Inteligență artificială

6. Elemente de teoria jocurilor (II)

Florin Leon

Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași
Facultatea de Automatică și Calculatoare

Universitatea „Al. I. Cuza” din Iași
Facultatea de Informatică

Elemente de teoria jocurilor (II)

1. Jocuri strategice
   1.1. Echilibrul Nash mixt
   1.2. Optimalitatea Pareto
2. Jocuri cooperante cu 2 jucători
3. Jocuri cooperante cu *n* jucători
   3.1. Reprezentarea jocurilor în forma caracteristică
   3.2. Nucleul
   3.3. Valoarea Shapley
4. Concluzii

Elemente de teoria jocurilor (II)

1. Jocuri strategice
    1.1. Echilibrul Nash mixt
    1.2. Optimalitatea Pareto
2. Jocuri cooperante cu 2 jucători
3. Jocuri cooperante cu *n* jucători
    3.1. Reprezentarea jocurilor în forma caracteristică
    3.2. Nucleul
    3.3. Valoarea Shapley
4. Concluzii

Jocul ajutorului social

engl. "the welfare game"

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

- Guvernul vrea să ajute un cerșetor doar dacă acesta vrea să muncească
- Cerșetorul își caută de lucru doar dacă nu ia ajutor de la stat

Jocul ajutorului social

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2 →	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

(Aid, Try to work) nu este EN Pauper preferă Be idle

Jocul ajutorului social

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2 →	-1, 3 ↓
	No aid	-1, 1	0, 0

(Aid, Try to work) nu este EN Pauper preferă Be idle

(Aid, Be idle) nu este EN: Govt preferă No aid

Jocul ajutorului social

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2 →	-1, 3 ↓
	No aid	-1, 1 ←	0, 0

(Aid, Try to work) nu este EN Pauper preferă Be idle
(Aid, Be idle) nu este EN: Govt preferă No aid
(No Aid, Be idle) nu este EN: Pauper preferă Try to work

Jocul ajutorului social

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

(Aid, Try to work) nu este EN Pauper preferă Be idle
(Aid, Be idle) nu este EN: Govt preferă No Aid
(No Aid, Be idle) nu este EN: Pauper preferă Try to work
(No Aid, Try to work) nu este EN: Govt preferă Aid
Jocul nu are echilibru Nash pur

Strategii pure și mixte

- Strategie pură
  - Agentul i alege strategia s_{ij} din mulțimea S_i
- Strategie mixtă
  - Agentul i alege strategia s_{ij} cu probabilitatea p_{ij}
    - $p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1$
- Orice strategie pură este de asemenea și o strategie mixtă
- Un joc finit are întotdeauna cel puțin un echilibru Nash pur sau mixt
  - O strategie mixtă are întotdeauna un echilibru Nash

Strategii mixte

- Câștigul în strategii mixte este câștigul așteptat
  - Fie 1 câștigul cu strategia s_1 și 4 cu strategia s_2
  - Strategia mixtă (0.3, 0.7) dă câștigul așteptat $0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 4 = 3.1$
  - Un câștig sigur de 3.1 este echivalent cu un câștig așteptat într-un joc cu câștiguri de 1 și 4 cu probabilitățile 0.3, respectiv 0.7

- *Ați fi dispuși să plătiți 3 unități ca să participați la acest joc?*
- *Dar să participați de 100 de ori?*

Strategii mixte: interpretare

- Jocuri în care se pot aplica simultan strategii multiple
  - Pariurile pe mai mulți cai
- Instanțe multiple ale aceluiași joc
  - Scenariu de război: q_{ij}% din piloți urmează strategia s_{ij}
- Același joc repetat la infinit
- Pentru un singur joc: distribuția de probabilitate este estimarea oponenților asupra deciziei unui agent

Metoda resturilor

- engl. “oddment method”
- Metodă simplă pentru calculul echilibrelor Nash mixte
- Dacă jocul are un echilibru Nash pur, metoda nu se aplică

Strategiile pentru Pauper

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3 - (-1) = 4 \quad -1 - 0 = -1$$

$$|-1| = 1 \quad |4| = 4$$

$$\frac{1}{1+4} = 0.2 \quad \frac{4}{1+4} = 0.8$$

Strategiile pentru Government

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 - 3 = -1 \qquad |1| = 1 \qquad \frac{1}{1+1} = 0.5$$

$$1 - 0 = 1 \qquad |-1| = 1 \qquad \frac{1}{1+1} = 0.5$$

Echilibrul Nash în jocul ajutorului social cu strategie mixtă

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

- Dacă Government alege o probabilitate de 0.5 pentru Aid, Pauper nu poate profita de pe urma acestei decizii în alegerea uneia din acțiunile Work sau Be idle
  - Câștigul Pauper (Work) = 0.5 · 2 + (1 – 0.5) · 1 = 1.5
  - Câștigul Pauper (Be idle) = 0.5 · 3 + (1 – 0.5) · 0 = 1.5

Echilibrul Nash în jocul ajutorului social cu strategie mixtă

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

- Dacă Pauper alege Try to work cu probabilitatea 0.2, Government va fi indiferent între Aid și No aid
  - Câștigul Govt (Aid) = $0.2 \cdot 3 + (1 - 0.2) \cdot (-1) = -0.2$
  - Câștigul Govt (No aid) = $0.2 \cdot (-1) + (1 - 0.2) \cdot 0 = -0.2$

Echilibrul Nash în jocul ajutorului social cu strategie mixtă

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

- Pentru probabilitățile 0.5 și 0.2, atât Government cât și Pauper au câștiguri așteptate egale pentru ambele acțiuni, ceea ce permite existența unui echilibru Nash

