

Probabilități și paradoxuri

1.1. Interpretări ale probabilităților

1.1.1. Interpretarea frecventistă

Mai întâi, vom menționa unele aspecte legate de natura probabilităților, interesante și din punct de vedere filosofic.

O definiție des întâlnită este următoarea: *probabilitatea* unui eveniment A reprezintă fracțiunea de lumi posibile în care A este adevărat (figura 1.1). Ca în teoria universurilor paralele, se consideră că se pot întâmpla *toate* posibilitățile, dar la un moment dat numai într-o fracțiune din „lumile posibile” respective se întâmplă un anumit eveniment.

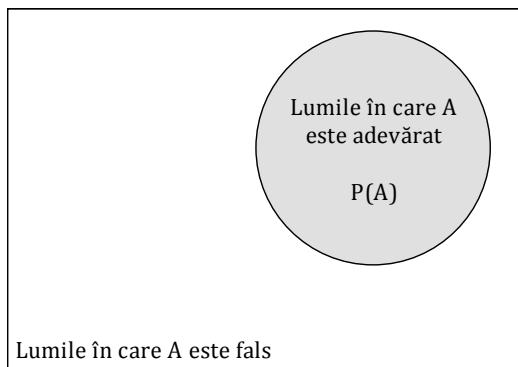


Figura 1.1. Ilustrarea interpretării frecventiste

Această definiție este legată de *interpretarea frecventistă*, care se reduce de fapt la organizarea unui experiment și la numărare: numărăm cazurile în care evenimentul este adevărat.

Dacă vrem să aflăm care este probabilitatea să se defecteze un calculator, numărăm câte calculatoare s-au defectat din numărul total de calculatoare și împărțim cele două valori.

Interpretarea frecventistă postulează că probabilitatea unui eveniment este frecvența sa relativă în timp, adică frecvența relativă de apariție după repetarea procesului de un număr mare de ori în condiții similare. Evenimentele se consideră guvernate de unele fenomene fizice aleatorii, fie fenomene predictibile în principiu, dacă am dispune de suficiente informații, fie fenomene impredictibile prin natura lor esențială.

Aruncarea unui zar sau învârtirea ruletei sunt exemple de fenomene predictibile în principiu, pe când descompunerea radioactivă este un exemplu de fenomen impredictibil. Descompunerea radioactivă este procesul prin care nucleul unui atom instabil pierde energie prin emiterea de radiație ionizantă. Emisia este spontană iar atomul se descompune fără alte interacțiuni fizice cu alte particule din afara sa. Descompunerea radioactivă este un proces stochastic la nivelul unui singur atom; conform teoriei mecanicii cuantice, este imposibil să se prezică momentul când va avea loc aceasta. Totuși, probabilitatea că un atom se va descompune este constantă în timp și deci pentru un număr mare de atomi identici, rata de descompunere a ansamblului este predictibilă, pe baza constantei de descompunere (sau a perioadei de înjumătățire).

În cazul aruncării unui ban corect, interpretarea frecventistă consideră că probabilitatea de a cădea „cap” este $1/2$ nu pentru că există 2 rezultate egal probabile, ci pentru că serii repetate de încercări au arătat în

mod empiric că frecvența converge la $1/2$ când numărul de încercări tinde la infinit.

Mai formal, dacă n_a este numărul de apariții ale unui eveniment A după n încercări, atunci $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n}$.

O problemă fundamentală în definirea frecventistă a probabilităților este următoarea. Limita unui sir infinit de încercări este independentă de segmentele sale inițiale finite. Dacă un ban cade „cap” de o sută de ori la rând, asta nu spune de fapt mai nimic despre probabilitatea de a cădea „cap” când numărul de încercări tinde la infinit. Este în mod evident imposibilă repetarea de un număr infinit de ori a unui experiment pentru a-i determina probabilitatea reală. Dar dacă se efectuează doar un număr finit de încercări, pentru fiecare serie de încercări va apărea o frecvență relativă diferită, chiar dacă probabilitatea reală ar trebui să fie aceeași întotdeauna. Dacă putem măsura probabilitatea doar cu o anumită eroare, această eroare de măsurare poate fi exprimată doar ca o probabilitate (însuși conceptul pe care dorim să-l definim). Prin urmare, definiția frecvenței relative devine circulară (Hájek, 2012).

1.1.2. Interpretarea fizică

Interpretarea fizică (engl. “propensity”) afirmează că probabilitățile sunt niște proprietăți ale obiectelor sau evenimentelor, predispoziții ale unui anumit tip de situații să producă anumite rezultate sau frecvențe relative pentru un număr mare de experimente. Predispozițiile nu sunt frecvențe relative, ci *cauze* ale frecvențelor relative stabile observate și ar trebui să explice *de ce* repetarea unui experiment generează anumite rezultate cu aproximativ aceleași rate de apariție.

Ne putem întreba dacă probabilitățile sunt niște caracteristici intrinseci ale obiectelor, asemănătoare cu proprietățile lor fizice, ca masa de exemplu. Dacă la aruncarea unui ban corect probabilitatea de a cădea pe fiecare din cele două fețe este 50% (banul poate să cadă și pe cant, dar aceasta este o problemă marginală, o excepție cu probabilitate foarte mică), care este cauza pentru procentele de 50-50%? De ce sunt egale probabile cele două fețe? Este aceasta o proprietate a banului ca obiect? Ar putea exista o altă zonă din univers, cu alte legi ale fizicii, în care această proporție să nu fie 50-50%?

Rezultatul unui experiment fizic este produs de o mulțime de condiții inițiale. Când repetăm un experiment, de fapt realizăm un alt experiment, cu condiții inițiale mai mult sau mai puțin similare. Un experiment determinist va avea de fapt întotdeauna o predispoziție de 0 sau 1 pentru un anumit rezultat. De aceea, predispoziții nebanele (diferite de 0 sau 1) există doar pentru experimente cu adevărat nedeterministe.

În această interpretare, rezultatul unui eveniment se bazează pe proprietățile fizice obiective ale obiectului sau procesului care generează evenimentul. Rezultatul aruncării unui ban se poate considera ca fiind determinat de exemplu de proprietățile fizice ale banului, cum ar fi forma simetrică plată și cele două fețe.

Este greu să definim probabilitățile ca predispoziții, pentru că (cel puțin deocamdată) nu știm ce sunt, ci doar ce (bănuim că) fac. Însă, aşa cum magnitudinea unei sarcini electrice nu poate fi definită explicit, folosind noțiuni elementare, ci doar în măsura efectelor pe care le produce (atragerea sau respingerea altor sarcini electrice), tot astfel predispoziția este ceea ce face ca un experiment să aibă o anumită probabilitate.

În acest context, legea numerelor mari reflectă faptul că frecvențele relative stable sunt o manifestare a predispozițiilor, adică a probabilităților invariante singulare (care se referă la evenimentul considerat în sine, nu la seria de încercări repetate). Pe lângă explicarea apariției frecvențelor relative stable, ideea de predispoziție este motivată de dorința de a înțelege probabilitățile singulare din mecanica cuantică, precum probabilitatea de descompunere a unui atom la un anumit moment (Hájek, 2012).

1.1.3. Interpretarea subiectivistă

Interpretarea frecventistă și cea fizică se mai numesc „obiectiviste”, deoarece presupun probabilitățile ca fiind componente ale lumii fizice. Discuția despre probabilitățile obiective are sens doar în contextul unor experimente aleatorii bine definite.

Interpretarea subiectivistă sau bayesiană consideră că probabilitatea unui eveniment este o măsură a convingerii subiective, personale, că evenimentul va avea loc.

Probabilități subiectiviste pot fi atribuite oricărei propoziții, chiar și atunci când nu este implicat niciun proces aleatoriu. Ele reprezintă gradul în care propoziția este sprijinită de evidențele disponibile. În general, aceste probabilități sunt considerate grade de încredere, care arată cât de siguri suntem că propoziția respectivă este adevărată.

Principiul indiferenței afirmă că atunci când există $n > 1$ posibilități mutual exclusive (distințe) și exhaustive colectiv (care acoperă toate posibilitățile), indistinctibile cu excepția denumirilor lor, fiecărei posibilități trebuie să i se atribuie o probabilitate egală cu $1 / n$ (Keynes, 1921).

Un ban simetric are două fețe, denumite arbitrar „cap” și „pajură”. Presupunând că banul va cădea pe o față sau pe alta, rezultatele aruncării banului sunt mutual exclusive, exhaustive și interschimbabile, dacă ignorăm evenimentul mai puțin probabil de a atteriza pe cant, deoarece acest rezultat nu este interschimbabil cu celelalte două. Conform principiului, fiecărei fețe i se atribuie probabilitatea de 1/2.

În această analiză se presupune că forțele care acționează asupra banului nu sunt cunoscute. Dacă le-am cunoaște cu precizie, am putea prezice traectoria banului conform legilor mecanicii clasice.

Interpretarea subiectivistă permite raționamentul cu propoziții a căror valoare de adevăr este incertă. Pentru a evalua probabilitatea unei ipoteze, trebuie specificate unele probabilități a-priori, care sunt actualizate apoi în lumina datelor relevante noi care apar.

În abordarea subiectivistă, probabilitatea măsoară o convingere personală, unei ipoteze i se atribuie o probabilitate, pe când în abordarea frecventistă, ipoteza este testată fără a i se atribui o probabilitate inițială.

Abordările obiectiviste sunt nepractice pentru cele mai multe probleme de decizie din lumea reală. În abordarea frecventistă, este necesar ca un proces să aibă o natură repetitivă pentru a-i putea fi măsurată probabilitatea. Aruncarea unui ban este un astfel de proces, însă incertitudinile privind un război nuclear de exemplu nu pot fi tratate astfel. Nu au existat războaie nucleare până acum și mai mult, repetarea lor este greu de imaginat. Pentru un astfel de proces complex care presupune analiza circumstanțelor care conduc la un război nuclear, este greu de realizat o estimare bazată pe considerente obiective (Lee, 1989).

Abordarea subiectivistă permite combinarea naturală a frecvențelor cu judecățile experților. Probabilitățile numerice pot fi extrase din baze de

date, pot fi estimate de către experți sau pot fi o combinație între cele două variante.

1.1.4. Probabilitățile în lumea cuantică

Dezvoltând discuția în domeniul mecanicii cuantice, putem considera extensia modelului de probabilități unidimensional, din lumea macroscopică, în care probabilitățile sunt numere reale pozitive și pentru o distribuție suma tuturor probabilităților este 1, la un model bidimensional, în care avem aşa-numitele *amplitudini de probabilitate*.

Amplitudinea de probabilitate este un număr complex al cărui modul ridicat la pătrat reprezintă o probabilitate. De exemplu, dacă amplitudinea de probabilitate a unei stări cuantice este $\alpha = \gamma + i\delta$, atunci probabilitatea de a măsura acea stare este $|\alpha|^2 = \gamma^2 + \delta^2$.

Dacă o particulă elementară poate avea 2 stări, notate $|0\rangle$ și $|1\rangle$, atunci ea poate fi simultan într-o *superpoziție* a acestor stări: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, unde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Dacă particula este observată, vom detecta starea $|0\rangle$ cu probabilitatea $|\alpha|^2$ și starea $|1\rangle$ cu probabilitatea $|\beta|^2$. De asemenea, starea particulei „colapsează” în starea observată, ori $|0\rangle$ ori $|1\rangle$.

Două experimente tipice pun în evidență comportamentul total diferit al elementelor mecanicii cuantice față de cele ale mecanicii clasice.

Primul presupune trimiterea de fotonii sau electronii perpendicular spre un perete, prin două fante care au mărimea și distanța dintre ele comparabile cu lungimea de undă a particulelor incidente. Chiar dacă doar o singură particulă elementară este emisă la un moment dat, pe perete apare un model de interferență, ca și cum fiecare particulă ar trece simultan prin

ambele fante și ar interfera cu ea însăși, după cum se poate vedea în figura 1.2 (BlackLight Power, 2005).

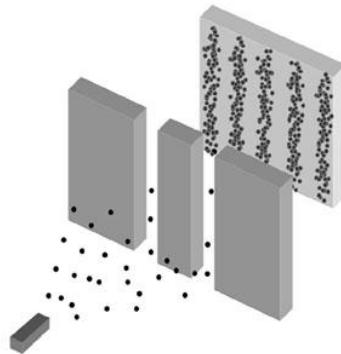


Figura 1.2. Comportamentul de tip undă

Dacă în dreptul fantelor se pune un detector, astfel încât să se determine exact prin ce fantă trece particula, rezultatul de pe perete apare ca două aglomerări distincte în dreptul fiecărei fante, fără modelul de interferență, ca în figura 1.3 (BlackLight Power, 2005). Prin acțiunea de observare, starea particulelor cuantice colapsează din superpoziție într-o stare „clasică”.

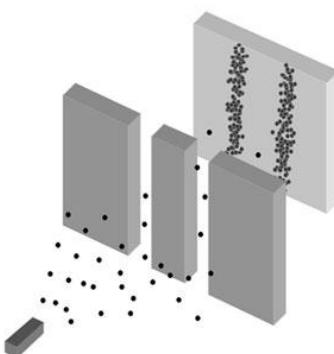


Figura 1.3. Comportamentul de tip particulă

În primul caz, particulele elementare se comportă ca niște unde, iar în al doilea caz se comportă ca niște particule. Este ca și cum rezultatul ar depinde de scopul măsurătorii, dacă dorim să detectăm particule sau unde.

Un alt experiment interesant care pune în evidență caracterul cuantic al particulelor elementare este interferometrul Mach-Zehnder (Harrison, 2008), prezentat în figura 1.4.

