

# Structuri de date – Curs 5

Conf. univ. dr. Cristian CIUREA  
Departamentul de Informatică și Cibernetică Economică  
Academia de Studii Economice din București  
[cristian.ciurea@ie.ase.ro](mailto:cristian.ciurea@ie.ase.ro)

# Agenda

- ▶ Matrice rare – concepte de bază
- ▶ Grad de umplere / densitate
- ▶ Reprezentare prin vectori
- ▶ Reprezentare prin liste
- ▶ Reprezentare prin listă de liste
- ▶ Operații pe matrice rare: adunare, înmulțire
- ▶ Tipuri particulare de matrice rare

# Matrice rare

- ▶ conceptul “*sparse matrix*” a fost inventat de *Harry Max Markowitz*, economist american laureat al premiului Nobel;
- ▶ aplicabilitatea în modelarea unor procese de natură industrială, economică, tehnică, socială, etc;
- ▶ matricele rare de mari dimensiuni sunt întâlnite în rezolvarea ecuațiilor diferențiale parțiale.

# Matrice rare

- ▶ fenomenul de *raritate* (*sparsity*) = slabă interconectare a elementelor – ponderea mică a elementelor nenule în totalul elementelor matricei;
- ▶ identificarea de variante alternative de memorare a elementelor matricei pentru reducerea resurselor de memorie și a timpului de calcul.

# Matrice rare

## ► Definiție:

- o matrice  $n \times m$  dimensională este considerată rară dacă conține un număr mic de elemente nenule  $p$ , adică  $p \ll n \times m$ .
- o matrice este rară atunci când folosind o altă modalitate de memorare a elementelor sale se obține un grad de utilizare superior memorării element cu element.

# Matrice rare

## ▶ Matricea:

$A =$

0	0	0	2	9	0	0	0	0	0
1	0	0	3	0	0	0	0	5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0	0	0	0	7
2	1	0	0	0	0	4	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
9	0	0	0	0	5	0	0	0	1
0	0	0	0	1	8	0	0	0	0

- ▶ este o matrice rară pentru că:
  - ▶ dacă este memorată element cu element, fiecare element ocupă  $k$  baiți;
  - ▶ dacă are  $m$  linii și  $n$  coloane, lungimea zonei de memorie  $Lg$  necesară este  $Lg = k * m * n$  baiți.

Pentru cazul dat:  $k=4$ ,  $m=8$ ,  $n=10$ ,  $Lg=4*8*10=320B$ .

# Matrice rare

Se definește **gradul de umplere (densitatea)** unei matrice prin raportul dintre numărul elementelor nenule și numărul total al elementelor sale:

$$G = \frac{p}{n \times m} \times 100 (\%)$$

unde:

- $p$  – numărul de elemente nenule;
- $n$  – numărul de linii;
- $m$  – numărul de coloane.

Se acceptă, în general, că o matrice este rară dacă densitatea sa este de cel mult 30%.

