Algoritmica grafurilor - Tema 3

Bucătaru Andreea A2 Bulboacă Maria A2

11 ianuarie 2019

Problema 1

a) Fie $c(S,T)$ capacitatea secțiunii (S,T) și x un flux în R. $c(S,T)$ este minimă $\Leftrightarrow c(S,T) = \max v(x)$, din Teorema flux maxim - secțiune minimă.

Aflăm valoarea maximă a fluxului folosind algoritmul Edmonds-Karp, în timp $O(n \cdot m^2)$. Dacă $\max v(x) = c(S,T)$, atunci secțiunea (S,T) este de capacitate minimă.

b) Din curs avem: fluxul x este de valoare maximă $\Leftrightarrow$ nu există niciun drum de creștere relativ la fluxul x.

Construim rețeaua reziduală relativă la fluxul x și încercăm să găsim drumul p de la s la t, astfel încât orice muchie $e \in p$, satisface condiția: $c(e) > 0$ (în rețeaua reziduală). Dacă găsim un astfe de drum p, înseamnă că fluxul x ar putea fi mărit cu $\min c(e)$, $e \in p$, deci x nu este flux maxim.

Drumul poate fi căutat folosind un DFS/BFS, iar dacă folosim liste de adiacență, algoritmul are complexitatea $O(n+m)$.

c) Fie $v(x)$ valoarea fluxului maxim inițial și $v(x')$ valoarea fluxului maxim după ce am incrementat capacitatea unei muchii e. Demonstrăm că $v(x) + 1 \geq v(x')$ (fluxul maxim după incrementare poate crește cu maixm o unitate).

Fie (S,T) o secțiune minimă în graful inițial G. Folosind teorema flux maxim - secțiune minimă, știm că $v(x) = c(S,T)$. După ce modificăm e și îi incrementăm capacitatea, avem o nouă secțiune minimă (S',T') în noul graf. Cum capacitatea unei secțiuni este definită prin $c(S',T') = \sum\limits_{\substack{i \in S' \\ j \in T'}} c(ij)$. În cazul în care muchia schimbată $e = (x,y)$ satisface condiția $x \in S'$ și $y \in T'$ (sau invers), atunci avem $c(S',T') = c(S,T) + 1$. Altfel, avem $c(S',T') = c(S,T)$. Din teorema flux maxim - secțiune minimă $\Rightarrow v(x') = v(x) + 1$ sau $v(x') = v(x)$, deci $v(x) + 1 \geq v(x')$.

Știm de la punctul b) că există un algoritm de complexitate timp $O(n+m)$ pentru a identifica dacă un flux x este flux maxim într-un graf G. Testăm dacă fluxul inițial x este flux maxim în graful modificat G. Dacă da, atunci $v(x') = v(x)$. Altfel, $v(x') = v(x) + 1$.

Problema 2

Deoarece $v(x) = v_1 + v_2 + ... + v_p$, unde $v_i \in \mathbb{N}^*$ și $i \in [1,p] \Rightarrow$ valoarea minimă a unui flux v_i este 1. Dacă $v_i = 1$, oricare $i \in [1,p] \Rightarrow v(x) = 1 \cdot p \Rightarrow p \in [1, v(x)]$.

Fie x fluxul inițial și $E_x = \{e \mid x(e) > 0, e \in E(G)\}$. Demonstrăm că putem construi un flux $x' <= x$, cu $v(x') < v(x)$. Alegem orice muchie $e \in E_x$ și decrementăm fluxul de pe ea cu o unitate. Noul flux obținut x' va avea $v(x') = v(x) - 1$. Astfel, în mod inductiv, pentru orice flux x, putem construi un flux x' astfel încât $v(x') < v(x)$ (decrementând succesiv o muchie care conține flux).

Există astfel, pentru orice v_i, $i \in [1,p]$, un flux x' astfel încât $v_i = v(x')$ și $v(x) = \sum_{i\in[1,p]} v_i$.

Problema 3

a) G nu este 2-ring dacă toate gradele sunt multipli de 2 și numărul de muchii este multiplu de 2, sau dacă are și grade impare. În cazul în care sunt și grade impare, putem modifica, adăugând un nod nou și legându-l de graful anterior $\Rightarrow$ graful are acum grade pare.

Dacă un graf are grade pare și este conex $\Rightarrow$ este eulerian. Deci putem avea o colorare-fair cu 2 culori.

b) Dacă graful este p-ring, se poate arăta că clasele de colorare ale muchiilor incidente cu un nod fixat sunt toate de același cardinal.

$c_v^{-1}(h) = c_v^{-1}(k)$, unde $c_v^{-1}(h)$ este nr de muchii incidente cu v de culoare h.

$\Rightarrow$ contradicție. Deci dacă G este p-ring, atunci nu admite o p-colorare-fair.

Problema 4

a) CLUST-P este în NP și există o problemă NP-completă care se reduce la ea. Vom folosi o problemă de colorare, care se poate reduce în timp polinomial la problema CLUST-P.

b) Trebuie să demonstrăm că problema dată de **L**azy este polinomial rezolvabilă pentru $p = 2$ clase în partiție. Această problemă este asemănătoare cu demonstrația diferenței dintre problema 2-colorării și cea a 3-colorării.

Am demonstrat la punctul a) că o problemă de colorare se reduce la această problemă. A determina dacă un graf poate fi colorat cu 2 culori este echivalent cu a determina dacă graful este bipartit sau nu, ceea ce se poate rezolva în timp polinomial. $\Rightarrow$ Cum problema 2-colorării poate fi rezolvată în timp polinomial, atunci și această problemă dată de **L**azy poate fi rezolvată în timp polinomial.