

Геометрия и топология. Факты 2 сем., которые вскоре станут билетами

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Фоминых Е. А.,
конспекта Георгия Миллера, а также
других источников)

26 марта 2021 г.

Основные (по моему мнению) определения и факты из топологии (на самом деле, почти всё, что можно).

Содержание

1	Аффинные пространства.	3
1.1	Начальные определения и свойства.	3
1.2	Материальные точки.	3
1.3	Аффинные подпространства и оболочки.	3
1.4	Базисы и отображения.	4
2	Проективные пространства.	5
2.1	Начальные определения и свойства.	5
2.2	Проективные отображения.	6
2.3	Проективные и аффинные теоремы.	7
3	Евклидовы пространства.	7
3.1	Начальные определения и свойства.	7
3.2	Ортогональность.	8
3.3	Изоморфизмы.	9
3.4	Продолжение ортогональности.	9
3.5	Немного о матрицах отображений.	10
3.6	Много какой-то хуйни.	10
3.7	Движения евклидова аффинного пространства.	11
4	Выпуклости.	12
4.1	Основное.	12
4.2	Отделимости.	13
4.3	Опорные гиперплоскости.	13
4.4	Экстремальные точки.	13
5	Алгебраическая топология.	14
5.1	Гомотопии.	14
5.2	Фундаментальная группа.	15
6	Оставшаяся хуйня.	16
7	Указатель.	18

1 Аффинные пространства.

1.1 Начальные определения и свойства.

Определение 1. *Аффинное пространство* - тройка $(X, \vec{X}, +)$, состоящая из непустого множества *точек*, векторного пространства над \mathbb{R} (*присоединённое*) и операцией $+$: $X \times \vec{X} \rightarrow X$ *откладывания вектора*.

Налагаемые условия - для любых точек $x, y \in X$ существует единственный вектор $v \in \vec{X}$ такой, что $x + v = y$ (\vec{xy}), а также ассоциативность откладывания вектора.

Определение 2. *Начало отсчёта* аффинного пространства - произвольная фиксированная точка $o \in X$.

Лемма 1. *Начало отсчёта* $o \in X$ задаёт биекцию $\varphi_o : X \rightarrow \vec{X}$ по правилу:

$$\varphi_o(x) = \vec{ox} \quad \forall x \in X.$$

Такая биекция называется *векторизацией* аффинного пространства.

Определение 3. *Линейная комбинация* $\sum t_i p_i$ точек с коэффициентами относительно начала отсчёта $o \in X$ - вектор $v = \sum t_i \vec{op_i}$, или точка $p = o + v$. Комбинация называется *барицентрической*, если сумма коэффициентов равна единице, и *сбалансированной*, если сумма коэффициентов равна нулю.

Теорема 1. *Барицентрическая комбинация точек - точка, не зависящая от начала отсчёта. Сбалансированная комбинация точек - вектор, не зависящий от начала отсчёта.*

1.2 Материальные точки.

Определение 4. Пусть x — некоторая точка аффинного пространства и m — ненулевое число. *Материальной точкой* (x, m) называется пара: точка x с вещественным числом m , причем число m называется *массой* материальной точки (x, m) , а точка x — носителем этой материальной точки.

Определение 5. *Центром масс* системы материальных точек (x_i, m_i) называется такая точка z (притом единственная), для которой имеет место равенство

$$m_1 \cdot z\vec{x}_1 + \dots + m_n \cdot z\vec{x}_n = 0.$$

1.3 Аффинные подпространства и оболочки.

Определение 6. Множество $Y \subset X$ - *аффинное подпространство*, если существуют такие линейное подпространство $V \subset \vec{X}$ и точка $p \in Y$, что $Y = p + V$. V называется *направлением* Y . Определение подпространства не зависит от выбора точки в нём.

Определение 7. *Размерность* $\dim X$ аффинного пространства есть размерность его присоединённого векторного пространства.

Определение 8. *Параллельный перенос* на вектор $v \in \vec{X}$ - отображение $T_v : X \rightarrow X$, заданное равенством $T_v(x) = x + v$.

Определение 9. Аффинные подпространства одинаковой размерности *параллельны*, если их направления совпадают.

Определение 10. *Прямая* - аффинное подпространство размерности 1, *гиперплоскость* в X - аффинное подпространство размерности $\sim X - 1$.

Утверждение 1. Две различные гиперплоскости не пересекаются тогда и только тогда, когда они параллельны.