# Matrice rare

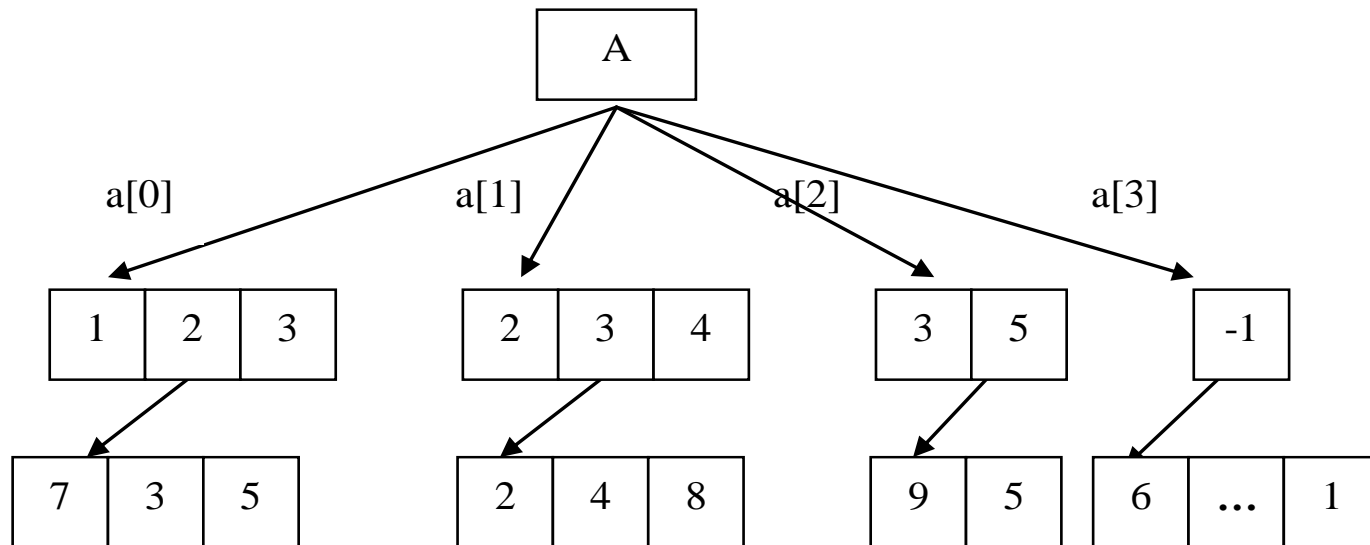
- ▶ în aplicațiile curente se întâlnesc matrice rare cu grade de umplere între 15% și 30%;
- ▶ în cazul în care gradul de umplere nu este suficient de mic astfel încât matricea să fie considerată rară, pentru memorare se utilizează o structură arborescentă care conține pe nivelul al doilea pozițiile elementelor nenule (indicii coloanelor), iar pe nivelul al treilea valorile;
- ▶ s-a adoptat convenția ca liniile complete să fie marcate cu simbolul  $-1$ , fără a mai specifica pozițiile elementelor nenule (indicii coloanelor), care sunt de fapt termenii unei progresii aritmetice.



# Matrice rare

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 6 & 8 & 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{13}{4 \cdot 5} = 0.65 > 0.30$$



# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin vectori:
  - un vector care memorează liniile pe care se află elementele nenule;
  - un vector care memorează coloanele pe care se află elementele nenule;
  - un vector care memorează valorile elementelor nenule.

# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin vectori:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{5}{5 \cdot 4} = 0.25$$

LIN	COL	VAL
1	3	6
2	1	7
3	4	9
4	2	8
4	3	2

# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin vectori:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{lin}[ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{col}[ ] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{val}[ ] = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

# Matrice rare

- Reprezentare prin vectori:

//definire structura matrice rara, reprezentata prin vectori

```
struct MatriceRara
{
    int *val;
    int *lin;
    int *col;
    int m;
    int n;
    int nrnenule;
};
```

# Matrice rare

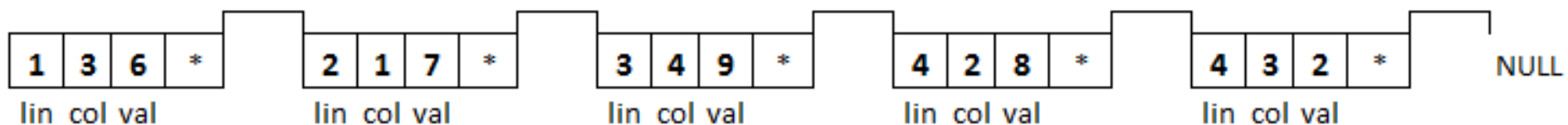
- ▶ Reprezentare prin liste simple:
  - structurarea informației utile în trei câmpuri ce memorează poziția liniei, poziția coloanei, valoarea elementului nenul;
  - definirea în cadrul nodului a variabilei pointer care asigură legătura cu elementul următor din lista simplă;
  - se alocă un număr de elemente în listă corespunzător numărului de elemente nenule din matricea rară.

