Геометрия и Топология

Мастера конспектов

14 января 2020 г.

Table of contents

Содержание

1 Билет

Метрические пространства, произведение метрических пространств, пространство $\mathbb{R}^n$.

Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Пара (X, d), где d - метрика в X, называется *метрическим пространством.*

Теорема 1. *(Прямое произведение матриц). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) - метрические пространства. Тогда функция*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_y(y_1, y_2)^2}$$

задаёт метрику на $X \times Y$.

Доказательство. 1 и 2 аксиомы очевидны. Проверим выполнение третьей. Сделать это несложно, нужно всего лишь написать неравенство и дважды возвести в квадрат. Можно как-нибудь поиспользовать Коши или КБШ, на ваш вкус. □

Пространство $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y + n)$, на котором задана метрика

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

(которая называется *евклидовой*), есть $\mathbb{R}^n$.

2 Билет

Шары и сферы. Открытые множества в метрическом пространстве. Объединения и пересечения открытых множеств.

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

  Множества

  $$B_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\},$$
  $$\overline{B_r}(a) = D_r(a) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}.$$

  называются, соответственно, открытым шаром (или просто шаром) и замкнутым шаром пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r.

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется открытым в метрическом пространстве, если

  $$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A.$$

  Примеры:

– $\varnothing$, X и $B_r(a)$ открыты в произвольном метрическом пространстве X.
– В пространстве с дискретной метрикой любое множество открыто.

•

Теорема 2. *В произвольном метрическом пространстве X*

1. *объединение любого набора открытых множеств открыто;*
2. *пересечение конечного набора открытых множеств открыто.*

Доказательство.

1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \exists j \in I : x \in U_j \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_j \subseteq U.$$

2. Пусть семейство $\{U_i\}_{i=1}^n$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \forall i : x \in U_i \Rightarrow \exists r_i : B_{r_i}(x) \subseteq U_i;$$
$$r := min\{r_i\} \Rightarrow B_r \subseteq U.$$

□

3 Билет

Топологические пространства. Замкнутые множества, их объединения и пересечения. Замкнутость канторова множества.

Определение: Пусть X - произвольное множество, и множество $\Omega \subset \rho(X)$ обладает следующими свойствами:

- $\emptyset, X \in \Omega$
- Объединение любого набора множеств из Ω также лежит в Ω
- Пересечение любого конечного набора множеств из Ω также лежит в Ω

В таком случае:

- Ω - *топологическая структура* (или *топология*) на X.
- Множество X с выделенной топологической структурой называется *топологическим пространством*
- Элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω)

Определение: Множество $F \subseteq X$ называется *замкнутым* в X, если $X \backslash F$ открыто

Теорема 3. *В произвольном топологическом пространстве X:*

1. *$\emptyset$ и X замкнуты*

2. *Объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто*

3. *Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто*

Доказательство. Замкнутость множеств их всех трёх пунктов проверяется по определению:

1. $\emptyset = X \backslash X$ и $X = X \backslash \emptyset$

2. $X \backslash \bigcap F_i = \bigcup (X \backslash F_i)$

3. $X \backslash \bigcup F_i = \bigcap (X \backslash F_i)$

В пунктах (b) и (c) мы использовали формулы Де Моргана. □

Примеры:

- В дискретной топологии все множества замкнуты

- В антидискретной топологии замкнуты только $\emptyset$ и X

- В метрическом пространстве любое одноточечное множество замкнуто.

  Доказательство. $X \backslash \{a\} = \bigcup_{b \in X \backslash \{a\}} B_{d(b,a)}(b)$ - открыто. □

- В метрическом пространстве любой замкнутый шар замкнут

  Доказательство. Для каждой точки $b \in X \backslash D_r(a)$ можно выбрать открытый шар $B_{d(b,a)-r}(b)$, который, во-первых, корректно определён (так как $b \notin D_r(a) \Rightarrow d(b,a) > r$), а во-вторых, не содержит точек из $D_r(a)$ (так как если $c \in B$ и $c \in D$, то $\Rightarrow d(c,b) < d(b,a) - r \Rightarrow d(c,a) \geq d(c,b) + d(b,a) > r$ и $d(c,a) \leq r$, противоречие) □

- Канторово множество замкнуто в стандартной топологи на $\mathbb{R}$

  Доказательство. Следует из построения множества. □

Утверждение-сюрприз от leon.tyumen: Пусть U открыто в X, а V замкнуто. Тогда:

- $U \backslash V$ открыто в X.

  Доказательство. $U \backslash V = U \cap (X \backslash V)$ □

- $V \backslash U$ замкнуто в X.