Определение 11. *Суммой аффинных подпространств* называется наименьшее аффинное подпространство, их содержащее.

Теорема 2. Пересечение любого набора аффинных подпространств - либо пустое множество, либо аффинное подпространство.

Определение 12. *Аффинная оболочка* $\text{Aff } A$ непустого множества $A \subset X$ - пересечение всех аффинных подпространств, содержащих A . Как следствие, это - наименьшее аффинное подпространство, содержащее A .

Теорема 3. $\text{Aff}(A)$ - множество всех барицентрических комбинаций точек из A .

Определение 13. Точки p_1, \dots, p_k *аффинно зависимы*, если существуют такие коэффициенты $t_i \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $\sum t_i = 0$ и $\sum t_i p_i = 0$. Если такой комбинации нет, то точки *аффинно независимы*.

Теорема 4. (Переформулировки аффинной независимости.) Для $p_1, \dots, p_k \in X$ следующие свойства эквивалентны:

- они аффинно независимы;
- векторы $p_1 p_i$, $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, линейно независимы;
- $\dim \text{Aff}(p_1, \dots, p_k) = k - 1$;
- каждая точка из $\text{Aff}(p_1, \dots, p_k)$ единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации p_i .

1.4 Базисы и отображения.

Определение 14. *Аффинный базис* - набор $n + 1$ точке в X , пространстве размерности n , являющийся аффинно независимым. Или же, это - точке $o \in X$ и базис e_0, \dots, e_n пространства \vec{X} .

Определение 15. Каждая точка однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $\sum_{i=0}^n t_i e_i$, а числа t_i называют *барицентрическими координатами* этой точки.

Определение 16. (Говно-определение). Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *аффинным*, если отображение \tilde{F}_p линейно для некоторой точки $p \in X$. Отображение $\tilde{F}_p : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ индуцируется из любого отображения $F : X \rightarrow Y$ посредством формулы $\forall v \in \vec{X} \quad \tilde{F}_p(v) = \overrightarrow{F(p)F(q)}$, где $q = p + v$.

Определение 17. Отображение \tilde{F} называется *линейной частью* аффинного отображения F .

Определение 18. (Нормальное определение.) Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *аффинным*, если существует такое линейное $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$, что для любых $q, p \in X$, $\overrightarrow{F(p)F(q)} = L(\vec{pq})$.

Теорема 5. Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ линейно. Тогда существует единственное аффинное отображение $F : X \rightarrow Y$ такое, что $\tilde{F} = L$ и $F(x) = y$.

Лемма 2. Пусть p_1, \dots, p_n - аффинно независимые точки в аффинном пространстве X , q_1, \dots, q_n - точки в аффинном пространстве Y . Тогда существует такое аффинное отображение $F : X \rightarrow Y$, что $F(p_i) = q_i \forall i$. Кроме того, если $\dim X = n - 1$, то такое отображение единственно.

Лемма 3. Аффинное отображение сохраняет барицентрические комбинации.

Лемма 4. Композиция аффинных отображений - аффинное отображение. При этом линейная часть композиции - композиция линейных частей.

Утверждение 2. Образ и прообраз аффинного подпространства - аффинное подпространство. Образы (прообразы) параллельных подпространств параллельны.

Теорема 6. Параллельный перенос - аффинное отображение, его линейная часть тождественна. Верно также и обратное.

Определение 19. Аффинное отображение $F : X \rightarrow X$ такое, что $\tilde{F} = k \text{id}$ для некоторого $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, называется *гомотетией*, а k называют *коэффициентом растяжения* гомотетии F . Такое отображение имеет ровно одну неподвижную точку, называемую центром.

Теорема 7. (*Основная теорема аффинной геометрии.*) Пусть X, Y - аффинные пространства, $\dim X \geq 2$. Пусть $F : X \rightarrow Y$ - инъективное отображение, и для любой прямой $l \subset X$ её образ $F(l)$ - тоже прямая. Тогда F - аффинное отображение.

2 Проективные пространства.

2.1 Начальные определения и свойства.

Определение 20. Пусть V - векторное пространство над полем K . На множестве $V \setminus \{0\}$ введём отношение эквивалентности

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in K : x = \lambda y.$$

Тогда фактор V по этому отношению называют *проективным пространством* $(\mathbb{P}(V))$, порождённым векторным V . Само отображение из векторного пространства в соответствующее проективное называют *проективизацией*.

