Cursul 2

Şiruri numerice şi de funcţii. Inegalităţi remarcabile în $\mathbb{R}$

Mulţimea numerelor reale

În cele ce urmează, vom indica, sub formă de axiome, proprietăţile fundamentale ale unui sistem de numere reale, adică ale unui corp total ordonat complet.

Definiţia 2.1 *Se numeşte* ***sistem de numere reale*** *o mulţime $\mathbb{R}$ înzestrată cu două operaţii algebrice: "+" (adunarea) şi "·" (înmulţirea), precum şi cu o relaţie de ordine, notată cu "$\leq$", în raport cu care sunt îndeplinite următoarele trei grupe de axiome:*

I. $\mathbb{R}$ *este un corp, adică au loc:*

(I.1) $x+(y+z)=(x+y)+z$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$;

(I.2) există un element $0\in\mathbb{R}$, *astfel încât* $x+0=0+x=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$;

(I.3) $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\exists\,(-x)\in\mathbb{R}$ *aşa încât* $x+(-x)=(-x)+x=0$;

(I.4) $x+y=y+x$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$;

(I.5) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$;

(I.6) $\exists\, 1\in R$, *astfel încât* $x\cdot 1=1\cdot x=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$;

(I.7) $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\exists\, x^{-1}\in\mathbb{R}$ *aşa încât* $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$;

(I.8) $x\cdot y=y\cdot x$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$;

(I.9) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$;

II. $\mathbb{R}$ *este un corp ordonat, adică:*

(II.1) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ *avem* $x\leq y$ *sau* $y\leq x$;

(II.2) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, *dacă* $x\leq y$ *şi* $y\leq x$, *atunci* $x=y$;

(II.3) $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$ *cu* $x\leq y$ *şi* $y\leq z\Longrightarrow x\leq z$;

(II.4) $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ *cu* $x\leq y\Longrightarrow x+z\leq y+z$, $\forall\, z\in\mathbb{R}$;

(II.5) $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$ *cu* $x\leq y$ *şi* $0\leq z\Longrightarrow x\cdot z\leq y\cdot z$;

*III. (**Axioma de completitudine Cantor-Dedekind**) Orice submulţime nevidă A a lui $\mathbb{R}$ care este majorată admite cel puţin o margine superioară în $\mathbb{R}$. Aşadar, există* $\sup \mathrm{A}\in\mathbb{R}$.

Observaţie: 1. Ţinând cont de axiomele lui $\mathbb{R}$ se observă cu uşurinţă că, întrucât $1\in\mathbb{R}$, atunci şi elementele $2=1+1, 3=(1+1)+1, ...$ aparţin mulţimii numerelor reale. Aceste elemente $1,2,3,...$ le vom numi numere naturale, iar mulţimea lor o vom nota cu $\mathbb{N}$. De asemenea, odata cu orice element $n\in\mathbb{N}$, avem că $-n\in\mathbb{R}$. Totalitatea elementelor $0,1,-1,2,-2,...$ se notează cu $\mathbb{Z}$, şi numeşte mulţimea numerelor întregi. Mai mult, dacă $x,y\in\mathbb{Z}$ iar $y\neq 0$, atunci $x\cdot y^{-1}\in\mathbb{R}$. Mulţimea numerelor reale care satisfac această proprietate se numeşte mulţimea numerelor raţionale şi se notează cu $\mathbb{Q}$. Aşadar, între submulţimile remarcabile ale lui $\mathbb{R}$, avem următoarele relaţii

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

2. Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ satisface grupul de axiome I şi II, dar nu satisface axioma de completitudine. Spre exemplu mulţimea $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid 0<x^2<2\}$ este majorată în $\mathbb{Q}$ dar $\sup(A)\notin\mathbb{R}$. Aşadar, există submulţimi ale lui $\mathbb{Q}$ care, majorate fiind, nu au marginea superioară în $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2 *Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$. Un element $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A, dacă şi numai dacă:*

(i) $x \leq \alpha,\ \forall\ x \in A$ *şi*

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Demonstraţie: Fie $\alpha = \sup(\mathrm{A})$. Conform definiţiei 2.1, α este cel mai mic majorant al mulţimii A. Observăm că punctul (i) exprimă că α este un majorant al mulţimii A, iar (ii) că α este cel mai mic majorant, întrucât orice număr mai mic ca α se scrie sub forma $\alpha - \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$. Cum $\alpha - \varepsilon$ nu este un majorant pentru A, înseamnă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Teorema 2.3 *Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$. Un element $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A, dacă şi numai dacă:*

