalent, necesar şi suficient ca $f \in \mathcal{R}(D)$ (unde $\mathcal{R}(D)$ înseamnă mulţimea funcţiilor Riemann-integrabile (multiplu) pe D) este să fie îndeplinită relaţia $I_* = I^* \in \mathbb{R}$.

În acest context, valoarea comună a numerelor I_* şi I^* este integrala

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n.$$

Teorema 13.11 *Orice funcţie continuă pe o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^n$, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă, este Riemann integrabilă pe D (în sensul Definiţiei 13.8).*

Demonstraţie: Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă şi $\Delta = \{D_i\}_{i=\overline{1,p}}$ o partiţie oarecare a lui D. Atunci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)\mu_J(D_i).$$

În acelasi timp, din continuitatea lui f pe D şi, implicit, pe oricare din subdomeniile compacte D_i, rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile pe D_i, $\forall i = \overline{1,p}$, fiind chiar uniform continuă pe D. Astfel, există ξ^i şi η^i din D_i încât $m_i = f(\xi^i)$ şi $M_i = f(\eta^i)$, iar pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ pentru care, oricare ar fi x' şi x'' din D, cu $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}$.

Luând acum Δ, cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, obţinem

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{p}(f(\eta^i) - f(\xi^i))\mu_J(D_i) < \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}\sum_{i=1}^{p}\mu_J(D_i) = \frac{\varepsilon}{\mu_J(D)}\mu_J(D) = \varepsilon.$$

În consecinţă, pe baza Propoziţiei 14.2, rezultă că f este $\mathcal{R}$-integrabilă pe D. ◀

Un alt rezultat privitor la asigurarea integrabilităţii Riemann multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil este următorul:

Teorema 13.12 *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi măsurabilă Jordan D din $\mathbb{R}^n$, iar, în plus, cu excepţia eventuală a unei mulţimi de măsură Jordan nulă, f este continuă pe D, atunci $f \in \mathcal{R}(D)$.*

Proprietăţile integralei multiple sunt similare celor ale integralei din cazul $n = 1$ şi se pot demonstra pe baza Definiţiei 13.8 şi a Teoremei 13.6. În acest sens, este adevărată următoarea propoziţie.

Propoziţia 13.13 *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, conexă, închisă, mărginită şi Jordan-măsurabilă. Atunci:*

a) $\displaystyle\int \cdots \int_D 1 \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \mu_J(D)$;

b) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$ *şi are loc egalitatea*

$$\int \cdots \int_D (\alpha f(x_1, \ldots, x_n) + \beta g(x_1, \ldots, x_n)) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \alpha \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \beta \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

c) $\forall f, g \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in D$, *avem:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \leq \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

d) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *rezultă că* $|f| \in \mathcal{R}(D)$ *şi*

$$\Big| \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \Big| \leq \int \cdots \int_D \Big| f(x_1, \ldots, x_n) \Big| dx_1 \ldots dx_n;$$

e) $\forall f \in \mathcal{R}(D)$, *cu* $m = \inf\limits_{x \in D} \{f(x)\}$ *şi* $M = \sup\limits_{x \in D} \{f(x)\}$, *există* $\lambda \in [m, M]$ *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \lambda \mu_J(D).$$

Dacă, în plus, $f \in C(D)$, *atunci există un punct* $\xi \in D$, *astfel încât:*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(\xi) \mu_J(D);$$

f) *Dacă D este reuniunea a două domenii compacte şi Jordan-măsurabile D_1 şi D_2, cu* $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset$, *iar* $f \in \mathcal{R}(D_1) \cap \mathcal{R}(D_2)$, *avem* $f \in \mathcal{R}(D)$ *şi*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \cdots \int_{D_1} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n + \int \cdots \int_{D_2} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

g) $\forall f, g \in C(D)$, *cu* $g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, *există* $\eta \in D$, *astfel încât*

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = f(\eta) \int \cdots \int_D g(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Integrala dublă pe mulţimi compacte

În cazul particular în care $n = 2$, Definiţia 13.8 conduce la noţiunea de integrală dublă a funcţiei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mărginită pe mulţimea conexă, închisă, mărginită şi măsurabilă Jordan D. Vom nota, integrala dublă cu $\displaystyle\iint_D f(x, y) dx\, dy$. În cele ce urmează, vom prezenta câteva moduri de calcul al integralei duble.

