



Inteligentă artificială

12. Rețele bayesiene

Florin Leon

Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași
Facultatea de Automatică și Calculatoare

Universitatea „Al. I. Cuza” din Iași
Facultatea de Informatică

Florin Leon - Inteligența artificială

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html

Rețele bayesiene

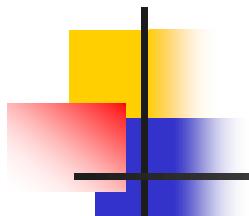
1. Probabilități
2. Rețele bayesiene
3. Inferențe exacte și aproximative
4. Rețele bayesiene dinamice
5. Filtrarea cu particule
6. Concluzii



Rețele bayesiene

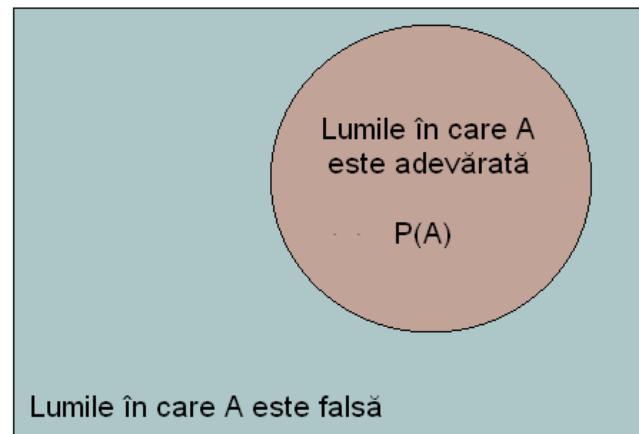
1. Probabilități
 - 1.1. Teorema lui Bayes
 - 1.2. Independentă și independentă condiționată
2. Rețele bayesiene
3. Inferențe exacte și aproximative
4. Rețele bayesiene dinamice
5. Filtrarea cu particule
6. Concluzii





Probabilități

- Interpretarea frecventistă (număr de experimente)
 - $P(A)$ este fractiunea de lumi posibile în care A este adevărată



- Interpretarea subiectivistă (caracterizarea convingerilor, grade de încredere)

„Probabilități deterministe”

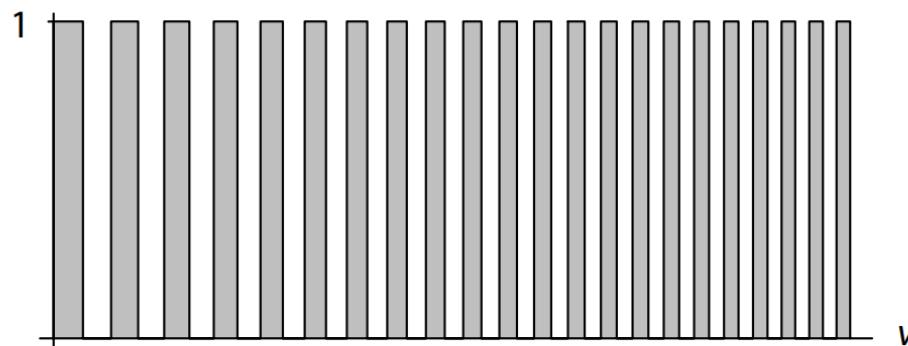


FIG. 1. Evolution function for a simple wheel of fortune, mapping initial spin speed v to either 1 (red) or 0 (black). The area under the function, corresponding to red-yielding values of v , is for clarity's sake shaded gray.

„Probabilități deterministe”

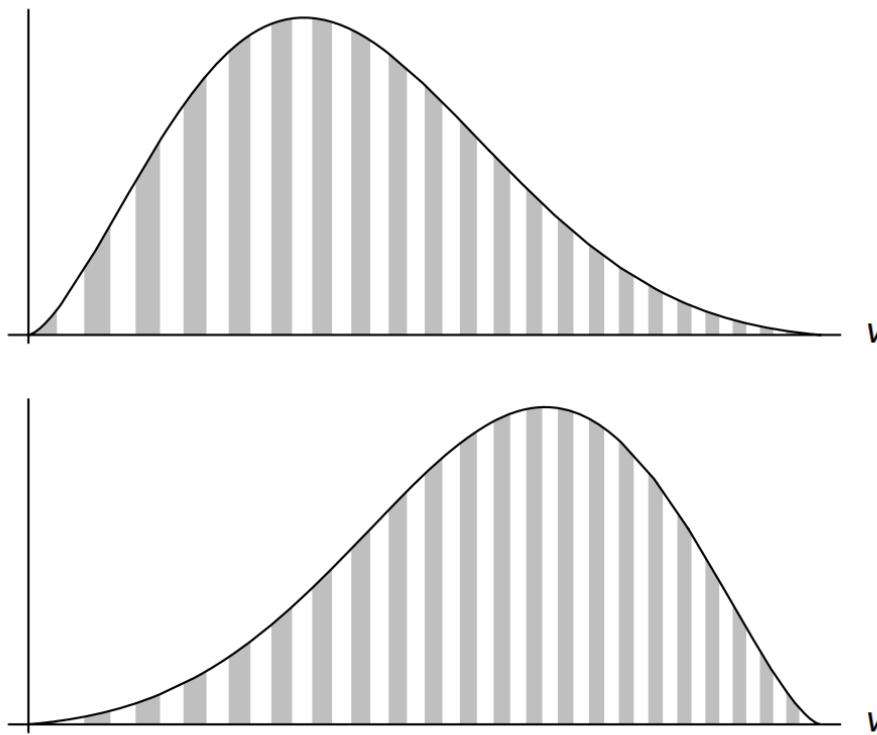
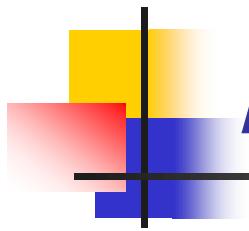


FIG. 2. Different spin speed distributions induce the same probability for *red*, equal to the strike ratio for *red* of one half.



„Probabilități deterministe”

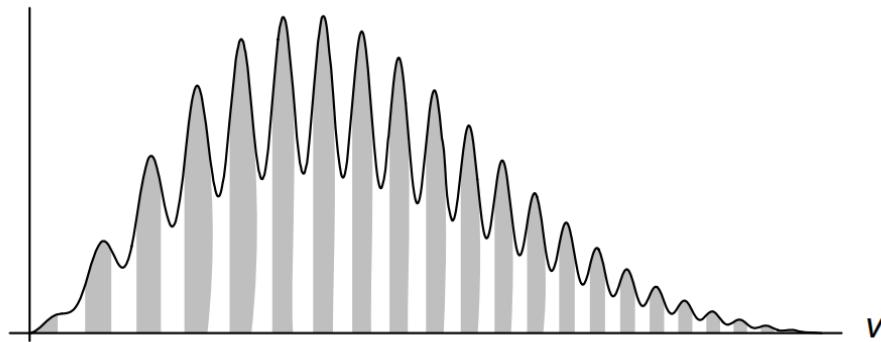
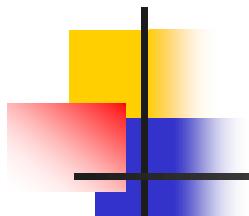


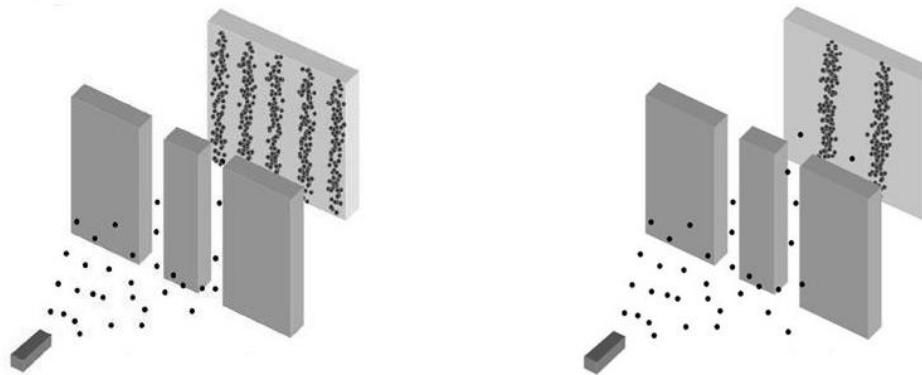
FIG. 3. Not every initial-spin-speed distribution induces a probability for *red* of one half.



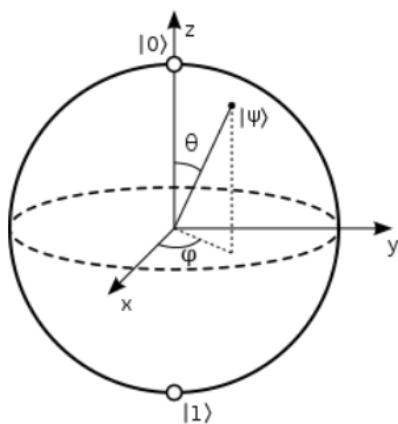
Probabilități

- Lumea macroscopică
 - Probabilitățile sunt doar o măsură a incapacității de a prezice evoluția unor procese complexe?
- Lumea cuantică
 - Procese unpredictibile: descompunerea radioactivă
 - *Double-slit experiment, quantum pigeonholes*
 - Amplitudini de probabilitate
 - Calcul cuantic: qubiți

Lumea cuantică



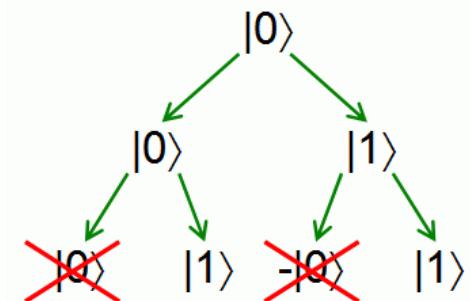
Double-slit experiment



Sfera Bloch

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

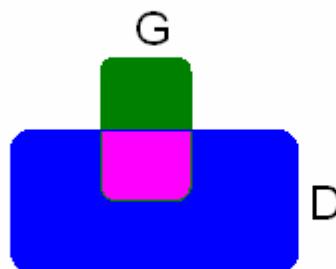
Amplitudini de probabilitate



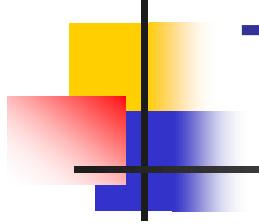
Interferență cu poarta Hadamard

Probabilități condiționate

- $P(A|B)$ este fractiunea de lumi posibile în care B este adevărată și atunci și A este adevărată
 - Probabilitatea lui A , dat fiind B



- D = durere de cap, $P(D) = 1/10$
- G = gripă, $P(G) = 1/40$
- $P(D|G) = 1/2$
- Dacă cineva are gripă, probabilitatea de a avea și dureri de cap este de 50%
- $P(D|G) = P(D \cap G) / P(G)$



Teorema lui Bayes

- $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

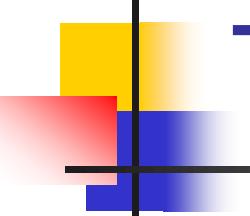
- $\Rightarrow P(B|A) = P(A|B) \cdot P(B) / P(A)$

probabilitatea
a posteriori
(*posterior*)

verosimilitatea
(*likelihood*)

probabilitatea
a priori
(*prior*)

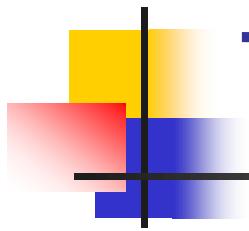
evidența
(*evidence*)



Teorema lui Bayes

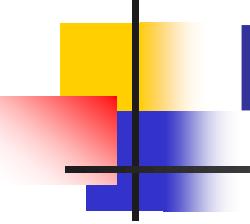
- $P(B|A) = P(A|B) \cdot P(B) / P(A)$
- Thomas Bayes (1763). *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 53, pp. 370-418





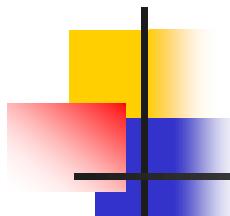
Teorema lui Bayes

- $P(I|E) = P(E|I) \cdot P(I) / P(E)$
 - I = ipoteza, cauza
 - E = evidență (observația), efectul



Diagnoză

- Probabilități cunoscute
 - **Meningită:** $P(M) = 0,002\%$
 - **Gât întepenit:** $P(G) = 5\%$
 - Meningita cauzează gât întepenit în jumătate din cazuri: $P(G|M) = 50\%$
- Dacă un pacient are gâtul întepenit, care este probabilitatea să aibă meningită?
 - $P(M|G) = P(G|M) \cdot P(M) / P(G) = 0,02\%$



Diagnoză



- Greșeală întâlnită uneori: $P(A|B) = P(B|A)$
- Diagnostice pentru boli rare
 - Trebuie avută în vedere probabilitatea testului de a returna rezultate fals pozitive

$$P(B) = 0,01$$

$$P(T|B) = 0,99$$

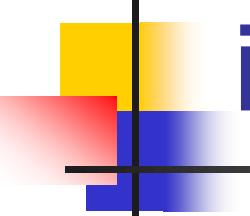
$$P(T|\neg B) = 0,02.$$



B – boala

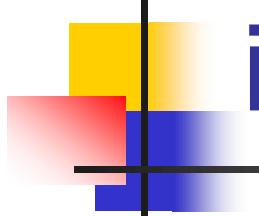
T – test

$$P(B|T) = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|\neg B) \cdot P(\neg B)} = 0,33$$



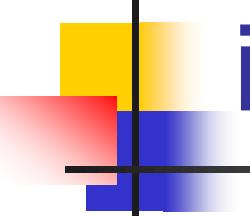
Independentă și independentă condiționată

- Exemplul 1. Ion și Maria dau cu banul de 100 de ori. Fiecare are un ban diferit
 - Evenimente independente
 - Rezultatul unui experiment nu influențează rezultatul celuilalt experiment



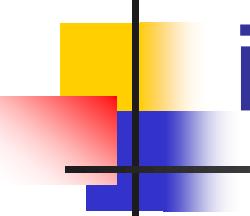
Independentă și independentă condiționată

- Exemplul 2a. Ion și Maria dau cu același ban
 - Dacă banul nu este corect, evenimentul A (Ion) poate aduce informații asupra evenimentului B (Maria)
 - Evenimentele nu sunt independente
 - Rezultatul unui experiment poate influența cunoștințele despre rezultatul celuilalt



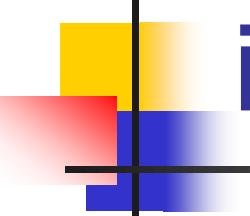
Independentă și independentă condiționată

- Exemplul 2b. Fie C variabila „banul este influențat în favoarea pajurei”
 - Dacă știm C , experimentul A nu mai aduce informații noi asupra lui B
 - $P(B|A,C) = P(B|C)$
 - A și B sunt **independente condiționat** dat fiind C
 - Situație numită „cauză comună”



Independentă și independentă condiționată

- Exemplul 3. Ion și Maria locuiesc în zone diferite ale orașului și vin la serviciu cu tramvaiul, respectiv mașina
 - „Ion a întârziat” și „Maria a întârziat” pot fi considerate independente
 - Dacă vatmanii sunt în grevă, atunci și traficul rutier crește. Evenimentele sunt independente *condiționat*
- Există multe situații în viața reală în care evenimente considerate independente sunt de fapt independente condiționat



Independentă și independentă condiționată

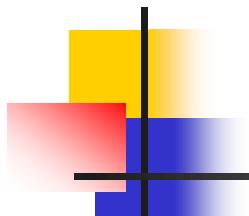
- Exemplul 4. Atât răceala cât și alergia îl pot determina pe Ion să strănuiește
 - Dacă nu știm că Ion a strănutat, răceala și alergia sunt independente
 - Dacă știm că Ion a strănutat, răceala și alergia nu mai sunt independente
 - Creșterea probabilității răcelii scade probabilitatea alergiei și viceversa
 - Situație numită **revocare prin explicare** (*explaining away*)

Distribuție comună de probabilitate

- 3 variabile binare: $2^3 - 1 = 7$ parametri independenti

x	y	z	$p(x, y, z)$
0	0	0	0.12
0	0	1	0.18
0	1	0	0.04
0	1	1	0.16
1	0	0	0.09
1	0	1	0.21
1	1	0	0.02
1	1	1	0.18

← 1 – suma celorlalți



Reprezentarea cunoștințelor incerte

- O situație cu 5 variabile binare (exemplul următor)
 - Specifică o distribuție comună de probabilitate cu $2^5 - 1 = 31$ parametri
 - Fezabil
- Un sistem expert cu 37 de variabile binare pentru monitorizarea pacienților de la terapie intensivă
 - $2^{37} - 1 \approx 10^{11}$ parametri
 - Nefezabil

Reprezentarea distribuției comune de probabilitate

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1)P(x_{n-1}, \dots, x_1)$$

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) &= P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1)P(x_{n-1}|x_{n-2}, \dots, x_1) \cdots P(x_2|x_1)P(x_1) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1). \end{aligned}$$

Regula de înmulțire
a probabilităților
(*chain rule*)

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i|parents(X_i))$$

Este adevărată doar dacă fiecare nod este independent condiționat de predecesorii din sirul ordonat al nodurilor, dați fiind părintii nodului

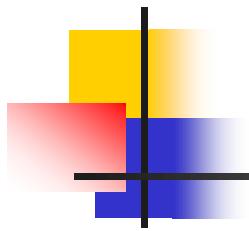
$$\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \dots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause) \prod_i \mathbf{P}(Effect_i | Cause)$$

Dacă efectele sunt considerate independente \Rightarrow Naïve Bayes

Rețele bayesiene

1. Probabilități
2. Rețele bayesiene
 - 2.1. Algoritmul Bayes-Ball
3. Inferențe exacte și aproximative
4. Rețele bayesiene dinamice
5. Filtrarea cu particule
6. Concluzii



