ЗАДАНИЕ

на лабораторный практикум по дисциплине

«Основы научных исследований»

Тема: Сравнительный анализ разностной и вероятностной вычислительных моделей для исследования дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа.

Цель работы. Получение навыков проведения научно-исследовательской работы на примере применения технологии вычислительного эксперимента при численном моделировании задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа.

Исходные данные.

Вариант 1. Математическая модель в самом общем квазилинейном виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)=0.$$

Более простые варианты модели.

Вариант 2. Линейная математическая модель с переменными коэффициентами

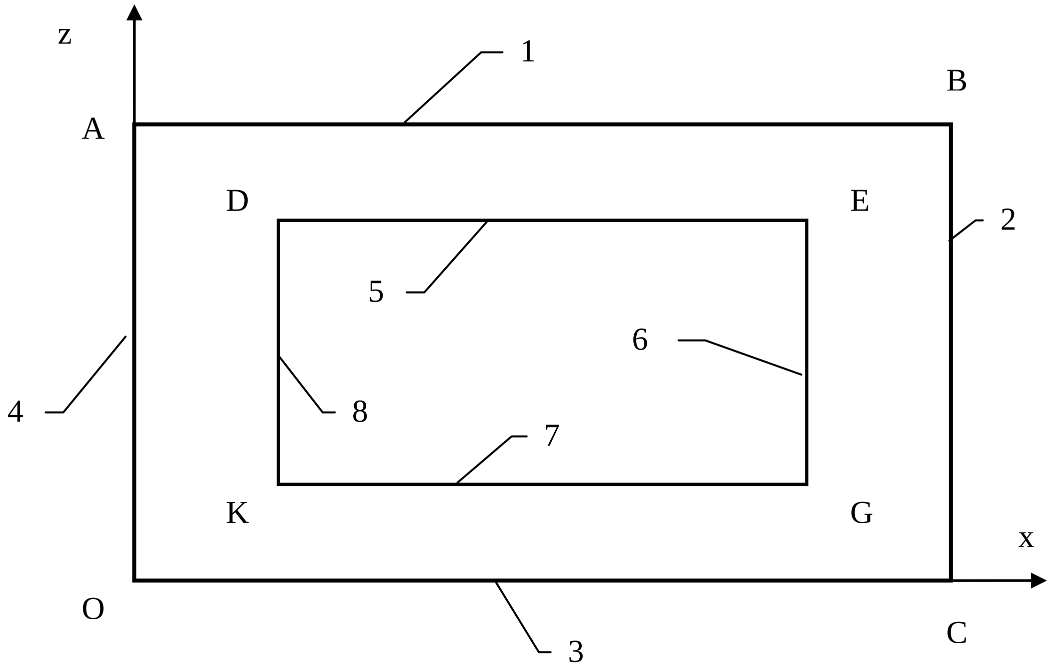
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,z)=0.$$

Вариант 3. Математическая модель с постоянными коэффициентами $k(x,z)\equiv k$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{f(x,z)}{k}=0.$$

На границах 1-8 области интегрирования, образуемой двумя вложенными прямоугольниками, задаются три варианта **краевых условий (КУ)** – I, II и III родов. Все размеры области заданы, т.е. заданы координаты точек A,B,C,D,E,G,K (см. рисунок).

Указанные краевые условия на поверхностях 1-8 можно ставить в разных комбинациях. Для примера, рассмотрим 3 варианта постановки краевых условий на внешнем контуре, т.е. на прямоугольнике OABC, а именно, на границах 1-4. Пусть для этого прямоугольника размеры OC=a, OA=b. Тогда на границах 4, 2, 3 и 1 краевые условия могут быть поставлены следующим образом, соответственно.



