Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Pentru ce valori ale lui $n, m \in \mathbf{N}$ ($n, m \geq 1$) graful $K_{n,m}$ este eulerian ?

Problema 2. Să se construiască o funcţie care să recunoască un graf P_3-free. La intrare aceasta va primi un graf $G = (\{1, ..., n\}, E)$ reprezentat cu ajutorul listelor de adiacenţă şi va returna $true$ sau $false$. Stabiliţi complexitatea timp a algoritmului folosit.

Problema 3. Fie $R = (G, s, t, c)$ o reţea. Spunem că fluxurile x^1 şi x^2 în reţeaua R sunt *ortogonale* dacă $\forall ij \in E$ avem $x^1_{ij} \cdot x^2_{ij} = 0$. Demonstraţi că dacă x^1 şi x^2 sunt ortogonale atunci $x^1 + x^2$ este flux în R. Există x^1 şi x^2 fluxuri de valoare maximă şi ortogonale ?

Problema 4. Daţi exemplu de o problemă de decizie $\mathbf{P}$ pe grafuri care este NP-completă, dar dacă se consideră restricţia lui $\mathbf{P}$ pe clasa grafurilor bipartite este polinomială.
Daţi exemplu de o problemă de decizie $\mathbf{P_1}$ pe grafuri care este NP-completă şi care rămâne NP-completă chiar dacă se consideră restricţia sa pe clasa grafurilor bipartite.

Argumentare! (se pot folosi referinţe la rezultate din curs).

Problema 5.
Determinaţi numărul feţelor unui graf plan cu n vârfuri, m muchii şi k componente conexe.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Determinaţi toţi arborii cu cel puţin două vârfuri care sunt grafuri bipartite complete.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf reprezentat cu ajutorul listelor de adiacenţă. Să se arate că se poate testa dacă există un circuit în G care să conţină o muchie $e \in E$ dată, în timpul $O(|V| + |E|)$.

Problema 3. O reţea generalizată (de fluxuri) $R = (G, s, t, c)$ diferă de una uzuală prin faptul că funcţia de capacitate este definită şi pentru noduri $c : V(G) \cup E(G) \to \mathbf{R}_+$. Un flux într-o astfel de reţea satisface condiţiile uzuale (nenegativ, subcapacitar, se conservă în orice nod diferit de intrare şi ieşire) şi în plus $\forall v \in V(G) - \{s, t\}$: $\sum_{wv \in E(G)} x_{wv} \leq c(v)$. Arătaţi că se poate determina un flux de valoare maximă într-o astfel de reţea, construind o reţea uzuală R' şi rezolvând problema fluxului maxim în R'.

Problema 4. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbf{R}$ o funcţie de cost pe mulţimea muchiilor sle. Se cunoaşte un arbore parţial de cost minim T al lui G. Descrieţi un algoritm de complexitate $O(n)$ (unde $n = |G|$) care să determine un arbore parţial de cost minim în graful G' obţinut din G prin adăugarea unei noi (care nu era în G) muchii e de cost C.

Problema 5. Există grafuri 6-regulate planare ? Justificaţi răspunsul.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Este adevărat că graful complementar al lui $K_{3,3}$ este $2K_3$?

Problema 2. Descrieţi un algoritm de complexitate $O(|V(G)| + |E(G)|)$ care să testeze dacă graful G, dat prin listele de adiacenţă, are sau nu circuite de lungime impară.

Problema 3. Demonstraţi că următoarea problemă de decizie aparţine lui **P**:
Intrare : O reţea $R = (G, s, t, c)$ şi o valoare reală $v_0 > 0$.
Întrebare: Există în R un flux de valoare v_0 ?

Problema 4. Demonstraţi că un graf bipartit de ordin impar nu este hamiltonian.