(i) $\beta \leq x,\ \forall\ x \in A$ *şi*

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

Exemple: 1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, atunci

$$\sup[\mathrm{a,b}] = \sup[\mathrm{a,b}) = \sup(\mathrm{a,b}] = \sup(\mathrm{a,b}) = \mathrm{b}$$
$$\inf[\mathrm{a,b}] = \inf[\mathrm{a,b}) = \inf(\mathrm{a,b}] = \inf(\mathrm{a,b}) = \mathrm{a}$$

2. Dacă o mulţime A are un cel mai mare (cel mai mic) element, atunci $\max\mathrm{A} = \sup\mathrm{A}$ (respectiv, $\min\mathrm{A} = \inf\mathrm{A}$).

Propoziţia 2.4 *Dacă A şi B sunt submulţimi nevide ale lui $\mathbb{R}$, astfel încât $A \subset B$ iar mulţimea B este majorată, atunci* $\sup\mathrm{A} \leq \sup\mathrm{B}$.

Definiţia 2.5 *Pentru orice număr real x, definim* ***modulul*** *sau* ***valoarea absolută*** *a lui x (notat $|x|$), prin*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Propoziţia 2.6 *1.* $|x| \geq 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *şi* $|x| = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$;

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$;

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$.

Deoarece între mulţimea $\mathbb{R}$ şi mulţimea punctelor de pe o dreaptă (pe care s-a stabilit un punct numit origine, un sens, o orientare şi o unitate de măsură) se poate pune în evidenţă o corespondenţă biunivocă (bijecţie), se ajunge de cele mai multe ori la identificarea numerelor reale cu punctele dreptei respective, numită ***dreapta reală***.

Cum, pentru o mulţime $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, nemajorată, nu mai avem asigurat faptul că $\sup A$ (în sensul ordinei totale pe $\mathbb{R}$) aparţine lui $\mathbb{R}$, iar pentru o mulţime nevidă şi neminorată $B \subset \mathbb{R}$ nu putem spune că $\inf B \in \mathbb{R}$, se iau în consideraţie două simboluri (elemente), numite ***plus infinit*** şi ***minus infinit***, notate cu $+\infty$ şi respectiv $-\infty$. Vom nota prin $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi vom numi această mulţime ***dreapta reală extinsă*** .

Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, convenind ca

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

Prin extensia menţionată, mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ este total ordonată, iar elementele $+\infty$ şi $-\infty$ – numite (acum) ***numere reale infinite*** (punctele de la infinit ale dreptei reale) sunt ***cel mai mare*** şi respectiv ***cel mai mic*** dintre elementele sale. Într-un asemenea context, elementele mulţimii $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ se numesc ***numere reale finite***.

Se consideră lipsite de sens, fiind nedeterminate, operaţiile următoare: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ (pe scurt $(\infty) - (\infty)$); $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$,$(-\infty) \cdot 0$ (pe scurt $0 \cdot \infty$) şi $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ (pe scurt $\dfrac{\infty}{\infty}$). Elucidarea sensului acestor operaţii are loc, de regulă, pe seama expresiilor din care provin.

Şiruri de elemente din $\mathbb{R}$

Definiţia 2.7 *Se numeşte* ***şir de elemente din*** $\mathbb{R}$*, sau* ***şir numeric****, orice funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Se notează cu* x_n*, valoarea funcţiei* f *în punctul* $n \in \mathbb{N}$ *şi se numeşte* ***termenul general al şirului****. Altfel scris,* $x_n = f(n)$*.*

Mulţimea termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ se noteză, uzual, cu $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **şir constant** dacă mulţimea valorilor sale este formată dintr-un singur element, adică $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

Definiţia 2.8 *i. Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte* ***majorat*** *(respectiv* ***minorat****) dacă mulţimea* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este majorată (respectiv minorată).*

ii. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte* ***mărginit*** *dacă este simultan majorat şi minorat, adică dacă există* α *şi* β *din* $\mathbb{R}$*, astfel încât* $\alpha \leq x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$*. Dacă nu este mărginit, atunci şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte* ***nemărginit****.*

Cum orice interval $[\alpha, \beta]$ este conţinut într-un interval centrat în 0, de forma $[-a, a]$, cu $a > 0$, se observă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă există $a > 0$ astfel încât $|x_n| \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$, sau, echivalent, $x_n \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

1. Şirul $x_n = (-1)^n$ este mărginit deoarece $|x_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Şirul $x_n = 3^n$ nu este majorat deşi este minorat ($x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
3. Şirul $x_n = -n$ nu este minorat deşi este majorat ($x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$).

