# Первая контрольная 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Белова Ю. С.,
а также других источников)

31 марта 2021 г.

Темы задач. Кстати, конкретно про асимптотику суммы тут ничего нет, там всё-таки как-то трудно пером общий случай описать, ну и про определённые интегралы - тоже пусто, из фактов только таблица первообразных и интегрирование по частям, думаю уж, упустить можно. Пока есть время - можете предложить, что стоит добавить помимо всего, что есть.

## Содержание

# 1 Несобственный интеграл. Равномерная сходимость интегралов.

**Определение 1.** Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \omega)$ (где $\omega$ может быть действительным числом или $+\infty$) и интегрируема на любом промежутке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке. Величина

$$\int_a^\omega f(x)dx := \lim_{b \to \omega} \int_a^b f(x)dx,$$

если указанный предел существует, называется *несобственным интегралом* от функции $f$ по промежутку $[a, \omega)$. Если указанный предел существует, то говорят, что интеграл *сходится*, и *расходится* в противном случае.

*Утверждение* 1. (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Если функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, лежащем внутри, то интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $B \in [a, \omega)$ так, что при юлбых $b_1, b_2 \in [a, \omega)$ таких, что $B < b_1, b_2$ имеет место соотношение

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

**Определение 2.** Про несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ говорят, что он *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f|(x)dx$.

*Примечание* 1. Нетрудно заметить, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

*Утверждение* 2. Если функция $f$ удовлетворяет условиям первого определения и неотрицательна на $[a, \omega)$, то несобственный интеграл существует в том и только том случае, когда функция

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)dx$$

ограничена на $[a, \omega)$.

**Теорема 1.** *(Теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом его отрезке. Если на данном промежутке выполнено $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла по $g$ следует сходимость интеграла по $f$, и наоборот.*

*Примечание* 2. Если к функциям из теоремы выше можно добавить такое условие: существуют две положительные константы $c_1$, $c_2$, что $c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)$, то с учётом линейности несобственного интеграла, можно заключит, что интегралы по функциям $f$ и $g$ сходятся или расходятся одновременно.

**Определение 3.** Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.*

*Утверждение* 3. (Признак Абеля-Дирихле сходимости интеграла). Пусть $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ - функции, определённые на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируемые на любом его отрезке. Пусть $g$ - монотонная функция.

Тогда для сходимости несобственного интеграла

$$\int_a^\omega (f \cdot g)(x)dx$$

достаточно, чтобы выполнилась либо пара условий

- интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится;
- функция $g$ ограничена на $[a, \omega)$,

либо пара условий

- функция $\mathcal{F} = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, \omega)$;
- функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \to \omega$, $x \in [a, \omega)$.

**Определение 4.** Несобственный параметрический интеграл $\int_a^\omega f(x, \alpha)dx$ называется *равномерно сходящимся* на множестве $E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t \in (a, \omega)\, \forall \xi \in [t, \omega)\, \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_\xi^\omega f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 2.** *(Признак Вейерштрасса). Если подынтегральная функция в параметрическом интеграле может быть ограничена функцией одной переменной сверху, и интеграл от данной функции сходится, то и изначальный интеграл сходится.*

**Теорема 3.** *(Признак Дирихле). Достаточное условие равномерной сходимости интеграла вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$. Если выполнены следующие условия:*

- *первообразная $f(x)$ ограничена;*
- *$g(x)$ дифференцируема, больше нуля, её производная отрицательна;*
- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

*Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.*

**Теорема 4.** *(Критерий Коши). Параметрический интеграл сходится тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t \in (a, \omega) : \forall \xi_1, \xi_2 \in [t, \omega)\, \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon.$$

## 2 Кривые.

**Определение 5.** *Кривые в* $\mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

*Утверждение* 4. (Длина кривой). Если непрерывная кривая $\gamma$ задана параметрически: $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, ..., то можно найти её длину:

$$\int_a^b \sqrt{(f_1')^2(x) + \ldots + (f_n')^2(x)}dx.$$

Естественно, все $f_i$ должны быть дифференцируемы на нужном промежутке.

*Примечание* 3. Ну а площадь - сам бог велел использовать интегралы (наверное).

# 3 Многомерные функции.

**Определение 6.** $f$ *дифференцируема* в точке $(x_1, \ldots, x_m)$, если $f(y) = f(x) + L(y-x) + o(||x-y||)$, где $L$ - линейное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, причём однородное, то есть, $L(0) = 0$.

**Определение 7.** Это линейное отображение $L$ называется *дифференциалом* в точке $x$.

**Определение 8.** *Частная производная.* Пусть имеется $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда частная производная по $x_k$, $f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0) = g(x), g'(x_k^0)$. $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x^0} := g'(x_k^0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\ldots, x_k^0+\varepsilon, \ldots) - f(\ldots)}{\varepsilon}$.

**Определение 9.** *Производная по направлению.* Пусть направление задаётся $e \in \mathbb{R}^n$, $||e|| = 1$, $f$ - дифференцируема по направлению $e$, если $g(t) = f(x^0 + te)$, $t \in \mathbb{R}$ и существует $g'(0)$, то производная по направлению $e$ - $g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0+te) - f(x^0)}{t}$.

**Теорема 5.** *$f : G \to \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, $f$ - гладкая в окрестности $x^0$ (верхние индексы), $y^0 = f(x^0)$, $g : V_{f(x^0)} \to \mathbb{R}^k$, гладкая в $f(x^0)$, для $f$ и $g$ существуют линейные операторы $A$ $(x_0)$ и $B$ $(f(x_0))$. Тогда $g(f(x))$ - гладкое отображение в $x_0$ с линейным оператором $BA : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.*

**Теорема 6.** *Пусть у нас есть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $V_{x_0} \to \mathbb{R}^m$, причём существуют все частные производные в $V_{x^0}$ и они непрерывные в $x^0$. Тогда $f$ дифференцируема в точке $x^0$.*

**Теорема 7.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f$ - гладкая на $G$ - открытое множестве, причём частные производные сущуствуют и непрерывны в каждой точке (условно говоря, $f$ гладкая). Предположим, что точка $x^0$ - локальный максимум или минимум. Тогда* $\operatorname{grad} f|_{x^0} \equiv 0$.

**Теорема 8.** *Если функция $E \to \mathbb{R}$, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то в этой точке функция имеет все частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде*

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m.$$

# 4 Дифференцирование.

**Теорема 9.** *Если отображение $f_1 : E \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : E \to \mathbb{R}^n$, определённые на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то их линейная комбинация также является дифференцируемым в этой точке отображением, причём имеет место равенство*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) = (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x).$$

*Примечание* 4. Про произведени и частное - тоже точно так же, как и в случае с одномерными функциями.

**Определение 10.** Пусть $x \in \mathbb{R}^m$. Через $T\,\mathbb{R}^m_x$ обозначим совокупность векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^m$. Это векторное пространство называют *касательным пространством* к $\mathbb{R}^m$ в точке $x$.

**Теорема 10.** *(Дифференцирование композиции). Если отображение* $f : X \to Y$ *множества* $x \subset \mathbb{R}^m$ *в множество* $y \subset \mathbb{R}^n$ *дифференцируемо в точке* $x \in X$, *а отображение* $g : Y \to \mathbb{R}^k$ *дифференцируемо в точке* $y = f(x) \in Y$, *то композиция* $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ *этих отображений дифференцируема в точке* $x$, *причём дифференциал* $d(g \circ f) : T\,\mathbb{R}^m_x \to T\,\mathbb{R}^k_{g(f(x))}$ *композиции равен композиции дифференциалов.*