Algoritmica grafurilor - Cursul 5

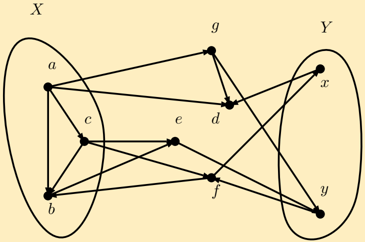
Noiembrie 2018

Definiţia 1

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $X, Y \subseteq V$. Un **XY-drum** *este orice drum P din G de la un nod $x \in X$ la un nod $y \in Y$ astfel încât $V(P) \cap X = \{x\}$ şi $V(P) \cap Y = \{y\}$.*

Notăm cu $\mathcal{P}(X, Y; G)$ familia tuturor XY-drumurilor din G. Observăm că dacă $x \in X \cap Y$ atunci $P = \{x\}$, de lungime 0, este un XY-drum.

Exemplu



XY-paths: (b, e, y), (c, f, x), and (a, g, y); an YX-path: (y, f, b)

- Spunem că drumurile P_1 şi P_2 sunt **disjuncte** (pe noduri) dacă $V(P_1) \cap V(P_2) = \varnothing$.
- Motivată de problemele practice din reţelele de comunicaţii şi de asemeni de studiile teoretice asupra conexiunii în (di)grafuri, este de interes determinarea mulţimilor de cardinal maxim de XY-drumuri disjuncte.
- Notăm cu $p(X, Y; G)$ **numărul maxim de XY-drumuri disjuncte în G**.
- Teorema care determină acest număr este datorată lui **Menger (1927)** şi reprezintă unul dintre rezultatele fundamentale din Teoria grafurilor.

Definiţia 2

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $X, Y \subseteq V$. O **mulţime XY-separatoare** *în G este orice submulţime $Z \subseteq V$ astfel încât*

$$V(P) \cap Z \neq \varnothing, \text{ pentru fiecare } P \in \mathcal{P}(X, Y; G).$$

Notăm cu

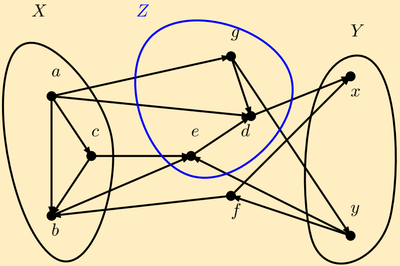
$$\mathbf{S}(X, Y; G) = \{Z \ : \ Z \text{ este mulţime } XY\text{-separatoare din } G\} \text{ şi}$$

$$k(X, Y; G) = \min\{|Z| \ Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)\}$$

Din definiţie urmează că:

- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, atunci $\mathcal{P}(X, Y; G \setminus Z) = \varnothing$.
- $X, Y \in \mathbf{S}(X, Y; G)$. tion

Exemplu



A XY-separating set: $Z = \{g, e, d\}$

- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, atunci $A \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, $\forall A$ astfel încât $Z \subseteq A \subseteq V$.
- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$ şi $T \in \mathbf{S}(Z, Y; G)$, atunci $T \in \mathbf{S}(X, Y; G)$.

Teorema 1

Teorema lui Menger. Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $X, Y \subseteq V$. Atunci $p(X, Y; G) = k(X, Y; G)$.
(I. e., numărul maxim de XY-drumuri disjuncte = cardinalul minim al unei mulţimi XY-separatoare.)

Demonstraţie:
$k(X, Y; G) \geqslant p(X, Y; G) = p$. Fie $P_1, \ldots, P_p$ XY-drumuri disjuncte din G; $Z \cap V(P_i) \neq \varnothing$, $\forall Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$. Deoarece P_i sunt disjuncte $(i = \overline{1, p})$:

$$|Z| \geqslant \left| Z \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} V(P_i) \right) \right| = \sum_{i=1}^{p} |Z \cap V(P_i)| \geqslant \sum_{i=1}^{p} 1 = p.$$

Astfel, $|Z| \geqslant p$, $\forall Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$; urmează că $k(X, Y; G) \geqslant p$.

