Cursul 12

Integrale ale funcţiilor reale scalar-scalare

Noţiunea de integrală este utilizată în diverse ramuri ale matematicii, dar şi în domenii conexe matematicii. Spre exemplu, în teoria probabilităţilor, integralele sunt utilizate pentru a calcula densităţi de probabilitate, medii şi dispersii pentru variabile aleatoare continue, în fizică, pentru determinarea momentelor de inerţie, a lucrului mecanic, a coordonatelor de poziţie sau a centrelor de greutate, etc. Mai mult, integralele pot fi utilizate şi pentru calculul lungimilor, ariilor şi volumelor.

În acest curs, sunt amintite câteva noţiuni despre integrala nedefinită şi despre integrala Riemann a unei funcţii reale scalar-scalare, apoi sunt studiate atât integralele improprii (pe intervale nemărginite sau din integranzi nemărginiţi), cât şi integralele cu parametri. În final, sunt prezentate pe scurt două exemple de integrale cu parametru: funcţiile Γ (gamma) şi B (beta), ale lui Euler.

Integrale nedefinite. Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : I \to \mathbb{R}$.

Definiţia 12.1 *a) O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte **primitivă** (pe intervalul I) a funcţiei f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.*

*b) Dacă f are cel puţin o primitivă pe I, atunci f se numeşte **funcţie primitivabilă** pe I şi acest fapt se notează prin $f \in \mathcal{P}(I)$.*

*c) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$, atunci mulţimea tuturor primitivelor pe I ale funcţiei f poartă denumirea de **integrala nedefinită a lui f pe I** şi se notează cu $\displaystyle\int f(x)\,dx$.*

Observaţii:

i) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$ şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f, pe I, atunci toate primitivele funcţiei f sunt de forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Aşadar: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $\forall\, x \in I$.

ii) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci ea este o primitivă a funcţiei f', pe intervalul I şi deci avem $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + c$, $\forall\, x \in I$, unde c este o constantă reală arbitrară.

iii) Determinarea unei primitive F, a lui f, pe intervalul I, se numeşte operaţie de ***integrare*** a lui f pe I. Integrarea este "inversa" operaţiei de diferenţiere a unei funcţii $f : I \to \mathbb{R}$, cu primitiva $F : I \to \mathbb{R}$:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + c\right) = \left(F + c\right)'(x)\,dx = F'(x)dx = f(x)dx \text{ şi}$$

$$\int d(F(x) + c) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c, \forall\, x \in I, c \in \mathbb{R}.$$

iv) Mulţimea $\mathcal{P}(I)$ este nevidă, întrucât orice funcţie continuă pe I are primitive pe I, adică $C(I;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(I)$. În plus, din punct de vedere algebric, $\mathcal{P}(I)$ este un subspaţiu liniar real al spaţiului vectorial (peste $\mathbb{R}$) $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, deoarece, pentru orice $f, g \in \mathcal{P}(I)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}(I)$ şi

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx, \text{ pe } I.$$

v) $\mathcal{P}(I)$ este parte a mulţimii funcţiilor f care au proprietatea lui Darboux pe I ($\forall\, x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ şi $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, $\exists\, \widetilde{x} \in (x_1, x_2)$, astfel încât $f(\widetilde{x}) = \lambda$). Prin urmare, dacă o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu este primitivabilă pe I.

Metode de calcul pentru primitive

1. Folosirea *tabelului integralelor nedefinite* ale unor funcţii elementare:

$$\int x^\alpha\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln|x|, & \alpha = -1 \end{cases} + c; \qquad \int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c,\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c; \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c; \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c;$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{ch} x + c; \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \operatorname{sh} x + c,$$

unde $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, iar $c \in \mathbb{R}$.

2. *Integrarea prin părţi* - aplicabilă ori de câte ori avem de-a face cu două funcţii $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabile şi cu derivatele f' şi respectiv g' continue pe I - se face în conformitate cu formula

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx,\ x \in I,$$

care, în virtutea relaţiilor $f'(x)dx = (df)(x)$, $g'(x)dx = (dg)(x)$ şi $d(fg) = f(dg) + g(df)$, poate fi redată prin:

$$\int g(x)(df)(x) = f(x)g(x) - \int f(x)(dg)(x),\ x \in I.$$

Aplicând integrarea prin părţi, vom obţine următoarele formule:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| < a, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,\ a \in \mathbb{R}^*,\ x \in I, c \in \mathbb{R};$$

Tot integrarea prin părţi este recomandată pentru cazul integralelor de forma $\int P_n(x) f(x)\, dx$, unde $P_n \in \mathbb{R}[X]$ iar f este una dintre funcţiile elementare e^x, $\ln x$, $\arcsin x$, etc. Prin aplicarea acestei metode, se reduce treptat, cu câte o unitate la fiecare utilizare (repetată) a integrării prin părţi, gradul polinomului P_n, $n \in \mathbb{N}$.

3. *Metoda transformărilor algebrice* se utilizează pentru calculul primitivelor unor funcţii raţionale, de forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, definite pe $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $\mathring{I} \neq \varnothing$ şi $Q(x) \neq 0$ pe I. Cum, orice funcţie raţională se descompune, în mod unic, într-o sumă de fracţii raţionale "simple", în conformitate cu formula

$$(*) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum\nolimits_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum\nolimits_2 \frac{B_{k,m}x + C_{k,m}}{(x^2 + p_k x + q_k)^m},\ x \in I,$$

în care G este un polinom (nul, când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H tot un polinom (cu gradul strict mai mic decât gradul lui Q şi identic cu P, atunci când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), $\sum_1$ este o sumă relativă la toate rădăcinile reale x_k ale lui Q, iar $\sum_2$ se raportează la toate rădăcinile complexe ale lui Q (cu $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, aşa încât $p_k^2 - 4q_k < 0$), integrarea lui f revine la determinarea primitivelor tuturor componentelor din suma de descompunere $(*)$.