  Доказательство. $V \backslash U = V \cap (X \backslash U)$ □

4 Билет

Внутренность, замыкание и граница множества: определение и свойства включения, объединения, пересечения.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Внутренностью* множества A называется объединение всех открытых множество, содержащихся в A, т. е.:

$$\text{Int}A = \bigcup_{U \in \Omega, U \subseteq A} U.$$

Свойства:

- $\text{Int}A$ - открытое множество;
- $\text{Int}A \subseteq A$;
- B открыто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \text{Int}A$;
- $A = \text{Int}A \Leftrightarrow A$ открыто;
- $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$;
- $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}A \subseteq \text{Int}B$;
- $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$;
  Доказательство:
  $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}A \dots$;
  $\supseteq$: $\text{Int}A \cap \text{Int}B \subseteq A \cap B \Rightarrow \text{Int}A \cap \text{Int}B \subseteq \text{Int}(A \cap B)$.
- $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}A \cup \text{Int}B$;
  Доказательство $\neq$:
  $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$,
  $\text{Int}A = \text{Int}B = \emptyset, \text{Int}(A \cup B) = \text{Int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых множество, содержащих A, т. е.:

$$\text{Cl}A = \bigcap_{X \backslash V \in \Omega, V \supseteq A} V.$$

Свойства:

- $\text{Cl}A$ - замкнутое множество;
- $A \subseteq \text{Cl}A$;
- B замкнуто, $B \supseteq A \to B \supseteq \text{Cl}A$;
- $A = \text{Cl}A \Leftrightarrow A$ замкнуто;
- $\text{Cl}(\text{Cl}A) = \text{Cl}A$;
- $A \subseteq B \to \text{Cl}A \subseteq \text{Cl}B$;

- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$;
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$ (на самом деле, даже $\neq$);
- $\mathrm{Cl}A = X \backslash \mathrm{Int}(X \backslash (X \backslash A))$.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *границей* множества A называется разность его замыкания и внутренности: $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Cl}A \backslash \mathrm{Int}A$.

Свойства:

- $\mathrm{Fr}A$ - замкнутое множество;
- $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \backslash A)$;
- A замкнуто $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}A$;
- A открыто $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

5 Билет

Расположение точки относительно множества: внутренние и граничные точки, точки прикосновения, предельные и изолированные точки. Внутренность, замыкание и граница множества: из каких точек они состоят.

- Определения(A - множество в топологическом пространстве):
  1. Окрестностью точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.
  2. Точка называется внутренней для A, если некоторая её окрестность содержится в A.
  3. Точка называется точкой прикосновения для A, если любая её окрестность пересекается с A.
  4. Точка называется граничной для A, если любая её окрестность пересекается с A и с дополнением A
  5. Точка называется изолированной для A, если она лежит в A и некоторая её окрестность пересекается по A ровно по этой точке.
  6. Точка называется предельной для A, если любая её выколотая окрестность пересекается с A.

  Примеры... :(

- 1. Внутренность множества есть множество его внутренних точек:
     - b — внутр. точка для $A \Rightarrow \exists U_\varepsilon(b) \subseteq A \Rightarrow U_\varepsilon(b) \subseteq IntA \Rightarrow b \in IntA$;
     - $b \in IntA \Rightarrow b$ лежит в A вместе с окрестностью $IntA \Rightarrow b$ — внутренняя точка для A.
  2. Замыкание множества есть множество его точек прикосновения: b — точка прикосновения для $A \iff b \notin Int(X \setminus A) \iff b \in ClA$

3. Граница множества есть множество его граничных точек:
   b — граничная точка множества $A \iff (b \in ClA) \wedge (b \in Cl(X \setminus A)) \iff (b \in ClA) \wedge (b \notin IntA) \iff b \in FrA$.
4. Замыкание множества есть объединение множеств предельных и изолированных точек:
   $b \in ClA \iff b$ — точка прикосновения $\iff$ любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая выколотая окрестность b пересекается с A, либо существует выколотая окрестность, не пересекающаяся с A(тогда $b \in A$) $\iff$ либо b — предельная точка, либо b — изолированная точка.
5. Замыкание множества есть объединение граничных и внутренних точек:
   $b \in ClA \iff b$ — точка прикосновения $\iff$ любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая окрестность b пересекается с $X \setminus A$, либо существует окрестность, которая не пересекается $X \setminus A \iff$ либо b — граничная точка, либо b — внутренняя точка.

6 Билет

Сравнение метрик и топологий (грубее/тоньше). Липшицево эквивалентные метрики.

Определение: Топология Ω_1 *слабее (грубее)* топологии Ω_2 на X, если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. В этом случае топология Ω_2 *сильнее (тоньше)* топологии Ω_1

Пример: Из всех топологичских структур на X антидискретная топология - самая грубая; дискретная топология - самая тонкая.