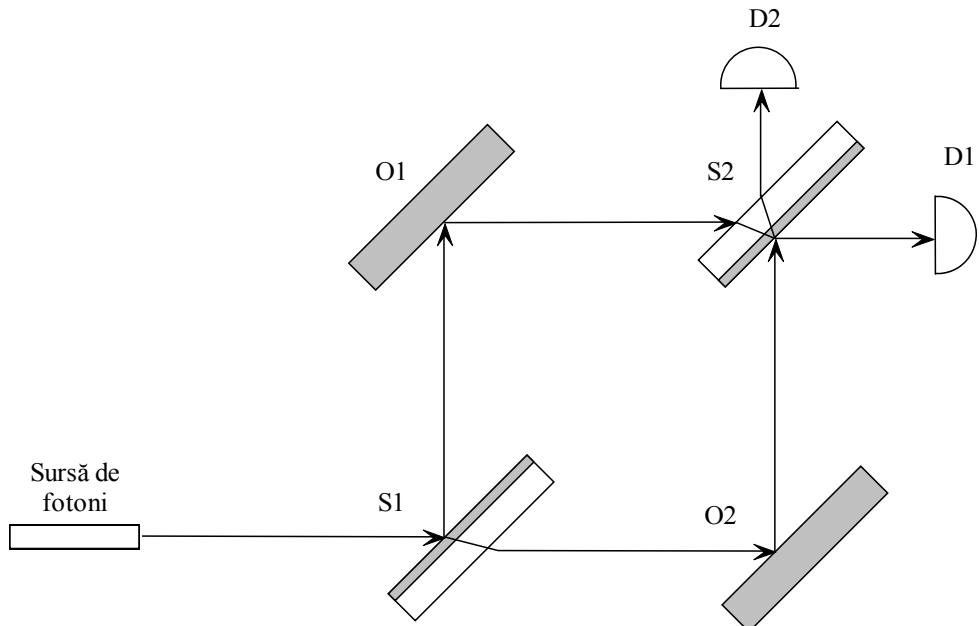


Figura 1.4. Interferometrul Mach-Zehnder

Acesta este un dispozitiv utilizat în general pentru a măsura interferența clasică. Este compus dintr-o sursă de fotoni, două oglinzi normale, O1 și O2, două oglinzi semitransparente S1 și S2 și două detectoare de particule D1 și D2. O oglindă semi-transparentă reflectă jumătate din lumina primită și refractă cealaltă jumătate prin ea.

La fiecare reflectare, fotonii își schimbă fază cu o jumătate de lungime de undă. Schimbări de fază au loc și la traversarea materialului

oglinzilor semitransparente. Ideea de bază este că schimbările de fază pentru ambele căi („sus” și „dreapta”) sunt egale în cazul detectorului D1 și prin urmare apare o interferență constructivă. În cazul detectorului D2, fotonii venind de pe cele două căi prezintă o diferență de fază de o jumătate de lungime de undă, ceea ce determină o interferență destructivă completă. În cazul clasic, toată lumina ajunge la detectorul D1 și deloc la detectorul D2.

În cazul cuantic, un foton traversează singur sistemul, însă apare același rezultat, ca și cum ar parcurge simultan cele două căi posibile și ar interfera cu el însuși.

Dacă am dori să observăm exact calea pe care merge fotonul, eliminând de exemplu oglinda S2 (figura 1.5), rezultatele devin cele clasice, jumătate din fotoni fiind detectați de către D1 și jumătate de către D2.

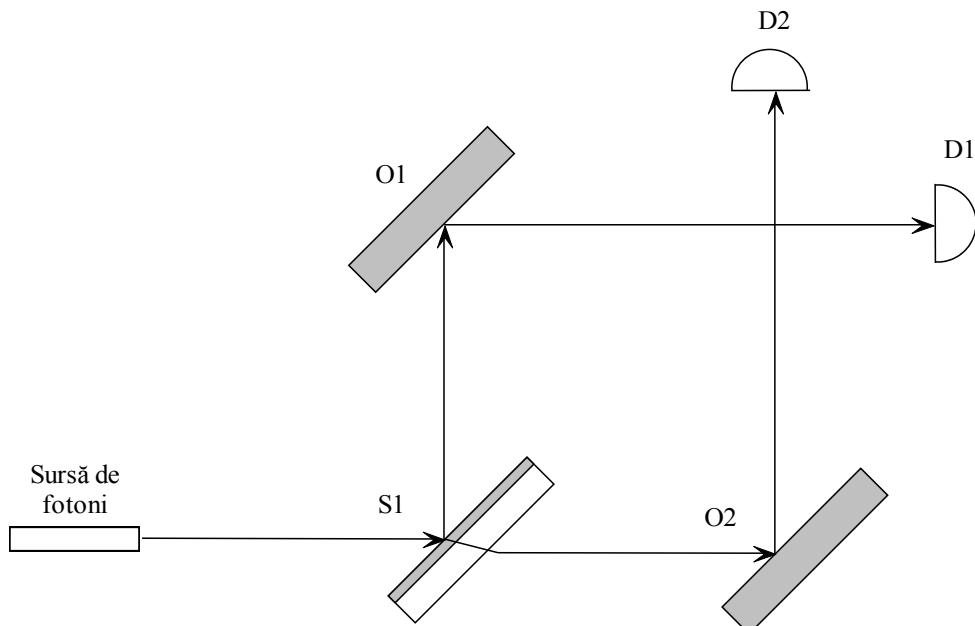


Figura 1.5. Configurația pentru observarea căii fotonului

Calculul cuantic este o direcție promițătoare de cercetare care încearcă să utilizeze fenomenele cuantice precum superpoziția (remarcată în experimentele anterioare prin faptul că particula elementară traversează simultan două căi) pentru a crește performanțele algoritmilor.

Unitatea de bază pentru informația cuantică este *qubit*-ul (engl. “quantum bit”), un sistem cuantic care poate avea 2 stări. Prelucrarea datelor se face aplicând aşa numitele *porți cuantice*, care transformă starea sistemului. Din punct de vedere matematic, aceste transformări sunt reprezentate ca niște matrice cu care se înmulțesc de obicei amplitudinile de probabilitate pentru a lua noi valori.

Să considerăm următorul exemplu (Aaronson, 2006), în care un qubit este inițial în starea $|0\rangle$, adică amplitudinea de probabilitate corespunzătoare stării $|0\rangle$ este 1 iar cea corespunzătoare stării $|1\rangle$ este 0. Vom mai considera transformarea dată de următoarea poartă cuantică, al cărei efect este rotirea unui vector cu 45° în sens antiorar (trigonometric):

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Prin aplicarea acestei transformări, qubit-ul va ajunge într-o superpoziție:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

în care, dacă qubit-ul este observat, stările $|0\rangle$ și $|1\rangle$ au probabilități egale de apariție, $1/2$. Operația este echivalentă aruncării unui ban.

Dacă însă mai aplicăm o dată aceeași transformare pentru starea rezultată, vom avea:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

ceea ce corespunde unei stări deterministe de $|1\rangle$.

Este ca și cum am da cu banul o dată și apoi, fără a vedea ce rezultat am obținut, mai aruncăm banul o dată și obținem un rezultat determinist.

Și în acest caz avem de-a face cu un fenomen de interferență, după cum putem vedea în figura 1.6 (Aaronson, 2006). Există două căi care conduc în starea $|0\rangle$, însă una din căi are o amplitudine pozitivă și cealaltă are o amplitudine negativă. Prin urmare, aceste amplitudini interferează destructiv și se anulează. Pe de altă parte, căile care conduc în starea $|1\rangle$ au ambele amplitudini pozitive și acestea interferează constructiv.

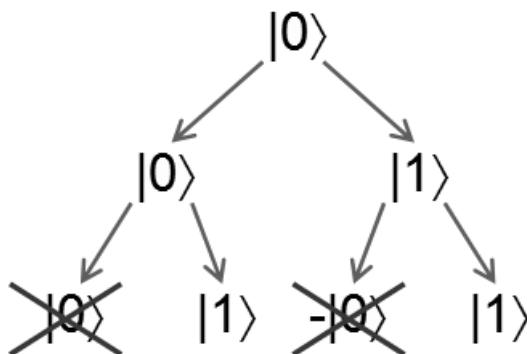


Figura 1.6. Interferența amplitudinilor de probabilitate

Acest tip de interferență nu se observă în lumea clasică deoarece probabilitățile nu pot fi negative. Anularea dintre amplitudinile pozitive și negative este unul din principalele aspecte care fac mecanica cuantică diferită de mecanica clasică.

Una din ideile de bază ale calculului cuantic este tocmai folosirea superpozițiilor și aplicarea unor transformări astfel încât rezultatele nedorite să se anuleze și, când sistemul este observat, să colapseze cu probabilitate cât mai mare într-o stare corespunzătoare rezultatului dorit.

Faptul că observarea unui sistem cuantic conduce la modificarea sa ridică numeroase probleme filosofice legate de rolul factorului conștiință în modelarea realității. Putem influența evenimentele aleatorii, schimbându-le probabilitățile?

În termodinamică, toate particulele au o mișcare browniană aleatorie, însă dacă ne ridicăm la un nivel superior, se pot observa comportamente deterministe. și în cazul oamenilor, interacțiunile acestora pot fi considerate aleatorii (deterministe sau nu, sunt oricum atât de complexe încât sunt probabil imposibil de modelat), însă din punct de vedere statistic se poate vedea cum evoluează o societate. Referindu-ne la modificarea probabilităților unor evenimente, noi suntem la nivelul microscopic, însă ar fi interesant dacă ne-am putea ridica la un nivel superior pentru a putea observa sau modifica sistemul.

Programul *Princeton Engineering Anomalies Research* (PEAR, 2010) a încercat între anii 1979-2007 un studiu experimental extins asupra interacțiunilor dintre conștiința umană și anumite dispozitive, multe bazate pe procese aleatorii, pentru a stabili măsura în care mintea poate influența realitatea fizică. După 28 de ani de investigații și mii de experimente cu milioane de încercări, rezultatul (controversat) a fost că, în medie, mintea

umană poate modifica 2-3 evenimente din 10000, dincolo de variațiile statistice normale.

1.2. Paradoxuri

Modul cum percep oamenii probabilitățile nu este perfect corect, întrucât nu există o capacitate înnăscută de a lucra cu acestea. La fel ca și în cazul logicii, oamenii au nevoie de un anumit antrenament pentru a înțelege toate subtilitățile raționamentelor probabilistice. Vom prezenta în cele ce urmează câteva paradoxuri, situații care conduc la concluzii neintuitive, dar care se dovedesc corecte în urma unei analize mai profunde.

1.2.1. Problema „Monty-Hall”

Problema „Monty-Hall” a fost popularizată în Statele Unite de o emisiune a canalului CBS din 1963. Problema este însă mai veche, fiind cunoscută într-o altă variantă încă de pe vasele cu zbaturi de pe Mississippi.

Concurrentul este pus în fața a trei uși, după cum se poate vedea în figura 1.7. În spatele a două uși este câte o capră iar în spatele unei uși este o mașină. Scopul jocului este desigur câștigarea mașinii. Jucătorul va câștiga ce se află în spatele ușii alese. Participantul trebuie să aleagă o ușă. Apoi, prezentatorul îi deschide o altă ușă, din celelalte două rămase, în spatele căreia este o capră. Apoi îl întreabă dacă vrea sau nu să își schimbe alegerea inițială către ușa a treia.

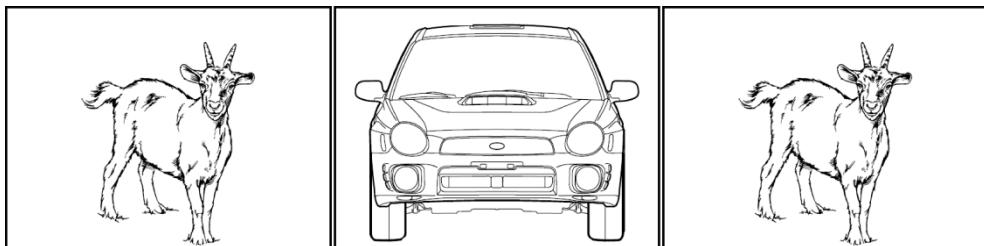


Figura 1.7. Problema „Monty-Hall”

Multe persoane consideră că probabilitatea inițială de câștig este $1/3$ iar dacă s-a deschis o ușă, probabilitatea devine acum $1/2$, indiferent de ușă aleasă. Având în vedere orgoliul propriu, faptul că inițial au ales ceva și nu vor să-și schimbe alegerea, probabilitățile părând oricum egale, ele au tentația de a nu-și schimba decizia.

Se poate vedea însă din figura 1.8 că prin schimbarea ușii, participantul are de două ori mai multe șanse de câștig. Intuitiv, prin faptul că prezentatorul i-a arătat o capră, i-a dat o informație, ceea ce schimbă probabilitățile. Ușa inițială a rămas cu probabilitatea de câștig de $1/3$, ceea ce este clar, dar faptul că i-a fost arătată o capră a transformat probabilitatea celelalte uși în $2/3$.

Să presupunem că jocul ar avea 100 de uși și prezentatorul i-ar fi deschis 98. Este clar că probabilitatea ușii inițiale este de $1/100$, iar restul până la 1 corespunde acum celeilalte uși.

Analizând toate deciziile posibile, dacă participantul a ales inițial mașina și își schimbă decizia, va pierde. Acesta este cazul defavorabil. În celelalte două situații însă, strategia de schimbare a deciziei este câștigătoare. Se vede că păstrarea alegerii inițiale are probabilitatea de câștig de $1/3$ iar schimbarea are probabilitatea de câștig de $2/3$.