Metoda 2

		Pauper	
		Try to work	*Be idle*
Government	*Aid*	3, 2	-1, 3
	No aid	-1, 1	0, 0

- Determinarea strategiei pentru Pauper
  - $3 \cdot x + (-1) \cdot (1 - x) = (-1) \cdot x + 0 \cdot (1 - x)$
  - $\Rightarrow x = 0.2,\ 1 - x = 0.8$
- Determinarea strategiei pentru Government
  - $2 \cdot y + 1 \cdot (1 - y) = 3 \cdot y + 0 \cdot (1 - y)$
  - $\Rightarrow y = 0.5,\ 1 - y = 0.5$

Stabilitatea

- Dar dacă un agent părăsește strategia de echilibru, oponentul poate profita pentru a câștiga mai mult decât ar câștiga la echilibru

Joc cu un număr infinit de echilibre Nash mixte

		Colin	
		Action C	~~*Action D*~~
Rose	*Action A*	(3, 1)	~~(4, 0)~~
	Action B	(3, -2)	~~(2, -5)~~

- Acțiunea *D* este dominată pentru Colin
- Dacă Colin alege întotdeauna *C*, lui Rose îi este indiferent ce alege între *A* și *B*
- Echilibrul este: $(x, y) = (1, p)$, cu $p \in [0, 1]$
  - $(x, 1-x)$ reprezintă probabilitățile lui Colin pentru *C*, *D*
  - $(y, 1-y)$ reprezintă probabilitățile lui Rose pentru *A*, *B*

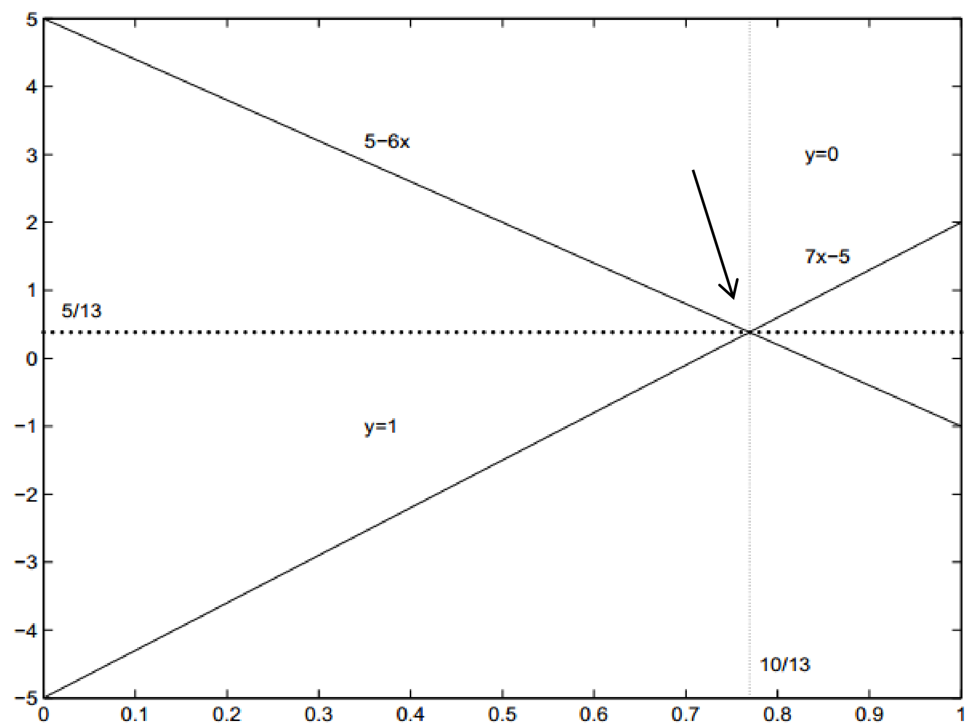
Interpretarea grafică

Pentru jocul: $\begin{bmatrix} (-1,4) & (5,0) \\ (2,-10) & (-5,5) \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$

$$[y, 1-y] \cdot R \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = [y, 1-y] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$$
$$= [y, 1-y] \begin{bmatrix} 5-6x \\ 7x-5 \end{bmatrix}$$

(x, 1-x) reprezintă probabilitățile lui Colin
(y, 1-y) reprezintă probabilitățile lui Rose



$\mathbf{x}_R = (10/13, 3/13)$ $v_R = 5/13$

Câștiguri neliniare

Moves A	Moves B	Moves C	Payoff A	Payoff B	Payoff C	Percentage of Time
1	1	1	0	0	0	x^3
1	1	2	0	0	2	$x^2(1-x)$
1	2	1	0	2	0	$x^2(1-x)$
1	2	2	1	0	0	$x(1-x)^2$
2	1	1	2	0	0	$x^2(1-x)$
2	1	2	0	1	0	$x(1-x)^2$
2	2	1	0	0	1	$x(1-x)^2$
2	2	2	0	0	0	$(1-x)^3$

Toți agenții joacă 1 cu probabilitatea *x* și 2 cu probabilitatea 1 – *x*

Câștigul așteptat pentru *A*

$$P_A(x) = x(1-x)^2 + 2x^2(1-x) = x - x^3$$

Soluția diferențială

$$0 = \frac{dP_A(x)}{dx} = \frac{d(x - x^3)}{dx} = 1 - 3x^2 \quad \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x - x^3\Big|_{x_* = \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.385$$

