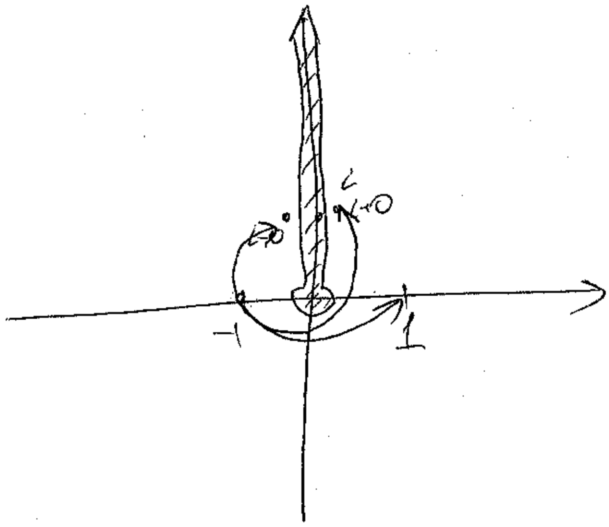
Задача 8

a) $\varphi(1) - ?$ $\qquad \varphi(-1) = e^{i\pi/3}$



$\varphi(z) = \sqrt[3]{z}$

$\varphi(1) = \left|\frac{\varphi(1)}{\varphi(-1)}\right| \varphi(1) e^{i\Delta \arg w}$

$\Delta \arg z = \pi; \quad \Delta \arg w = \frac{\pi}{3}$

$\left|\frac{w(1)}{w(-1)}\right| = 1 \quad w(1) = e^{i\pi/3}$

$\varphi(i+0) = \left|\frac{\varphi(i+0)}{\varphi(-1)}\right| \varphi(i+0) e^{i\Delta \arg w} = e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/2} = e^{\frac{5\pi}{6} i}$

$\Delta \arg z = \frac{3\pi}{2} \quad \Delta \arg w = \frac{\pi}{2}$

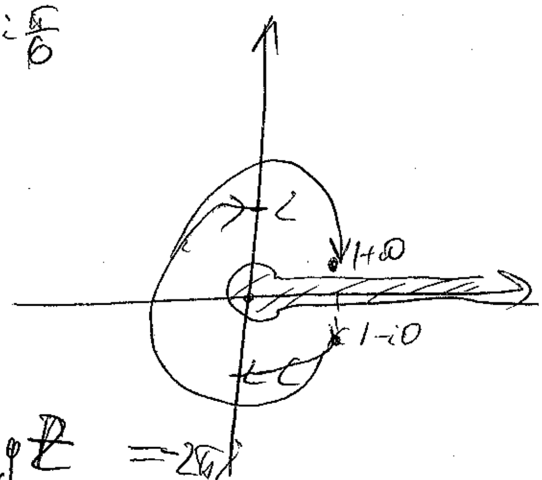
$\left|\frac{\varphi(i+0)}{\varphi(-1)}\right| \varphi(-1) = e^{\frac{i\pi}{3}}$

$\varphi(i-0)$

$\Delta \arg z = -\frac{\pi}{2} \quad \Delta \arg w = -\frac{\pi}{6}$

т.о. $\varphi(i-0) = e^{-\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{i\pi}{3}} \Rightarrow e^{\frac{i\pi}{6}}$

б) $\ln(1 - i0) = 0$



для т. $1+i0$

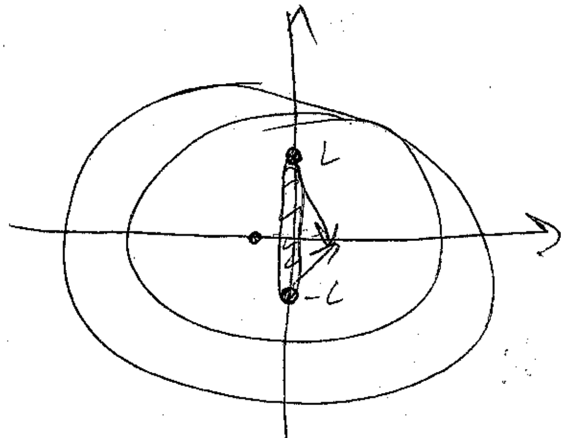
$\Delta \arg z = -2\pi$

$\varphi(1+i0) = 0 + \cancel{\ln\left|\frac{1+i0}{1-i0}\right|}^{\,0} + i \arg z = -2\pi i$

