

Теория вероятностей. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Давыдова Ю. А.,
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по теории вероятностей.

Содержание

1	Лекция 1.	3
2	Лекция 2.	5
3	Лекция 3.	8
4	Лекция 4.	9
5	Пофамильный указатель всех важных предметов	12

1 Лекция 1.

Начинаем мы с самого базового - аксиоматики и введения определений.

Определение 1. Ω - пространство элементарных событий или множество элементарных исходов, есть множество, состоящее из ω_i , элементарных событий. Нам важно лишь, чтобы это множество было непустым. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - некоторая совокупность подмножеств Ω , есть множество событий, элементы которого есть A_i - события.

Определение 2. \mathbb{P} - вероятность $A \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ - вероятность события A .

Определение 3. Вся же тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Для вероятностей существует несколько аксиом:

- $0 \leq \mathbb{P}(A \leq 1)$ для любого события,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- для любого счётного набора попарно непересекающихся события $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ выполняется *счётная аддитивность*:

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Некоторые свойства вероятностей:

- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$;
- $\forall A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Теперь перейдём к некоторым примерам вероятностных пространств:

Пример(ы) 1. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *дискретно*, если Ω не более, чем счётно. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, элементы $\{\omega\}$ также считаем событиями.

Утверждение 1. Несколько предложений:

- Пусть \mathbb{P} - вероятность в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, где $p_\omega = \mathbb{P}\{\omega\}$. При этом $p_\omega \geq 0$, $\sum_\omega p_\omega = 1$.
- Предположим, что $\{p_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ такие, что выполнено последнее предложение предыдущего пункта, тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ - вероятность.

Также, можно упомянуть про *равновероятные исходы*, из названия понятно, что это. Если $|\Omega| < \infty$ и $p_\omega = p$ для любого ω , тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Начнём теперь разбираться с понятием *условная вероятность*.

Пример(ы) 2. Начнём с такого примера. Пусть у нас есть события A, B , причём их пересечение в вероятностном пространстве пусть. Тогда если исполнится B , то A уже исполнится не может.

Определение 4. *Условная вероятность*: $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (при $\mathbb{P}(B) > 0$).

Утверждение 2. Для условной вероятности выполнены аксиомы вероятности.

А теперь - несколько утверждений, которые касаются условной вероятности.

Утверждение 3. (B_n) - разбиение Ω (дизъюнктивный набор, который в объединении даёт всё множество). Тогда для любого A $\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)$.

Доказательство.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_n B_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_n (A \cap B_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) \cdot \mathbb{P}_{B_n}(A).$$

□

Утверждение 4. *Формула Байеса*. Пусть мы знаем событие A , имеется разбиение (B_n) , тогда

$$\mathbb{P}_A(B_k) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{B_n}(A)}$$

Утверждение 5. *Формула умножения*.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_1^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots$$

Перейдём к *независимости событий*. Начнём рассуждения с двух событий: A и B . Если $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, или, что равносильно им обоим $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$, то события называются *независимыми*.

Пусть теперь имеется не два, а больше событий $\{A_1, \dots, A_n\}$. Нельзя сказать, что нам хватает попарной независимости для независимости совокупной.

Пример(ы) 3. (Пирамида Бернштейна). Рассмотрим тетраэдр, у которого стороны покрашены таким образом: белый, синий, красный и флаг России. Рассматриваем события: A_1 - на выпавшем основании есть белый цвет, и так далее A_2 и A_3 . Эти события попарно независимы, но не независимы в совокупности.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2),$$

но тогда

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Таким образом, нужно ввести корректное определение.

Определение 5. События A_1, \dots, A_n *независимы*, если выполнено:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j), \forall i \neq j, \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(A_k), \forall i \neq j \neq k, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_1^n A_i\right) = \prod_1^n \mathbb{P}(A_i).$$

Теорема 1. Пусть имеется T_1, \dots, T_m - разбиение $\{1, \dots, n\}$, независимые события A_1, \dots, A_n , $\{B_j\}_m$ - комбинация (всякие действия между элементами) событий $\{A_s, s \in T_j\}$. Тогда $\{B_j\}$ - независимы.