- Soluția diferențială reprezintă maximul ce poate fi obținut, însă nu este echilibru Nash
- Prin urmare, dacă unii jucători folosesc această strategie, ceilalți pot câștiga mai mult folosind soluția de echilibru Nash

Exploatarea soluției diferențiale

- Presupunem că *B* și *C* folosesc strategia cu $x^* = 1/\sqrt{3}$
- *A* poate exploata acest fapt alegând $y = 0$

Moves A	Moves B	Moves C	Payoff A	Payoff B	Payoff C	Percentage of Time
1	1	1	0	0	0	yx_*^2
1	1	2	0	0	2	$yx_*(1-x_*)$
1	2	1	0	2	0	$yx_*(1-x_*)$
1	2	2	1	0	0	$y(1-x_*)^2$
2	1	1	2	0	0	$(1-y)x_*^2$
2	1	2	0	1	0	$(1-y)x_*(1-x_*)$
2	2	1	0	0	1	$(1-y)x_*(1-x_*)$
2	2	2	0	0	0	$(1-y)(1-x_*)^2$

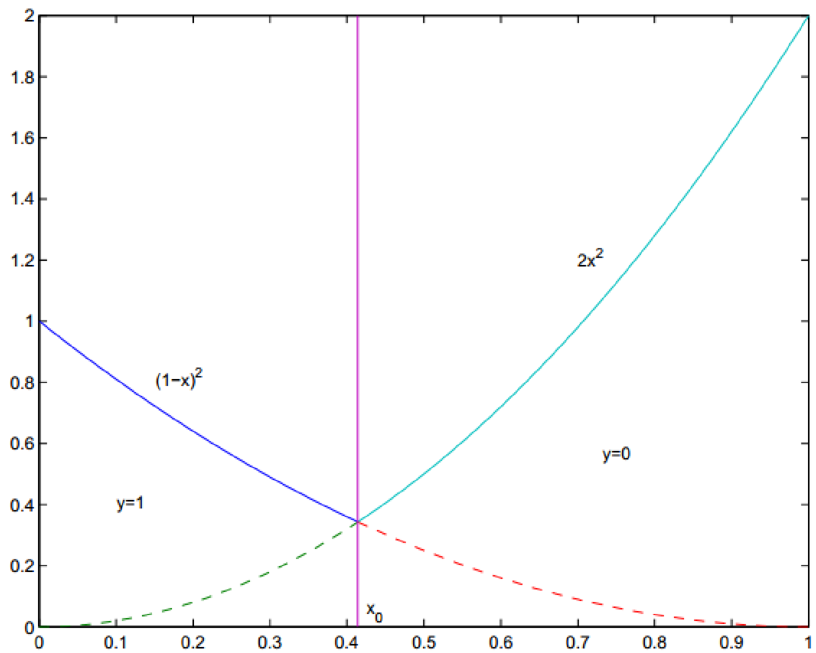
$$P_A(x_*) = y(1-x_*)^2 + 2(1-y)x_*^2 = y(1-2x_*-x_*^2) + 2x_*^2$$

$$P_A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = y\underbrace{\left(1 - 2\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)}_{<0} + \frac{2}{3}$$

$$P_A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3} = 0.66 \quad > 0.385$$

Interpretarea grafică

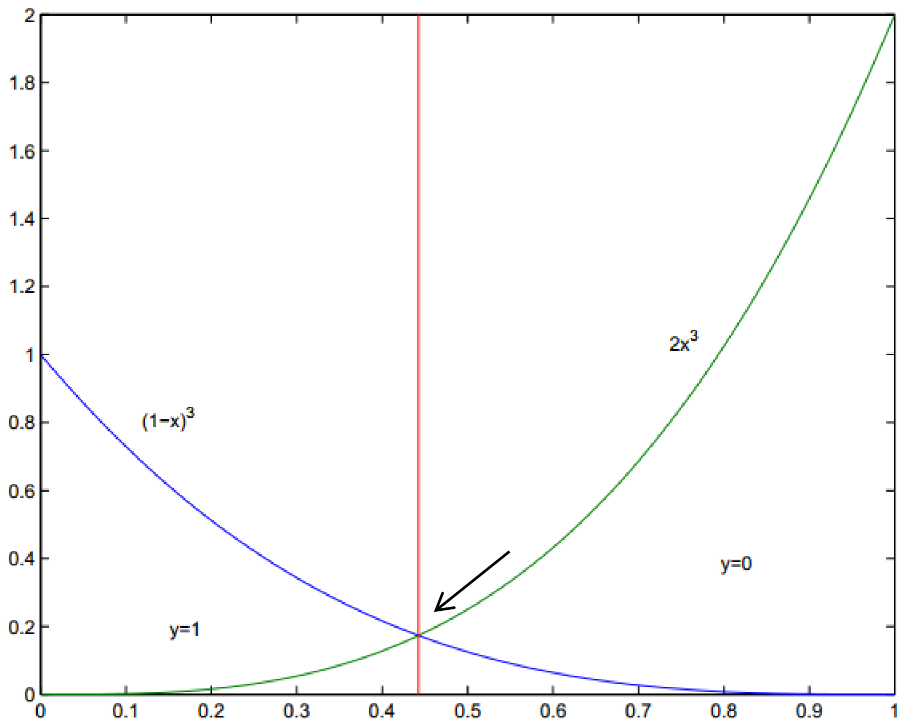
$$P_A(x, y) = y(1-x)^2 + 2(1-y)x^2 = y(1-2x-x^2) + 2x^2$$
$$P_A(x, 0) = 0 \cdot (1-2x-x^2) + 2x^2 = 2x^2$$
$$P_A(x, 1) = 1 \cdot (1-2x-x^2) + 2x^2 = 1-2x+x^2 = (1-x)^2$$



$$x = x_0 \approx 0.41$$
$$P_A(x, y) = 2x_0^2 \approx 0.343$$

Exemplu mai complex

$$P_A(x, y) = y(1 - x)^3 + (1 - y)(2x^3)$$



- Indiferent de forma funcțiilor, punctul de echilibru Nash reprezintă abscisa minimului regiunii superioare; ordonata reprezintă valoarea jocului (câștigul)
- Pentru ecuații mai complexe, intersecția se poate determina prin metode numerice