$k(X, Y; G) \leqslant p(X, Y; G) = p$. Omisă. (Vom arăta mai târziu că $\forall G = (V, E)$ şi $\forall X, Y \subseteq V$, $\exists k(X, Y; G)$ XY-drumuri disjuncte în G folosind fluxuri în anumite reţele.) $\square$

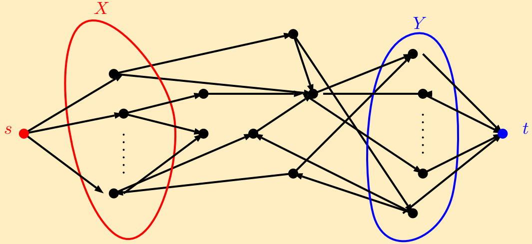
Menger (1927) a enunţat echivalent teorema de mai sus, utilizând drumuri intern-disjuncte: $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{st}$ astfel încât $V(P_1) \cap V(P_2) = \{s, t\}$:

Teorema 2

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $s, t \in V$, astfel încât $s \neq t$, $st \notin E$. Există k drumuri intern-disjuncte de la s la t în G dacă şi numai dacă există cel puţin un drum de la s la t în (di)graful obţinut din G prin ştergerea oricărei mulţime de $< k$ noduri diferite de s şi t.

Demonstraţia echivalenţei:

Teorema 1 ⇒ Teorema 2: luăm $X = N_G^+(s)$ $(N_G(s))$ şi $Y = N_G^-(t)$ $(N_G(t))$.



Teorema 2 ⇒ Teorema 1: adăugăm două noi noduri s şi t (di)grafului G, şi toate muchiile (orientate) de la s la orice nod din X şi de la orice nod din Y la t. $\square$

Aplicaţii: p-conexiune

- Un graf G este p-conex ($p \in \mathbb{N}^*$) dacă fie $G = K_p$, fie $|G| > p$ şi $G \setminus A$ este conex pentru orice $A \subseteq V(G)$ cu $|A| < p$.
- Din Teorema 2, o caracterizare echivalentă a p-conexiunii este: Un graf G este p-conex ($p \in \mathbb{N}^*$) dacă fie $G = K_p$, fie $\forall st \in E(\overline{G})$ există p drumuri intern-disjuncte de la s la t în G.
- Urmează că, pentru a calcula $k(G)$ - **numărul de conexiune pe noduri** al grafului G, trebuie aflat

$$\min_{st \notin E(G)} p(\{s\}, \{t\}; G),$$

care poate fi determinat în timp polinomial folosind fluxuri în reţele.

Aplicaţii: Teorema lui König

- O **acoperire cu noduri a grafului G** este o mulţime $X \subseteq V(G)$ de noduri astfel încât $G - X$ este un graf nul (orice muchie din G are cel puţin o extremitate în X).
- Un caz special al Teoremei 1 se obţine când G este bipartit şi X, Y sunt cele două clase ale bipartiţiei lui G:

Teorema 3

*(**König, 1931**) Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Atunci, cardinalul maxim al unui cuplaj din G este egal cu cardinalul minim al unei acoperiri cu noduri a lui G.*

Demonstraţie: Cardinalul maxim al unui cuplaj în G este $p(S, T; G) = k(S, T; G)$, din Teorema 1. Deoarece o mulţime de noduri este o mulţime ST-separatoare dacă şi numai dacă este o acoperire cu noduri, Teorema 3 este dovedită. □

Aplicaţii: Teorema lui Hall

- Fie I şi S mulţimi finite nevide. O familie submulţimi ale lui S (indexată după I) este o funcţie $A : I \to 2^S$. Notăm $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ şi (folosind notaţia funcţională) $\mathcal{A}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$ (pentru $J \subseteq I$).
- O funcţie de reprezentare pentru familia $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ este orice funcţie $r_{\mathcal{A}} : I \to S$ cu proprietatea $r_{\mathcal{A}}(i) \in A_i$, $\forall i \in I$; atunci, $(r_{\mathcal{A}}(i))_{i \in I}$ este numit un sistem de reprezentanţi pentru $\mathcal{A}$.
- Dacă funcţia de reprezentare, $r_{\mathcal{A}}$, este injectivă, atunci $r_{\mathcal{A}}(I)$ este o submulţime a lui S şi este numită **sistem de reprezentanţi distincţi** pentru $\mathcal{A}$, sau o **transversal** a lui $\mathcal{A}$.
- Problema centrală în Teoria Transversalelor este de a caracteriza familiile care admit o transversală (cu anumite proprietăţi). Teorema lui **Hall (1935)** este primul rezultat de acest tip.

Teorema 4

Hall, 1935 *Familia* $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ *de submulţimi ale lui* S *are o transversală dacă şi numai dacă*

(H) $$|\mathcal{A}(J)| \geqslant |J|, \forall J \subseteq I.$$

Demonstraţie: "⇒" Dacă $r_{\mathcal{A}}$ este o funcţie de reprezentare injectivă pentru $\mathcal{A}$, atunci $r_{\mathcal{A}}(J) \subseteq \mathcal{A}(J)$, $\forall J \subseteq I$. Astfel, $r_{\mathcal{A}}$ fiind injectivă, $|\mathcal{A}(J)| \geqslant |r_{\mathcal{A}}(J)| \geqslant |J|$.