În cazul în care polinomul Q are rădăcini multiple, calculul primitivei funcţiei raţionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se mai poate face şi prin ***metoda lui Gauss-Ostrogradski***, bazată pe formula

$$(**)\quad \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,\ x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q şi Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \dfrac{Q}{Q_1}$, iar P_1 şi P_2 sunt polinoame care au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$ şi respectiv $\operatorname{grad} Q_2$, determinarea lor realizându-se prin derivarea relaţiei $(**)$, adică pe baza relaţiei

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},\ x \in I,$$

prin identificare şi aflare, în acest mod, a coeficienţilor (iniţial necunoscuţi ai) lui P_1 şi P_2.

4. *Metoda substituţiei*

Metoda transformărilor trigonometrice, se foloseşte pentru calculul primitivelor unor funcţii în ale căror expresii sunt prezente funcţii trigonometrice. În cazul ***integralelor trigonometrice*** de forma

$$\int E(\sin x, \cos x)\,dx,\ x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcţie raţională de două variabile, se foloseşte, în general, substituţia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, care, pe baza relaţiilor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în variabila t. Calculul integralei $\int E(\sin x, \cos x)\,dx$ poate fi simplificat, evitându-se utilizarea substituţiei standard $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, în următoarele trei cazuri:

1. $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, se utilizează substituţiei $\cos x = t$.
2. $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$ şi atunci se face substituţia $\sin x = t$.
3. $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară (simultan) în $\sin x$ şi $\cos x$, vom nota $\operatorname{tg} x = t$.

Metoda substituţiei se practică şi pentru calculul unor ***integrale iraţionale*** de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ \text{unde } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ aşa încât } ax^2+bx+c \geq 0, \forall x \in I,$$

iar E o expresie raţională. Pentru calculul acestor integrale, se utilizează *substituţiile lui Euler*:

i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, când $a > 0$;

ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, când $c > 0$;

iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0)$, când $b^2-4ac > 0$, unde x_0 este o rădăcină (din $\mathbb{R}$) a ecuaţiei $ax^2+bx+c = 0$.

Pentru ***integrale iraţionale de forma***

$$\int E\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right)dx,\ x \in I \subseteq \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^*$$

în care E este o funcţie raţională de $k+1$ variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, $cx+d \neq 0$, $\forall\, x \in I$, $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\forall\, x \in I$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, se utilizează substituţia $x \to t$, dată de relaţia $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Pentru calculul integralelor de forma

$$\int x^p(ax^q+b)^r\,dx,\ x\in I\subseteq\mathbb{R},\ \text{unde } a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R} \text{ şi } p,q,r\in\mathbb{Q},$$

se utilizează *substituţiile lui Cebîşev*:

j) $r\in\mathbb{Z}$, când se face substituţia $x=t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui p şi q;

jj) $\dfrac{p+1}{q}\in\mathbb{Z}$, situaţie în care se face substituţia $ax^q+b=t^l$, unde $l\in\mathbb{N}^*$ este numitorul lui r.

jjj) $\dfrac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$, caz în care se face substituţia $a+bx^{-q}=t^l$, l fiind numitorul lui r.

Pentru calculul integralelor de forma

$$\int E\left(a^{r_1x},a^{r_2x},\ldots,a^{r_nx}\right)dx,\ \text{unde } a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}, r_1,r_2,\ldots,r_n\in\mathbb{Q},$$

iar E este o funcţie raţională, de n variabile reale şi cu valori în $\mathbb{R}$, se utilizează substituţia $a^x=t^\nu$, unde $t>0$, şi ν este cel mai mic multiplu comun al numitorilor numerelor $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

Atragem atenţia asupra faptului că există şi o serie de primitive care nu se pot exprima prin combinaţii liniare finite de funcţii elementare. Este cazul ***integralelor eliptice***, adică al integralelor de forma

$$\int\sqrt{(1-a^2\sin^2x)^{\pm1}}\,dx,\ \text{cu } a\in(0,1) \text{ şi } x\in I_a\subseteq\mathbb{R}$$

precum şi al următoarelor integrale:

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ (sinusul integral)},\ \int\frac{\cos x}{x}\,dx \text{ (cosinusul integral)},$$

$$\int\frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritmul integral)},\ \int\frac{e^x}{x}\,dx \text{ (exponenţialul integral)},$$

$$\int e^{-x^2}\,dx \text{ (primitiva lui Poisson)},\ \int\cos(x^2)dx\ \text{ şi }\int\sin(x^2)\,dx \text{ (primitivele lui Fresnel)}.$$

Integrala definită (în sens Riemann)

Definiţia 12.2 *Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.*

1) *Se numeşte* ***diviziune a intervalului compact*** *$[a,b]$, notată prin Δ, o mulţime finită şi ordonată crescător de elemente $x_0,x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$, cu $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Elementele x_i, $i=\overline{0,n}$ se numesc* ***puncte ale diviziunii*** *Δ, iar $[x_i,x_{i+1}]$, $i\in\overline{0,n-1}$, se numesc* ***intervale parţiale ale diviziunii*** *Δ.*

2) *Numărul notat cu $\|\Delta\|$ şi definit prin $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i-x_{i-1}\}$, se numeşte* ***norma diviziunii*** *Δ.*

3) *O* ***diviziune*** *Δ a intervalului $[a,b]$ se numeşte* ***echidistantă*** *dacă $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\,i=\overline{1,n}$, caz în care avem $\|\Delta\|=\dfrac{b-a}{n}$ şi $x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\,i=\overline{0,n}$.*

De regulă, ***mulţimea tuturor diviziunilor unui interval compact*** $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{D}[a,b]$.

