UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Metode Moderne de Calcul și Simulare
- Monty Hall Paradox -

Ștefan Andreea-Cosmina

Grupa 454

2019

Cuprins

1. Scopul lucrarii
2. Ce reprezinta si cum functioneaza paradoxul Monty Hall
3. Solutia problemei
4. Simulare pentru 3, 4 si 5 usi
5. Generalizare pentru *n* usi
6. Concluzii
7. Bibliografie

1. Scopul lucrarii

Problema Monty Hall este un puzzle care are la baza un calcul probabililistic ce a pornit de la o emisiune televizata din America, *“Let’s Make a Deal”*, si mostenind numele gazdei originale, Monty Hall. Problema este un paradox faimos ce are o solutie atat de contra-intuitiva, incat majoritatea oamenilor au dificultati in a o intelege sau chiar refuza sa creada ca este adevarata, inclusiv matematicieni si doctori in matematica.

Scopul acestei lucrari este de a explica intr-un mod simplist gandirea ce sta la baza problemei, indentificarea etapei in procesul de gandire in care lumea se insala, dar si o generalizare a problemei.

2. Ce reprezinta si cum functioneaza paradoxul Monty Hall

In primul rand, ne dorim sa explicam notiunea de *paradox*. Pornind de la explicatia din DEX, paradoxul este: "*1. Enunț contradictoriu și, în același timp, demonstrabil; 2. Părere (absurdă) contrară adevărului unanim recunoscut; 3. Enormitate a unei afirmații, a unei situații etc; 4. Ciudățenie; enormitate, absurditate".* Ori *"Contradicție logică-formală, apărută în ciuda respectării corectitudinii logice a raționamentului"*.

Asadar, rezolvarea problemei reprezinta un concept contra-intuitiv si greu de crezut, desi aceasta este cat se poate de logica.

Contextul problemei este urmatorul: Presupunand ca suntem in cadrul emisiunii, avem de ales dintre 3 usi: in spatele uneia dintre ele este o masina, iar in spatele celorlaltor 2 se afla 2 capre. Sa spunem ca alegem pentru inceput usa cu numarul 1, iar gazda, stiind ce se afla in spatele usilor, deschide alta usa, spre exemplu usa cu numarul 3, in spatele careia se afla o capra. Apoi, acesta intreaba: *"Doresti sa iti schimbi alegerea intiala? Doresti sa alegi usa cu numarul 2?"* Intrebarea logica si pertinenta care apare acum este: Este in avantajul tau sa iti schimbi alegerea intiala? Este in avantaj sa alegi cealalta usa? Sansele de castig vor creste astfel?

3. Solutia problemei

Exista 3 usi. In spatele uneia dintre ele exista un premiu. In spatele celorlaltor 2, nu. Asadar, probabilitatea ca oricare usa sa contina un premiu este de $1/3$. Daca problema Monty Hall s-ar oprit dupa selectarea primei usi, singura predictie pe care am putea sa o facem ar fi ca o data la 3 incercari, usa aleasa va contine premiul, iar concurentul va primi masina. Acest lucru insa nu este adevarat, concurentul trebuind sa faca o alegere. Va ramane cu alegerea initial sau este in avantajul sau sa schimbe usa?

Primul impuls este de a crede ca, din moment ce o usa a fost eliminata, sansele de a nimeri masina sunt de 50%, avand in vedere ca sunt 2 usi, iar in spatele uneia dintre ele se afla premiul, asadar am fi tentati sa spunem ca nu conteaza daca ne schimbam sau nu alegerea initiala. Corect?