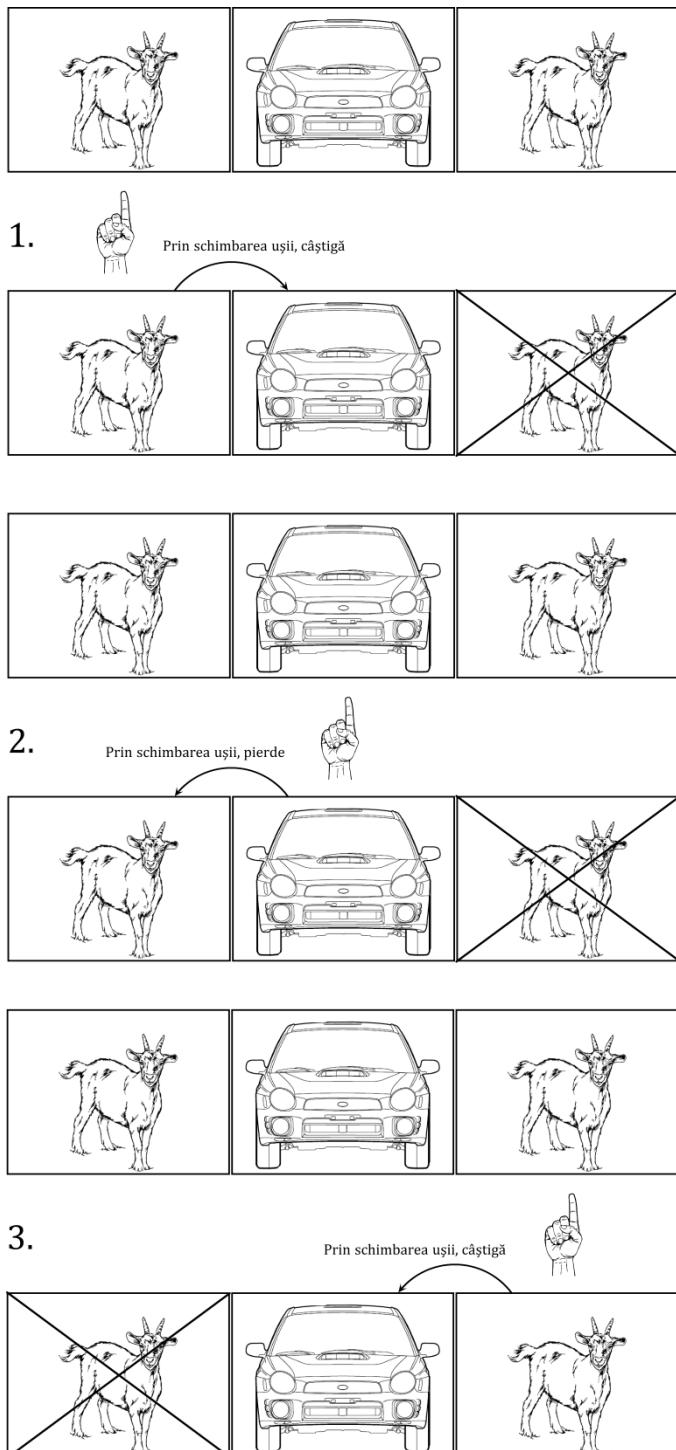


Figura 1.8. Situațiile posibile pentru problema „Monty-Hall”

1.2.2. Paradoxul cutiei lui Bertrand

Paradoxul cutiei lui Bertrand este echivalent din punct de vedere logic cu problema „Monty-Hall”. Există trei cutii al căror conținut nu este vizibil. Una conține două monede de aur, una conține două monede de argint iar a treia conține o monedă de aur și una de argint. După ce se alege o cutie în mod aleatoriu și se scoate o monedă, dacă aceasta este de aur, s-ar părea că probabilitatea ca moneda rămasă să fie tot de aur este de $1/2$. De fapt, probabilitatea este de $2/3$.

1.2.3. Eroarea jucătorului de ruletă

Un alt paradox este eroarea jucătorului de ruletă (engl. “gambler’s fallacy”). Culorile roșu și negru au fiecare probabilitatea de apariție de $1/2$. Să presupunem că a ieșit roșu de mai multe ori la rând. Eroarea este de a considera că, data următoare, negrul are mai multe șanse de apariție.

De fapt, fiecare experiment (acționare a ruletei) este independent. Prin urmare, de fiecare dată, roșul și negrul au aceleași probabilități de apariție. În 1913, la Monte Carlo, negrul a ieșit de 26 de ori la rând. Aceasta înseamnă că există o probabilitate foarte mică ca o culoare să iasă și de 100 de ori la rând, dar nu este imposibil. Toate aceste experimente succesive cu același rezultat, combinate, au o probabilitate foarte mică, însă fiecare experiment luat individual are aceleași probabilități.

1.2.4. Eroarea procurorului

Eroarea procurorului (engl. “prosecutor’s fallacy”) apare în situații

precum următoarea. Să considerăm că a fost prins un suspect de crimă, căruia i se fac analize de sânge pentru a fi comparate cu probele de la locul faptei. Grupa de sânge găsită la fața locului este o grupă rară, AB cu Rh negativ, care are 1% frecvență în populație. De asemenea, s-au mai găsit urme de păr blond, persoanele blonde constituind tot 1% din populație. Suspectul are grupa de sânge respectivă și este blond, prezența împreună a acestor trăsături având împreună probabilitatea de 0,01%. Prin urmare, probele ar indica faptul că suspectul este vinovat cu o probabilitate de 99,99%. Dacă însă orașul în care s-a petrecut crima are o populație de 100.000 de locuitori, înseamnă că, statistic, alți 10 oameni au aceleași trăsături și deci, probabilitatea suspectului de a fi vinovat este acum de doar 10%. Probabilitatea vinovăției a scăzut de la 99,99% la 10% doar luând în calcul această informație suplimentară.

Înseamnă că aceste probe sunt inutile? Nu, ele contează dacă sunt combinate cu alte probe, de exemplu o cameră video care identifică suspectul cu o probabilitate de 70%. În acest caz, probabilitățile de a fi nevinovat se înmulțesc: $0,1 \cdot 0,3 = 0,03$ și suspectul apare ca vinovat cu probabilitatea de 97%.

1.2.5. Paradoxul lui Simpson

Paradoxul lui Simpson (1951) nu se referă la probabilitățile elementare, ci la prelucrarea statistică a datelor. În general, se consideră că atunci când mulțimea de date este mai mare, concluziile trase sunt mai sigure, o consecință a legii numerelor mari din abordarea frecventistă a probabilităților. Paradoxul lui Simpson pare să infirme această euristică, demonstrând că este necesară foarte multă atenție atunci când mulțimi de

date mici se combină într-o mulțime de date mai mare. Uneori concluziile mulțimii mari sunt opuse concluziilor mulțimilor mici și în acest caz, de multe ori concluziile mulțimii mari sunt de fapt greșite.

Să considerăm un doctor care propune un tratament nou pentru o anumită afecțiune și dorește să îl compare cu un tratament standard din punct de vedere al timpului necesar pentru vindecare (scenariul este adaptat după un exemplu prezentat de Ooi, 2004). Cele două tipuri de tratament sunt aplicate unor bolnavi, iar rezultatele totale sunt prezentate în tabelul de mai jos. Pentru fiecare tratament și pentru fiecare rezultat, se indică numărul de pacienți aflați în situația respectivă.

Rezultat (timp de vindecare)	Tratament	
	Standard	Nou
Lung	2725 (55%)	3625 (80%)
Scurt	2275 (45%)	875 (20%)
Total	5000 (100%)	4500 (100%)

Din aceste date se poate trage concluzia că tratamentul nou pare clar inferior celui standard. 80% din pacienții supuși tratamentului nou au avut un timp lung de vindecare, comparativ cu 55% din pacienții supuși tratamentului standard. De asemenea, doar 20% din pacienții supuși tratamentului nou au avut un timp scurt de vindecare, comparativ cu 45% din pacienții care au primit tratamentul standard.

Să luăm acum în calcul următoarea informație: doctorul a făcut experimentul asupra unor bolnavi din Iași și respectiv din Bacău, în număr aproximativ egal. Însă doctorul, locuind în Iași, a avut mai mulți pacienți din acest oraș supuși noului tratament. Cei mai mulți pacienți din Bacău au primit tratamentul standard. Rezultatele detaliate sunt prezentate în tabelul următor.

Rezultat (timp de vindecare)	Tratament pentru pacienții din Iași		Tratament pentru pacienții din Bacău	
	Standard	Nou	Standard	Nou
Lung	475 (95%)	3600 (90%)	2250 (50%)	25 (5%)
Scurt	25 (5%)	400 (10%)	2250 (50%)	475 (95%)
Total	500 (100%)	4000 (100%)	4500 (100%)	500 (100%)

Se vede aici că pentru bolnavii din Iași tratamentul nou este mai bun: 90% față de 95% au avut un timp lung de vindecare și 10% față de 5% au avut un timp mai scurt de vindecare. O situație asemănătoare apare pentru bolnavii din Bacău: doar 5% față de 50% au avut un timp lung de vindecare și 95% față de 50% au avut un timp mai scurt de vindecare.

Practic, atunci când considerăm individual submulțimile de bolnavi din Iași și Bacău, tratamentul nou pare mai bun. Când considerăm mulțimea totală de bolnavi, tratamentul nou pare inferior celui standard.

Acest lucru ar fi echivalent cu următoarea situație. Dacă trebuie să recomandăm un tratament unui bolnav, fără să cunoaștem din ce oraș provine, îi vom recomanda tratamentul standard. Dacă știm din ce oraș provine, îi vom recomanda tratamentul nou. Însă cunoașterea sau nu a orașului nu ar trebui să aibă nicio influență asupra deciziei privind tratamentul.

Paradoxul este cauzat de combinarea unor grupuri inegale. În exemplul de mai sus, pacienții din Iași care au primit tratamentul standard sunt de 8 ori mai puțini decât cei care au primit tratamentul nou, iar pacienții din Bacău care au primit tratamentul nou sunt de 9 ori mai puțini decât cei care au primit tratamentul standard.

Soluția este proiectarea experimentelor astfel încât să nu se combine mulțimi de date de dimensiuni inegale, provenind din surse diferite (Rogers, 2001).

Fundamente teoretice

2.1. Probabilități condiționate. Teorema lui Bayes

Vom aminti acum câteva noțiuni legate de probabilitățile condiționate. Când trebuie să definim $P(A|B)$, presupunem că se cunoaște B și se calculează probabilitatea lui A în această situație. Adaptând un exemplu al lui Moore (2001), să considerăm evenimentul D (durere de cap) și să presupunem că are, în general, o probabilitate de 1/10. Probabilitatea de a avea gripă (evenimentul G) este de numai 1/40. După cum se vede în figura 2.1, dacă cineva are gripă, probabilitatea de a avea și dureri de cap este de 1/2. Deci probabilitatea durerii de cap, dată fiind gripe, este de 1/2. Această probabilitate corespunde intersecției celor două regiuni, cu aria egală cu jumătate din G .

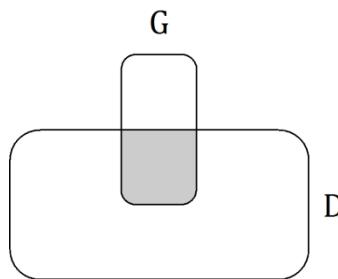


Figura 2.1. Reprezentare grafică a unei probabilități condiționate

Pe baza acestei relații rezultă *teorema lui Bayes* (1763), care este importantă pentru toate raționamentele probabilistice pe care le vom studia.

Considerăm formula probabilităților condiționate:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.1)$$

Putem exprima probabilitatea intersecției în două moduri și de aici deducem expresia lui $P(B|A)$ în funcție de $P(A|B)$:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B), \quad (2.2)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A), \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \quad (2.4)$$

Această ecuație reprezintă un rezultat fundamental. Mai clar, putem considera următoarea expresie alternativă:

$$P(I|E) = \frac{P(E|I) \cdot P(I)}{P(E)}, \quad (2.5)$$

unde I este ipoteza, E este evidența (provenind din datele observate), $P(I)$ este *probabilitatea a-priori* a ipotezei, adică gradul inițial de încredere în ipoteză, $P(E|I)$ este *verosimilitatea* datelor observate (engl. “likelihood”), adică măsura în care s-a observat evidența în condițiile îndeplinirii ipotezei, iar $P(I|E)$ este *probabilitatea a-posteriori* a ipotezei, dată fiind evidența.

Relația este importantă deoarece putem calcula astfel probabilitățile cauzelor, date fiind efectele. Este mai simplu de cunoscut când o cauză

determină un efect, dar invers, când cunoaștem un efect, probabilitățile cauzelor nu pot fi cunoscute imediat. Teorema ne ajută să diagnosticăm o anumită situație sau să testăm o ipoteză.

În ecuația 2.4, se poate elimina $P(B)$ folosind *regula probabilității totale* (engl. “law of total probability”). $P(B)$ va fi exprimat astfel:

$$P(B) = \sum_j P(B|A_j)P(A_j). \quad (2.6)$$

Expresia poate fi înțeleasă mai ușor observând situația din figura 2.2.