"⇐" Fie $G_{\mathcal{A}} = (I, S; E)$ graful bipartit asociat familiei $\mathcal{A}$ (dacă $I \cap S \neq \varnothing$, putem considera copii izomorfe disjuncte): $E = \{is | i \in I, s \in S \cap A_i\}$. Se observă că $N_{G_{\mathcal{A}}}(i) = A_i$. Mai mult, $\mathcal{A}$ are o transversală dacă şi numai dacă $G_{\mathcal{A}}$ are un cuplaj de cardinal $|I|$.

Demonstraţia Teoremei lui Hall (continuare): Arătăm că dacă relaţia (H) are loc, atunci orice acoperire cu noduri a lui $G_{\mathcal{A}}$ are cel puţin $|I|$ noduri, şi - din Teorema lui Konig - $G_{\mathcal{A}}$ are un cuplaj de cardinal $|I|$.

Fie $X = I' \cup S' \subseteq I \cup S$ o acoperire cu noduri a lui $G_{\mathcal{A}}$: urmează că $N_{G_{\mathcal{A}}}(I \setminus I') \subseteq S'$, adică, $\mathcal{A}(I \setminus I') \subseteq S'$. Atunci,

$$|X| = |I'| + |S'| \geqslant |I'| + |\mathcal{A}(I \setminus I')|.$$

Deoarece are loc (H), obţinem

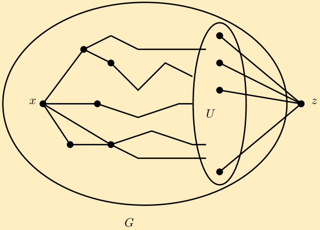
$$|X| \geqslant |I'| + |\mathcal{A}(I \setminus I')| \geqslant |I'| + |I \setminus I'| = |I|. \square$$

Aplicaţii: Teorema lui Dirac (structura grafurilor p-conexe)

Lemă

Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex de ordin $|G| \geqslant p + 1$, $U \subseteq V$, $|U| = p$ şi $x \in V \setminus U$. Atunci există p xU-drumuri astfel încât oricare două dintre ele îl au numai pe x drept nod comun.

Demonstraţie: Fie $G' = (V \cup \{z\}, E')$, unde $E' = E \cup \{zu : u \in U\}$.



Aplicaţii: Teorema lui Dirac (structura grafurilor p-conexe)

Demonstraţie (continuare). Atunci, G' este un graf p-conex. Într-adevăr, fie $A \subseteq V(G')$ cu $|A| \leqslant p-1$. Dacă $A \subseteq V(G)$, atunci $G' - A$ este conex (din k-conexiunea lui G, $G - A$ este conex; cum $|A| < p$, $\exists u \in U \setminus A$ şi, astfel, există $zu \in E(G' - A)$. Dacă $z \in A$, atunci $G' - A = G - A$ care este conex.

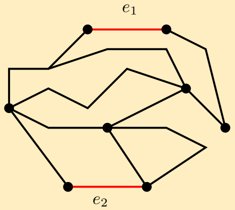
Lema urmează aplicând Teorema 2 grafului G' şi perechii x, z. $\square$

Propoziţie

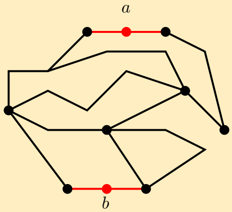
Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex, $p \geqslant 2$. Atunci, pentru orice două muchii e_1 şi e_2 ale lui G şi pentru orice, $x_1, \ldots, x_{p-2}$, $p-2$ noduri ale lui G, există un circuit în G care conţine toate aceste muchii şi noduri.

Demonstraţie: Inducţie după p.

Pentru $p = 2$, trebuie să arătăm că într-un graf 2-conex, G, orice două muchii e_1 şi e_2 aparţin unui circuit. Fie G' graful obţinut din G prin inserarea unui nod a pe e_1 şi a unui nod b pe e_2:



G



G'

G' este 2-conex (orice graf de tipul $G' - v$ este conex). Astfel,există două drumuri intern-disjuncte de la a la b, care dau circuitul din G conţinând e_1 şi e_2.