Propoziţia 13.14 (Cazul în care D este un dreptunghi)
Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b, c < d$, $D = [a, b] \times [c, d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există integrala dublă

$$\iint_D f(x, y)dx\, dy.$$

Dacă $\displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$ este, ca funcţie de x, $\mathcal{R}-$integrabilă pe $[a, b]$, atunci există $\displaystyle\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy\Big)dx$ şi avem:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy\Big)dx.$$

În plus, dacă $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, iar $f_1 \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $f_2 \in \mathcal{R}[c, d]$, atunci:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)f_2(y)dx\, dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Demonstraţie: Considerând o partiţie a dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$ prin mulţimi dreptunghiulare de tipul $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$ unde $\Delta' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ este o diviziune a intervalului compact, unidimensional, $[a, b]$, iar $\Delta'' = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ este o diviziune a intervalului $[c, d]$, luăm în atenţie $m_{ij} = \inf\{f(x, y)/(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$ şi $M_{ij} = \sup\{f(x, y)/(x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$, $\forall i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$. Arbitrar alegând $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \overline{1, n}$ şi ţinând seama de ipoteza existenţei integralei $\int_c^d f(x, y)dy$, avem

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \;\; \forall j \in \overline{1, m}, i \in \overline{1, n}.$$

De aici, prin însumare după j de la 1 la m, obţinem:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \;\; \forall i \in \overline{1, n}.$$

Înmulţind această relaţie cu $x_i - x_{i-1}$ şi realizând suma după i, de la 1 la n, a rezultatelor, ajungem la

$$\begin{aligned} s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_c^d f(\xi_j, y)dy\Big)(x_i - x_{i-1}) \le \\ \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = S_f(\Delta), \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\Delta = \Delta' \times \Delta'$ este partiţia considerată a dreptunghiului $D = [a, b] \times [c, d]$. Cum, prin ipoteză, există $\displaystyle\iint_D f(x, y)dx\, dy$ şi, în acelaşi timp, există $\int_a^b(\int_c^d f(x, y)dy)dx$, obţinem, pe seama relaţiei (1), că:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy\Big)dx.$$

Când $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x, y) \in D = [a, b] \times [a, b]$, avem:

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f_1(x)f_2(y)dy\Big)dx = \int_a^b \Big(f_1(x)\int_c^d f_2(y)dy\Big)dx = \\ = \int_c^d f_2(y)dy \cdot \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy. \end{aligned}$$

◄

Observaţii:

i) Atunci când $f \in \mathcal{R}([a,b]\times[c,d])$ şi există $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$, $\forall y \in [c,d]$, iar aceasta din urmă, ca funcţie de y, este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[c,d]$, atunci prin inversarea rolurilor lui x şi y în cadrul Propoziţiei 13.13, avem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

ii) O condiţie suficientă pentru îndeplinirea ipotezelor din Propoziţia 13.13 este: $f \in C([a,b]\times[c,d];\mathbb{R})$.

Definiţia 13.15 *a) Un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte* ***simplu în raport cu axa*** *Oy dacă există două funcţii continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$ iar*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

b) Un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte ***simplu în raport cu axa*** *Ox dacă există două funcţii continue $\gamma, \omega : [c,d] \to \mathbb{R}$, aşa încât $\gamma(y) < \omega(y)$, $\forall y \in [c,d]$ şi*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \le x \le \omega(y), c \le y \le d\}.$$

Teorema 13.16 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi $f \in C(D,\mathbb{R})$. Atunci are loc formula*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big)dx, \tag{2}$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, cu $\varphi, \psi \in C([a,b];\mathbb{R})$, aşa încât $\varphi(x) < \psi(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Demonstraţie: Fie Δ o diviziune echidistantă a intervalului $[a,b]$, cu nodurile $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \overline{0,n}$. Evident, $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$. Considerăm funcţiile $\varphi_l : [a,b] \to \mathbb{R}$, $l = \overline{0,n}$, definite prin

$$\varphi_l(x) = \varphi(x) + \frac{l}{n}(\psi(x) - \varphi(x)), \ \ \forall x \in [a,b], l \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Avem $\varphi_0 = \varphi$ şi $\varphi_n = \psi$.