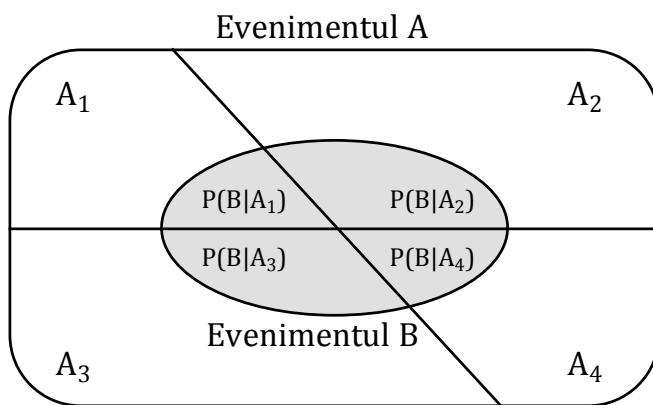


Figura 2.2. Reprezentare grafică a legii probabilității totale

Probabilitatea fiecărei valori A_i a lui A , condiționată de B , este:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}. \quad (2.7)$$

Să considerăm următorul exemplu de diagnosticare. Știm că probabilitatea de apariție a meningitei în populația generală este

$P(M) = 0,002\%$. De asemenea, probabilitatea ca o persoană să aibă gâtul înțepenit este $P(G) = 5\%$. Mai stim că meningita cauzează gât înțepenit în jumătate din cazuri: $P(G|M) = 50\%$.

Dorim să aflăm următorul lucru: dacă un pacient are gâtul înțepenit, care este probabilitatea să aibă meningită?

Aplicând teorema lui Bayes, vom avea:

$$P(M|G) = \frac{P(G|M) \cdot P(M)}{P(G)} = 0,02\%.$$

G este un simptom pentru M . Dacă există simptomul, care este probabilitatea unei posibile cauze, adică $P(M)$? Rezultatul este $0,02\%$, deci o probabilitate mică, deoarece probabilitatea meningitei însăși este foarte mică în general.

Acest rezultat este important la diagnosticarea bolilor rare. Testele au și ele o marjă de eroare, foarte mică, dar ea există. Aceasta, coroborată cu probabilitatea mică a bolii, nu conduce automat la concluzia că persoana are boala respectivă, chiar dacă testul iese pozitiv.

În exemplul următor, B reprezintă boala, iar T reprezintă rezultatul pozitiv al testului. Să presupunem că:

$$P(B) = 0,01$$

$$P(T|B) = 0,99$$

$$P(T|\neg B) = 0,02.$$

Conform expresiei 2.7, putem calcula probabilitatea bolii dacă testul a ieșit pozitiv:

$$P(B|T) = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|\neg B) \cdot P(\neg B)} = 0,33$$

Prin urmare, chiar dacă testul iese pozitiv, probabilitatea de a avea boala este de doar 33%. În general, trebuie evitată greșeala de a considera că $P(A|B) = P(B|A)$. Se poate vedea chiar din exemplul anterior că $P(B|T) \neq P(T|B)$.

2.2. Independență și independență condiționată

Vom prezenta în continuare câteva exemple în care vom explica noțiunile de *independență* și *independență condiționată*.

Să presupunem că Ion și Maria dau cu banul. Ion dă cu un ban și Maria dă cu alt ban. Aceste evenimente nu se influențează în niciun fel. Dacă Ion dă cu banul, acest lucru nu aduce nicio informație asupra rezultatului acțiunii Mariei. În acest caz, evenimentele sunt independente, deoarece rezultatul unui experiment nu influențează celălalt experiment.

În cazul în care dau cu același ban, dacă Ion dă de 100 de ori și iese de 70 de ori pajură, ceea ce înseamnă că banul nu este corect, acest rezultat dă informații asupra experimentului Mariei. Dacă Maria va da cu banul de 100 de ori, probabil rezultatul va fi similar. Cele două evenimente nu mai sunt independente.

În schimb, dacă un expert analizează banul și constată că este măsluit, atunci experimentul lui Ion (70% pajură) nu mai aduce nicio informație asupra experimentului Mariei (tot 70% pajură). Rezultatul se poate prevedea datorită analizei expertului. Experimentele lui Ion și al

Mariei devin independente dată fiind noua evidență, a faptului că banul este măsluit.

Fie variabila A rezultatul experimentului lui Ion și B rezultatul experimentului Mariei. Fie C variabila „banul este influențat în favoarea pajurei”. În ultimul exemplu, se spune că A și B sunt independente condițional, dat fiind C .

În unele situații, independența condițională poate fi ușor confundată cu independența. Se presupune că evenimentele sunt independente, când de fapt sunt doar independente condițional.

De exemplu, Ion și Maria locuiesc în zone diferite ale orașului și vin la serviciu cu tramvaiul, respectiv cu mașina. Se poate considera că dacă întârzie unul din ei, nu se poate spune nimic despre întârzierea celuilalt, sunt evenimente independente. Dar să presupunem că la un moment dat aflăm că vatmanii sunt în grevă. Ion întârzie deoarece nu merg tramviale. Însă datorită grevei, probabil traficul auto crește, ceea ce o afectează pe Maria. Astfel, întârzierea lui Ion nu mai este independentă de întârzierea Mariei. Ele sunt independente condițional, dat fiind evenimentul grevei vatmanilor, care este cauza lor comună.

Să mai considerăm cazul în care o răceală poate detemina o persoană să strănuie, dar și o alergie poate determina același lucru. În general, dacă nu știm că persoana a strănutat, răceala și alergia sunt evenimente independente. Dacă știm însă că persoana strănută, aceste evenimente nu mai sunt independente. De exemplu, dacă mai știm că persoana este răcită, probabil că răceala determină strănutul și deci probabilitatea de a avea și alergie se reduce. Informații suplimentare privind răceala modifică probabilitatea alergiei.

2.3. Rețele bayesiene

În continuare, ne vom concentra asupra reprezentării informațiilor legate de evenimente probabilistice, care ne va ajuta să realizăm eficient raționamente.

Determinarea probabilității unei combinații de valori se poate realiza astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1}, \dots, x_1). \quad (2.8)$$

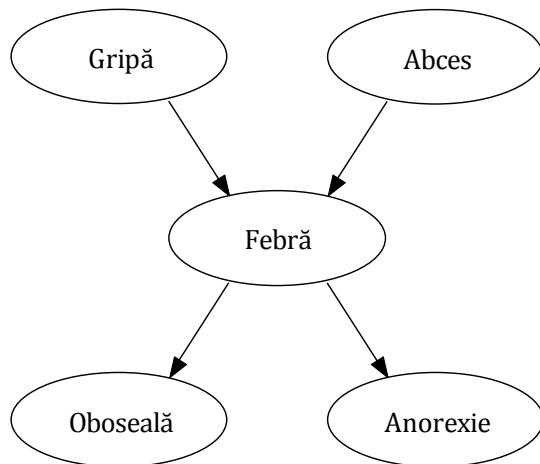
Aplicând în continuare această regulă vom obține *regula de înmulțire a probabilităților* (engl. “chain rule”):

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) &= P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1}|x_{n-2}, \dots, x_1) \cdot P(x_2|x_1) \\ &\quad \cdot P(x_1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

exprimată mai concis astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1). \quad (2.10)$$

O rețea bayesiană arată ca în figura 2.3: este un graf orientat aciclic (engl. “directed acyclic graph”), în care evenimentele sau variabilele se reprezintă ca noduri, iar relațiile de corelație sau cauzalitate se reprezintă sub forma arcelor dintre noduri.

**Figura 2.3.** Rețea bayesiană

În acest exemplu, se consideră că atât gripa cât și abcesul pot determina febra. De asemenea, febra poate cauza o stare de oboseală sau lipsa poftei de mâncare (anorexie).

Sensul săgeților arcelor sunt dinspre părinți, cum ar fi gripa și abcesul, înspre fii, precum febra. Deși în acest exemplu relațiile sunt cauzale, în general o rețea bayesiană reflectă relații de corelație, adică măsura în care aflarea unor informații despre o variabilă-părinte aduce noi informații despre o variabilă-fiu.

Condiția ca o rețea bayesiană să fie un graf orientat aciclic înseamnă că arcele pot forma bucle, dar nu pot forma cicluri, după cum se vede în figura 2.4.

Având în vedere că determinarea probabilităților nodurilor presupune de fapt înmulțiri și adunări în care sunt implicați părinții variabilelor, dacă rețeaua ar permite cicluri, acest lucru ar conduce la repetarea la infinit a unor calcule.

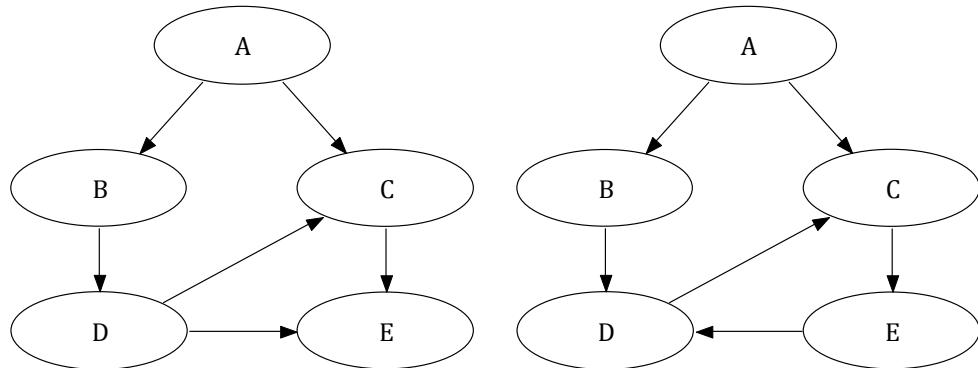


Figura 2.4. a) Rețea bayesiană validă; b) Rețea bayesiană invalidă

Fiecare variabilă are o mulțime de valori. În cazul cel mai simplu, variabilele au valori binare, de exemplu *Da* și *Nu*. În general însă, o variabilă poate avea oricâte valori.

Tabelul 2.1. Tabelele de probabilități pentru rețeaua bayesiană

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

<i>Gripă</i>	<i>Abces</i>	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

<i>Febră</i>	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

<i>Febră</i>	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

Asociate cu variabilele, o rețea bayesiană conține o serie de tabele de probabilități, precum cele din tabelul 2.1. Pentru nodurile fără părinți se indică probabilitățile marginale ale fiecărei valori (adică fără a lăua în considerare valorile celorlalte variabile). Pentru celelalte noduri, se indică probabilitățile condiționate pentru fiecare valoare, ținând cont de fiecare combinație de valori ale variabilelor părinte.

În general, o variabilă binară fără părinți va avea un singur parametru independent, o variabilă cu 1 părinte va avea 2 parametri independenți iar o variabilă cu n părinți va avea 2^n parametri independenți în tabela de probabilități corespunzătoare.

Presupunerea modelului bazat pe rețele bayesiene este că o variabilă nu depinde decât de părinții săi și deci ecuația 2.10 devine:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \pi(x_i)), \quad (2.11)$$

unde $\pi(x_i)$ reprezintă mulțimea părinților variabilei x_i , din sirul ordonat al nodurilor în care părinții unui nod apar întotdeauna înaintea nodului respectiv. Modul în care se poate determina acest sir va fi tratat în secțiunea 2.5 referitoare la sortarea topologică.

Dacă avem n variabile binare, distribuția comună de probabilitate conține câte o probabilitate pentru toate 2^n combinații. Însă întrucât suma probabilităților este 1, ultima combinație nu mai este independentă de celelalte și poate fi dedusă ca 1 minus suma celorlalte. Distribuția comună este deci specificată de $2^n - 1$ parametri.

După cum se vede în tabelele de probabilități din tabelul 2.1, pentru exemplul din figura 2.3 cu 5 variabile sunt necesari numai 10 parametri față

de $2^5 - 1 = 31$. Toate variabilele fiind binare, pentru o anumită combinație de valori a părinților, probabilitatea unei valori a unui fiu este 1 minus probabilitatea celeilalte valori, de exemplu:

$$P(\text{Oboseală} = \text{Da}) = 1 - P(\text{Oboseală} = \text{Nu}).$$

Într-o rețea bayesiană, în loc să calculăm probabilitățile tuturor elementelor din distribuția comună de probabilitate, considerăm numai probabilitățile condiționate de părinți.

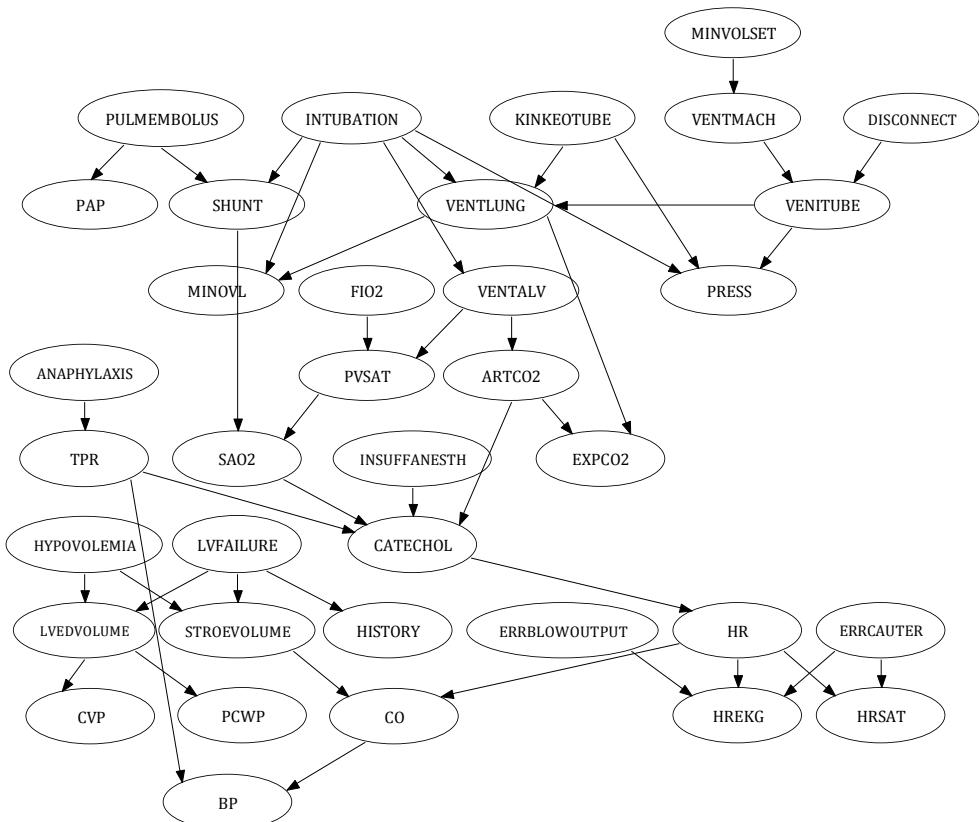


Figura 2.5. Rețea bayesiană complexă

Un alt exemplu privind un sistem de monitorizare a pacienților la terapie intensivă (Russell & Norvig, 2002) cu 37 de variabile, prezentat în figura 2.5, surprinde reducerea clară a numărului de parametri de la $2^{37} - 1 \approx 10^{11}$ la 509.