Definiţia 12.3 *a) Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ din $\mathcal{D}[a,b]$. Mulţimea $\xi_\Delta=\{\xi_i\mid\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=\overline{1,n}\}$, adică mulţimea n-uplelor $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, unde ξ_i este arbitrar ales din $[x_{i-1},x_i]$, $\forall\,i=\overline{1,n}$ se numeşte* ***mulţime a punctelor intermediare asociate diviziunii*** *Δ.*

*b) Numim **sumă Riemann** a funcţiei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, în raport cu $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ şi cu $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, numărul*

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

unde x_i sunt punctele diviziunii $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Definiţia 12.4 *Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **integrabilă, în sens Riemann, pe intervalul** $[a,b]$, dacă există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, să avem $|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ. Se mai spune că f este **$\mathcal{R}$-integrabilă pe** $[a,b]$.*

*Numărul I se numeşte **integrala Riemann a lui f pe** $[a,b]$ şi se notează cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sau cu $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx$.*

Mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile (Riemann-integrabile) pe un interval compact $[a,b]$ din $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{R}[a,b]$.

Propoziţia 12.5 *Orice funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrabilă în sens Riemann pe un interval compact $[a,b]$ din $\mathbb{R}$ este, în mod necesar, mărginită pe $[a,b]$.*

Demonstraţie: Cum $f \in \mathcal{R}[a,b]$, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât, în conformitate cu Definiţia 12.4, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $\forall\, \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, avem $|\sigma_f(\Delta, \xi) - I| < \varepsilon$, adică

$$(\,!\,) \qquad I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon.$$

Fixând $\varepsilon = 1$ şi $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ (cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$), lăsăm ξ_1 să varieze în $[x_0, x_1]$, iar pe $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ le menţinem, pe moment, constante. Atunci, din (!), deducem că avem

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\left[I - 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right] < f(\xi_1) < \frac{1}{x_1 - x_0}\left[I + 1 - \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right],$$

$\forall\, \xi_1 \in [x_0, x_1]$. Deci funcţia f este mărginită pe intervalul parţial $[x_0, x_1]$ al lui Δ .

În mod analog, se arată că f este mărginită şi pe celelalte intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. Aşadar f este mărginită pe intervalul $[a,b]$. ◀

Observaţie: Dacă o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) nu este mărginită pe intervalul $[a,b]$, atunci ea nu este $\mathcal{R}$-integrabilă pe $[a,b]$. Există însă şi funcţii mărginite pe un interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, care nu sunt din $\mathcal{R}[a,b]$. De exemplu, funcţia lui Dirichlet, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Teorema 12.6 (de caracterizare Cauchy a integrabilităţii Riemann)
Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ aşa încât } \forall\, \Delta \in \mathcal{D}[a,b], \text{ cu } \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \text{ şi } \xi', \xi'' \in \xi_\Delta, \text{ avem } |\sigma_f(\Delta, \xi') - \sigma_f(\Delta, \xi'')| < \varepsilon.$$

Propoziţia 12.7 (Proprietăţi ale funcţiilor $\mathcal{R}$-integrabile pe intervale compacte din $\mathbb{R}$)

i) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[c,d]$, oricare ar fi subintervalul $[c,d]$ al lui $[a,b]$.

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$. Dacă $f \in \mathcal{R}[a,c]$ şi $f \in \mathcal{R}[c,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

iii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ şi are loc relaţia:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

iv) Dacă $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$*, atunci* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

v) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$*, atunci* $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi are loc inegalitatea ("Cauchy-Schwarz-Buniakowski" pentru funcţii* $\mathcal{R}$*-integrabile):*

$$(\;!!\;) \qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right).$$

vi) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $|f(x)| \ge \mu > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$*, atunci* $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

vii) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, atunci* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

viii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f(x) \ge 0$, $\forall\, x \in [a,b]$*, atunci* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Observaţii:

a) Inegalitatea (!!) are, drept generalizare, inegalitatea lui Hölder pentru funcţii $\mathcal{R}$-integrabile şi anume:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$\forall\, f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ şi $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{R}[a,b]$.

b) Ţinând seama de viii) din Propoziţia 12.7, rezultă că $\forall\, f, g \in \mathbb{R}[a,b]$, cu proprietatea că $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, avem:

$$(\bullet) \qquad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Convenind ca, pentru $f \in \mathcal{R}[a,b]$, să definim $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ ca fiind $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, rezultă $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

d) Având în atenţie relaţia $(\bullet)$, se poate vedea că, dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$, unde $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$.