Теорема 4. *Топология метрики d_1 грубее топологии метрики $d_2 \iff$ в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром*

Доказательство. " $\Rightarrow$ " шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в $d_2 \Rightarrow$ точка a входит в $B_r^{d_2}(a)$ вместе с некоторой своей окрестностью $B_q^{d_2}(a)$ " $\Leftarrow$ " U открыто в $d_1 \Rightarrow \forall a \in U \exists q > 0 : B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow \exists r > 0 : B_r^{d_2}(a) \subseteq B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow U$ открыто в d_2 ☐

Следствие 1: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X. Если $d_1(a,b) \leq d_2(a,b)$ для любых $a, b \in X$, то топология d_1 грубее топологии d_2

Доказательство. $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \forall r > 0 \forall a \in X B_r^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a) \iff$ топология d_1 грубее топологии d_2 ☐

Определение: Две метрики в одном множестве называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

Лемма: Пусть (X, d) - метрическое пространство. Тогда для любого $C > 0$ функция $C \cdot d$ - тоже метрика, причём эквивалентная метрике d.

Доказательство. НУ ОЧЕВИДНО ЖЕ ☐

Следствие 2: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X, причём для любых $a, b \in X$ выполнено $d_1(a,b) \leq C d_2(a,b)$. Тогда топология d_1 грубее топологии d_2.

Доказательство. По лемме d_2 и $C \cdot d_2$ эквивалентны, а по следствию 1 d_1 грубее $C \cdot d_2$ $\square$

Определение: Метрики d_1, d_2 называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$ такие, что для любых $a, b \in X$ $c \cdot d_2(a,b) \leq d_1(a,b) \leq C \cdot d_2(a,b)$

Теорема 5. *Если метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны, то они эквивалентны.*

Доказательство. Согласно следствию 2, каждая из метрик грубее другой $\Rightarrow$ они эквивалентны. $\square$

Упражнение: Верно ли обратное утверждение?

Ответ на упражнение: Ну вроде верно (порождаемые топологии-то совпадают), но что-то как-то странно.

Пример: Три метрики на $\mathbb{R}^2$ - Евклидова, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ и $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ эквивалентны (точки - это (x_1, y_1) и (x_2, y_2)).

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому первая и вторая метрики эквивалентны по предыдущей теореме. Аналогично, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому вторая и третья метрики также эквивалентны. $\square$

Определение: Топологическое пространство называется *метризуемым*, если существует метрика, порождающая его топологию.

Примеры:

- Дискретная топология порождается дискретной метрикой
- X с антидискретной топологией неметризуемо при $|X| > 1$

  Доказательство. Пусть $a, b \in X$ $(a \neq b)$, и $r = d(a,b)$. Тогда шар $B_r(a)$ открыт, непуст (так как $a \in B_r(a)$) и не совпадает со всем пространством (так как $b \notin B_r(a)$) $\square$

7 Билет

База топологии: два определения и их эквивалентность. Критерий базы

Базой топологии Ω называется такой набор Σ открытых множеств, что всякое открытое множество представимо в виде объединения множество из Σ.

$$\Omega \supseteq \Sigma \text{ - база } \Leftrightarrow \forall U \in \Omega \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W.$$

Теорема 6. *(Второе определение базы). Пусть (X, Ω) - топологическое пространстви и $\Sigma \subseteq \Omega$. Σ - база топологии Ω $\Longleftrightarrow \forall U \in \Omega \forall a \in U \exists V_a \in \Sigma : a \in V_a \subseteq U$.*

Доказательство. Совсем немного формулок:

- $\forall U \in \Omega$ и $\forall a \in U$.
  Σ – база $\Rightarrow \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W\in\Lambda} W \Rightarrow \exists V_a \in \Lambda : a \in V_a$
- $\forall U \in \Omega : U = \bigcup_{a\in U} V_a$.

□

Теорема 7. *(Критерий базы). Пусть X - произвольное множество и $\Sigma = \{A_i\}_{i\in I}$ - его покрытие. Σ - база некоторой топологии $\iff \forall A_s, A_m \in \Sigma \exists J_{s,m} \subseteq I : A_s \cap A_m = \bigcup_{j\in J_{s,m}} A_j$.*

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: $\Rightarrow$ По определению базы и открытости множеств $A_s \cup A_m$. $\Leftarrow$ Пусть Ω - совокупность всевозможных объединений множеств из Σ. Докажем, что Ω - топология на X.