# Matrice rare

- Reprezentare prin listă simplă:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
//definire nod lista simpla  
struct nod  
{  
    int lin, col, val;  
    struct nod* next;  
};
```



# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin listă dublă:

//definire nod lista dubla  
struct nod

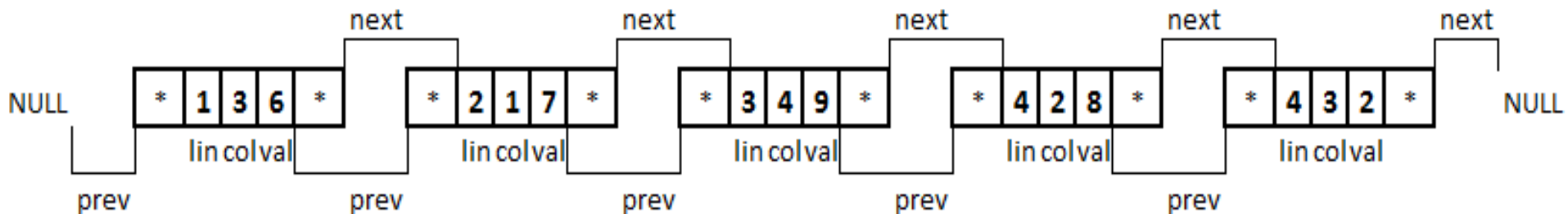
{

int lin, col, val;

struct nod \*next, \*prev;

};

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin listă de liste:
  - memorarea elementelor nenule de pe aceeași linie se realizează în cadrul unei subliste;
  - implică apariția unui număr ridicat de pointeri;
  - există situații în care acest mod de memorare este neperformant;
  - procesul de căutare este mai bun.

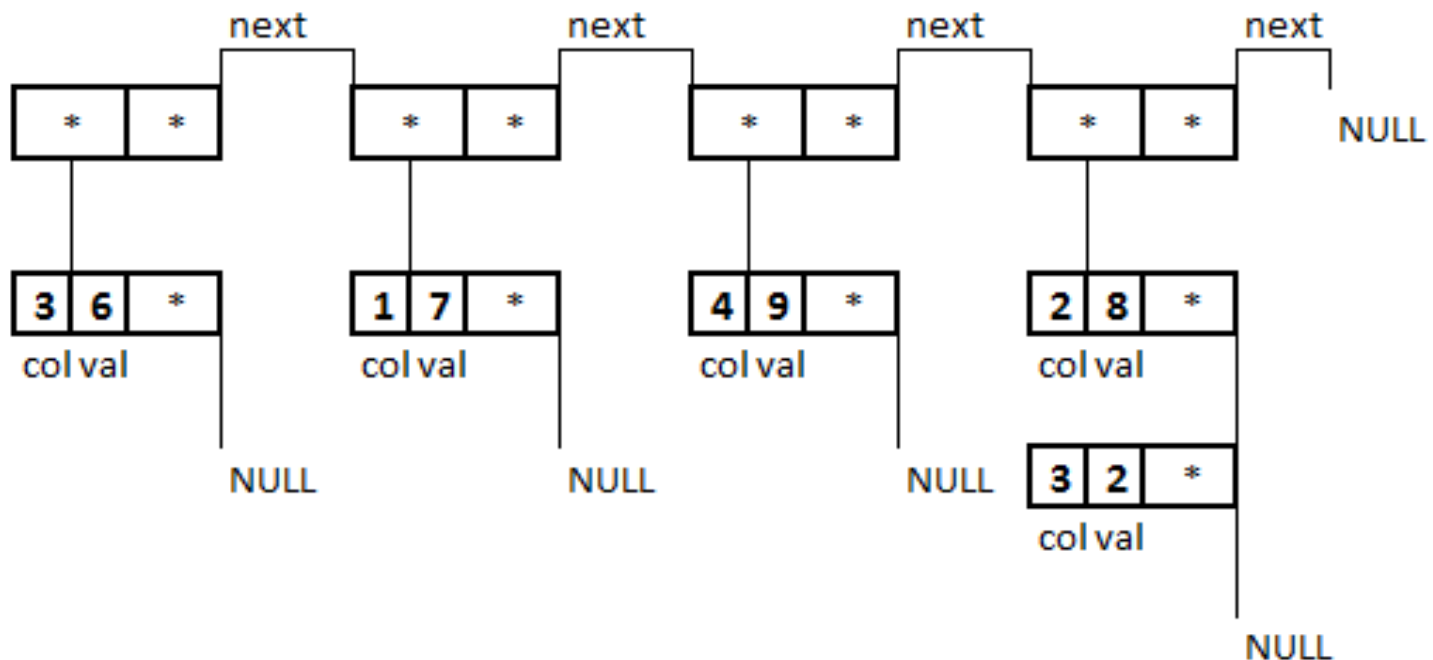
# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin listă de liste:
  - se construiește o listă de  $n$  subliste, unde  $n$  este numărul de linii ale matricei;
  - fiecare nod al listei principale conține un pointer către o sublistă având informațiile utile reprezentate de indicii coloanelor pe care se află elementele nenule și, respectiv, de valorile acestor elemente.

# Matrice rare

- ▶ Reprezentare prin listă de liste:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Matrice rare

- ▶ **Adunarea matricelor rare** presupune parcurgerea următorilor pași:
  - determinarea numărului de elemente nenule ale matricei sumă;
  - alocarea memoriei corespunzătoare acestui număr;
  - determinarea acelor elemente din prima matrice care nu au corespondent în cea de-a doua și adăugarea lor la matricea sumă;
  - determinarea elementelor din cea de-a doua matrice care nu au corespondent în prima și adăugarea lor la matricea sumă;
  - determinarea elementelor comune celor două matrice, însumarea lor și adăugarea la matricea sumă.

