

Laborator 5: Supravegherea video.

Metoda multiplicatorilor cu direcție alternantă (ADMM)

În acest laborator rezolvăm problema analizei componentelor principale (PCA) robustă utilizând ADMM. Aplicația reprezintă o etapă din supravegherea video, mai exact identificarea prim-planului (*engl. foreground*) de fundal (*engl. background*).

1 Metoda multiplicatorilor cu direcție alternantă

Metoda multiplicatorilor cu direcție alternantă (ADMM) [1] este un algoritm care rezolvă problemele de optimizare convexă prin împărțirea lor în probleme mai mici, fiecare dintre acestea fiind mai ușor de gestionat. ADMM rezolvă probleme de optimizare de forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m} f(x) + g(z) \quad & \text{funcția e separabilă, } \min f(x), \min g(x) \\ \text{s.t. } AX + Bz = c \quad & \text{x nu X} \end{aligned}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ și $c \in \mathbb{R}^p$. Observați că funcția obiectiv este separabilă în x respectiv z , legătura între variabile având loc prin intermediul constrangerii de egalitate. În prima etapă a algoritmului, se formulează **funcția Lagrange augmentată**:

$$L_\rho(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + (\rho/2)\|Ax + Bz - c\|_2^2$$

Observați că la funcția Lagrange (cea obișnuită) s-a adăugat și un termen de regularizare. Noul termen adăugat asigură **robustetea** metodei și o **convergență mai bună fără alte presupuneri cum ar fi convexitatea strictă sau continuitatea funcției**. Regulile de actualizarea ale ADMM-ului sunt:

fixează z-ul, y-ul și minimizează după x

$$\begin{aligned} x^{k+1} &:= \operatorname{argmin}_x L_\rho(x, z^k, y^k) \\ z^{k+1} &:= \operatorname{argmin}_z L_\rho(x^{k+1}, z, y^k) \\ y^{k+1} &:= y^k + \rho(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c), \end{aligned} \tag{1}$$

Funcția obiectiv ($f(x_{k+1}) + g(y_{k+1})$) converge către $f^* + g^*$ (cu rata $O(\frac{1}{k})$).

2 Formularea problemei PCA robusta

Input: Fie o matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ data.

Scopul: Dorim sa gasim o matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de rang mic si $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ rara astfel incat

$$X = L + S.$$

Considerand cerintele de mai sus putem formula urmatoarea problema de optimizare constransa:

$$\min_{L, S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1$$

$$\text{s.l.: } X = L + S$$

S - prim planul, obiectele care se misca

L - rang mic, (relaxare convexa, norma nucleara)

L = rang 1

unde $\|\cdot\|_*$ este norma nucleara (suma de valori singulare) si $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru cu care controlam nivelul de raritate din S .

lambda - cat de rar sa fie S

$$\mathcal{L}_\rho(x, y, \lambda) = \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 + \frac{\rho}{2} \|L + S - X\|_F^2 + \frac{1}{2\rho} \|\lambda\|_F^2.$$

Aplicand ADMM gasim urmatoarele expresii:

$$L_{K+1} = \arg \min_L \left\{ \|L\|_* + \frac{\rho}{2} \|L + S_k - X + \frac{1}{\rho} \Lambda_k\|_F^2 \right\}$$

$$S_{K+1} = \arg \min_S \left\{ \lambda \|S\|_1 + \frac{\rho}{2} \|L_{k+1} + S - X + \frac{1}{\rho} \Lambda_k\|_F^2 \right\}$$

asta e proxy, ca avem lambda ori norma 1 + ceva la patrat

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \rho(L_{K+1} + S_{K+1} - X)$$

nu pot sa aplic dvs pe Lk+1 ca pe asta il caut

Aplicam conditia de optimalitate pentru a gasi expresia explicita a lui L_{k+1} :

$$\nabla \left(\|L_{k+1}\|_* + \frac{\rho}{2} \|L_{k+1} + S_k - X + \frac{1}{\rho} \Lambda_k\|_F^2 \right) = 0$$