Вариант 1 (граница 4 – КУ II рода, остальные границы- КУ III рода):

$$\begin{cases} x=0,\ \textit{граница}\,4,\ -k(u(0,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=F_0, \\ x=a,\ \textit{граница}\,2,\ \ -k(u(a,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2\,(u(a,z)-u_0), \\ z=0,\ \textit{граница}\,3,\ \ -k(u(x,0))\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_3\,(u(x,0)-u_0), \\ z=b,\ \textit{граница}\,1,\ \ -k(u(x,b))\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_4\,(u(x,b)-u_0) \end{cases}$$

Вариант 2 все КУ –III рода):.

$$\begin{cases} x=0,\ -k(u(0,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_1\,(u(0,z)-u_0), \\ x=a,\ \ -k(u(a,z))\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2\,(u(a,z)-u_0), \\ z=0,\ \ -k(u(x,0))\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_3\,(u(x,0)-u_0), \\ z=b,\ \ -k(u(x,b))\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_4\,(u(x,b)-u_0) \end{cases}$$

Вариант 3 (все КУ –I рода):

$$\begin{cases} x=0, \;\; u(0,z)=u_0, \\ x=a, \;\;\; u(a,z)=u_0, \\ z=0, \;\;\; u(x,0)=u_0, \\ z=b, \;\;\; u(x,b)=u_0. \end{cases}$$

Аналогично ставятся краевые условия на внутренней границе прямоугольника KDEG.

Еще раз отметим, что можно написать и многие другие комбинации краевых условий на поверхностях 1-8, ориентируясь на написанные выше условия.

Значения коэффициентов задачи (все размерности согласованы).

В квазилинейном уравнении $k(u)=a_1(b_1+c_1 u^{m_1})$, Вт/см К.

a_1=0.0134, b_1=1, c_1=4.35 10^{-4}, m_1=1,

В линейном варианте $k(x,z)$ задается пользователем аналитически или в виде двумерной таблицы

Параметры α_i варьируются в диапазоне 0.05-1.0 Вт/см^2 К, (i=1,2,3,4).

Для отладки программы геометрические размеры внешнего прямоугольника можно принять $a=b=$ 10 см, размеры внутреннего прямоугольника задать, ориентируясь на указанные.

Можно принять значение $u_0=$300К, поток при $x=0$ F_0=30 Вт/см^2 .

В качестве примера функции источников можно взять распределение вида $f(x,z)=f_0\, e^{-\beta(x-x_0)^2(z-z_0)^2}$, параметры $f_0,\ \beta$ варьируются исходя из условия, чтобы максимум решения уравнения - функции $u(x,z)$ не превышал 3000К. Коэффициент β - положительный, координаты x_0, z_0 центра распределения функции $f(x,z)$ задаются пользователем.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы**).**

Сформулированная математическая модель описывает двумерное температурное поле $u(x,z)$ в тонкой прямоугольной пластине с внешними размерами a x b. Температура по толщине пластины (третьей координате) принимается постоянной. Функция $f(x,z)$ представляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Излучение может представлять собой, например, узконапрвленный луч лазера. Краевые условия в варианте 1 соответствуют нагружению объекта тепловым потоком F_0 с одной стороны $x = 0$, постоянным вдоль координаты z, и отводу тепла с трех других сторон при заданной температуре окружающей среды u_0 . Можно считать, что пластина по этим границам охлаждается воздухом или водой, температура которых равна u_0, с коэффициентами теплоотдачи α_i, в общем случае отличающимися для каждой из сторон. Функция $k(x,z)$ является коэффициентом теплопроводности материала стержня.

Результаты работы.

Модуль 1 (6-я неделя).

1. Выбрать разностный метод и разработать алгоритм и программу дли численного исследования модели в одном из вариантов уравнения и краевых условий. Варианты краевых условий могут быть любыми, не противоречащими физическому смыслу задачи. Например, нельзя поставить на всех 8 границах КУ II рода, соответствующее при определенных знаках у потока подводу тепла к пластине. Учитывая наличие объемных источников тепла, хотя бы на одной границе надо принять, что тепло отводится от объекта.

Модуль 2 (11-я неделя).

1. Разработать алгоритм и программу дли численного исследования модели вероятностным методом для тех же вариантов уравнения и краевых условий. Рассмотреть случай определения решения уравнения только в одной точке, т.е. расчета функции $u(x,z)$ в точке (x_0, z_0).

2. Оптимизировать разработанные алгоритмы, проведя серии вычислительных экспериментов.

3. Дать сравнительный анализ разностного и вероятностного методов и реализующих их алгоритмов, указать условия и области их преимущества относительно друг друга.

Модуль 3 (17-я неделя).

1. Подготовить научную статью по результатам исследований, оформленную строго по правилам редакции выбранного журнала.

Можно ориентироваться на журнал «Вестник МГТУ. Серия: Приборостроение».