Матанализ. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Белова Ю. С.,
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по матанализу.

Содержание

1 Лекция 1.

В этом чеместре мы будем занимать анализом функций от многих переменных, то есть, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, и если $m = 1$, то такая функция называется функцией многих переменных.

Определение 1. *Кривые в* $\mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Основная проблема состоит в том, что образ может выглядеть очень и очень сложно, потому нам хотелось бы более точно понять, как всё это устроено. Потому начнём рассматривать *спрямляемые кривые*, то есть, кривые с конечной длиной. Введём следующее определение:

Определение 2. *Вариация функции* - $V_f([a, b]) = \sup_{a=x_0\leq x_2\leq\ldots\leq x_n=b} \sum_{k=0} |f(x_{k+1})-f(x_k)|$.

$(x - y)$ - евклидово расстояние.

Утверждение 1. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна, то $V_f([a, b]) = |f(a) - f(b)|$.

Утверждение 2. $V_f([a, b]) = 0 \Leftrightarrow f = \mathrm{const}$.

Утверждение 3. $V_{f+g} \leq V_f + V_g$.

Утверждение 4. V_f аддитивна на промежутке: $a \leq b \leq c$, тогда $V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$.

Определение 3. Вариация ограничена, если $V_f < \infty$ на $[a, b]$.

Лемма 1.

- *$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_1 и f_2 монотонны, тогда $f_1 - f_2$ имеют ограниченную вариацию.*
- *f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $f = f_1 - f_2$ на отрезке $[a, b]$, причём эти две функции монотонно возрастают.*

Доказательство. Пусть у нас есть f, а также $V_f([a, b]) < \infty$. Рассмотрим $\varphi(x) = V_f([a, x])$. φ определа корректно, причём возрастает. $f = \varphi - (\varphi - f)$, скажем, что $(\varphi - f) = h$, тогда $h(x) \leq h(y)$ при $x \leq y$. Но это нетрудно показать, $\varphi(x) - f(x) \leq \varphi(y) - f(y)$ равносильно $f(y) - f(x) \leq \varphi(y - \varphi(x)) = V_f([x, y])$. $\square$

По сути, если понимать определение вариации геометрически, то это просто длина кривой на отрезке. Перейдём теперь к способам обхода кривой.

Лемма 2. *Пусть* $g : [a, b] \to [c, d]$ *- непрерывная биекция (тогда и монотонная). Тогда* $V_f[c, d] = V_{f\circ g}([a,b])$.

Доказательство. Левая и правая части равны соответственно $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ и $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(g(y_{k+1})) - f(g(y_k))|$. Это, очевидно, одно и то же. $\square$

Теперь стоит задаться вопросом: а когда же это V_f (или же, длину кривой) можно посчитать. Если f - гладкая функция (гладкая покоординатно f_k). $f := [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$V_f([a, b]) = \int_a^b \sqrt{(f_1')^2(x) + \ldots + (f_n')^2(x)}\, dx.$$

Рассмотрим

$$\sup_{a=x_0,\ldots,x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^2 + \ldots + f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + 1 - x_k) \sqrt{f_1'^2(\xi_{1,k}) + \ldots + f_n'^2(\xi_{n,k}))}$$

Если f_i непрерывна, то f_i^2 равномерно непрерывна. $f_i'^2(\xi_{i,k}) \le \min_{[x_k, x_{k+1}]} f_i'^2 + \varepsilon^2$ (для достаточно мелких разбиений и любого эпсилон, большего нуля). Тогда можно получить верхнюю оценку: $\le \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \min_{[x_k]} (f_l'^2)} + \varepsilon\sqrt{n}(b-a) \le \int_a^b \sqrt{\ldots} + \varepsilon\sqrt{n}(b-a)$ (устремляем разбиение к бесконечно малому). А затем делаем аналогично снизу и получаем требуемое равенство.