Fie notată cu Ω_n partiţia lui D prin elementele $(D_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, unde

$$D_{ij} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \le x \le x_i, \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x)\}, \forall i,j \in \overline{1,n}.$$

Observăm că $\text{diam}(D_{ij}) \le \frac{b-a}{n} + \frac{1}{n}\sup\limits_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \varphi(x)|$, $\forall i,j \in \overline{1,n}$ şi, în consecinţă, $\|\Omega_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Folosind notaţiile $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$ şi $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$, avem:

$$m_{ij}\text{aria}(D_{ij}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy)dx \le M_{ij}\text{aria}(D_{ij}), \forall i,j \in \overline{1,n}.$$

De aici, prin sumare succesivă după i şi j, de la 1 la n, obţinem:

$$\begin{aligned} s_f(\Omega_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\text{aria}(D_{ij}) \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}\text{aria}(D_{ij}) = S_f(\Omega_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Cum f este integrabilă pe D, avem $\lim\limits_{n\to\infty} s_f(\Omega_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Omega_n) = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ şi atunci, pe seama relaţiei (3), deducem că are loc formula de calcul (2) din concluzia teoremei. ◀

Observaţii:

a) În cazul în care $f \in C(D)$, iar D este simplu în raport cu axa Ox, adică

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\},$$

atunci formula de calcul corespunzătoare este următoarea:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\omega(y)} f(x,y)dx \right) dy. \tag{4}$$

b) În situaţia în care D nu este simplu nici în raport cu axa Oy şi nici în raport cu axa Ox, dar se poate exprima ca o reuniune finită de subdomenii simple (fie în raport cu Oy, fie în raport cu Ox) şi mutual disjuncte atunci pentru calculului integralei duble în cauză, se folosesc împreună formulele: punctul f (din propoziţia 13.12), (2) (din propoziţia 13.15) şi formula (4).

Exemplul 13.1. *Fie* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 4\}$. *Să se calculeze aria* (D).

Prin aplicarea formulei de la punctul a) al Propoziţiei 13.12, avem:

$$\text{aria}(D) = \iint_D dx\,dy.$$

Cum $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, cu $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \varnothing$, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, unde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_1(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_1(y) = y, 1 \leq y \leq \sqrt{3}\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_2(y) = \frac{1}{y} \leq x \leq \omega_2(y) = \frac{3}{y}, \sqrt{3} \leq y \leq 2\}$ şi $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_3(y) = \frac{y}{4} \leq x \leq \omega_3(y) = \frac{3}{y}, 2 \leq y \leq 2\sqrt{3}\}$, iar D_1, D_2 şi D_3 sunt domenii simple în raport cu axa Ox, obţinem:

$$\begin{aligned}
\text{aria}(D) &= \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy + \iint_{D_3} dx\,dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{1/y}^{y} dx \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_{1/y}^{3/y} dx \right) dy + \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\int_{y/4}^{3/y} dx \right) dy = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{y} dy + \int_2^{2\sqrt{3}} (\frac{3}{y} - \frac{y}{4}) dy = \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \ln y \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} + 2 \ln y \Big|_{\sqrt{3}}^{2} + \left(3 \ln y - \frac{y^2}{8} \right) \Big|_2^{2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 - \ln 3 + 3 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} - 3 \ln 2 + \frac{1}{2} = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

În anumite situaţii, calculul integrale duble pe o mulţime conexă, inchisă, mărginită şi măsurabilă Jordan, s-ar putea face şi printr-o schimbare adecvată de variabile (coordonate), urmărindu-se, în principal, transformarea domeniului de integrare şi a integrandului în corespondente ale lor care să faciliteze calculul ulterior.

Dacă Ω *este un domeniu mărginit şi măsurabil Jordan din* $\mathbb{R}^2$, *iar* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, *definită prin* $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $\forall (u, v) \in \overline{\Omega}$ *este o funcţie de clasă* C^1 *pe* $\overline{\Omega}$, *care transformă, bijectiv, domeniul* Ω *într-o mulţime* D *şi* $\det(J_F)(u, v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u, v) \neq 0$, $\forall (u, v) \in \Omega$, *atunci* $\overline{D} = F(\overline{\Omega})$ *este, la rândul său, un domeniu compact din* $\mathbb{R}^2$, *iar* F *se numeşte schimbare de variabile* (*coordonate*).