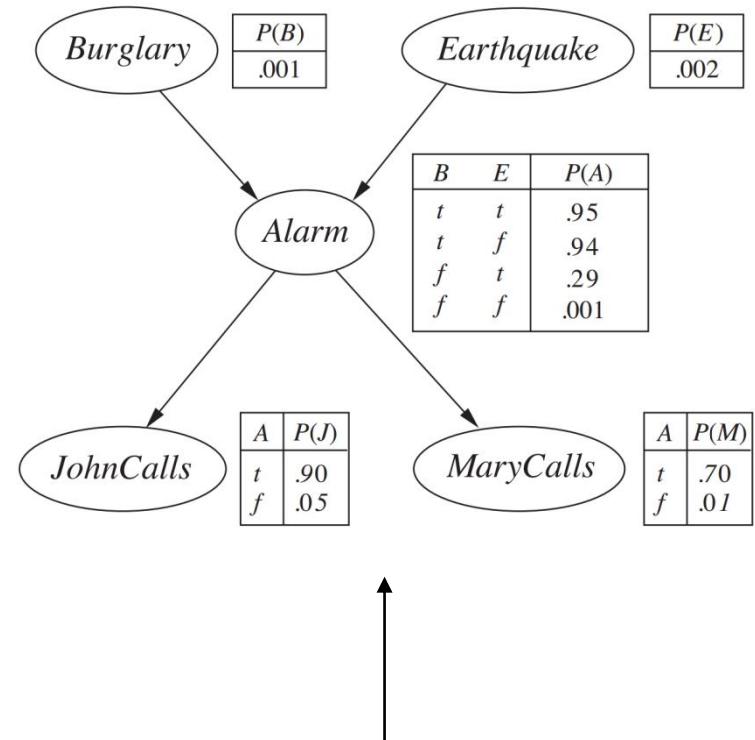


Rețea bayesiană

- O rețea bayesiană este un model grafic probabilistic, adică un graf cu o mulțime de noduri, care reprezintă evenimente aleatorii, conectate de arce, care reprezintă dependențe condiționate între evenimente

Exemplu

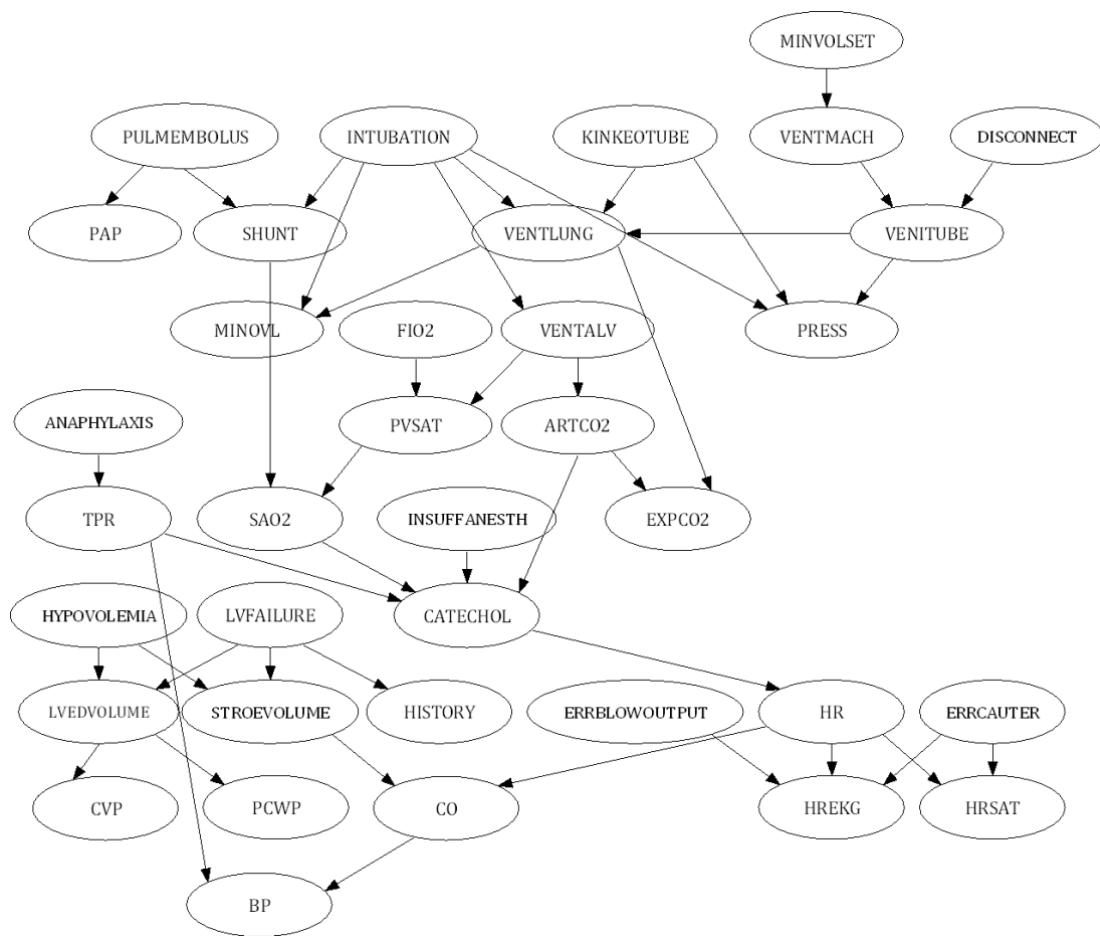
- S-a instalat un nou sistem de alarmă, care sună în cazul unei spargeri, dar și în cazul unui cutremur
- Vecinii John și Mary îl sună pe proprietar la serviciu dacă aud alarma
- 10 parametri independenți față de 31



Rețea bayesiană

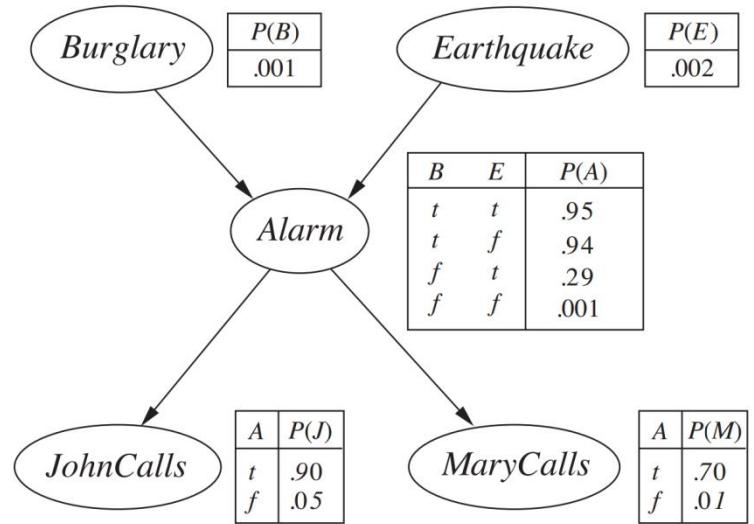
Comparatie

- Sistem expert pentru monitorizarea pacienților de la terapie intensivă
 - 37 variabile
 - 509 parametri în loc de 10^{11} (100.000.000.000)



Interogări simple

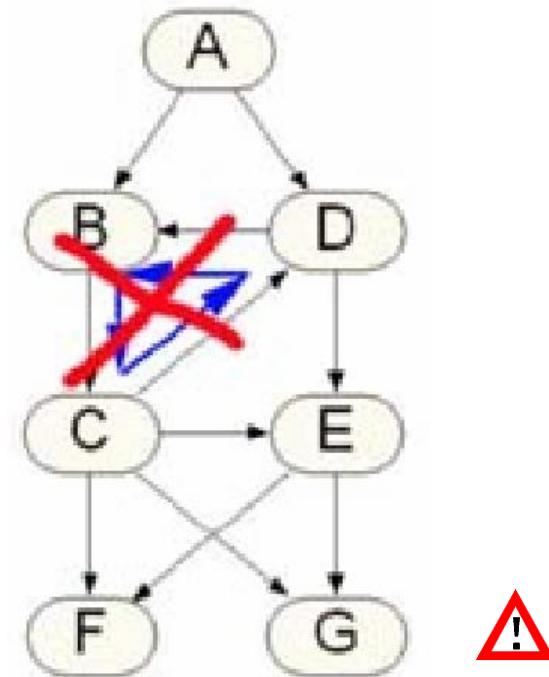
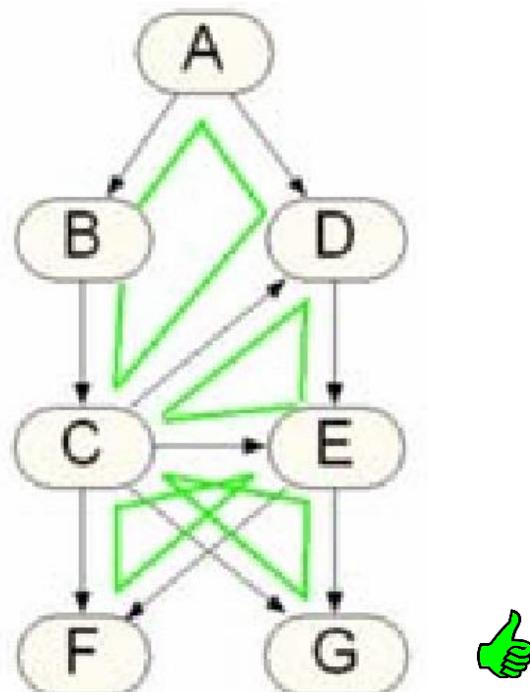
- Care este probabilitatea ca alarma să se declanșeze fără să fi fost nicio spargere și niciun cutremur, iar John și Mary să sună?

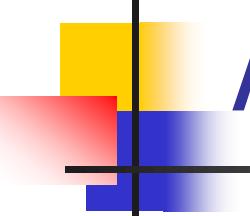


$$\begin{aligned}
 P(j, m, a, \neg b, \neg e) &= P(j | a)P(m | a)P(a | \neg b \wedge \neg e)P(\neg b)P(\neg e) \\
 &= 0.90 \times 0.70 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.998 = 0.000628
 \end{aligned}$$

Validitatea unei rețele bayesiene

- O rețea bayesiană este un graf orientat aciclic
- Arcele pot forma bucle, dar nu pot forma cicluri

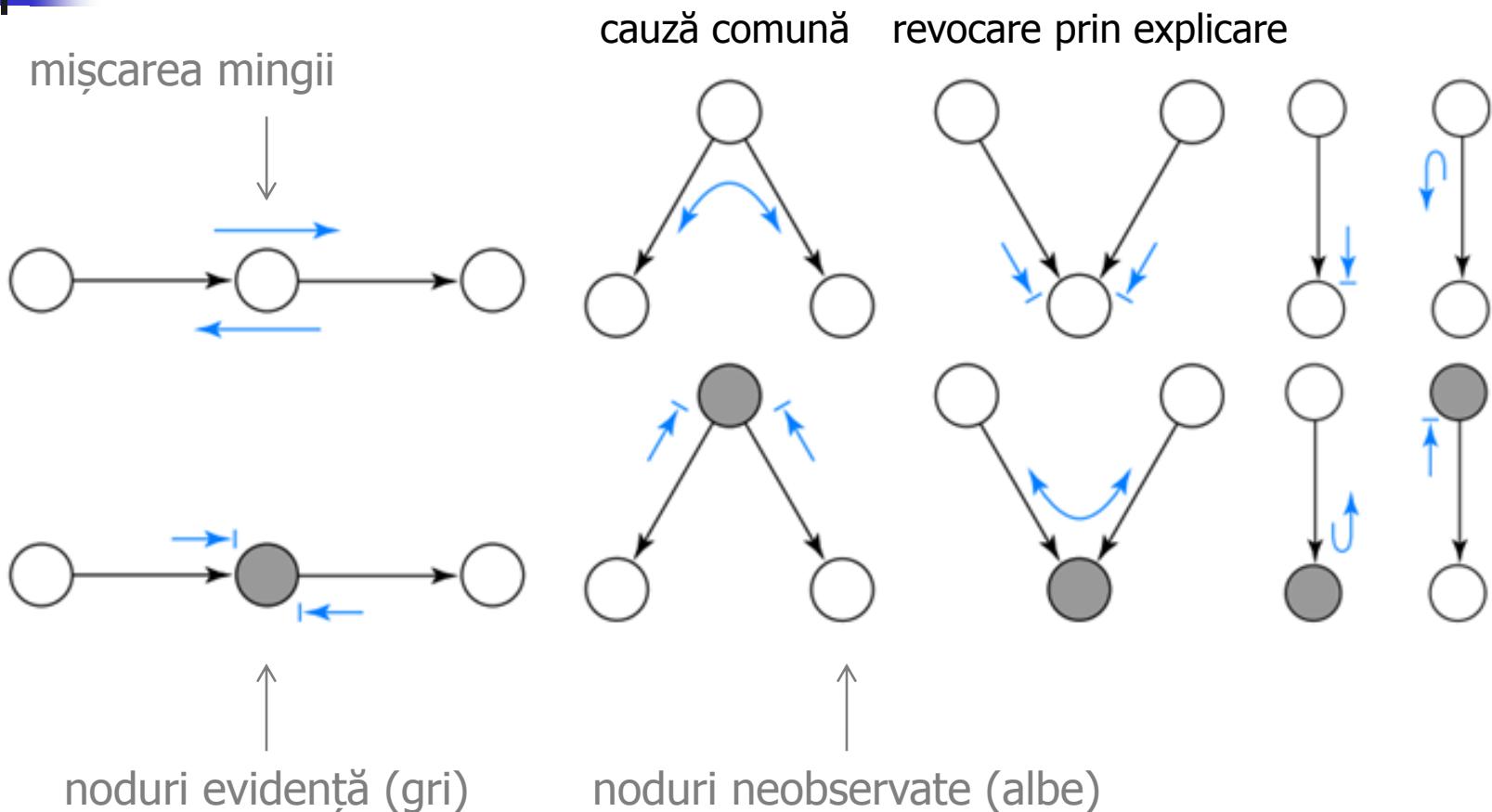




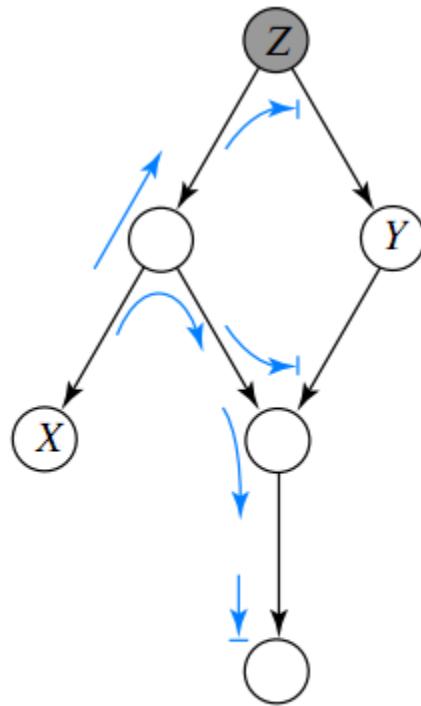
Algoritmul Bayes-Ball

- Reprezintă o modalitate simplă de a determina **relațiile de independentă și independentă condiționată** într-o rețea bayesiană
- Se presupune că o minge este trimisă dintr-un nod în rețea
- Mingea trece în moduri diferite, în funcție de cine o trimit (fiu sau părinte) și starea nodului care o primește (observat/evidență sau neobservat)
- Nodurile la care mingea **nu ajunge** sunt **independente (condiționat)** de nodul de start

Reguli de trimitere a mingii

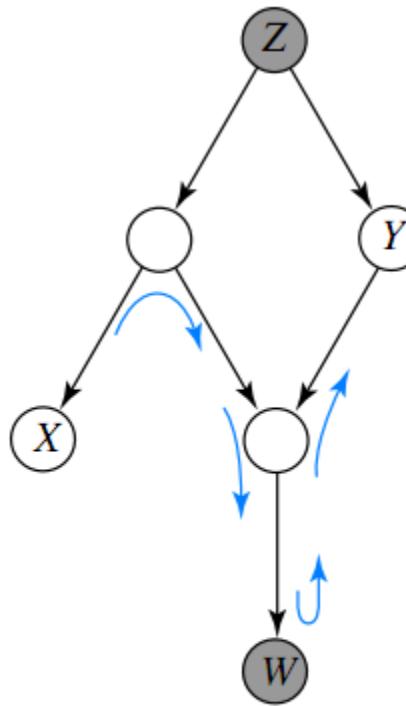


Exemple



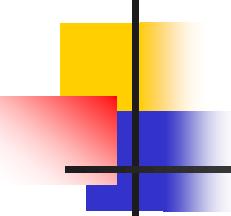
nicio cale activă

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$$



o cale activă

$$X \not\perp\!\!\!\perp Y \mid \{W, Z\}$$



Corelație și cauzalitate

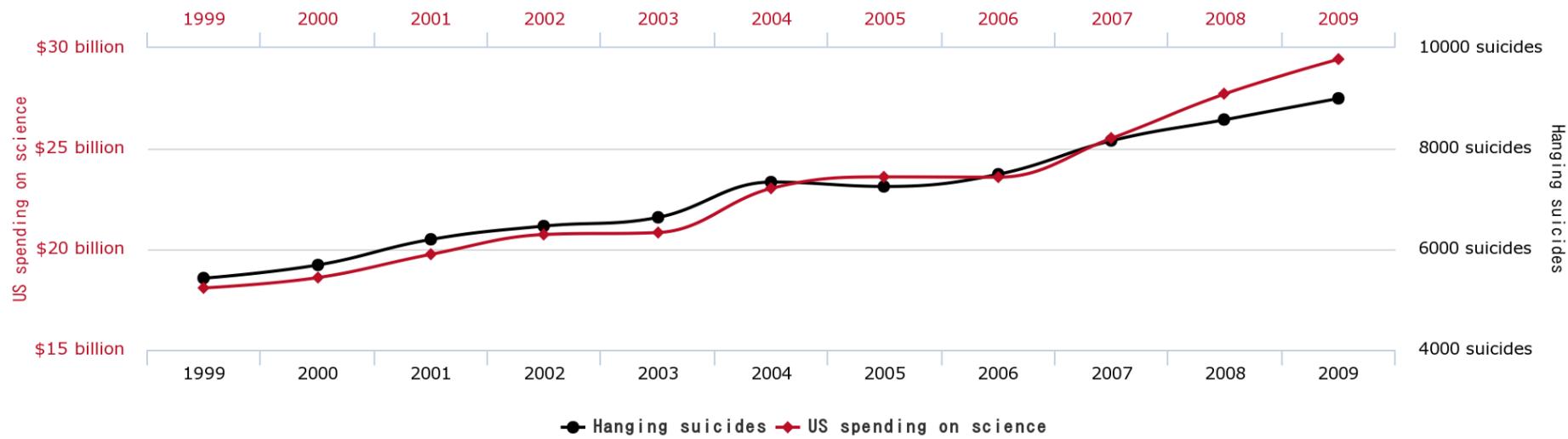
- Rețelele bayesiene codează relații de corelație
 - Probabilitatea unui eveniment A variază împreună cu probabilitățile altor evenimente $\{B, C, \dots\}$
 - A este corelat cu $\{B, C, \dots\}$
 - A poate fi cauzat sau nu de $\{B, C, \dots\}$
 - Toate evenimentele $\{A, B, C, \dots\}$ ar putea fi cauzate de alte evenimente necunoscute
- Corelația \Rightarrow cauzalitatea
- Cauzalitatea \Rightarrow corelația