Probabilitatile legate de cele 3 usi in aceasta problema sunt urmatoarele: probabilitatea ca in spatelei unei usi sa se afle masina este de $1/3$, dar in acelasi timp probabilitatea ca premiul sa nu se afle acolo este de $2/3$, suma probabilitatilor trebuind sa fie mereu egala cu 1. Asadar, probabilitatea alegerilor ramase trebuie sa fie egale cu 1 minus probabilitatea alegerii intiale. In acest caz (cu 3 usi), ele trebuie sa insumeze $2/3$. Sa spunem ca nicio usa nu este deschisa. Atunci, concurentul ar putea alege din 2 usi, daca ar dori sa-si schimbe alegerea intiala, iar sanse de a alege o usa castigatoare este de $1/2 \times 2/3$, adica $1/3$, exact cat ar valora alegerea initiala. Insa Monty trebuie sa deschida o usa, asa ca exista doar o usa la care concurentul are posibilitatea sa-si mute alegerea. In acest caz, reprezentand inima problemei, va alege usa care ramane, adica $1 \times 2/3$, adica o probabilitate de $2/3$ de a fi o usa castigatoare, in cazul in care concurentul isi schimba alegerea initiala.

Cu alte cuvinte, exista $1/3$ sanse ca o masina sa fie in spatele usii cu numarul 1 (spre exemplu) si $2/3$ sanse ca masina sa nu fie in spatele usii cu numarul 1. Dupa ce Monty deschide usa numarul cu numarul 2 pentru a vedea ca este necastigatoare, inca exist sansa de $1/3$ ca masina sa fie in spatele usii cu numarul 1 si $2/3$ sanse ca masina sa nu fie in spatele usii cu numarul 1. Insa… o probabilitate de $2/3$ ca masina sa nu fie in spatele usii cu numarul 1 reprezinta o probabilitate de $2/3$ ca masina sa se afle in spatele usii cu numarul 3.

4. Simulare pentru 3, 4 si 5 usi

Din punctul de vedere al programarii, extinderea pentru 4 si 5 usi s-a realizat usor. Codul contine 4 functii distincte pentru a realiza simularea. Functia `runSingleSimulation` contine algoritmul de alegere a usii, un numar aleator intre 1 si numarul de usi, insa trebuie sa excluda 2 usi in momentul in care Monty deschide prima usa, deoarece aceasta nu trebuie sa fie usa pe care concurentul a ales-o si nici cea in spatele careia se afla masina. Argumentul boolean `changeSelection` verifica daca alegerea concurentului s-a schimbat pe parcurs, facand variabila booleana *false* sau daca acesta a ramas cea initiala, prin valoarea *true*.

Functia `runMontyHallSimulation` are ca argumente numarul de simulari (teste) care se vor rula - `timesToRun`, variabila `changeSelection` si numarul usilor pe care vrem sa le punem la joc - `doors`. Aceasta numara de cate ori s-a castigat pentru fiecare set de teste si returneaza numarul castigurilor, se vor realiza 100.000 simulari pentru concurentii care isi schimba alegerea initiala si 100.000 pentru cei care nu isi vor schimba alegerea, asadar parametrul `changeSelection` va fi pe rand *true*, respectiv *false*.

Functia `updateDisplay` contine doar diferite atribuiri pentru a afisa valorile in tabel, din fisierul HTML si contine valorile urmatoare, ce vor reprezenta liniile si coloanele din tabel: numarul de simulari, numarul de castiguri pentru concurentii care si-au schimbat alegerea si procentul aferent, durata unei astfel de simulari, numarul de castiguri pentru concurentii care nu si-au schimbat alegerea, alaturi de procent si durata simularii respective.

Functia `start` ce contine doar diferite atribuiri si apelurile functiilor cu valorile argumentelor schimbate, pe rand, pentru ca toate simularile sa aiba loc si rezultatele acestora sa se afiseze in tabel.

Simularile urmatoare ne arata ca din 100.000 teste, in care concurentii si-au schimbat (si nu si-au schimbat) usa initiala, procentul celor care au castigat schimbandu-si alegerea initiala este statistic mult superior fata de cei care nu si-au schimbat alegerea. Am putea spune ca in mare, raportul este de 66% pentru cei care si-au schimbat, fata de 33% pentru cei care au ramas cu usa intiala. Fiecare set de 100.000 teste a fost realizat separat, de aceea totalul simularilor (si procentelor) nu insumeaza fix 100.000 (sau 100%). De asemenea, observam ca durata simularii in cazul concurentilor care si-au schimbat alegerea este cu putin mai mare, datorita calculelor suplimentare pe care trebuie sa-l faca algoritmul.