Problema 5. Fie G un graf planar C_3-free (fără circuite de lungime trei) cu $m > 2$ muchii şi $n \geq 3$ vârfuri. Demonstraţi că $m \leq 2n - 4$.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Există grafuri G cu 6 vârfuri cu proprietatea că G este izomorf cu complementarul său ? (justificare)

Problema 2. Construiţi o funcţie care primind la intrare un graf G reprezentat cu ajutorul matricei de adiacenţă, să returneze numărul de triunghiuri (subgrafuri izomorfe cu C_3) ale lui G.

Problema 3. Modificaţi algoritmul de tip preflux pentru obţinerea eficientă a unui flux de valoare prestabilită v_0 într-o reţea dată. Pentru algoritmul obţinut se va analiza complexitatea timp şi se va argumenta corectitudinea.

Problema 4. Fie v un vârf de grad impar într-un graf G. Demonstraţi că există în G un vârf $u \neq v$, de grad impar, astfel încât u să poată fi accesat din v printr-un drum.

Problema 5.

Demonstraţi că dacă o muchie e face parte din orice arbore parţial al unui graf conex G, atunci $G - e$ nu-i conex.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Există grafuri G neconexe cu proprietatea că G este izomorf cu complementarul său ? (justificare)

Problema 2. Arătaţi că dacă $\delta(G) \geq k$, atunci în graful G, reprezentat prin listele de adiacenţă, se poate construi din orice vârf $v \in V(G)$ un drum de lungime cel puţin k, în timp $O(k + |E(G)|)$.

Problema 3. Fie $D = (V, E)$ un digraf, $s \in V$ şi o funcţie reală de cost $a : E \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că nu D nu are circuite C cu $a(C) < 0$. Se aplică algoritmul lui Bellman, Ford, Moore şi se determină pentru fiecare $v \in V$, u_v costul minim al unui drum de la s la v. Demonstraţi că funcţia $\overline{a} : E \to \mathbf{R}$, prin $\forall ij \in E\ \overline{a}(ij) = a(ij) + u_i - u_j$, satisface proprietatea că $\overline{a}(ij) \geq 0,\ \forall ij \in E$.

Problema 4. Fie reţeaua $R = (G, s, t, c)$ cu proprietatea că $c(ij) \in \{0, 1\}$ pentru orice arc $ij \in E(G)$. Descrieţi un algoritm care să determine un flux x^* de valoare maximă în R cu proprietatea că

$$|\{ij \in E(G) | x^*_{ij} > 0\}| = \min_{x \text{ flux de valoare maximă în } R} |\{ij \in E(G) | x_{ij} > 0\}|.$$

Notă: Astfel de fluxuri au fost folosite în aplicaţiile combinatoriale ale problemelor de flux.

Problema 5.

Fie G un graf eulerian. Demonstraţi că se pot orienta muchiile lui G astfel încât orice vârf al digrafului obţinut să aibă gradul interior egal cu gradul exterior.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

ianuarie 2011

Problema 1. Determinaţi toţi arborii T cu mai mult de un vârf cu proprietatea că T este izomorf cu complementarul său.

Problema 2.

Fie $T = (V, E)$ un arbore (reprezentat cu ajutorul listelor de adiacenţă) cu $n \geq 3$ vârfuri. Descrieţi un algoritm de complexitate timp $O(n)$ care să determine două vârfuri $x, y \in V$ astfel ca $xy \notin E$ iar circuitul format în $T + xy$ să aibă lungime maximă.

Problema 3. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Construiţi o reţea R astfel încât rezolvând problema fluxului maxim pe R să se decidă dacă graful bipartit dat are sau nu cuplaj perfect.

Problema 4. Demonstraţi că dacă s-ar putea determina în timp polinomial dacă un digraf are sau nu un drum hamiltonian, atunci s-ar putea determina în timp polinomial dacă un graf bipartit are sau nu un circuit hamiltonian.

Problema 5.

Demonstraţi că orice graf conex are un mers închis în care fiecare muchie apare cel puţin o dată şi cel mult de 2 ori.