Примечание 1. *Размерность* $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

Теорема 8. Пусть $Y, Z \subset X$ - подпространства, $\dim Y + \dim Z \geq \dim X$, тогда

- $Y \cap Z \neq \emptyset$;
- $Y \cap Z$ - подпространство;
- $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$.

Определение 21. Пусть W - непустое векторное подпространство V . Тогда $\mathbb{P}(W)$ называется *проективным подпространством* $\mathbb{P}(V)$.

Определение 22. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство размерности n . Числа x_0, x_1, \dots, x_n , являющиеся координатами вектора v , порождающего $p \in \mathbb{P}(V)$, называются *однородными координатами*.

Определение 23. $\hat{X} = \mathbb{P}(V)$ - *проективное пополнение* аффинного пространства X , а множество $X_\infty = \mathbb{P}(\vec{X} \times 0) \subset \hat{X}$ - *бесконечно удалённые точки*. Также, множество этих точек есть гиперплоскость в \hat{X} , которая называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью*.

Определение 24. Пусть V - векторное пространство, $W \subset V$ - линейная гиперплоскость, X - гиперплоскость ей параллельная. Тогда биекцию $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \rightarrow X$ называют *картой* пространства $\mathbb{P}(V)$.

Определение 25. Пусть на $\mathbb{R}p^1$ (прямая с бесконечно удалённой точкой) выбрана аффинная система координат, в которой $A = a$, $B = b$, $C = c$ и $D = d$. Определим *двойное отношение* четвёрки точек (A, B, C, D) формулой

$$[A, B, C, D] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-c}{b-d}.$$

Утверждение 3. Данное определение инвариантно относительно выбора карты, а само отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

2.2 Проективные отображения.

Лемма 5. Пусть V, W - векторные пространства и $L : V \rightarrow W$ - инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное отображение $F : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ такое, что

$$P_W \circ L = F \circ P_V,$$

где P_V, P_W - проекции из $V \setminus \{0\}$ и $W \setminus \{0\}$ в $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(W)$ соответственно.

Определение 26. Отображение F из леммы выше называется *проективизацией* L , и обозначается как $F = \mathbb{P}(L)$.

Определение 27. Отображение из $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ - *проективное*, если оно является проективизацией некоторого линейного $L : V \rightarrow W$.

Утверждение 4. Проективное отображение переводит проективные подпространства (в том числе, всё пространство) в проективные пространства той же размерности.

Теорема 9. Пусть X, Y - аффинные пространства, \hat{X}, \hat{Y} - их проективные пополнения, $F : X \rightarrow Y$ - инъективное аффинное отображение. Тогда существует единственное проективное отображение $\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y} : \hat{F}|_X = F$. Причём оно переводит бесконечно удалённые в бесконечно удалённые.

Определение 28. Пусть $H_1, H_2 \subset X$ - гиперплоскости (X - проективное), $p \in X \setminus (H_1 \cup H_2)$. *Центральная проекция* H_1 и H_2 с центром p - проективное отображение $F : H_1 \rightarrow H_2$, определяемое так: пусть $x \in H_1$, тогда $F(x)$ - точка пересечения прямой (px) и гиперплоскости H_2 .

Определение 29. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство, размерности n . *Проективный базис* X - набор из $n+2$ точек, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной проективной гиперплоскости.

Лемма 6. Можно выбрать такие векторы $v_1, \dots, v_{n+2} \in V \setminus \{0\}$, порождающие проективный базис p_1, \dots, p_{n+2} , что $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$.

Теорема 10. Пусть X, Y - проективные пространства, размерностей n , $p_1, \dots, p_{n+2} \in X$ и $q_1, \dots, q_{n+2} \in Y$ - проективные базисы. Тогда существует единственное проективное отображение $F : X \rightarrow Y$ такое, что $F(p_i) = q_i$ для всех i .

Примечание 2. Проективное преобразование прямой с бесконечно удалёнными точками имеет вид

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy],$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$. Для $\hat{\mathbb{R}}$ это - дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

2.3 Проективные и аффинные теоремы.

Теорема 11. (*Теорема Паппа (аффинная)*). Пусть X - аффинная плоскость, l, l' - различные прямые в X . $x, y, z \in l$, $x', y', z' \in l'$ - различные точки, отличные от $l \cap l'$. Тогда из $(xy') \parallel (x'y)$, $(yz') \parallel (y'z)$ следует, что $(xz') \parallel (x'z)$.