- Σ - покрытие для $X \Rightarrow X \in \Omega$;
- объединение объединений есть объединение;
- $U, V \in \Omega \Rightarrow U = \bigcup_{s\in S\subseteq I} A_s$ и $V = \bigcup_{m\in M\subseteq I} A_m$,

$$U \cap V = \bigcup_{s,m} (A_s \cap A_m) = \bigcup_{s,m} \left(\bigcup_{j\in J_{s,m}} A_j \right) \in \Omega.$$

□

8 Билет

База топологии в точке. Связь между базой топологии и базами в точках. Предбаза топологии, как из неё получается база.

- Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega.\Lambda$ называется базой топологии(базой окерестностей) в точке a, если:

  1. $\forall U \in \Lambda : a \in U$;
  2. $\forall U_\varepsilon(a) \exists V_a \in \Lambda : V_a \subseteq U_\varepsilon(a)$.

  Следствия

  1. Σ — база топологии $\Rightarrow \forall a \in X\ \Sigma_a := \{U \in \Sigma : a \in U\}$ — база в точке a.
  2. Пусть $\{\Sigma_a\}_{a\in X}$ — семейство баз во всех точках. Тогда $\bigcup_{a\in X} \Sigma_a$ — база топологии.

  Пример

  Множество $\Sigma_a = \{B_r(a) : r \in \mathbb{R}_+\}$ является базой метрического пространства в точке а.

- Набор Δ открытых множеств топологического пространства (X, Ω) называется предбазой топологии, если Ω — наименьшая по включению топология, содержащая Δ.

Теорема 8. *Любой набор Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X.*

Доказательство. Очевидно, Δ будет предбазой *топологии объединений конечных пересечений подмножеств* Δ $(X \bigcup \left\{\cup\{\cap_{i=1}^{k} W_i\}\right\}, W_i \in \ \Delta)$. □

Пример (*Следствие*)

База топологии является её предбазой.

9 Билет

Топология подпространства. Свойства: открытость и замкнутость подмножеств, база индуцированной топологии, транзитивность, согласованность с метрическим случаем.

Определение: Пусть (X, Ω) - топологическое пространство, и $A \subseteq X$. Тогда совокупность $\Omega_A = \{U \cap A : U \in \Omega\}$ - топология на множестве A.

Доказательство. Просто проверка аксиом топологии. □

Определение:

- Ω_A - *индуцированная топология*
- (A, Ω_A) - *подпространство* пространства (X, Ω).

Свойства:

- Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в самом пространстве
  Пример: $X = \mathbb{R}, A = [0, 1]$. Тогда $[0, 1)$ открыто в A, но не в X.
- Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.

  Доказательство. U открыто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : U = V \cap A$, т.е. открыто в X, как пересечение двух открытых множеств. □

- Множества, замкнутые в подпространстве, не обязательно замкнуты в самом пространстве

  Пример: $X = \mathbb{R}, A = (0, 1)$. Тогда $(0, \frac{1}{2}] = (0, 1) \backslash (\frac{1}{2}, 1))$ замкнуто в A, но не в X.

- Замкнутые множества замкнутого подпространства замкнуты и во всём пространстве.

  Доказательство. U замкнуто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : A \backslash U = V \cap A$, но тогда $X \backslash U = (X \backslash A) \cup V$ т.е. открыто в X, как объединение двух открытых множеств. Значит, U замкнуто в X. □

- **База индуцированной топологии:** Если Σ - база топологии Ω, то $\Sigma_A = \{U \cap A : U \in \Sigma\}$ - база топологии Ω_A.

Доказательство. Просто проверка определения базы. □

- **"Транзитивность"индуцированных топологий:** Пусть X - топологическое пространство, и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$

  Доказательство. Так как $U \cap B = (U \cap A) \cap B$, то $\Omega_B \subseteq (\Omega_A)_B$. Покажем обратное. Пусть $U \in (\Omega_A)_B$. Это значит, что существует открытое в A множество V такое, что $U = B \cap V$. V открыто в $A \Rightarrow$ существует открытое в X множество W такое, что $V = X \cap W$. Но тогда $U = B \cap (X \cap W) = B \cap W \Rightarrow U$ открыто в X. □

- **Связь с метрическим случаем:** Пусть (X, d) - метрическое пространство, и $A \subseteq X$. Рассмотрим метричесоке пространство $(A, d_{|A})$, а также порождаемую его метрикой топологию Ω''_A. Кроме того, рассмотрим топологичесоке пространство (X, Ω), порождаемую метрикой d, и его сужение (A, Ω_A) на A. Тогда $\Omega_A = \Omega''_A$