Corelații bizeare

US spending on science, space, and technology

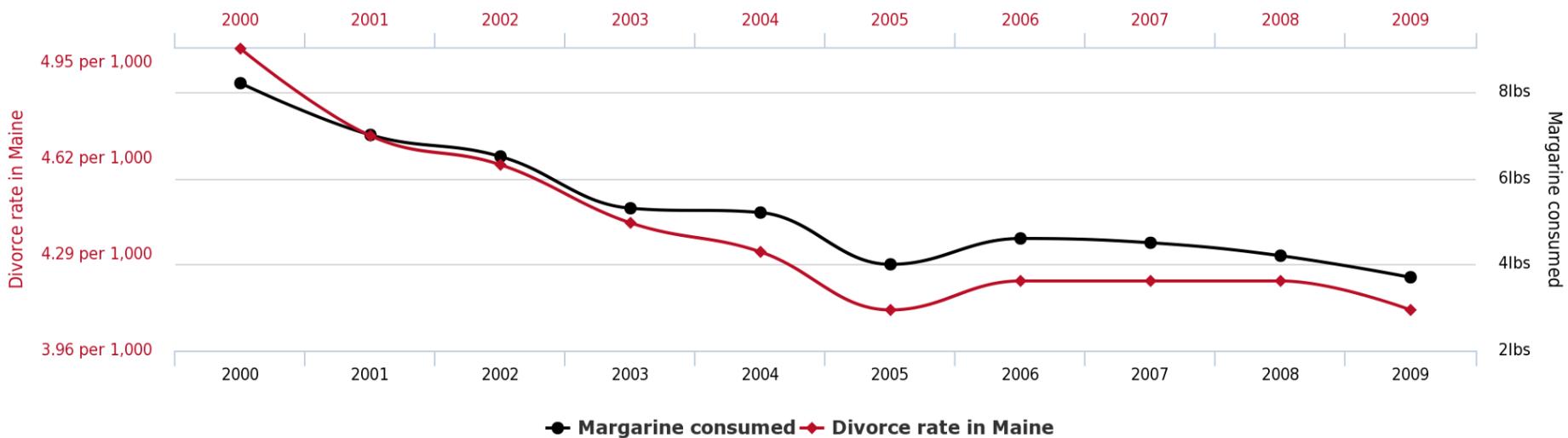
correlates with

Suicides by hanging, strangulation and suffocation



Corelații bizeare

Divorce rate in Maine correlates with Per capita consumption of margarine

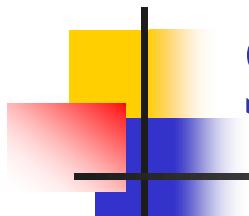


tylervigen.com

Rețele bayesiene

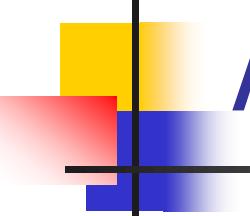
1. Probabilități
2. Rețele bayesiene
3. Inferențe exacte și aproximative
 - 3.1. Inferența probabilităților marginale
 - 3.2. Inferența prin enumerare
 - 3.3. Inferența prin ponderarea verosimilității
4. Rețele bayesiene dinamice
5. Filtrarea cu particule
6. Concluzii





Sortarea topologică

- Sortarea topologică a unui graf este o ordonare liniară a nodurilor sale astfel încât, pentru fiecare arc $A \rightarrow B$, A apare înaintea lui B
- Pentru o rețea bayesiană, sortarea topologică asigură faptul că nodurile părinte vor apărea înaintea nodurilor fiu
- Algoritmii au de obicei o complexitate de timp liniară în numărul de noduri n și de arce a : $O(n + a)$
- Există mai mulți algoritmi de sortare topologică
- Dacă graful este orientat aciclic, există cel puțin o soluție
- Dacă există cicluri în graf, sortarea topologică este imposibilă



Algoritmul lui Kahn

$L \leftarrow$ listă inițial vidă care va conține elementele sortate

$S \leftarrow$ mulțimea nodurilor fără părinti

cât timp S nu este vidă

scoate un nod n din S

introdu n în L

pentru-fiecare nod m cu un arc e de la n la m

scoate arcul e din graf

dacă m nu are alte arce incidente **atunci**

introdu m în S

dacă graful mai are arce **atunci**

întoarce eroare (graful are cel puțin un ciclu)

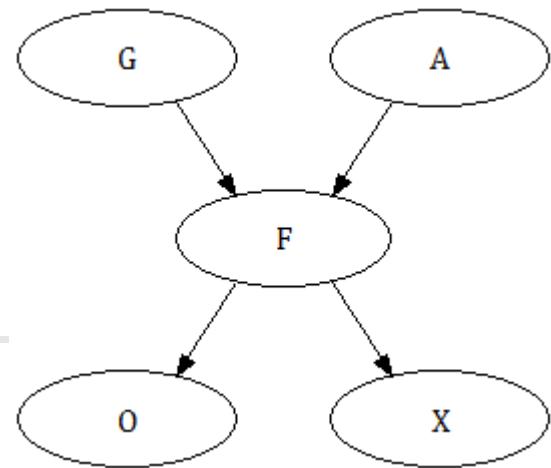
altfel

întoarce L (elementele sortate topologic)

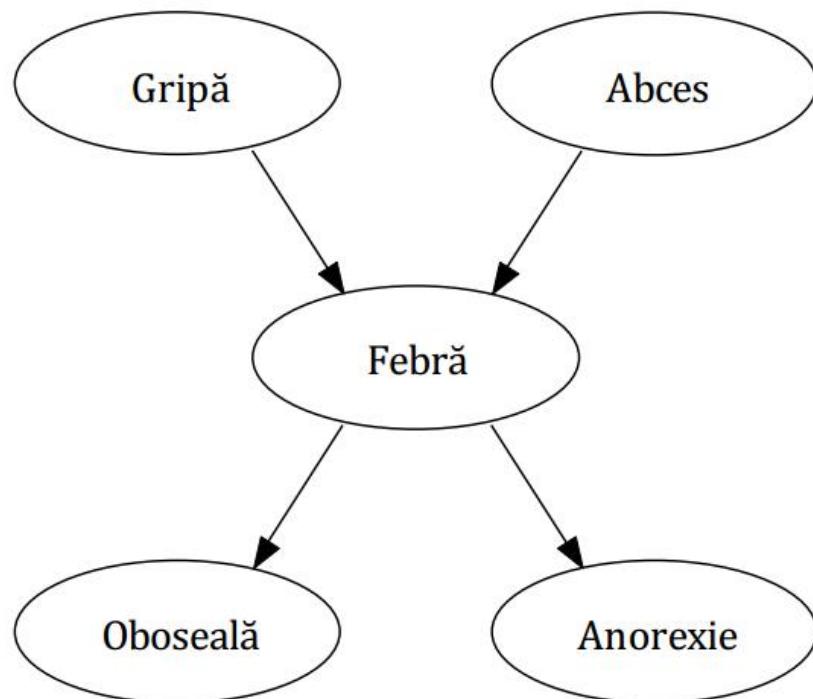
Exemplu

1. $L = \emptyset, S = \{G, A\}$
2. $L = \{G\}, S = \{A\}$
3. se elimină arcul GF , F nu poate fi adăugat în S pentru că mai există arcul AF
4. $L = \{G, A\}, S = \emptyset$
5. se elimină arcul AF , $S = \{F\}$
6. $L = \{G, A, F\}, S = \emptyset$
7. se elimină arcul FO , $S = \{O\}$
8. se elimină arcul FX , $S = \{O, X\}$
9. $L = \{G, A, F, O\}, S = \{X\}$
10. $L = \{G, A, F, O, X\}, S = \emptyset$

Soluția este deci: $\{G, A, F, O, X\}$.



Inferența probabilităților marginale



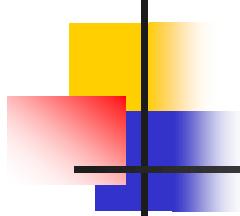
$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9



Nodul Febră

$$P(F_D) =$$

$$P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(G_D) \cdot P(A_D) +$$

$$P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(G_D) \cdot P(A_N) +$$

$$P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(G_N) \cdot P(A_D) +$$

$$P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(G_N) \cdot P(A_N) =$$

$$0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,95 + 0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,05 + 0,05$$

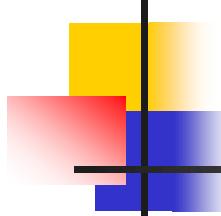
$$\cdot 0,9 \cdot 0,95 = 0,1245 \approx 12\%.$$

$$P(F_N) = 1 - P(F_D) = 0,8755 \approx 88\%.$$

$$F_D = (\text{Febră} = \text{Da})$$

$$F_N = (\text{Febră} = \text{Nu})$$

Într-o rețea bayesiană,
un nod poate avea
oricâte valori posibile,
nu doar două



Nodul Oboseală

$$P(O_D) =$$

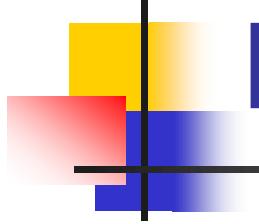
$$P(O_D|F_D) \cdot P(F_D) + P(O_D|F_N) \cdot P(F_N) =$$

$$0,6 \cdot 0,1245 + 0,2 \cdot 0,8755 = 0,2498 \approx 25\%,$$

$$P(O_N) = 1 - P(O_D) = 0,7502 \approx 75\%.$$

$$O_D = (\text{Oboseală} = \text{Da})$$

$$O_N = (\text{Oboseală} = \text{Nu})$$



Nodul Anorexie

$$P(X_D) =$$

$$P(X_D | F_D) \cdot P(F_D) + P(X_D | F_N) \cdot P(F_N) =$$

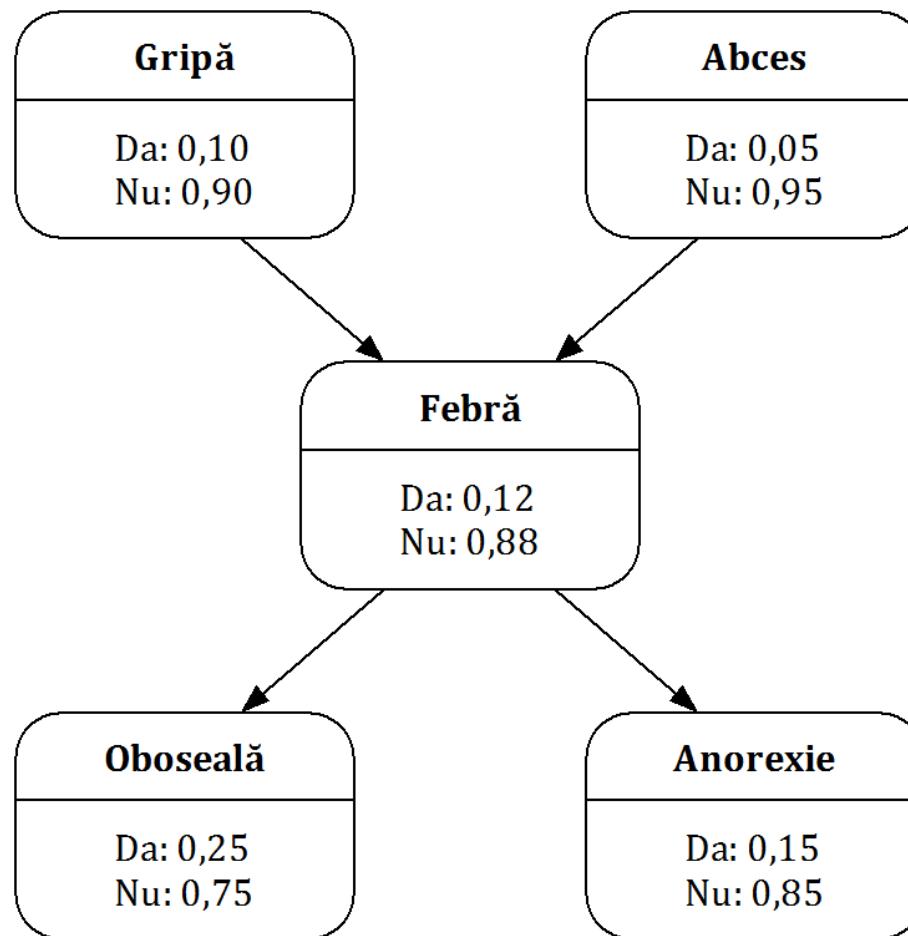
$$0,5 \cdot 0,1245 + 0,1 \cdot 0,8755 = 0,1498 \approx 15\%,$$

$$P(X_N) = 1 - P(X_D) = 0,8502 \approx 85\%.$$

$$X_D = (\text{Anorexie} = \text{Da})$$

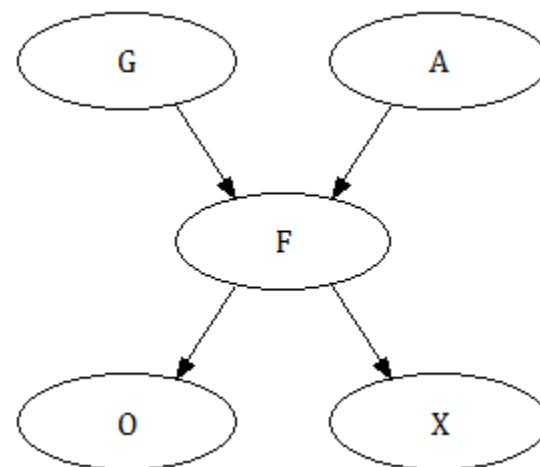
$$X_N = (\text{Anorexie} = \text{Nu})$$

Probabilitățile marginale ale nodurilor



Inferență prin enumerare

- Interogare: Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală și anorexie?