Теорема 12. (*Теорема Паппа (проективная)*). Пусть $\mathbb{P}(E)$ - проективная плоскость, l, l' - различные прямые в $\mathbb{P}(E)$, $a, b, c \in l$, $a', b', c' \in l'$ - различные точки, отличные от $l \cap l'$. Тогда три точки - $\gamma = (ab') \cap (a'b)$, $\alpha = (bc') \cap (b'c)$ и $\beta = (ac') \cap (a'c)$ лежат на одной прямой.

Определение 30. *Треугольник* - тройка точек (*вершин*), не лежащих на одной прямой. *Стороны* треугольника - прямые, содержащие пары вершин.

Теорема 13. (*Теорема Дезарга (аффинная)*). Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ - треугольники на аффинной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые (aa') , (bb') и (cc') пересекаются в одной точке или параллельны, и $(ab) \parallel (a'b')$, $(bc) \parallel (b'c')$, то $(ac) \parallel (a'c')$.

Теорема 14. (*Теорема Дезарга (проективная)*). Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ - треугольники на проективной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые (aa') , (bb') и (cc') пересекаются в одной точке, то три точки $\gamma = (ab) \cap (a'b')$, $\alpha = (bc) \cap (b'c')$ и $\beta = (ac) \cap (a'c')$ лежат на одной прямой.

3 Евклидовы пространства.

3.1 Начальные определения и свойства.

Определение 31. *Скалярное произведение* на векторном пространстве X - функция

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющая условиям симметричности, линейности по каждому аргументу и неотрицательности $\langle x, x \rangle$ (равно нулю только при $x = 0$).

Евклидово пространство - векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

Определение 32. *Длина* (норма) вектора $x \in X$ - $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, *расстояние* между $x, y \in X$ - $d(x, y) = |x - y|$.

Теорема 15. (*Неравенство КБШ*). Для любых $x, y \in X$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

Причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

Следствие 1. Для любых $x, y \in X$ $|x + y| \leq |x| + |y|$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда один из векторов равен нулю или они сонаправлены.

Следствие 2. Для любых $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы $x - y$ и $y - z$ сонаправлены или один из них равен нулю.

Определение 33. Пусть X - евклидово пространство. *Угол* между ненулевыми векторами x и y - это $\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|}$.

Теорема 16. (*Теорема косинусов*).

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \angle(x, y).$$

Теорема 17. (*Неравенство треугольника для углов*). Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,

$$\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z).$$

Следствие 3. Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,

$$\angle(x, y) + \angle(y, z) + \angle(z, x) \leq 2\pi.$$

3.2 Ортогональность.

Определение 34. Векторы $x, y \in X$ *ортогональны*, если $\langle x, y \rangle = 0$. Обозначается как $x \perp y$.

Теорема 18. (*Теорема Пифагора*). Если $x \perp y$, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Следствие 4. Если векторы v_1, \dots, v_n попарно ортогональны, то

$$|v_1 + \dots + v_n|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2.$$

Определение 35. *Ортонормированный* набор векторов - такой, в котором каждые два вектора ортогональны и все имеют длину 1.

Теорема 19. Пусть v_1, \dots, v_n - ортонормированный набор, $x = \sum \alpha_i v_i$, $y = \sum \beta_i v_i$ ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$). Тогда $\langle x, y \rangle = \sum \alpha_i \beta_i$, а $|x|^2 = \sum \alpha_i^2$.

Теорема 20. Любой ортонормированный набор линейно независим.

Теорема 21. (*Об ортогонализации по Граму-Шмидту*). Для любого линейно-независимого набора векторов v_1, \dots, v_n существует единственный ортонормированный набор e_1, \dots, e_n такой, что для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ $\text{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \text{Lin}(v_1, \dots, v_k)$ и $\langle v_k, e_k \rangle > 0$.

Следствие 5. Пусть X - конечномерное евклидово пространство. Тогда в X существует ортонормированный базис, и любой ортонормированный набор можно дополнить до ортонормированного базиса.

3.3 Изоморфизмы.

Определение 36. Евклидовы пространства X и Y *изоморфны*, если существует линейная биекция $f : X \rightarrow Y$, сохраняющая скалярное произведение:

$$\langle f(v), f(w) \rangle_Y = \langle v, w \rangle_X$$

для любых $v, w \in X$. Такое f называется *изоморфизмом* (евклидовых пространств).

Теорема 22. Пусть X, Y - конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности. Тогда X и Y изоморфны.

Следствие 6. Любое евклидово пространство размерности n изоморфно \mathbb{R}^n .

3.4 Продолжение ортогональности.