Доказательство. По индукции. □

Определение 6. *Случайная величина* - это функция $X : \Omega \rightarrow R$.

Пример(ы) 4. Число выпавших решек на n бросках.

Теперь немного о *распределении случайной величины*. Пусть имеется вероятностное пространство и случайная величина X . Нас интересует $\{\omega | X(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}\}$, то есть, мы хотим исследовать попадания случайной величины в те или иные зоны на прямой. Такую вероятность можно рассматривать как вероятность от множества B , но это слишком сложно, поэтому продолжим на таких двух пунктах:

- значения X , $X(\Omega) = \{a_1, \dots\}$, $\{a_k\}$ - значение X ,
- $A_k = \{\omega | X(\omega) = a_k\}$; $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, причём каждая $p_k \geq 0$, а их сумма равна единице.

Тогда мы можем сделать вывод, что $\mathbb{P}\{X \in B\} = \sum_{k|a_k \in B} p_k$, так как левая часть есть $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} A_k\}$, что равно $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} \{x = a_k\}\} = \sum_{k|a_k \in B} \mathbb{P}\{x = a_k\}$, что уже и равно левой части.

Определение 7. Таки образом, совокупность последовательностей $\left\{ \frac{a_k}{p_k} \right\}$ и называется *распределением случайной величины*.

Пример(ы) 5. Приведём примеры распределений:

- *вырожденное*: $X(\omega) = a$ для любого ω .
- *распределение Бернулли*: $B(1, p)$, $p \in [0, 1]$, причём единица принимается с вероятностью p , 0 - иначе.
- *биномиальное*: $B(n, p)$, $p \in [0, 1]$, $X \sim B(n, p)$, если принимаются значения от 0 до n , причём $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}_n(k)$ (просто обозначение), и равно $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

2 Лекция 2.

Приведём ещё несколько примеров распределений:

Пример(ы) 6. • *геометрическое* $X = 1, 2, \dots$, $p \in [0, 1]$. $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$.

- *пуассоновское* $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$, $X = 0, 1, \dots$, $P\{X = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

Независимость случайных величин.

Определение 8. X и Y - независимые случайные величины, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}^1$ события $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ независимы.

Чуть позже бужет критерий независимости, потому что по определению проверить зачастую слишком проблематично.

Определение 9. X_1, X_2, \dots, X_n - независимые случайные величины, если $\forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, $\{X_i \in A_i\}$ независимы.

Теорема 2. (Критерий независимости случайных величин). Предположим, что X_k имеет распределение $(a_{kj})_j, (p_{kj}), k = 1, \dots, n$. Тогда X_i независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}\{X_1 = a_{1j_1}, X_2 = a_{2j_2}, \dots, X_n = a_{nj_n}\} = \prod_{k=1}^n p_{kj_k}$$

Доказательство. Из первого во второе - очевидно. В обратную сторону для начала докажем такой факт: если $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, то тогда

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\{X_k \in A_k\}.$$

Докажем все факты для двух, обобщается это всё не сложно.

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j,s|a_{1j} \in A_1, a_{2s} \in A_2} \bigcap \{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s}\}\right),$$

Но вероятность объединения можно заменить на сумму вероятностей:

$$\sum_{-//-} \mathbb{P}\{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s}\} = \sum_{-//-} p_{1j}p_{2s} = \left(\sum_{j|a_{1j} \in A_1} p_{1j}\right) \left(\sum_{s|a_{2s} \in A_2} p_{2s}\right),$$

что равно

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \mathbb{P}\{X_2 \in A_2\}.$$

Это как раз и даёт нам независимость через немного хитрую вещь. Нам же нужна независимость для любого количества элементов, но казалось бы, у нас есть только для всех X_i . Однако, в лемме можно заменить некоторые A_l на \mathbb{R}^1 , и тогда выражение как раз показывает нам необходимые соотношения на оставшиеся величины. \square

