Variabile aleatoare continue

def. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă este o v.a. continuă dacă $X(\Omega)$ este o mulțime infinită, dar nenumărabilă.

Obs.: ① În cazul v.a. continue evenimentele de probabilitate nenulă sunt de tipul „$X \in A$" cu $A \subseteq \mathbb{R}$.
(i.e. X ia o valoare aflată în mulțimea A)

② Toate evenimentele de tipul „$X = x$" au probabilitatea egală cu 0.

③ O v.a. continuă poate fi reprezentată prin intermediul funcției densitate de probabilitate.

def. O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește densitate de probabilitate (pt. v.a. X) dacă îndeplinește următoarele condiții (cumulativ):

1) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

def. O funcție $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție de repartiție (pt. v.a. X) dacă:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt}$$

Obs.: La fel ca în cazul v.a. discrete:

$$\boxed{F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)}$$

Proprietăți ale funcției de repartiție (valabile atât în caz discret cât și în caz continuu)

1) $\operatorname{Im} F = [0,1]$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

nu neapărat strict crescătoare

3) F este crescătoare (i.e. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$)

4) F este continuă la dreapta (i.e. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$)

Obs.: 1) $\boxed{\mathbb{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)}$

2) În cazul v.a. continue $\mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a < X < b)$
$= \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a \le X \le b)$

3) În cazul v.a. discrete:

- $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) - \mathbb{P}(X = b)$
- $\mathbb{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a) - \mathbb{P}(X = b) + \mathbb{P}(X = a)$
- $\mathbb{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + \mathbb{P}(X = a)$

4) $\boxed{\mathbb{P}(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx}$ în cazul v.a. continue

Media și momentele unei v.a. continue

Fie X o v.a. continuă și f densitatea sa de probabilitate.

def. $$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$ media

def. $$\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \underset{\substack{\| \\ E(X)}}{m})^2 \cdot f(x)\, dx}$$ dispersia (varianța)

Obs.: În practică este mai utilă folosirea relației:

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

def. $$\boxed{\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \underset{\substack{\| \\ E(X)}}{m})^r \cdot f(x)\, dx}$$ moment centrat de ordin r

def. $$\boxed{m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x)\, dx}$$ moment inițial de ordin r

Obs.: Proprietățile mediei și dispersiei rămân valabile și în cazul v.a. continue.

Probleme cu v.a. continue

$\boxed{1}$ Fie X o v.a. continuă definită prin densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} c\cdot(4x-2x^2), & 0<x<2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad c\in\mathbb{R}$$

a) Determinați constanta reală c.

b) Calculați $P(X>1)$

c) Calculați $E(X)$ și $Var(X)$.

d) Determinați funcția de repartiție a v.a. X

a) f densitate de probabilitate $\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \\ 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \end{cases}$

1) $f(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow c\,(4x-2x^2)\geq 0 \quad \forall x\in(0,2)$

$\Leftrightarrow 2c\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(2-x)}_{>0}\geq 0 \quad \forall x\in(0,2) \Rightarrow \boxed{c>0}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_0^2 c\,(4x-2x^2)\,dx + \underbrace{\int_2^{\infty} 0\,dx}_{0} = 1$

$\Leftrightarrow c\left(4\int_0^2 x\,dx - 2\int_0^2 x^2\,dx\right) = 1 \Leftrightarrow c\left(\cancel{4}\,2\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2 - 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 1$

$\Leftrightarrow c\left(8-\frac{16}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow c\cdot\frac{8}{3} = 1 \Leftrightarrow \boxed{c=\frac{3}{8}} > 0$ ✓

b) $\mathbb{P}(X>1)=\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{2}\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx + \underset{\overset{\|}{0}}{\int_{2}^{\infty} 0\,dx} =$

$= \frac{3}{8}\cdot\left(\cancel{4}^{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^2 - 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(6-\frac{14}{3}\right) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = \frac{1}{2}$ ✓

c) $\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \underset{\overset{\|}{0}}{\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx} + \int_{0}^{2} x\cdot\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx$

$+ \underset{\overset{\|}{0}}{\int_{2}^{\infty} x\cdot 0\,dx}$

$= \frac{3}{8}\cdot\left(4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - \cancel{2}\cdot\frac{x^4}{{}_2\cancel{4}}\Big|_0^2\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{32}{3}-8\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = 1$ ✓

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x^2\cdot\frac{3}{8}(4x-2x^2)\,dx =$

$= \frac{3}{8}\cdot\left(\cancel{4}\cdot\frac{x^4}{\cancel{4}}\Big|_0^2 - 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(16-\frac{64}{5}\right) = \frac{3}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{16}^{2}}{5} = \frac{6}{5}$

$Var(X) = \frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$ ✓

d) $f(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0 \\ \frac{3}{8}(4t-2t^2), & t\in(0,2) \\ 0, & t\ge 2 \end{cases}$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

I $\quad x\le 0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

II $\quad x\in(0,2) \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x}\frac{3}{8}(4t-2t^2)\,dt = \frac{3}{8}\cdot\left(\cancel{4}^{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^x - 2\frac{t^3}{3}\Big|_0^x\right)$

$= \frac{3}{8}\cdot\left(2x^2 - \frac{2}{3}\cdot x^3\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$

$\overline{\text{III}}$ $x \geq 2 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \frac{3}{8}(4t^2 - 2t)\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt = \ldots 1$

Deci $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^3, & x \in (0, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Obs.}}$ $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(\frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

$\boxed{2}$ Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} k\, x^3 \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Determinați:

a) $k \in \mathbb{R}$ a.î. f să fie densitatea de probabilitate a unei v.a. X

b) $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$

a) f densitate de probabilitate $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \; f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 2) \; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \end{cases}$

1) $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k \underbrace{x^3}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{> 0} \geq 0 \Rightarrow k > 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{\infty} k\, x^3 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$

$\Leftrightarrow k \cdot \int_{0}^{\infty} x^3 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$

S.V. $\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$k \cdot \int_0^\infty (2t)^3 \cdot e^{-t} \cdot 2dt = 1 \Leftrightarrow 2^4 \cdot k \cdot \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-t} dt = 1$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot k \cdot \Gamma(4) = 1 \Leftrightarrow 16 \cdot k \cdot 3! = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{96}}$$

b) TEMĂ !