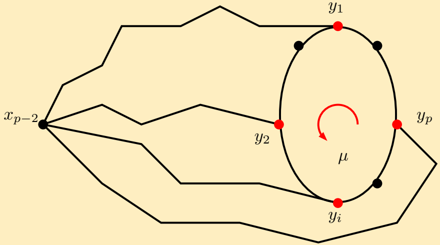
Demonstraţie (continuare). În pasul inductiv, fie $p \geqslant 3$, presupunem că Propoziţia este adevărată pentru orice graf p'-conex cu $2 \leqslant p' \leqslant p$, şi considerăm un graf p-conex G, două dintre muchiile, sale e_1 şi e_2 şi o mulţime de $p-2$ noduri $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\}$.

Putem presupune că nicio extremitate v a lui e_1 sau e_2 nu aparţine mulţimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\}$ (altfel, aplicăm ipoteza inductivă şi obţinem că în graful $(p-1)$-conex, G, există un circuit C conţinând e_1, e_2 şi mulţimea de noduri $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\} \setminus \{v\}$; iar v este un nod al lui C deoarece e_1 şi e_2 sunt muchii ale lui C).

Graful $G - x_{p-2}$ este $(p-1)$-conex. Din ipoteza inductivă, există un circuit μ care conţine $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, e_1 şi e_2. Fie Y mulţimea nodurilor lui μ. Evident, $|Y| \geqslant p$ (mulţimii de $p-3$ noduri $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, îi adăugăm cel puţin trei extremităţi ale muchiilor e_1 şi e_2). Din Lema de mai sus, există p $x_{p-2}Y$-drumuri astfel încât oricare două dintre ele au în comun doar un singur nod, x_{p-2}.

Demonstraţie (continuare). Fie $P_{x_{p-2}y_1}, P_{x_{p-2}y_2}, \ldots P_{x_{p-2}y_p}$ aceste drumuri, unde ordinea $y_1, \ldots, y_p$ se obţine în urma unei parcurgeri a lui μ.

Nodurile $y_1, \ldots, y_p$ împart circuitul μ în drumurile $P_{y_1y_2}$, $P_{y_2y_3}, \ldots, P_{y_{p-1}y_p}$, $P_{y_py_1}$:



Cel puţin unul dintre drumurile de mai sus nu conţine în interior niciun element din mulţimea $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, e_1 şi e_2 (pigeon hole principle).

Fie $P_{y_1y_2}$ acest drum (altfel, renumerotăm nodurile y_i).

Demonstraţie (continuare). Atunci,

$$P_{x_{p-2}y_2}, P_{y_2y_3}, ..., P_{y_py_1}, P_{y_1x_{p-2}}$$

este circuitul din G care conţine $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$, e_1 şi e_2. □

Teorema 5

(Dirac, 1953) *Prin orice $p \geqslant 2$ noduri ale unui graf p-conex trece un circuit.*

Demonstraţie: Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex, $p \geqslant 2$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p noduri ale lui G. Deoarece G este conex, există muchiile $e_1 = xx_{p-1}$ şi $e_2 = yx_p$. Atunci, teorema urmează din Propoziţia de mai sus. □

O aplicaţie interesantă a acestei teoreme (şi a demonstraţiei propoziţiei) este următoarea condiţie suficientă pentru ca un graf să fie Hamiltonian dată de Erdös şi Chvatal.

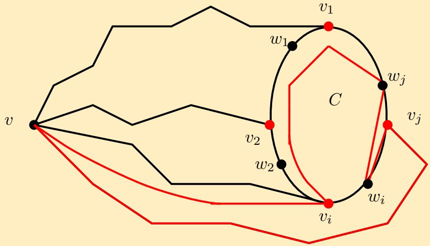
Teorema 6

(Erdös-Chvatal, 1972) *Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex. Dacă $\alpha(G) \leqslant p$ atunci G este graf Hamiltonian.*

Demonstraţie: Să presupunem, prin contradicţie că G nu este Hamiltonian. Fie C un cel mai lung circuit din G.
Din Teorema lui Dirac $|C| \geqslant p$ şi din presupunerea noastră, există un nod $v \in V(G) \setminus V(C) \neq \varnothing$.

Demonstraţie (continuare). Cum $|C| \geqslant p$, putem repeta argumentul din demonstraţia Propoziţiei de mai sus pentru a arăta că există P_{vv_1}, $P_{vv_2}, \ldots, P_{vv_p}$, p vC-drumuri care se intersectează două câte două doar în v şi cu extremităţi v_i etichetate în ordinea în care apar la o parcurgere a circuitului.

Fie w_i succesorul nodului v_i pe circuit.