Пример(ы) 7. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha), Y \sim \mathcal{P}(\beta)$ - независимы (пуассоновские распределения). Найдём тогда распределение $X + Y, X + Y = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X + Y = n\} &= \mathbb{P}\{\sqcup_{k=0}^n \{X + Y = n, X = k\}\} = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X + Y = n, X = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X = k, Y = n - k\} = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X = k\} \mathbb{P}\{Y = n - k\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{k(n-)!} e^{-\beta} = e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k \beta^{n-k} = \\ &= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} e^{-(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем вывод: $X + Y \sim \mathcal{P}(\alpha + \beta)$ - пуассоновское распределение.

Испытание Бернулли.

Определение 10. Рассмотрим последовательность ε_k - независимых бернуллиевских величин (два исхода), $\varepsilon_k \sim B(1, p)$,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p \end{cases}$$

$\{\varepsilon_k = 1\}$ означает успех в каком-то испытании. То есть, *испытание Бернулли* - последовательность из однотипных испытаний.

ν_n - число успехов в n испытаниях., что равно $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. Покажем, что распределение биномиально. $\nu_n = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} C_n^k p^k q^{n-k} &= ? \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = \mathbb{P}\{\omega \mid \text{в цепочке } \varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega) \text{ в точности } k \text{ единиц}\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j = k\right\} = \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \mid \text{в } i \text{ } k \text{ единиц}} \mathbb{P}\{\varepsilon_1 = i_1, \dots, \varepsilon_n = i_n\} = \\ &= \sum_{-//-} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Теперь встаёт вопрос: существуют ли независимые бернуллиевские случайные величины. Пусть $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_k = 0 \text{ или } 1\}$; $|\Omega| = 2^n$. $p_\omega = p^k (1-p)^{n-k}$ для $\omega = (i_1, \dots, i_n)$, в которой ровно k единиц. $\sum p_n = 1$, $\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k(i_1, \dots, i_n) = i_k$.

$P_n(k) = \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ - можем ли мы как-то упростить это?

Теорема 3. n испытаний B с вероятностями успеха $p = p_n$, $n \cdot p_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \alpha$, тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_n(k) \rightarrow \pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} (np)^k q^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k q^{n-k} \sim \frac{\alpha^k}{k!} q^{n-k} \end{aligned}$$

Если что, k - константа.

$$\begin{aligned} q^{n-k} &= (1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k} \\ &\sim \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \sim e^{-np_n} = e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге, $P_n(k) \sim \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$. □

А теперь - несколько слов о точности аппроксимации. Оценим $|P_n(k) - \pi_k|$. $\pi_k = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$.

Теорема 4. $\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - \pi_k| \leq 2np^2$.

3 Лекция 3.

Теорема 5. $S_n \sim B(n, p)$; $S \sim \mathcal{P}(np)$, тогда для любого $B \subset \mathbb{R}^1$, $|\mathbb{P}\{S_n \in B\} - \mathbb{P}\{S \in B\}| \leq p^2 n$.

Следствие 1. Пусть $p_k = \mathbb{P}\{S = k\} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$, тогда $\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - p_k| \leq 2p^2 n$.

Доказательство. (Доказательство следствия). Искомая сумма равна $\sum_{k \in B_+} (P_n(k) - p_k) + \sum_{k \in B_-} (p_k - P_n(k))$, где $B_+ = \{k | P_n(k) - p_k \geq 0\}$, а $B_- = B_+^C$ - его дополнение. Тогда, продолжая равенство, получаем $(\mathbb{P}\{S_n \in B_+\} - \mathbb{P}\{S \in B_+\}) + (\mathbb{P}\{S \in B_-\} - \mathbb{P}\{S_n \in B_-\}) \leq 2p^2 n$. \square

Доказательство. (Доказательство теоремы). Поговаривают, что это очень сложно. Начнём строить вероятностное пространство, возьмём носитель \mathbb{N} , где натуральные числа соответствуют вероятностям $q_k = \pi_{k-2}$, $k \geq 3$, $q_1 = 1 - p$, $q_2 = \pi_0 - (1 - p)$, где $\pi_k = \frac{p^k}{k!} e^{-p}$.