Rezolvare

Coefficient de normalizare

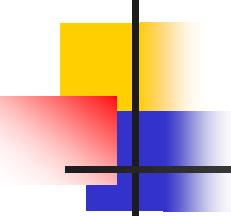
$$\mathbf{P}(X|\mathbf{e}) = \alpha \mathbf{P}(X, \mathbf{e}) = \alpha \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$$

Variabila interrogată

Evidențele
(variabilele observate)

Variabilele neobservate

Sumă după toate valorile posibile ale variabilelor neobservate \mathbf{y} , de exemplu, afirmat și negat



Rezolvare

- Vom calcula **independent** $P(G_D|O_D, X_D)$ și $P(G_N|O_D, X_D)$
- Pentru $P(G_D|O_D, X_D)$, variabilele rămase sunt *Abcesul* și *Febra*
- Vom suma probabilitățile corespunzătoare tuturor valorilor acestor variabile: $a \in \{A_D, A_N\}$ și $f \in \{F_D, F_N\}$
- Pentru a crește eficiența calculelor, se recomandă ca variabilele rămase să fie mai întâi sortate topologic, astfel încât părintii să apară înaintea copiilor
- În acest caz, se vor putea descompune mai ușor sumele, scoțând în față factorii care nu depind de o anumită variabilă

Rezolvare

$$P(G_D | O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_D, a, f, O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot [P(F_D|G_D, a) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_D, a) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] +$$

$$P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} =$$

$$\alpha \cdot 0,1 \cdot \{0,05 \cdot [0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,1] +$$

$$0,95 \cdot [0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1]\} =$$

$$\alpha \cdot 0,02174.$$

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

Rezolvare

$$P(G_N | O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_N, a, f, O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_N) \cdot P(a) \cdot P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_N) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_N) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] +$$

$$P(A_N) \cdot [P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$P(F_N|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} =$$

$$\alpha \cdot 0,9 \cdot \{0,05 \cdot [0,25 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,1] +$$

$$0,95 \cdot [0,05 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,95 \cdot 0,2 \cdot 0,1]\} =$$

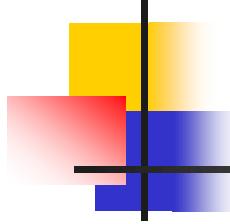
$$\alpha \cdot 0,03312.$$

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9
$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9



Rezultat

- $P(G_D|O_D, X_D) + P(G_N|O_D, X_D) = 1$
 - $P(G_D|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0,02174$
 - $P(G_N|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0,03312$
 - $\Rightarrow \alpha = 18,23$
-
- $P(G_D|O_D, X_D) = 0,39628 \approx 40\%$
 - $P(G_N|O_D, X_D) = 0,60372 \approx 60\%$

Pseudocod

function ENUMERATION-ASK(X, \mathbf{e}, bn) **returns** a distribution over X

inputs: X , the query variable

\mathbf{e} , observed values for some set of variables \mathbf{E}

bn , a Bayes net

$\mathbf{Q} \leftarrow$ a distribution over X , where $\mathbf{Q}(x_i)$ is $P(X=x_i)$

for each value x_i that X can have **do**

$\mathbf{Q}(x_i) \leftarrow$ ENUMERATE-ALL($bn.\text{VARS}$, \mathbf{e}_{x_i}), where \mathbf{e}_{x_i} is the evidence \mathbf{e} plus the assignment $X=x_i$

return NORMALIZE(\mathbf{Q})

function ENUMERATE-ALL($vars, \mathbf{e}$) **returns** a probability (a real number in $[0,1]$)

inputs: $vars$, a list of all the variables

\mathbf{e} , observed values for some set of variables \mathbf{E}

if EMPTY($vars$) **then return** 1.0

$Y \leftarrow \text{FIRST}(vars)$

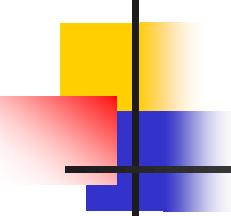
if Y is assigned a value (call it y) in \mathbf{e} **then**

return $P(Y=y | \text{values assigned to } Y\text{'s parents in } \mathbf{e}) \times \text{ENUMERATE-ALL}(\text{REST}(vars), \mathbf{e})$

else

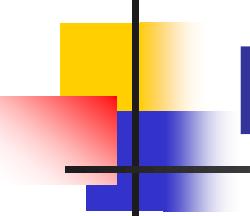
return $\sum_{y_i} [P(Y=y_i | \text{values assigned to } Y\text{'s parents in } \mathbf{e}) \times \text{ENUMERATE-ALL}(\text{REST}(vars), \mathbf{e}_{y_i})]$,

where \mathbf{e}_{y_i} is the evidence \mathbf{e} plus the assignment $Y=y_i$



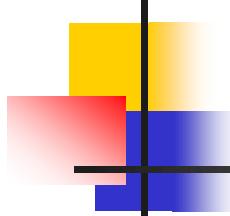
Inferență aproximativă

- Pentru probleme din „lumea reală” au fost construite rețele bayesiene cu sute de noduri, pentru care algoritmii exacti își ating limitele, deoarece inferență este o problemă NP-dificilă
- Pentru rețele foarte complexe, inferență aproximativă este singura posibilitate de a obține un rezultat
- Pentru alte probleme în care precizia nu este un factor critic, inferență aproximativă poate crește foarte mult viteza de calcul



Inferență stohastică prin ponderarea verosimilității

- engl. "likelihood weighting"
- Se generează aleatoriu eșantionări / instantieri ale rețelei și se calculează probabilitățile dorite ca frecvențe relative de apariție
- Nodurile fără părinti vor fi instantiate potrivit probabilităților lor marginale
- Nodurile de evidență iau mereu valorile observate
- Valorile variabilelor neobservate au probabilități de apariție în conformitate cu probabilitățile nodurilor

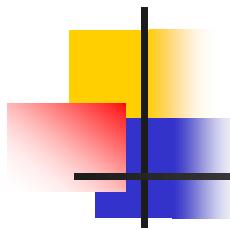


Modul de lucru

- Pentru fiecare eșantionare a rețelei s , se calculează o pondere:

$$w(s) = \frac{\prod_{x \in U} P(x|\pi(x))}{\prod_{x \in U \setminus E} P(x|\pi(x))}$$

- unde U este multimea tuturor nodurilor, E este multimea nodurilor evidență, iar $\pi(x)$ reprezintă părintii nodului x
- Se repetă procesul pentru un număr prestabilit de eșantioane

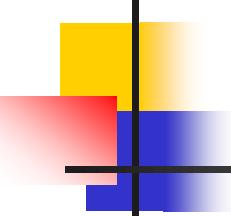


Modul de lucru

- În final, are loc o fază de normalizare, în care se calculează suma ponderilor cazurilor în care o variabilă de interogare a avut o anumită valoare, împărțită la suma ponderilor tuturor cazurilor:

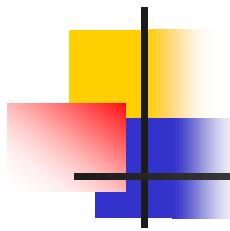
$$P(Var = val) = \frac{w_T}{w_S} = \frac{\sum_{s \in T} w(s)}{\sum_{s \in S} w(s)}$$

- unde S este mulțimea tuturor eșantioanelor, iar $T \subseteq S$ este submulțimea de eșantioane în care variabila Var apare cu valoarea val



Exemplu: aceeași problemă

- Variabila de interogare (*query*): G
- Variabile de evidență: O_D, X_D
- Variabile neobservate: A, F
- Sortarea topologică: G, A, F, O, X
- Variabilele primesc valori în mod aleatoriu, după probabilitățile din tabele
- Notație: $A \sim M(Da : 0.1, Nu : 0.9)$ înseamnă că variabila A va primi valoarea Da cu probabilitatea de 10% și Nu cu probabilitatea de 90%
 - $M(\cdot)$ = distribuția *Multinoulli* / Bernoulli generalizată / categorială \sim roulette wheel selection



Eşantionarea 1

- $G \sim M(Da : 0.1, Nu : 0.9) \Rightarrow G_N$
- $A \sim M(Da : 0.05, Nu : 0.95) \Rightarrow A_D$
- $F \sim M(Da : 0.25, Nu : 0.75) \Rightarrow F_N$
- O_D
- X_D
- $s_1 = (G_N, A_D, F_N, O_D, X_D)$

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

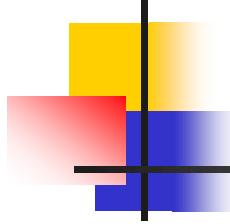
$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

$$w(s_1) = \frac{P(G_N) \cdot P(A_D) \cdot P(F_N|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)}{P(G_N) \cdot P(A_D) \cdot P(F_N|G_N, A_D)} =$$

$$P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$$



Eşantionarea 2

- $G \sim M(Da : 0.1, Nu : 0.9) \Rightarrow G_D$
- $A \sim M(Da : 0.05, Nu : 0.95) \Rightarrow A_N$
- $F \sim M(Da : 0.7, Nu : 0.3) \Rightarrow F_D$
- O_D
- X_D
- $s_2 = (G_D, A_N, F_D, O_D, X_D)$

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

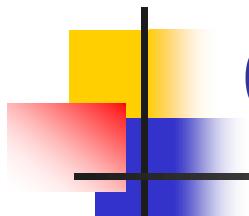
$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

$$w(s_2) = \frac{P(G_D) \cdot P(A_N) \cdot P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D)}{P(G_D) \cdot P(A_N) \cdot P(F_D|G_D, A_N)} =$$

$$P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$$



Calcularea probabilităților finale

$$P(G_D) = \frac{w(s_2)}{w(s_1) + w(s_2)} = \frac{0.3}{0.02 + 0.3} \approx 0.94$$

$$P(G_N) = \frac{w(s_1)}{w(s_1) + w(s_2)} = \frac{0.02}{0.02 + 0.3} \approx 0.06$$

- În acest exemplu, s-au folosit doar două eșantionări, prin urmare, este normal ca rezultatele să fie diferite de valorile reale: (0.4, 0.6)

Pseudocod

function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, \mathbf{e}, bn, N) **returns** an estimate of $\mathbf{P}(X|\mathbf{e})$

inputs: X , the query variable

\mathbf{e} , observed values for variables \mathbf{E}

bn , a Bayesian network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \dots, X_n)$

N , the total number of samples to be generated

local variables: \mathbf{W} , a vector of weighted counts for each value of X , initially zero

for $j = 1$ to N **do**

$\mathbf{x}, w \leftarrow \text{WEIGHTED-SAMPLE}(bn, \mathbf{e})$

$\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$ where x is the value of X in \mathbf{x}

return NORMALIZE(\mathbf{W})

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, \mathbf{e}) **returns** an event and a weight

$w \leftarrow 1; \mathbf{x} \leftarrow$ an event with n elements initialized from \mathbf{e}

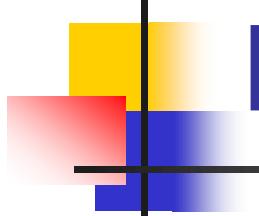
foreach variable X_i **in** X_1, \dots, X_n **do**

if X_i is an evidence variable with value x_i in \mathbf{e}

then $w \leftarrow w \times P(X_i = x_i | \text{parents}(X_i))$

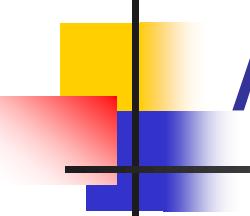
else $\mathbf{x}[i] \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i | \text{parents}(X_i))$

return \mathbf{x}, w



Discuție

- Precizia de estimare a probabilităților crește cu numărul de eșantionări ale rețelei
- Algoritmul nu converge bine când există multe noduri evidență



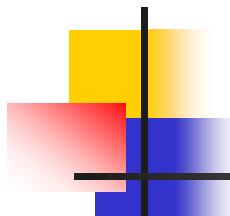
Aplicații ale rețelelor bayesiene

- Sisteme pentru diagnostic medical, de exemplu, diagnosticarea bolilor ficatului
- Predicția defectelor și a fiabilității produselor software, de exemplu, *AgenaRisk*, utilizat de Motorola, Philips și Siemens
- *TrueSkill* (Microsoft Research): sistem de ierarhizare a jucătorilor pe baza rezultatelor finale obținute de echipă

Rețele bayesiene

1. Probabilități
2. Rețele bayesiene
3. Inferențe exacte și aproximative
- 4. Rețele bayesiene dinamice**
5. Filtrarea cu particule
6. Concluzii



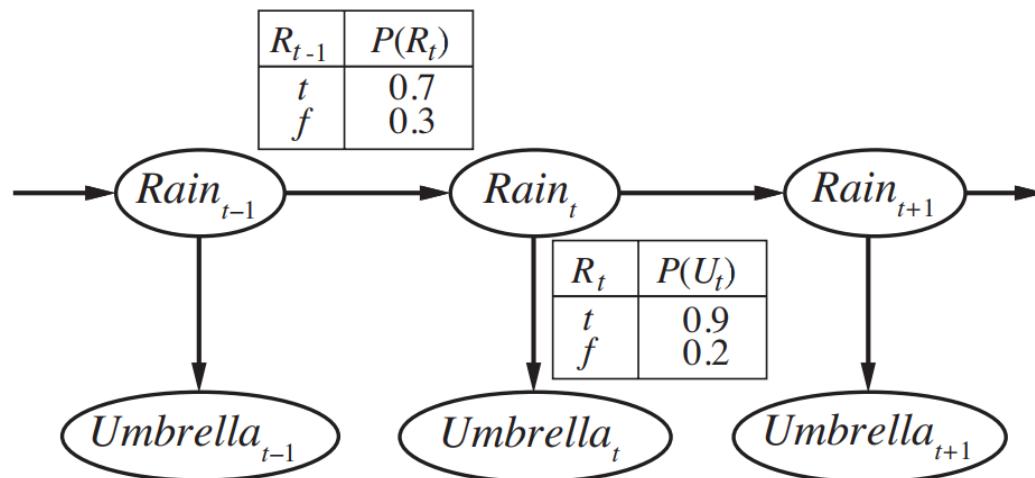


Rețea bayesiană dinamică

- O rețea bayesiană dinamică este o rețea bayesiană care reprezintă un model de probabilitate temporal
- Este organizată în partiții (*slices*) de timp
- Fiecare partiție poate avea mai multe variabile de stare \mathbf{X}_t și variabile de evidență \mathbf{E}_t
- Pentru a construi o RBD, trebuie specificate:
 - Distribuția a priori a variabilelor de stare $P(\mathbf{X}_0)$
 - Modelul de tranziții $P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t)$
 - Modelul de observații sau de senzori $P(\mathbf{E}_t | \mathbf{X}_t)$

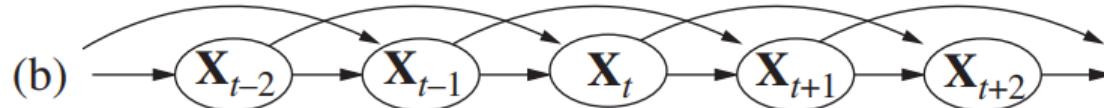
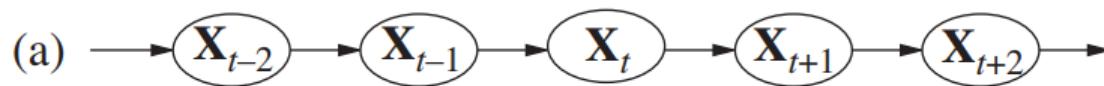
Exemplu

Consider the following example: You are the security guard stationed at a secret underground installation. You want to know whether it's raining today, but your only access to the outside world occurs each morning when you see the director coming in with, or without, an umbrella. For each day t , the set \mathbf{E}_t thus contains a single evidence variable $Umbrella_t$ or U_t for short (whether the umbrella appears), and the set \mathbf{X}_t contains a single state variable $Rain_t$ or R_t for short (whether it is raining).



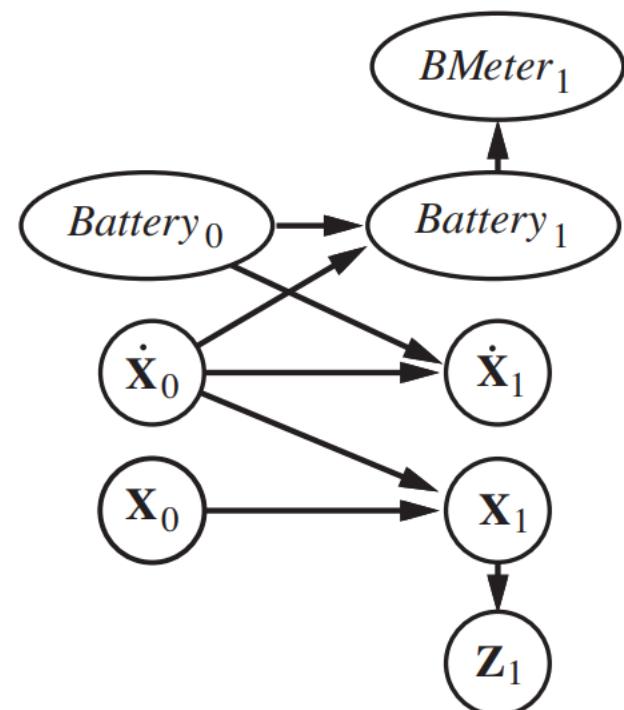
Modelarea proceselor Markov

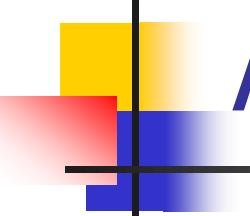
- RBD pot modela procese Markov
- **Presupunerea Markov:** starea curentă depinde de un număr finit fix de stări anterioare
- În figură, se prezintă:
 - (a) un proces Markov de ordin I
 - (b) un proces Markov de ordin II



Modelarea tranzițiilor arbitrate

- Pot fi adăugate variabile care să reducă problema la un proces Markov de ordin întâi
- Exemplu: un robot cu poziția x , viteza \dot{x} și nivelul bateriei $Battery$ care depinde de toate manevrele anterioare. Se adaugă o variabilă de observație (senzor) pentru baterie $BMeter$. z este variabila observată pentru poziție





Alte presupuneri

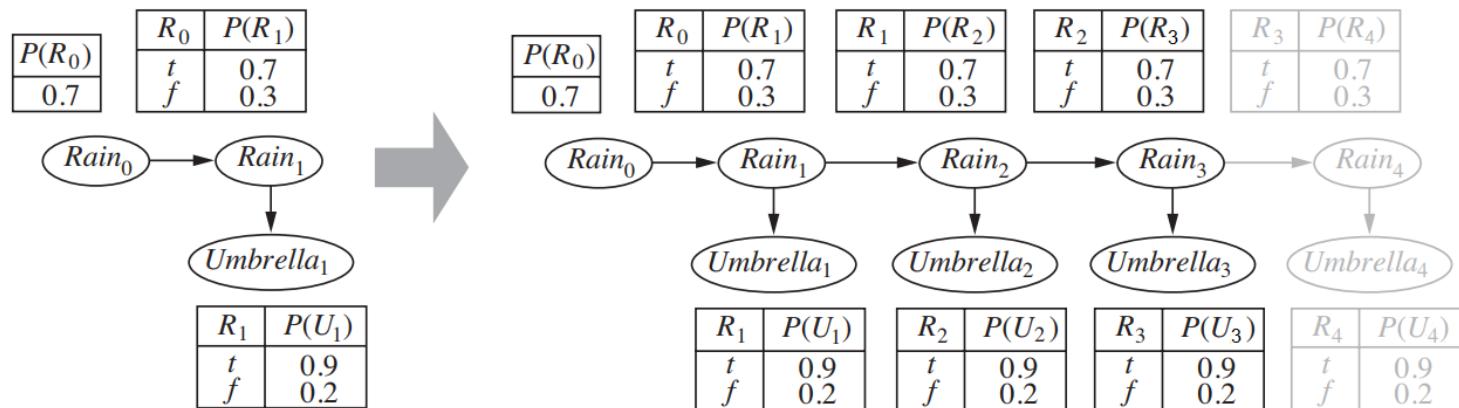
- Schimbările din mediu sunt cauzate de un proces staționar (\neq static)
 - Modelul de tranziții $P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t)$ este același pentru orice t
- Senzorii urmează un proces Markov de ordin întâi
 - $P(\mathbf{E}_t | \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{0:t-1}) = P(\mathbf{E}_t | \mathbf{X}_t)$
 - Observațiile curente depind doar de starea din momentul curent

Aplicații ale RBD

- Identificarea părților de vorbire
 - Observațiile: cuvintele (posibil mii)
 - Stările: etichetele părților de vorbire
 - Traducerea automată
 - Observațiile: cuvintele
 - Stările: opțiunile de traducere
 - Urmărirea pozițiilor robotilor sau mașinilor autonome (*tracking*)
 - Observațiile: informațiile de localizare de la senzori
 - Stările: pozițiile pe hartă
- det adj adj noun ...
-
- ```
graph LR; X1((X1)) --> E1((E1)); X2((X2)) --> E2((E2)); X3((X3)) --> E3((E3)); X4((X4)) --> E4((E4)); X4 -.-> End[...]
```
- The    quick    brown    fox ...

