Elemente de teoria jocurilor (II)
Sinteză

Jocuri strategice (continuare)

Unele jocuri nu au echilibru Nash pur. Folosind o strategie pură, agentul i alege determinist strategia s_{ij} din mulțimea S_i. Folosind o strategie mixtă, agentul i alege strategia s_{ij} cu probabilitatea p_{ij}, astfel încât $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$. O strategie mixtă reprezintă o combinație de strategii cu probabilități fixe (probabilitățile sunt fixe, nu strategiile alese la un moment dat). De exemplu, un agent alege strategia A cu probabilitatea de 25% și strategia B cu probabilitatea de 75%.

Un joc finit are întotdeauna cel puțin un echilibru Nash pur sau mixt.

O strategie mixtă are întotdeauna un echilibru Nash.

Câștigul în strategii mixte este *câștigul așteptat*.

Calculul echilibrului Nash mixt

		Cerșetorul	
		Muncește	*Nu muncește*
Guvernul	*Ajută*	3, 2	-1, 3
	Nu ajută	-1, 1	0, 0

Determinarea strategiei pentru *Cerșetor*:

$3 \cdot x + (-1) \cdot (1 - x) = (-1) \cdot x + 0 \cdot (1 - x)$
$\Rightarrow x = 0.2,\ 1 - x = 0.8$

Determinarea strategiei pentru *Guvern*:

$2 \cdot y + 1 \cdot (1 - y) = 3 \cdot y + 0 \cdot (1 - y)$
$\Rightarrow y = 0.5,\ 1 - y = 0.5$

Un rezultat este *optim Pareto* dacă este mai bun sau la fel decât orice alt rezultat din toate punctele de vedere și mai bun strict din cel puțin un punct de vedere. Optimalitatea Pareto înseamnă o situație mai bună pentru cel puțin un agent fără a dezavantaja niciun alt agent.

Într-o stare optimă Pareto, agenții nu au motivația de a devia *în coaliție*. În cazul dilemei deținutului, ambii agenți au un câștig mai mare împreună dacă ambii neagă.

		Deținutul 2	
		Neagă	*Mărturisește*
Deținutul 1	*Neagă*	-1, -1	-5, 0
	Mărturisește	0, -5	-3, -3

Jocuri cooperante cu doi agenți

În jocurile necooperante, se presupune că agenții sunt raționali și egoiști. Prin cooperare, agenții pot obține un câștig mai mare. Problema este *împărțirea câștigului suplimentar* obținut.

Soluția pentru un joc cooperant cu doi agenți: câștigul total este valoarea maximă din matricea sumă, iar diferența de câștig dintre agenți este diferențiala amenințării.

Exemplu:

		Peugeot F	Peugeot M
Renault	F	$(-10, -40)$	$(40, 10)$
	M	$(10, 40)$	$(-40, -10)$

Matricea sumă (engl. "sum matrix") a jocului reflectă câștigul total care poate fi obținut prin cooperare:

$$R + P = \begin{bmatrix} -50 & 50 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}$$

Matricea amenințărilor (engl. "threat matrix") este utilizată pentru descrierea puterii de negociere a agenților:

$$R - P = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix}$$

Diferențiala amenințării (engl. "threat differential") este valoarea jocului pentru matricea amenințărilor, în acest caz, 30.

Nu contează strategiile jucate, atât timp cât se obține câștigul total și se respectă modul de împărțire a acestuia. Pentru strategiile (*R:F* / *P:M*), câștigurile agenților sunt cele date direct de rezultatul jocului. Pentru strategiile (*R:M* / *P:F*), *P* trebuie să îi plătească 30 de unități lui *R*.

Jocuri cooperante cu n agenți

O *alocare* (engl. "imputation") este mulțimea de câștiguri (x_1, x_2, ..., x_n) care satisface următoarele condiții: suma câștigurilor este maximul posibil, iar fiecare agent obține un câștig cel puțin la fel de bun ca acela obținut dacă nu ar coopera.

Nucleul (engl. "core") unui joc cu *n* agenți este mulțimea alocărilor nedominate. Nucleul unui joc cu funcția caracteristică *v* este mulțimea tuturor alocărilor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ astfel încât, pentru orice coaliție $S = \{P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}\}$, avem: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im} \geq v(S)$.

Orice alocare din nucleu poate fi privită ca o soluție a jocului.

Nucleul este *stabil*.

Dacă o alocare nu se află în nucleu, atunci există cel puțin o coaliție ai cărei membri nu obțin câștigul maxim pe care l-ar putea obține altfel. Acești agenți preferă o altă alocare.

Exemplu: 3 studenți doresc să cumpere o carte, care costă 110$. Pentru 2 cărți sau 3 cărți cumpărate împreună, există o reducere de 10$, respectiv 20$ / exemplar. Valorile coalițiilor exprimă banii economisiți. Această reprezentare a jocului se numește *formă caracteristică*.

$$\nu(\{P_1\}) = \nu(\{P_2\}) = \nu(\{P_3\}) = 0,$$
$$\nu(\{P_1, P_2\}) = \nu(\{P_1, P_3\}) = \nu(\{P_2, P_3\}) = 20, \ \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 60$$

Fie **x** = (x_1, x_2, x_3) o alocare din nucleu. Atunci:

$$x_1 \geq \nu(\{P_1\}) = 0, \ x_2 \geq \nu(\{P_2\}) = 0, \ x_3 \geq \nu(\{P_3\}) = 0,$$
$$x_1 + x_2 \geq \nu(\{P_1, P_2\}) = 20, \ x_1 + x_3 \geq \nu(\{P_1, P_3\}) = 20,$$
$$x_2 + x_3 \geq \nu(\{P_2, P_3\}) = 20, \text{ and } x_1 + x_2 + x_3 = \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 60.$$

Nucleul oferă o mulțime de soluții pentru un joc.
Unele jocuri nu au nucleu.
Nu există o modalitate de a evalua „corectitudinea" alocărilor din nucleu.

Valoarea Shapley se bazează pe ideea că fiecare agent trebuie să primească un câștig corespunzător contribuției sale marginale la coalițiile posibile. Pentru *n* agenți, există *n*! ordonări în care un agent se poate alătura celorlalți. Valoarea Shapley reprezintă media după toate ordonările posibile:

$$\phi(A, i) = \frac{1}{A!} \sum_{\pi \in \Pi_A} v(B(\pi, i) \cup i) - v(B(\pi, i))$$

Exemplu: Fie un joc cu 2 agenți și următoarea formă caracteristică: $v(\{\ \}) = 0$, $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{1, 2\}) = 6$. Sunt 2! permutări posibile: (1, 2) și (2, 1). Valorile Shapley sunt:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \frac{1}{2} \cdot (v(1) - v() + v(21) - v(2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - 0 + 6 - 3) = 2 \\ \phi(2) &= \frac{1}{2} \cdot (v(12) - v(1) + v(2) - v()) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (6 - 1 + 3 - 0) = 4 \end{aligned}$$

Valoarea Shapley există întotdeauna, este unică și este întotdeauna fezabilă (suma câștigurilor agenților este maximă). Poate să nu aparțină nucleului, chiar dacă jocul are nucleu; în acest caz, este instabilă.

Nucleul unui joc convex este întotdeauna nevid, iar valoarea Shapley aparține nucleului și este în centrul său de greutate.