Definiţia 2.9 *Şirul numeric* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte* ***monoton*** *dacă diferenţa* $x_{n+1} - x_n$ *păstrează semn constant pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* ***crescător*** *(****strict crescător****) dacă* $x_{n+1} - x_n \geq 0$ *(respectiv* $x_{n+1} - x_n > 0$*) pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Şirul numeric* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte* ***descrescător (strict descrescător)*** *dacă* $x_{n+1} - x_n \leq 0$ *(respectiv* $x_{n+1} - x_n < 0$*), pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Un şir numeric se numeşte* ***monoton*** *dacă este sau monoton crescător, sau monoton descrescător.*

Exemple:

1. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ este strict crescător.
2. Şirul $x_n = -n, n \in \mathbb{N}$ este şir strict descrescător.
3. Şirul $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ nu este monoton.
4. Şirul $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, unde c este o constantă reală, este simultan crescător şi descrescător.

Definiţia 2.10 *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *un şir strict crescător de numere naturale. Şirul* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte* ***subşir*** *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Definiţia 2.11 *i) Spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *are* **limita** $x \in \mathbb{R}$*, şi notăm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *sau* $x_n \to x$*, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există un număr natural* n_ε*, care depinde de* ε*, astfel încât* $|x_n - x| < \varepsilon$*, pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$*.*

ii) Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *are limita* $+\infty$*, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon$*, avem* $x_n > \varepsilon$*. Spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *are limita* $-\infty$*, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon$*, avem* $x_n < -\varepsilon$*.*

Definiţia 2.12 *i) Spunem că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este* ***convergent*** *dacă are limită şi aceasta este finită.*

ii) Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *este* ***divergent*** *dacă nu este convergent, adică dacă fie nu are limită, fie are limita* $+\infty$ *sau* $-\infty$*.*

Teorema 2.13 *Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.*

Demonstraţie: Presupunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge la două elemente, x şi y din $\mathbb{R}$. Conform definiţiei 2.11, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ şi $|x_n - y| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon$.

Aşadar, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, există $n''_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n''_\varepsilon$, avem

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $|x - y| = 0$, adică $x = y$. Altfel, dacă $|x - y| > 0$, pentru $\varepsilon = |x - y| \cdot \lambda$, cu $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, am avea

$$|x - y| < 2\lambda \cdot |x - y|,$$

de unde $1 < 2\lambda < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, absurd. Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

Teorema 2.14 *Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.*

Demonstraţie: Fie $x_n \to x$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang n_ε astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Dacă (x_{n_k}) este un subşir al şirului (x_n), atunci ţinând seama că pentru orice $k \geq n_\varepsilon$ avem $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$ rezultă că $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$ pentru orice $k \geq n_\varepsilon$. Aşadar avem $x_{n_k} \to x$.

Observaţie: Dacă un şir conţine două subşiruri convergente cu limite diferite, atunci şirul este divergent. Spre exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, conţine subşirul $x_{2k} = 1$ cu limita 1 şi subşirul $x_{2k+1} = -1$ cu limita -1. Aşadar, acesta este divergent.

Teorema 2.15 *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie: Fie $x_n \to x$. Atunci, pentru $\varepsilon = 1$, există un rang n_1 astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1$ să avem $|x_n - x| < 1$. Aşadar, putem scrie $|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1$. Dacă fixăm $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, 1 + |x|\}$, atunci avem $|x_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Următoarea propoziţie prezintă câteva proprietăţi algebrice ale şirurilor convergente în $\mathbb{R}$.