Demonstraţie (continuare). Observăm că $vw_i \notin E$ (altfel, circuitul $vw_i, w_i, C \setminus \{w_i v_i\}, P_{v_i v}$ este mai lung decât C, contradicţie).
Deoarece $\alpha(G) \leqslant p$, mulţimea $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ nu este stabilă, şi din remarca de mai sus, urmează că există o muchie $w_i w_j \in E$.
Dar atunci, P_{vv_i}, inversul drumului de la v_i la w_j de pe circuit, muchia $w_j w_i$, drumul de la w_i la v_j de pe circuit, şi drumul $P_{v_j v}$ oferă un circuit mai lung decât C, contradicţie). □

Un **arbore** este un graf conex fără circuite.

Teorema 7

Fie $G = (V, E)$ un graf. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *G este un arbore (este conex şi nu are circuite).*

(ii) *G este conex şi este minimal cu această proprietate.*

(iii) *G* **nu are circuite** *şi este maximal cu această proprietate.*

Demonstraţie: Omisă. □

Minimalitatea şi maximalitatea din afirmaţiile de mai sus sunt relativ la relaţia de ordine parţială dată de incluziune pe submulţimile muchii. Mai precis afirmaţile (ii) şi (iii) înseamnă:

(ii) G este conex şi $\forall e \in E$, $G - e$ nu este conex.

(iii) G nu are circuite şi $\forall e \notin E$, $G + e$ are un circuit.

Definiţie

Fie $G = (V, E)$ un (multi)graf. Un **arbore parţial** *G este un graf parţial al lui G, $T = (V, E')$ ($E' \subseteq E$), care este arbore. Notăm cu $\mathcal{T}_G$ mulţimea tuturor arborilor parţiali ai lui G.*

Remarci

1. $\mathcal{T}_G \neq \varnothing$ dacă şi numai dacă G este conex. Într-adevăr, dacă $\mathcal{T}_G \neq \varnothing$, atunci există un arbore parţial $T = (V, E')$ al lui G. T este conex, deci între orice două noduri ale lui G there este un drum P în T. Deoarece $E' \subseteq E$, P este un drum şi în G, deci G este conex.

Reciproc, dacă G este conex, atunci considerăm următorul algoritm:

$T \leftarrow G$;
while ($\exists e \in E(T)$ astfel încât $T - e$ este conex) **do**
  $T \leftarrow T - e$;

Din construcţie, T este graf parţial al lui G, şi are loc afirmaţia (ii) din Teorema 7, deci T este un arbore.

2. O altă demonstraţie constructivă (dacă G este conex atunci $\mathcal{T}_G \neq \emptyset$) se bazează pe observaţia că există o muchie în cross între cele două clase ale oricărei bipartiţii a lui V: $\exists e = v_1v_2 \in E$ cu $v_i \in V_i$, $i = \overline{1,2}$.
Dacă $|V| = n > 0$ atunci următorul algoritm construieşte un arbore parţial al grafului conex $G = (V, E)$:

$k \leftarrow 1$; $T_1 \leftarrow (\{v\}, \varnothing)$; // $v \in V$
while $(k < n)$ **do**
  fie $xy \in E$ cu $x \in V(T_k), y \in V \setminus V(T_k)$;
  // o astfel de muchie există din conexiunea lui G
  $V(T_{k+1}) \leftarrow V(T_k) \cup \{y\}$;
  $E(T_{k+1}) \leftarrow E(T_k) \cup \{xy\}$;
  $k++$;

Evident, T_k este un arbore $\forall k = \overline{1, n}$ (inductiv, dacă T_k este un arbore atunci, din construcţie, T_{k+1} este conex şi nu are circuite). Mai mult, avem $|V(T_k)| = k$ şi $|E(T_k)| = k - 1$, $\forall k = \overline{1, n}$.

3. Dacă această construcţie este aplicată unui arbore G cu n noduri, vom obţine că G are $n - 1$ muchii. Această proprietate poate fi folosită pentru a extinde Teorema 7 cu alte caracterizări ale arborilor:

Teorema 8

Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un graf $G = (V, E)$ cu n noduri:

(i) *G este un arbore.*

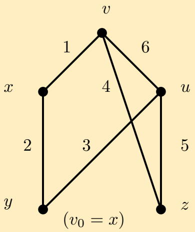
(ii) *G este conex şi are $n - 1$ muchii.*

(iii) *G nu are circuite şi are $n - 1$ muchii.*

(iv) *$G = K_n$ pentru $n \in \{1, 2\}$, iar pentru $n \geqslant 3$ $G \neq K_n$ şi $G + e$ are exact un circuit, pentru orice muchie $e \in E$.*

Demonstraţie: Omisă. □

- Descriem o metodă simplă de tip backtracking pentru a genera toţi arborii parţiali ai unui graf conex $G = (V, E)$, unde $V = \{1, \ldots, n\}$, $|E| = m$.
- Mulţimea de muchii, E, va fi reprezentată cu un tablou $E[1..2, 1..m]$ cu elemente din V, cu semnificaţia: dacă $v = E[1, i]$ şi $w = E[2, i]$, atunci vw este muchia i a lui G. Mai mult, vom presupune că primele $d_G(v_0)$ coloane din tabloul E au v_0 în linia 1 ($E[1, i] = v_0$, $\forall i = \overline{1, d_G(v_0)}$), pentru $v_0 \in V$.



