Setul 3
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la serii de numere reale - serii cu termeni pozitivi)

S3.1 Stabiliţi natura următoarelor serii utilizând, iar în caz de convergenţă, determinaţi sumele lor:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1}; \quad \text{b)} \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{n}} + \ln \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \right); \quad \text{c)} \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}^2 \cdot \mathrm{n}!};$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+2^{n+1}}{6^n}; \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^* \text{ este fixat;}$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right); \quad \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}.$$

S3.2 Să se demonstreze criteriul lui D'Alembert pentru stabilirea naturii unei serii de numere reale pozitive (fără a utiliza Criteriul lui Kummer).

S3.3 Să se demonstreze ***criteriul logaritmului*** pentru stabilirea naturii unei serii de numere reale pozitive:

"*Fie seria* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$, *unde* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât există* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = \lambda$. *Atunci:*

i) *dacă* $\lambda > 1$, *seria* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

ii) *dacă* $\lambda < 1$, *seria* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

iii) *dacă* $\lambda = 1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$."

S3.4 Să se arate că dacă seriile de numere reale $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^4$ şi $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[3]{b_n^4}$ sunt convergente, atunci şi seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} a_n b_n$ este convergentă.

S3.5 Folosind diverse criterii de convergenţă, să se stabilească natura fiecăreia dintre seriile de mai jos. Să se calculeze apoi, ori de câte ori este posibil, sumele în cauză:

$$\text{a)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad \text{b)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1!+2!+...+n!}{(n+2)!}; \quad \text{c)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n};$$

$$\text{d)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}; \quad \text{e)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2+n(1+2\sqrt{2})+2+\sqrt{2}}; \quad \text{f)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2};$$

$$\text{g)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^a \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right), a \in \mathbb{R}; \quad \text{h)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} \right];$$

i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \arcsin \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}+5}$; j) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{e\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{e}}$; k) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\mathrm{arctg(n\alpha)}}{(\ln 3)^{\mathrm{n}}}, \alpha\in\mathbb{R}$;

l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$; m) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; n) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)^n$.

o) $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$; p) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\ln n}{n^2}$; q) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^2$.

S3.6 Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ o serie convergentă din $\mathbb{R}$, cu $u_n\geq 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Ce se poate spune despre natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)^{\alpha}$, unde α este un număr real?

S3.7 Să se analizeze natura seriilor cu termenii generali următori şi, dacă este posibil, să se afle sumele în cauză:

a) $\dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}, n\in\mathbb{N}^*$; b) $\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n(n+3)}, n\in\mathbb{N}^*$; c) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*$;

d) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}, \alpha\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$; e) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$, unde $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$;

f) $\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\, n\right)^n, n\in\mathbb{N}^*$; g) $\dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!n^{\beta}}, \alpha\in\mathbb{R}_+^*, \beta\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$;

h) $\dfrac{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2\cdot\ldots\cdot(4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot\ldots\cdot(4n-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

S3.8 Să se analizeze seria cu termenul general

$$\arccos\frac{n(n+1)+\sqrt{(n+1)(n+2)(3n+1)(3n+4)}}{(2n+1)(2n+3)}, n\in\mathbb{N}^*$$

şi, în caz de convergenţă a sa, să i se afle suma.

Bibliografie selectivă

1. C, Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral (Vol. II)*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1966.

3. M. Roşculeţ, C. Bucur, M. Craiu - *Culegere de probleme de analiză matematică*, E. D. P., Bucureşti, 1968.

4. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

5. P. L. Clark - *Sequences and Series. A Sourcebook*, 2012.

6. V. Pop, Liliana Popa ş.a. - *Teme şi probleme pentru concursurile studenţeşti de matematică (Vol. II)*, Ed. Univ. Bucureşti, 2011.

7. M. K. Warby, J. E. Furter - *Exercises on Sequences and Series of Real Numbers*, Brunel University London, 2015.

8. *** - http://mathsforall.co.uk/home/pages/mathematical-analysis