

Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература	3
Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	3
Задача Коши	3
Единственность	3
Поле направлений	4
Основные теоремы	4
Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка	4
Интеграл	4
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	5
Замена переменных	6
Линейное дифференциальное уравнение первого порядка	7
Уравнения, сводящиеся к линейным	8
Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме	8
Уравнение в полных дифференциалах	9
Условие точности 1-формы	10
Интегрирующий множитель	10
Системы дифференциальных уравнений	11
Частные случаи	11
Векторная запись нормальных систем	12
Теоремы существования	12
Ломаные Эйлера	13
Напоминание из анализа	15
Лемма Гронуолла	17
Метод приближений Пикара	17
Метод сжимающих отображений	20
Продолжимость решений	21
Линейные системы дифференциальных уравнений	23
Однородные линейные системы	24
Задача нахождения фундаментальной матрицы	25
Комплексные Решения ЛОС	26
Системы с постоянными коэффициентами	26
Метод Эйлера	26

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной функции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x, y)$, $f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}_{x,y}^2$

Определение. $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ – *решение* на (a, b) , если

- y – дифференцируема;
- $(x, (y(x))) \in G, x \in (a, b)$;
- $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ на (a, b) .

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0, G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R} \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на \mathbb{R} .

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условием (x_0, y_0) , если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a, b) ;
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0, y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha, \beta)} = y_2|_{(\alpha, \beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0, y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

•

$$y_1 = 0$$

•

$$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

•

$$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*). Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0, y_0) \in G \exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) G называется *областью существования*.

Теорема (*О единственности*). Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0, y_0) \in G \exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) G называется *областью единственности*.

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единственным решением при данном условии (x_0, y_0) будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H, \mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H , если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x, y(x)) \in H$, то $U(x, y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*).

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

•

$$F(x_0, y_0) = 0$$

•

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ – открытые интервалы $x_0 \in I, y_0 \in J, \exists z(x) \in C^1(I)$ такая, что

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = z(x)$ при $(x, y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*). Пусть U – интеграл $y' = f(x, y)$ в $H \subset G$. Тогда $\forall (x_0, y_0) \in H \exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0, y_0)$ и $\exists y(x) \in C^1(I)$ такая что:

- $y(x)$ – решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0)
- $(x, y) \in H$ и $U(x, y) = U(x_0, y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку (x_0, y_0) . Рассмотрим $F(x, y) = U(x, y) - U(x_0, y_0)$. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют $I_0, J_0, I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0), y(x_0) = y_0$. По теореме существования \exists решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0, y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x, z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x, z(x)) = \text{const} \Rightarrow F(x, z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. \square

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = m(x) \cdot n(y)$$

$$m \in C((a, b)), n \in C((\alpha, \beta))$$

$$G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$$

- $y_0 \in (\alpha, \beta), n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

Проверяется подстановкой

- $I \subset (\alpha, \beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x, y(x)) \in (a, b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

$$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int_{x_0}^x \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int_{x_0}^x m(t)dt.$$

Замена $z = y(t)$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int_{x_0}^x m(t)dt,$$

Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

$$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) &= M(x) - M(x_0) \\ U(x, y) &:= N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x, y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли U интегралом.

Утверждение. (Критерий интеграла)

U – интеграл для уравнения $y' = f(x, y) \iff$

•

$$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$

•

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

Доказательство. Если $y(x)$ – решение, то $U(x, y(x)) = \text{const}$

$$\frac{dU}{dx} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dx}U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \quad (1)$$

Замена переменных

Пример(ы). 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – x

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – x

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x), \quad p, q \in C((a, b))$$

$f(x, y)$ определена на $G = (a, b) \times \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G , поэтому G – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

$$y' = p(x)y$$

Есть решение $y \equiv 0, x \in (a, b)$

Если $y > 0$, то

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

Воспользуемся заменой переменной:

Новая независимая переменная – x

Новая функция – $v(x)$

Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

$$y' = v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$p(x)y + q(x) = p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x)$$

$$v' \cdot e^{\int p(x)dx} = q(x)$$

$$v' = q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$v = \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$y = e^{\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx \right)$$

Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

Для задачи Коши с начальным условием (x_0, y_0) имеем

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right)$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \text{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то воспользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^m} &= p(x)y^{1-m} + q(x) \\ v' &= (1-m)y'y^{-m} \\ \frac{v'}{(1-m)} &= p(x)v + q(x)\end{aligned}$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если α – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение Пфаффа

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Определение. *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m, n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

Определение. *Интегральная кривая дифференциальной формы* F – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Примечание. Кривая называется гладкой, если \exists непрерывные $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ и $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \neq 0$

Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая F

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot{\gamma}_1(t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot{\gamma}_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на (α, β) , то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для y :

$$\frac{dy}{dx} = \dot{\gamma}_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)}$$

γ была интегральной кривой формы F , то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая γ уравнения $F = 0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $m dx + n dy = 0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \dot{\gamma}_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F = m dx + n dy = 0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \\ \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m} \end{cases}$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Форма F – *точная*, если $\exists U \in C^2(\mathbb{R}_{x,y}^2)$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Если F – точная, то $F = 0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

Теорема. Если F – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0, y_0) \in G$ U – интеграл одного из уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ или } \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$$

Доказательство. $(x_0, y_0) \in G$ можно считать, что $n(x_0, y_0) \neq 0$, тогда $n(x, y) \neq 0$ в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{m}{n}$

Пусть $y(x)$ – решение

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = m + n \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n \neq 0$$

Получаем, что U – интеграл

□

Условие точности 1-формы

$$U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Утверждение.

$$G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных m и n следует, что F – точна

Доказательство. Фиксируем $(x_0, y_0) \in G$

Хотим построить U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial m}{\partial y}(s, y) ds + \varphi'(y) = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial n}{\partial x}(s, y) ds + \varphi'(y) = n(x, y) - n(x_0, y) + \varphi'(y) \end{aligned}$$

Хотим

$$n(x, y) = n(x, y) - n(x_0, y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве $\varphi(y) = \int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$$

□

Примечание. Это утверждение верно не для любой области G , хотя верно, если G – звездчатое множество

Интегрирующий множитель

Определение. $\mu \in C^1, \mu \neq 0$ называется *интегрирующим множителем*, если μF – точная форма

Пример(ы). Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель $-\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n(y)} \right)$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x, y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться t и искать мы будем функции $x(t)$

Определение. *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

n и m_1, \dots, m_n – фиксированные натуральные числа

Для каждого $i = 1, \dots, n$ имеем уравнение

$$\frac{d^{m_i} x_i}{dt^{m_i}} = f_i(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, \frac{d^{m_1-1} x_1}{dt^{m_1-1}}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, \frac{d^{m_n-1} x_n}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$ называется *порядком системы*

Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем $x_1(t), \dots, x_n(t)$, все $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка m* $x(t)$ – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases} \iff \frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}})$$

Если x решение уравнения, то очевидно, что $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \dots, y_m = \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}$ решения системы и наоборот, если y_1, y_2, \dots, y_m решения системы, то $x = y_1$ решение уравнения.

Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на \mathbb{R}^n зафиксируем $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Определение. Для уравнения $\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n$ ($f \in C(G)G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$) функция $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *решением*, если

- $\exists \dot{x}$ на (a, b)
- $(t, x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in (a, b)$

Определение. $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется решением задачи Коши с начальным условием (t_0, x_0) , если

- x – решение
- $x(t_0) = x_0$

Теоремы существования

Теорема. *существования* (Пеано)

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in G \exists \text{ решение задачи Коши}$

Доказательство. Рассмотрим $(t_0, x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t, x) \in G \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} - \text{компакт}$$

$$\exists M : |(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказывать, что существует решение на промежутке $(t_0 - h, t_0 + h)$

Эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Определение. $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ – *решение интегрального уравнения*, если

1. $x \in C((a, b))$
2. $(t, x(t)) \in G$
3. $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

Лемма. x – решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Leftrightarrow x$ – решение задачи Коши с начальным условием t_0, x_0

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок $[t_0, t_0 + h]$ (для $[t_0 - h, t_0]$ все аналогично)

Ломанные Эйлера

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и разобьем отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на N равных частей $[t_k, t_{k+1}]$, $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), t \in [t_0, t_1]$$

$$g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Введем $\dot{g}(t)$ (точечка сверху это просто символ, так как g не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k, g(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Лемма. $\forall k = 0, 1, \dots, n$