1	2	3	4	5	6
x	x	y	z	z	u
v	y	u	v	u	v

- Un arbore parţial $T \in \mathcal{T}_G$ va fi reprezentat ca o mulţime de $n-1$ indecşi (în ordine crescătoare) ai coloanelor din tabloul E (desemnându-i muchiile).
- Întimpul generării, menţinem un vector $T[1..n-1]$ cu elemente din $\{1,\ldots,m\}$ şi o variabilă flag $i \in \{1,\ldots,n\}$ cu următoarele semnificaţii:

  Căutăm toţi arborii parţiali ai lui G, cu proprietatea că cele mai mici $i-1$ muchii sunt: $T[1] < T[2] < \ldots < T[i-1]$.
- Pentru exemplul de mai sus, dacă $i = 2$, $T[1] = 1$, şi $T[2] = 2$, atunci arborii care vor fi găsiţi sunt $\{1,2,3\}$, $\{1,2,5\}$, şi $\{1,2,6\}$. Dacă, $i = 2$, $T[1] = 3$, şi $T[2] = 5$ atunci arborele care trebuie găsit este $\{3,5,6\}$. Dar dacă $i = 2$, $T[1] = 1$, şi $T[2] = 6$, niciun arbore nu va fi găsit.

ALL-ST-Gen(i)

// sunt generaţi toţi arborii parţiali G , cu cele mai mici $i-1$ muchii: $T[1], \ldots, T[i-1]$

if $(i = n)$ **then**

// $\{T[1], \ldots, T[n-1]\}$ este arbore parţial

$process(T)$; // printează, memorează etc

else

if $(i = 1)$ **then**

for $(j = \overline{1, d_G(v_0)})$ **do**

$T[i] \leftarrow j$; **A** All-ST-Gen$(i+1)$ **B**

else

for $(j = \overline{T[i-1]+1, m-(n-1)+i})$ **do**

if $(\langle\{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\}\rangle_G$ has no circuit$)$ **then**

$T[i] \leftarrow j$; **A** All-ST-Gen$(i+1)$ **B**

- Prin apelul All-ST-Gen(1) obţinem $\mathcal{T}_G$.
- Pentru a testa dacă graful $\langle\{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\}\rangle_G$ nu are circuite, observăm că, din construcţie,

$$\langle\{T[1], \ldots, T[i-1]\}\rangle_G$$

  nu are circuite, deci este o pădure (fiecare componentă conexă este un arbore).
- Fie $root[1..n]$ un vector (global) cu elemente din V şi semnificaţia: $root[v]$ = rădăcina componentei conexe care conţine v (unul dintre nodurile sale).
- Înaintea apelului All-ST-Gen(1), vectorul $root$ este iniţializat pentru a satisface proprietatea: $root[v] \leftarrow v$ $(\forall v \in V)$ (deoarece atunci, $\{T[1], \ldots, T[i-1]\} = \varnothing$).

- În timpul apelurilor recursive, când se testează dacă muchia j poate fi adăugată mulţimii $\{T[1], \ldots, T[i-1]\}$ fără a crea vreun circuit, fie $v = E[1, j]$ şi $w = E[2, j]$. Atunci, $\langle\{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\}\rangle_G$ nu are circuite dacă şi numai dacă v şi w sunt în componente conexe diferite ale pădurii, i.e., $root[v] \neq root[w]$.
- Pentru a actualiza vectorul *root*, în locurile marcate cu **A** şi **B** din algoritm, trebuie făcute următoarele modificări.
- în loc de **A**:

  $S \leftarrow \varnothing$; $x \leftarrow root[v]$;
  for $(u \in V)$ **do**
    if $(root[u] = x)$ **then**
      $S \leftarrow S \cup \{u\}$; $root[u] \leftarrow root[w]$;

- Cu alte cuvinte toate nodurile din arborele cu rădăcina x sunt adăugate arborelui cu rădăcina $root[w]$; aceste noduri sunt salvate în mulţimea S.
- După apelul All-ST-Gen$(i+1)$, vector *root* trebuie setat din nou la valoarea dinaintea apelului, aceasta poate fi făcută **B** prin:

  for $(u \in S)$ **do**
    $root[u] = x$;