  Доказательство. $U \in \Omega''_A \iff U = \bigcup B^A_{r_i}(a_i) \iff U \overset{a_i \in A}{=} A \cup \left(\bigcup B^X_{r_i}(a_i)\right) \overset{(!)}{\Longrightarrow} U = A \cap V \iff U \in \Omega_A$. Таким образом, мы доказали одно вложение, и для полного счастья нам не хватает только равносильности в моменте (!). Мы победим, если для данного U, открытого в A, сможем выбрать открытое $V \in X$ такое, что $U = V \cap A$, и V представляется в виде объединения шаров из X с центрами из A. Но действительно, поскольку U открыто в A, существует какое-то V' : $U = V' \cap A$. Рассмотрим $V = \bigcup_{a_i \in V' \cap A} B^X_{r_i}(a_i)$, где $B^X_{r_i}(a_i)$ - шары, полностью содержащиеся в X (они существуют в силу его открытости). Тогда $U = V \cap A$, V открыто в X и удовлетворяет условию, которое мы так от него ждали. □

10 Билет

Непрерывные отображения. Непрерывность композиции и сужения, замена области значений.

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества пространства Y является открытым подмножеством пространства X.

Также можно упомянуть, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Доказательство. $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$. □

Теорема 9. *(О композиции непрерывных). Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ - непрерывны. Если $U \in \Omega_Z$, то $g^{-1}(U) \in \Omega_Y$, значит, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_X$. □

Теорема 10. *(О сужении отображения). Пусть Z - подпространство X и $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. $\mathrm{in}_Z : Z \to X$ непрерывно, а также $f|_Z = f \circ \mathrm{in}_Z$. □

Теорема 11. *(Об изменении области значений). Пусть Z - подпространство Y, $f : X \to Y$ - отображение и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\tilde{f} : X \to Z$, т. ч. $\tilde{f}(x) = f(x)$. Тогда f непрерывная $\iff$ $\tilde{f}$ непрерывна.*

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: $\Leftarrow$ $f = \mathrm{in}_Z \circ \tilde{f}$. $\Rightarrow$ $\forall U \in \Omega_Z \exists W \in \Omega_Y : U = W \cup Z$. $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(W) \in \Omega_X$. □

11 Билет

Непрерывность в точке. Глобальная непрерывность эквивалентна непрерывности в каждой точке. Непрерывность и база окрестностей в точке.

- Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если $\forall U_\varepsilon(f(a))\ \exists V_\delta(a) : f(V_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$. Пример:(...

  Теорема 12. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно $\iff$ оно непрерывно в каждой точке пространства.*

  Доказательство:

  ($\Rightarrow$) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

  ($\Leftarrow$) Пусть $U \in \Omega_Y \Rightarrow \forall a \in f^{-1}(U)\ \exists V_\varepsilon(a) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \Omega_X$

  □

- **Теорема 13.** *Пусть X, Y — топологические пространства, $a \in X, f : X \to Y$ — отображение, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall U \in \Lambda_{f(a)}\ \exists V_a \in \Sigma_a : f(V_a) \subseteq U$.*

  Доказательство:

  ($\Rightarrow$) f непрерывно в точке $a \Rightarrow \big(\forall U \in \Lambda_{f(a)}\ \exists W_\varepsilon(a) : f(W_\varepsilon(a)) \subseteq U\big) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : V \in W_\varepsilon(a))$.

  ($\Leftarrow$) $\big(\forall U_\varepsilon(f(a)) \exists U \in \Lambda_{f(a)} : U \subseteq U_\varepsilon(f(a))\big) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : f(V) \subseteq U \subseteq U_\varepsilon(f(a)))$

  □

12 Билет

13 Билет

Фундаментальные покрытия. Их применение для доказательства непрерывности функций. Фундаментальность открытых и конечных замкнутых покрытий.

Покрытие $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : (\forall A_i \in \Gamma, U \cap A_i \text{ открыто в } A_i) \Rightarrow (U \text{ открыто в } X).$$

Теорема 14. *Пусть X, Y - топологические пространства, $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ - фундаментальное покрытие X и $f : X \to Y$ - отображение. Если $\forall A_i \in \Gamma$ сужение $\Gamma|_{A_i}$ непрерывно, то и само отображение f непрерывно.*

Доказательство. Хотим показать, что прообраз любого V, открытого в Y, открыт в X. Открытое в A_i $(f|_{A_i})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$, так как $f|_{A_i}$ непрерывна. Тогда $f^{-1}(V) \cap A_i$ открыто в A_i. Пусть $U = f^{-1}(V) \in X$, и для любого i мы тогда знаем, что $U \cap A_i$ открыто в A_i. Тогда из фундаментальности, U открыто в X. ☐

Покрытие топологического пространства называется:

- *открытым*, если оно стоит из открытых множеств;
- *замкнутым*, если оно состоит из замкнутых множеств;
- *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 15. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A, а значит открыто в X. Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально. ☐

Теорема 16. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A, а значит замкнуто в X. Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально. ☐

14 Билет

Фундаментальность локально конечных замкнутых покрытий.

