Rețele bayesiene

1. Obiective

Obiectivul acestui laborator este de a prezenta structura rețelelor bayesiene și de a descrie un algoritm exact de inferență, inferența prin enumerare. Folosind un program de lucru cu rețele bayesiene, se vor modela două rețele și se vor explora probabilitățile nodurilor în prezenta diferitelor observații.

2. Probabilități condiționate. Teorema lui Bayes

Vom aminti câteva noțiuni legate de probabilitățile condiționate. Când trebuie să definim $P(A|B)$, presupunem că se cunoaște B și se calculează probabilitatea lui A în această situație. Să considerăm evenimentul D (durere de cap) și să presupunem că are, în general, o probabilitate de 1/10. Probabilitatea de a avea gripă (evenimentul G) este de numai 1/40. După cum se vede în figura 1, dacă cineva are gripă, probabilitatea de a avea și dureri de cap este de 1/2. Deci probabilitatea durerii de cap, dată fiind gripa, este de 1/2. Această probabilitate corespunde intersecției celor două regiuni, cu aria egală cu jumătate din G.

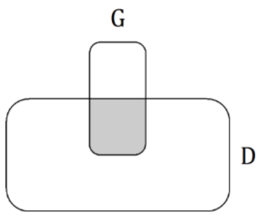

Figura 1. *Reprezentare grafică a unei probabilități condiționate*

Pe baza acestei relații rezultă *teorema lui Bayes*, care este importantă pentru toate raționamentele probabilistice pe care le vom studia.

Considerăm formula probabilităților condiționate:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Putem exprima probabilitatea intersecției în două moduri și de aici deducem expresia lui $P(B|A)$ în funcție de $P(A|B)$:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A),$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Această ecuație reprezintă un rezultat fundamental. Mai clar, putem considera următoarea expresie alternativă:

$$P(I|E) = \frac{P(E|I) \cdot P(I)}{P(E)},$$

unde I este ipoteza, E este evidența (provenind din datele observate), $P(I)$ este *probabilitatea a-priori* a ipotezei, adică gradul inițial de încredere în ipoteză, $P(E|I)$ este *verosimilitatea* datelor observate (engl. "likelihood"), adică măsura în care s-a observat evidența în condițiile îndeplinirii ipotezei, iar $P(I|E)$ este *probabilitatea a-posteriori* a ipotezei, dată fiind evidența.

Relația este importantă deoarece putem calcula astfel probabilitățile cauzelor, date fiind efectele. Este mai simplu de cunoscut când o cauză determină un efect, dar invers, când cunoaștem un efect, probabilitățile cauzelor nu pot fi cunoscute imediat. Teorema ne ajută să diagnosticăm o anumită situație sau să testăm o ipoteză.

Să considerăm următorul exemplu de diagnosticare. Știm că probabilitatea de apariție a meningitei în populația generală este $P(M) = 0{,}002\%$. De asemenea, probabilitatea ca o persoană să aibă gâtul înțepenit este $P(G) = 5\%$. Mai știm că meningita cauzează gât înțepenit în jumătate din cazuri: $P(G|M) = 50\%$.

Dorim să aflăm următorul lucru: dacă un pacient are gâtul înțepenit, care este probabilitatea să aibă meningită?

Aplicând teorema lui Bayes, vom avea:

$$P(M|G) = \frac{P(G|M) \cdot P(M)}{P(G)} = 0{,}02\%.$$

G este un simptom pentru M. Dacă există simptomul, care este probabilitatea unei posibile cauze, adică $P(M)$? Rezultatul este 0,02%, deci o probabilitate mică, deoarece probabilitatea meningitei înseși este foarte mică în general.

3. Rețele bayesiene

În continuare, ne vom concentra asupra reprezentării informațiilor legate de evenimente probabilistice, care ne va ajuta să realizăm eficient raționamente.

Determinarea probabilității unei combinații de valori se poate realiza astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1}, \dots, x_1).$$

Aplicând în continuare această regulă vom obține *regula de înmulțire a probabilităților* (engl. "chain rule"):

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdot P(x_{n-1}|x_{n-2}, \dots, x_1) \cdot P(x_2|x_1) \cdot P(x_1),$$

exprimată mai concis astfel:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1).$$

O rețea bayesiană arată ca în figura 2: este un graf orientat aciclic (engl. “directed acyclic graph”), în care evenimentele sau variabilele se reprezintă ca noduri, iar relațiile de corelație sau cauzalitate se reprezintă sub forma arcelor dintre noduri.