Propoziţia 2.16 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri convergente de numere reale astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci au loc afirmaţiile:*

(P1) Şirul $|x_n|$ este convergent în $\mathbb{R}$ cu $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$;

(P2) Şirul $(x_n \pm y_n)$ este convergent în $\mathbb{R}$ cu $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$;

(P3) Şirul $(x_n \cdot y_n)$ este convergent în $\mathbb{R}$ cu $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$;

(P4) Dacă $y_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$ şi $y \neq 0$, şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent în $\mathbb{R}$ cu $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$;

(P5) Dacă $x_n \leq y_n, n \in \mathbb{N}$, atunci $x \leq y$;

(P6) (Teorema "cleştelui") Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$ şi avem $x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul (z_n) este convergent în $\mathbb{R}$ şi $\lim_{n\to\infty} z_n = x$;

(P7) (Criteriul majorării) Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi fie $z \in \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere pozitive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero, astfel încât $|z_n - z| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci z_n este convergent şi $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Lema 2.17 (Césaro) *Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent.*

Demonstraţia acestei leme se găseşte în [2].

Definiţia 2.18 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se numeşte **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε astfel încât, pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, să rezulte $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Definiţia 2.18 se poate scrie sub următoarea formă echivalentă:

Definiţia 2.19 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ se numeşte **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$, să avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.*

Propoziţia 2.20 (Proprietăţi ale şirurilor Cauchy) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir Cauchy. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

i) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit;*

ii) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conţine un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent în $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demonstraţie: i) Cum x_n este şir fundamental în $\mathbb{R}$, rezultă că, pentru $\varepsilon = 1$, va exista un număr natural $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, cu $m, n \geq n_1$, avem $|x_n - x_m| < 1$. Luând $m = n_1$, rezultă $|x_n - x_{n_1}| < 1, \forall n \geq n_1, n \in \mathbb{N}$. Mai mult, rezultă că $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| \leq 1 + |x_{n_1}|, \forall n \in \mathbb{N}$. Aşadar, dacă alegem $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}|\}$, obţinem $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde rezultă concluzia.

ii) Cum x_n este şir fundamental, rezultă că

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_n - x_m| < \varepsilon,\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, cum subşirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la un element $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_{n_k} - x| < \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_\varepsilon.$$

Aşadar, luând $n'_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, avem

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n'_\varepsilon$, iar $k \geq n'_\varepsilon$.

Teorema 2.21 (Cauchy) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Şirul x_n este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$": Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, vom avea

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Dar, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

aşadar, şirul este fundamental.

"$\Leftarrow$": Să presupunem că (x_n) este un şir fundamental. Arătăm că există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \to x$. Conform Propoziţiei 2.20, rezultă că (x_n) este şir mărginit. Utilizând acum Lema lui Césaro, rezultă că şirul mărginit (x_n) conţine un subşir convergent. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita sa. Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Cum $x_{n_k} \to x$, rezultă că

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists k' \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k'.$$

Pe de altă parte, cum (x_n) este şir fundamental, avem

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_{n_k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon (\text{deoarece } n_k < n, \forall k \in \mathbb{N}).$$

Aşadar, pentru $\varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $n' = \max\{n_\varepsilon, k'\}$, astfel încât, pentru orice $n \geq n'_\varepsilon$, rezultă

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Prin urmare, şirul (x_n) este convergent, şi are limita x.

Exemple: 1. Arătaţi că şirul
$$x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + ... + \frac{\sin nx}{2^n}$$
este un şir Cauchy, deci convergent.