$\varphi(-i) = 0 + \cancel{\ln\left|\frac{-i}{1-i0}\right|}^{\,0} + i \arg z = -\frac{\pi}{2} i$

Задача 3

~~Форм~~ Внутри многоугольника разрез => найдем вычет на бесконечности



$\operatorname{Res}_{z\to\infty} f(z) = \sqrt{1+z^2} = z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}} \approx z\left(1+\frac{1}{2z^2}\right) \Rightarrow \cancel{\pm}\,\frac{1}{2}$

$I_1 = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z\to\infty} = \pi i$

$I_2 = \sqrt{1+z^2} = \big|$ внутри особенностей нет $\big| = 0$

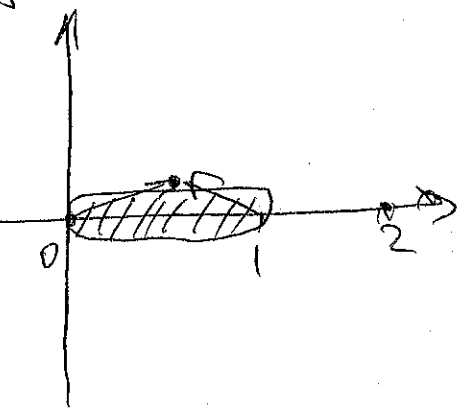
Рассмотрим разрез a:

$F(1) = \sqrt{2}$ - арифм. корень

Определим $\Delta\arg(z+i) = \frac{3\pi}{2}$ $\Delta\arg(z-i) = \frac{\pi}{2}$ => $\Delta\arg F = \pi$

$F(-1) = \sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2}$ - разрез подходит

Задача 4



$\varphi(z) = z^{\mu}(1-z)^{1-\mu}$

1) $\varphi(2) = \left|\frac{\varphi(2)}{\varphi(1/2)}\right| \cdot \cancel{\varphi(\tfrac{1}{2})}\, \cancel{e}\, e^{-\pi(1-\mu)} =$

$= 2^{\mu} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\, |(-1)|\, e^{i\pi\mu} = -2^{\mu} e^{i\pi\mu}$

2) $\varphi(-1) = \left|(-1)^{\mu} \cdot 2^{1-\mu}\right| \cdot e^{i\pi\mu} = 2^{1-\mu} e^{i\pi\mu}$

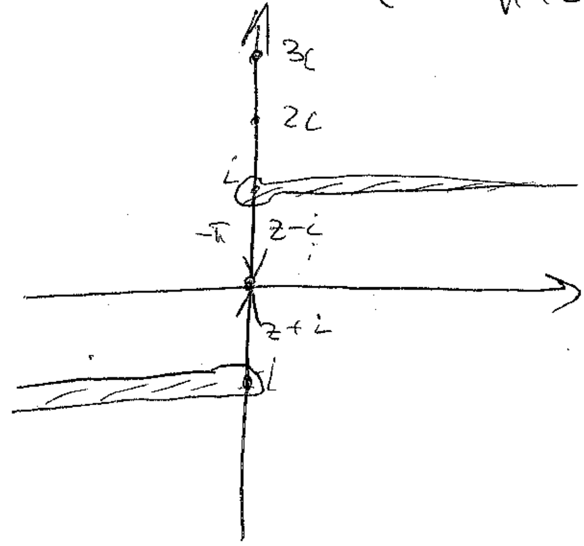
3) $\frac{\varphi(z)}{z} = z^{\mu-1}(1-z)^{1-\mu}$. Найдем значение функции при $x \to \infty$ (по действительной оси)

$w(z) = \sqrt{1+z^2}$

1) $w(z) = \left|\dfrac{w(z)}{w(z_0)}\right| e^{i\Delta\arg w}\, w(z_0)$

$\Delta\arg w = \dfrac{\overset{=-\pi}{\arg(z-i)} + \overset{=0}{\arg(z+i)}}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

