

Личные записи по топологии

@keba4ok

13 октября 2021г.

Некоторые воспоминания с конца второго курса по топологии, которые напрямую связаны с нынешним материалом, а также важные факты с лекций и практик.

Содержание

Алгебраическая топология.	2
Гомотопии.	2
Фундаментальная группа.	2
Оставшаяся хуйня.	3
Ретракции.	4
Клеточные пространства и накрытия.	6

Алгебраическая топология.

Гомотопии.

Будем считать, что X и Y - топологические пространства, $f, g : X \rightarrow Y$ - непрерывные отображения.

Определение 1. f и g *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ такое, что

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

Определение 2. Отображение H называется *гомотопией* между f и g .

Теорема 1. *Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из X в Y .*

Теорема 2. Пусть X, Y, Z - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.

Определение 3. Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ *связана* на A , если $H(x, t) = H(x, 0), \forall x \in A, t \in [0, 1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

Определение 4. Два пути $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0, 1\}$.

Определение 5. Пусть $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если ε_p и ε_q - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути α . Тогда $\varepsilon_p \alpha \sim \alpha \varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1 - t)$. Тогда $\alpha \alpha' \sim \varepsilon_p$.

Фундаментальная группа.

Определение 6. *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в X с началом и концом в *отмеченной точке* x_0 , обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

Определение 7. *Фундаментальная группа* топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0) / \sim$, где \sim - гомотопность путей с фиксированным концом в x_0 ;

- групповое произведение определяется формулой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

Определение 8. Если γ - путь из p в q (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

Теорема 3. Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Определение 9. (Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением). Если X, Y - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ так:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- * от композиции - композиция * к функциям;
- $\text{id} : X \rightarrow X \Rightarrow \text{id}_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Утверждение 1. $f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

Оставшаяся хуйня.

Определение 10. Топологическое пространство X *односвязно*, если X линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

Теорема 4. S^n односвязно при всех n хотя бы 2.

Следствие. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех n хотя бы 3, односвязно.

Определение 11. X, B - топологические пространства; $p : X \rightarrow B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall u \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое v_i открыто в X и $p|_{v_i}$ - гомеоморфизм между v_i и U .

Пример(ы) 1.

- гомеоморфизм (v_i - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

Теорема 5 (о постоянстве числа листов). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; B - связно. Тогда $|p^{-1}(B)|$ одинаково у всех $b \in B$.

Определение 12. $|p^{-1}(b)|$ - число листов накрытия

Определение 13. $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $f : Y \rightarrow B$ - непрерывное отображение. *Поднятием отображения* f называется непрерывное отображение $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

Теорема 6 (*о поднятии пути*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути α такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.

Лемма 1 (*о непрерывном аргументе*). Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда

- существует непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$;
- такая φ единственная с точностью до добавления числа, кратного 2π .

Теорема 7 (*о поднятии гомотопии*). Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \rightarrow B$ такого, что $H(0, 0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие \tilde{H} , что $\tilde{H}(0, 0) = x_0$.

Следствие. Пусть α, β - пути в B такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначальным, $\tilde{\alpha}(1) \sim \tilde{\beta}(1)$.

Определение 14. Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

Следствие. Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

Следствие. Пусть $p : X \rightarrow B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

Определение 15. Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при p_* называется *группой накрытия*.

Утверждение 2. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

Определение 16. Накрытие $p : X \rightarrow B$ называется *универсальным*, если X односвязно ($\pi_1(X) = \{e\}$, X - линейно связно).

Лемма 2. Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в x_0 , то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проектируется в b_0). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$.

Теорема 8. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, при $n \geq 2$.

Теорема 9. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Следствие. \mathbb{R}^2 не гомеоморфно \mathbb{R}^3 .

Ретракции.

Определение 17. *Ретракция* - непрерывное отображение $f : X \rightarrow A$, где $A \subset X$, такое, что $f|_A = \text{id}_A$. Если существует ретракция $f : X \rightarrow A$, то A называется *ретрактом* пространства X .

Теорема 10. Подмножество A топологического пространства X является его ретрактом тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение $g : A \rightarrow Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \rightarrow Y$.