# Matrice rare

- ▶ adunarea matricelor rare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matrice rare

- ▶ adunarea matricelor rare:

linA [ ] = 

1	2	3	4	4
---	---	---	---	---

colA [ ] = 

3	1	4	2	3
---	---	---	---	---

valA [ ] = 

6	7	9	8	2
---	---	---	---	---

linB [ ] = 

1	2	3	3	4
---	---	---	---	---

colB [ ] = 

2	5	1	4	3
---	---	---	---	---

valB [ ] = 

4	3	5	-9	1
---	---	---	----	---

linC [ ] = 

1	1	2	2	3	4	4
---	---	---	---	---	---	---

colC [ ] = 

2	3	1	5	1	2	3
---	---	---	---	---	---	---

valC [ ] = 

4	6	7	3	5	8	3
---	---	---	---	---	---	---

# Matrice rare

- ▶ **Înmulțirea matricei rare  $A$ ,  $(m, l)$  – dimensională, cu matricea rară  $B$ ,  $(l, n)$  – dimensională, presupune o modificare a procedurii standard, considerând influența liniilor matricei  $A$  asupra matricei produs  $C$ ,  $(m, n)$  – dimensională, prin coloanele matricei  $B$ .**
- ▶ procedura standard de înmulțire se modifică astfel încât în bucla internă să se execute toate operațiile corespunzătoare unui element al matricei  $A$ .

# Matrice rare

- ▶ întrucât elementul  $a_{ik}$  al matricei  $A$  poate contribui la formarea tuturor elementelor liniei  $i$  a matricei  $C$ , se determină mai întâi această contribuție după care se continuă cu următorul element al liniei  $i$  a matricei  $A$ , până la determinarea completă a liniei  $i$  a matricei  $C$ .



# Matrice rare

- ▶ Tipuri particulare de matrice rare:
  - Matrice rară bandă
  - Matrice rară triunghiulară
  - Matrice de permutare

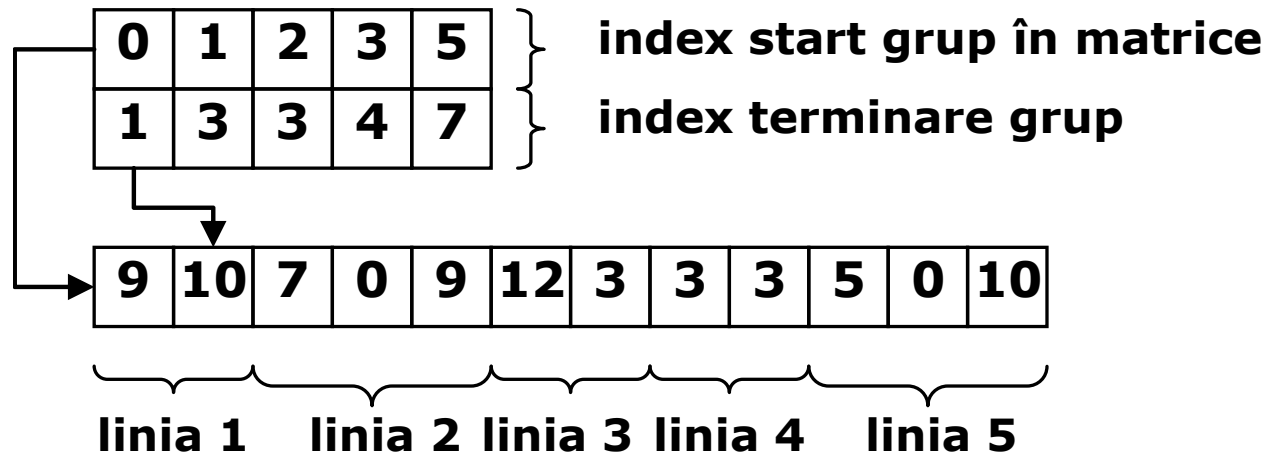
# Matrice rare

- ▶ Matrice rară bandă:
  - ▶ elementele nenule sunt plasate în interiorul matricei, în jurul diagonalei principale.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