Dacă, în plus, $f \in C[a,b]$, atunci, deoarece $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$ şi f, ca funcţie continuă pe $[a,b]$, îşi atinge marginile (m şi M), având proprietatea lui Darboux, există $c \in [a,b]$, astfel încât $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, adică are loc *formula de medie:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe $[a, b]$, se pot defini ***sumele Darboux*** (***corespunzătoare lui f şi unei diviziuni $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ arbitrare***), ***inferioară*** şi respectiv ***superioară***, prin

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ şi } S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ şi $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\forall\, i = \overline{1, n}$. Notând elementul $\sup\limits_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} s_f(\Delta)$ cu $\underline{I}$ şi $\inf\limits_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} S_f(\Delta)$ cu $\overline{I}$, numim $\underline{I}$ ***integrala Darboux inferioară a lui f pe*** $[a, b]$, iar $\overline{I}$ ***integrala Darboux superioară a lui f pe*** $[a, b]$. Folosind aceste elemente, se poate pune în evidenţă următorul ***criteriu*** (***al lui Darboux***) ***pentru stabilirea $\mathcal{R}$-integrabilităţii lui f pe*** $[a, b]$.

Teorema 12.8 *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, sau echivalent: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b]$ astfel încât $S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Valoarea comună a elementelor $\underline{I}$ şi $\overline{I}$ este, atunci când are loc relaţia $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, tocmai $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Pe baza oricăruia dintre criteriile de $\mathcal{R}$-integrabilitate formulate de Teoremele 12.6 (*criteriul lui Cauchy*) şi 12.8 (*criteriul lui Darboux*), se pun în relief ***categorii de funcţii ce sunt integrabile Riemann pe intervale compacte din*** $\mathbb{R}$. Are loc, astfel, rezultatul ce urmează.

Teorema 12.9 *Fie funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

a) Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

b) Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ (sau pe porţiuni, pe $[a, b]$, intervalul $[a, b]$ putându-se scrie ca o reuniune finită de intervale $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, astfel încât, pe fiecare dintre ele, f este monotonă, nu neapărat de acelaşi fel), atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Propoziţia 12.10 *Fie $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi $\forall x \in [a, b]$, fie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de relaţia: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. Atunci au loc următoarele concluzii:*

a) $F \in \mathcal{C}[a, b]$. Mai mult, $\exists\, L > 0$, aşa încât

$$|F(x) - F(\widetilde{x})| \leq L|x - \widetilde{x}|, \forall\, x, \widetilde{x} \in [a, b].$$

b) Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in [a, b]$, atunci F este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$. Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci F este o primitivă a lui f şi deci $f \in \mathcal{P}[a, b]$.

Calculul integralelor definite pentru funcţii $f \in \mathcal{R}[a, b]$ se face, atunci când $f \in \mathcal{P}[a, b]$, pe baza ***formulei lui Leibnitz-Newton***

$$(\ \#\ ) \quad \int_a^b f(x)\, dx = \left. F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.
Conform Propoziţiei 12.10, b), formula (#) are sens când $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Tot pentru calculul unei integrale definite dintr-o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pentru care există $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, se mai poate folosi metoda ***schimbării de variabilă***, potrivit formulei

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$, iar $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$ sau în conformitate cu formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t)\psi'(t)\,dt,$$

când $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ şi $\psi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];[a,b])$, ψ fiind bijectivă.

La fel de bine, atunci când este posibil, se foloseşte şi formula de integrare prin părţi pentru calcule de integrale definite. Aceasta se exprimă prin relaţia

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

ori de câte ori f şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[a,b]$ şi cu $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$ (în particular, când $f, g \in \mathcal{C}^1[a,b]$).

Pentru un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ care este uniform convergent, pe $[a,b]$, la o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, are loc un transfer de integrabilitate (Riemann), de la f_n la f, în conformitate cu următorul enunţ.

Propoziţia 12.11 *Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ este un şir de funcţii uniform convergent, pe $[a,b]$, la $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demonstraţie: Aplicarea Teoremei 12.3, de transfer de continuitate, ne conduce la o primă concluzie: $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Atunci, prin Teorema 12.9, a), rezultă: $f : \mathcal{R}[a,b]$. Cum f_n şi f sunt continue pe $[a,b]$, există $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}$. Şi, pentru că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[a,b]} f$, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$. Deci, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia: $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. În acest fel, constatăm că, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Aşadar, există $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx$ şi este egală cu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. ◄

Integrale improprii

O extindere naturală a integralei Riemann, integrală în legătură cu care, atât intervalul de integrare, cât şi integrandul, au fost considerate mărginite, este aceea constituită de ***integralele improprii*** (fie din pricina nemărginirii domeniului de integrare, fie din cauza faptului că funcţia de integrat este nemărginită).

Integralele pe intervale nemărginite sunt acelea în care cel puţin una dintre limitele de integrare este infinită, adică integrale de forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^a f(x)\,dx \text{ sau } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Integralele din funcţii nemărginite sunt acelea de forma $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, unde $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ este nemărginită cel puţin în vecinătatea unui punct din (a,b).

Definiţia 12.12 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe mulţimea $A = (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}\}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1} \in (\alpha, \beta)$ şi $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{n-1}$. De asemenea, prin notaţie, fie $\gamma_0 = \alpha$ şi $\gamma_n = \beta$.*

*Dacă f este **integrabilă local** (în sens Riemann) pe A, adică f este integrabilă pe orice interval compact inclus în A, iar funcţia $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx, \forall\, u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), \forall\, i = \overline{0, n-1},$$

*are o limită finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}) \longrightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, atunci **valoarea acestei limite se ia ca definiţie a integralei lui f pe intervalul** (α, β). Vom spune, în acest caz, că **funcţia f este integrabilă impropriu (generalizat)** pe (α, β) sau, prin analogie cu termenul corespunzător din teoria seriilor, vom spune că **integrala** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ **este convergentă**.*