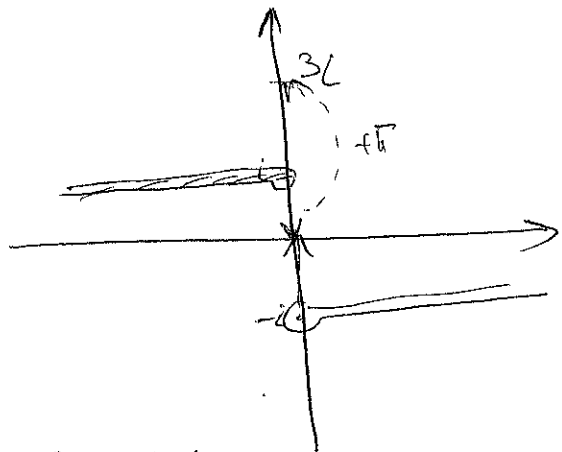
$w(z) = \dfrac{1}{\cancel{2}}\, 2 e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot 1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$



2) $w(z) = \left|\dfrac{w(z)}{w(z_0)}\right| e^{i\Delta\arg w}\, w(z_0)$

$\Delta\arg w = \dfrac{\pi}{3}$

$w(z) = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$



Задача 3

Покажем многозначность функции

Пусть $z-i = r_1 e^{i\theta_1}$ $z+i = r_2 e^{i\theta_2}$ $\Rightarrow f(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

Обходим вокруг $z=i$, но не $z=-i$:

$\sqrt{r_1}\, e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = \sqrt{r_1}\, e^{i\theta_1/2} e^{\pi i} = -\sqrt{r_1}\, e^{i\theta_1/2}$ – т.е.

$f(z) \to -f(z)$ – функция многозначна

Аналогично если обходим $z=-i$, но не $z=i$

обходим обе точки:

$\sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2+4\pi)/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} e^{2\pi i} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$ –

– функция однозначна

$$2)\ f(\varepsilon e^{3\pi i/4}) = \underbrace{\ln\left|\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2 e^{3\pi i/2}}}{\sqrt{2}}\right|}_{-\frac{\ln 2}{2}} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} \cancel{+\alpha_1 - \alpha_2}\right) =$$

$$= \pi i$$

при устремлении $\varepsilon e^{\frac{3\pi i}{4}} \to 0$ — число стремится к $\operatorname{Im} z$, т.е.

α_1 и $\alpha_2 \to 0$

$$3)\ f(\varepsilon e^{-3\pi i/4}) = \cancel{\ln\left|\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2 e^{-3\pi i/2}}}{\sqrt{2}}\right|}^{\to 0} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) = -\pi$$

<u>Задача 8</u>

$F(z) = \ln z$; $\xi = \frac{1}{z} \Rightarrow \cancel{\ln\xi}$

$$\ln(\xi) = \ln\frac{1}{\xi} = -\ln\xi$$

Тогда в производной точке: $F(\xi) = -\ln\left|\frac{\xi}{\xi_0}\right| - \ln\xi_0 + \Delta\arg\xi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-ция не вернется в прежнее значение, т.е. это точка ветвления (+)

$$f(z) = \ln\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow f(\xi) = \ln\frac{\frac{1}{\xi}-1}{\frac{1}{\xi}+1} = \ln\frac{1-\xi}{1+\xi}$$

при $\xi \to 0$ $\cancel{\ln \to}$ $\frac{1-\xi}{1+\xi} \to 1 \Rightarrow \ln 0$ (−)

$\cancel{\ln(z)}$ $F(z) = \sqrt{z^2-1}$, $\xi = \frac{1}{z} \Rightarrow F(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1} =$

$$= \xi\sqrt{1-\xi^2}$$

Тогда в производной точке $f(\xi) = \left|\frac{\xi\sqrt{\ }}{\xi_0\sqrt{\ }}\right| \xi_0\sqrt{\ }\, \xi_0\, e^{i\Delta\arg\xi}$ → период функции.

При $z_0=2\pi$ разложим функцию в ряд Лорана

$$F(z) = \frac{z^2(1+(iz-2\pi i))}{\cancel{1}-\frac{(z-2\pi)^2}{2}+\frac{(z-2\pi)^4}{24}-\cancel{1}} = -2\,\frac{z^2(1-2\pi i+iz)}{(z-2\pi)^2} =$$

$$= -2\left(\frac{z^2-4\pi z+4\pi^2}{(z-2\pi)^2} + \frac{4\pi z-4\pi^2}{(z-2\pi)^2} - \frac{z^2 i}{(z-2\pi)^2}(z-2\pi)\right) =$$

$$= -2\left[1-i(z-2\pi)+\frac{1}{z-2\pi}(4\pi+4\pi^2 i)+\ldots\right.$$

$\operatorname*{Res}_{z=2\pi} = -8\pi(1+\pi i)$ Аналогично и для $z=-2\pi$.