Определение 37. Пусть X - евклидово пространство, A - его подмножество. *Ортогональное дополнение* множества A это -

$$A^\perp = \{x \in X : \forall v \in A \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Утверждение 5. Ортогональное дополнение - линейное пространство. Если $A \subset B$, то $B^\perp \subset A^\perp$. Наконец, $A^\perp = \text{Lin}(A)^\perp$.

Теорема 23. Пусть X - конечномерное евклидово пространство, $V \subset X$ - линейное подпространство. Тогда $X = V \oplus V^\perp$, и $(V^\perp)^\perp = V$.

Определение 38. *Ортогональная проекция* x на V ($\text{Pr}_V(x)$) - такой вектор $y \in V$, что $x - y \in V^\perp$.

Определение 39. *Нормаль* линейной гиперплоскости H - любой ненулевой вектор $v \in H^\perp$.

Теорема 24. (*Конечномерная теорема Рисса*). Пусть X - конечномерное евклидово пространство, $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ - линейное отображение. Тогда существует единственный вектор $v \in X$ такой, что $L(x) = \langle v, x \rangle$ для всех $x \in X$.

Теорема 25. Любая линейная гиперплоскость имеет вид $\ker L$, где $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ - линейное отображение, $L \neq 0$. Также, L определена однозначно с точностью до множителя на константу.

Теорема 26. (*Расстояние до гиперплоскости*). Пусть $H = v^\perp$. Тогда расстояние от x до H равно

$$d(x, H) = \frac{|\langle v, x \rangle|}{|v|},$$

или в координатах, где a_1, \dots, a_n - координаты v ,

$$d(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Определение 40. *Изометрическое отображение* X в Y (евклидовы пространства) - линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение. *Ортогональное преобразование* пространства X - изометрическое отображение из X в себя.

Определение 41. *Ортогональная группа* порядка n - группа ортогональных преобразований \mathbb{R}^n . Обозначается как $O(n)$.

Утверждение 6. Линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно сохраняет длины векторов. Или же, линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный набор.

3.5 Немного о матрицах отображений.

Теорема 27. Пусть $f : X \rightarrow Y$ линейно, A - его матрица в ортонормированных базисах X и Y . Тогда f изометрическое тогда и только тогда, когда $A^T A = E$.

Следствие 7. При совпадении размерностей, это равносильно тому, что $AA^T = E$ или $A^T = A^{-1}$.

Определение 42. *Ортогональная матрица* - квадратная матрица A , для которой $A^T A = AA^T = E$.

Теорема 28. Если A - ортонормированная матрица, то $\det A = \pm 1$.

Определение 43. *Специальная ортогональная группа* $SO(n)$ - группа ортогональных преобразований с определителем 1.

3.6 Много какой-то хуйни.

Определение 44. *Инвариантное подпространство* линейного отображения $f : X \rightarrow X$ - линейное подпространство $Y \subset X$ такое, что $f(Y) \subset Y$.

Утверждение 7. Если V - инвариантное подпространство ортогонального преобразования, то V^\perp - тоже инвариантное.

Теорема 29. Пусть $f : X \rightarrow X$ - ортогональное преобразование. Тогда существует разложение X в ортогональную прямую сумму

$$X = X_+ \oplus X_- \oplus \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_m \quad (m \geq 0)$$

инвариантных подпространств таких, что $f|_{X_+} = \text{id}$, $f|_{X_-} = -\text{id}$, а $\dim \Pi_i = 2$, $f|_{\Pi_i}$ - поворот.

Определение 45. Два базиса *одинаково ориентированы*, если матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

Примечание 3. Одинаковая ориентированность базисов - отношение эквивалентности. Классов эквивалентности ровно два (кроме случая нулевой размерности).

Определение 46. *Ориентированное векторное пространство* - векторное пространство, в котором выделен один из двух классов одинаково ориентированных базисов. Выделенные базисы - *положительно ориентированные* (положительные), остальные - *отрицательно ориентированные* (отрицательные).

Определение 47. Пусть X - ориентированное евклидово пространство размерности n , $v_1, \dots, v_n \in X$. *Смешанное произведение* v_1, \dots, v_n - определитель матрицы из координат v_i в произвольном положительном ортонормированном базисе. Обозначается как $[v_1, \dots, v_n]$.

Теорема 30. Определение корректно, то есть, не зависит от выбора базиса.

Определение 48. Пусть X - трёхмерное ориентированное евклидово пространство, $u, v \in X$. Их *векторное произведение* - такой (единственный по лемме Рисса) вектор $h \in X$, что $\langle h, x \rangle = [u, v, x]$ для любого $x \in X$. Обозначается как $h = u \times v$.