Reducerea complexității calculelor de probabilități este unul din scopurile principale ale rețelelor bayesiene.

2.4. Algoritmul Bayes-Ball

Pe baza structurii unei rețele bayesiene, putem determina și relațiile de independență sau dependență condiționată dintre noduri.

În exemplele din secțiunea 2.2, am menționat două situații în care se poate preciza relația de independență între evenimente, în prezența sau lipsa unor evidențe. Putem relua acum aceste situații în reprezentarea grafică a rețelor bayesiene.

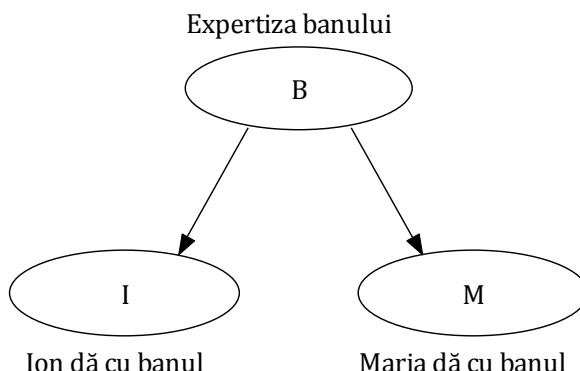


Figura 2.6. Cauză comună

În figura 2.6 este prezentat scenariul *cauzei comune*. Dacă lipsesc alte evidențe, I și M nu sunt independente, deoarece au o cauză comună ascunsă. Dacă se cunoaște însă B , ele devin independente.

Formal, putem scrie că:

$$P(I|M) \neq P(I), \text{ notat și } I \not\perp\!\!\!\perp M$$

$$P(I|M, B) = P(I|B), \text{ notat și } I \perp\!\!\!\perp M | B$$

În figura 2.7 este prezentat scenariul *revocării prin explicare* (engl. “explaining away”). R și A sunt independente în lipsa altor evidențe. Dacă se cunoaște însă S , ele nu mai sunt independente.

Formal, putem scrie că:

$$P(R|A) = P(R), \text{ notat și } R \perp\!\!\!\perp A$$

$$P(R|A, S) \neq P(R|S), \text{ notat și } R \not\perp\!\!\!\perp A | S$$

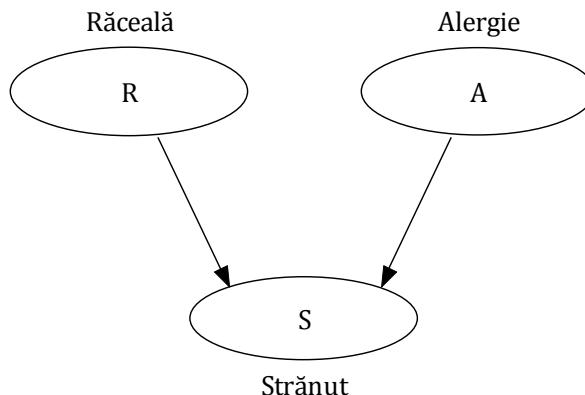


Figura 2.7. Revocare prin explicare

O modalitate simplă pentru a deduce relațiile de independență și independență condiționată între noduri este propusă de *algoritmul Bayes-Ball* (Shachter, 1998), care prin analogie cu jocul de baseball, presupune trimiterea unei mingi în rețea, care poate trece mai departe sau poate fi

blocată de anumite noduri. Dacă mingea nu poate ajunge de la un nod A la un nod B , atunci aceste noduri sunt independente.

Regulile de mișcare a mingii prin rețea iau în calcul direcțiile arcelor (dacă mingea vine de la un părinte la un fiu sau invers), precum și tipurile de noduri: neobserve sau observe (de evidență). În figura 2.8 (Paskin, 2003), săgețile normale arată faptul că mingea trece mai departe, iar barele perpendiculare pe capetele săgeților indică faptul că mingea este blocată.

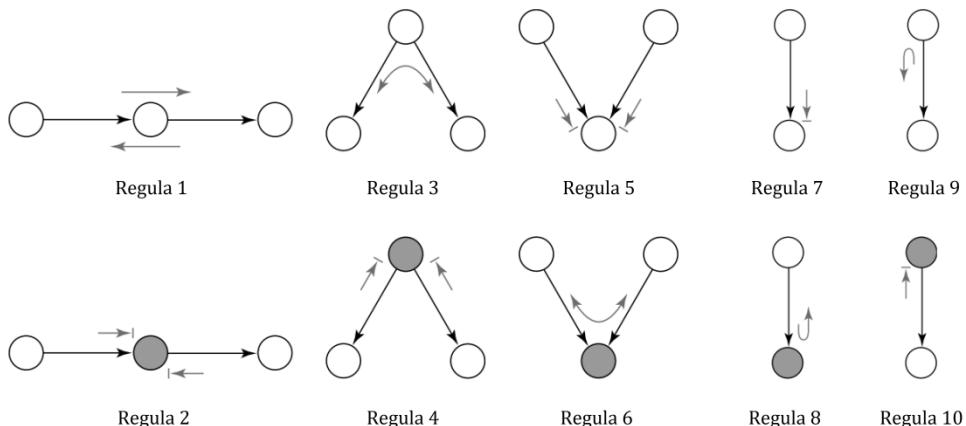


Figura 2.8. Regulile de traversare a rețelei ale algoritmului Bayes-Ball

Nodurile neobserve sunt marcate cu alb, iar cele de evidență sunt marcate cu gri. Algoritmul poate determina dacă nodul A este independent sau nu de nodul B date fiind nodurile C_1, C_2 etc. În acest caz, nodurile C_i sunt marcate cu gri. Minge pleacă din nodul A și parcurge rețeaua, ajungând sau nu la B . Dacă nu ajunge, atunci $A \perp\!\!\!\perp B | C_i$. Dacă ajunge, atunci $A \not\perp\!\!\!\perp B | C_i$.

Nodurile pe care le atinge mingea sunt dependente condițional iar nodurile care nu sunt atinse de mingea sunt independente condițional de nodul de start.

Regula 1 specifică relațiile de dependență condițională între „bunici”, părinți și fiu. Dacă părintele este observat (regula 2), „bunicul” devine independent condițional de fiu. Am putea aminti aici presupunea Markov: viitorul și trecutul sunt independente condițional dat fiind prezentul.

Pentru regula 3, un nod părinte pentru doi fiu, dacă nodul este neobservat, fiile sunt dependenți deoarece au o cauză comună ascunsă, aşa că mingea trece. Dacă nodul este observat (regula 4), fiile devin independenți condițional, aşa că mingea va fi blocată.

Pentru regula 5, un nod cu doi părinți, dacă nodul este neobservat, atunci părinții săi sunt independenți iar mingea nu trece. Dacă nodul este observat (regula 6), părinții devin dependenți iar mingea trece datorită revocării prin explicare.

Regulile 7-10 tratează cazurile în care mingea ajunge la un nod terminal, unde este ori blocată (7, 10), ori reflectată înapoi (8, 9).

Pentru a reține mai ușor regulile 3-10, putem face următoarea convenție. Numim noduri „albe” nodurile neobservate și „negre” nodurile de evidență. De asemenea, numim capetele săgeților „albe” dacă niciun arc nu este incident în acel nod (de exemplu arcele care pleacă din nodurile de sus în regulile 3-10) și „negre” dacă arcele sunt incidente în acel nod (arcele care intră în nodurile de jos în regulile 3-10). Regula generală este simplă: dacă nodurile și arcele au aceeași culoare, mingea trece sau este reflectată. Dacă au culori diferite, mingea este blocată.

Pentru a exemplifica, vom considera rețeaua bayesiană din figura 2.9, pe baza căreia vom răspunde la o serie de interogări privind independența și independența condiționată a nodurilor cu ajutorul algoritmului Bayes-Ball.

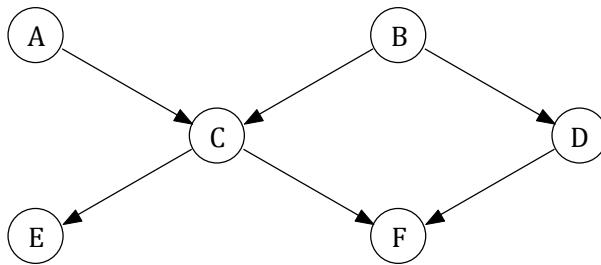
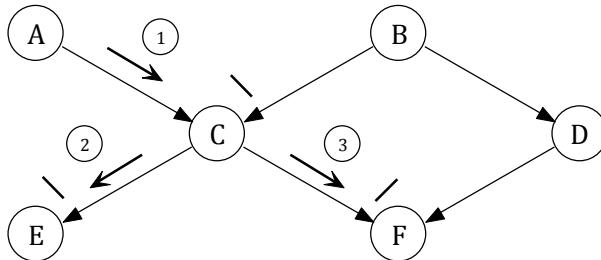
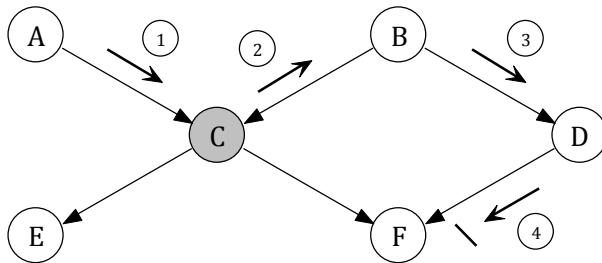


Figura 2.9. Rețea bayesiană pentru exemplificarea algoritmului Bayes-Ball

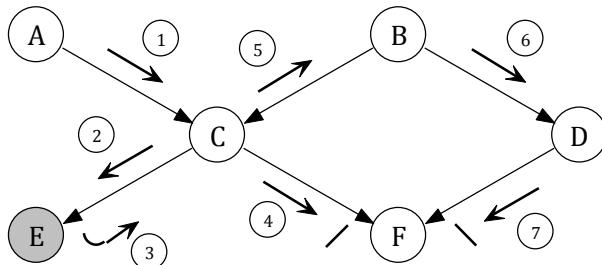
Mai întâi, să determinăm dacă A este independent de D . S-au notat încercuitele numerele etapelor de aplicare a algoritmului și sensul de trimitere a mingii pe arcele rețelei. Se vede în figura de mai jos că mingea nu ajunge la D și prin urmare răspunsul la întrebare este afirmativ.



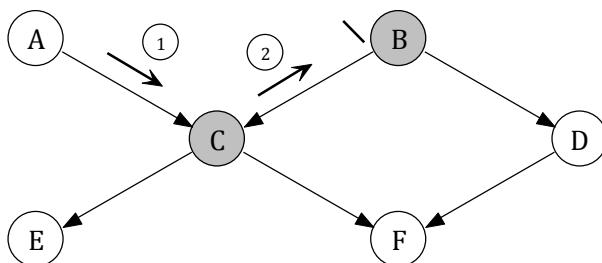
Următoarea interogare este dacă A este independent de D dat fiind C . În figura următoare, se observă nodul evidență C marcat cu gri. Întrucât mingea ajunge de la A la D , răspunsul este în acest caz negativ.



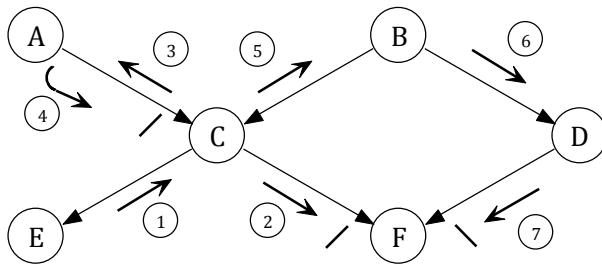
Dorim să aflăm în continuare dacă A este independent de D dat fiind E . Aplicând algoritmul ca în figura următoare, răspunsul este negativ.



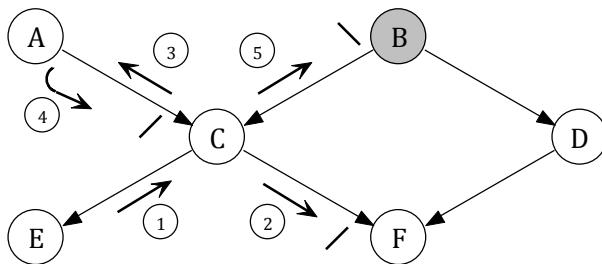
În continuare, vom răspunde dacă A este independent de D dați fiind B și C . Conform rezolvării din figura de mai jos, de data aceasta este rezultatul este afirmativ.