Fie $G = (V, E)$ un multi-graf cu $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, şi matricea de adiacenţă $A = (a_{ij})_{n\times n}$ (a_{ij} = multiplicitatea muchiei ij dacă $ij \in E$, 0 altfel). Fie

$$\mathbf{D = diag(d_G(1), d_G(2), \ldots, d_G(n))} = \begin{pmatrix} d_G(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_G(2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_G(n) \end{pmatrix}.$$

Matricea Laplaciană a lui G (sau **Laplacianul**) este definită ca fiind:

$$\mathbf{L[G] = D - A}.$$

Observăm că suma tuturor elementelor din fiecare linie sau din fiecare coloană a lui $L[G]$ este 0. Notăm cu $L[G]_{ij}$ minorul matrcii $L[G]$ obţinut prin ştergerea liniei i şi a coloanei j.

Teorema 9

(Kirchoff-Trent). *Fie G un (multi)graf cu mulţimea nodurilor $\{1, \ldots, n\}$ şi Laplacianul $L[G]$. Atunci, numărul arborilor parţiali ai lui G este:* $|\mathcal{T}_G| = det(L[G]_{ii})$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Demonstraţie: *Omisă.* □

Corolar

(Formula lui Cayley). $|\mathcal{T}_{K_n}| = n^{n-2}$.

Demonstraţie:

$$L[K_n] = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Astfel:

$$det(L[K_n]_{11}) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Dacă adunăm toate liniile la prima obţinem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$ (De ce?)

□

Exerciţiul 1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $v \in V$ astfel încât $N_G(v) \neq V \setminus \{v\}$. Pentru $X \subseteq V$ notăm $N_G(X) = \left(\bigcup_{v \in X} N_G(v) \right) \setminus X$.

Evident, mulţimea $A = \{v\}$ satisface următoarele proprietăţi:

(i) $v \in A$ şi $[A]_G$ este conex.

(ii) $N = N_G(A) \neq \varnothing$.

(iii) $R = V \setminus (A \cup N) \neq \varnothing$.

(a) Arătaţi că, dacă $A \subseteq V$ este orice mulţime noduri care satisface (i) - (iii) şi maximală (relativ la "$\subseteq$") cu aceste proprietăţi, atunci $\forall x \in R$ şi $\forall y \in N$ avem $xy \in E$.

(b) Dovediţi că dacă A este ca la (a) şi G este $\{C_K\}_{k \geqslant 4}$-free, atunci N este o clică în G.

(c) Deduceţi că K_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt singurele grafuri regulate, triangulate şi conexe.

Exerciţiul 2. Un graf de ordin cel puţin trei este numit confidenţial conex dacă, pentru orice trei noduri distincte a, b şi c, există un drum de la a la b astfel încât c este diferit de şi nu este adiacent cu niciun nod intern (dacă există) al acestui drum. (Un exemplu de graf confidenţial conex este graful complet K_n, cu $n \geqslant 3$.)

Arătaţi că un graf conex, necomplet, $G = (V, E)$, cu cel puţin trei noduri este confidenţial conex dacă şi numai dacă:

(i) pentru orice $v \in V$, $N_{\overline{G}}(v) \neq \varnothing$ şi induce un subgraf conex;

(ii) orice muchie a lui G face parte dintr-un C_4 indus sau este muchia mediană a unui P_4 indus.

Exerciţiul 3. Dovediţi că un graf conex, p-regulat şi bipartit este 2-conex.

Exerciţiul 4. Fie $G = (V, E)$ un digraf. Demonstraţi că:

(a) G este tare conex dacă şi numai dacă pentru orice $S \subsetneq V$, $S \neq \varnothing$, există măcar un arc care pleacă din S.

(b) Dacă G este tare conex şi poate fi deconectat prin ştergerea a cel mult p arce (i. e., $\exists A \subseteq E$, $|A| \leqslant p$ astfel încât $G - A$ nu este tare conex), atunci G poate fi deconectat prin inversarea a cel mult p arce (adică $\exists B \subseteq E$, $|B| \leqslant p$ astfel încât $G' = (V, (E \setminus B) \cup \{uv : vu \in B\})$ nu este tare conex).

Exerciţiul 5. Fie G un graf 2-muchie-conex ($G - e$ este conex, $\forall e \in E(G)$). Definim următoarea relaţie binară $e \asymp f$ dacă $e = f$ or $G - \{e, f\}$ nu este conex.

