Tema nr. 3

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este considerată matrice rară dacă dimensiunea matricei n este ‚*mare*’ şi are *‘puține’* elemente $\boldsymbol{a_{ij}} \neq \boldsymbol{0}$. Pentru această temă vom considera două tipuri de matrice rare. Primul tip sunt matrice care au cel mult 20 de elemente nenule pe fiecare linie. Al doilea tip sunt matricele tridiagonale, matrice pentru care elementele nenule se găsesc pe diagonala principală şi două diagonale secundare, una în partea inferior triunghiulară (diagonala $\boldsymbol{p}$) şi una în partea superior triunghiulară (diagonala $\boldsymbol{q}$) a matricei. Dacă $\boldsymbol{A}$ este tridiagonală avem:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i & \textbf{daca } i = j \\ b_i & \textbf{daca } j - i = q \\ c_j & \textbf{daca } i - j = p \\ 0 & \textbf{in rest} \end{cases}$$

În vectorii $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n-q+1}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ sunt elementele celor trei diagonale cu elemente nenule ale matricei $\boldsymbol{A}$. Vom considera pentru această temă matrice tridiagonale pentru care $\boldsymbol{p}$=$\boldsymbol{q}$=$\boldsymbol{2}$. O astfel de matrice are următoarea formă:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

În fișierele a.txt, b.txt, aplusb.txt, aorib.txt postate pe pagina laboratorului, sunt memorate, pentru 4 matrice rare. Matricea din fișierul b.txt este o matrice tridiagonală, pentru care se memorează următoarele elemente:

- ***n*** dimensiunea datelor, ***p, q*** – locul de unde încep diagonalele nenule
- cele ***n*** elemente ale diagonalei principale a matricei (vectorul ***a***), urmate de cele ***n-1 (n-p+1)*** elemente ale vectorului ***b*** apoi cele ***n-1 (n-q-1)*** elemente ale vectorului ***c***. Cei trei vectori sunt separați de linii goale.

Matricele care au cel mult 20 de elemente nenule pe fiecare linie sunt memorate în felul următor:

- ***n*** dimensiunea datelor,
- $a_{ij} \neq 0$, ***i, j*** - elementele nenule din matricea rară $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, indicii de linie și indicii de coloană ai respectivului element.
- se presupune că elementele nenule ale matricei sunt plasate aleator în fișier (nu sunt ordonate după indicii de linie sau de coloană, sau altfel).

Folosind fișierele atașate, să se citească dimensiunea matricelor și să se genereze structurile de date necesare pentru memorarea economică a matricelor rare (schema economică de memorare este descrisă mai jos).

Fie $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ două matrice rare cu elemente reale, matricea B fiind matrice tridiagonală. Folosind schemele de memorare rară să se calculeze:

- ***A+B*** suma matricelor,
- ***A*B*** produsul matricelor.

Să se verifice că suma/produsul matricelor din fișierele a.txt și b.txt este matricea din fișierul aplusb.txt/aorib.txt. Două elemente care au aceiași indici de linie și coloană ***(i, j)*** sunt considerate egale dacă $|c_{ij}-d_{ij}| < \varepsilon$. Pentru matricele rezultat se folosește schema economică de memorare a matricelor rare oarecare.

Observații: 1) La rezolvarea problemelor de mai sus să nu se recurgă la alocarea de matrice clasice și nici să nu se folosească o funcție ***val(i,j)*** care returnează pentru orice pereche de indici ***(i,j)*** valoarea elementului corespunzător din matrice.

2) La adunarea matricelor din a.txt cu b.txt rezultatul este o matrice cu maxim 23 elemente nenule pe linie. În cazul înmulțirii matricelor, gradul de umplere al matricei pe linii nu poate fi precizat dinainte.

3) Dacă în fișierele atașate apar mai multe valori cu aceiași indici de linie și coloană:

$\boldsymbol{val_1 , i, j}$

…

$\boldsymbol{val_2 , i, j}$

…

$\boldsymbol{val_k , i, j}$

o astfel de situație are următoarea semnificație:

$$\boldsymbol{a_{ij} = val_1 + val_2 + \cdots + val_k} \, .$$

Bonus (30pt): Să se scrie o funcție care să calculeze produsul a două matrice tridiagonale oarecare. Valorile $\boldsymbol{(p,q)}$ sunt oarecare şi diferite pentru fiecare matrice: $\boldsymbol{(p^A, q^A)}$ şi $\boldsymbol{(p^B, q^B)}$.

Memorarea matricelor rare (schema de memorare economică)

Matricele tridiagonale se memorează economic folosind trei vectori $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n-q+1}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ care memorează elementele de pe cele trei diagonalele nenule.

Un vector 'rar' este un vector cu 'puține' elemente nenule. Un asemenea vector se memorează eficient într-o structură care va reține doar valorile nenule și poziția în vector a respectivei valori:

$$\{(val \neq 0, i);\ x_i = val\}.$$

O matrice rară poate fi memorată economic ca un vector de vectori memorați rar – fiecare linie a matricei se memorează într-un vector rar.

Exemplu:

Matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{102.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{2.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{3.5} & \mathbf{104.88} & \mathbf{1.05} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.33} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{1.3} & \mathbf{0.0} & \mathbf{101.3} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.73} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{1.5} & \mathbf{102.23} \end{pmatrix}$$

se poate memora economic astfel:

{ { (2.5, 3) , (102.5, 1)},
{ (3.5, 1), (0.33, 5),(1.05, 3), (104.88, 2)},
{ (100.0, 3},
{ (1.3, 2) , (101.3, 4)},
{ (1.5, 4), (0.73, 1), (102.23, 5)} }.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{102.5} & \mathbf{2.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{3.5} & \mathbf{104.88} & \mathbf{1.05} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{1.3} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.33} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.73} & \mathbf{101.3} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{1.5} & \mathbf{102.23} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} \mathbf{102.5} \\ \mathbf{104.88} \\ \mathbf{100.0} \\ \mathbf{101.3} \\ \mathbf{102.23} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{2.5} \\ \mathbf{1.05} \\ \mathbf{0.33} \\ \mathbf{0.0} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \mathbf{3.5} \\ \mathbf{1.3} \\ \mathbf{0.73} \\ \mathbf{1.5} \end{pmatrix}, \quad p = 2, \; q = 2$$