Теорема 31. Пусть u, v линейно независимы. Тогда

- $u \times v$ - вектор, ортогональный u и v ;
- $u, v, u \times v$ - положительный базис;
- $|u \times v|$ равно площади параллелограмма, образованного векторами u и v .

Теорема 32. Пусть e_1, e_2, e_3 - положительный ортонормированный базис, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3,$$

или в псевдо-матричной записи:

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

3.7 Движения евклидова аффинного пространства.

Определение 49. *Евклидово аффинное пространство* - аффинное пространство X с заданным на \vec{X} скалярным произведением. *Расстояние* в таком пространстве: $d(x, y) = |x - y|$.

Определение 50. *Движение* евклидова аффинного пространства X - биекция из X в X , сохраняющая расстояния. Группа движений обозначается как $\text{Iso}(X)$.

Теорема 33. Любое движение - аффинное преобразование, линейная часть которого - ортогональное преобразование, и обратно.

Лемма 7. Пусть X - аффинное пространство, $F : X \rightarrow X$ - аффинное отображение, и его линейная часть не имеет неподвижных ненулевых векторов, то есть, $\vec{F}(v) \neq v$ для всех $v \in \vec{X} \setminus \{0\}$. Тогда F имеет неподвижную точку.

Следствие 8. Если линейная часть движения плоскости - поворот на ненулевой угол, то и само движение - поворот на этот угол относительно некоторой точки.

Следствие 9. Композиция поворотов - поворот или параллельный перенос.

Теорема 34. (*Теорема Шаля*). Любое движение есть одно из следующих:

- параллельный перенос,
- поворот,
- скользящая симметрия.

4 Выпуклости.

4.1 Основное.

Далее, X - аффинное пространство.

Определение 51. Пусть $x, y \in X$. *Отрезок* между точками - это множество $[x, y] = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$.

Определение 52. *Выпуклое множество* называется таковым, если для любых двух точек в нём лежащих, отрезок между ними также принадлежит множеству.

Утверждение 8. Выпуклое множество содержит все выпуклые комбинации своих точек.

Определение 53. *Выпуклая оболочка* $A \subset X$ - пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A (то есть, наименьшее из них). Обозначается как $\text{Conv}(A)$

Определение 54. Пусть p_1, \dots, p_m - набор точек в X . *Выпуклой комбинацией* точек p_i называется любая барицентрическая комбинация вида $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$, где сумма λ_i равна 1, и все λ_i неотрицательные.

Теорема 35. (*Теорема Каратеодори*). Пусть $\dim X = n$, $A \subset X$, $p \in \text{Conv}(A)$. Тогда p представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n + 1$ точки из A .

Следствие 10. (О выпуклой оболочке компакта). Если $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то $\text{Conv}(A)$ тоже компактно.

Теорема 36. (*Теорема Радона*). Пусть X - аффинное пространство, размерности n . Пусть $M \subset X$, мощности хотя бы $n + 2$. Тогда M можно разбить на два подмножества A и B такие, что их Conv не пересекаются.

Теорема 37. (*Теорема Хели*). Пусть X - аффинное пространство, размерности n . Пусть $c_1, \dots, c_m \subset X$ - выпуклые множества, $m \geq n + 1$, и любые $n + 1$ из этих множеств имеют непустое пересечение. Тогда пересечение всех c_i непусто.

Теорема 38. (*Теорема Хели для бесконечного набора компактов*). Пусть $\{C_i\}_{i \in I}$ - набор выпуклых компактов в X , размерности n , и любые $n + 1$ из множеств c_i имеют непустое пересечение. Тогда пересечение c_i непусто.

Теорема 39. (*Теорема Юнга*). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$, $\text{diam}(M) \leq 1$. Тогда M содержится в некотором замкнутом круге радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Утверждение 9. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Тогда его внутренность и замыкание тоже выпуклы.

Утверждение 10. Выпуклый компакт с непустой внутренностью гомеоморфен шару.

Определение 55. *Размерностью* непустого выпуклого множества A называется размерностью его выпуклой оболочки.

Определение 56. *Относительная внутренность* выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ - его внутренность в индуцированной топологии его аффинной оболочки. Обозначается как $\text{RelInt}(A)$.

Теорема 40. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое выпуклое множество, то его относительная внутренность непустая.

4.2 Отделимости.