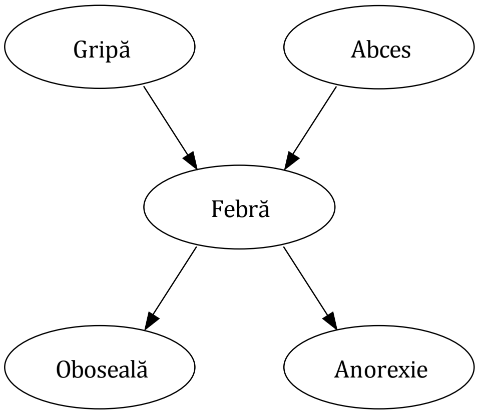

Figura 2. *Rețea bayesiană*

Tabelul 1. *Tabelele de probabilități pentru rețeaua bayesiană*

P(*Gripă = Da*)	*P*(*Gripă = Nu*)
0,1	0,9

P(*Abces = Da*)	*P*(*Abces = Nu*)
0,05	0,95

Gripă	*Abces*	*P*(*Febră = Da*)	*P*(*Febră = Nu*)
Da	Da	0,8	0,2
Da	Nu	0,7	0,3
Nu	Da	0,25	0,75
Nu	Nu	0,05	0,95

Febră	*P*(*Oboseală = Da*)	*P*(*Oboseală = Nu*)
Da	0,6	0,4
Nu	0,2	0,8

Febră	*P*(*Anorexie = Da*)	*P*(*Anorexie = Nu*)
Da	0,5	0,5
Nu	0,1	0,9

În acest exemplu, se consideră că atât gripa cât și abcesul pot determina febra. De asemenea, febra poate cauza o stare de oboseală sau lipsa poftei de mâncare (anorexie).

Sensul săgeților arcelor sunt dinspre părinți, cum ar fi gripa și abcesul, înspre fii, precum febra. Deși în acest exemplu relațiile sunt cauzale, în general o rețea bayesiană reflectă relații de corelație, adică măsura în care aflarea unor informații despre o variabilă-părinte aduce noi informații despre o variabilă-fiu.

Fiecare variabilă are o mulțime de valori. În cazul cel mai simplu, variabilele au valori binare, de exemplu *Da* și *Nu*. În general însă, o variabilă poate avea oricâte valori.

Asociate cu variabilele, o rețea bayesiană conține o serie de tabele de probabilități, precum cele din tabelul 1. Pentru nodurile fără părinți se indică probabilitățile marginale ale fiecărei valori (adică fără a lua în considerare valorile celorlalte variabile). Pentru celelalte noduri, se indică probabilitățile condiționate pentru fiecare valoare, ținând cont de fiecare combinație de valori ale variabilelor părinte.

În general, o variabilă binară fără părinți va avea un singur parametru independent, o variabilă cu 1 părinte va avea 2 parametri independenți iar o variabilă cu n părinți va avea 2^n parametri independenți în tabela de probabilități corespunzătoare.

Presupunerea modelului bazat pe rețele bayesiene este că o variabilă nu depinde decât de părinții săi și deci ecuația anterioară devine:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | \pi(x_i)),$$

unde $\pi(x_i)$ reprezintă mulțimea părinților variabilei x_i, din șirul ordonat topologic al nodurilor, în care părinții unui nod apar întotdeauna înaintea nodului respectiv.

4. Inferența prin enumerare

Folosind acest procedeu, putem răspunde practic la orice întrebare privind evenimentele codate în rețea. Având în vedere niște evidențe, adică observații sau evenimente despre care știm că s-au întâmplat, putem calcula probabilitățile tuturor celorlalte noduri din rețea.

Mai exact, scopul inferenței prin enumerare este de a calcula probabilitatea unei variabile interogate (engl. "query"), date fiind variabilele observate (evidență).

Ideea de bază este tot calcularea unui produs de probabilități condiționate, însă în cazul variabilelor despre care nu se cunoaște nimic (nu sunt nici observate și nici interogate), se sumează variantele corespunzătoare *tuturor* valorilor acestora.

Să considerăm următoarea întrebare: „Care este probabilitatea ca o persoană să aibă gripă, dacă prezintă simptome de oboseală și anorexie?"

Vom calcula *independent* $P(G_D | O_D, X_D)$ și $P(G_N | O_D, X_D)$.