1. g определена на $[t_k, t_{k+1}]$
2. $|g(t) - x_0| \leq M(t - t_0), t \in [t_0, t_k]$
3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s) ds$

Доказательство. Индукция по k

База: $k = 1$ Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что $f(t_k, g(t_k))$ определено, для этого достаточно показать, что $(t_k, g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t - t_0| \leq \alpha, |g(t_k) - x_0| \leq \beta$

Это верно, так как $|g(t_k) - x_0| \leq M|t_k - t_0| \leq Mh \leq \beta$

2. $|g(t) - x_0| \leq |g(t) - g(t_k)| + |g(t_k) - x_0| \leq |f(t_k, g(t_k))|(t - t_k) + M(t_0 - t_0) \leq M(t - t_0)$

3. $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)ds + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s)ds$

□

Лемма. (*Арцела-Аскори*)

$$G = \{g_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n, k \geq 0\}$$

Определение. G равномерно ограничено, если существует $N : |g_k(t)| \leq N \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in I$

Определение. G рваностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall k \geq 0 \forall t_1, t_2 \in I |t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \varepsilon$$

Если G - равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна, тогда из G можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера $g_N, N > 0$ и докажем, что она равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна

$$|g_N(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \leq Mh \Rightarrow |g_N(t)| \leq |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1) - g_N(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}_N(s)ds \right| \leq M|t_1 - t_2| \leq M\delta$$

В качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность g_N действительно равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к g

Для удобства можем считать, что вся последовательность g_N равномерно сходится к g

Мы хотим доказать, что g будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства g

1. $g_N \rightrightarrows g$ на $[t_0, t_0 + h], g$ - непрерывна

2. $(t, g_N(t)) \in R \Rightarrow (t, g(t)) \in R$

3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s))ds$

$$g_N(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_N(s))ds + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t, g_N(t)) \in R, f \in C(R)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t, g_N(t)) \rightrightarrows f(t, g(t)) \text{ на } [t_0, t_0 + h]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^t f(s, g_N(s))ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))ds \rightarrow 0$$

Так как R – компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на R

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \wedge |g_N(t_1) - g_N(t_2)| < \delta \rightarrow |f(t_1, g(t_1)) - f(t_2, g(t_2))| < \varepsilon$$

Если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то $t - t_k < \frac{h}{N} < \delta$ при больших N

$$\dot{g}_N(t) = f(t_k, g_N(t_k)), \text{ поэтому } |\dot{g}_N(t) - f(t, g_N(t))| = |f(t_k, g_N(t_k)) - f(t, g_N(t))|$$

Поэтому, если N достаточно велико

$$\int_{t_k}^t |\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))| ds \leq \varepsilon(t - t_k)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) ds \right| &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \right| + \dots + \left| \int_{t_k}^t \right| \leq \\ &\leq \varepsilon(t_1 - t_0) + \dots + \varepsilon(t - t_k) = \varepsilon(t - t_0) \leq \varepsilon h \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) ds \rightarrow 0$, следовательно $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$

Таким образом, мы нашли решение g для исходного уравнения, и доказали теорему. \square

Напоминание из анализа

Определение. f удовлетворяет *условию Липшица* по x в $G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ ($f \in \text{Lip}_x(G)$)

Если $\exists L > 0$ такое, что $\forall (t, x), (t, x') \in G$

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$$

Определение. f удовлетворяет *локальному условию Липшица* по x в G , если $\forall (t_0, x_0) \in G \exists U$ – окрестность, такая что $f \in \text{Lip}_x(U)$

$$f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ и } \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \forall i, j = 1, \dots, n$$

Определение. *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение. A – матрица, тогда норма $\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$

$$\forall x \quad |x| \leq \|A\| \cdot |x|$$

Лемма.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

Доказательство. Фиксируем (t_0, x_0)

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \text{ в } R$$

Рассмотрим $(t, x), (t, x') \in R$, $g(s) = f(t, sx + (1 - s)x')$

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(t, x') &= g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx + (1 - s)x') ds \\ |f(t, x) - f(t, x')| &\leq \left| \int_0^1 \right| \leq \int_0^1 |\dots| \leq \int_0^1 L|x - x'| ds = L|x - x'| \end{aligned}$$