Calculul unei integrale duble pe D, dintr-o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, se va face, prin implicarea transformării F, în virtutea următorului rezultat:

Propoziţia 13.17 *Fie* $F : \overline{\Omega} \to \overline{D}$, $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in \overline{\Omega}$ *o schimbare de variabile şi* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci, are loc formula*

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| (u,v) du\,dv,$$

în care $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ *semnifică Jacobianul (determinantul funcţional al) lui* F, *iar* $\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|$ *valoarea sa absolută.*

Observaţii:

i) De obicei, se recurge la o schimbare de variabile sugerată de forma domeniului D.

Astfel, în cazul exemplului de mai sus, luând $xy = u$ şi $\frac{y}{x} = v$, cu $u \in [1,3]$ şi $v \in [1,4]$, altfel spus $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ şi $y = \sqrt{uv}$, avem

$$\text{aria}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_\Omega \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|(u,v)du\,dv,$$

unde $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le u \le 3, 1 \le v \le 4\} = [1,3] \times [1,4]$ şi

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix})(u,v) = \det(\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}) = \frac{1}{2v}.$$

Deci, şi pe o asemenea cale, regăsim faptul că

$$\text{aria}(D) = \int_1^3 du \int_1^4 \left|\frac{1}{2v}\right| dv = \left(u\Big|_1^3\right)\left(\frac{1}{2}\ln v\Big|_1^4\right) = 2\frac{1}{2}\ln 4 = 2\ln 2.$$

ii) Frecvent practicate sunt transformările de la coordonatele carteziene (x,y) la cordonatele polare (r,θ), prin relaţiile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{, cu } r \in [r_1, r_2] \subseteq [0,\infty),\ \theta \in [\theta_1,\theta_2] \subseteq [0, 2\pi],$$

unde $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r,\theta) = \det(\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}) = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$

De asemenea, uneori, se mai foloseşte trecerea de la x şi y la aşa-numitele coordonate polare generalizate, potrivit relaţiilor

$$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\theta \\ y = br\sin^\alpha\theta \end{cases},$$

în care $r \in [r_1, r_2] \subseteq (0,\infty)$ şi $\theta \in [\theta_1,\theta_2] \subseteq [0,2\pi]$ sunt noile coordonate, iar a, b şi α sunt parametri adecvat luaţi în context. Când $\alpha = 1$, atunci r şi θ se numesc cordonate eliptice, corespunzătoare elipsei de ecuaţie redusă $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Exemplul 13.2. *Să se calculeze* $\iint_D (y - x + 2)dx\,dy$, *unde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

Folosind transformarea $(x,y) \to (r,\,\theta)$, dată de relaţiile $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$, cu $0 \le r < 1$ şi $0 \le \theta \le 2\pi$, avem:

$$\iint_D (y - x + 2)dx\,dy = \int_0^{2\pi}(\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|(r,\theta)dr)d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^1 (3r\sin\theta - 2r\cos\theta + 2)6r\,dr)d\theta = \int_0^{2\pi}(6\sin\theta - 4\cos\theta + 6)d\theta =$$
$$= (-6\cos\theta - 4\sin\theta + 6\theta)\Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

O altă aplicaţie a integralei duble, este cea referitoare la calculul masei unei plăci materiale plane D, cu densitate de masă ρ, cunoscută, în conformitate cu formula

$$\text{masa}(D) = \iint_D \rho(x,y)dx\,dy.$$

De asemenea, putem determina coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) al unei plăci materiale plane D, cu densitatea de masă ρ, potrivit formulelor:

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)dx\,dy} \text{ şi } y_G = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)dx\,dy}.$$

Integrala triplă pe domenii compacte

Integrala triplă reprezintă cazul particular al integralei multiple ce corespunde lui $n = 3$. Aceasta se notează cu

$$\iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

unde $f : D \to \mathbb{R}$, iar D este un domeni compact şi măsurabil-Jordan din $\mathbb{R}^3$. Toate definiţiile, rezultatele şi observaţiile din cazul general îşi păstrează valabilitatea şi când $n = 3$. Modalităţile de calcul ale unei integrale triple se pot deduce prin analogie cu cele de la integrala dublă.