The simulation for 3 doors

	Contestant changed their choice	Contestant DID NOT change their choice
Total simulation count:	100000	100000
Games won:	66602 (66.6%)	33175 (33.2%)
Total duration to run simulation:	11ms	5ms

The simulation for 4 doors

	Contestant changed their choice	Contestant DID NOT change their choice
Total simulation count:	100000	100000
Games won:	37475 (37.5%)	25094 (25.1%)
Total duration to run simulation:	6ms	3ms

The simulation for 5 doors

	Contestant changed their choice	Contestant DID NOT change their choice
Total simulation count:	100000	100000
Games won:	26690 (26.7%)	20077 (20.1%)
Total duration to run simulation:	4ms	3ms

5. Generalizare pentru *n* usi

Avand aspectele anterioare in minte, putem acum incerca o generalizare a problemei pentru *n* usi. Aceasta presupune ca Monty sa deschida *p* usi si apoi ofera concurentului posibilitatea de a-si schimba alegerea initiala; in acest caz, probabilitatea de a nimeni o usa castigatoare este de $\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n-p-1}$. Probabilitatea este este intotdeauna mai mare decat $\frac{1}{n}$, asadar este intotdeauna un avantaj in a schimba alegerea initiala. Chiar si in cazul in care gazda deschide numai p = 1 usi, este in avantajul concurentui de a schimba usa de fiecare data. Pe masura ce *n* creste insa, avantajul scade si tinde la 0. In cealalta extrema, daca gazda deschide toata usile mai putin una $p = n - 2$, avantajul creste pe masura ce *n* creste - probabilitatea de a castiga schimband usa initiala este de $n - {}^{1}/_{n}$, ceea ce tinde la 1 pe masura ce *n* creste.

Diferenta in ceea ce priveste probabilitatile referitoare la schimbarea alegerii initiale, conform tabelului, se poate observa ca scade, pe masura ce numarul usilor creste. Este important de mentionat ca in cazul cu 4 si cu 5 usi, doar se adauga usi, insa Monty deschide tot 1, concurentul ramanand cu mai multe variante de a alege, daca doreste sa-si schimbe optiunea initiala, de aceea diferenta dintre procentele jocurilor castigate de concurentii care au schimbat usa si cei care nu au schimbat se micsoreaza. Asadar, pe masura ce *n* creste, diferenta dintre ele se micsoreaza. Situatia cu 3 usi reprezinta cazul cel mai favorabil pentru schimbarea alegeri, concurentul avand cel mai mult de castigat.

6. Concluzii

Desi la prima vedere poate fi usor confuzant sau greu de crezut chiar si pentru matematicieni, acest paradox creand multa valva in jurul sau, initiatorul acesteia fiind asaltat cu un val de critici din partea matematicienilor, exista explicatia logica si matematica pentru care este intotdeauna recomandat unui posibil concurent sa-si schimbe optiunea initiala daca are posibilitatea.

O varianta exagerata a problemei, pentru o si mai usoara intelegere a motivului pentru care este recomandat intotdeauna sa se schimbe alegerea intiala, se poate pune astfel: presupunem ca avem 1 milion de usi. Dupa ce Monty deschide toate usile, mai putin una, aratand ca toate celelalte usi sunt necastigatoare. Este destul de evident ca sansa ca usa alegerea intiala sa fie castigatoare este de 1 la 1 milion. Mai este evident si faptul ca din celelalte 999.999 usi care nu au fost alese, usa pe care a evitat sa o deschida este foarte probabil sa fie cea castigatoare.

7. Bibliografie

- https://www.montyhallproblem.com/
- https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/probability-and-statistics/monty-hall-problem/
- http://statisticalideas.blogspot.com/2015/06/games-and-monty-hall.html
- https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem/
- https://math.stackexchange.com/