Рассмотрим тогда ε_1 и η_1 такие, что $\varepsilon_1(1) = 0$, $\varepsilon_1(k) = 1$, $\forall k \geq 1$, а $\eta_1(1) = 0$, $\eta_1(2) = 0$, $\eta_1(k) = k - 2$, $k \geq 3$. Причём $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 = 0\} = 1 - p$; $\mathbb{P}\{\text{varepsilon}_{\varepsilon_1} = 1\} = p$, то есть, $\varepsilon_1 \sim B(1, p)$, а $\mathbb{P}\{\eta_1 = k\} = \pi_k$, то есть, $\eta_1 \sim \mathcal{P}(p)$. Тогда $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 = \eta_1\} = q_1 + q_3 = 1 - p + pe^{-1}$, а $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 \neq \eta_1\} = p - pe^{-1} = p(1 - e^{-1}) \leq p^2$.

Построим теперь $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, для каждого Ω_i будут свои ε_i и η_i , а $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, где $\omega_i \in \Omega_i$, причём $p_{\bar{\omega}} = \prod p_{\omega_i}$. Для получившегося пространства строим $\tilde{\varepsilon}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\tilde{\varepsilon}_k(\bar{\omega}) = \varepsilon_k(\omega_k)$, и аналогично $\tilde{\eta}_k$.

Упражнение 1. $(\tilde{\varepsilon}_k)$ незав., и аналогично для η .

Рассмотрим $S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i \rightarrow B(n, p)$ и $S = \sum_{i=1}^n \tilde{\eta}_i \rightarrow \mathcal{P}(np)$, то есть, как раз те распределения, которые нам нужны. Перейдём к $\mathbb{P}_k\{\varepsilon_k \neq \eta_k\} \leq p^2$, но эта вероятность, как легко проверяется (проверять не будем), равна $\mathbb{P}\{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\}$, для любого k .

Тогда $\mathbb{P}\{S_n \neq S\} \leq \mathbb{P}\{\bigcup_{k=1}^n \{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\}\}$ по вложенности соответствующих событий. Но мы можем продолжить цепочку $\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\} \leq np^2$. Осталось лишь сделать последний шаг: $\mathbb{P}\{S_n \in B\} = \mathbb{P}\{S_n \in B, S_n = S\} + \mathbb{P}\{S_n \in B, S_n \neq S\} \leq \mathbb{P}\{S_n \neq S\} + \mathbb{P}\{S \in B, S_n = S\} \leq np^2 + \mathbb{P}\{S \in B\}$. Однако, если бы мы начали с $\mathbb{P}\{S \in B\}$, то получили бы точно так же, что оно не больше $np^2 + \mathbb{P}\{S_n \in B\}$, что мы и хотели. \square

Переходим к небольшому параграфу про случайные векторы. Не думаю, что тут было что-то существенно важное, поэтому просто оставлю определение.

Определение 11. $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$, где $X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ для $k = 1, \dots, n$, тогда $\bar{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \rightarrow (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

Вот математическое ожидание - важная штука.

Определение 12. Пусть X - случайная величина, тогда $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p_{\omega}$, если ряд абсолютно сходится в бесконечном случае.

Свойства:

Утверждение 6. Существование математического ожидания эквивалентно существованию математического ожидания $|X|$ (для краткости пишут $E|X| < \infty$).

Утверждение 7. Математическое ожидание линейно.

Утверждение 8. Если $X \geq 0$, то $EX \geq 0$.

Утверждение 9. $X \leq Y$, тогда $EX \leq EY$.

Утверждение 10. $|EX| \leq E|X|$ (из $-|X| \leq X \leq |X|$).

А вот это уже можно обобщить до неравенства Йенсена:

Теорема 6. Если φ - выпуклая функция, тогда $\varphi(EX) \leq E\varphi(x)$.

