# Barem

## Subiectul 1 - 4pt

- 1.25 pt - calculul matricii $B^{-1}$
- 0.25 pt - calculul matricii $C$
- 0.5 pt - calculul matricii $M$
- 1 pt - demonstrarea convergenței met. iterative
- 1 pt - calculul vectorului $x^{(1)}$

## Subiectul 2 - 3pt

- 1.5 pt - calculul cu formula lui Neville a polinoamelor $l_{01}, l_{12}, l_{23}$
- 1 pt - calculul polinoamelor $l_{012}, l_{123}$ folosind formula Neville
- 0.5 pt - calculul polinomului $l_{0123}$ cu formula Neville

## Subiectul 3 - 2pt

## Baza - 1pt

Nume şi prenume :
Grupa, semianul:
Data:

## Examen Calcul Numeric 2010 - B

1. Fie sistemul liniar:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ 10x_2 + 3x_3 &= 16 \\ 3x_1 + \quad + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Să se construiască matricea iterației, ***M,*** pentru o metodă iterativă cu următoarea matrice ***B:***

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Să se studieze convergența metodei iterative astfel obținute şi să se calculeze vectorul $x^{(1)}$ pornind de la $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

2. Fie tabelul:

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | 3 | 6 | 3 | 3 |

Să se aproximeze ***f(1)*** folosind formula Neville pentru polinomul de interpolare Lagrange şi schema lui Aitken.
($l_{i,\dots,k}(x)$ - polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile $x_i, x_{i+1}, \dots, x_k$)
Formula Neville

$$l_{i,\dots,k}(x) = \frac{(x_k - x)l_{i,\dots,k-1}(x) + (x - x_i)l_{i+1,\dots,k}(x)}{x_k - x_i}$$

3. Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o matrice oarecare având pseudo-inversa Moore-Penrose $A^I \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ un vector oarecare şi $x^I = A^I b \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că:

$$\| b - Ax^I \|_2 \le \| b - Ax \|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ , \quad \| \cdot \|_2 \text{ este norma euclidiana din } \mathbb{R}^n$$

## Rezolvări

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A = B - C \Rightarrow C = B - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = B^{-1} C$$

Coloanele matricii $B^{-1}$ se pot obține, rezolvând pe rând sistemele

$$Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll|l|l} 8x_1 & & & = 1 & 0 & 0 \\ & 8x_2 & & = 0 & 1 & 0 \\ 3x_1 + & & + 4x_3 & = 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = 0$ $\quad x_3 = -\frac{3}{4} x_1 = -\frac{3}{32}$ — col 1 a matr $B^{-1}$

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_3 = 0$ — coloana a $2^a$ a lui $B^{-1}$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{4}$ — col a $3^a$ a matr. $B^{-1}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ -3/32 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Se poate face și verificarea $B \cdot B^{-1} = I_3$

$$M = B^{-1}C = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ -3/32 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/4 & -3/8 \\ 3/16 & 3/32 & 0 \end{pmatrix}$$

Convergența:
- fie se calc. $\rho(M)$
- fie se găs o normă matr. ptr care $\|M\| < 1$

$$\rho(M) = \max \{ |\lambda| ; \lambda \text{ valoare proprie a matr } M \}$$

$$p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda + 1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & \lambda + 1/4 & 3/8 \\ -3/16 & -3/32 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda + 1/4)^2 - \frac{9}{64 \cdot 16} + \frac{9}{32 \cdot 8}(\lambda + 1/4)$$

$$p_M(\lambda) = \lambda\left[\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{256}\right]$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm i\,\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow \rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{16} < 1 \Rightarrow \text{convergență}$$

$$\|M\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{3} |m_{ij}| ;\ j = \overline{1,3}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}, \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{32}, \frac{3}{8}\right\} = \frac{15}{32} < 1$$

$$\|M\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{3} |m_{ij}| ;\ i = \overline{1,3}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{1}{4} + \frac{3}{8}, \frac{3}{16} + \frac{3}{32}\right\} = \frac{5}{8} < 1$$