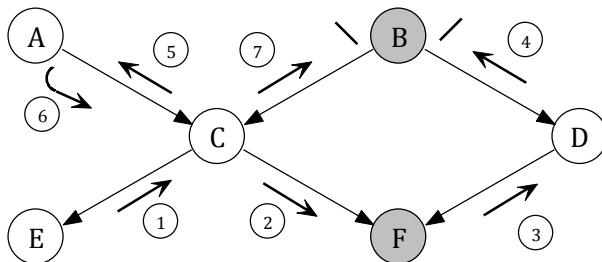
Schimbând nodul de start, dorim să știm dacă E este independent de D . Răspunsul este negativ, după cum se poate observa din figura următoare.



Pentru interogarea privind independența lui E față de D , dat fiind B , răspunsul este afirmativ.



În fine, pentru interogarea privind independența lui E față de D , dat fiind B și F , răspunsul este negativ.



Trebuie menționat faptul că mingea poate merge în direcția opusă arcului din graf. Un arc poate fi parcurs de două ori în direcții opuse.

Însă un arc poate fi parcurs doar o singură dată într-o anumită direcție. De aceea, în scopul implementării, pentru a evita parcurgerea de mai multe ori a arcelor, nodurile evidență sunt marcate ca vizitate când mingea ajunge la ele iar celelalte noduri primesc un marcaj „sus” (engl. “top”) când trimit mingea părinților și un marcaj „jos” (engl “bottom”) când trimit mingea copiilor. De exemplu, un nod marcat „sus” nu mai poate trimite mingea din nou părinților.

2.5. Sortarea topologică

Sortarea sau ordonarea topologică a unui graf este o ordonare liniară a nodurilor sale astfel încât, pentru fiecare arc $A \rightarrow B$, A apare înaintea lui B . Pentru o rețea bayesiană, sortarea topologică asigură faptul că nodurile părinte vor apărea înaintea nodurilor fiu. Orice graf orientat aciclic, cum este o rețea bayesiană, are cel puțin o ordonare topologică.

Algoritmii corespunzători au de obicei o complexitate de timp liniară în numărul de noduri n și de arce a : $O(n + a)$.

Pentru exemplificare, vom considera algoritmul propus de Kahn (1962), care este mai ușor de înțeles, nefiind recursiv. Pseudocodul este următorul:

```
L ← listă inițial vidă care va conține elementele sortate  
S ← mulțimea nodurilor fără părinți
```

```
cât timp S nu este vidă  
    scoate un nod n din S  
    introdu n în L  
    pentru-fiecare nod m cu un arc e de la n la m  
        scoate arcul e din graf
```

dacă m nu are alte arce incidente **atunci**
 introdu m în S
sfârșit-dacă
sfârșit-pentru-fiecare
sfârșit-cât-timp

dacă graful mai are arce **atunci**
 întoarce eroare (graful are cel puțin un ciclu)
altfel
 întoarce L (elementele sortate topologic)
sfârșit-dacă

Dacă graful este orientat aciclic, soluția se va găsi în lista L . Dacă nu, algoritmul detectează faptul că există cicluri în graf și sortarea topologică este imposibilă. Lista S poate fi implementată ca o coadă sau ca o stivă. În funcție de ordinea nodurilor extrase din S , se pot crea soluții diferite.

Pentru exemplificare, vom considera graful din figura 2.10.

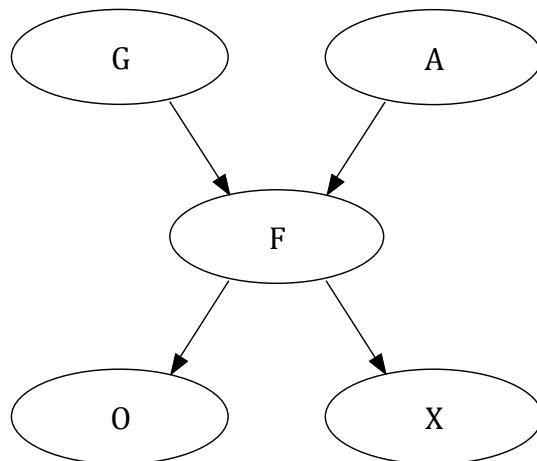


Figura 2.10. Graf simplu pentru sortare topologică

Pașii de execuție ai algoritmului sunt următorii:

1. $L = \emptyset, S = \{G, A\}$
2. $L = \{G\}, S = \{A\}$
3. se elimină arcul GF , F nu poate fi adăugat în S pentru că mai există arcul AF
4. $L = \{G, A\}, S = \emptyset$
5. se elimină arcul AF , $S = \{F\}$
6. $L = \{G, A, F\}, S = \emptyset$
7. se elimină arcul FO , $S = \{O\}$
8. se elimină arcul FX , $S = \{O, X\}$
9. $L = \{G, A, F, O\}, S = \{X\}$
10. $L = \{G, A, F, O, X\}, S = \emptyset$

Soluția este deci: $\{G, A, F, O, X\}$.

Să considerăm și un exemplu puțin mai complex, prezentat în figura 2.11.

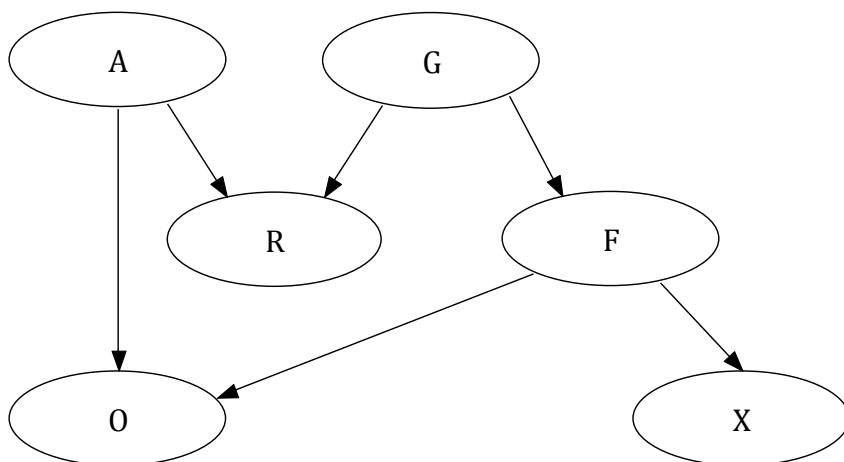


Figura 2.11. Graf mai complex pentru sortare topologică

În acest caz, pașii de execuție ai algoritmului sunt următorii:

1. $L = \emptyset, S = \{A, G\}$
2. $L = \{A\}, S = \{G\}$
3. se elimină arcul AR
3. se elimină arcul AO
4. $L = \{A, G\}, S = \emptyset$
5. se elimină arcul $GR, S = \{R\}$
3. se elimină arcul $GF, S = \{R, F\}$
4. $L = \{A, G, R\}, S = \{F\}$
4. $L = \{A, G, R, F\}, S = \emptyset$
5. se elimină arcul $FO, S = \{O\}$
3. se elimină arcul $FX, S = \{O, X\}$
4. $L = \{A, G, R, F, O\}, S = \{O\}$
4. $L = \{A, G, R, F, O, X\}, S = \emptyset$

Soluția este: $\{A, G, R, F, O, X\}$.

2.6. Construcția automată a rețelelor bayesiene

Pe măsură ce complexitatea modelelor crește, o problemă importantă este construirea rețelelor bayesiene în mod automat, doar pe baza datelor existente. Putem identifica aici două tipuri de probleme:

- determinarea parametrilor direct din date;
- determinarea structurii optime direct din date.

Dacă structura de noduri și arce este cunoscută, determinarea parametrilor direct din date presupune estimarea probabilităților condiționate ale fiecărui nod în funcție de părinți, ca frecvențe relative de apariție a valorilor în cadrul datelor eșantionate disponibile.

Determinarea automată a structurii optime este mult mai dificilă. Dacă nu se cunosc relațiile de cauzalitate sau de corelație între variabile, teoretic, nodurile ar putea fi introduse în rețea în orice ordine. Pentru aceleași evenimente, pot exista mai multe rețele echivalente. În momentul în care este introdus un nod nou, se actualizează relațiile cu nodurile existente pentru crearea arcelor. În cazul cel mai defavorabil, în care nodurile sunt considerate într-o ordine nefericită, o rețea bayesiană devine echivalentă din punct de vedere al numărului de parametri cu distribuția comună de probabilitate.

Un exemplu în acest sens poate fi observat în figura 2.12 (adaptată după Russell & Norvig, 2002), în care ordinea în care se introduc nodurile rețelei din figura 2.3 este de sus în jos: *Oboseală, Anorexie, Abces, Gripă, Febră*, iar arcele sunt create pentru a respecta relațiile de corelație.

Desigur, nu se mai respectă relațiile cauzale logice, dar dacă luăm evenimentele în această ordine, ele nu sunt independente.

Dacă primul nod introdus în rețea este *Oboseala*, și următorul este *Anorexia*, trebuie adăugat un arc între cele două, deoarece informațiile despre primul afectează informațiile despre al doilea. *Anorexia* nu este cauzată de *Oboseală*, dar în lipsa altor informații, valorile lor sunt corelate datorită cauzei comune. Același tip de raționament se aplică pentru celelalte noduri introduse în rețea. În final, aceasta necesită 31 de parametri, la fel ca distribuția comună de probabilitate.

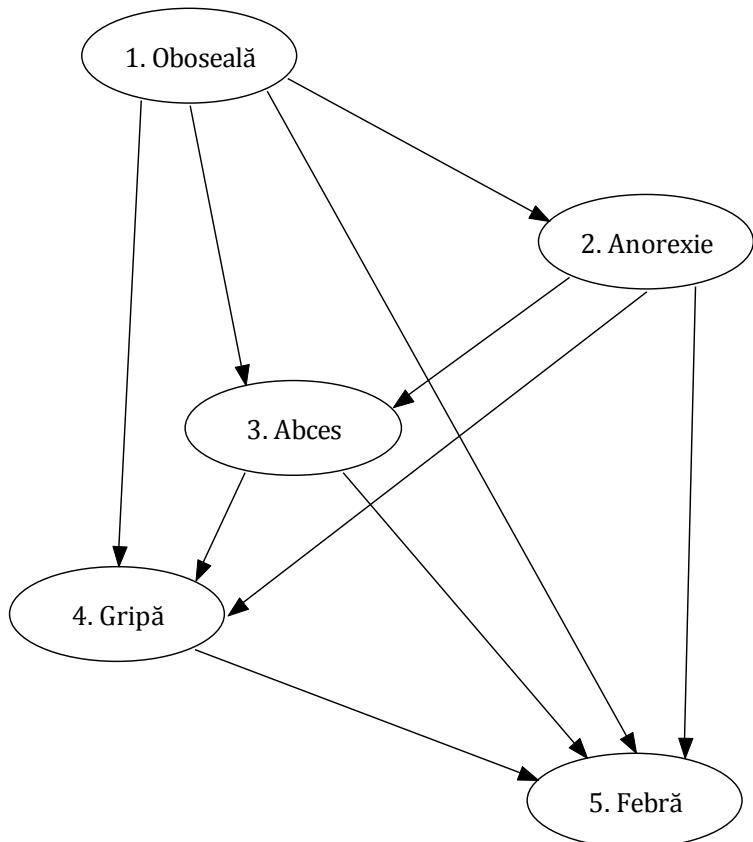


Figura 2.12. Cazul cel mai defavorabil pentru structura unei rețele bayesiane

Din cauza acestor dificultăți, de multe ori se preferă o abordare hibridă, în care structura rețelei este definită de un expert uman, care analizează pe cât posibil relațiile cauzale dintre evenimente, iar parametrii sunt mai apoi estimați în mod automat din date.

Raționamente exacte

3.1. Calculul probabilității unei observații

În acest capitol vom prezenta, pe baza mai multor exemple, o serie de calcule și raționamente care permit prelucrarea informațiile stocate într-o rețea bayesiană.

Vom considera aceeași rețea din capitolul 2. Pentru a fi mai ușor de urmărit, redăm și aici structura (figura 3.1) și tabelele de probabilități (tabelul 3.1).

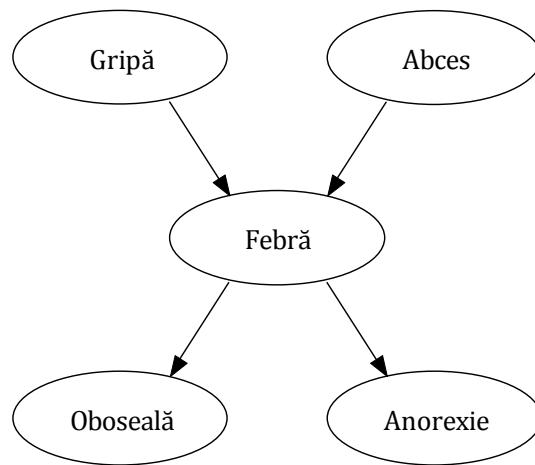


Figura 3.1. Rețea bayesiană cu 5 noduri și 4 arce

Tabelul 3.1. Tabelele de probabilități pentru rețeaua bayesiană

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

$P(Abces = Da)$	$P(Abces = Nu)$
0,05	0,95

$Gripă$	$Abces$	$P(Febră = Da)$	$P(Febră = Nu)$
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

$Febră$	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

$Febră$	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

Un prim tip de calcul este determinarea probabilității unei observații, în cazul în care sunt cunoscute valorile tuturor nodurilor din rețea.

