## Tema nr. 4

În fișierele (a_i.txt, f_i.txt, *i=1,…,5*) postate pe pagina laboratorului, sunt memorate pentru 5 sisteme liniare cu matrice rară tridiagonală, ***Ax = f,*** următoarele elemente:

- ***n*** dimensiunea datelor, ***p, q*** – locul de unde încep diagonalele nenule
- cele ***n*** elemente ale diagonalei principale a matricei (vectorul ***a***), urmate de cele ***n-1 (n-p+1)*** elemente ale vectorului ***b*** apoi cele ***n-1 (n-q-1)*** elemente ale vectorului ***c***. Cei trei vectori sunt separați de linii goale.
- $f_i$ , ***i=1,2, … , n*** elementele vectorului termenilor liberi $f \in \mathbb{R}^n$.

Vom considera pentru această temă matrice tridiagonale de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} , \quad p = q = 2$$

1. Folosind fișierele atașate, să se citească dimensiunea sistemului, vectorul termenilor liberi și să se genereze vectorii necesari pentru memorarea economică a matricei rare. Se presupune că toate elementele de pe diagonala principală a matricei sunt nenule. Să se verifice că elementele de pe diagonala principală ale matricei sunt nenule.
   Se consideră dată precizia calculelor $\varepsilon = 10^{-p}$.

2. Cu această memorare rară a matricei $\boldsymbol{A}$ să se aproximeze soluția sistemului liniar:

$$\boldsymbol{Ax=f} \qquad \textbf{(1)}$$

folosind metoda Gauss-Seidel.

3. Să se verifice soluția calculată afișând norma:

$$\left\| \boldsymbol{A x_{GS}} - \boldsymbol{f} \right\|_\infty$$

unde $\boldsymbol{x_{GS}}$ este aproximarea soluției exacte obținută cu algoritmul Gauss-Seidel.

4. În toate calculele care includ matricea $\boldsymbol{A}$, se cere să se utilizeze memorarea rară a matricei (să nu se aloce în program nici o matrice clasică).

5. La implementarea metodei Gauss-Seidel să se folosească un singur vector $\boldsymbol{x_{GS}}$.

**Bonus 20 pt.** : calculul soluţiei unui sistem liniar rar tridiagonal oarecare ($\boldsymbol{p, q}$ pot lua orice valori) folosind metoda Gauss-Seidel.

## Metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare

Pp. că **det** $\boldsymbol{A \neq 0}$, vom nota soluția exactă a sistemului (1) cu $\boldsymbol{x^*}$:

$$\boldsymbol{x^* := A^{-1} f.}$$

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare au fost deduse pentru sistemele de dimensiune ‘*mare*’ ($\boldsymbol{n}$ ‘*mare*’), cu matricea sistemului $\boldsymbol{A}$, matrice rară (cu ‘*puține*’ elemente $\boldsymbol{a_{ij}}$

nenule). În cazul metodelor iterative matricea $\boldsymbol{A}$ nu se transformă (ca în cazul algoritmului de eliminare Gauss sau a descompunerilor $\boldsymbol{LU}$ sau a factorizărilor $\boldsymbol{QR}$) ci sunt folosite doar elementele nenule ale matricei pentru aproximarea soluției exacte $\boldsymbol{x}^*$. Pentru matricele rare se folosesc scheme de memorare economice specifice.

Pentru a aproxima soluția $\boldsymbol{x}^*$ se construiește un șir de vectori $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ care, în anumite condiții, converge la soluția exactă $\boldsymbol{x}^*$ a sistemului (1):

$$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}^* \ , \ \textbf{pentru } \boldsymbol{k} \to \infty$$

Vectorul $\boldsymbol{x}^{(0)}$ se inițializează, de obicei, cu 0:

$$\boldsymbol{x}_i^{(0)} = \mathbf{0} \ , \ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n} \tag{2}$$

Atunci când converge, limita șirului este chiar $\boldsymbol{x}^*$ soluția sistemului (1).

## Metoda Gauss-Seidel

Vom presupune că toate elementele diagonale ale matricei $\boldsymbol{A}$ sunt nenule:

$$\boldsymbol{a_{ii} \neq 0} \ , \ \boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$$

Când se citește matricea din fișier, se cere să se verifice dacă elementele diagonale ale matricei sunt nenule ($|\boldsymbol{a_{ii}}| > \boldsymbol{\varepsilon}, \ \forall \boldsymbol{i}$). Dacă există un element diagonal nul, nu se poate rezolva sistemul liniar folosind metoda iterativă Gauss-Seidel.

Șirul de vectori generat de metoda Gauss-Seidel este următorul:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Formula de calcul de mai sus trebuie adaptată noului tip de memorare a matricei $\boldsymbol{A}$. În sumele de mai sus sunt necesare doar elementele $\boldsymbol{a_{ij}}$ nenule. Se vor scrie formulele (3) în funcţie de vectorii ***a, b*** şi $\boldsymbol{c}$, vectori care definesc matricea tridiagonală.