Покрытие называют *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Пример... :(

Теорема 17. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство:

Пусть $\{A_i\}$ — локально конечное замкнутое покрытие. Хотим проверить его фундаментальность;

1. Пусть U — произвольное множество, такое что $U \cap A_i$ — открытое в A_i.
2. В каждой точке b пространства рассмотрим окрестность U_b, перескающуюся с конечным числом множеств покрытия(локальная конечность). Тогда $\{U_b\}$ — открытое покрытие пространства $\Rightarrow$ оно фундаментально(13 билет).
3. Зафиксируем b, тогда $\{U_b \cap A_i\}$ — конечное замкнутое покрытие $U_b \Rightarrow \{U_b \cap A_i\}$ — фундаментальное покрытие U_b(13 билет).

Покажем, что $\forall b\, ((U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i))$ — открыто в $U_b \cap A_i \Rightarrow U \cap U_b$ — открыто в U_b(фундаментальность из п.3) $\Rightarrow U$ — открыто в пространстве(фундаментальность п.2).

Действительно, $(U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i) = (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i), U \cap A_i$ — открытое в A_i(п.1) $\Rightarrow U \cap A_i = V \cap A_i$, где V — открытое во всём пространстве(определение открытого в подпространстве) $\Rightarrow (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = (V \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = V \cap (U_b \cap A_i)$ — открытое в $U_b \cap A_i$

□

15 Билет

16 Билет

Непрерывность и произведение: проекции, теорема о покоординатной непрерывности.

$X = \Pi_{i \in I} X_i$ - произвеиение топологических пространств.

Теорема 18. *Координатные проекции $p_i : X \to X_i$ непрерывны.*

Доказательство. $\forall U$ открытого в X_i: $p_i^{-1}(U)$ - элемент предбазы Тихоновской топологии (по определению), следовательно открыт в X. □

(Отображение в произведение двух) Пусть X, Y, Z – топологические пространства. Любое отображение $f : Z \to X \times Y$ имеет вид

$$f(z) = (f_1(z), f_1(z)), \text{ для всех } z \in Z,$$

где $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$ - некоторые отображения, называемые *компонентами* отображениями f.

(Отображение в произведение дохуя) Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ - топологические пространства. *Компонентами* отображения $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ называются отображения $f_i : Z \to X_i$, задаваемые формулами

$$f_i := p_i \circ f$$

Теорема 19. *(О покоординатной непрерывности). Пусть Z и $\{X_i\}_{i\in I}$ - топологические пространства, $X = \Pi_{i\in I} X_i$ - тихоновское произведение. Тогда отображение $f : Z \to \Pi_{i\in I} X_i$ непрерывно, равносильно тому что каждая его компонента f_i непрерывна.*

Доказательство. Докажем в обе стороны:

$\Rightarrow$ $f_i = p_i \circ f$, при этом p_i и f непрерывны, следовательно, и f_i непрерывна.

$\Leftarrow$ Сначала для любого U из предбазы X существует такой индекс $i \in I$ и $V \in \Omega_i$ такой, что $U = p_i^{-1}(V)$. Тогда $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(U) = f_i^{-1}(V)$ - открытое, так как f_i непрерывно.

$\forall W$ открытого в X, $W = \bigcup$ (конечных пересечений эл-в предбазы) (далее - $\bigcup_{fuck}$)

$f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{fuck}) = \bigcup f^{-1}$(конечных пересечений) $= \bigcup$ (конечных пересечений прообразов элементов предбазы)

□

Дополнительно от keba4ok: Также для проверки на непрерывность $f : X \to Y$ достаточно проверить открытость $f^{-1}(U)$ для всякого U из какой-либо базы или предбазы Y.

17 Билет

Пример функции на плоскости, непрерывной по каждой координате, но разрывной.

Функция : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная уравнением

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Непрерывна по каждой координате, но разрывна в точке (0,0).

Доказательство. Док-во непрерывности функции $f(x) = \frac{2cx}{x^2+c^2}$ полагаем, не представляет труда доказать студентам, получившим 5 за матанализ. А в точке (0,0) функция разрывна, так как при $x = y \neq 0$ функция равна 1. □

18 Билет

19 Билет

Гомеоморфизм. Гомеоморфные интервалы на прямой, $S^n \backslash \{p\}$ и $\mathbb{R}^n$.