*Dacă F nu are limită sau limita sa există dar nu este finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1})$ tinde la $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, spunem că f nu este integrabilă, impropriu, pe (α, β) sau, echivalent, că **integrala** $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ **nu este convergentă** (adică **este divergentă**).*

Observaţii: Cum existenţa limitei finite a lui F este legată de faptul că fiecare funcţie $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $F_i(u_i, v_i) = \int\limits_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx$, unde $u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), i \in \overline{0, n-1}$, trebuie să aibă limită finită când (u_i, v_i) tinde la (γ_i, γ_{i+1}), adică integrala $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$ trebuie să fie convergentă pentru orice $i \in \overline{0, n-1}$, se poate spune că stabilirea convergenţei (sau divergenţei) integralei $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ revine la stabilirea naturii fiecăreia dintre integralele $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i \in \overline{0, n-1}$. Întrucât, în cazul acestora, intervalele (γ_i, γ_{i+1}) nu conţin alte puncte în care integrandul f este nemărginit, stabilirea convergenţei integralelor $\int\limits_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x)\,dx$, $i \in \overline{0, n-1}$, va consta, în stabilirea existenţei şi finitudinii, respectiv nonexistenţei ori existenţei şi nefinitudinii limitelor

$$\lim_{\lambda \searrow \gamma_i} \int\limits_{\lambda}^{\omega_i} f(x)\,dx \quad \text{şi} \lim_{\mu \nearrow \gamma_{i+1}} \int\limits_{\omega_i}^{\mu} f(x)\,dx, \text{ unde } \gamma_i < \lambda < \omega_i < \mu < \gamma_{i+1},\ i \in \overline{0, n-1}.$$

Când aceste limite există şi sunt finite, atunci ele definesc integralele funcţiei f pe intervalele necompacte $(\gamma_i, \omega_i]$ şi respectiv $[\omega_i, \gamma_{i+1})$, integrale notate, de regulă, cu

$$\int\limits_{\gamma_i+0}^{\omega_i} f(x)\,dx \quad \text{şi respectiv} \quad \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-0} f(x)\,dx.$$

Prin analogie, pentru integrala improprie a funcţiei f pe intervalul (γ_i, γ_{i+1}) se foloseşte notaţia $\int\limits_{\gamma_i+\,0}^{\gamma_{i+1}-\,0} f(x)\,dx$.

Deoarece $\int\limits_{\gamma_i+\,0}^{\gamma_{i+1}-\,0} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_i+\,0}^{\omega_i} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-\,0} f(x)\,dx, \forall\, i = \overline{0, n-1}$, este suficient ca, în studiul convergenţei integralelor pe interval necompact, să ne ocupăm de convergenţa unor integrale de tipul

$$(\omega) \quad \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx \text{ şi } \int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx,$$

unde funcţia f este $\mathcal{R}$ -integrabilă pe orice interval compact conţinut în intervalele $(a,b]$ şi respectiv $[a,b)$.

Când a şi/sau b sunt infinite ($\pm\infty$), integralele în cauză (din (ω)) sunt *improprii, pe intervale nemărginite*, iar când a şi b sunt din $\mathbb{R}$, atunci integralele (ω) sunt *improprii, din funcţii nemărginite.*

Definiţia 12.13 *i) Dacă funcţia f este integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în intervalul $(a,b]$ sau $[a,b)$, iar integrala $\int\limits_{a+0}^{b} |f(x)|\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} |f(x)|\,dx$, este convergentă, atunci vom spune că integrala $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, este **absolut convergentă**.*

*ii) dacă integrala $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, respectiv $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)\,dx$, este convergentă, dar nu şi absolut convergentă, atunci ea se numeşte **semiconvergentă** (sau **simplu convergentă**).*

Integrale improprii pe intervale infinite

În cele ce urmează, vom studia integralele improprii pe intervale finite, adică integrale de forma

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \text{ sau } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dacă vom considera substituţia $x=-t$, atunci, vom putea scrie: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt$. În plus, avem $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$. Aşadar, ne putem limita la a studia doar prima integrală, deoarece celelalte două pot fi redate pe baza unor integrale de tipul $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Definiţia 12.14 *i) Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, cu $a\in\mathbb{R}$, o funcţie $\mathcal{R}$-integrabilă pe orice interval compact $[a,b]$, cu $b\in\mathbb{R}$, $b>a$. Se numeşte **integrală improprie**, **de la** a **la** $+\infty$, **din funcţia** f, limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, dacă aceasta există. În caz de existenţă, respectiva integrală se notează cu $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.*

*ii) Integrala improprie $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ se numeşte **convergentă** dacă limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ există şi este finită. În acest caz, vom nota: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\ (C)$.*

*iii) Integrala improprie $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ se numeşte **divergentă** dacă limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ nu există sau, dacă există, este infinită. Atunci, se utilizează notaţia: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\ (D)$.*

Exemplu: Integrala improprie $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, unde $a > 0$, este convergentă când $p > 1$ şi divergentă când $p \leq 1$.

Într-adevăr, pentru $p > 1$, obţinem $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b \right) = \frac{a^{1-p}}{p-1} \in \mathbb{R}$, iar pentru $p \leq 1$, avem: $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty$.