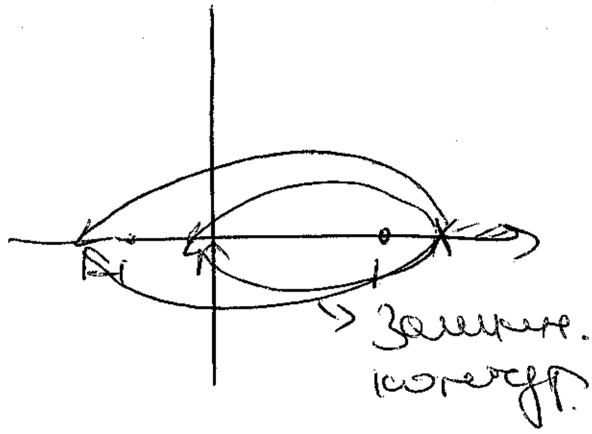
$$\operatorname*{Res}_{z=-2\pi} = -8\pi(\pi i-1)$$

$$C_{-3} = -8\pi(1+\pi i+\pi i-1) = -16\pi^2 i$$

ДЗ-4

<u>Задача 1</u> $I(x)=\int_a^x \frac{e^{i\pi x}dt}{x^2-1}$

$I_{\alpha_1}(x)-I_{\alpha_2}(x)=\int_C \frac{e^{i\pi x}dt}{x^2-1}$ - можно заменить на



Замкн. контур.

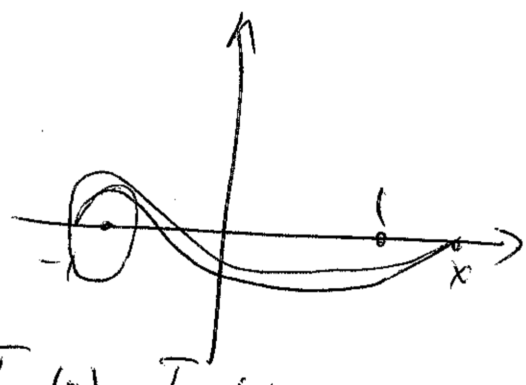
Очевидно при $x>0$ $I_{\alpha_1}-I_{\alpha_2}=0$

Поэтому: $I_{\alpha_1}-I_{\alpha_2}=2\pi i \operatorname*{Res}_{x=1} =$

$=2\pi i\cdot\frac{e^{i\pi}}{2}=-\pi i$

$I_{\beta_1}(x)-I_{\beta_2}(x)=\int_{C_1}\frac{e^{i\pi t}}{x^2-1}dt=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1}+\operatorname*{Res}_{z=-1}\right)=0$

б) Внутри контура только 1 точки при любом напр. обхода



$I_{\gamma_3}(x)-I_{\gamma_2}(x)=\int_C\frac{e^{i\pi x}dt}{x^2-1}=\pi i=I_{\gamma_4}(x)-I_{\gamma_3}(x)$

<u>Задача 2</u>

$F_\alpha(z)=\int_0^1\frac{t^\alpha}{1-zt}(1-t)^\alpha dt$

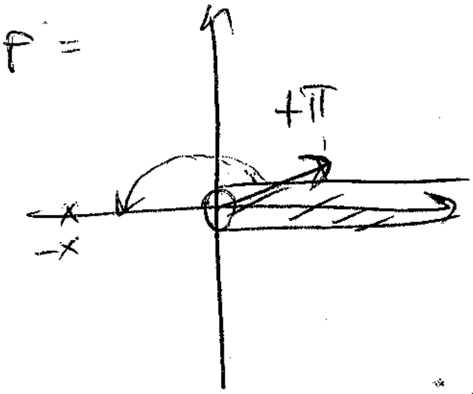
а) $\Delta_{12}=F_\alpha(x_1)-F_\alpha(x_2)=\int_{\Lambda_1}\frac{t^\alpha(1-t)^\alpha dt}{1-\cancel{x}t}-\int_{\Lambda_2}\frac{t^\alpha(1-t)^\alpha}{1-xt}dt=$

$=\int\frac{t^\alpha(1-t)^\alpha}{1-xt}dt=2\pi i\operatorname*{Res}_{t=\frac{1}{x}}=2\pi i\,\frac{(x-1)^\alpha}{x^{2\alpha+1}}$