□

Лемма.

$$f \in C(G), \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G), K - \text{компакт в } G$$

$$\Downarrow$$

$$f \in \text{Lip}_x(K)$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall L_n \rightarrow \infty \exists (t_n, x_n), (t_n, x'_n) \in K :$$

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, x'_n)| > L_n |x_n - x'_n|$$

Так как K – компакт, то из (t_n, x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (t_0, x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из t_{n_k}, x'_{n_k} , сходящуюся к (t_0, x'_0)

Для удобства будем считать, что $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$, $(t_n, x'_n) \rightarrow (t_0, x'_0)$

Случай 1 $x_0 = x'_0$ Так как f – локально-липпшицева по x , то $\exists U \ni (t_0, x_0)$ и L , такие, что

$$(t, x), (t, x') \in U \rightarrow |f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$$

При достаточно больших n $(t_n, x_n), (t_n, x'_n) \in U$ и мы получаем противоречие

Случай 2 $x_0 \neq x'_0$

Рассмотрим $g(t, x, y) = \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|}$, $f \in C(G) \Rightarrow g$ непрерывна в окрестности U точки (t_0, x_0, x'_0)

$$\Rightarrow \exists L : |g(t, x, y)| \leq L \Rightarrow |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

Тогда для достаточно больших n $(t_n, x_n, x'_n) \in U$ и мы снова получаем противоречие.

□

Лемма Гронуолла

Лемма. (*Лемма Гронуолла*)

Пусть $\varphi(t) \geq 0$ при $t \in (a, b)$ и $\exists t_0 \in (a, b)$, $\lambda, \mu \geq 0$, такие что

$$\varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|, \quad t \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

Доказательство. Разберем случай, когда $t \leq t_0$ (случай $t < t_0$ оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| \geq \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu \Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)} \dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)} \Phi \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leq \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leq \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

Метод приближений Пикара

Теорема. (*Теорема Пикара*)

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$\Rightarrow G$ – область существования и единственности

Доказательство. **Существование** Зафиксируем $(t_0, x_0) \in G$ Возьмем $\alpha, \beta > 0$, что $R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 : |f(t, x)| \leq M, \quad (t, x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$ – константа Липшица по x в R

Последовательные приближения Пикара $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds, \quad k \leq 0$$

Лемма. $\forall k$ φ_k определены на $[t_0 - h, t_0 + h]$ и их графики лежат в R

Доказательство. Индукция по k

База $\varphi_0 \equiv x_0$ для всех t , график очевидно лежит в R

Переход

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds$$

$$(s, \varphi_k(s)) \in R \Rightarrow f - \text{определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq \beta$$

□

Докажем теперь, что φ_k — равномерно сходятся на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Введем $\psi_0(t) = \phi_0(t)$, $\psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$ при $k \geq 0$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частичные суммы этого ряда равны $\varphi_k(t)$

Поэтому сходимость ряда \iff сходимость $\varphi_k(t)$

Лемма. $k \geq 1 \Rightarrow |\psi_k(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$

Доказательство. Рассмотрим только случай $t \geq t_0$

$k = 1$

$$|\psi_1(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_0(s))| ds \leq M|t - t_0|$$

$k \rightarrow k + 1$

$$\begin{aligned} |\psi_{k+1}| &= |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s))| ds \leq \int_{t_0}^t L|\psi_k(s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \frac{M}{L} \frac{|L(s-t_0)|^k}{k!} ds = \frac{M}{L} \frac{|L(t-t_0)|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

□

$$\sum |\psi_k(t)| \leq \sum \frac{M}{L} \frac{|L(t-t_0)|^k}{k!} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L} e^{Lh}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \psi_k - \text{сходится равномерно на } [t_0 - h, t_0 + h]$$

$$\varphi_k \rightrightarrows g$$

Проверим, что g является решением нашего уравнения, для этого достаточно проверить, что g – решение эквивалентного интегрального уравнения

$$\varphi_k \text{ непрерывна} \Rightarrow g \text{ непрерывна}$$

$$(t, \varphi_k(t)) \in R \Rightarrow (t, g(t)) \in R$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds$$

$$f \text{ равномерно непрерывна на } R \Rightarrow f(s, \varphi_k(s)) \rightrightarrows f(s, g(s)) \text{ на } R$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = x_0$$