Propoziţia 12.15 (criteriul lui Cauchy de convergenţă pentru integrale improprii)
Integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *este convergentă dacă şi numai dacă, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$*, există* $a_\varepsilon > a$*, astfel încât,* $\forall\, a', a'' > a_\varepsilon$*, avem:*

$$(\square) \qquad \left| \int\limits_{a'}^{a''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Considerând $a'' = a' + 1$, pe baza Propoziţiei 12.15 deducem că, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon > a$, aşa încât, $\forall\, a' > a_\varepsilon$, avem: $M_{a'} = \sup\limits_{t\in[a', a'+1]} |f(t)| < \varepsilon$. Aşadar, o ***condiţie necesară de convergenţă*** a integralei $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\, dt$ este: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Mai mult, se poate vedea că dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ (C), altfel spus dacă integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (AC), atunci integrala $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este convergentă.

Propoziţia 12.16 (Criteriul general de comparaţie)
Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$, *cu* $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$ *şi* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ (C), *atunci* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (C).

Demonstraţie: Cum $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty)$, rezultă: $0 \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \leq \int\limits_a^b g(x)\, dx$, $\forall\, b \geq a$. Pe de altă parte, cum integrala $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ (C), rezultă că există şi este finită limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)\, dx$. Aşadar, există şi este finită şi limita $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$. Deci $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (AC) şi, drept urmare, avem: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (C). ◀

Teorema 12.17 (Criteriul în β) *Fie* β *un număr real fixat. Dacă există* $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta |f(x)|$*, atunci:*

j) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ (AC) *, când* $\beta > 1$ *şi* $\ell < +\infty$*;*

jj) $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ (D) *, când* $\beta \leq 1$ *şi* $0 < \ell$ *.*

Observaţie: În cazul în care $f(x) \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \geq x_\varepsilon$, jj) implică: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\ (D)$.

Propoziţia 12.18 (Criteriul integral al lui Cauchy) *Dacă funcţia* $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ *este monoton descrescătoare, atunci integrala improprie* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Demonstraţie: Scriind $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$ şi folosind faptul că, din monotonia lui f , avem $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, $\forall\, x \in [k,k+1]$, $\forall\, k = \overline{1, n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k), \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe baza acestei relaţii, are loc concluzia din enunţ. ◀

Observaţie: Pot fi formulate şi alte criterii de convergenţă pentru integrale de tipul $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, pornind de la criteriile corespunzătoare pentru serii numerice.

Integrale din funcţii nemărginite

Definiţia 12.19 *a) Fie funcţia* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, *cu* $\lim\limits_{x \nearrow b} |f(x)| = +\infty$ *şi* $f \in \mathcal{R}[a, b-\varepsilon]$, $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$.

Dacă există şi este finită limita

$$(\diamond) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

atunci spunem că f *este* ***integrabilă (impropriu) pe*** $[a,b)$ *sau că* ***integrala de la*** a ***la*** b ***din*** f ***este convergentă****. Valoarea limitei se notează cu* $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx\ (C)$.

În caz contrar, dacă limita $(\diamond)$ *nu există sau este infinită, spunem că* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ *este* ***divergentă****.*

b) Dacă $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă local (adică* $f \in \mathcal{R}[a+\varepsilon, b]$, $\forall\, \varepsilon \in (0, b-a)$*) şi* $\lim\limits_{x \searrow a} |f(x)| = +\infty$, *iar* $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *există şi este finită, fiind notată cu* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, *atunci spunem că* f *este* ***integrabilă (impropriu) pe intervalul necompact*** $(a,b]$ *şi scriem:* $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx\ (C)$. *Dacă* $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *nu există sau este infinită, spunem că* f *nu este integrabilă pe* $(a,b]$, *sau că* $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx\ (D)$.

Observaţie: Pentru cazul în care $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ şi $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, iar integralele improprii $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ şi $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente, avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (C) şi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'\searrow 0}\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

Pe baza Definiţiei 12.19, integrala improprie $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă atunci când $\alpha < 1$ şi divergentă când $\alpha \geq 1$.

Şi pentru asemenea tipuri de integrale improprii există criterii de convergenţă şi de absolută convergenţă. Cel mai des utilizat în aplicaţii este aşa-numitul criteriu în α.

Teorema 12.20 (Criteriul de convergenţă în α) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f : [a,b)$ (respectiv $(a,b]$) $\to \mathbb{R}$ o funcţie $\mathcal{R}$-integrabilă pe orice interval compact inclus în $[a,b)$ (respectiv $(a,b]$). În plus, $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$ (respectiv $(a,b]$).*

Dacă există limita $L = \lim\limits_{x\nearrow b}[(b-x)^\alpha f(x)]$ (respectiv $L = \lim\limits_{x\searrow a}[(x-a)^\alpha f(x)]$), atunci:

i) integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ este convergentă când $\alpha < 1$ şi $L < +\infty$;

ii) avem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (D) când $\alpha \geq 1$ şi $L > 0$.

Demonstraţie: Se utilizează interpretarea existenţei limitei L în limbajul $\varepsilon - \delta$ şi convergenţa/divergenţa integralei $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (respectiv $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$), la fel ca în Teorema 12.17. ◀

Teorema 12.21 (Criteriul de convergenţă de tip Cauchy)

a) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, b_\varepsilon \in (a,b), \text{ aşa încât, } \forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b), \text{ cu } b' < b'', \text{ avem } \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

b) Integrala proprie $\int\limits_{a+0}^b f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, a_\varepsilon \in (a,b), \text{ aşa încât, } \forall\, a', a'' \in (a, a_\varepsilon), \text{ cu } a' < a'', \text{ avem } \left|\int\limits_{a'}^{a''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Acest criteriu rezultă prin interpretarea, în sens Cauchy, a existenţei limitei finite, în fiecare caz în parte. Pe baza sa, se pot deduce şi alte criterii de convergenţă pentru asemenea integrale improprii, de interes particular strict.