# Matrice rare

- ▶ Matrice rară bandă:
  - ▶ minimizarea memoriei ocupate se realizează prin reducerea informațiilor necesare localizării elementelor;
  - ▶ pentru fiecare linie se reține indexul primei și ultimei valori din grupul de valori nenule.



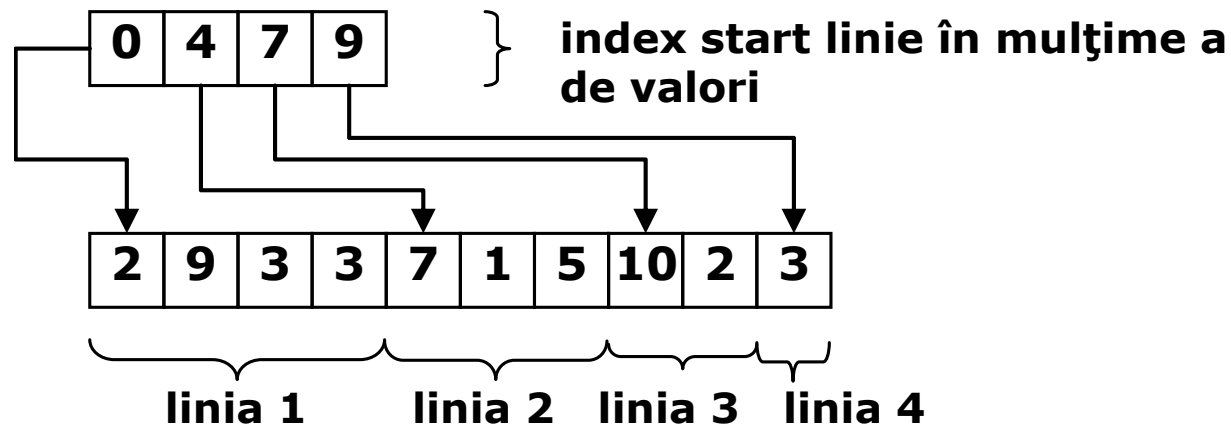
# Matrice rare

- ▶ Matrice rară triunghiulară:
  - ▶ o matrice pătratică în care toate valorile aflate sub diagonala principală sunt 0.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# Matrice rare

- ▶ Matrice rară triunghiulară:
  - ▶ ponderea elementelor nenule nu este suficient de mică pentru a fi considerată o matrice rară;
  - ▶ memorarea într-un masiv unidimensional a valorilor nenule și indicarea indexului de început a valorilor de pe fiecare linie.



# Matrice rare

- ▶ Matrice de permutare:
  - ▶ fiecare linie sau coloană conține o singură valoare 1 (unu), în rest elementele fiind nule;
  - ▶ utilizată în operații algebrice pentru a permuta elementele unui vector conform unui model stabilit anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrice rare

- ▶ Matrice de permutare:
  - ▶ dacă se consideră matricea de permutare  $A$  și vectorul  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , prin înmulțirea  $X * A$  se obține vectorul  $XP = \{3, 4, 2, 1, 5\}$ ;
  - ▶ valorile memorate pentru a reprezenta corect matricea de permutare sunt reprezentate de rangul matricei pătratică și indexul coloanei pe care se găsește valoarea unu de pe fiecare linie.

**n = 5** → **ordinul matricei pătratică**

3	2	0	1	4
---	---	---	---	---

pe linia  $i = 2$ , valoarea 1 se găsește pe coloana  $j = 0$

# Bibliografie

- ▶ Ion Ivan, Marius Popa, Paul Pocatilu (coordonatori) – *Structuri de date*, Editura ASE, București, 2008.
  - Cap. 6. Matrice rare