Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv $u > 0$, de forma $u = 10^{-m}$, astfel ca:
$$1.0 +_c u \neq 1.0$$
unde prin $+_c$ am notat operaţia de adunare efectuată de calculator. Numărul u poartă numele de *precizia maşină*.

2. Operaţia $+_c$ este *neasociativă*: fie numerele reale $a = 1.0$, $b = u/10$, $c = u/10$, unde u este precizia maşină calculată anterior. Să se verifice că operaţia de adunare efectuată de calculator nu este asociativă, i.e.:
$$(a +_c b) +_c c \neq a +_c (b +_c c).$$
Găsiţi un exemplu pentru care operaţia $\times_c$ este neasociativă.

3. **Aproximarea funcţiei tangenta**

   Implementaţi următoarele două metode de aproximare a valorii funcţiei tangentă: folosind metoda fracţiilor continui şi o aproximare polinomială. Să se aplice aceste metode de aproximarea funcţiei tan, pentru argumente $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pentru valori ale lui x care nu sunt în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se foloseşte periodicitatea funcţiei tangenta (se face o împărţire cu rest) şi antisimetria, $\tan(x) = -\tan(-x)$. Valorile lui x multiplu de $\frac{\pi}{2}$ trebuie tratate separat.

   Să se compare valoarea funcţiei tangenta obţinută prin cele două metode descrise mai jos cu valoarea furnizată de tangenta implementată în biblioteca matematică a limbajului de programare pe care îl folosiţi. Afişaţi $|\tan(x) - \text{my\_tan}(x)|$.

   Generaţi 10.000 de numere in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\{x_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); i = 1, 10.000\}$. Folosiţi cele două metode descrise mai jos pentru calculul valorii funcţiei tangentă. Comparaţile din punct de vedere a erorii de calcul ($|\tan(x) - \text{my\_tan}(x)|$) şi al timpului de calcul (al celor 10.000 de valori).

Aproximarea funcţiei tangenta folosind fracţii continue

O fracţie continuă are următoarea formă:

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_5}{b_5 + \cdots}}}}}$$

sau, pentru economie de spaţiu, se preferă notaţia:

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\ \frac{a_2}{b_2 +}\ \frac{a_3}{b_3 +}\ \frac{a_4}{b_4 +}\ \frac{a_5}{b_5 +}\ \cdots$$

În formulele de mai sus şirurile a_n şi b_n pot fi funcţii de x.

Funcţia tan poate fi reprezentată ca fracţie contiună astfel:

$$\tan x = \frac{x}{1+}\ \frac{(-x^2)}{3+}\ \frac{(-x^2)}{5+}\ \frac{(-x^2)}{7+}\cdots$$

Cum se aproximează o fracţie continuă?

$$f \approx f_n = \frac{A_n}{B_n}$$

unde A_n şi B_n se calculează după recurenţele:

$$\begin{aligned} &A_{-1} = 1 \quad , \quad A_0 = b_0 \\ &A_j = b_j A_{j-1} + a_j A_{j-2} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_{-1} = 0 \quad , \quad B_0 = 1 \\ &B_j = b_j B_{j-1} + a_j B_{j-2} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Cea mai bună metodă de a evalua fracţii continue pare să fie *metoda lui Lentz modificată*. Fie:

$$C_j = \frac{A_j}{A_{j-1}} \quad , \quad D_j = \frac{B_{j-1}}{B_j}$$

vom calcula f_j folosind formula:

$$f_j = C_j D_j f_{j-1}.$$

Pentru C_j şi D_j avem următoarele recurenţe:

$$C_j = b_j + \frac{a_j}{C_{j-1}} \quad ,$$

$$D_j = \frac{1}{b_j + a_j D_{j-1}} \ .$$

Valorile iniţiale de la care pornesc recurenţele de mai sus sunt:

$$C_0 = b_0 \quad , \quad D_0 = 0 \quad , \quad f_0 = b_0.$$

Pentru a evita împărţirile cu 0 în calculele de mai sus, numărătorii care sunt 0 vor fi înlocuiţi cu o valoare foarte mică ($mic = 10^{-12}$). Vom calcula f_j atâta timp cât diferenţa între doi termeni consecutivi ai şirului f este, în valoare absolută, mai mare decât un $\epsilon = 10^{-p}$ dat. Constanta ϵ reprezintă precizia cu care vrem să aproximăm funcţia tan şi este un număr citit de la tastatură şi/sau este parametru de intrare al funcţiei tan :

double my_tan(double x, double ϵ).

Cu aceste precizări, *algoritmul lui Lentz modificat* are următoarea structură:

$f_0 = b_0$; $mic = 10^{-12}$;
if ($f_0 = 0$) **then** $f_0 = mic$;
$C_0 = f_0$;
$D_0 = 0$;
$j = 1$;
do
  $D_j = b_j + a_j D_{j-1}$;
  if ($D_j = 0$) **then** $D_j = mic$;
  $C_j = b_j + \dfrac{a_j}{C_{j-1}}$;
  if ($C_j = 0$) **then** $C_j = mic$;
  $D_j = \dfrac{1}{D_j}$;
  $\Delta_j = C_j\, D_j$;
  $f_j = \Delta_j\, f_{j-1}$;
  $j = j + 1$;
while ($|\Delta_j - 1| \geq \epsilon$) ;

În algoritmul de mai sus, pentru calculul recurenţelor pentru C_j, D_j Δ_j şi f_j nu este necesară alocarea unor vectori ci doar a unei singure variabile pentru fiecare şir în parte (C, D, Δ, f), variabilă care este actualizată la fiecare pas.

Aproximarea funcţiei tangentă folosind polinoame

Pentru a aproxima funcţia tangentă se poate folosi următorul polinom, dedus folosind aproximarea cu serii MacLaurin a funcţiilor:

$$\tan(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 = x + P(x^2)x^3$$

Pentru a reduce timpul de calcul, coeficientii ce apar în formula de mai sus pot fi calculaţi o singură dată şi declaraţi ca atare în funcţia ce calculează polinomul de mai sus. Nu e necesar să scrieţi o funcţie separată pentru polinomul P ci folosiţi direct formula în funcţia de calcul a valorii aproximative a funcţiei tangete.

```
my_tan (x)
c1 = 0.33333333333333333;
c2=0.133333333333333333;
c3=0.053968253968254;
c4=0.0218694885361552;
x_2=x*x;
x_3=x_2*x;
x_4=x_2*x_2;// x_4=x_3*x;
return ...
```

Veţi constata că această formulă de aproximare funcţionează mai bine dacă $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Pentru a reduce argementele $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ în intervalul $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, se ţine cont de proprietatea de antisimetrie şi de următoarea relaţie:

$$\tan(x) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - x)} \quad , \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}).$$