Integrale cu parametri

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă, $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, precum şi $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall\, \mathrm{y} \in A$, arbitrar fixat, funcţia $f(\cdot, \mathrm{y})$ este Riemann integrabilă pe $[a, b]$. Atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(\mathrm{y}) = \int_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx, \forall\, \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in A$$

se numeşte ***integrală Riemann***, pe $[a, b]$, ***cu parametri*** $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Mai general, dacă, în plus, se iau în consideraţie şi funcţiile $p : A \to [a, b]$, $q : A \to [a, b]$, atunci este bine definită şi funcţia $G : A \to \mathbb{R}$, dată de:

$$G(y) = \int_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} f(x, \mathrm{y})\, dx, \mathrm{y} \in A.$$

Aceasta se numeşte ***integrală Riemann cu parametri şi cu limitele de integrare dependente de parametri***.

În legătură cu astfel de integrale, interesează îndeosebi condiţiile în care proprietăţi ale integrandului f, relative la parametrul vectorial (când $k > 1$) sau scalar (când $k = 1$) y, din A, se transmit funcţiilor F şi G.

Încercând să vedem, mai întâi, dacă transferul de existenţă a limitei $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$, $\forall\, x \in [a, b]$, într-un punct de acumulare al mulţimii A ($\mathrm{y}_0 \in A'$), se produce sau nu, ne punem, firesc, întrebarea dacă există $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} F(\mathrm{y})$ şi dacă $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} F(\mathrm{y}) = \lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} \int_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$. Răspunsul, negativ în general, este afirmativ doar dacă $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$ există uniform în raport cu x. Astfel, cel puţin în cazul în care $A = \mathbb{N}$, $y = n$ şi $f(x, \mathrm{y}) = f(x, n) = f_n(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$, vedem că $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ nu este egală cu $\int_a^b \left[\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right] dx$, decât dacă $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u/[a,b]} g$.

Definiţia 12.22 *Pentru* $\mathrm{y}_0 \in A'$*, spunem că* ***funcţia*** $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ ***are limita*** $g : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* ***când*** $\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0$*, adică* $g(x) = \lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y})$*,* ***uniform în raport cu*** $x \in [a, b]$*, dacă,* $\forall\, \varepsilon > 0$*,* $\exists\, V_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathrm{y}_0)$*, vecinătate a lui* y_0*, independentă de* x*, astfel încât,* $\forall\, x \in [a, b]$ *şi* $\forall\, \mathrm{y} \in V_\varepsilon \setminus \{\mathrm{y}_0\}$ *să avem:* $|f(x, \mathrm{y}) - g(x)| < \varepsilon$*.*

Folosind acum noţiunea de limită uniformă introdusă prin Definiţia 12.22, precum şi caracterizarea de tip Cauchy a existenţei unei limite într-un punct, putem vedea că rezultatul enunţat de propoziţia care urmează este adevărat, pe baza Teoremei 12.6.

Propoziţia 12.23 *Dacă* $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* $[a, b]$ *(în raport cu* $\forall\, \mathrm{y} \in A$*) şi, pentru un* $\mathrm{y}_0 \in A$*, avem* $\lim\limits_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} f(x, \mathrm{y}) = g(x)$*, uniform în raport cu* $x \in [a, b]$*, atunci* g *este integrabilă pe* $[a, b]$ *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{\mathrm{y} \to \mathrm{y}_0} \int_a^b f(x, \mathrm{y})\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

În ceea priveşte transferul de continuitate, în cazul cel mai general, adică cel al funcţiei G, are loc următorul rezultat.

Propoziţia 12.24 *Dacă* A *este o mulţime compactă din* $\mathbb{R}^k$*,* $f \in \mathcal{C}([a, b] \times A; \mathbb{R})$ *, iar* $p, q \in \mathcal{C}(A; [a, b])$*, atunci* $G \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$*. În particular, când* p, q *sunt constante, ca de pildă când* $p \equiv a$ *şi* $q \equiv b$*, obţinem:* $F \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$*.*

În aplicaţii, cea mai utilă proprietate de transfer este cea relativă la derivabilitatea funcţiilor F şi G, realizabilă, în condiţiile din Propoziţia 12.25, prin ***formula lui Leibniz de derivare***.

Propoziţia 12.25 *Dacă A este un paralelipiped compact în $\mathbb{R}^k$, $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b] \times A$, care admite $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ continuă pe $[a,b] \times A$, iar p şi q sunt două funcţii de la A la $[a,b]$, derivabile în raport cu y_i $(i \in \{1,2,\ldots,k\})$ pe A, atunci G (şi implicit F, în situaţia în care p şi q sunt constante) este derivabilă în raport cu y_i pe A şi are loc* ***formula (lui Leibniz):***

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathrm{y}) = f\left(q(\mathrm{y}),\mathrm{y}\right)\frac{\partial q}{\partial y_i}(\mathrm{y}) - f\left(p(\mathrm{y}),\mathrm{y}\right)\frac{\partial p}{\partial y_i}(\mathrm{y}) + \int\limits_{p(\mathrm{y})}^{q(\mathrm{y})} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,\mathrm{y})\,dx,\ \forall\, \mathrm{y} \in A.$$

Cât priveşte $\mathcal{R}$-integrabilitatea integralelor cu parametri, menţionăm următorul rezultat.