Definiţia 13.18 *Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte* ***simplu în raport cu axa*** *Oz dacă există un domeniu $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$, măsurabil Jordan şi două funcţii continue $\varphi, \psi : \overline{\widetilde{D}} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \widetilde{D}$, astfel încât*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) < z < \psi(x, y),\ \forall (x, y) \in \widetilde{D}\}.$$

Un astfel de domeniu din $\mathbb{R}^3$ are volumul (în sens Jordan) dat de formula

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_{\widetilde{D}} \psi(x, y) dx\, dy - \iint_{\widetilde{D}} \varphi(x, y) dx\, dy.$$

Totodată, analog Teoremei 13.15, putem formula următorul rezultat:

Propoziţia 13.19 *Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^3$, simplu în raport cu Oz. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc formula de calcul:*

$$\iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx\, dy. \tag{5}$$

Exemplul 13.3. *Să se calculeze $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz$, unde D este domeniul mărginit de suprafeţele $z = 0$, $z = 1$ şi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Observând că $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1, \forall (x, y) \in \widetilde{D}\}$, unde $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, avem $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\psi(x, y) = 1$, aşa încât, prin utilizarea formulei (14.7) (v. Propoziţia 13.18), obţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz \right) \sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy = \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2 + y^2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx\, dy.$$

De aici, mai departe, folosind trecerea de la coordonatele carteziene (x, y) la cele polare (r, θ), avem:

$$\iint_{\widetilde{D}} \sqrt{x^2 + y^2} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r(1 - r) r\, dr \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Propoziţia 13.20 (Formula de calcul pentru integrala triplă prin transformare de coordonate) *Fie Ω şi D două domenii compacte, cu volum Jordan, din $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $F : \Omega \to D$, unde $F(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, $\forall (u, v, w) \in \Omega$, o transformare punctuală, bijectivă, de clasă $C^1(\Omega, D)$ şi cu jacobianul $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ nenul pe Ω. Dacă $f \in C(D; \mathbb{R})$, atunci are loc formula:*

$$(\Theta) \qquad \iiint_D f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u, v, w) du\, dv\, dw.$$

Observaţii:

1) Cea mai utilizată schimbare de variabile în $\mathbb{R}^3$ este trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la *coordonatele sferice* r, θ, φ, potrivit relaţiilor:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, \pi], \\ z = r\cos\theta, & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \subseteq [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$\frac{D(x, y, z,)}{D(r, \theta, \varphi)}(r, \theta, \varphi) = \det(\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}) = r^2\sin\theta.$$

2) O altă schimbare de variabile pentru integrala triplă este trecerea de la coordonatele carteziene la *coordonatele cilindrice*, transformare definită de relaţiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [r_1, r_2] \subseteq [0, +\infty], \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subseteq [0, 2\pi], \\ z = z, & z \in [z_1, z_2] \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

În acest caz, avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}(r, \theta, z) = r$.

Reluând Exemplul 14.3, relativ la integrala triplă

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

unde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1, \forall (x, y) \in \sqrt{\widetilde{D}}\}$, cu $\widetilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, se poate folosi formula de calcul (Θ) din Propoziţia 13.19, în care $u = r$, $v = \theta$, şi $w = z$ sunt coordonate cilindrice, cu $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $z \in [0, 1]$. În acest mod, obţinem:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 r dz\right) d\theta\right) r\,dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r)r^2 dr = \frac{\pi}{6}.$$

Şi integrală triplă îşi are aplicaţiile ei în geometrie, fizică şi alte domenii, între care, menţionăm aici calculul masei unei corp material D, de densitate cunoscută ρ, pe baza formulei

$$\iiint_D \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

precum şi determinarea coordonatelor centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) al unui corp D, cu densitatea materială ρ, în conformitate cu următoarele formule:

$$x_G = \frac{\iiint_D x\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz},\ y_G = \frac{\iiint_D y\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz},\ z_G = \frac{\iiint_D z\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}.$$

În general, în cazul unei integrale multiple pe un domeniu compact şi Jordan-măsurabil din $\mathbb{R}^n$, calculul se poate face, în anumite condiţii, pe baza uneia dintre următoarele două formule:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{\varphi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n$$

(când D este simplu în raport cu Ox_n, apoi cu Ox_{n-1}, etc.) şi

$$\begin{aligned} &\iint_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \\ &= \iint_\Omega f(x_1(y_1, \ldots, y_n), x_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \left|\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right| (y_1, y_2, \ldots, y_n)dy_1 \ldots dy_n \end{aligned}$$

(când se poate face trecerea de la coordonatele $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, la coordonatele $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$).