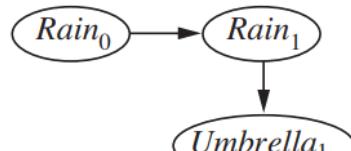
# Inferență în RBD

- O RBD se poate transforma într-o RB simplă prin desfășurare (*unrolling*)

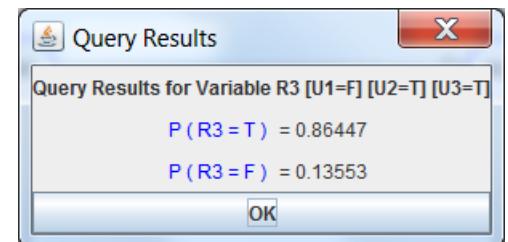
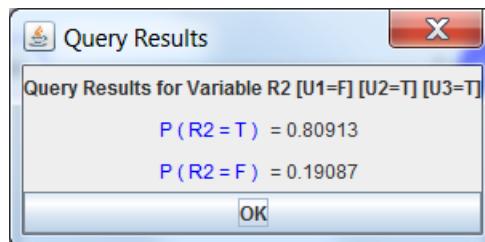
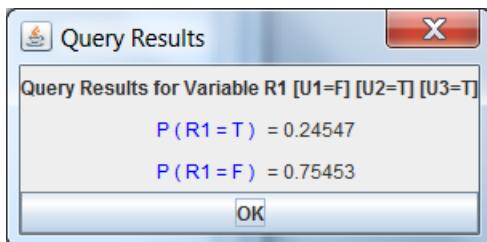
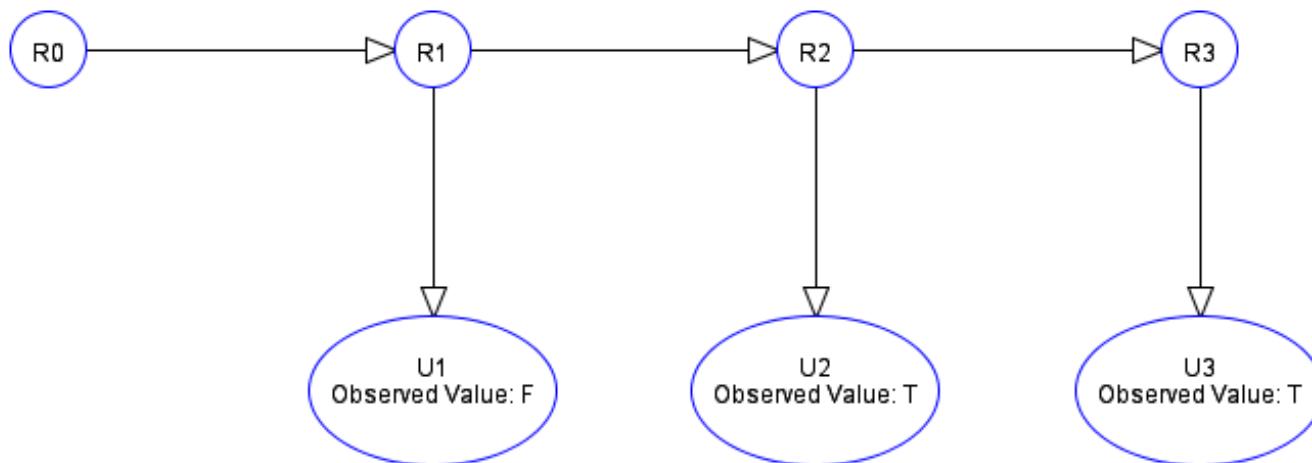


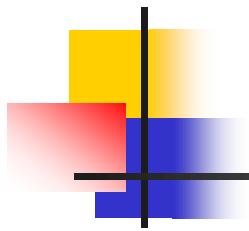
- S-ar putea aplica algoritmii de inferență de la RB simple

| $R_0$ | $P(R_1)$ |
|-------|----------|
| $t$   | 0.7      |
| $f$   | 0.3      |



| $R_1$ | $P(U_1)$ |
|-------|----------|
| $t$   | 0.9      |
| $f$   | 0.2      |

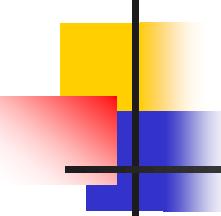




# Rețele bayesiene

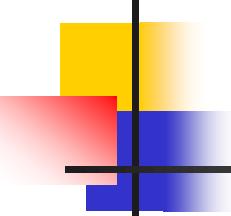
1. Probabilități
2. Rețele bayesiene
3. Inferențe exacte și aproximative
4. Rețele bayesiene dinamice
- 5. Filtrarea cu particule**
6. Concluzii





# Filtrarea cu particule

- Complexitatea algoritmilor de inferență exactă specifici RB simple pentru RBD desfășurate este exponențială
- Există alte metode exacte și aproximative de inferență specifice RBD
- De exemplu, metoda aproximativă de **filtrare cu particule** (*particle filtering*)
- **Filtrare** înseamnă determinarea lui  $P(\mathbf{X}_t | \mathbf{E}_{0:t})$  la momentul curent  $t$



# Filtrarea cu particule

- Mai întâi, se creează o populație de  $n$  particule cu starea eșantionată din distribuția a priori  $P(\mathbf{X}_0)$
- Apoi, se repetă următoarele faze pentru fiecare moment de timp:
  - Fiecare eșantion (stare a particulei) este propagat înainte prin eșantionarea următoarei stări pe baza modelului de tranziție  $P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t)$
  - Fiecare particulă este ponderată de probabilitatea pe care o atribuie noilor evidențe  $P(\mathbf{E}_{t+1} | \mathbf{X}_{t+1})$
  - Populația este reeșantionată pentru a genera o nouă populație de  $n$  particule. Fiecare nouă particulă este selectată din populația curentă. Probabilitatea de a fi selectată o particulă este proporțională cu ponderea sa. Noile particule nu au ponderi

# Exemplul cu ploaia și umbrela

## Inițializarea

- $t = 0$
- $p_1 \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_T$
- $p_2 \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_F$
- $p_3 \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_T$
- $p_4 \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_F$

| $P(R_0)$ | $R_0$ | $P(R_1)$ |
|----------|-------|----------|
| 0.7      | $t$   | 0.7      |
|          | $f$   | 0.3      |

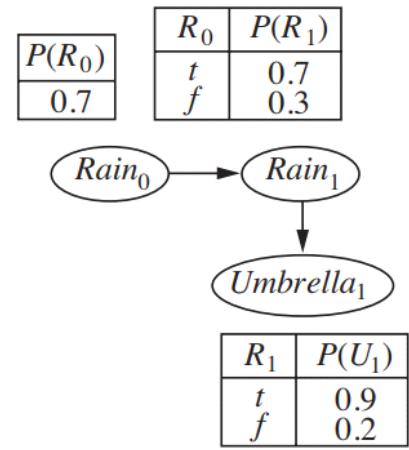
$Rain_0 \rightarrow Rain_1 \rightarrow Umbrella_1$

| $R_1$ | $P(U_1)$ |
|-------|----------|
| $t$   | 0.9      |
| $f$   | 0.2      |

# Faza 1. Propagarea

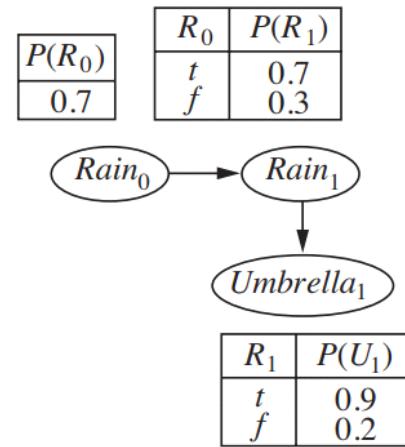
- $t = 1$

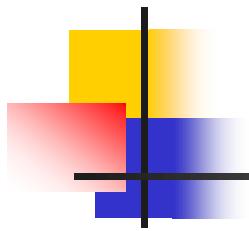
- $p_1(R_T) \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_T$
- $p_2(R_F) \sim M(T: 0.3, F: 0.7) \Rightarrow R_F$
- $p_3(R_T) \sim M(T: 0.7, F: 0.3) \Rightarrow R_T$
- $p_4(R_F) \sim M(T: 0.3, F: 0.7) \Rightarrow R_T$
- La momentul  $t = 1$ , apare evidență  $U_F$



# Faza 2. Ponderarea

- $w_1 = P(U_F | R_T) = 0.1$
- $w_2 = P(U_F | R_F) = 0.8$
- $w_3 = P(U_F | R_T) = 0.1$
- $w_4 = P(U_F | R_T) = 0.1$

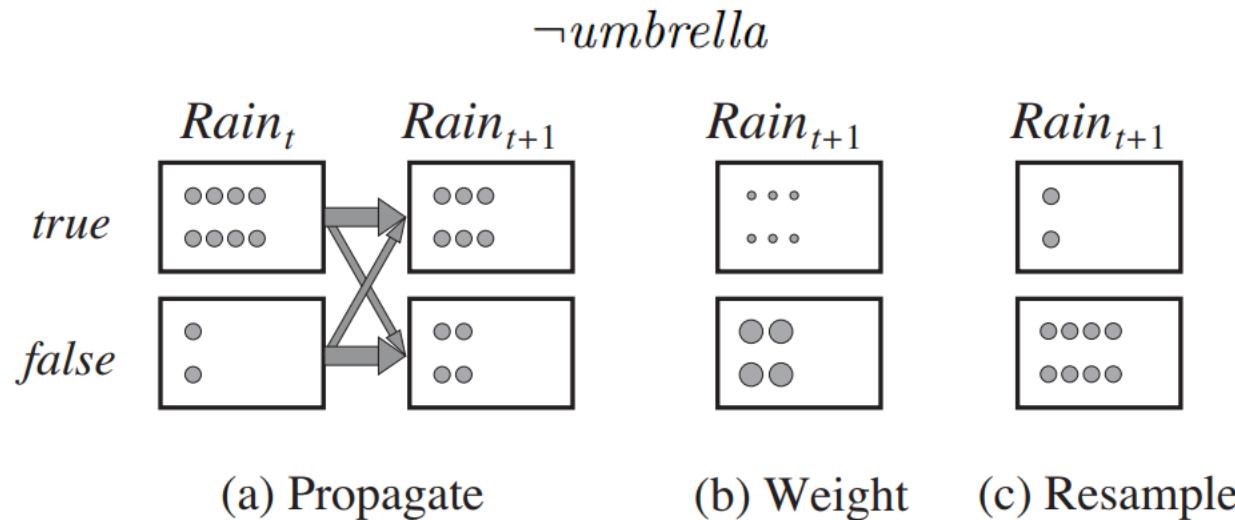




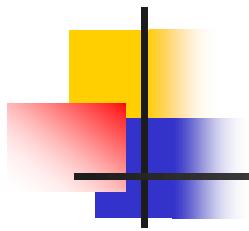
# Faza 3. Reșantionarea

- $p_i \sim M(T: 0.1, F: 0.8, T: 0.1, T: 0.1)$
  
- $p_1 \Rightarrow R_F$
- $p_2 \Rightarrow R_F$
- $p_3 \Rightarrow R_T$
- $p_4 \Rightarrow R_F$
  
- $\Rightarrow P(R_T) = 25\%, P(R_F) = 75\%$

# Exemplul cu ploaia și umbrela



The particle filtering update cycle for the umbrella DBN with  $N = 10$ , showing the sample populations of each state. (a) At time  $t$ , 8 samples indicate *rain* and 2 indicate  $\neg$ *rain*. Each is propagated forward by sampling the next state through the transition model. At time  $t + 1$ , 6 samples indicate *rain* and 4 indicate  $\neg$ *rain*. (b)  $\neg$ *umbrella* is observed at  $t + 1$ . Each sample is weighted by its likelihood for the observation, as indicated by the size of the circles. (c) A new set of 10 samples is generated by weighted random selection from the current set, resulting in 2 samples that indicate *rain* and 8 that indicate  $\neg$ *rain*.



# Pseudocod

**function** PARTICLE-FILTERING(**e**,  $N$ ,  $dbn$ ) **returns** a set of samples for the next time step

**inputs:** **e**, the new incoming evidence

$N$ , the number of samples to be maintained

$dbn$ , a DBN with prior  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$ , transition model  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_0)$ , sensor model  $\mathbf{P}(\mathbf{E}_1|\mathbf{X}_1)$

**persistent:**  $S$ , a vector of samples of size  $N$ , initially generated from  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$

**local variables:**  $W$ , a vector of weights of size  $N$

**for**  $i = 1$  to  $N$  **do**

$S[i] \leftarrow$  sample from  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_0 = S[i])$  /\* step 1 \*/

$W[i] \leftarrow \mathbf{P}(\mathbf{e} | \mathbf{X}_1 = S[i])$  /\* step 2 \*/

$S \leftarrow$  WEIGHTED-SAMPLE-WITH-REPLACEMENT( $N$ ,  $S$ ,  $W$ ) /\* step 3 \*/

**return**  $S$



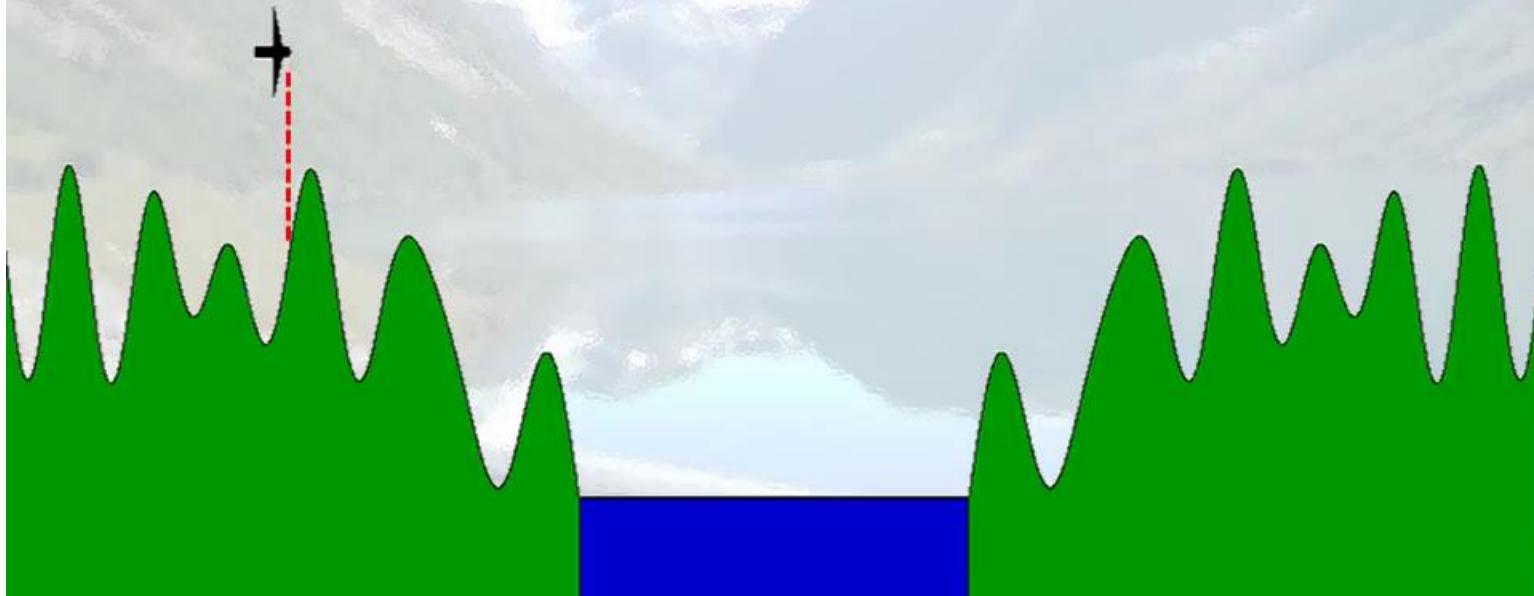
UPPSALA  
UNIVERSITET

So, this is our aircraft.

- We can measure the elevation (relative the sea)
- We can measure the distance to the ground
- We have the map

But we *don't* know where we are on the map!