$x^{(1)}$ se poate calcula în 2 moduri

a) - $x^{(1)} = Mx^{(0)} + d \qquad d = B^{-1}b$

sau

b) - $x^{(1)}$ este soluția sistemului

$$Bx = Cx^{(0)} + b$$

a) $$Mx^{(0)} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/4 & -3/8 \\ 3/16 & 3/32 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -5/8 \\ 3/32 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ -3/32 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 2 \\ 61/32 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11/8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$Cx^{(0)} + b = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$8x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$8x_2 = 11 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{8}$$

$$3x_1 + 4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11/8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---

| | | | Pas 1 | Pas 2 | Pas 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2. | $-2$ | $3$ | | | |
| | $-1$ | $6$ | $l_{01}$ | | |
| | $0$ | $3$ | $l_{12}$ | $l_{012}$ | |
| | $2$ | $3$ | $l_{23}$ | $l_{123}$ | $l_{0123}$ |

$x_0 = -2 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

$y_0 = 3 \quad y_1 = 6 \quad y_2 = 3 \quad y_3 = 3$

$$l_{01} = \frac{(-1-1)\cdot 3 + (1-(-2))\cdot 6}{-1-(-2)} = 12$$

$$l_{12} = \frac{(0-1)\cdot 6 + (1-(-1))\cdot 3}{0-(-1)} = 0$$

$$l_{23} = \frac{(2-1)\cdot 3 + (1-0)\cdot 3}{2-0} = 3$$

$$l_{012} = \frac{(0-1)\cdot l_{01} + (1-(-2))\, l_{12}}{0-(-2)} = \frac{-12+3\cdot 0}{2} = -6$$

$$l_{123} = \frac{(2-1)\cdot l_{12} + (1-(-1))\, l_{23}}{2-(-1)} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 3}{3} = 2$$

$$l_{0123} = \frac{(2-1)\cdot l_{012} + (1-(-2))\cdot l_{123}}{2-(-2)} = \frac{1\cdot(-6)+3\cdot 2}{4} = 0$$

$$f(1) \simeq l_{0123} = 0$$

---

3. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad A = U\Sigma V^T$ - descomp. după valori singulare

$U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - matrici ortogonale

$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad D = \mathrm{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r] \in \mathbb{R}^{r\times r}$

$A^I = V\Sigma^I U^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\Sigma^I = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad D^{-1} = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right]$$

$$f(x) = \|b - Ax\|_2 \quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

Relația $\|b - Ax^I\|_2 \le \|b - Ax\|_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ implică faptul că $x^I$ este unul din punctele de minim ale funcției $f$.

$$f(x) = \|b - Ax\|_2 = \|b - U\Sigma \underbrace{V^T x}_{z}\|_2 =$$

$$= \|U(U^T b - \Sigma z)\|_2 = \|U^T b - \Sigma z\|_2$$

(am fol faptul că $U$ este ortogonală $U^T U = I$ și $\|U \cdot w\|_2 = \|w\|_2$)

Notăm cu $c = U^T b \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \|U^T b - \Sigma z\|_2 = \|c - \Sigma z\|_2 =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} (c_i - \sigma_i z_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2}$$

Valoarea minimă pentru expresia de mai sus se obține pentru acei vectori $z$ (respectiv $x = Vz$) care satisfac:

$$z_i = \frac{c_i}{\sigma_i} \quad i = \overline{1,r}, \quad z_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{r+1,m}$$

Pentru a demonstra relația din enunțul exercițiului trebuie să arătăm că $z^I = V^T x^I$, $x^I = A^I b$ satisface relațiile de mai sus

$$z^I = V^T A^I b = \underbrace{V^T V}_{I_n} \Sigma^I \underbrace{U^T b}_{c} = \Sigma^I c$$

$$\Rightarrow \quad z_i^I = \frac{c_i}{\sigma_i} \quad i = \overline{1,r} \quad , \; z_i^I = 0 \quad i = \overline{r+1,n}$$

$$\Rightarrow \quad f(x^I) = \min\{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\}$$