Pentru $P(G_D | O_D, X_D)$, variabilele rămase sunt *Abcesul* și *Febra*. În consecință, vom suma probabilitățile corespunzătoare tuturor valorilor acestor variabile: $a \in \{A_D, A_N\}$ și $f \in \{F_D, F_N\}$. De asemenea, pentru a crește eficiența calculelor, se recomandă ca variabilele rămase să fie mai întâi sortate topologic, astfel încât părinții să apară înaintea copiilor. În acest caz, se vor putea descompune mai ușor sumele, scoțând în față factorii care nu depind de o anumită variabilă.

$$
\begin{aligned}
&P(G_D|O_D,X_D) = \\
&\quad \alpha \cdot \sum_{a\in\{A_D,A_N\}} \sum_{f\in\{F_D,F_N\}} P(G_D,a,f,O_D,X_D) = \\
&\quad \alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_D) \cdot P(a) \cdot P(f|G_D,a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
&\quad \alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_D,a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
&\quad \alpha \cdot P(G_D) \cdot \sum_a P(a) \cdot [P(F_D|G_D,a) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
&\qquad\quad P(F_N|G_D,a) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] = \\
&\quad \alpha \cdot P(G_D) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_D,A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
&\qquad\quad P(F_N|G_D,A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] + \\
&\qquad\quad P(A_N) \cdot [P(F_D|G_D,A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
&\qquad\quad P(F_N|G_D,A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} = \\
&\quad \alpha \cdot 0{,}1 \cdot \{0{,}05 \cdot [0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1] + \\
&\qquad\quad 0{,}95 \cdot [0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1]\} = \\
&\quad \alpha \cdot 0{,}02174.
\end{aligned}
$$

În exemplul de mai sus, se observă că $P(a)$ nu depinde de f și prin urmare, suma corespunzătoare variabilei *Abces* a fost scoasă în fața sumei corespunzătoare variabilei *Febră*, evitându-se duplicarea unor calcule. Nodul *Abces*, neavând părinți, este în fața *Febrei* în sortarea topologică. Se remarcă variabila α care intervine în expresia probabilității. Vom explica sensul acesteia imediat, după ce vom considera și calculele pentru $P(G_N|O_D,X_D)$, în mod analog:

$$
\begin{aligned}
&P(G_N|O_D,X_D) = \\
&\quad \alpha \cdot \sum_{a\in\{A_D,A_N\}} \sum_{f\in\{F_D,F_N\}} P(G_N,a,f,O_D,X_D) = \\
&\quad \alpha \cdot \sum_a \sum_f P(G_N) \cdot P(a) \cdot P(f|G_N,a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
&\quad \alpha \cdot P(G_N) \cdot \sum_a P(a) \cdot \sum_f P(f|G_N,a) \cdot P(O_D|f) \cdot P(X_D|f) = \\
&\quad \alpha \cdot P(G_N) \cdot \{P(A_D) \cdot [P(F_D|G_N,A_D) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
&\qquad\quad P(F_N|G_N,A_D) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)] + \\
&\qquad\quad P(A_N) \cdot [P(F_D|G_N,A_N) \cdot P(O_D|F_D) \cdot P(X_D|F_D) + \\
&\qquad\quad P(F_N|G_N,A_N) \cdot P(O_D|F_N) \cdot P(X_D|F_N)]\} = \\
&\quad \alpha \cdot 0{,}9 \cdot \{0{,}05 \cdot [0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1] + \\
&\qquad\quad 0{,}95 \cdot [0{,}05 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}95 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1]\} = \\
&\quad \alpha \cdot 0{,}03312.
\end{aligned}
$$

Rolul coeficientului α este de a asigura faptul că $P(G_D|O_D, X_D) + P(G_N|O_D, X_D) = 1$, deoarece *Da* și *Nu* sunt singurele valori posibile pentru *Gripă*. Având în vedere că $P(G_D|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0{,}02174$ și $P(G_N|O_D, X_D) = \alpha \cdot 0{,}03312$, există $\alpha = 1/(0{,}02174 + 0{,}03312) = 18{,}23$, astfel încât suma celor două probabilități să fie 1. În consecință, rezultatul interogării este:

$$P(G_D|O_D, X_D) = 0{,}39628 \approx 40\%,$$
$$P(G_N|O_D, X_D) = 0{,}60372 \approx 60\%.$$

5. Aplicații

1. Fie rețeaua bayesiană din figura 2, cu probabilitățile din tabelul 1. Folosind algoritmul de inferență prin enumerare, răspundeți, *pe hârtie*, la întrebarea: „Care este probabilitatea ca o persoană să fie obosită dacă nu are gripă, nu are abces și nu are anorexie?”

2. Desenați în programul *Belief and Decision Network Tool* (*bayes.jar*, inclus în arhiva laboratorului) aceeași rețea bayesiană (figura 2, tabelul 1). Răspundeți la întrebarea de la punctul 1 cu ajutorul programului și comparați rezultatele.

Indicații. Desenarea se face în tab-ul *Create*. Interogările se introduc în tab-ul *Solve*: *Make observation* pentru setarea evidențelor și *Query* pentru setarea variabilei de interogare.

