РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим линейное уравнение эллиптического типа с переменными коэффициентами в случае двух пространственных переменных

$$\lambda(x,z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\varphi(x,z)=0. \qquad (1)$$

Обозначая

$$f(x,z)=\frac{\varphi(x,z)}{\lambda(x,z)},$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f(x,z)=0. \qquad (2)$$

Запишем краевые условия I рода, задавая на границах простейшей прямоугольной пространственной области $0<x<l,\ \ 0<z<s$ известные функции

$$\begin{aligned} &u(0,z)=\mu_1(z),\ \ u(l,z)=\mu_2(z),\\ &u(x,0)=\mu_3(x),\ \ u(x,\ s)=\mu_4(x) \end{aligned}.$$

При произвольной функции в правой части уравнения (произвольном источниковом члене) решение (2) может быть эффективно найдено численными методами, в частности, разностными. Среди них наиболее популярны следующие методы:

1. Метод установления с его двумя реализациями
   1.1. Продольно-поперечная схема.
   1.2. Локально-одномерный метод
2. Матричная прогонка.

Для применения метода установления исходное эллиптическое уравнение (2) заменяется параболическим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f(x,z), \qquad (3)$$

при этом переменную t можно рассматривать как время.

Выполняя расчеты по отысканию функции $u(x,z,t)$ в (3) до того момента времени, когда будет соблюдено с некоторой точностью равенство $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$, получим решение (2).

Для уравнения (3) надо поставить дополнительно начальное условие, т.е. при $0<t<T_0$

$$u(x,z,0)=\mu(x,z).$$

В качестве $\mu(x,z)$ можно задать просто константу, сообразуясь с физическим смыслом решаемой задачи, $\mu(x,z)=c$.

Опишем особенности построения и решения разностных схем для (3) при применении методов 1.1 и 1.2.

1. Продольно - поперечная схема

В области интегрирования уравнения $G(x,z,t)$ строится сетка $\omega_{h_1 h_2 \tau}=\{x_n, z_k, t_m : x_n = n h_1, z_k = k h_2, t_m = m\tau, n=0...N, k=0...K, m=0...M\}$, в виде трех взаимно перпендикулярных систем параллельных линий, где $h_1, h_2\,\tau$ - шаги по переменным x, z, t, соответственно (см. рисунок, на котором представлена пространственная часть сетки). Точки пересечения этих систем линий образуют узлы. Шаги для простоты выбраны постоянными по каждой координате. Для составления схемы, которая носит название продольно- поперечной, вводят полуцелый слой $\bar{t}=t_m+\dfrac{\tau}{2}$.

Схема, записанная для узла (n,k), имеет вид

$$\frac{\bar{y}_{nk}-y_{nk}}{0.5\tau}=A_1\bar{y}_{nk}+A_2 y_{nk}+\bar{f}_{nk}, \tag{4}$$

$$\frac{\hat{y}_{nk}-\bar{y}_{nk}}{0.5\tau}=A_1\bar{y}_{nk}+A_2\hat{y}_{nk}+\bar{f}_{nk}, \tag{5}$$

причем разностные операторы A_1, A_2 действуют каждый по своему направлению (по своей координате) и определяются выражениями

$$A_1 y_{nk} = \frac{1}{h_1^2}\left(y_{n-1,k} - 2y_{nk} + y_{n+1,k}\right),$$

$$A_2 y_{nk} = \frac{1}{h_2^2}\left(y_{n,k-1} - 2y_{nk} + y_{n,k+1}\right),$$

$$\bar{f}_{nk} = f(x_n, z_k, t_m + \frac{\tau}{2}).$$

Здесь $1 \le n \le N-1,\ 1 \le k \le K-1,\ 0 \le m \le M-1.$

Схема (4), (5) реализуется следующим образом. Вначале вычисляют решение на полуцелом слое согласно (4). В системе линейных уравнений (4) с трехдиагональной матрицей неизвестными являются величины $\bar{y}_{nk}$, которые находят методом обычной одномерной прогонки по индексу n (по координате x) для каждого фиксированного значения индекса k, т.е. прогонка выполняется $(K-1)$ раз. При найденном решении $\bar{y}_{nk}$ система (5) также является линейной системой уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными выступают $\hat{y}_{nk}$ Решение $\hat{y}_{nk}$ находят одномерными прогонкми по индексу k (по координате z) для каждого индекса n, т.е. прогонка выполняется $(N-1)$ раз. Всего же надо выполнить $(N-1)\times(K-1)$ одномерных прогонок.

Относительно аппроксимации и устойчивости продольно-поперечной схемы следует отметить, что схема (4), (5) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части и аппроксимирует задачу на равномерных сетках с погрешностью $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

2. Локально-одномерный метод

Продольно-поперечная схема не обобщается на случай числа измерений в уравнении больше двух.

