

Матлог. Основные записи

Мастера конспектов

22 января 2020 г.

Основные моменты.

Содержание

| | | |
|----------|------------------|----------|
| 1 | Лекция 1. | 3 |
| 2 | Лекция 2. | 4 |

1 Лекция 1.

Определение 1. *Конкатенация* - записали подряд два слова. (A - алфавит, A^* - слова).

Определение 2. *Подслово* - как есть, *вхождение* - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как $\psi \sqsubseteq \varphi$.

Определение 3. $w[w'/u, k]$ - замена подслова w' на u , начинающегося в позиции k .

Определение 4. Фиксированное счётное множество Prop - *пропозициональные переменные*. Язык \mathcal{L} классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ и круглых скобочек.

Определение 5. Form (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \text{Prop}$, то $p \in \text{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$, то $(\varphi * \psi) \in \text{Form}$, где $*$ - любая из операций в определении выше (если отрицание, то относительно одной формулы, конечно).

Лемма 1. Пусть $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ таковы, что $\psi \sqsubseteq \varphi$. Тогда $\psi = \varphi$.

Доказательство. По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе ψ представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как φ представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально. \square

Лемма 2. Каждую $\varphi \in \text{Form} \setminus \text{Prop}$ можно единственным способом представить в виде $(\theta \rightarrow \chi)$, $(\theta \vee \chi)$, $(\theta \wedge \chi)$ или $\neg\theta$, где $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$ (это я везде безграмотно называю композицией).

Доказательство. От противного по лемме 2. \square

Определение 6. Для каждой $\varphi \in \text{Form}$ определим $\text{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \text{Form} \mid \psi \preceq \varphi\}$ - *подформулы*.

Лемма 3. Пусть $\varphi \in \text{Form}$. Тогда каждое вхождение \neq или $($ является началом вхождения некоторой подформулы.

Доказательство. Возвратная индукция по длине формулы. \square

Лемма 4. Множество подслов φ - объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.

Доказательство. Из лемм выше. \square

Определение 7. *Оценка* (v) - произвольная функция из Prop в $\{0, 1\}$, которую можно расширить и до Form (v^*) посредством применения операций к переменным. Если $v^*(\varphi) = 1$, то порой пишут $v \models \varphi$.

Определение 8. Формулу называют *выполнимой*, если $v \models \varphi$ для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если $v \models \varphi$ для всех оценок.

Определение 9. Формула *семантически следует* из множества формул и записывается $\Gamma \models \varphi$, если для любой оценки v , любая формула из множества истина, то φ истина.

Формулы называют *семантически эквивалентными*, и пишут $\varphi \equiv \psi$, если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

2 Лекция 2.

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negation):

- (I1). $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (I2). $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$;
- (C1). $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$;
- (C2). $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$;
- (D1). $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$;
- (D2). $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$;
- (D3). $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$;
- (N1). $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$;
- (N2). $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$;
- (N3). $\varphi \vee \neg\varphi$,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$