Единственность Предположим, что существуют два различных решения $x_1(t), x_2(t)$ задачи Коши с начальным условием (t_0, x_0)

$$(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) \in R$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) ds$$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L |x_1(s) - x_2(s)| ds \right|$$

$$|x_1 - x_2| \geq 0 \Rightarrow \text{по лемме Гронуолла } x_1 = x_2$$

□

Теорема. G – область единственности, тогда если существует два решения x_1, x_2 на промежутках (a_1, b_1) и (a_2, b_2) соответственно и $\exists t_0 \in (a, b) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) : x_1(t_0) = x_2(t_0)$

$$\Downarrow$$

$$x_1 \equiv x_2 \text{ на } (a, b)$$

Доказательство. Докажем, что они совпадают на $[t_0, b)$, остальное аналогично

$$T := \{t' \mid t' \geq t_0, x_1|_{[t_0, t']} = x_2|_{[t_0, t']}\}$$

$$T' = \sup T$$

Предположим, что $T' < b$

Тогда по непрерывности $x_1(T') = x_2(T') = x'$

Так как $(T', x') \in G$, а G – область единственности, то $x_1(t) = x_2(t)$ на $[T', T' + \varepsilon)$
 $\Rightarrow T' + \varepsilon \in T$, получаем противоречие с тем, что $T' = \sup$ □

Метод сжимающих отображений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C, \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

$$(t_0, x_0) \in G, \quad (t, x_0) \in R \subset G, \quad L - \text{константа Липшица}$$

$$h_0 \leq h \text{ такое что } Lh_0 < 1$$

$$X := \{x - \text{непрерывные функции на } [t_0 - h_0, t_0 + h_0], (t, x(t)) \in R\}$$

$$\text{Метрика на } X: \rho(x, y) = \max_{t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]} |x(t) - y(t)|$$

$$(X, \rho) - \text{полное метрическое пространство}$$

Введем оператор $\mathcal{L} : X \rightarrow X$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

Корректность Очевидно, ψ непрерывна, нам нужно только показать, что $(t, \psi(t)) \in R$

$$|\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq \beta$$

$$\Downarrow$$

$$(t, \psi(t)) \in R$$

Сжимаемость

$$\varphi_1, \varphi_2 \in X$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}(\varphi_1), \mathcal{L}(\varphi_2)) &= \max_t \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \max_t \int_{t_0}^t L|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \leq \max_t \left| \int_{t_0}^t L\rho(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \leq \\ &\leq \max_t |t - t_0| L\rho(\varphi_1, \varphi_2) \leq Lh_0\rho(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

$$Lh_0 < 1$$

По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

Отсюда мы получаем существование и единственность решения для задачи Коши.

Продолжимость решений

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G), G - \text{область единственности}$$

Определение. $x(t)$ – решение на (a, b)

Решение $y(t)$ – *продолжение вправо* $x(t)$, если y решение на (a, b_1) , $b_1 > b$ и $x|_{(a, b)} = y|_{(a, b)}$

Теорема. *Теорема о продолжимости вправо* Решение x на (a, b) продолжимо вправо за b
 $\iff \exists x' = \lim_{t \rightarrow b-0} x(t), (b, x') \in G$

Доказательство. " \Rightarrow " Очевидно

" \Leftarrow " По теореме существования $\exists z(t)$ на промежутке $(b - h, b + h) : z(b) = x'$

$$\text{Рассмотрим } y(t) = \begin{cases} x(t), t \in (a, b) \\ z(t), t \in [b, b + h) \end{cases}$$

$$y'(b) = z'(b) = f(b, x')$$

$$y(b) = z(b)$$

$y(t)$ – продолжение x вправо за b

□

Определение. $x(t)$ – *полное решение* на (a, b) , если оно не продолжимо вправо за b и влево за a

Теорема. *Существование и единственность полного решения*
 $\forall (t_0, x_0) \in G \exists!$ полное решения задачи Коши с н.д. (t_0, x_0)

Доказательство. Фиксируем (t_0, x_0)

Рассмотрим

$$T = \{(a, b) \ni t_0 \mid \exists \text{ решение задачи Коши } x(t) \text{ на } (a, b)\}$$

$$T \neq \emptyset$$

$$A = \inf a, B = \sup b : (a, b) \in T$$

Докажем, что $\exists!$ полное решение на (A, B)

Будем рассматривать только $[t_0, B)$ (влево аналогично). Для начала определим решение на этом промежутке.