Более общим вариантом построения и решения разностной схемы является локально-одномерный метод. В данном методе решается серия одномерных задач по каждому направлению. Применительно к уравнению (3) в чисто неявном варианте схема выглядит следующим образом.

$$\frac{y_{nk} - y_{nk}}{\tau} = A_1 y_{nk} + \frac{\bar{f}_{nk}}{p}, \qquad (6)$$

$$\frac{\hat{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} = A_2 \hat{y}_{nk} + \frac{\bar{f}_{nk}}{p}. \qquad (7)$$

Здесь p - количество измерений в уравнении. Для (3) величина p =2. Схема естественным образом обобщается на произвольное количество измерений.

Системы разностных уравнений (6) и (7) решаются последовательно, так же, как это было описано в случае предыдущего метода. Для реализации (6) применяются одномерные прогонки по индексу n (по координате x) для **каждого** фиксированного значения индекса k. При этом находится сеточная функция y_{nk} Затем определяется решение $\hat{y}_{nk}$ одномерными прогонками по индексу k (по координате z) для **каждого** индекса n. Таким образом, надо сделать $(N-1)\times(K-1)$ одномерных прогонок.

В целом схема безусловно устойчива и имеет точность $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

В случае трех измерений, p =3, имеем следующую вычислительную схему

$$\frac{\hat{y}^{(k)} - y^{(k)}}{\tau} = A_k \hat{y}^{(k)} + \frac{f}{p},$$
$$y^{(1)} = y,$$
$$y^{(2)} = \hat{y}^{(1)},$$
$$y^{(3)} = \hat{y}^{(2)},$$
$$\hat{y} = \hat{y}^{(3)}.$$

Причем здесь y - это y_{nkl}, полученное на предыдущем слое. На первом слое в самом начале счета $y_{nkl} = \mu(x, z, u, 0)$.

В случае квазилинейного уравнения приходится организовывать итерационную процедуру, которую следует выполнять на каждом промежуточном слое.

Литература

1. Численные метод. Книга 1, Численный анализ, Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., 2013.

2. Численные методы. Книга 2, Методы математической физики, Калиткин Н.Н., Корякин П.В., 2013.

3. Численные методы математической физики. Самарский А.А., Гулин А.В., 2000.

Приложение

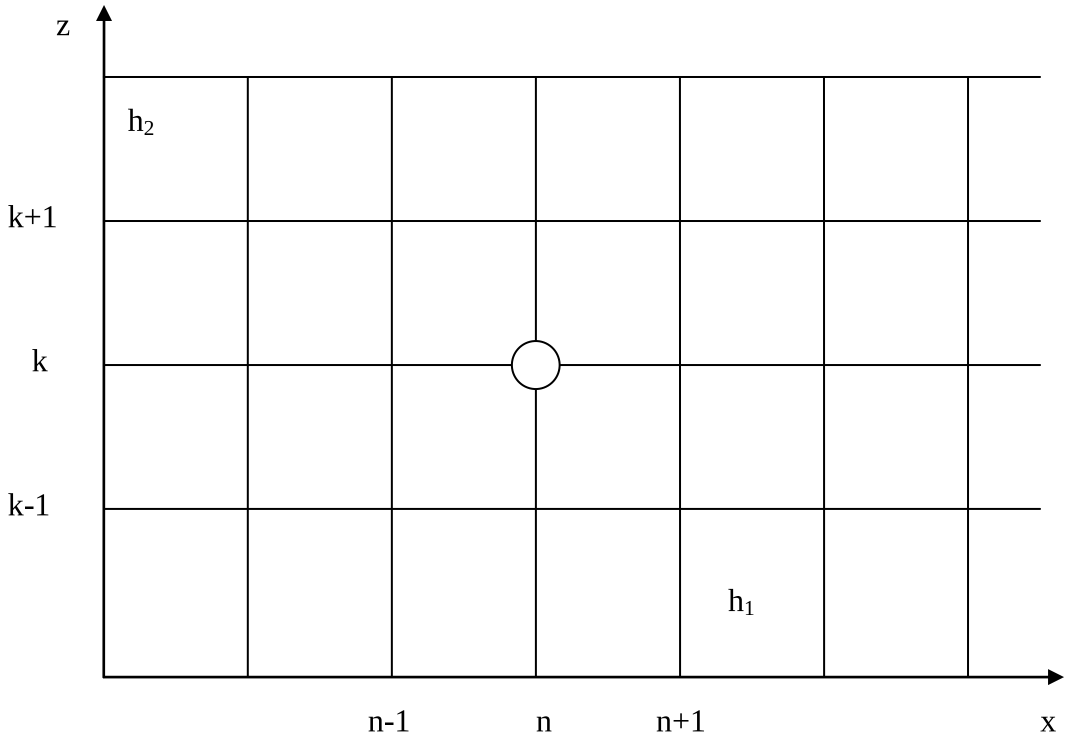

Рисунок.

Один слой сетки для построения разностной схемы

$$\omega_{h_1 h_2 \tau} = \{x_n, z_k, t_m : x_n = n h_1, z_k = k h_2, t_m = m\tau, n = 0...N, k = 0...K, m = 0...M\}$$

при фиксированном значении $t_m = m\tau$