Elemente de teoria jocurilor (II)

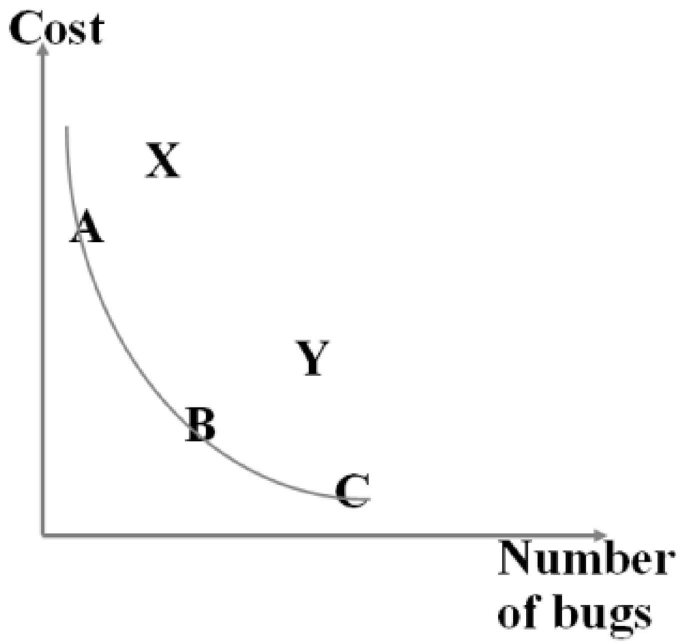
1. Jocuri strategice
    1.1. Echilibrul Nash mixt
    1.2. Optimalitatea Pareto
2. Jocuri cooperante cu 2 jucători
3. Jocuri cooperante cu *n* jucători
    3.1. Reprezentarea jocurilor în forma caracteristică
    3.2. Nucleul
    3.3. Valoarea Shapley
4. Concluzii

Optimalitatea Pareto

- Un rezultat este optim Pareto dacă este:
  - mai bun sau la fel decât alt rezultat din toate punctele de vedere și
  - mai bun strict din cel puțin un punct de vedere
- Un rezultat R_1 domină un rezultat R_2 dacă și numai dacă:
  - R_1 nu este inferior lui R_2 în raport cu toate elementele: $\forall i, R_1(i) \geq R_2(i)$
  - R_1 este strict superior lui R_2 în raport cu cel puțin un element: $\exists i, R_1(i) > R_2(i)$
- Rezultatele nedominate sunt optime Pareto

Exemplu

- Minimizarea costului și a numărului de defecte găsite într-un produs software



Soluțiile *A*, *B*, *C* sunt nedominate
Soluția *X* este dominată de *A*
Soluția *Y* este dominată de *B*

Stări optime Pareto

- Într-o stare optimă Pareto, agenții nu au motivația de a devia în coaliție
- De exemplu: dilema deținutului
  - Ambii agenți au câștig mai mare împreună dacă ambii neagă
  - Cu excepția echilibrului Nash, toate celelalte combinații de strategii sunt nedominate

		Agent 2	
		Denies	*Confesses*
Agent 1	*Denies*	-1, -1	-5, 0
	Confesses	0, -5	-3, -3

Interpretare

- Optimalitatea Pareto înseamnă o situație mai bună pentru cel puțin un agent fără a dezavantaja niciun alt agent
- Optimalitatea Pareto nu înseamnă „egalitate”
  - De exemplu, împărțirea unui tort între 3 persoane *A*, *B*, *C*
  - *A* ia 70%, *B* ia 30%, *C* nu ia nimic
  - Această stare este optimă Pareto, deoarece pentru a-i da lui *C* ceva, *A* sau *B* ar trebui să renunțe la ceva
- Totuși, implică alocarea tuturor resurselor
  - O stare în care *A* ia 50%, *B* ia 30% și *C* nu ia nimic nu este optimă Pareto
  - *C* poate lua 20% fără a-i afecta pe *A* sau *B*

Aplicații ale optimalității Pareto

- Probleme de optimizare
  - Traficul în rețele de calculatoare
  - Planificarea *task*-urilor
  - Planificarea producției
  - Proiectarea componentelor
  - Procese de reacții chimice
- Economie
  - Analiza eficienței de piață
  - Îmbunătățirea sistemului de impozitare

Elemente de teoria jocurilor (II)

1. Jocuri strategice
   1.1. Echilibrul Nash mixt
   1.2. Optimalitatea Pareto
2. Jocuri cooperante cu 2 jucători
3. Jocuri cooperante cu *n* jucători
   3.1. Reprezentarea jocurilor în forma caracteristică
   3.2. Nucleul
   3.3. Valoarea Shapley
4. Concluzii

Cooperarea

- În jocurile anterioare, agenții erau raționali și egoiști
- Prin cooperare, agenții pot obține un câștig mai mare
  - Rezultatul în care suma utilităților este maximă
- Problema este împărțirea câștigului suplimentar obținut
- Soluția corectă reprezintă pozițiile de negociere ale celor doi agenți
  - Poziția de negociere ≠ abilitatea de negociere