2. Arătaţi că şirul
$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
nu este Cauchy.

Teorema 2.22 (Teorema Weierstrass sau teorema de convergenţă a şirurilor monotone)
i) Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este crescător şi majorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
ii) Orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ care este descrescător şi minorat are limită în $\mathbb{R}$, aceasta fiind marginea inferioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstraţie: i) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ crescător şi majorat. Presupunem prin reducere la absurd că x_n nu este şir Cauchy. Aşadar, ar exista $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}, \exists k, m \in \mathbb{N}$ cu $k, m \geq n$, astfel încât $|x_k - x_n| \geq \varepsilon$. Cum şirul x_n este crescător, ar reieşi că, pentru $m = n$ şi $k \geq n$, am avea $x_k - x_n \geq \varepsilon$. Astfel, pentru $n = 1$, există $n_1 > 1$ astfel încât $x_{n_1} \geq x_1 + \varepsilon$. La fel, pentru $n = n_1$, ar exista $n_2 \geq n_1$ aşa încât $x_{n_2} \geq x_{n_1} + \varepsilon \geq x_1 + 2\varepsilon$. Prin recurenţă, putem construi în acest fel, un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} \geq x_1 + k\varepsilon$, ceea ce ar contrazice faptul că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este mărginit. Aşadar, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy, deci convergent. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Cum $x_n \leq x_m, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$, fixând n şi trecând la limită după m, obţinem $x_n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$. Astfel, x este majorant al mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă x n-ar fi marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, atunci ar exista un alt majorant al acesteia, y, care să fie mai mic decât x. Aşadar, avem $x_n \leq y < x, \forall n \in \mathbb{N}$. De aici rezultă că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq y < x$, ceea ce ar fi absurd. Prin urmare, x este chiar marginea superioară a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Punctul ii) se demonstrează uşor, considerând şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi utilizând punctul i). Aşadar, şirul $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind crescător şi majorat, va fi convergent la marginea superioară a mulţimii $\{-x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi convergent la $-\sup\limits_{n\to\infty}(-x_n) = \inf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Teorema 2.23 *i) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

ii) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

În ambele cazuri, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Demonstraţie: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir crescător şi nemărginit de numere reale. Atunci mulţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este doar minorată (de x_1), dar nu şi majorată. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_\varepsilon$, am avea $x_n \geq x_{n_\varepsilon} < \varepsilon$, şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ Punctul ii) se demonstrează aplicând punctul i) asupra şirului $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Puncte limită. Limite extreme ale unui şir de numere reale

Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, putem vorbi despre mulţimea notată cu $L(x_n)$ şi denumită ***mulţimea punctelor limită*** corespunzătoare şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În conformitate cu Teorema 2.23, avem $L(x_n) \neq \varnothing, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definiţia 2.24 *Se numeşte **punct limită al unui şir** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, un element din $\overline{\mathbb{R}}$ care este limita unui subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definiţia 2.25 *a) Se numeşte **limită inferioară a şirului** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (şi se notează cu $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau cu $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$) marginea inferioară a mulţimii $L(x_n)$.*

*b) Se numeşte **limită superioară a şirului** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (şi se notează cu $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$) marginea superioară a mulţimii $L(x_n)$.*

Observaţii:

1) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, avem: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

2) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este un şir convergent la un element $x \in \mathbb{R}$, atunci $L(x_n) = \{x\}$ şi, în acest caz, avem:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = x.$$

Se poate arăta că, şi reciproc, dacă, pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, are loc relaţia $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, aceasta fiind valoarea comună a ***limitelor sale extreme*** $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

De asemenea, se mai poate arăta că, pentru orice şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, există un subşir monoton descrescător al acestuia, care să conveargă la $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ şi, totodată, un subşir monoton crescător care să conveargă la $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Şiruri de funcţii reale

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi fie $f_1, f_2, ...$ funcţii reale definite pe mulţimea A. Şirul $f_1, f_2, ...$ se numeşte ***şir de funcţii*** şi se notează $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă x_0 este un punct din A, atunci valorile funcţiilor f_n în punctul x_0, adică $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, formează un şir numeric.

Vom spune că $x_0 \in A$ este un ***punct de convergenţă*** al şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă şirul numeric $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ al valorilor funcţiilor în a este convergent. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se va numi ***mulţime de convergenţă*** a şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 2.26 *Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ şi fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea A.*

*i) Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplu** sau **converge punctual** pe A la funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ dacă şirul numeric $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la $f(x)$ pentru fiecare $x \in A$. Vom nota aceasta prin $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in A$ sau $f_n \overset{p/A}{\to} f$ punctual (pe A).*

*ii) Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplu** sau **converge punctual** pe A la funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ dacă pentru orice $x \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Exemplu: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$.

Cum

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 1, \text{ pentru } x \in (0,1],$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \text{ pentru } x = 0,$$

obţinem că mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este $[0,1]$, iar funcţia sa limită este

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Definiţia 2.27 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi fie $f_n : A \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii. Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniform** pe mulţimea A la funcţia f, şi notăm $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \to \infty$ (sau $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u/A}{\longrightarrow}} f$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A$.*

Observaţie: Dacă un şir de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la f pe mulţimea A, atunci, el converge şi punctual la f pe A. Implicaţia inversă nu este adevărată.