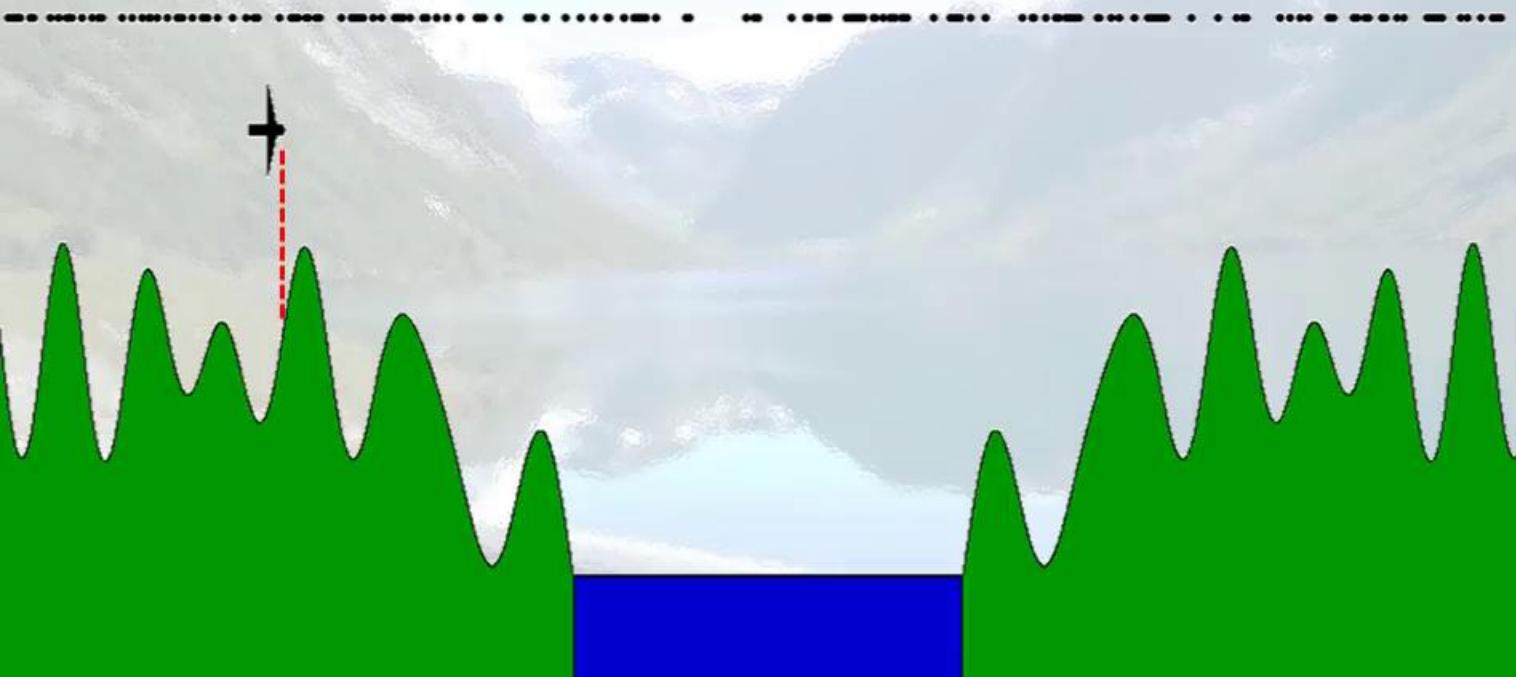
(Which could be useful to know, if it's dark or foggy...)



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)

- We have measured the distance to the ground (with some uncertainty)
  - We have the map
  - We know how high we are flying (again with some uncertainty from the measurement device)
- 

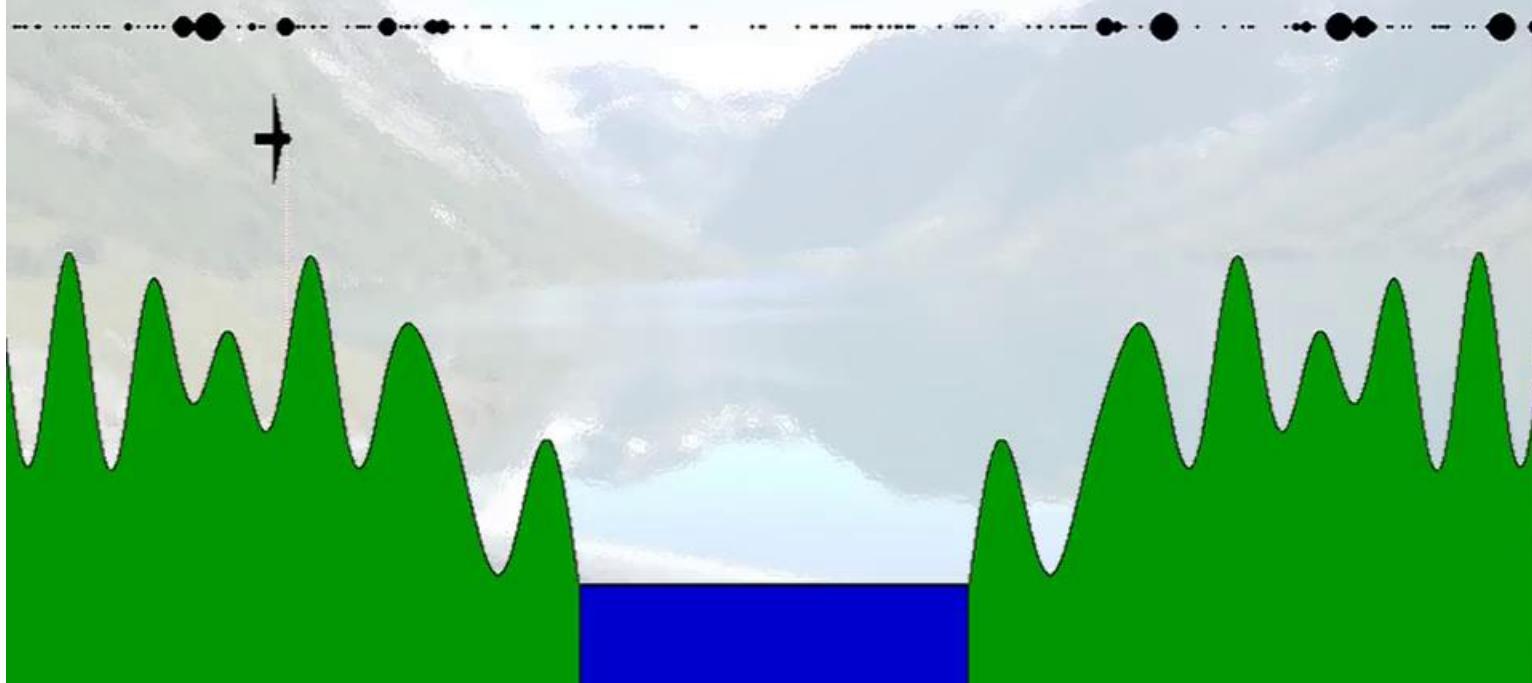
<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>



UPPSALA  
UNIVERSITET

Some particles appears to be more likely than others.

Are the unlikely particles of any use? Well, no. So lets do a trick called *resampling*. That means, we generate 200 new particles. But not randomly over the entire map, but based on the existing particles with their weights. Look!



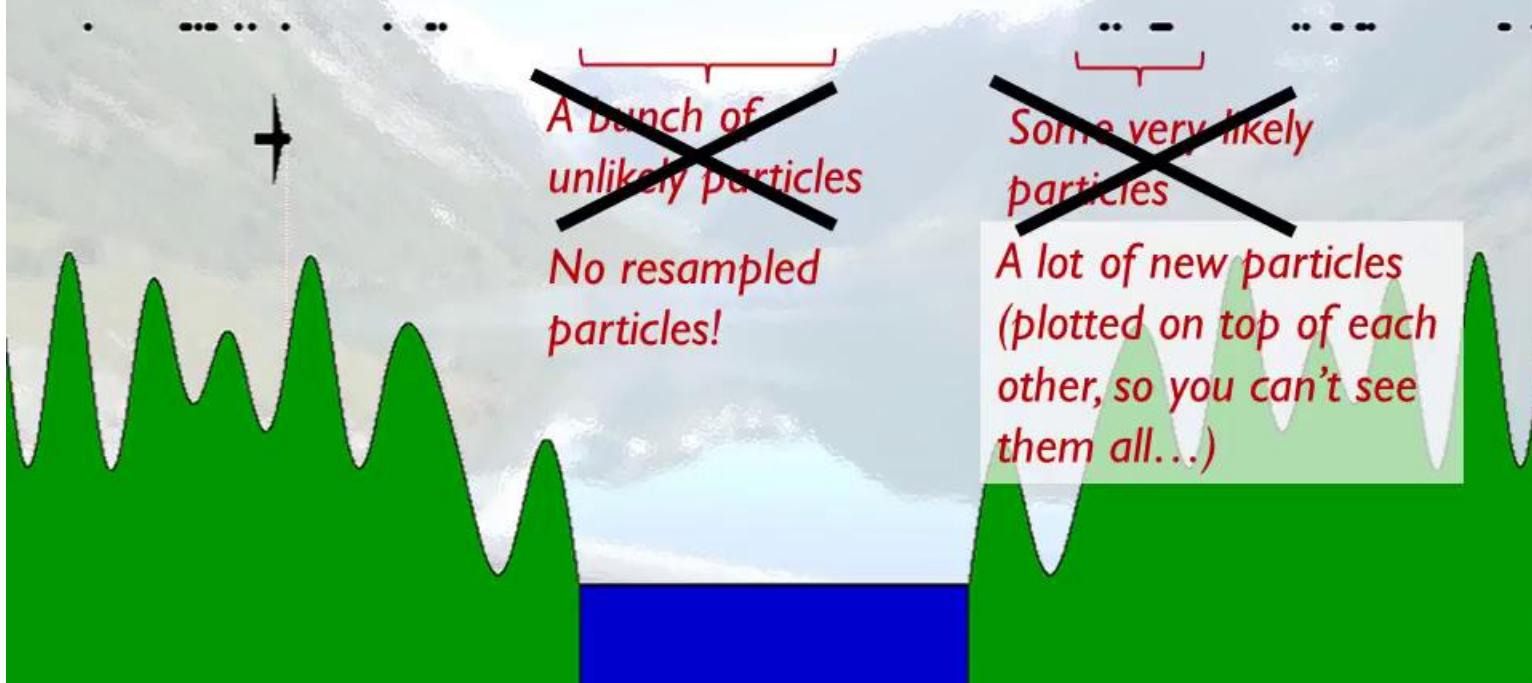
<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificiala

<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)

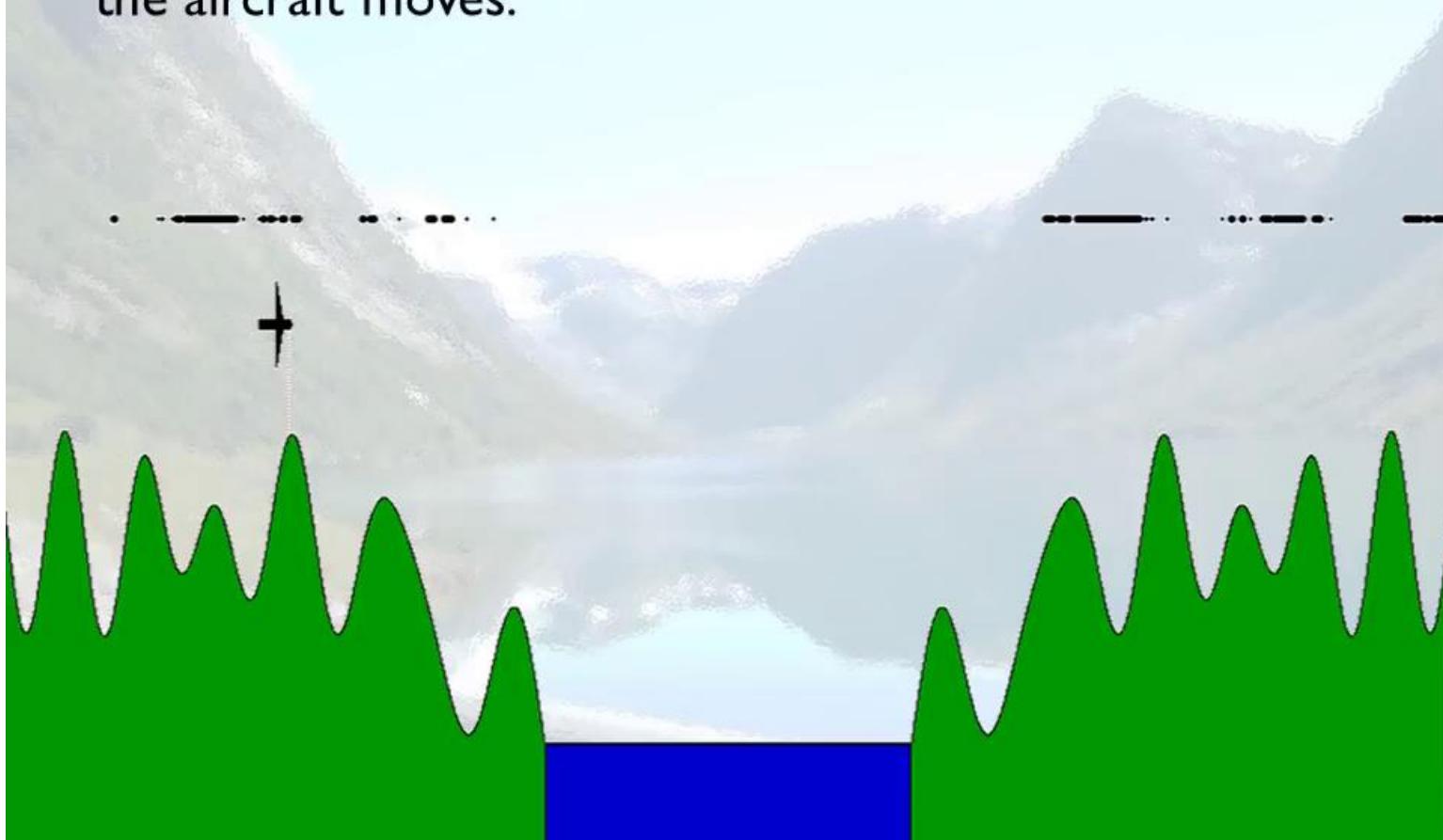
That's the resampling. It's needed to avoid depletion among the particles (otherwise, we may end up with only unlikely particles). By the way, since all particles are re-generated, they all have equal weights now.

*The introduction of the resampling step was in fact a very important milestone in the development of the particle filter during the 90's.*



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

We propagated our particles in time, and we were in fact utilizing a (very simple, huh?) model of how the aircraft moves.



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

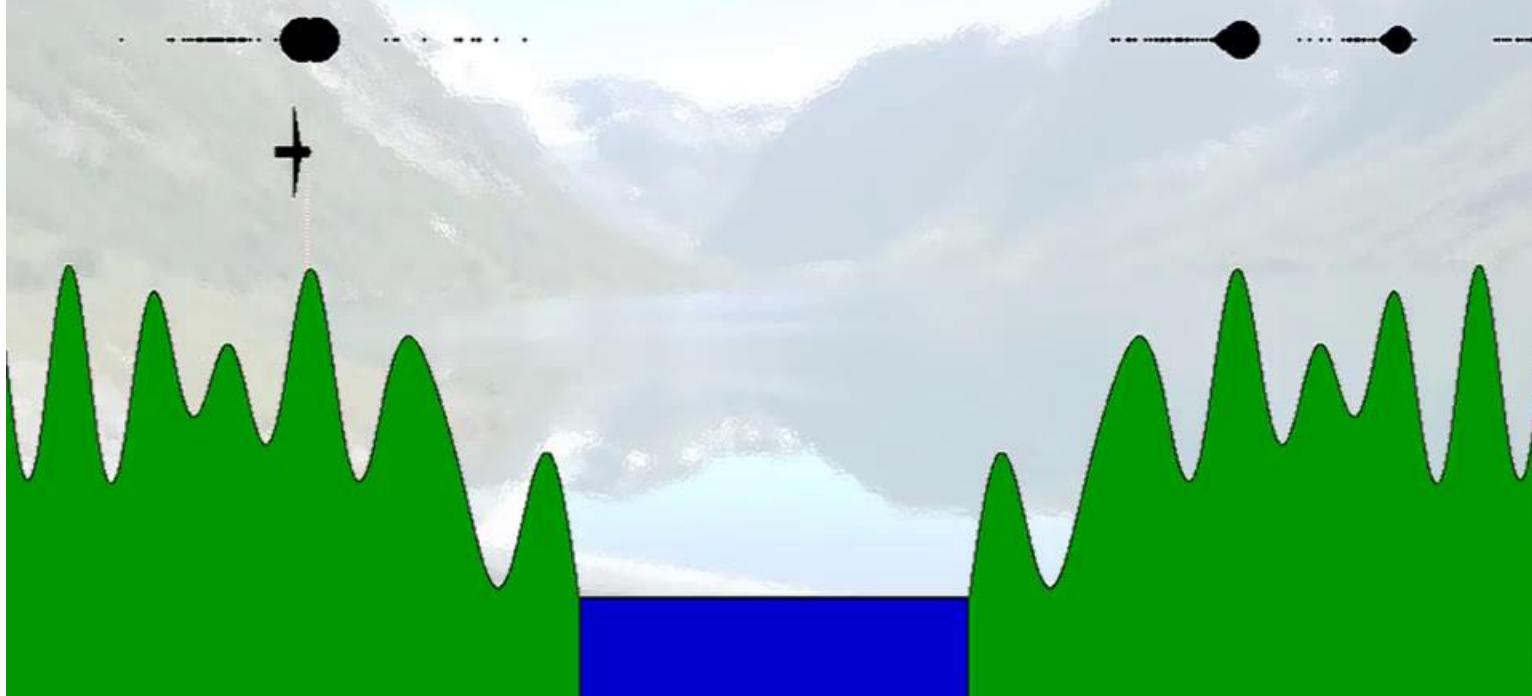
<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



UPPSALA  
UNIVERSITET

Again, some particles were more likely than others.