Exemplul 1

		Peugeot F	Peugeot M
Renault	F	$(-10, -40)$	$(40, 10)$
	M	$(10, 40)$	$(-40, -10)$

- Dacă nu există cooperare, jocul are:
  - Echilibre Nash pure: (10, 40) și (40, 10)
  - Echilibru Nash mixt: Renault (0.5, 0.5) și Peugeot (0.8, 0.2), cu câștig 0 pentru ambele companii

		Peugeot	
		F	M
Renault	F	$(-10,-40)$	$(40,10)$
	M	$(10,40)$	$(-40,-10)$

Cooperarea

- Matricea sumă (*sum matrix*) a jocului reflectă câștigul total care poate fi obținut prin cooperare

$$R + P = \begin{bmatrix} -50 & 50 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}$$

- Matricea amenințărilor (*threat matrix*) este utilizată pentru descrierea puterii de negociere a agenților

$$R - P = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix}$$

Interpretare

		Peugeot	
		F	M
Renault	F	$(-10, -40)$	$(40, 10)$
	M	$(10, 40)$	$(-40, -10)$

$$R - P = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix}$$

- Prima linie cuprinde doar valori pozitive, deci *R* are o poziție puternică de negociere (indiferent ce ar alege *P*, *R* câștigă mai mult)
- Diferențiala amenințării (*threat differential*) este valoarea jocului pentru matricea amenințărilor, în acest caz, 30

		Peugeot	
		F	M
Renault	F	$(-10, -40)$	$(40, 10)$
	M	$(10, 40)$	$(-40, -10)$

Soluția

- Soluția pentru un joc cooperant cu doi agenți:
  - Câștigul total este valoarea maximă din matricea sumă
  - Diferența de câștig dintre agenți este diferențiala amenințării
- Pentru exemplul anterior:
  - Câștigul total = 50
  - Diferența câștigurilor = 30
  - $R + P = 50$ și $R - P = 30$
  - Prin urmare, *R* obține 40, iar *P* obține 10

$$R + P = \begin{bmatrix} -50 & 50 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}$$

$$R - P = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix}$$

- Nu contează strategiile jucate, atât timp cât se obține câștigul total și se respectă modul de împărțire a acestuia
  - Pentru strategiile (*R:F* / *P:M*), câștigurile agenților sunt cele date direct de rezultatul jocului
  - Pentru strategiile (*R:M* / *P:F*), *P* trebuie să îi plătească 30 de unități lui *R*

Exemplul 2

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- Câștigul total maxim este 5
- Matricea amenințărilor este:

$$R - C = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

- Diferențiala amenințării este 1, deoarece combinația de strategii $(1, 2)$ reprezintă echilibrul de strategii dominante
- Soluția jocului: *R* câștigă 3, *C* câștigă 2
  - Agenții joacă (*R*:2 / *C*:1) și Colin îi plătește 2 unități lui Rose

Elemente de teoria jocurilor (II)

1. Jocuri strategice
    1.1. Echilibrul Nash mixt
    1.2. Optimalitatea Pareto
2. Jocuri cooperante cu 2 jucători
3. Jocuri cooperante cu *n* jucători
    3.1. Reprezentarea jocurilor în forma caracteristică
    3.2. Nucleul
    3.3. Valoarea Shapley
4. Concluzii

Definiții

- Fie mulțimea de agenți { P_1, P_2, ..., P_n }
- Marea coaliție este mulțimea tuturor agenților:
G = { P_1, …,P_n }
- O coaliție reprezintă orice submulțime nevidă a lui G
- Fiecare coaliție încearcă să-și maximizeze câștigul
- Funcția caracteristică v înregistrează câștigul maxim pentru fiecare coaliție (valoarea coaliției)
- Joc superaditiv: $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, unde S și T sunt coaliții fără agenți comuni

Alocare

- O alocare (*imputation*) este mulțimea de câștiguri (x_1, x_2, ..., x_n) care satisface următoarele condiții:
  - Suma câștigurilor este egală cu câștigul marii coaliții
  - Fiecare agent obține un câștig cel puțin la fel de bun ca acela obținut dacă nu ar coopera

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \nu(\mathcal{G}),$$

$$x_i \geq \nu(\{P_i\}) \quad \text{for all } i.$$

- O alocare este o împărțire eficientă și individual rațională

Exemplu

- Fie un joc cu 3 agenți: P_1, P_2, P_3
- Fiecare poate alege cap (H) sau pajură (T)
- Dacă doi agenți aleg la fel iar al treilea diferit, acesta va plăti câte 1 unitate fiecăruia din ceilalți doi. Altfel, toți agenții primesc 0 în total
- $v(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0$ (împreună nu pot câștiga nimic)
- Presupunem că se formează coaliția $S = \{P_2, P_3\}$
- Contra-coaliția va fi $S^c = \{P_1\}$
- Rezultă un joc de sumă nulă cu matricea:

		$\mathcal{S}$			
		HH	HT	TH	TT
$\mathcal{S}^c$	H	0	1	1	-2
	T	-2	1	1	0

Exemplu

S dorește să-și maximizeze câștigul

- Coloanele 2 și 3 sunt dominate (0 < 1 și –2 < 1)

		$\mathcal{S}$: HH	HT	TH	TT
$\mathcal{S}^c$	H	0	~~1~~	~~1~~	-2
	T	-2	~~1~~	~~1~~	0