Spre exemplu, şirul de funcţii reale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_n = x^n(1-x^n)$, $x \in [0,1]$ converge punctual atunci când $n \to \infty$ la funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$, însă nu converge uniform la f.

Teorema 2.28 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe mulţimea A şi fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$. Şirul (f_n) converge uniform pe A la funcţia f pentru $n \to \infty$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|\right] = 0.$$

Definiţia 2.29 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi fie $f_n : A \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Şirul de funcţii (f_n) se numeşte **uniform fundamental** (sau **uniform Cauchy**) pe A, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m, n \geq n_\varepsilon$ are loc relaţia:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } , \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m, n \geq n_\varepsilon \text{ are loc: } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$

sau, echivalent, dacă

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } , \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ are loc: } |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Următorul rezultat constituie o adaptare a criteriului de convergenţă Cauchy pentru şiruri numerice (Teorema 2.21).

Teorema 2.30 (Criteriul lui Cauchy) *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi fie $f_n : A \to \mathbb{R}$. Atunci şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe A dacă şi numai dacă acesta este uniform Cauchy pe A.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" : Să presupunem că $f_n \overset{u}{\to} f$ pe A. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$(\bullet) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in A.$$

Dacă acum considerăm $m, n \geq n_\varepsilon$, atunci conform $(\bullet)$

$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $x \in A$. Aşadar obţinem concluzia.

"$\Leftarrow$": Presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$ avem

$$(\bullet\bullet)|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A.$$

Atunci, pentru orice $x \in A$ fixat, şirul numeric $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir fundamental. Atunci, conform teoremei lui Cauchy 2.21, rezultă că există limita şirului (f_n). Astfel obţinem o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, adică f este limita şirului (f_n), în sensul convergenţei punctuale.

Fixând în $(\bullet\bullet)$ $n \geq n_\varepsilon$ şi făcând $m \to \infty$, rezultă că pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall x \in A.$$

Aşadar şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la f pe mulţimea A.

Propoziţia 2.31 (Criteriul majorării pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale) *Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ şi fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere reale pozitive α_n, convergent la 0, astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ şi orice } x \in A,$$

atunci $f_n \overset{u/A}{\longrightarrow} f$.

Observaţie: Uniforma convergenţă păstrează la limită o serie de proprietăţi ale funcţiilor şirului cum ar fi: mărginirea, continuitatea, diferenţiabilitatea, integrabilitatea, etc.

Inegalităţi cu elemente din $\mathbb{R}$

Propoziţia 2.32 (*Inegalitatea lui Hölder, cu ponderi*) *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *şi fie* $p, q \in \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, *astfel încât* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Atunci, avem:*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Atunci când $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, inegalitatea (1) se numeşte *inegalitatea lui Hölder fară ponderi.*
Dacă $p = q = 2$ şi $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, atunci inegalitatea (1) devine:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Această inegalitate este cunoscută sub denumirea de **inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz**.

În relaţia (2) egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $u, v \in \mathbb{R}$, cu $u^2 + v^2 \neq 0$, astfel încât $ua_i + vb_i = 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Propoziţia 2.33 (*Inegalitatea lui Minkowski, cu ponderi*) *Pentru* $a \in \mathbb{R}, p \geq 1, n \in \mathbb{N}$ *şi* $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$, $a_0, a_1, ..., a_n$, $b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, *are loc*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Dacă $0 < p < 1$, *inegalitatea (3) are loc cu semnul schimbat, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă n-uplele* $(a_0, a_1, ..., a_n)$ *şi* $(b_0, b_1, ..., b_n)$ *sunt proporţionale.*

Propoziţia 2.34 (*Inegalitatea lui Carleman*) *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ *are loc inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_i)^{\frac{1}{i}} \leq e \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{4}$$

Egalitatea are loc doar când $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Bibliografie orientativă

[1] F. Iacob, *Curs Matematică pentru anul I* (`https://profs.info.uaic.ro/~fliacob/An1/2016-2017`)

[2] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1993.

[3] G. Păltineanu, *Analiză matematică*, Editura Universitaria, Craiova, 2002,

[4] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[5] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2011.

[6] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2015.

[7] C.G. Denlinger, *Elements of Real Analysis*, International Series in Mathematics, Jones and Bartlett Publishers International, London, 2012.

[8] M. O. Drâmbe, *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Editura GIL, Zalău, 2003.