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

- f - биекция;
- f - непрерывно;
- f^{-1} - непрерывно;

Говорят, что пространство X *гомеоморфно* пространству Y ($X \simeq Y$), если существует гомеоморфизм $X \to Y$.

Дополнительно от keba4ok: Гомеоморфность - отношение эквивалентности среди топологических пространств.

Примеры на прямой, плоскости и т.д....:(

20 Билет

Аксиомы счётности. Теорема Линделёфа.

Будем считать, что множество X счётно, если существует инъекция $X \to \mathbb{N}$ (всякое подмножество счётного - счётно).

1. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, если оно обладает счётными базами во всех своих точках.
2. Топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме счётности*, если оно имеет счётную базу.
3. Топологическое свойство называется *наследственным*, если из того, что пространство X обладает этим свойством, следует, что любое его подпространство тоже им обладает(аналогично про наследование при произведении).

Свойства:

1. $2AC \Rightarrow 1AC$:

   см. 8 билет
2. Обратное неверно:

   X — несчётное множество с дискретной метрикой. Тогда в каждой точке есть счётная база - сама точка, но при этом счётной базы всего пространства нет — каждый элемент должен входить в базу.

3. Всякое метрическое пространство удовлетворяет $1AC$:
   Шары вида $B_{\frac{1}{n}}(a)$, где $n \in \mathbb{N}$ — база в точке a.
4. $2AC$ наследственна(в обоих смыслах):
   - Пересечём базу с подмножеством — получится счётная база подпространства.
   - Рассмотрим декартово произведение счётных баз — получим счётную базу декартова произведения пространств.

Теорема 20 (Теорема Линделёфа)**.** *Если пространство удовлетворяет $2AC$, то из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие X, а Σ — счётная база. Рассмотрим $\Lambda := \{V \in \Sigma | \exists U_i : V \in U_i\}$. Заметим, что Λ — покрытие любого U_i(из определения базы) $\Rightarrow \Lambda$ — покрытие X, тогда каждому $V \in \Lambda$ сопоставим произвольное U_j, в котором оно лежит. Тогда $\{U_j\}$ — счётное покрытие X. □

21 Билет

22 Билет

Аксиомы отделимости $T_1 - T_3$. Замкнутость диагонали в $X \times X$. Критерий регулярности.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* T_1, если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме отдельности* T_2, если любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющий аксиоме T_2, называются *хаусдорфовыми.*

Теорема 21. *(Замкнутость ёбаной диагонали). X хаусдорфово равносильно тому, что $\{(a,a) : a \in X\}$ замкнуто в $X \times X$.*

Доказательство. (by lounres)

$\Rightarrow$ Покажем, что $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Пусть $(b, c) \notin \Delta$. Тогда по T_2 есть окрестности U_b и U_c точек b и c в X, что $U_b \cap U_c = \varnothing$. Следовательно $(U_b \times U_c) \cap \Delta = \varnothing$, тогда $U_b \times U_c$ — окрестность (b, c), лежащая в $(X \times X) \setminus \Delta$ как подмножество.

$\Leftarrow$ Пусть b и c - различные точки X. Тогда $(b, c) \notin \Delta$. Поскольку Δ замкнуто, то $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Поскольку $\{U \times V \mid U, V \in \Omega_X\}$ — база $X \times X$, то есть некоторые открытые в X множества U и V, что

$$(b, c) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Следовательно, $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$, а значит, $U \cap V = \varnothing$. При этом $b \in U$, а $c \in V$. Значит U и V — непересекающиеся окрестности b и c. Поскольку b и c случайны, то выполнена T_2. □

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости* T_3, если в нём любое замкнутое множество илюбая не содержащаяся в этом множестве точка обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются *регулярными.*

Теорема 22. *(Критерий блядской регулярности). X регулярно тогда и только тогда, когда удовлетворяет T_1 и $\forall a \in X$ любой окрестности U_a существует окрестность V_a такая, что $ClV_a \subseteq U_a$.*

Доказательство. (by lounres)

$\Rightarrow$ Пусть U_a — некоторая окрестность некоторой точки a в X. Тогда $X \setminus U_a$ замкнуто. По T_3 у $X \setminus U_a$ и a есть непересекающиеся окрестности W_a и V_a соответственно. Тогда $X \setminus W_a$ замкнуто; при этом $W_a \supseteq X \setminus U_a$, следовательно $X \setminus W_a \subseteq U_a$; аналогично имеем, что $V_a \subseteq X \setminus W_a$. Следовательно

$$\operatorname{Cl}(V_a) \subseteq X \setminus W_a \subseteq U_a.$$

Таким образом мы нашли искомую окрестность V_a.