Лемма 3. Если $\rho : X \rightarrow A$ - ретракция, $\text{in} : A \rightarrow X$ - вложение и $x_0 \in A$, то

- $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ - сюръекция;

- $\text{in} : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ - инъекция.

Теорема 11 (*Теорема Борсука в размерности 2*). Не существует ретракции из D^2 на S^1 .

Определение 18. Точка $a \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f : X \rightarrow X$, если $f(a) = a$. Говорят, что пространство обладает свойством неподвижной точки, если всякое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X$ имеет неподвижную точку.

Теорема 12. Любое непрерывное отображение $f : D^2 \rightarrow D^2$ имеет неподвижную точку.

Определение 19. X и Y *гомотопически эквивалентны* ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ такие, что $g \circ f \sim \text{id}_X$ и $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Такие f и g называются *гомотопически обратными* отображениями. Каждое из f и g называется *гомотопической эквивалентностью*.

Определение 20. Ретракция $f : X \rightarrow A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\text{in} : A \rightarrow X$ гомотопна тождественному отображению, то есть

$$\text{in} \circ f \sim \text{id}_X.$$

Если существуют деформационная ретракция X на A , то A называется *деформационным ретрактом* пространства X .

Теорема 13. Деформационная ретракция - гомотопическая эквивалентность.

Теорема 14. Гомотопическая эквивалентность - отношение эквивалентности между топологическими пространствами.

Определение 21. Класс пространства, гомотопически эквивалентных данному X называется его *гомотопическим типом*. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, - *гомотопические свойства*.

Теорема 15. Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Лемма 4. Пусть $f, g : X \rightarrow Y$ - гомотопные отображения, $H : X \times t \rightarrow Y$ - гомотопия между ними, $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$, $\gamma(t) = H(x_0, t)$ - путь от y_0 к y_1 . Тогда $g_* = T_\gamma \circ f_*$.

Определение 22. Топологическое пространство *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Лемма 5. Пусть $h : S^1 \rightarrow X$ - непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

- h гомотопно постоянному отображению;
- h продолжается до непрерывного отображения $D^2 \rightarrow X$;
- h_* - тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.

Теорема 16. Для любой непрерывной функции $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.

Определение 23. *Топологической парой* (X, A) называется топологическое пространство X с выделенным подмножеством A , на котором мы рассматриваем топологию, индуцированную с X .

Определение 24. Топологическая пара называется *парой Борсука*, если для любого топологического пространства Y , любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и любой гомотопии $F : A \times I \rightarrow Y$ такой, что $F_0 = f|_A$ (напомним, что по определению $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$) существует гомотопия $G : X \times I \rightarrow Y$ такая, что $G_t|_A = F_t$ для всех $t \in I$ и $G_0 = f$. Иными словами, любую гомотопию A внутри Y , начинающуюся с f , можно продолжить до гомотопии всего X .

Утверждение 3. Если (X, A) - пара Борсука и A стягиваемо, то X гомотопически эквивалентно X/A .

Клеточные пространства и накрытия.

Определение 25. *Клеточное пространство* размерности n определяется по индукции следующим образом. Клеточное пространство размерности 0 - дискретное пространство. Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ - топологическое пространство X , которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства Y с размерностью $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска D^n по непрерывным отображениям $\varphi_i : \partial D \rightarrow Y$, где ∂D - краевая сфера диска D^n .

Клеточное разбиение - конкретный способ представить X в таком виде, вместе с аналогичным представлением Y и так далее до размерности 0.

Клетки - внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.

Определение 26. Клеточный комплекс -

- *конечный*, если клеток конечное число;
- *локально конечный*, если клетки образуют локально конечное покрытие;
- *конечномерный*, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется *размерностью* пространства.

Определение 27. Пусть X - клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением. Его k -мерный остов - объединение всех клеток размерности не более k . Обозначение X_k или $\text{sk}_k(X)$.

Теорема 17. Пусть Γ - граф, X - топологическое пространство. Тогда отображение $f : \Gamma \rightarrow X$ - непрерывно тогда и только тогда, когда его сужение на каждое ребро (замкнутое) графа непрерывно.