- Valoarea jocului este –1 (echilibru mixt)
- $v(\{P_1\}) = -1$ (cât se așteaptă să câștige P_1)
- $v(\{P_2, P_3\}) = 1$ (cât se așteaptă să câștige coaliția S)
- Datorită simetriei jocului, funcția caracteristică este:

$$\nu(\mathcal{S}) = \begin{cases} -1, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1\}, \{P_2\}, \text{or } \{P_3\}, \\ +1, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}, \{P_2, P_3\}, \text{or } \{P_3, P_1\}, \\ 0, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_3\}. \end{cases}$$

- Alocări: $x_i \geq -1$, $i = 1, 2, 3$; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Elemente de teoria jocurilor (II)

Nucleul

- Nucleul (*core*) unui joc cu n agenți este mulțimea alocărilor nedominate
- Nucleul unui joc cu funcția caracteristică v este mulțimea tuturor alocărilor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ astfel încât pentru orice coaliție $S = \{P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}\}$ avem: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im} \geq v(S)$
- Orice alocare din nucleu poate fi privită ca o soluție a jocului
- Nucleul este stabil
- Dacă o alocare nu se află în nucleu, atunci există cel puțin o coaliție ai cărei membri nu obțin câștigul maxim pe care l-ar putea obține altfel. Acești agenți preferă o altă alocare

Exemplul 1: nucleu nevid

- 3 studenți doresc să cumpere o carte, care costă 110 unități
- Pentru 2 cărți sau 3 cărți cumpărate împreună, există o reducere de 10 unități, respectiv 20 unități / exemplar
- Valorile coalițiilor exprimă banii economisiți

$$\nu(\{P_1\}) = \nu(\{P_2\}) = \nu(\{P_3\}) = 0,$$

$$\nu(\{P_1, P_2\}) = \nu(\{P_1, P_3\}) = \nu(\{P_2, P_3\}) = 20, \ \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 60$$

Exemplul 1: nucleu nevid

$$\nu(\{P_1\}) = \nu(\{P_2\}) = \nu(\{P_3\}) = 0,$$

$$\nu(\{P_1, P_2\}) = \nu(\{P_1, P_3\}) = \nu(\{P_2, P_3\}) = 20, \;\; \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 60$$

- Fie **x** = (x_1, x_2, x_3) o alocare din nucleu. Atunci:

$$x_1 \geq \nu(\{P_1\}) = 0, \;\; x_2 \geq \nu(\{P_2\}) = 0, \;\; x_3 \geq \nu(\{P_3\}) = 0,$$

$$x_1 + x_2 \geq \nu(\{P_1, P_2\}) = 20, \;\; x_1 + x_3 \geq \nu(\{P_1, P_3\}) = 20,$$

$$x_2 + x_3 \geq \nu(\{P_2, P_3\}) = 20, \;\; \text{and } x_1 + x_2 + x_3 = \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 60.$$

Hence $0 \leq x_3 = 60 - (x_1 + x_2) \leq 60 - 20 \leq 40$. Similarly we get $0 \leq x_1, x_2 \leq 40$. Thus the core consists of all vectors $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ such that $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 40$ with $x_1 + x_2 + x_3 = 60$. In particular, vectors like $(20, 20, 20)$ and $(0, 20, 40)$ are in the core.

Exemplul 2: nucleu vid

$$\nu(\mathcal{S}) = \begin{cases} -1, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1\}, \{P_2\}, \text{or } \{P_3\}, \\ +1, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}, \{P_2, P_3\}, \text{or } \{P_3, P_1\}, \\ 0, & \text{if } \mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_3\}. \end{cases}$$

- Fiind un joc de sumă nulă, are nucleul vid (jocul este instabil)
- Fie **x** = (x_1, x_2, x_3) o alocare din nucleu

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 1 \\ & x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 1 \\ & x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 1 \\ & 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \geq 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

- Am ajuns la o contradicție: **x** nu poate fi o alocare și deci nucleul este vid (nu există nicio alocare astfel încât fiecare agent să fie mulțumit)

Exemplul 3

- Un vânzător *S* vrea să vândă un cal. Pentru *S*, dacă nu este vândut, calul nu valorează nimic
- Un fermier *F* și un măcelar *B* vor să îl cumpere
- Pentru *F*, calul valorează 1000
- Pentru *B*, calul valorează 500

$$\nu(\{S\}) = \nu(\{F\}) = \nu(\{B\}) = \nu(\{F, B\}) = 0,$$

$$\nu(\{S, B\}) = 500 \quad \text{and} \quad \nu(\{S, F\}) = \nu(\{S, F, B\}) = 1000.$$

Exemplul 3

$$\nu(\{S\}) = \nu(\{F\}) = \nu(\{B\}) = \nu(\{F, B\}) = 0,$$

$$\nu(\{S, B\}) = 500 \quad \text{and} \quad \nu(\{S, F\}) = \nu(\{S, F, B\}) = 1000.$$

If $\mathbf{x} = (x_S, x_F, x_B)$ is an imputation, then

$$x_S + x_F + x_B = 1000. \tag{7.5}$$

If $\mathbf{x}$ is in the core, we must have

$$x_S + x_F \geq \nu(\{S, F\}) = 1000.$$

Hence

$$x_B = 1000 - (x_S + x_F) \leq 1000 - 1000 \leq 0.$$

Since $x_B \geq \nu(\{B\}) = 0$, we conclude that $x_B = 0$. Then by (7.5), $x_S + x_F = 1000$.