Exemplul 13.4. *Să se calculeze* $\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n$, *unde* D *este mulţimea*

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1\}.$$

Folosind prima dintre formulele menţionate, obţinem:

$$\int \cdots \int_D dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n)) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) dx_{n-1}) \ldots) =$$
$$= \int_0^1 dx_1 (\int_0^{1-x_1} dx_2 (\ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \frac{(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2})) \ldots) = \ldots = \frac{1}{n!}.$$

Integrale multiple improprii

Ca şi în cazul unidimensional, se poate extinde noţiunea de integrală şi pentru situaţiile în care fie domeniul nu este compact, fie integrandul nu este mărginit, fie ambele aceste caracteristici au loc.

Definiţia 13.21 *Fie $D \subset R^n$ un domeniu (mărginit sau nemărginit) şi $f : D \to R$ o funcţie (mărginită sau nu) ce se presupune a fi $\mathcal{R}$-integrabilă pe orice submulţime compactă şi Jordan-măsurabilă a lui D.*
*Spunem că **integrala** $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ **este convergentă** dacă, pentru orice şir de domenii mărginite $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, care sunt măsurabile-Jordan şi au proprietăţile următoare*
i) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots$
ii) $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $\forall k \in N^*$,
iii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$,
există şi este finită $\lim_{k \to \infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$, *valoarea ei fiind independentă de alegerea şirului* $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

În cazul când respectiva limită nu există sau este infinită, spunem că integrala $\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ *este* divergentă.

Ca şi în cazul unidimensional (când $n = 1$), se pot pune în evidenţă diverse criterii de convergenţă/divergenţă pentru integrale multiple improprii, iar calculul unor asemenea integrale, în situaţia de convergenţă, se va baza pe formula

$$\lim_{k \to \infty} \int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

în care valoarea integralei $\int \cdots \int_{D_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$ se determină pe una dintre căile prezentate mai sus.

Exemplul 13.5. *Integrala* $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$ *este convergentă şi are valoarea* π, *după cum urmează:*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \right) d\theta = (-2\pi) \lim_{a \to \infty} \left(\left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^a \right) = \pi \lim_{a \to \infty} (1 - e^{-a^2}) = \pi.$$

Exemplul 13.6. *Integrala improprie (din pricina nemărginirii integrandului în* $(0, 0)$*)*

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx\, dy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \rho^2\}$, $\rho > 0$ *şi* $\alpha > 0$, *se poate aprecia prin intermediul formulei*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} dx\, dy,$$

unde $D_n = D \setminus B(\theta_{\mathbb{R}^2}; \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, trecând la coordonate polare (pe seama relaţiilor $x = r\cos\theta, y = \sin\theta$,cu $\frac{1}{n} \leq r \leq \rho, \theta \in [0, 2\pi]$), obţinem:

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{\rho} \frac{r}{r^\alpha} dr \right) d\theta = (2\pi) \lim_{n\to\infty} \left(\int_{1/n}^{\rho} r^{1-\alpha} dr \right) =$$

$$= 2\pi \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{1/n}^{\rho} \right), 0 < \alpha \neq 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln r \Big|_{1/n}^{\rho} \right) \quad , \quad \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi\rho^{2-\alpha}, & 0 < \alpha < 2 \\ +\infty, & \alpha \geq 2 \end{cases}.$$

Aşadar, integrala dată este convergentă când $\alpha \in (0, 2)$ şi divergentă când $\alpha \geq 2$.

Bibliografie

1. B.M. Budak, S.V. Fomin - *Multiple Integrals. Field Theory and Series*, Edit. "Mir", 1973.

2. Constantin P. Niculescu - *Calcul integral pe* $\mathbb{R}^n$*,* Edit. Universităţii din Craiova, 2000.

3. Şt. Frunză - *Analiză matematică* (partea a II-a), Edit. Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1992.

4. V. Postolică - *Analiză matematică. Eficienţă prin matematică aplicată* (cap. 17), Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. Narcisa Apreutesei-Dimitriu, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii* (cap. 6), Edit. Performantica, Iaşi, 2005.

6. Ioana Bârză - *Calcul intégral.Calcul différentiel. Équations différentielles. Éléments de Géométrie différentielle,* Edit. Matrix Rom, Bucureşti, 2010.

7. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.