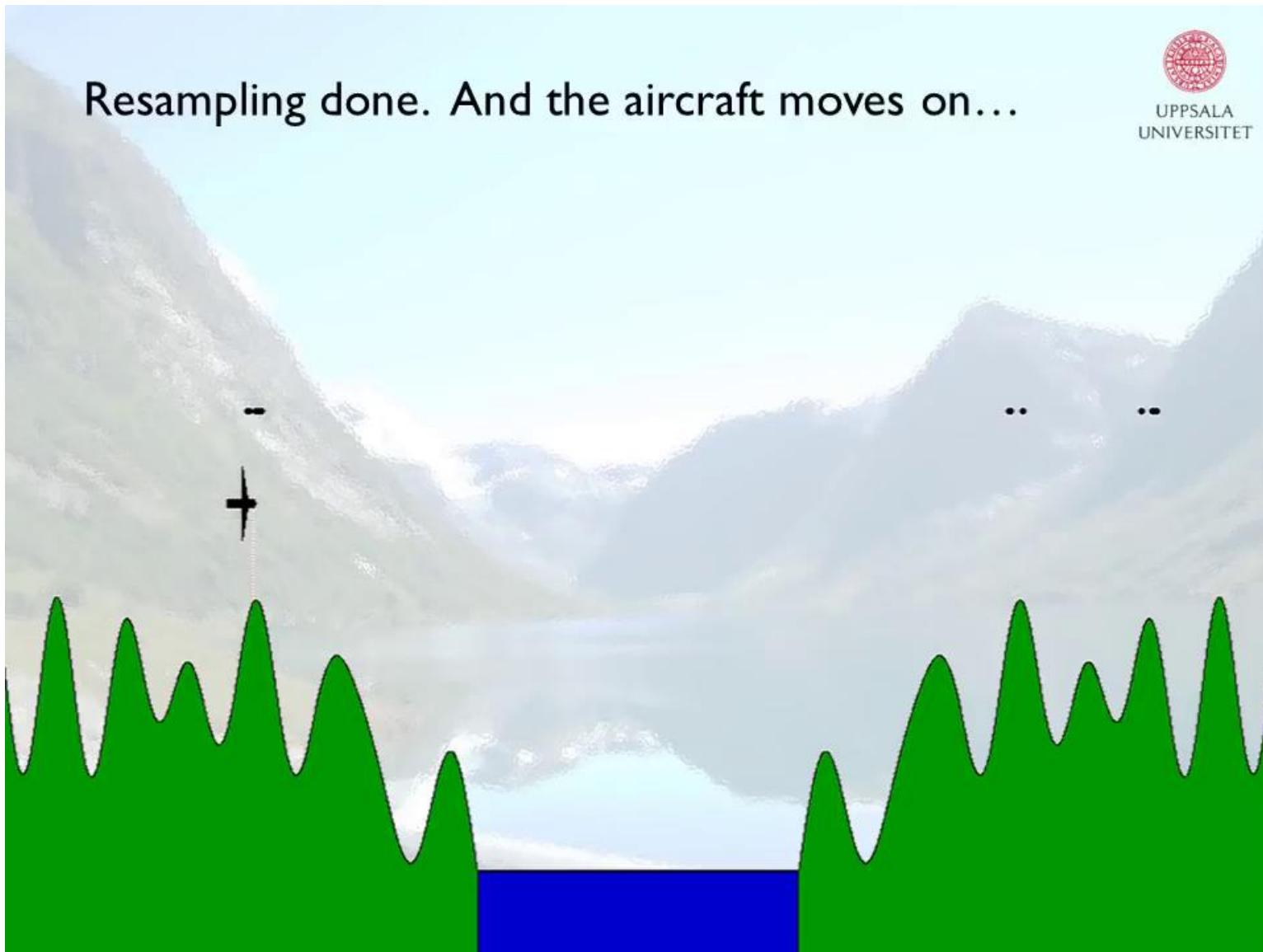
Let's do the resampling, based on this!



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)

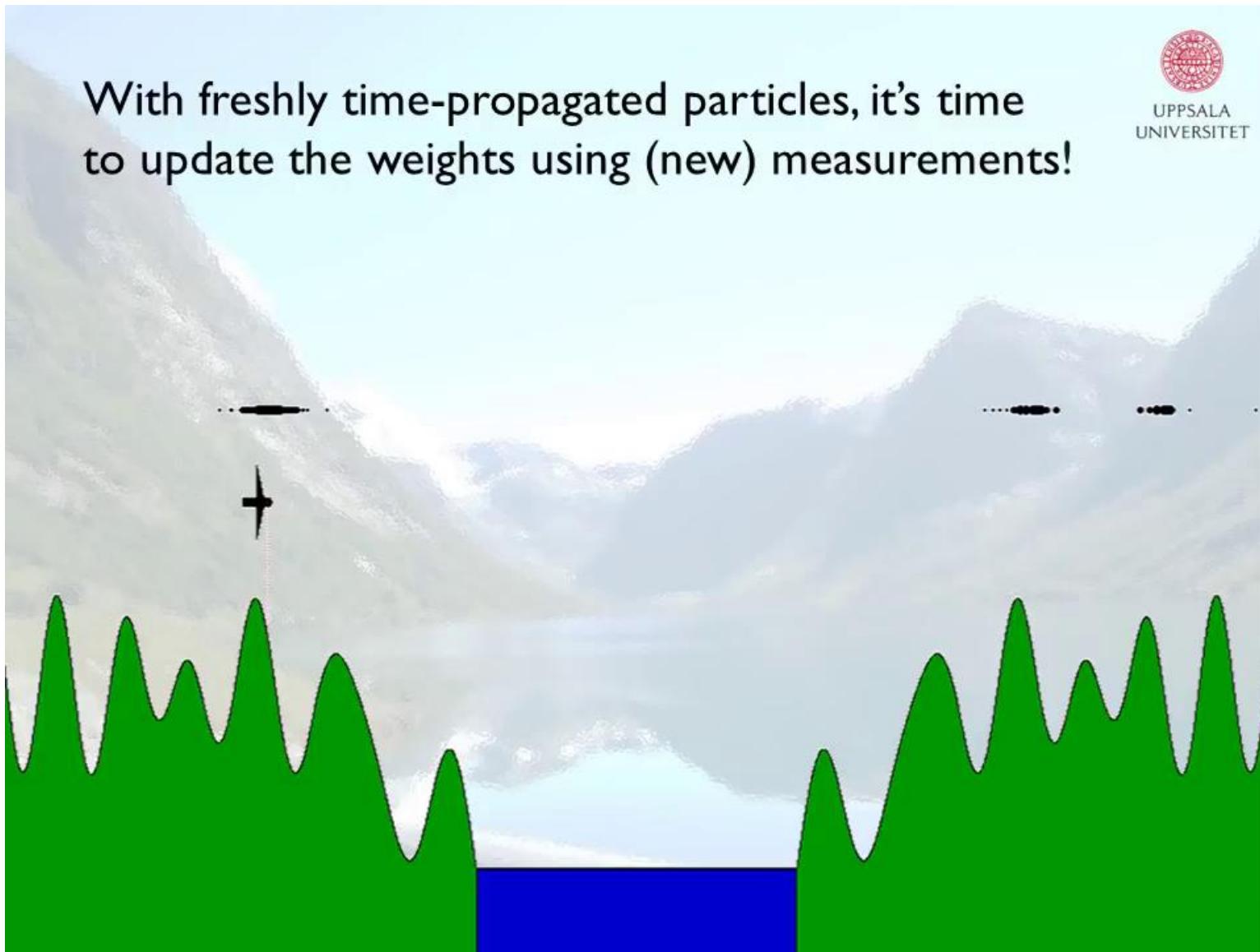


Resampling done. And the aircraft moves on...

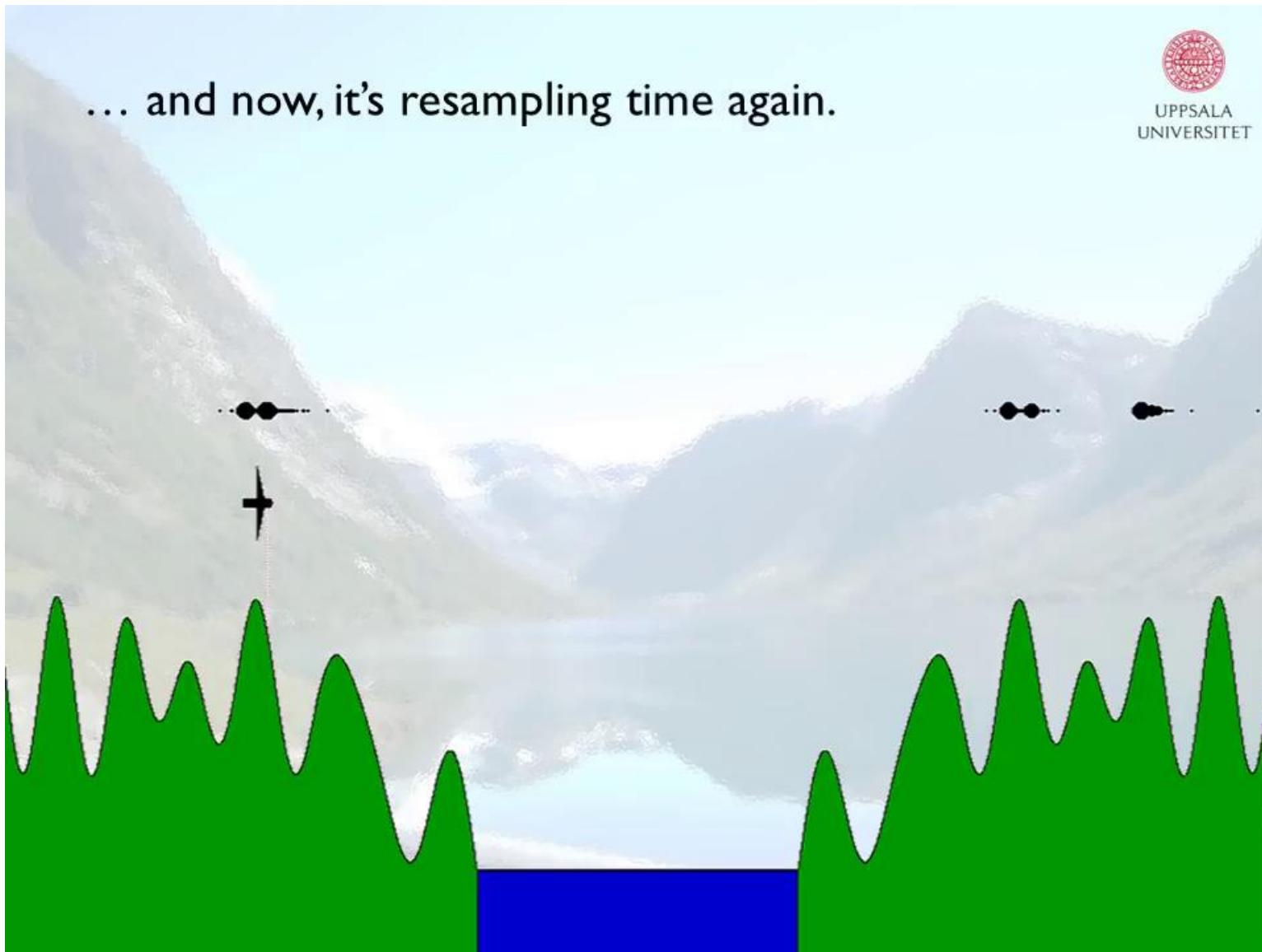
<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



With freshly time-propagated particles, it's time  
to update the weights using (new) measurements!



... and now, it's resampling time again.

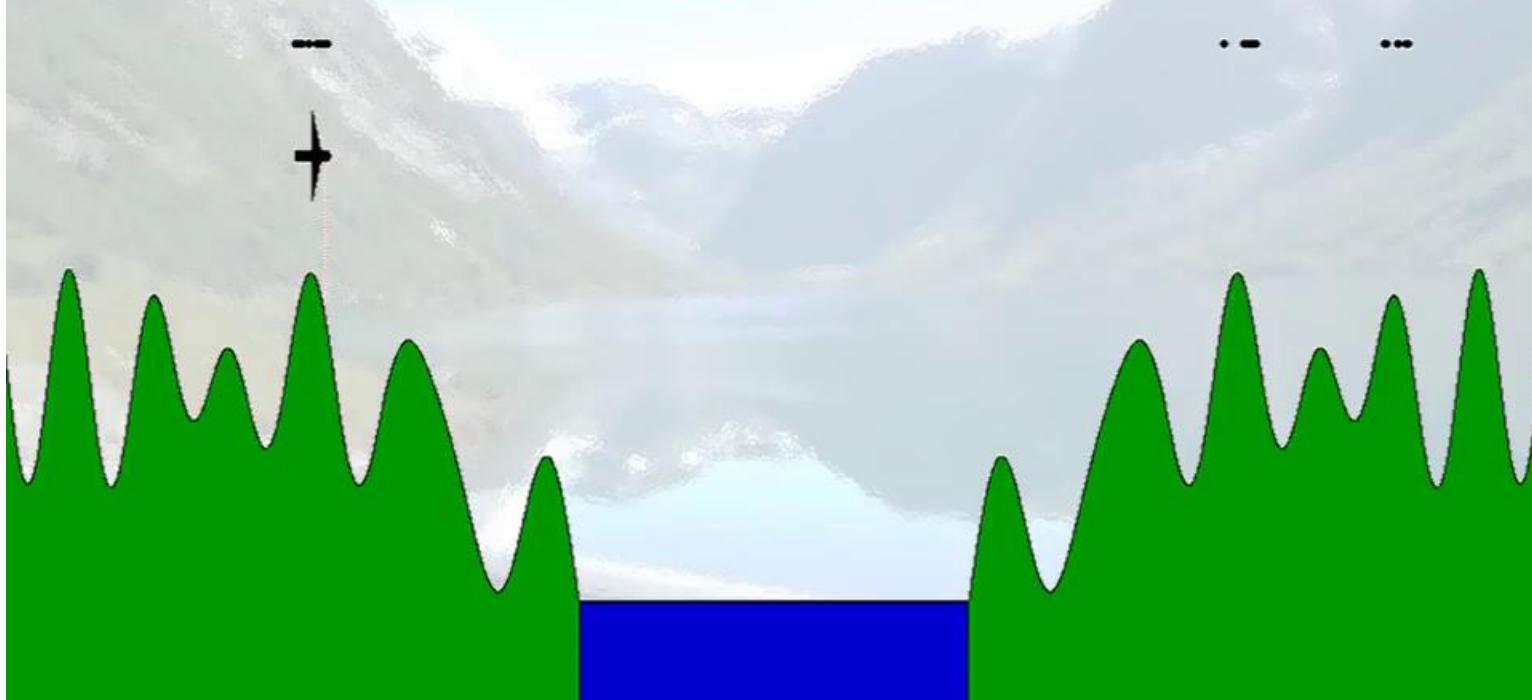


<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)

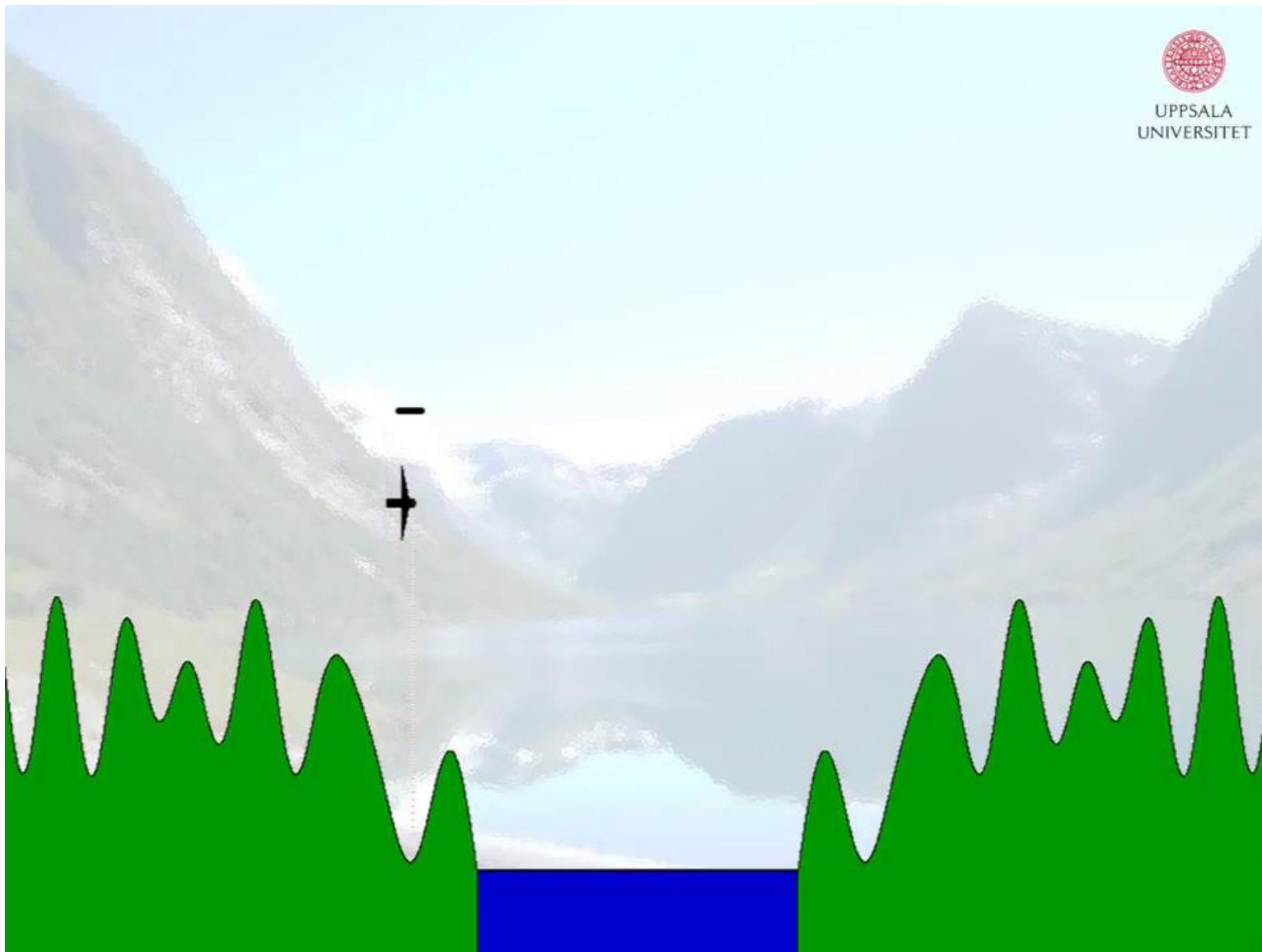
Well, I bet you kind of know the story by now.  
So let's in the future just plot the particles after the  
resampling step, to save some of your valuable time.