we also have $x_S + x_B \geq \nu(\{S, B\}) = 500.$

Since $x_B = 0$, it follows that $x_S \geq 500$. On the other hand, $x_F \geq \nu(\{F\}) = 0$, and so $x_S = 1000 - x_F \leq 1000$. We conclude that an imputation in the core must be of the form

$$\mathbf{x} = (x_S, 1000 - x_S, 0) \quad \text{with } 500 \leq x_S \leq 1000.$$

Exemplul 3

If $\mathbf{x} = (x_S, x_F, x_B)$ is an imputation, then

$$x_S + x_F + x_B = 1000. \tag{7.5}$$

If $\mathbf{x}$ is in the core, we must have

$$x_S + x_F \geq \nu(\{S, F\}) = 1000.$$

B nu primește nimic, dar prezența lui este importantă pentru poziția de negociere a vânzătorului *S*

Hence

$$x_B = 1000 - (x_S + x_F) \leq 1000 - 1000 \leq 0.$$

Since $x_B \geq \nu(\{B\}) = 0$, we conclude that $x_B = 0$. Then by (7.5), $x_S + x_F = 1000$.

we also have $x_S + x_B \geq \nu(\{S, B\}) = 500$.

Since $x_B = 0$, it follows that $x_S \geq 500$. On the other hand, $x_F \geq \nu(\{F\}) = 0$, and so $x_S = 1000 - x_F \leq 1000$. We conclude that an imputation in the core must be of the form

$$\mathbf{x} = (x_S, 1000 - x_S, 0) \quad \text{with } 500 \leq x_S \leq 1000.$$

Interpretarea grafică a nucleului

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

$$v(12) = \tfrac{1}{4} \qquad v(13) = \tfrac{1}{2} \qquad v(23) = \tfrac{3}{4}$$

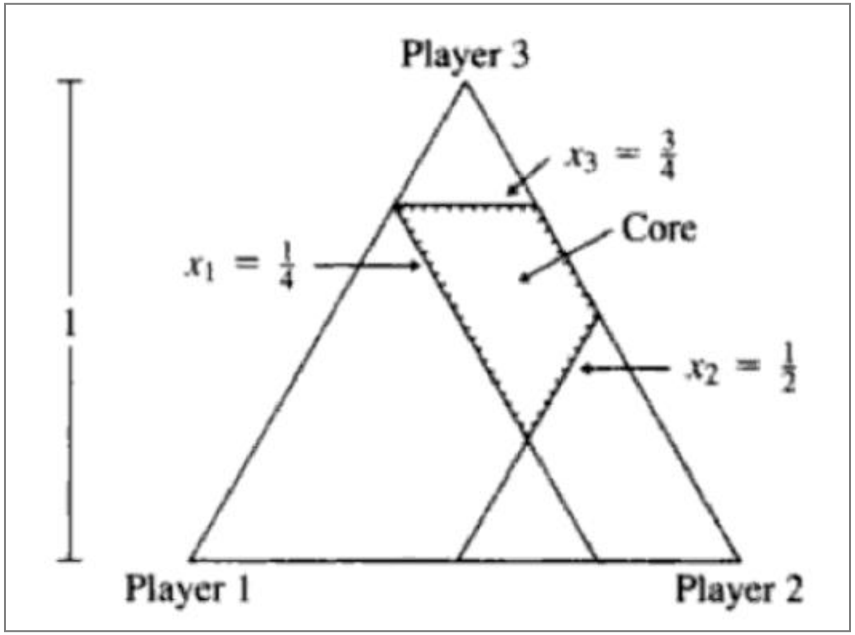
$$v(123) = 1$$

$$x_1 + x_2 \geqslant v(12) = \tfrac{1}{4}$$
$$x_1 + x_3 \geqslant v(13) = \tfrac{1}{2}$$
$$x_2 + x_3 \geqslant v(23) = \tfrac{3}{4}$$

$x_1 + x_2 \geqslant \frac{1}{4}$ if and only if $x_3 \leqslant \frac{3}{4}$

$x_1 + x_3 \geqslant \frac{1}{2}$ if and only if $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$

$x_2 + x_3 \geqslant \frac{3}{4}$ if and only if $x_1 \leqslant \frac{1}{4}$



Elemente de teoria jocurilor (II)

Valoarea Shapley

- Nucleul oferă o mulțime de soluții pentru un joc
  - Unele jocuri nu au nucleu
  - Nu există o modalitate de a evalua „corectitudinea” alocărilor din nucleu
- Ideea de bază a valorii Shapley:
  - Fiecare agent trebuie să primească un câștig corespunzător contribuției sale marginale la coalițiile posibile
- Pentru *n* agenți, există *n*! ordonări în care un agent se poate alătura celorlalți
  - Valoarea Shapley reprezintă media după toate ordonările posibile

Exemplul 1

- Fie un joc cu doi agenți și următoarea formă caracteristică: $v(\{\ \}) = 0$, $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{1, 2\}) = 6$
- Sunt 2! permutări posibile: (1, 2) și (2, 1)
- Valorile Shapley:

$$
\begin{aligned}
\phi(1) &= \frac{1}{2} \cdot (v(1) - v() + v(21) - v(2)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 - 0 + 6 - 3) = 2 \\
\phi(2) &= \frac{1}{2} \cdot (v(12) - v(1) + v(2) - v()) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (6 - 1 + 3 - 0) = 4
\end{aligned}
$$