Однако доказывать мы это не будем, а просто перейдём к следующей теореме:

Теорема 7. Пусть X - случайная величина $(a_k); (p_k)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(x) = \sum_k f(a_k)p_k$ (существуют или не существуют они одновременно).

Доказательство. Скажем для начала, что $f \geq 0$ (просто возьмём модуль, если что). Тогда $Ef(X) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))p_\omega = \sum_k \left(\sum_{\omega | X(\omega)=a_k} f(X(\omega))p_\omega \right) = \sum_k f(a_k) \sum_{\omega | X(\omega)=a_k} p_\omega = \sum_k f(a_k)p_k$. \square

Следствие 2. $EX = \sum_k a_k p_k$, $f(x) = x$.

Следствие 3. Если X и Y имеют одинаковые распределения, то $EX = EY$.

Следствие 4. EX - центр масс.

Теорема 8. Пусть \bar{X} - случайный вектор; $(\bar{a}_k); (p_k)$; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(\bar{X}) = \sum_k f(\bar{a}_k)p_k$.

Теорема 9. Если X и Y независимы, и их математические ожидания существуют, то у их произведения также существует математическое ожидание, притом равно произведению математических ожиданий.

Доказательство. Применим в предыдущей теореме $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $f(x, y) = xy$ и распишем $E(XY)$. \square

4 Лекция 4.

Начнём сегодня с примеров.

Пример(ы) 8. Пусть $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение. Тогда $EX = \sum_0^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np$.

К такому выводу можно прийти и другим способом. Мы знаем, что случайная величина X имеет такое же распределение, как сумма бернуллиевских величин, одинаково распределённых: $X \stackrel{D}{=} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, (ε_k) независимы, $\varepsilon_k \sim B(1, p)$. $EX = \sum_1^n E\varepsilon_k = nE\varepsilon_k = np$.

Пример(ы) 9. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда

$$EX = \sum_0^\infty k \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_0^\infty \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = \alpha e^{-\alpha} \sum_1^\infty \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha.$$

Теорема 10. (Неравенство Маркова). Пусть $X \geq 0$. Тогда $\forall t > 0$, $\mathbb{P}\{X \geq t\} \leq \frac{EX}{t}$.

Доказательство. Введём понятие индикатора, то есть, функции $\mathbb{I}_A(\omega)$, которая равна 1, если $\omega \in A$, и 0 иначе (в нашем случае событие $A - \geq t$). Эта случайная величина имеет Бернуллиевское распределение, 1 с вероятностью $p = \mathbb{P}(A)$, и 0 с вероятностью $1 - p$. Ясно, что левую часть можно записать как $E\mathbb{I}_A$. Посмотрим теперь на $\frac{X}{t}$. Эта вещь не меньше 1 при $\omega \in A$, тогда $\mathbb{I}_A \leq \frac{X}{t}$, а значит, $E\mathbb{I}_A \leq E\left(\frac{X}{t}\right) = \frac{EX}{t}$. \square

Это неравенство имеет кучу следствий, рассмотрим некоторые из них.

Следствие 5. Пусть $f \uparrow$, $f(x) \geq 0$. Тогда $\mathbb{P}\{X \geq t\} = \mathbb{P}\{f(X) \geq f(t)\} \leq \frac{Ef(X)}{f(t)}$.

Следствие 6. Если $E(X^2) \leq \infty$, и $f(x) = x^2$, то, как следствие, получим $\mathbb{P}\{|X| \geq t\} \leq \frac{E(X^2)}{t^2}$, тогда при $t \rightarrow \infty$ получим более сильную оценку (на месте X^2 можно брать ещё большие степени). Также можно рассмотреть $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$, тогда получим $\mathbb{P}\{x \geq t\} \leq \frac{E(e^{aX})}{e^{at}}$.

Теорема 11. (Неравенство Йенсена). X - случайная величина, и есть некоторая выпуклая функция $\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $\varphi(EX) \leq E[\varphi(X)]$.