Определение 57. (*Отделимости*). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^n$ - непустые множества, H - гиперплоскость.

- H строго отделяет A и B , если A и B лежат в разных открытых полуплоскостях относительно H .
- H нестрого отделяет A и B , если A и B лежат в разных замкнутых полуплоскостях относительно H .

Теорема 41. (*Теорема о строгой отделимости*). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^n$ - непустые замкнутые и выпуклые множества, и хотя бы одно из них компактно. Если их пересечение пусто, тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая A и B .

Следствие 11. (Отделимость от точки). Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое. Тогда B строго отделимо от любой точки $x \notin B$.

4.3 Опорные гиперплоскости.

Определение 58. $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое множество, H - гиперплоскость в \mathbb{R}^n . Говорим, что H - *опорная гиперплоскость* для A , если

- A лежит по одну сторону от H (нестрого);
- пересечение H и замыкания A не пусто.

Теорема 42. (1.) $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое и ограниченное множество. Тогда для любого $(n-1)$ -мерного направления существует опорная гиперплоскость к A в данном направлении (то есть, параллельная направлению). Количество таких опорных гиперплоскостей равно 1 или 2.

Теорема 43. (2.) $A \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое, выпуклое, и p лежит на границе A . Тогда существует опорная гиперплоскость H к A , проходящая через точку p .

4.4 Экстремальные точки.

Определение 59. $A \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое множество, p лежит на границе. Точка p называется *экстремальной* для A , если $A \setminus \{p\}$ выпукло.

Теорема 44. (*Теорема Крейна-Мальмана*). Всякий выпуклый компакт в \mathbb{R}^n является выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

Определение 60. *Выпуклое полиэдральное множество* - пересечение конечного числа замкнутых полупространств.

Теорема 45. (*Теорема Вейля-Минковского*). $A \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:

- A - ограниченное выпуклое полиэдральное множество;
- A - выпуклая оболочка конечного числа точек.

Определение 61. $A \subset \mathbb{R}^n$. *Полярной* множества A называется множество $A^o = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle \leq 1\}$.

Свойства:

- антимонотонность;
- если A - ограниченное, то o лежит во внутренности A (верно и обратное);
- $(A \cup B)^o = A^o \cap B^o$ (аналогичное верно и для кучи множеств);
- A^o замкнуто, выпукло и содержит o ;
- $(A \cup \{o\})^o = A^o$;
- $(\text{Conv}(A))^o = A^o$;
- $(\overline{A})^o = A^o$.

Теорема 46. (*Теорема о биполяре*). $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

- Если A - выпуклое, замкнутое и одержит o , то $A^{oo} = A$;
- В общем случае: A^{oo} - замыкание $\text{Conv}(A)$.

5 Алгебраическая топология.

5.1 Гомотопии.

Будем считать, что X и Y - топологические пространства, $f, g : X \rightarrow Y$ - непрерывные отображения.

Определение 62. f и g *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ такое, что

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

Определение 63. Отображение H называется *гомотопией* между f и g .

Теорема 47. Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из X в Y .

Теорема 48. Пусть X, Y, Z - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Определение 64. Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ *связана* на A , если $H(x, t) = H(x, 0), \forall x \in A, t \in [0, 1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

Определение 65. Два пути $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0, 1\}$.

Определение 66. Пусть $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если ε_p и ε_q - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути α . Тогда $\varepsilon_p \alpha \sim \alpha \varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1 - t)$. Тогда $\alpha \alpha' \sim \varepsilon_p$.

5.2 Фундаментальная группа.

Определение 67. *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в X с началом и концом в *отмеченной точке* x_0 , обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

Определение 68. *Фундаментальная группа* топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0)/\sim$, где \sim - гомотопность путей с фиксированным концом в x_0 ;
- групповое произведение определяется формулой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

Определение 69. Если γ - путь из p в q (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

Теорема 49. Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Определение 70. (*Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением*). Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ так:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- $*$ от композиции - композиция $*$ к функциям;
- $\text{id} : X \rightarrow X \Rightarrow \text{id}_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Утверждение 11. $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

6 Оставшаяся хуйня.

Определение 71. Топологическое пространство X *односвязно*, если X линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

Теорема 50. S^n односвязно при всех n хотя бы 2.

Следствие 12. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех n хотя бы 3, односвязно.

Определение 72. X, B - топологические пространства; $p : X \rightarrow B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall u \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое v_i открыто в X и $p|_{v_i}$ - гомеоморфизм между v_i и U .