De exemplu, să presupunem situația în care o persoană are febră, dar nu are gripă, abces, oboseală și anorexie. Pentru simplitate, vom nota nodurile cu F , G , A , O și X , respectiv,. De asemenea, vom nota cu D și N ca indici valorile Da și Nu . Dacă variabila $Febră$ are valoarea Da , vom nota acest fapt cu F_D . Dacă variabila $Abces$ are valoarea Nu , vom nota acest fapt cu A_N .

Pentru situația de mai sus, trebuie să calculăm probabilitatea $P(F_D, G_N, A_N, O_N, X_N)$. Conform ecuației 2.11, descompunem această probabilitate într-un produs de probabilități condiționate în care factorii sunt probabilitățile tuturor nodurilor, condiționate de părinți:

$$\begin{aligned}
 P(F_D, G_N, A_N, O_N, X_N) = \\
 P(F_D | G_N, A_N) \cdot P(G_N) \cdot P(A_N) \cdot P(O_N | F_D) \cdot P(X_N | F_D) = \\
 0,05 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,00855 \approx 1\%.
 \end{aligned}$$

Valorile probabilităților condiționate se caută în tabelele de probabilități ale rețelei. De exemplu, valoarea lui $P(F_D | G_N, A_N)$ corespunde valorii *Da* din ultima linie a tabelei pentru *Febră*.

Rezultatul de aproximativ 1% ne spune că este puțin probabil ca o persoană să aibă febră în lipsa cauzelor și efectelor cunoscute pentru aceasta.

3.2. Calculul probabilităților marginale

Într-o rețea bayesiană putem calcula și probabilitățile marginale ale tuturor nodurilor, adică probabilitățile nodurilor în sine, care nu mai depind de părinți (în sensul probabilităților condiționate). În tabelele date, numai nodurile fără părinți au probabilități marginale, cum ar fi *Gripă* și *Abces*. Dorim să deducem în general care sunt probabilitățile celorlalte noduri. Calculele reprezintă într-un fel o sumă a probabilităților condiționate pentru fiecare valoare, ponderate cu probabilitățile marginale de apariție a valorilor părinților.

Pentru valoarea *Da* a variabilei *Febră* vom avea:

$$\begin{aligned}
 P(F_D) = \\
 P(F_D | G_D, A_D) \cdot P(G_D) \cdot P(A_D) + \\
 P(F_D | G_D, A_N) \cdot P(G_D) \cdot P(A_N) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(G_N) \cdot P(A_D) + \\
 & P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(G_N) \cdot P(A_N) = \\
 & 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,95 + 0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,05 + 0,05 \\
 & \quad \cdot 0,9 \cdot 0,95 = 0,1245 \approx 12\%.
 \end{aligned}$$

Având în vedere faptul că singurele valori ale variabilei *Febră* sunt *Da* și *Nu*, probabilitatea valorii *Nu* va reprezenta restul până la 1:

$$P(F_N) = 1 - P(F_D) = 0,8755 \approx 88\%.$$

Același tip de calcule se realizează pentru variabila *Oboseală*:

$$\begin{aligned}
 P(O_D) &= \\
 P(O_D|F_D) \cdot P(F_D) + P(O_D|F_N) \cdot P(F_N) &= \\
 0,6 \cdot 0,1245 + 0,2 \cdot 0,8755 &= 0,2498 \approx 25\%, \\
 P(O_N) &= 1 - P(O_D) = 0,7502 \approx 75\%.
 \end{aligned}$$

și de asemenea, pentru *Anorexie*:

$$\begin{aligned}
 P(X_D) &= \\
 P(X_D|F_D) \cdot P(F_D) + P(X_D|F_N) \cdot P(F_N) &= \\
 0,5 \cdot 0,1245 + 0,1 \cdot 0,8755 &= 0,1498 \approx 15\%, \\
 P(X_N) &= 1 - P(X_D) = 0,8502 \approx 85\%.
 \end{aligned}$$

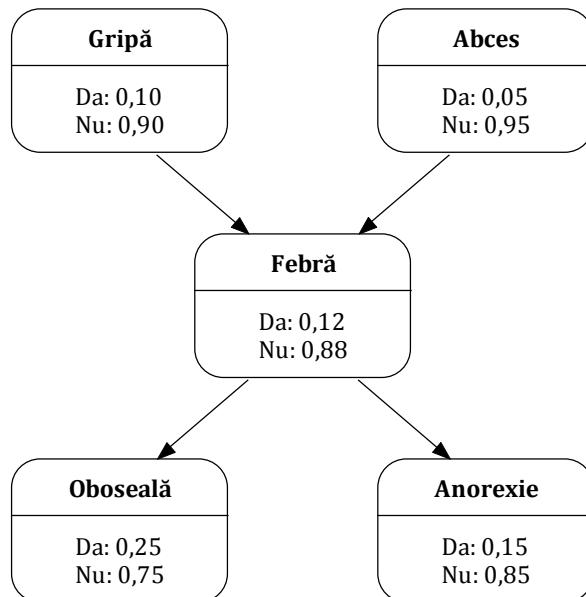


Figura 3.2. Probabilitățile marginale ale nodurilor rețelei

Figura 3.2 prezintă succint probabilitățile marginale pentru toate nodurile din rețea.

3.3. Inferență prin enumerare

Spre deosebire de calculul probabilității atunci când cunoaștem valorile tuturor variabilelor, în cazul inferenței prin enumerare dorim să răspundem la întrebări generale privind probabilitățile unor noduri, cunoscând doar valorile unora dintre noduri.

Folosind acest procedeu, putem răspunde practic la orice întrebare privind evenimentele codate în rețea. Având în vedere niște evidențe, adică observații sau evenimente despre care stim că s-au întâmplat, putem calcula probabilitățile tuturor celorlalte noduri din rețea.

Mai exact, scopul inferenței prin enumerare este de a calcula probabilitatea unei variabile interogate (engl. “query”), date fiind variabilele observate (evidență).

Idea de bază este tot calcularea unui produs de probabilități condiționate, însă în cazul variabilelor despre care nu se cunoaște nimic (nu sunt nici observate și nici interogate), se sumează variantele corespunzătoare *tuturor* valorilor acestora.

Să considerăm următoarea întrebare: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală și anorexie?”

Vom calcula *independent* $P(G_D|O_D, X_D)$ și $P(G_N|O_D, X_D)$.

Pentru $P(G_D|O_D, X_D)$, variabilele rămase sunt *Abcesul* și *Febra*. În consecință, vom suma probabilitățile corespunzătoare tuturor valorilor acestor variabile: $a \in \{A_D, A_N\}$ și $f \in \{F_D, F_N\}$. De asemenea, pentru a crește eficiența calculelor, se recomandă ca variabilele rămase să fie mai întâi sortate topologic, astfel încât părinții să apară înaintea copiilor. În acest caz, se vor putea descompune mai ușor sumele, scoțând în față factorii care nu depind de o anumită variabilă.

$$P(G_D|O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_D, a, f, O_D, X_D) =$$

$$\alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) =$$

$$\alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot [P(F_D|G_D, a) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +$$

$$\begin{aligned}
 & P(F_N|G_D, a) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] = \\
 & \alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
 & P(F_N|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] + \\
 & P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
 & P(F_N|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} = \\
 & \alpha \cdot 0,1 \cdot \{0,05 \cdot [0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,1] + \\
 & 0,95 \cdot [0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1]\} = \\
 & \alpha \cdot 0,02174.
 \end{aligned}$$

În exemplul de mai sus, se observă că $P(a)$ nu depinde de f și prin urmare, suma corespunzătoare variabilei *Abces* a fost scoasă în fața sumei corespunzătoare variabilei *Febră*, evitându-se duplicarea unor calcule. Nodul *Abces*, neavând părinți, este în fața *Febrei* în sortarea topologică.

Se remarcă variabila α care intervene în expresia probabilității. Vom explica sensul acesteia imediat, după ce vom considera și calculele pentru $P(G_N|O_D, X_D)$, în mod analog:

$$\begin{aligned}
 & P(G_N|O_D, X_D) = \\
 & \alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_N, a, f, O_D, X_D) = \\
 & \alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_N) \cdot P(a) \cdot P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
 & \alpha \cdot P(G_N) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_N, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
 & \alpha \cdot P(G_N) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(F_N|G_N, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] + \\
 & P(A_N) \cdot [P(F_D|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D)] + \\
 & P(F_N|G_N, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} = \\
 & \alpha \cdot 0,9 \cdot \{0,05 \cdot [0,25 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,1] + \\
 & 0,95 \cdot [0,05 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,95 \cdot 0,2 \cdot 0,1]\} = \\
 & \alpha \cdot 0,03312.
 \end{aligned}$$

Se știe că $P(G_D|O_D, X_D) + P(G_N|O_D, X_D) = 1$, deoarece *Da* și *Nu* sunt singurele valori posibile pentru *Gripă*. Având în vedere că $P(G_D|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0,02174$ și $P(G_N|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0,03312$, există $\alpha = 18,23$, astfel încât suma celor două probabilități să fie 1. În consecință, rezultatul interogării este:

$$P(G_D|O_D, X_D) = 0,39628 \approx 40\%,$$

$$P(G_N|O_D, X_D) = 0,60372 \approx 60\%.$$

3.4. Inferență prin eliminarea variabilelor

Dacă urmărim cu atenție pașii efectuați pentru a determina probabilitățile condiționate prin metoda inferenței prin enumerare, constatăm o repetare a unor calcule, evidențiată mai jos:

$$\begin{aligned}
 & P(G_D|O_D, X_D) = \\
 & \alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(F_N|G_D, A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] + \\
 & P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D)] + \\
 & P(F_N|G_D, A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} = \\
 & \alpha \cdot 0,1 \cdot \{0,05 \cdot [0,8 \cdot \mathbf{0,6} \cdot \mathbf{0,5} + 0,2 \cdot \mathbf{0,2} \cdot \mathbf{0,1}] + \\
 & 0,95 \cdot [0,7 \cdot \mathbf{0,6} \cdot \mathbf{0,5} + 0,3 \cdot \mathbf{0,2} \cdot \mathbf{0,1}]\}.
 \end{aligned}$$

Calcularea unor sume parțiale și folosirea lor directă atunci când este nevoie poate aduce o îmbunătățire semnificativă a vitezei de execuție în cazul unor rețele bayesiene complexe și a unui număr mic de variabile observate, echivalent cu un număr mare de sume.

Metoda eliminării variabilelor se bazează pe *factorizare*. Probabilitatea fiecărei variabile reprezintă un factor:

$$\begin{aligned}
 P(G_D|O_D, X_D) = \\
 \alpha \cdot \sum_{a \in \{A_D, A_N\}} \sum_{f \in \{F_D, F_N\}} P(G_D, a, f, O_D, X_D) = \\
 \alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D, a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
 \alpha \cdot \underbrace{P(G_D)}_{\mathbf{G}} \cdot \underbrace{\sum_a P(a)}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\sum_f P(f|G_D, a)}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{P(O_D|f)}_{\mathbf{O}} \cdot \underbrace{P(X_D|f)}_{\mathbf{X}}
 \end{aligned}$$

Compunerea acestor factori se realizează cu o operație numită *produs punct cu punct* (engl. “pointwise product”), în care variabilele rezultatului reprezintă reuniunea variabilelor operanzilor.

De exemplu, pentru 3 variabile X , Y și Z , produsul punct cu punct al factorilor $f_1(X, Y)$ și $f_2(Y, Z)$ este:

$$f_1(X, Y) \times f_2(Y, Z) = f_3(X, Y, Z). \quad (3.1)$$

Modul în care se calculează valorile factorului rezultat este mai ușor de înțeles pe baza exemplului din tabelul 3.2.

Tabelul 3.2. Exemplu de factorizare

X	Y	$f_1(X, Y)$	Y	Z	$f_2(Y, Z)$	X	Y	Z	$f_3(X, Y, Z)$
A	A	0,1	A	A	0,5	A	A	A	0,1 · 0,5
A	F	0,2	A	F	0,6	A	A	F	0,1 · 0,6
F	A	0,3	F	A	0,7	A	F	A	0,2 · 0,7
F	F	0,4	F	F	0,8	A	F	F	0,2 · 0,8
						F	A	A	0,3 · 0,5
						F	A	F	0,3 · 0,6
						F	F	A	0,4 · 0,7
						F	F	F	0,4 · 0,8

Factorul f_1 depinde de 2 variabile și să presupunem pentru simplitate că sunt binare, cu valorile *Adevărat* (A) și *Fals* (F). Prin urmare, factorul va avea $2^2 = 4$ valori, corespunzătoare tuturor combinațiilor de valori pentru variabile. Analog pentru factorul f_2 . Valoarea factorului f_3 pentru o anumită combinație de valori ale variabilelor sale este egală cu produsul valorilor factorilor-operanți atunci când variabilele acestora iau aceleași valori ca acelele din factorul-rezultat.

De exemplu:

$$f_3(X_A, Y_F, Z_A) = f_1(X_A, Y_F) \cdot f_2(Y_F, Z_A) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14,$$

$$f_3(X_F, Y_A, Z_A) = f_1(X_F, Y_A) \cdot f_2(Y_A, Z_A) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15.$$

În cele ce urmează, vom aplica metoda eliminării variabilelor pentru a răspunde la aceeași întrebare ca în secțiunea 3.3: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală și anorexie?”

Am văzut că:

$$P(G_D | O_D, X_D) = \alpha \cdot \underbrace{P(G_D)}_{\mathbf{G}} \cdot \sum_a \underbrace{P(a)}_{\mathbf{A}} \cdot \sum_f \underbrace{P(f|G_D, a)}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{P(O_D|f)}_{\mathbf{O}} \cdot \underbrace{P(X_D|f)}_{\mathbf{X}}$$

Mai întâi, vom calcula factorii corespunzători variabilelor, utilizând probabilitățile condiționate din tabelele de probabilități.