Pentru metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare convergența sau divergența șirului $\{x^{(k)}\}$ nu depinde de alegerea iterației inițiale $x^{(0)}$. Metoda Gauss-Seidel nu calculează pentru orice matrice nesingulară $\boldsymbol{A}$, soluţia sistemului $\boldsymbol{Ax=f}$. Există sisteme pentru care şirul de vectori construit este divergent (nu reuşeşte să calculeze o aproximare a soluţiei), deşi sistemul are soluţie.

Pentru a aproxima soluția $x^*$ trebuie să calculăm un termen al șirului $x^{(k)}$ pentru $\boldsymbol{k}$ suficient de mare. Se știe că, dacă diferența dintre doi termeni consecutivi ai șirului $\{x^{(k)}\}$ devine suficient de *‚mică'*, atunci ultimul vector calculat este *‚aproape'* de soluția căutată:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \le \varepsilon \Rightarrow \| x^{(k)} - x^* \| \le \ c\,\varepsilon \ , \ c \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \ x^{(k)} \approx x^* \quad (2)$$

Nu este nevoie să memorăm toți vectorii calculați ai șirului $\{x^{(k)}\}$ ci avem nevoie doar de ultimul vector, cel care satisface prima inegalitate din relația (2) ($\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \le \ \varepsilon$). În program s-ar putea utiliza doar doi vectori:

$x^c$ pentru vectorul $x^{(k+1)}$ şi $x^p$ pentru vectorul $x^{(k)}$.

În cazul metodei Gauss-Seidel se poate folosi un singur vector pe parcursul calculelor.

$$x_{GS} = x^c = x^p.$$

În cazul folosirii unui singur vector pentru aproximarea soluției, aplicarea formulei (3) și calculul normei $||x^{(k)}-x^{(k-1)}||=||x^c-x^p||$ trebuie făcute în același timp (în aceeași buclă *for*).

### *Schemă de implementare a unei metode iterative*

$x^c = x^p = 0;$

$k=0;$

**do**

{

$x^p = x^c;$

calculează noul $x^c$ folosind $x^p$ (cu formula (3));

calculează $\Delta x = || x^c - x^p||;$

$k=k+1;$

}

**while** ($\Delta x \geq \varepsilon$ **şi** $k \leq k_{max}$ **şi** $\Delta x \leq 10^8$) //($k_{max} = 10000$)

**if** ($\Delta x < \varepsilon$) $x^c \approx x^*$; // $x^c$ este aproximarea căutată a soluției

**else** *‚divergență';*

**Exemplu:**

Matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 102.5 & 2.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3.5 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 100.0 & 0.33 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.73 & 101.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 102.23 \end{pmatrix}$$

Pp. că:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \\ 9.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$x_1^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= ( f_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)} - a_{15}x_5^{(0)} ) / a_{11} =$$

$$= (6.0 - 0.0 * 2.0 - 2.5 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 102.5$$

(varianta economică folosește doar elementele nenule de pe linia 1)

$$= (6.0 - 2.5 * 2.0) / 102.5 = - 0.01463414...$$

$x_2^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (\,f_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)} - a_{25}x_5^{(0)}) / a_{22} =$$

$$= (7.0 - 3.5 * (-0.01463414...) - 1.05 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.33 * 5.0) / 104.88$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe linia a 2-a)

$$= (7.0 - 3.5 * 1.0 - 1.05 * (-0.01463414...)) / 104.88 = 0.033536$$

$x_3^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (\,f_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)} - a_{35}x_5^{(0)}) / a_{33} =$$

$$= (8.0 - 0.0 * (-0.01463414...) - 1.3 * 0.033536 - 0.33 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 100.0$$

(varianta economică folosește elementele nenule de pe linia 3)

$$= (8.0 - 1.3 * 0.033536 - 0.33 * 4.0) / 100.00 = 0.066364$$

$x^{(k+1)}[i]$ (varianta economică folosește doar elementele nenule de pe linia $i$)

$$= \frac{\left(f[i] - a[i][i-1] * x^{(k+1)}[i-1] - a[i][i+1] * x^{(k)}[i+1]\right)}{a[i][i]}$$

Sistemele memorate în fișierele postate pe pagina cursului au următoarele soluții:

- (a_1.txt, f_1.txt) are soluția $x_i = 1, \forall i = 0,...,n-1$,
- (a_2.txt, f_2.txt) are soluția $x_i = 1.0 / 3.0, \forall i = 0,...,n-1$
- (a_3.txt, f_3.txt) are soluția $x_i = 2.0 * (i+1) / 5.0\ , \forall i = 0,...,n-1$
- (a_4.txt, f_4.txt) are soluția $x_i = 2000 / (i+1), \forall i = 0,...,n-1$
- (a_5.txt, f_5.txt) are soluția $x_i = 2.0\ , \forall i = 0,...,n-1$. (?!?)