Пример(ы) 1.

- гомеоморфизм (v_i - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

Теорема 51. (*О постоянстве числа листов*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; B - связно. Тогда $|p^{-1}(b)|$ одинаково у всех $b \in B$.

Определение 73. $|p^{-1}(b)|$ - *число листов* накрытия

Определение 74. $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $f : Y \rightarrow B$ - непрерывное отображение. *Поднятием отображения* f называется непрерывное отображение $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

Теорема 52. (*О поднятии пути*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути α такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.

Лемма 8. (*Лемма о непрерывном аргументе*). Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда

- существует непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$;
- такая φ единственная с точностью до добавления числа, кратного 2π .

Теорема 53. (*О поднятии гомотопии*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \rightarrow B$ такого, что $H(0, 0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие \tilde{H} , что $\tilde{H}(0, 0) = x_0$.

Следствие 13. Пусть α, β - пути в B такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначально, $\tilde{\alpha}(1) \sim \tilde{\beta}(1)$.

Определение 75. Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

Следствие 14. Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

Следствие 15. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

Определение 76. Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при p_* называется *группой накрытия*.

Утверждение 12. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

Определение 77. Накрытие $p : X \rightarrow B$ называется *универсальным*, если X односвязно ($\pi_1(x) = \{e\}$, X - линейно связно).

Лемма 9. Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в x_0 , то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проецируется в b_0). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$.

Теорема 54. $\pi_1(\mathbb{R} P^n) = \mathbb{Z}_2$, при $n \geq 2$.

Теорема 55. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Следствие 16. \mathbb{R}^2 не гомеоморфно \mathbb{R}^3 .

7 Указатель.

Не используйте указатель во время сдачи экзамена, это противозаконно. (Не более эффективно, чем писать "Курение убивает" на пачках сигарет, но я пытался)

аффинный базис	неравенство КБШ
аффинная зависимость	неравенство тр-ка для углов
аффинная независимость	норма
аффинная оболочка	нормаль
аффинное отображение(1)	одинаковая ориентированность
аффинное отображение(2)	однородные координаты
аффинное подпространство	односвязное тп
аффинное пространство	опорная гиперплоскость
барицентрическая лк	ориентированное вп
барицентрические координаты	ортогональная группа
бесконечно удалённые точки	ортогональная матрица
бесконечно удалённая гп	ортогональная проекция
векторизация (ап)	ортогональное дополнение
векторное произведение	ортогональное преобразование
вершина	ортогональные векторы
выпуклая комбинация	ортонормированный набор векторов
выпуклая оболочка	основная теорема аг
выпуклое множество	отделимость
выпуклое полиэдральное множество	откладывание вектора
гиперплоскость	относительная внутренность
гомотетия	отр. ориент. базис
гомотопия	отрезок
гомотопные отображения	параллельные (ап/п)
гомотопные пути	параллельный перенос
группа накрытия	петля
г. ф. г. и. о.	поднятие отображения
движение	положит. ориент. базис
двойное отношение	поляра
евклидово пространство	присоединённое (вп)
евклидово ап	проективизация(1)
изометрическое отображение	проективизация(2)
изоморфность (еп)	проективное отображение
изоморфизм (еп)	проективное подпространство
инвариантное подпространство	проективное пополнение
карта	проективное пространство
коэффициент растяжения	проективный базис
лемма о непрерывном аргументе	произведение путей
линейная комбинация	прямая
линейная часть (ао)	размерность (ап)
масса	размерность (пп)
материальная точка	размерность множества
накрытие	расстояние (еп)
направление аффинного п/п	расстояние (еап)
начало отсчёта (ап)	расстояние до гиперплоскости

сбалансированная лк
связанная гомотопия
смешанное произведение
скалярное произведение
спец. ортогональная группа
сторона
стягиваемая петля
сумма (ап/п)
теорема Вейля-Минковского
теорема Дезарга (а)
теорема Дезарга (п)
теорема Каратеодори
теорема косинусов
теорема Крейна-Мальмана
теорема о биполяре
теорема о поднятии гомотопии
теорема о поднятии пути
теорема о постоянстве числа листов
теорема о строгой отделимости

теорема об ортогонализации
теорема Паппа (а)
теорема Паппа (п)
теорема Пифагора
теорема Радона
теорема Рисса
теорема Хели
теорема Шаля
теорема Юнга
точка
треугольник
угол
универсальное покрытие
фундаментальная группа
центр масс
центральная проекция
число листов
экстремальная точка