Tema nr. 6

Date $(n+1)$ puncte distincte, x_0, x_1, …, x_n ($x_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, $x_i \neq x_j,\ \ i \neq j$) şi cele $(n+1)$ valori ale unei funcţii necunoscute f în aceste puncte, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array}$$

să se aproximeze funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, pentru un $\bar{x}$ dat, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$:

- folosind aproximarea polinomială calculată cu metoda cele mai mici pătrate. Pentru calculul valorii polinomului obţinut în punctul $\bar{x}$ să se folosească *schema lui Horner*. Să se afişeze $P_m(\bar{x})$, $|P_m(\bar{x}) - f(\bar{x})|$ şi $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |P_m(x_i) - y_i|$. Se vor folosi valori ale lui m mai mici ca 6.

- folosind funcţiile spline pătratice de clasă C^1. În acest caz, se consideră că se cunoaşte suplimetar despre funcţia f, valoarea primei derivate în capătul din stânga a intervalului de interpolare $d_a = f'(x_0 = a)$. Să se afişeze $S_f(\bar{x})$ şi $|S_f(\bar{x}) - f(\bar{x})|$.

Pentru rezolvarea sistemlui liniarce apare în rezolvarea interpolării în sensul celor mai mici pătrate se poate folosi biblioteca utilizată la **Tema 2**.

Nodurile de interpolare $\{x_i, i = 0, ..., n\}$ se vor genera astfel: x_0 şi x_n se citesc de la tastatură sau dintr-un fişier astfel ca $x_0 < x_n$, iar x_i se generează aleator astfel ca $x_i \in (x_0, x_n)$ şi $x_{i-1} < x_i$; valorile $\{y_i, i = 0, ..., n\}$ se construiesc folosind o funcţie f declarată în program (exemple de alegere a nodurilor x_0, x_n şi a funcţiei $f(x)$ se găsesc la sfârşitul acestui document), $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$;

Bonus (15 pt): Să se facă graficul funcţiei f şi al funcţiilor aproximative calculate P_m şi S_f

Interpolare prin metoda celor mai mici pătrate

Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dat $\bar{x} \in [a, b]$ să se aproximeze $f(\bar{x})$ cunoscând cele $n + 1$ valori y_i ale funcţiei f în nodurile de interpolare.

Se caută un polinom de grad m:

$$P_m(x) = P_m(x; a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$$

Coeficienţii $\{a_i; i = \overline{0,m}\}$ sunt soluţia problemei de minimizare:

$$\min \left\{ \sum_{r=0}^{n} \left| P_m(x_r; a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_r \right|^2 \; ; \; a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

şi de asemenea, sunt soluţia sistemului liniar:

$$Ba = f$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \quad f = (f_i)_{i=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \Big) a_j \;=\; \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^i \quad , \quad i = 0, \ldots, m$$

Acest sistem liniar se poate rezolva cu biblioteca numerică folosită la *Tema 2*.

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se aproximează prin valoarea polinomului P_m în punctul $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) \approx P_m(\bar{x}; a_0, a_1, \ldots, a_m)$$

Valoarea polinomului $P_m(\bar{x})$ se va calcula folosind schema lui Horner.

Schema lui Horner de calcul a valorii $P(x_0)$

Fie P un polinom de grad p:

$$P(x) = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \cdots + c_{p-1} x + c_p \; , \quad (c_0 \neq 0)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((c_0 x + c_1)x + c_2)x + c_3)x + \cdots)x + c_{p-1})x + c_p$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} d_0 &= c_0 \, , \\ d_i &= c_i + d_{i-1} x_0 \; , \quad i = \overline{1,p} \end{aligned} \tag{1}$$

În şirul de mai sus:

$$P(x_0) = d_p$$

iar ceilalţi termeni calculaţi ($d_i, i = 0, \ldots, p-1$) , sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - x_0)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & d_0x^{p-1} + d_1x^{p-2} \cdots + d_{p-2}x + d_{p-1} \ , \\ r & = & d_p = P(x_0). \end{array}$$

Pentru a calcula $P(x_0)$ (d_p) cu formulele (1) se poate folosi o singură valoare reală $d \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $d \in \mathbb{R}^p$.

Funcţii *spline* pătratice de clasă C^1

Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dat $\bar{x} \in [a, b]$ să se aproximeze $f(\bar{x})$ cunoscând, în afara celor $n+1$ perechi $(x_i, y_i = f(x_i))$ şi valoarea d_a a derivatei funcţiei f în a:

$$f'(a) = d_a.$$

Se caută o funcţie S_f de clasă C^1 pe $[a, b]$ astfel încât:

$$S_f(x) = a_ix^2 + b_ix^2 + c_i \ , \quad \text{pentru } x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = \overline{0, n-1}$$

$$S_f(x_i) = y_i \ , \ i = \overline{0, n} \ , \quad S_f'(a) = d_a(d_a = f'(a))$$

Funcţia S_f cu proprietăţile de mai sus are următoarea formă:

$$S_f(x) = \frac{(A_{i+1} - A_i)}{2h_i}(x - x_i)^2 + A_i(x - x_i) + y_i \quad , \text{ pentru } x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = \overline{0, n-1}$$

unde

$$\begin{array}{rcl} h_i & = & x_{i+1} - x_i \quad , \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ A_{i+1} & = & -A_i + \dfrac{2(y_{i+1} - y_i)}{h_i} \quad , \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ A_0 & = & d_a \end{array}$$

Valoarea funcţiei f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, se aproximează prin $S_f(\bar{x})$ ($\bar{x}$ trebuie să fie din $[a, b]$). Se caută i_0 astfel ca $\bar{x} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Avem:

$$f(\bar{x}) \approx S_f(\bar{x}) = \frac{(A_{i_0+1} - A_{i_0})}{2h_{i_0}}(x - x_{i_0})^2 + A_{i_0}(x - x_{i_0}) + y_{i_0}.$$

Date de intrare - exemple

$$x_0 = a = 1 \quad , \quad x_n = b = 5 \quad , \quad f(x) = x^2 - 12x + 30$$

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_n = b = 1.5 \quad , \quad f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_n = b = 2 \quad , \quad f(x) = 2x^3 - 3x + 15$$