Calculele se fac de la dreapta la stânga, variabilele fiind sortate topologic, de la stânga la dreapta. Aici, sortarea topologică a variabilelor este: { *Gripă, Abces, Febră, Obboseală, Anorexie* }.

Pentru variabilele *Anorexie*, respectiv *Obboseală*, factorii au valorile date de probabilitățile condiționate, depinzând de părintele lor, *Febra*:

F	$f_X(F)$
D	0,5
N	0,1

F	$P(X F)$
D	0,5
N	0,1

F	$f_O(F)$
D	0,6
N	0,2

F	$P(O F)$
D	0,6
N	0,2

Compunem acum aceste două variabile, rezultând factorul f_{OX} , care depinde și el (numai) de *Febră*:

$$f_{OX}(F) = f_O(F) \times f_X(F).$$

F	$f_{ox}(F)$
D	$0,6 \cdot 0,5 = 0,3$
N	$0,2 \cdot 0,1 = 0,02$

=

F	$f_o(F)$
D	0,6
N	0,2

x

F	$f_x(F)$
D	0,5
N	0,1

În continuare, calculăm factorul f_{FOX} , prin compunerea factorului f_{ox} cu factorul corespunzător *Febrei*, următoarea variabilă de la dreapta spre stânga. *Febra* depinde de *Gripă* și *Abces*, prin urmare:

$$f_{FOX}(F, G, A) = f_F(F, G, A) \times f_{ox}(F).$$

F	G	A	$f_{fox}(F,G,A)$
D	D	D	$0,8 \cdot 0,3 = 0,24$
D	D	N	$0,7 \cdot 0,3 = 0,21$
D	N	D	$0,25 \cdot 0,3 = 0,075$
D	N	N	$0,05 \cdot 0,3 = 0,015$
N	D	D	$0,2 \cdot 0,02 = 0,004$
N	D	N	$0,3 \cdot 0,02 = 0,006$
N	N	D	$0,75 \cdot 0,02 = 0,015$
N	N	N	$0,95 \cdot 0,02 = 0,019$

=

F	G	A	$P(F G,A)$
D	D	D	0,8
D	D	N	0,7
D	N	D	0,25
D	N	N	0,05
N	D	D	0,2
N	D	N	0,3
N	N	D	0,75
N	N	N	0,95

x

F	$f_{ox}(F)$
D	0,3
N	0,02

În acest moment, am ajuns la suma după valorile variabilei *Febră*. Pentru a continua calculele, se procedează la *eliminarea prin sumare* (engl. “sum out”) a variabilei, de unde vine și numele metodei.

F este eliminată iar factorul său va depinde numai de *G* și *A*. Valorile factorului rezultat, notat $f_{\bar{F}OX}$, se calculează, pentru fiecare combinație a valorilor variabilelor rămase, ca sumă a valorilor factorului inițial, f_{FOX} pentru toate valorile variabilei eliminate.

De exemplu:

$$f_{\bar{F}OX}(G_D, A_D) = f_{FOX}(F_D, G_D, A_D) + f_{FOX}(F_N, G_D, A_D).$$

G	A	$f_{\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	$0,24 + 0,004 = 0,244$
D	N	$0,21 + 0,006 = 0,216$
N	D	$0,075 + 0,015 = 0,09$
N	N	$0,015 + 0,019 = 0,034$

Se poate vedea de exemplu că valoarea 0,244 apare și în calculele metodei de inferență prin enumerare ($0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,1$). Aceste 4 valori din tabelul de mai sus sunt exact valorile parantezelor interioare din exemplul din secțiunea 3.3. De această dată însă, calculele se fac o singură dată, la determinarea factorului.

Urmează apoi tratarea variabilei *Abces*:

$$f_{A\bar{F}OX}(G, A) = f_A(A) \times f_{\bar{F}OX}(G, A).$$

Valorile factorului sunt cele din tabelul de mai jos:

G	A	$f_{A\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	$0,05 \cdot 0,244 = 0,0122$
D	N	$0,95 \cdot 0,216 = 0,2052$
N	D	$0,05 \cdot 0,09 = 0,0045$
N	N	$0,95 \cdot 0,034 = 0,0323$

=

A	$f_A(A)$
D	0,05
N	0,95

x

G	A	$f_{\bar{F}OX}(G, A)$
D	D	0,244
D	N	0,216
N	D	0,09
N	N	0,034

La fel, având acum o sumă după *A*, această variabilă este eliminată prin sumare, rezultând factorul $f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$, cu valorile din tabelul următor:

G	$f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	$0,0122 + 0,2052 = 0,2174$
N	$0,0045 + 0,0323 = 0,0368$

Se poate observa că aceste valori sunt la fel cu acele din parantezele exterioare din calculele din secțiunea 3.3, înainte de înmulțirile cu $P(G_D)$, respectiv cu $P(G_N)$.

Ultimul factor este:

$$f_{G\bar{A}\bar{F}OX}(G) = f_G(G) \times f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G, A).$$

cu valorile de mai jos:

G	$f_{G\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	$0,1 \cdot 0,0122 = 0,02174$
N	$0,9 \cdot 0,0323 = 0,03312$

=

G	$f_G(G)$
D	0,1
N	0,9

 \times

G	$f_{\bar{A}\bar{F}OX}(G)$
D	0,2174
N	0,0368

Se vede că valorile sunt aceleăși cu rezultatele finale din exemplul secțiunii 3.3. Și în cazul metodei de eliminare a variabilelor, trebuie normalize probabilitățile determinate, astfel încât suma lor să fie 1.

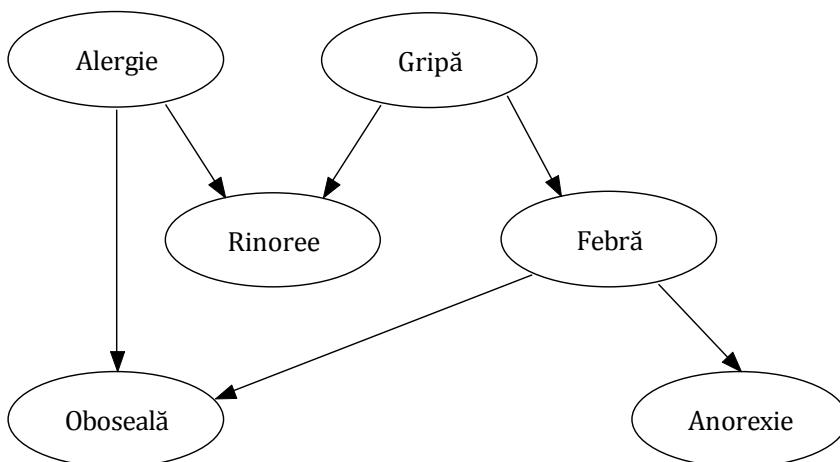


Figura 3.3. Rețea bayesiană cu 6 noduri și 6 arce

3.5. Variabile cu valori multiple. Ignorarea variabilelor irelevante

În această secțiune, vom considera un caz mai general de rețele bayesiene, cu mai multe variabile și eliminând restricția ca acestea să aibă valori binare. Pentru analiză, vom utiliza rețea din figura 3.3.

Tabelele de probabilități sunt date în continuare. Variabila *Febră* are 3 valori: *Absentă* (*A*), *Mică* (*M*) și *Ridicată* (*R*).

Tabelul 3.3. Tabelele de probabilități pentru rețea bayesiană

$P(Alergie = Da)$	$P(Alergie = Nu)$
0,05	0,95

$P(Gripă = Da)$	$P(Gripă = Nu)$
0,1	0,9

<i>Gripă</i>	<i>Alergie</i>	$P(Rinoree = Da)$	$P(Rinoree = Nu)$
Da	Da	0,95	0,05
Da	Nu	0,8	0,2
Nu	Da	0,9	0,1
Nu	Nu	0,1	0,9

<i>Gripă</i>	$P(Febră = Absentă)$	$P(Febră = Mică)$	$P(Febră = Ridicată)$
Da	0,1	0,25	0,65
Nu	0,9	0,05	0,05

<i>Febră</i>	<i>Alergie</i>	$P(Oboseală = Da)$	$P(Oboseală = Nu)$
Absentă	Da	0,3	0,7
Absentă	Nu	0,1	0,9
Mică	Da	0,5	0,5
Mică	Nu	0,4	0,6
Ridicată	Da	0,7	0,3
Ridicată	Nu	0,6	0,4

<i>Febră</i>	$P(Anorexie = Da)$	$P(Anorexie = Nu)$
Absentă	0,1	0,9
Mică	0,2	0,8
Ridicată	0,5	0,5

Calculele de probabilități și metodele de inferență sunt la fel.

Să considerăm următoarea interogare: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă alergie, dacă manifestă oboseală și rinoree?”

$$P(A_D | O_D, R_D) = \alpha \cdot \sum_{g \in \{G_D, G_N\}} \sum_{f \in \{F_A, F_M, F_R\}} \sum_{x \in \{X_D, X_N\}} P(g, f, O_D, R_D, x).$$

Pentru a optimiza rezolvarea, utilizăm următorul rezultat.

O variabilă Y este *irrelevantă* pentru o interogare dacă $Y \notin \Pi(\{Q\} \cup E)$, unde Q este variabila interogată, E este mulțimea variabilelor observate (evidență) iar $\Pi(M)$ este mulțimea predecesorilor tuturor nodurilor din mulțimea M .

În exemplul nostru, $Q = \{A\}$, $E = \{O, R\}$ și $\Pi(\{A, O, R\}) = \{A, G, F\}$. Variabila *Anorexie* nu aparține acestei mulțimi. Prin urmare, această variabilă este irelevantă pentru interogarea curentă și poate fi ignorată:

$$P(A_D | O_D, R_D) = \alpha \cdot \sum_{g \in \{G_D, G_N\}} \sum_{f \in \{F_A, F_M, F_R\}} \sum_{x \in \{X_D, X_N\}} P(g, f, O_D, R_D, x) = \\ \alpha \cdot \sum_g \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D) \cdot P(O_D|a, f) \cdot P(R_D|a, G_D)$$

Calculele de probabilități se realizează ca în secțiunile anterioare, obținând în final:

$$P(A_D|O_D, R_D) = 0,24554 \approx 25\%,$$

$$P(A_N|O_D, R_D) = 0,75446 \approx 75\%.$$

3.6. Cea mai probabilă explicație

Un alt tip de rezultat pe care îl putem obține pe baza unei rețele bayesiene este *cea mai probabilă explicație* (engl. “most probable explanation”) pentru o evidență.

Fie E mulțimea variabilelor observate (evidență) și M mulțimea celorlalte variabile, numită și mulțimea de explicare. Se dorește găsirea combinației de valori pentru variabilele din mulțimea de explicare, pentru care probabilitatea tuturor valorilor astfel obținute ale nodurilor rețelei să fie maximă: $\text{argmax}_m P(m, e)$, unde m este combinația de valori ale variabilelor din M iar e este combinația (dată) de valori ale variabilelor din E .

Ca exemplu, pentru rețeaua din figura 3.3, dorim să calculăm cea mai probabilă explicație pentru trei situații: $E_1 = \{R_D, O_D, X_N, F_A\}$, $E_2 = \{R_D, O_D, X_N, F_M\}$ și $E_3 = \{R_D, O_D, X_N, F_R\}$. Mai exact, dorim să găsim cauza (alergie sau gripă) atunci când o persoană are rinoree (îi curge nasul), oboseală dar nu are anorexie (lipsa poftei de mâncare). Cele trei situații sunt diferențiate de nivelul febrei: în primul caz este absentă, în al doilea caz este mică iar în al treilea caz este ridicată.

În tabelul 3.4, primele patru coloane indică valorile celor patru variabile de evidență. Coloana 5 prezintă probabilitatea valorii A_D , în condițiile evidențelor date. Coloana 6 prezintă probabilitatea valorii G_D , în condițiile evidențelor date. Variabilele A și G sunt binare, astfel încât este suficientă menționarea probabilității unei singure valori. Coloana 7 indică probabilitatea $P(m, e)$ pentru toate combinațiile de valori ale variabilelor de

explicare. Combinăția pentru care această probabilitate este maximă este marcată cu litere aldine. Ultima coloană indică rezultatele: valorile variabilelor de explicare care determină cea mai probabilă explicație.

Tabelul 3.4. Căutarea exhaustivă a celei mai probabile explicații

R	O	X	F	A_D	G_D	$P(m, e)$	A, G – CMPE
D	D	N	A	57%	5%	A_N, G_N 0,00693 A_N, G_D 0,00068 A_D, G_N 0,00984 A_D, G_D 0,00013	A_D, G_N
D	D	N	M	15%	75%	A_N, G_N 0,00137 A_N, G_D 0,00608 A_D, G_N 0,00081 A_D, G_D 0,00048	A_N, G_D
D	D	N	R	10%	89%	A_N, G_N 0,00128 A_N, G_D 0,01482 A_D, G_N 0,00071 A_D, G_D 0,00108	A_N, G_D

În primul caz, în absența febrei, cel mai probabil este că persoana are alergie și nu gripă. Dacă are febră, mică sau ridicată, este mai probabil ca persoana să aibă gripă și nu alergie.

Valorile din coloanele 5 și 6 sunt în concordanță cu cea mai probabilă explicație, totuși trebuie precizat că $P(A_D)$ și $P(G_D)$ sunt calculate considerând izolat variabilele A și G . Cea mai probabilă explicație le consideră împreună. În cazul în care rețeaua conține un număr mare de noduri, pot exista diferențe între cele două tipuri de rezultate.