Теорема 18. Фундаментальная группа букета n окружностей - свободная группа с n образующим (обозначение F_n). В качестве образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.

Теорема 19. Пусть Γ - локально конечный граф. $T \subset \Gamma$ - стягиваемый подграф. Тогда $\Gamma/T \sim \Gamma$.

Следствие. Связный граф с n вершинами и m рёбрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

Следствие. Фундаментальная группа связного графа с n вершинами и m рёбрами - свободная группа с $m - n + 1$ образующими.

Определение 28. Клеточное подпространство клеточного пространства X - замкнутое множество $Y \subset X$, состоящее из целых клеток.

Теорема 20. Пусть

- X - клеточное пространство, $Y \subset X$ - клеточное подпространство;
- Z - топологическое пространство, $f : X \rightarrow Z$ - непрерывное отображение;
- $H_0 : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ - гомотопия, $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$.

тогда существует гомотопия $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$, продолжающая H_0 и такая, что $H(\cdot, 0) = f$.

Лемма 6. Пусть Γ - локально конечный граф, $T \subset \Gamma$ - стягиваемый подграф. Тогда существует непрерывное $h : \Gamma \rightarrow \Gamma$ такое, что

- $h|_T = \text{const}$;
- $h \sim \text{id}_\Gamma$;
- существует такая гомотопия $\{h_t\}$ между id и h , что $h_t(T) \subset T$ при всех T .

Теорема 21. Пусть Y - топологическое пространство, X получается приклеиванием к Y диска D^2 по непрерывному отображению $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow Y$, $x_0 = \alpha(1, 0)$. Тогда

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0) / N([\alpha]),$$

где $N([\alpha])$ - нормальное замыкание элемента $[\alpha]$ фундаментальной группы $\pi_1(Y, x_0)$.

Теорема 22. При приклеивании клетки размерности $n \geq 3$ фундаментальная группа не меняется.

Лемма 7 (о свободной точке). Существует $H_1 : X \rightarrow X$, совпадающее с H на краю K и такое, что образ H_1 не покрывает $X \setminus Y$.

Следствие. Фундаментальная группа конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

Следствие. Пусть X - конечномерное связное пространство, T - максимальное дерево в X и $x_0 \in T$. Для каждой одномерной клетки $e \subset X \setminus T$ выберем петлю s_e , начинающуюся в x_0 , проходящую по T до e и возвращающуюся (вновь по T) в исходную точку x_0 . Тогда гомотопические классы петель s_e являются свободными образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

Следствие. Если $\pi_1(Y, x_0)$ задана образующими и соотношениями, то $\pi_1(X, x_0)$ получается добавлением $[\alpha]$ в список соотношений.

Определение 29. Группа называется *конечно представленной*, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

Следствие. Фундаментальная группа конечного клеточного пространства - конечно представленная группа.

Следствие. Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

Утверждение 4. Пусть $p : X \rightarrow Y$ и $q : Y \rightarrow Z$ - накрытия. Тогда если q - конечнолистно, то $q \circ p : X \rightarrow Z$ - накрытие.

Утверждение 5. Следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

Определение 30. *Морфизмом накрытий* $p_X : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ и $p_Y : (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ - это непрерывное отображение $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, такое что

$$p_Y \circ f = p_X.$$

Определение 31. *Группой накрытия* $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ называется $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$.

Предметный указатель

Гомотопический тип, 5

Гомотопия, 2

 связанная, 2

Группа

 конечно представленная, 7

 накрытия, 4, 8

 фундаментальная, 2

Лемма

 о непрерывном аргументе, 4

 о поднятии гомотопии, 4

Морфизм накрытий, 8

Накрытие, 3

 универсальное, 4

Отображения

 гомотопные, 2

Пара Борсука, 6

Петля, 2

 стягиваемая, 4

Поднятие отображения, 3

Произведение путей, 2

Пространство

 клеточное, 6

 односвязное, 3

 стягиваемое, 5

Ретракция, 4

 деформационная, 5

Теорема

 Борсука в размерности 2, 5

 о поднятии пути, 4

 о постоянстве числа листов, 3

Топологическая пара, 5

Точка

 неподвижная, 5

Эквивалентны

 гомотопически, 5