Exemplul 2

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

$$v(AB) = 2 \qquad v(AC) = 4 \qquad v(BC) = 6$$

$$v(ABC) = 7,$$

B: $v(\mathrm{B}) - v(\phi) = 0 - 0 = 0$

C: $v(\mathrm{BC}) - v(\mathrm{B}) = 6 - 0 = 6$

A: $v(\mathrm{ABC}) - v(\mathrm{BC}) = 7 - 6 = 1.$

	Value added by		
Order	A	B	C
ABC	0	2	5
ACB	0	3	4
BAC	2	0	5
BCA	1	0	6
CAB	4	3	0
CBA	1	6	0
	8	14	20

$$\varphi = \tfrac{1}{6}(8, 14, 20) = (1\tfrac{1}{3}, 2\tfrac{1}{3}, 3\tfrac{1}{3}).$$

Valoarea Shapley: definiție

Definition 4.4 (Shapley Value). *Let $B(\pi, i)$ be the set of agents in the agent ordering π which appear before agent i. The* Shapley value *for agent i given A agents is given by*

$$\phi(A, i) = \frac{1}{A!} \sum_{\pi \in \Pi_A} v(B(\pi, i) \cup i) - v(B(\pi, i)),$$

where Π_A is the set of all possible orderings of the set A. Another way to express the same formula is

$$\phi(A, i) = \sum_{S \subseteq A} \frac{(|A| - |S|)!\,(|S| - i)!}{|A|!} [v(S) - v(S - \{i\})].$$

Exemplul 3

- Fie aceeași expresie rescrisă cu altă notație:
  - $|A| = n$
  - $|S| = s$

$$\varphi_i = \frac{1}{n!} \sum_{i \in S} (s-1)!(n-s)!\,[v(S) - v(S-i)] \qquad (s = \text{the size of } S)$$

Exemplul 3

$$v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = 0$$

$$v(AB) = 50 \qquad v(CD) = 70 \qquad v(AC) = 30$$

$$v(BD) = 90 \qquad v(AD) = 30 \qquad v(BC) = 90$$

$$v(ABC) = v(ABD) = v(ACD) = v(BCD) = v(ABCD) = 120.$$

Coalition S	$(s-1)!(n-s)!$	$v(S) - v(S-i)$	Product
A	$1 \times 6 = 6$	$0 - 0 = 0$	0
AB	$1 \times 2 = 2$	$50 - 0 = 50$	100
AC	$1 \times 2 = 2$	$30 - 0 = 30$	60
AD	$1 \times 2 = 2$	$30 - 0 = 30$	60
ABC	$2 \times 1 = 2$	$120 - 90 = 30$	60
ABD	$2 \times 1 = 2$	$120 - 90 = 30$	60
ACD	$2 \times 1 = 2$	$120 - 70 = 50$	100
ABCD	$6 \times 1 = 6$	$120 - 120 = 0$	0
			440

$$\varphi_A = \frac{1}{24} 440 = 18\tfrac{1}{3}.$$

	Value added by			
Order	A	B	C	D
ABCD	0	50	70	0
ABDC	0	50	0	70
ACBD	0	90	30	0
ACDB	0	0	30	90
ADBC	0	90	0	30
ADCB	0	0	90	30
BACD	50	0	70	0
BADC	50	0	0	70
BCAD	30	0	90	0
BCDA	0	0	90	30
BDAC	30	0	0	90
BDCA	0	0	30	90
CABD	30	90	0	0
CADB	30	0	0	90
CBAD	30	90	0	0
CBDA	0	90	0	30
CDAB	50	0	0	70
CDBA	0	50	0	70
DABC	30	90	0	0
DACB	30	0	90	0
DBAC	30	90	0	0
DBCA	0	90	30	0
DCAB	50	0	70	0
DCBA	0	50	70	0
	440	920	760	760

Proprietăți

- Valoarea Shapley există întotdeauna, este unică și este întotdeauna fezabilă, adică suma câștigurilor agenților este maximă
- Poate să nu aparțină nucleului, chiar dacă jocul are nucleu; în acest caz, este instabilă:
  - De exemplu, jocul cu $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$,
    $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 1$, $v(\{2, 3\}) = 0$, $v(\{1, 2, 3\}) = 1$
    are un nucleu cu o singură alocare: (1, 0, 0), dar valoarea Shapley este: (2/3, 1/6, 1/6)

Proprietăți

- Presupune un efort de calcul mare
  - Poate fi folosită pentru un număr mic de agenți
  - Dar există metode de calcul aproximative (de exemplu, considerarea unui număr mare de coaliții aleatorii)
- Într-un sistem multi-agent real, chiar calculul valorilor sub-coalițiilor poate fi foarte complex

Jocuri convexe

- Un joc este convex dacă funcția sa caracteristică este supermodulară:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \forall\, S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}, \forall\, i \in N$$

- Motivația de a intra într-o coaliție (câștigul posibil) crește pe măsură ce coaliția se mărește
- Orice joc convex este superaditiv
- Nucleul unui joc convex este întotdeauna nevid, iar valoarea Shapley aparține nucleului și este în centrul său de greutate

Concluzii

- Un joc strategic finit are întotdeauna cel puțin un echilibru Nash pur sau mixt
- Un rezultat este optim Pareto dacă este mai bun sau la fel decât alt rezultat din toate punctele de vedere și mai bun strict din cel puțin un punct de vedere. Rezultatele nedominate sunt optime Pareto
- Într-un echilibru Nash, agenții nu au motivația de a devia individual. Într-o stare optimă Pareto, agenții nu au motivația de a devia în coaliție
- Prin cooperare, agenții pot obține un câștig mai mare. Problema este împărțirea câștigului suplimentar obținut
- Nucleul unui joc cu *n* agenți este mulțimea alocărilor nedominate. Nucleul este stabil
- Ideea de bază a valorii Shapley este că fiecare agent trebuie să primească un câștig corespunzător contribuției sale marginale la coalițiile posibile