3. Tot cu ajutorul programului, răspundeți la următoarele întrebări:

a) Care este probabilitatea ca o persoană să aibă febră, dacă are gripă și abces? Cum influențează variabilele *Oboseală* și *Anorexie* aceste probabilități?

b) Care sunt probabilitățile marginale ale nodurilor *Febră*, *Oboseală* și *Anorexie* (când în rețea nu sunt noduri de evidență)?

c) Care este probabilitatea nodului *Oboseală* dacă *Gripă* are valoarea *Da*?

d) Care este probabilitatea nodului *Oboseală* dacă *Gripă* are valoarea *Da* și *Febră* are valoarea *Nu*? În acest caz, care sunt variabilele irelevante pentru interogare?

4. Fie situația de trafic din figura 3. Strada incidentă în intersecție, cu sens unic, are 4 benzi de circulație (B_1, B_2, B_3, B_4). Până la intersecție sunt 4 sectoare de drum (S_1, S_2, S_3, S_4). Din fiecare sector, o mașină poate merge înainte, cu probabilitatea de 50% sau la dreapta, respectiv stânga, cu probabilitățile de 25%. De pe benzile laterale nu se poate ieși în afara drumului, prin urmare probabilitatea de a merge înainte este 75%. La capătul străzii, mașinile pot merge pe unul din cele 3 drumuri (*Stânga*, *Înainte*, *Dreapta*).

Modelați această situație cu ajutorul unei rețele bayesiene în programul *bayes.jar*.

Indicație. Fiecare sector de drum poate fi modelat ca o variabilă cu 4 valori posibile, corespunzătoare celor 4 benzi. Cele 3 drumuri de după intersecție pot fi modelate ori ca o variabilă cu 3 valori posibile, ori ca 3 variabile distincte, de data aceasta cu câte 2 valori, *Adevărat* sau *Fals*.

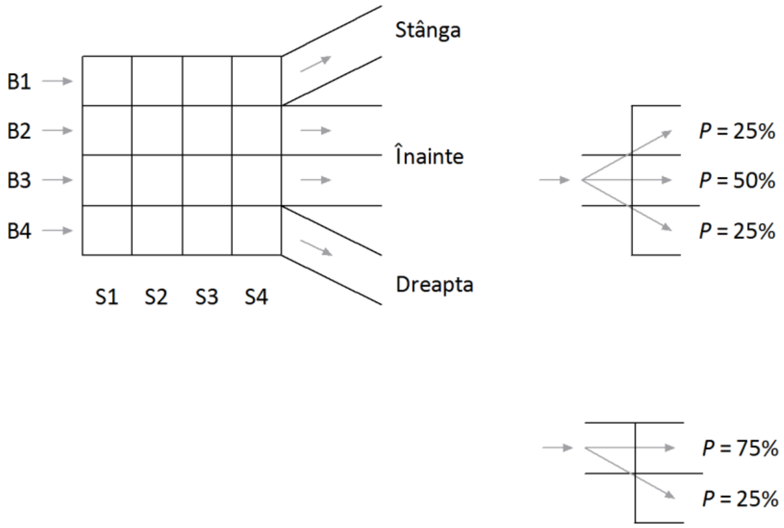

Figura 3. *Model de intersecție*

Cu ajutorul programului, răspundeți la următoarele întrebări:

a) Dacă o mașină este pe segmentul S_1, banda B_1, care sunt probabilitățile ca după intersecție să meargă la *Stânga*, *Înainte* sau la *Dreapta*? Pentru direcția *Înainte*, nu ne interesează pe care din cele două benzi va merge mașina, contează doar direcția.

b) Să presupunem că o mașină merge pe segmentul S_1, banda B_1, apoi pe segmentul S_2, banda B_4. Este posibil? Răspunsul se găsește calculând probabilitatea evidenței (în program, $P(e)$ *Query*).

c) Dacă o mașină este pe segmentul S_1, banda B_1 și o ia la *Dreapta* după intersecție, care sunt probabilitățile poziției sale pe sectoarele de drum S_3 și S_4?

d) Dacă mașina a luat-o la *Stânga* în intersecție, care sunt probabilitățile poziției sale anterioare pe sectoarele de drum incidente: S_1, S_2, S_3 și S_4?

La punctul 1, scanați calculele de pe hârtie (de preferat, folosind aplicația CamScanner). La celelalte puncte, faceți capturi ecran cu rezultatele. Integrați toate aceste imagini într-un document unic și exportați-l în format pdf. Pentru evaluare, trimiteți un link la acest document pdf.