Внутри контура 1 точка $z = i$ - простой полюс

$$I_1+I_2+I_3 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\ln(z)}{2i} = 2\pi i \frac{i\pi/2}{2i} = \frac{\pi^2 i}{2}$$

б) $$g = \ln f(z) = g(z_0) + \cancelto{0}{\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right|} + i\Delta\arg f =$$



$$= g(z_0) + i\pi$$

$$I_3 = I_1 + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

в) $$\frac{\pi^2 i}{2} = I_1\left(1 + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$I_1 = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{i\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{arctg}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{i\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0$$

Задача 7

$$I = \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)^{2-\alpha}}{x+1}\,dx$$

7

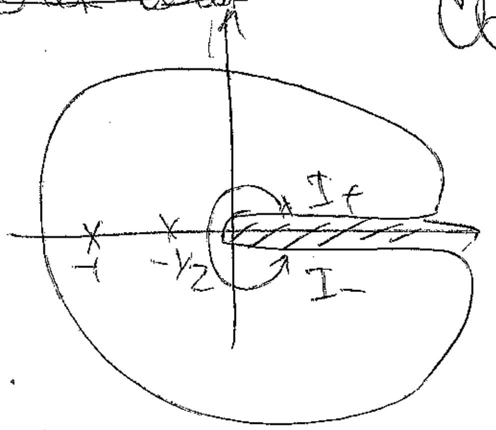
$$I=\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)^{2-\alpha}}{x+1}\,dx$$

Произведем замену $\frac{x}{1-x}=t$, чтобы перейти

к несобст. интегралу:

$$I=\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)^2}{(1-x)^\alpha(1+x)}\,dx=\int_0^\infty \frac{t^\alpha\,dt}{(t+1)^3(1+2t)}$$ – ~~очевидно, что~~

~~полюс ветв~~



Свяжем I_- и I_+, т.е.:

$$\oint = I\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)=\operatorname*{Res}_{z=-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1/2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1/2}=\left|\begin{matrix}\text{простой}\\ \text{полюс}\end{matrix}\right|=\frac{\left(-\frac12\right)^\alpha}{\left(\frac12\right)^3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}=\left|\begin{matrix}\text{полюс}\\ \text{3его порядка}\end{matrix}\right|=\frac12\lim_{t\to -1}\frac{d^2}{dt^2}\frac{t^\alpha}{(2t+1)}=$$

$$\sum\operatorname*{Res}_{z=-1,\,z=-1/2}=\frac12\left(\alpha(\alpha-1)(-1)^{\alpha-1}-2\alpha(\cancel{\alpha-1})^{\alpha-1}-2\alpha(-1)^{\alpha-1}-4(-1)^{\alpha-1}\right)+8\left(-\frac12\right)^\alpha=$$

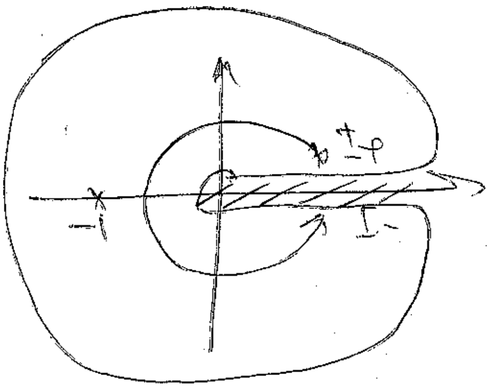
$$=e^{i\pi(\alpha-1)}\left(\frac12\alpha(\alpha-1)-2\alpha+4\right)+4\left(-\frac12\right)^\alpha\Big)=$$

$$=e^{i\pi\alpha}\left[e^{-i\pi}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{5\alpha}{2}+4\right)+2^{-\alpha+2}\right].$$

Искомый интеграл: $$I=\frac{2\pi i\,e^{i\pi\alpha}\left(e^{-i\pi}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{5\alpha}{2}+4\right)+2^{-\alpha+2}\right)}{1-e^{2\pi i\alpha}}.$$

(9)

$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}dx$



$I_- = \int_0^\infty \frac{\ln z + 2\pi i}{\sqrt[3]{z}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}(z+1)^2} =$

$= -I_+ e^{-\frac{2\pi i}{3}} - 2\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}} J_R$

$z=-1$ - полюс 2-го порядку:

$\mathrm{Res}_{z=-1} \frac{d}{dz}\left(\frac{\ln z}{z^{1/3}}\right) = \lim_{z\to -1} \frac{z^{-1/3} - \ln z\cdot \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}}}{z^{2/3}} = e^{-i\pi\frac{4}{3}}\left(1-\frac{i\pi}{3}\right)$

Окремо вирахуємо $J_R = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$, тоді.