$\Leftarrow$ Пусть даны замкнутое F и точка a вне него. Тогда $U_a := X \setminus F$ — окрестность a. Тогда есть окрестность V_a точки a, что $\operatorname{Cl}(V_a) \subseteq U_a$. Следовательно $\operatorname{Int}(X \setminus V_a) \supseteq X \setminus U_a = F$. Значит $\operatorname{Int}(X \setminus V_a)$ и V_a — непересекающиеся окрестности F и a. □

23 Билет

Аксиома отделимости T_4. Нормальномть метрических пространств.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *четвёртой аксиоме отделимости*, если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями.

Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называывается *нормальным.*

Теорема 23. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть (X,d) — метрическое пространство. В нём выполняется $T_1(r = \frac{d(x,y)}{2})$. Покажем T_4 — пусть A,B — непересекающиеся замкнутые множества. $X \setminus B$ — открытое и содержит $A \Rightarrow \forall a \in A \exists r_a : B_{r_a}(a) \subseteq X \setminus B \iff B_{r_a}(a) \cap B = \varnothing$. Аналогично для каждой точки b из B находим окрестность $B_{r_b}(b)$, не пересекающуюся с A. Рассмотрим $U = \bigcup B_{\frac{r_a}{2}}(a)$ и $V = \bigcup B_{\frac{r_b}{2}}(b)$. Допустим $z \in (U \cap V)$(иначе мы нашли две непересекающиеся окрестности, т.к. объединение открытых - открыто). $z \in (U \cap V) \Rightarrow \exists x \in A, y \in B : z \in (B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap B_{\frac{r_y}{2}}(y)) \Rightarrow d(x,y) \leq \frac{r_x}{2} + \frac{r_y}{2} \leq max(r_x,r_y) \Rightarrow (x \in B_{r_y}y) or (y \in B_{r_x}(x))$— противоречие. □

Дополнительно от artemi.sav:

X — нормально $\Rightarrow X$ — регулярно $\Rightarrow X$ — хаусдорфо $\Rightarrow X$ удовлетворяет T_1.

Заметим, что из T_1 следует, что любая точка - замкнута, из чего следует, что каждое следующее условие — частный случай предыдущего (например, X — нормально, то есть удовлетворяет T_4 и T_1, вместо одного замкнутого множества в условии T_4 можем взять точку и получить T_3, то есть регулярность).

24 Билет

25 Билет

Непрерывный образ связного пространства. Теорема о промежуточном значении.

Теорема 24. *(Непрерывный образ связного пространства связен). Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение и пространство X связно, то и множество $f(X)$ связно.*

Доказательство. От противного, пусть $f(X)$ несвязно. Тогда $f(X) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, где U, V непусты и открыты.

Следовательно, мы имеем разбиение пространства X на два непустых открытых множества - $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, что противоречит связности пространства X. □

Теорема 25. *(О промежуточном значении). Если $f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывное отображение, и пространство X связно, тогда для любых $a, b \in f(X)$ множество $f(X)$ содержит все числа между a и b.*

Доказательство. $f(X)$ связно $\Rightarrow f(X)$ выпукло $\Rightarrow f(x)$ содержит $[a,b]$. □

26 Билет

Компоненты связности. Разбиение пространства на компоненты связности.

Компонентой связности пространства X называется всякое его максимальное по включению связное подмножество.

Лемма. *Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.*

Доказательство. Обозначим это семейство множеств за $\{A_i\}, Y := \bigcup A_i$. Допустим Y — несвязно, тогда $Y = U \cup V$, где U и V — открытые непересекающиеся множества. Заметим, что $\forall A_i : A_i \subseteq U \vee A_i \subseteq V$(иначе $A_i = (A_i \cap U) \cup (A_i \cap V)$, где $A_i \cap U$ и $A_i \cap V$ — непустые открыте подмножества в A_i). Зафиксируем A_0, НУО $A_0 \subseteq V \Rightarrow \forall A_i (A_i \cap A_0 \neq \varnothing) \Rightarrow \forall A_i \subseteq V \Rightarrow U = \varnothing$, противоречие. □

Теорема 26. *1. Каждая точка пространства X содержится в некоторой компоненте связности.*

2. Различные компоненты связности пространства X не пересекаются.

Доказательство.

1. Пусть $x \in X$. Тогда множество A — объединение всех связных множеств, содержащих x, является искомой компонентой связности(оно связно по лемме и наибольшее по включению по своему определению).

2. Пусть U,V — пересекающиеся компоненты связности, тогда $U \cup V$ — связное множество(по лемме), содержащее U и V, что противоречит определению компоненты связности.

□

Table of objects

27 Пофамильный указатель всего на свете

Быстрый список для особо заебавшегося поиска.

метрика