Фиксируем $\tau \in (t_0, B)$

Так как $B = \sup\{b\} \Rightarrow \exists b \in (\tau, B)$, $\exists x_b$ – решение на $[t_0, b)$

Положим $x(\tau) = x_b(\tau)$

Корректность Рассмотрим $b' \in (\tau, b)$

По теореме об области единственности $x_b(t) = x_{b'}(t)$ на $[t_0, b) \cap [t_0, b') \Rightarrow x_b(\tau) = x_{b'}(\tau)$

Получаем, что $x(t)$ – корректно определенная функция, очевидно, что она является решением.

Единственность Пусть есть $x_1(t)$ – полное решение на (A_1, B_1) и $x_2(t)$ – полное решение на (A_2, B_2) , по теореме единственности они совпадают на пересечении

Если $(A_1, B_1) \cap (A_2, B_2) \neq (A_1, b_1)$, то (без ограничения общности можно считать, что $B_2 > B_1$) тогда x_2 – продолжение x_1 вправо, но x_1 было полным, получаем противоречие.

□

Теорема. *Теорема о полном решении и компакте*

Пусть K – компактное подмножество в G

$x(t)$ – полное решение на конечном промежутке (a, b)

$\Rightarrow \exists \Delta = \Delta(K) > 0 : (t, x(t)) \notin K, t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$

Доказательство.

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \forall (t_0, x_0) \in K : H(t_0, x_0) = \{|t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$$

$$\Rightarrow H' = \bigcup_{(t_0, x_0) \in K} H(t_0, x_0) - \text{компакт в } G$$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : |f(t, x)| \leq M \text{ в } H'$$

$$\Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in K \text{ берем } R = H(t_0, x_0)$$

$$\exists h \forall (t_0, x_0) \in K : [t_0 - h, t_0 + h] - \text{промежуток Пеано}$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$$\Delta := \frac{h}{2}$$

Рассмотрим полное решение $x(t)$ на (a, b)

Предположим, что $\exists \tau \in (b - \Delta, b) : (\tau, x(\tau)) \in K$

Тогда \exists решение $x(t)$ задачи Коши с н.д. $(\tau, x(\tau))$ на $[\tau - h, \tau + h]$

Рассмотрим

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (a, \tau) \\ z(t), & t \in [\tau, \tau + h) \end{cases}$$

Определено на $(a, \tau + h)$, $\tau + h = \tau + 2\Delta > b$

$\Rightarrow y$ – продолжение $x(t)$ за b вправо.

□

$$y' = f(y), y \in \mathbb{R}, f \in C[0, 1], f(y) > 0, y \in (0, 1], f(0) = 0$$

Определение. Система $\dot{x} = f(t, x)$ называется *сравнимой с линейной*, если

1. $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$
2. \exists непрерывные $m(t)$ и $n(t)$ на $(a, b) : m(t), n(t) \leq 0$

$$|f(t, x)| \leq m(t)|x| + n(t)$$

Теорема. Если система сравнима с линейной, то любое полное решение определено на промежутке (a, b)

Доказательство. Пусть $x(t)$ – полное решение на (a', b')

Предположим, что $b' < b$, выберем $t_0 \in (a', b')$, $x_0 = x(t_0)$

Рассмотрим $[t_0, b'] \subset (a, b) \Rightarrow \exists M, N > 0 : m(t) \leq M, n(t) \leq N$ на $[t_0, b']$

Запишем интегральное уравнение для x

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

$$\begin{aligned} t \in [t_0, b'] : |x(t)| &\leq |x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t m(s)|x(s)| + n(s) ds \right| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t M|x(s)| + N ds \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$|x(t)| \leq |x_0| + N|b' - t_0| + M \int_{t_0}^t |x(s)| ds$$