Доказательство. Предположим, что X принимает два значения: a и b с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Тогда $EX = ap + b(1-p)$, это - какая-то линейная комбинация, то есть, лежит между точками. Рассмотрим тогда неравенство $\varphi(ap + b(1-p))$ - с одной стороны, $\varphi(ap) + \varphi(b(1-p))$. Первое меньше второго из выпуклости, а для большего количества точек просто рассмотрим по индукции. \square

Теперь перейдём к дисперсии.

Определение 13. $DX = E[(X - EX)^2]$. Нужно, чтобы $E(X^2)$ было меньше бесконечности, тогда DX определена.

Примечание 1. Дисперсия характеризует меру разброса случайной величины от математического ожидания.

И рассмотрим её свойства.

Утверждение 11. Дисперсия неотрицательная.

Утверждение 12. $D(X + c) = DX$

Утверждение 13. $D(X \cdot c) = c^2 DX$

Утверждение 14. $DX = E(X^2) - (EX)^2$

Утверждение 15. $DX = \sum_k (a_k - EX)^2 p_k$, где $(a_k), (p_k)$ - распределение X .

Теорема 12. Если X, Y - независимые случайные величины, то $D(X + Y) = DX + DY$.

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $EX = EY = 0$, он достаточно очевиден, а теперь начнём сводить все остальные случаи к этому. Введём $\tilde{X} = X - EX$; $\tilde{Y} = Y - EY$. Тогда $D(X + Y) = D(\tilde{X} + \tilde{Y}) = DX + DY$, что и требовалось. \square

Рассмотрим теперь несколько примеров дисперсий.

Пример(ы) 10. Пусть $X \sim B(n, p)$, тогда $DX = np(1-p)$.

Пример(ы) 11. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда $DX = \alpha$.

Теорема 13. (Неравенство Чебышёва). Пусть X - случайная величина, $EX^2 < \infty$ (DX определена). Тогда $\forall t > 0$,

$$\mathbb{P}\{|Y| \geq t\} \leq \frac{E(Y^2)}{t^2}$$

Доказательство. Из следствия 6, при подстановке $(X - EX)$. \square

Определение 14. Моменты - матожидания следующего вида. Пусть X - случайная величина. Мы можем рассмотреть $E(X^n)$, $E(X - EX)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $E|X|^p$, $E|X - EX|^p$, $p \in \mathbb{R}$. Все эти матожидания называются моментами, первые два называются моментами n -го порядка, вторые два - абсолютными моментами, моменты с разностями называются центрированными.

Определение 15. Если случайных величин несколько, то вводятся *смешанные моменты*, моменты вида $E(X^n \cdot Y^m)$, или $E[(X - EX)(Y - EY)] = \text{cov}(X, Y)$ - частный случай, *ковариация*. Можем также через него определить *коэффициент корреляции* - $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, который является мерой линейной зависимости между X и Y .

Теорема 14. (*Закон больших чисел (в немного ослабленном смысле)*). Пусть (X_k) - независимые, одинаково распределённые случайные величины, $EX_k = a$, $DX_k = \sigma^2 < \infty$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Определение 16. *Сходимость по вероятности*: $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим эту вероятность, и заметим, что $E\frac{S_n}{n} = a$, тогда по Чебышёву, искомая нами вероятность, ограничивается сверху $\frac{D(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} D(S_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2 \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. \square

Сформулируем также несколько усложнений (второе даже записывать не буду, оно всё равно не в курсе).

Теорема 15. (*Теорема Хинчина*). Пусть X_k - н.о.р.с.в., тогда если $E|X_1| < \infty$, $EX_k = a$, тогда $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

И в заключение...

5 Пофамильный указатель всех важных предметов

Быстрый список для особо ленивого поиска.

биномиальное распределение
вероятностное пространство
дискретное пространство
независимые события
равновероятные исходы

распределение случайной величины
случайная величина
условная вероятность
формула Байеса
формула умножения