Amintim ca daca cunoastem descompunerea DVS $L_{k+1} = U_{k+1} \Sigma_{k+1} V_{k+1}^T$, atunci $\nabla \|L_{k+1}\|_* = U_{k+1} V_{k+1}^T$. Astfel avem:

$$U_{k+1} V_{k+1}^T + \rho \left(L_{k+1} + S_{k+1} - X + \frac{1}{\rho} \Lambda_k \right) = 0$$

$$U_{k+1} \left[\Sigma_{k+1} + \frac{1}{\rho} \mathbb{I} \right] V_{k+1}^T = X - S_k - \frac{1}{\rho} \Lambda_k.$$

Daca DVS-ul lui $X - S_k - \frac{1}{\rho} \Lambda_k = U_{k+1} \Upsilon V_{k+1}^T$ atunci:

$$\Sigma_{k+1} + \frac{1}{\rho} \mathbb{I} = \Upsilon$$

identitatea

Ceea ce in final obtinem:

gama - 1/ro identitatea

$$L_{k+1} = U \left[\Upsilon - \frac{1}{\rho} \mathbb{I} \right]_+ V^T,$$

cum sunt val singulare mereu? sunt in ordine descrescatoare si sunt tot timpul pozitive

unde $U\Upsilon V^T = SVD(X - S_k - \frac{1}{\rho}\Lambda_k)$.

Prin urmare formulele explicite ale ADMM-ului sunt:

$$L_{k+1} = SVT_{\frac{1}{\rho}} \left(X - S_k - \frac{1}{\rho}\Lambda_k \right) \quad (2)$$

$$S_{k+1} = ST_{\frac{\lambda}{\rho}} \left(X - L_{k+1} - \frac{1}{\rho}\Lambda_k \right) \quad (3)$$

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \rho(L_{k+1} + S_{k+1} - X) \quad (4)$$

unde functiile $SVT_{\alpha}(A)$ si $ST_{\alpha}(A)$ au expresiile:

$$SVT_{\alpha}(A) = U[\Sigma - \alpha\mathbb{I}]_+V', \text{ stiind } A = U\Sigma V^T$$

si

$$(ST_{\alpha}(A))_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} - \alpha & \text{if } A_{i,j} > \alpha \\ 0 & \text{if } |A_{i,j}| \leq \alpha \\ A_{i,j} + \alpha & \text{if } A_{i,j} < -\alpha \end{cases}$$

3 Aplicatia: Monitorizarea video

Un video este o secventa de imagini:



Fiecare imagine (frame) din video este transformata intr-un vector si adaugata intr-o matrice $X^{n \times m}$, unde m este numarul de imagini si n este numarul de pixeli intr-o imagine.

Se stie ca un fundal static dintr-un video este reprezentat de o matrice de rang mic (mai exact rangul 1). Iar prim-planul, ce contine obiecte in miscare este o matrice rara:



Originale Frame

Low_Rank "L"
background

Sparse "S"
prim plan

Prin urmare putem aplica formularea PCA robusta pentru a realiza aceasta descompunere a lui X .

4 Cerinte

Pentru video-ul *visiontraffic.avi*, implementati algoritmul ADMM.

- Un frame are dimensiunile 360×640 si selectam 30 de frame-uri $\Rightarrow X^{230400 \times 30}$.
- Criteriul de oprire este $\text{rank}(L_{k+1}) = 1$
- Initializati $\rho = 0.007$ si $\lambda = 0.0002$. Atentie! Daca ρ este prea mare algoritmul ADMM nu va converge.
- Afisati rezidul ($\|L_{k+1} + S_{k+1} - X\|$) de a lungul iteratiilor.
- Alegeti aleator un frame i si afisati descompunerea gasita, i.e fundalul si prim-planul asociat frame-ului i .
- Hint: Pentru o viteza buna de executie, evitati folosirea *for*-urilor in implementare.

References

- [1] <https://stanford.edu/~boyd/admm.html#:~:text=The%20alternating%20direction%20method%20of,are%20then%20easier%20to%20handle>.

afisam rangul lui L, daca scade, e bine

S = rand
gama = e de tip diag, lambda * matricea diag