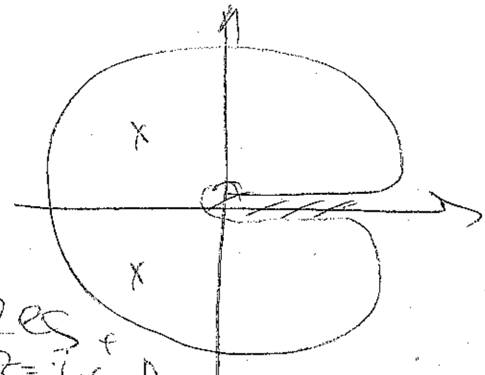
$e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{4\pi^2 i\sqrt{3}}{9} = I(1-e^{2\pi i/3}) - 2\pi i\, e^{-i\pi\frac{4}{3}}\left(1-\frac{1}{3}i\pi\right)$

(10)

$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{dx}{x^2+1}$, заміна $\frac{1-x}{x}=y$.

Маємо: $\int_0^\infty \frac{\ln y}{1+(y+1)^2} = \int_0^\infty \frac{\ln y\, dy}{(y+1+i)(y+1-i)}$

Доповнимо інтеграл в комплексну площину. Возведемо логарифм в квадрат.

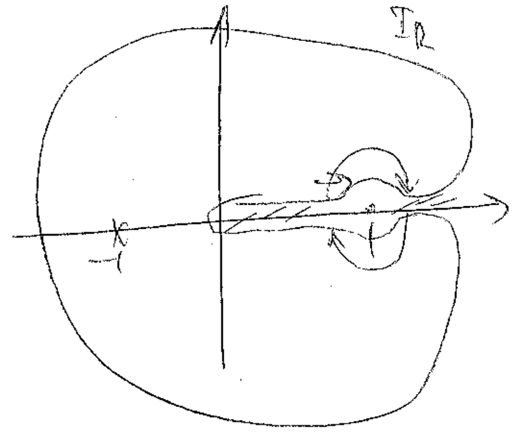


$\oint = -4\pi i I + 4\pi^2 \int_D = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=i-1} + \mathrm{Res}_{z=-i-1}\right)$

$\mathrm{Res}_{z=i-1} \frac{\ln^2[-1-i]}{-2i} = \frac{\ln\sqrt{2}\, e^{5i\pi/4}}{-2i}$

$\mathrm{Res} = \frac{\ln\sqrt{2}\, e^{3\pi/4}}{2i}$

(13) $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2-1}$



$\oint = I_R + I_+ + I_- + I_{\varepsilon_+} + I_{\varepsilon_-} =$

$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1}$

$z=-1$ - простой полюс. $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -\frac{i}{2}$

$I_{\varepsilon_+} = \left| \begin{matrix} x = 1 + re^{i\varphi} \\ dx = ire^{i\varphi}d\varphi \end{matrix} \right| = \int_\pi^0 \frac{(re^{i\varphi}+1)^{1/2}}{(re^{i\varphi}+1)^2-1}\, ire^{i\varphi}d\varphi =$

$= \frac{i}{2}\int_\pi^0 \frac{r^2e^{2i\varphi}+2re^{i\varphi}}{r^2e^{2i\varphi}+2re^{i\varphi}}\,d\varphi = -\frac{\pi i}{2}$

утв $I_{\varepsilon_-} = -I_{\varepsilon_+} \Rightarrow$ $2I = -2\pi i \cdot \frac{i}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$

(13) 93/3

$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x^6}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{a}{6}-1}}{1-t}\,dt$

$\oint \frac{t^{\frac{a}{6}-1}}{1-t} = 0 = I_+ + I_- + I_{\varepsilon_+} + I_{\varepsilon_-}$

$I_+ + I_- = I\left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{a}{6}-1\right)}\right)$

Определим

$I_{\varepsilon_+} = -\int_\pi^0 i\,d\varphi\, e^{2\pi\left(\frac{a}{6}-1\right)i}\,d\varphi = i\pi e^{i2\pi\left(\frac{a}{6}-1\right)}$

$I_{\varepsilon_-} = -i\pi e^{i2\pi\left(\frac{a}{6}-1\right)}$