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMKv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



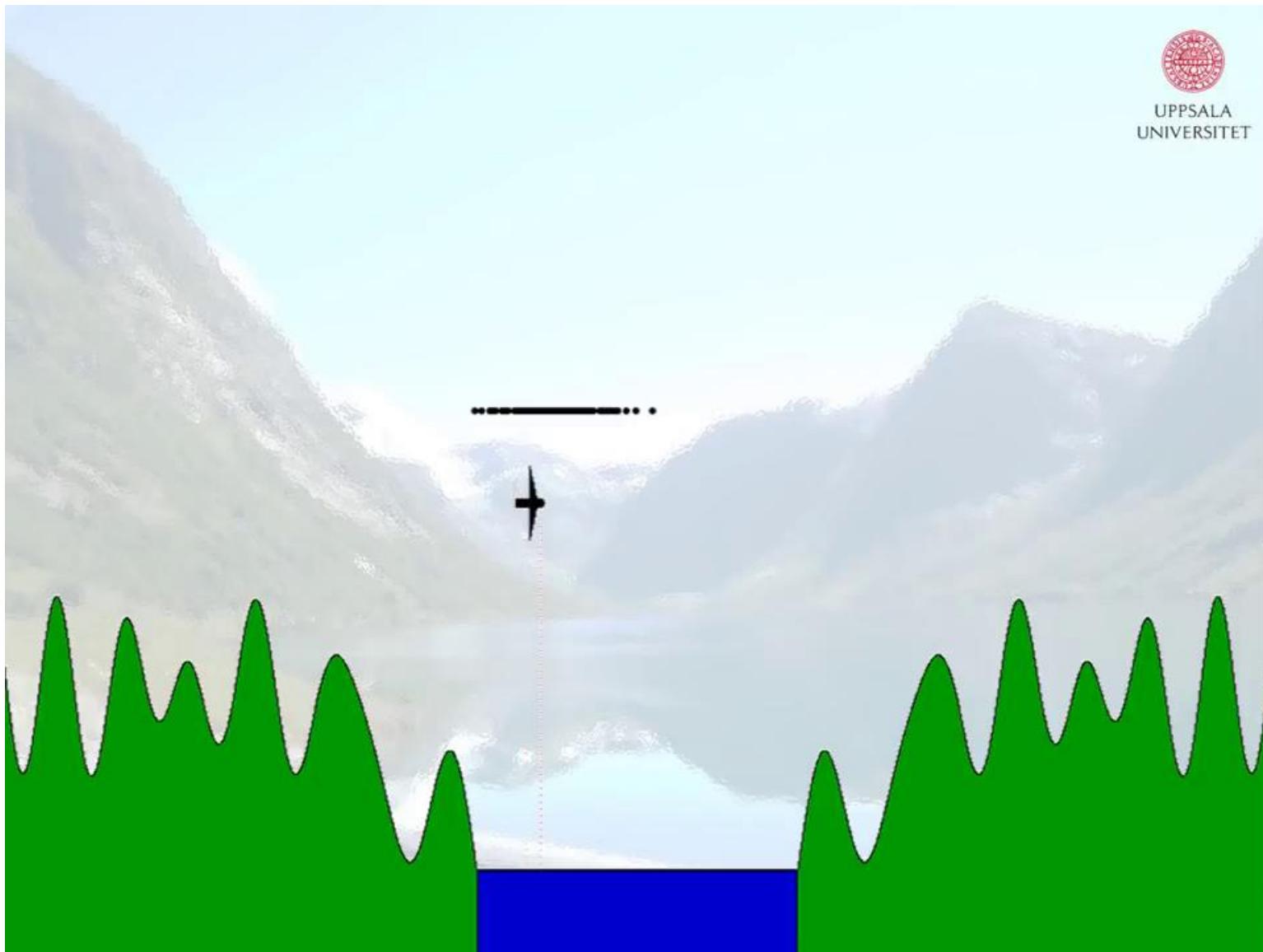
<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificiala

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



UPPSALA  
UNIVERSITET

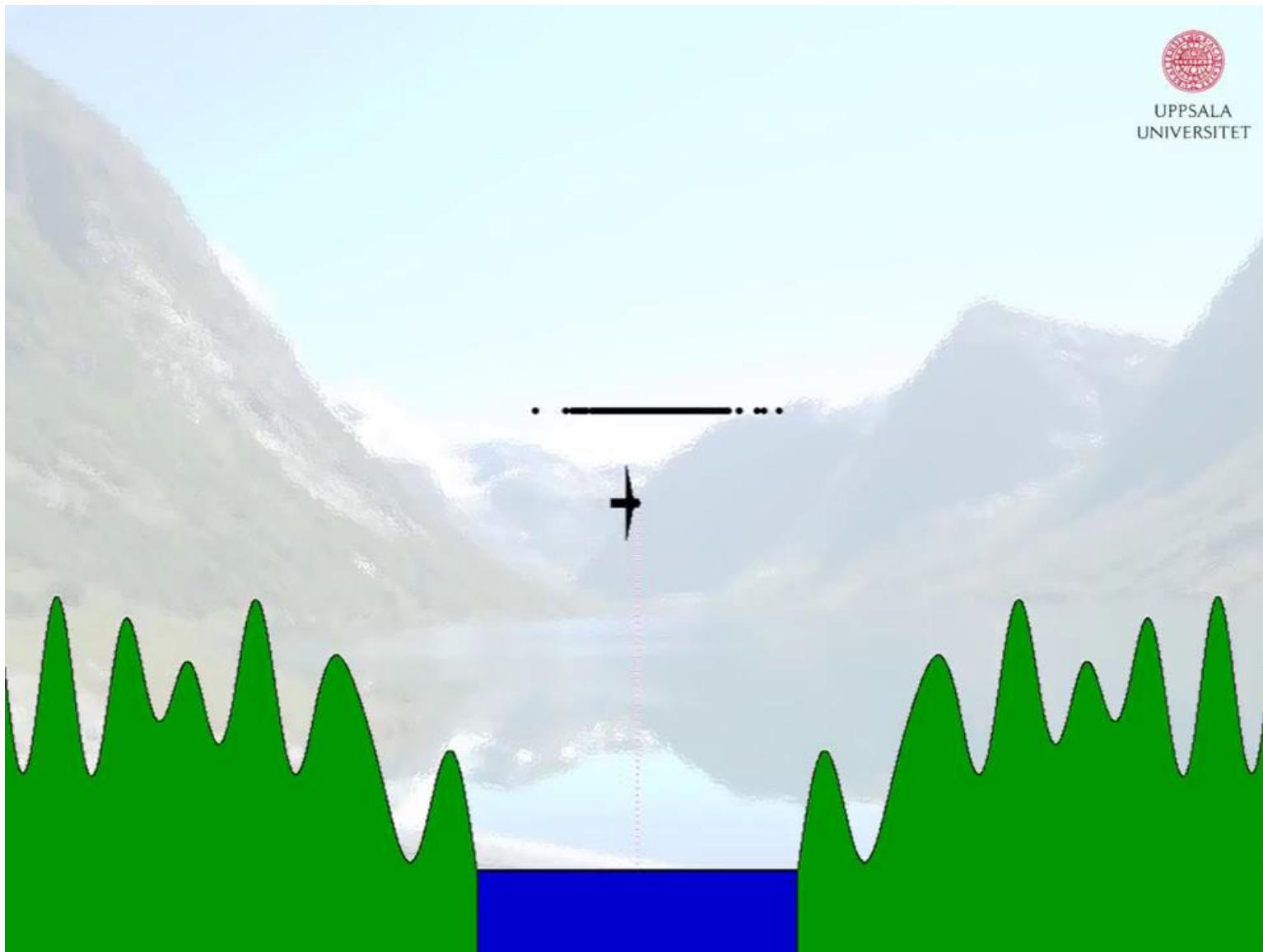


UPPSALA  
UNIVERSITET

<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iaffi/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

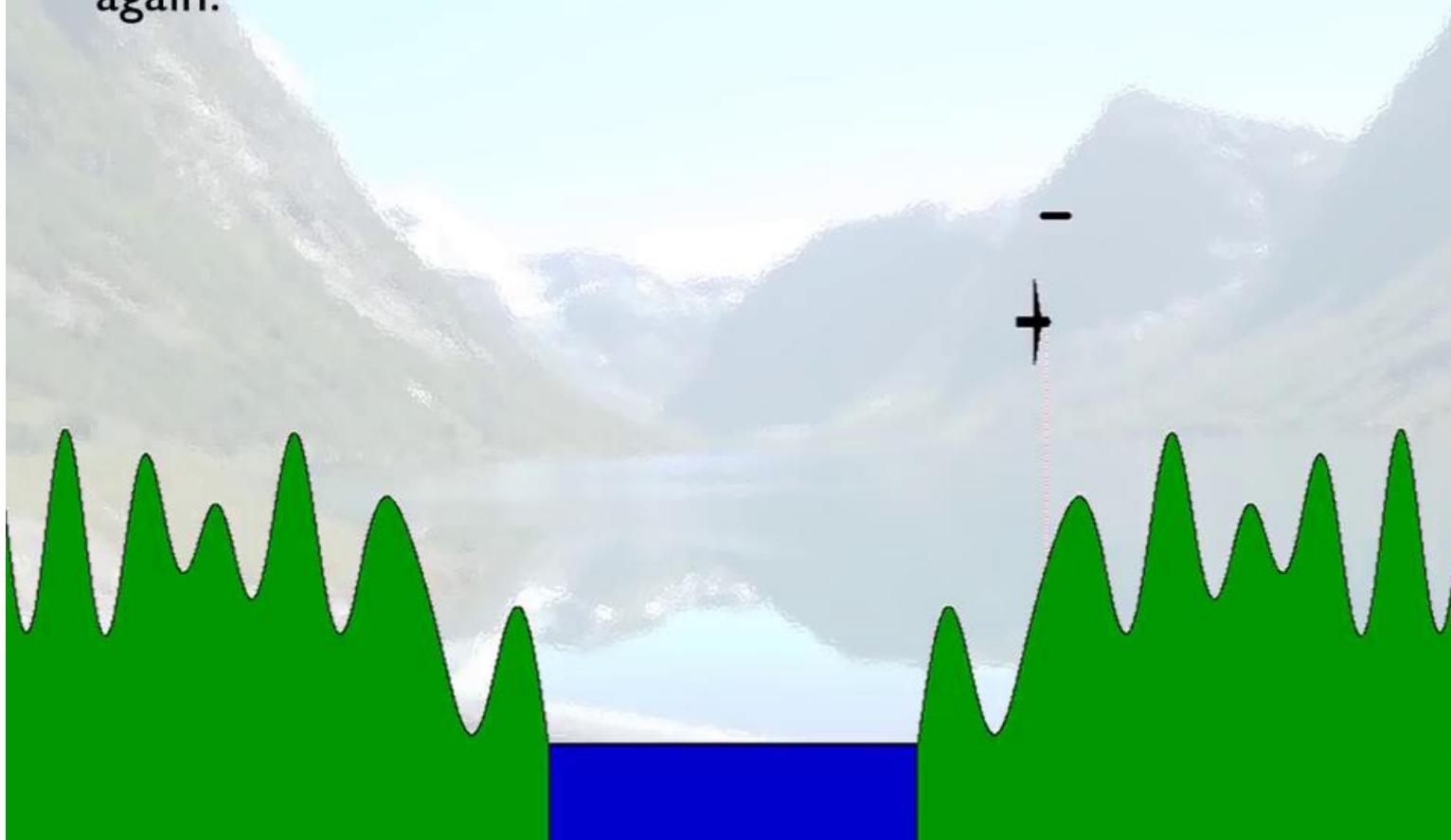
Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



UPPSALA  
UNIVERSITET

Note how the precision in the estimate has recovered, as the aircraft is over the mountains again.



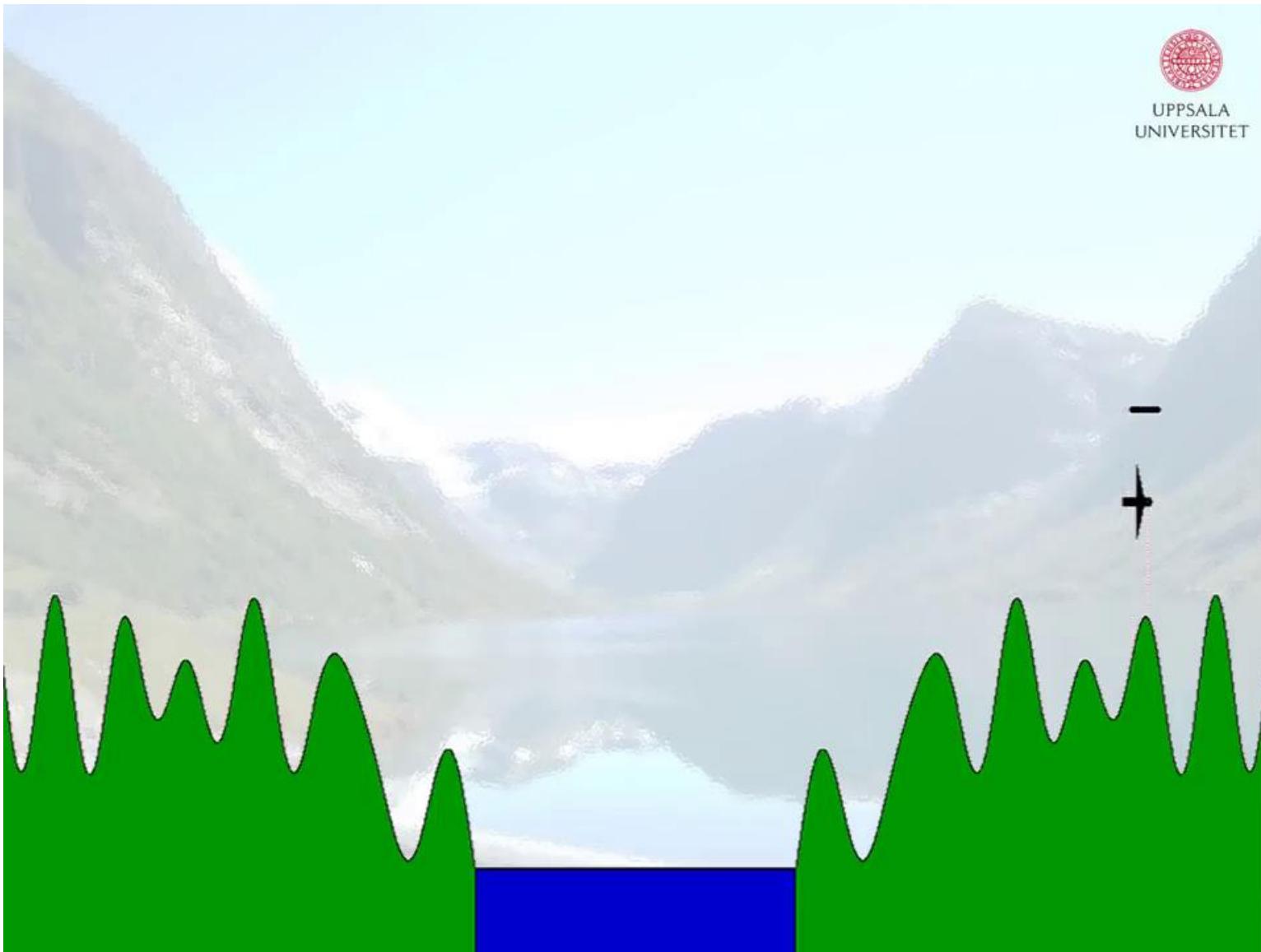
<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

Florin Leon - Inteligenta artificială

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



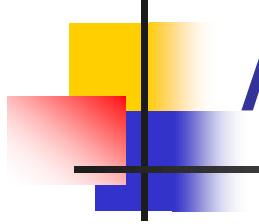
UPPSALA  
UNIVERSITET



<https://www.youtube.com/watch?v=aUkBa1zMkv4>

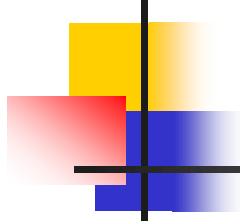
Florin Leon - Inteligenta artificiala

<https://sites.google.com/view/iafii/home> - [http://florinleon.byethost24.com/curs\\_ia\\_info.html](http://florinleon.byethost24.com/curs_ia_info.html)



# Avantaje

- Complexitate de timp constantă
- S-a observat empiric că eroarea de aproximare rămâne mărginită în timp (analiza teoretică este dificilă)
- Cu cât numărul de particule este mai mare, aproximarea probabilităților este mai bună



# Concluzii

- Rețelele bayesiene asigură un mod concis de a reprezenta relațiile de independentă condiționată într-un domeniu și de a face inferențe
- Rețelele bayesiane dinamice sunt rețele bayesiane care reprezintă modele de probabilitate temporale
- Există multe metode de inferență exactă sau aproximativă pentru rețele bayesiene