(a) Arătaţi că $e \asymp f$ dacă şi numai dacă e şi f aparţin aceloraşi circuite.

(b) Arătaţi că o clasă de echivalenţă $[e]_{\asymp}$ este inclusă într-un circuit.

(c) Ştergând toate muchiile dintr-o clasă de echivalenţă $[e]_{\asymp}$, componentele conexe ale grafului rămas sunt grafuri 2-muchie-conexe.

Exerciţiul 6. Arătaţi că un graf este 2-muchie conex dacă şi numai dacă G poate fi orientat astfel ca graful orientat rezultat să fie tare conex.

Exerciţiul 7.

(a) Fie G un graf cu cel puţin 3 noduri. Dacă G este 2-conex, atunci putem să-i orientăm muchiile aşa încât graful orientat rezultat să fie tare conex.

(b) Reciproca afirmaţiei de mai sus este adevărată?

Exerciţiul 8.

(a) Fie G un graf 2-conex, necomplet şi $xy \in E(G)$. Arătaţi că $G - xy$ sau $G|xy$ este 2-conex.

(b) Daţi câte un exemplu de un graf G şi o muchie $xy \in E(G)$ astfel ca: (b1) $G - xy$ şi $G|xy$ sunt 2-conexe; (b2) $G - xy$ nu este 2-conex dar $G|xy$ este 2-conex; (b3) $G - xy$ este 2-conex dar $G|xy$ nu este 2-conex;

Exerciţiul 9. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $u, v \in V$ două noduri distincte ale lui G. O submulţime de noduri X se numeşte *uv-separatoare minimală* dacă a u şi v se află în componente conexe diferite ale lui $G - X$, dar pentru orice $X' \subsetneq X$, u şi v sunt în aceeaşi componentă a lui $G - X'$.

(a) Dovediţi că $X \subseteq V$ este muţime uv-separatoare minimală dacă şi numai dacă u şi v se află în componente diferite ale lui $G - X$, iar orice nod din X are vecini în ambele aceste componente.

(b) Arătaţi că dacă X_1 şi X_2 sunt două mulţimi uv-separatoare minimale din G astfel încât X_1 intersectează cel puţin două componente din $G - X_2$, atunci X_1 intersectează toate componentele lui $G - X_2$ şi X_2 intersectează toate componentele din $G - X_1$.

Exerciţiul 10. Pentru un graf conex G dat aplicăm următorul algoritm:

$\mathcal{Q} \leftarrow \{G\}$; // $\mathcal{Q}$ **este o coadă;**
while ($\mathcal{Q} \neq \varnothing$) **}**
  $H \leftarrow$ **pop**($\mathcal{Q}$);
  fie $A \subseteq V(H)$ **o mulţime de articulaţie minimală din** H;
  fie $G_1, \ldots, G_k$ **componentele conexe ale lui** $H - A$;
  pentru ($j = 1$ **to** k)
    push($\mathcal{Q}, [A \cup V_j]_G$);
  }

Observăm că dacă G este a graf complet, atunci în $\mathcal{Q}$ nu se mai adaugă vreun alt graf.

a) Arătaţi că orice graf adăugat în $\mathcal{Q}$ este conex.

b) Dovediţi că numărul total de grafuri adăugate la coada $\mathcal{Q}$ este cel mult $|G|^2$.

Exerciţiul 11. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi T_1, T_2 doi arbori parţiali ai lui G ($T_1, T_2 \in \mathcal{T}_G$).

(a) Dovediţi că T_1 poate fi transformat în T_2 prin aplicarea repetată a următoarei proceduri: şterge o muchie şi adaugă o altă muchie arborelui curent.

(b) Dacă, în plus, G este 2-conex arătaţi că T_1 poate fi transformat în T_2 prin aplicarea repetată a următoarei proceduri: şterge o muchie uv şi adaugă o altă muchie uw arborelui curent.

Exerciţiul 12. Demonstraţi că mulţimea de muchii a unui graf complet K_n ($n \geqslant 2$) poate fi partiţionată în $\lceil n/2 \rceil$ submulţimi fiecare reprezentând mulţimea de muchii ale unui arbore (subgraf al lui K_n).

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 13.

Fie n un întreg pozitiv şi $G_n = (V, E)$ un graf definit astfel:

- $V = \{(i, j) : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$;
- $(i, j)(k, l) \in E$ (pentru $(i, j) \neq (k, l)$ din V) dacă şi numai dacă $i = l$ sau $j = k$.

Arătaţi că G_n este universal pentru familia arborilor deordin n: pentru orice arbore T de ordin n, $\exists A \subseteq V$ astfel încât $T \cong [A]_{G_n}$.