Propoziţia 12.26 *Dacă $A = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ (cu $c,d \in \mathbb{R}$, $c < d$) şi $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d]; \mathbb{R})$, atunci funcţia $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, dată prin $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, $\forall\, y \in [c,d]$ este integrabilă Riemann pe $[c,d]$ şi are loc relaţia:*

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy \left(= \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \right) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Când, în expresia lui F sau a lui G, fie domeniul de integrare, fie integrandul $f(\cdot,\cdot)$, în raport cu x, nu mai este mărginit, avem de-a face cu integrale improprii (pe interval necompact) şi cu parametri. Şi în cazul unor asemenea integrale interesează transferul proprietăţilor integrandului asupra integralei din context.

Definiţia 12.27 *Fie integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x,\mathrm{y})\,dx$, unde funcţia f este nemărginită, în raport cu x, în b.*

j) ***Integrala improprie*** *$\int\limits_a^b f(x,\mathrm{y})\,dx$, $\mathrm{y} \in A$, se numeşte* ***convergentă punctual*** *pe A dacă există $F : A \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x,\mathrm{y})\,dx = F(\mathrm{y})$, $\mathrm{y} \in A$.*

jj) Spunem că integrala $\int\limits_a^b f(x,\mathrm{y})\,dx$ este ***convergentă uniform pe*** *A, dacă $\lim\limits_{b' \nearrow b} \int\limits_a^{b'} f(x,\mathrm{y})\,dx = F(\mathrm{y})$ există uniform în raport cu $\mathrm{y} \in A$.*

Utilizând acum, simultan, conceptele introduse de Definiţiile 12.22 şi 12.27, se pot formula, în anumite condiţii, rezultate de transfer de proprietate şi pentru astfel de integrale (improprii şi cu parametri).

Propoziţia 12.28 (transferul de derivabilitate de la integrand la integrala improprie cu parametri) *Fie $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $[c,d] = A \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ şi integrala improprie cu parametru $\int\limits_a^{b-0} f(x,y)\,dx$, unde $y \in A$. De asemenea, fie satisfăcute următoarele ipoteze:*

1) Integrala improprie $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ converge punctual la o funcţie $F(y)$, pentru $y \in A$;

2) Funcţia f admite derivată parţială în raport cu y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, pe A;

3) Funcţiile f şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $[a,b) \times [c,d]$;

4) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ *converge uniform în raport cu* $y \in A$.

Atunci funcţia $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *este derivabilă în orice punct* $y \in [c,d]$ *şi* $F'(y) = \int\limits_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx, \forall\, y \in A$.

Exemple remarcabile de integrale improprii cu parametri

În continuare, vom prezenta două exemple de integrale improprii cu parametrii: *Funcţia Gamma* şi *Funcţia Beta* (*integralele (funcţiile) lui Euler*).

Funcţia Γ (Funcţia Gamma)

Funcţia Γ este definită prin:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx,\ p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ea este bine definită (deci convergentă ca integrală improprie), pentru orice $p \in \mathbb{R}_+^*$, după cum rezultă imediat prin aplicarea criteriilor de convergenţă în β şi în α (v. Teoremele 12.17 şi 12.20).

Câteva proprietăţi imediate ale funcţiei Γ sunt prezentate în cadrul următoarelor relaţii:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall\, p > 0;$
2. $\Gamma(1) = 1;$
3. $\Gamma(n+1) = n!, \forall\, n \in \mathbb{N};$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$
5. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \forall\, p \in (0,1);$
6. $\Gamma(p) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0;$
7. $(\Gamma(p))^{-1} = pe^{\gamma p} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-p/n}, \forall\, p > 0$ (Weierstrass), unde $\gamma = 0,5772...$ este constanta lui Euler.

Funcţia B (Funcţia Beta)

Funcţia B este definită prin:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, p > 0, q > 0.$$

Integrala improprie cu parametru, $B(p,q)$, este convergentă pentru orice $p > 0, q > 0$. Mai mult, satisface relaţiile:

1. $B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt, \forall\, p,q > 0;$
2. $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\,d\theta, \forall\, p,q > 0;$

3. $B(p,q) = B(q,p), \forall\, p,q > 0;$

4. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall\, p,q > 0;$

5. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p+q}B(p,q) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q), \forall\, p,q > 0;$

6. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1), \forall\, p,q > 0;$

7. $B(p,n+1) = \dfrac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}, \forall\, p > 0, n \in \mathbb{N}.$

Bibliografie recomandată

1. Narcisa Apreutesei Dimitriu, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilităţii*, Editura ”Performantica”, Iaşi, 2005.

2. Marina Gorunescu, Florin Gorunescu, Augustin Prodan - *Matematici superioare. Biostatistică şi Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

3. Gh. Mocică - *Probleme de funcţii speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

4. Horiana Tudor - *Analiză matematică,* Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.

5. M. Postolache, Ariana Pitea, Dragoş Cioroboiu - *Calcul integral,* Editura ”Fair Partners”, Bucureşti, 2010.

6. Sever Angel Popescu - *Mathematical Analysis II. Integral Calculus,* Conspress, Bucharest, 2011.

7. Lee Larson - *Introduction to Real Analysis,* Univ of Louisville Publ., 2014.

8. Ph. B. Iaval - *Improper Integrals*, Kennesaw State University, 2015.

9. Marina Delgado, Téllez de Cepeda - *Calculus II, Unit 3: Integrals Depending on a Parameter*, Universidad Carlos III de Madrid, 2016.