\Downarrow (лемма Гронуолла)

$$|x(t)| \leq (|x_0| + N|b - t_0|)e^{M(t-t_0)} \leq (|x_0| + N|b - t_0|)e^{M(b'-t_0)} =: N_1$$

$$(t, x(t)) \in K, t \in [t_0, b'], K = [t_0, b'] \times \{|x| \leq N_1\}$$

Получаем противоречие с теоремой о полном решении и компакте, так как для любого сколь угодно близкого слева к b' числа t $(t, x(t))$ содержится в компакте K \square

Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = P(t)x + q(t), x \in \mathbb{R}^n, P(t)$ непрерывная на (a, b) $n \times n$ -матрица $q(t)$ непрерывный на (a, b) вектор

Что мы знаем про нашу систему?

$$f(t, x) = P(t)x + q(t)$$

$$f \in C(G), G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

Матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x} = P(t)$ – непрерывна в G

$$f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

G – область существования и единственности

$$|f(t, x)| \leq \|P(t)\| \cdot |x| + |q(t)|$$

$$\|P(t)\|, |q(t)| \leq 0 \text{ и непрерывны в } G$$

Любое полное решение $x(t)$ определено на (a, b)

Далее мы будем рассматривать только полные решения.

Свойство существования и единственности

1. $\forall (t_0, x_0) \in G \exists$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) , определенное на (a, b)
2. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения на (a, b) и $\exists t_0 \in (a, b) : x_1(t_0) = x_2(t_0)$, то $x_1|_{(a, b)} = x_2|_{(a, b)}$

Однородные линейные системы

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P(t) \in C((a,b))$$

Теорема. Множество решений ЛОС – линейное пространство над \mathbb{R}

Доказательство. Очевидно. □

Рассмотрим n решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$

Сопоставим им $n \times n$ матрицу

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Обозначим $W(t) = \det \Phi(t)$ – *Определитель Вронского (вронскиан)*

Лемма. $\exists t_0 : W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) \equiv 0$

Доказательство. Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = 0$$

Так как $\det = 0 \Rightarrow \exists c \neq 0$ – решение

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Тогда $x(t) = \Phi(t)c = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$ – решение

$$x(t_0) = \Phi(t_0)c = 0$$

Есть решение $y(t) \equiv 0$

$$x(t_0) = y(t_0) \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

$$\Phi(t)c \equiv 0, c \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \equiv 0$$

□

Главная задача – описать структуру множества решений линейной однородной системы

Определение. $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – *фундаментальная матрица*, если существует $t_0 \in (a,b)$, в которой $W(t_0) \neq 0$ (тогда по предыдущей лемме $W(t) \neq 0$ на (a,b))

Теорема. \forall ЛОС \exists фундаментальная матрица

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (a,b)$, $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}^n$ – линейно независимы.

Тогда $\forall i$ существует решение $x_i(t), x_i(t_0) = a_i$

Возьмем в качестве фундаментальной матрицы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, $\Phi(t_0) = (a_1, \dots, a_n)$,

$W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0$ на всем интервале.

□

Примечание. $a_i = e_i$ – базисные векторы тогда $\Phi(t_0) = E$

$\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица, нормированная к единичной* при $t = t_0$

Теорема. *об общем решении ЛОС*

$\Phi(t)$ – фундаментальная матрица $\Rightarrow \forall x(t)$ – решение ЛОС $\exists! c \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c$

Доказательство. $\Phi(t)$, рассмотрим решение $x(t)$, фиксируем точку $t_0 \in (a, b)$

Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = x(t_0)$$

Поскольку Φ – фундаментальная матрица, ее определитель отличен от нуля и эта система имеет единственное решение.

Рассмотрим $y(t) = \Phi(t)c$ – линейная комбинация столбцов $\Phi(t)$, поэтому это тоже решение ЛОС

$$y(t_0) = \Phi(t_0)c = x(t_0)$$

По единственности решений ЛОС $y(t) = x(t)$ на (a, b)

Единственность c следует из единственности решения алгебраической системы. \square

Таким образом, мы установили линейный изоморфизм:

$$\{\text{решения ЛОС}\} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \Phi(t)c$$

Выбор фундаментальной матрицы – выбор базиса пространства решений.

Теорема. о множестве фундаментальных матриц

$$\Phi - \text{ф.м.} \Rightarrow \{\text{ф.м. ЛОС}\} = \{\Phi(t)C : C - \text{матрица } n \times n, \det C \neq 0\}$$

Доказательство. ” \supset ” Рассмотрим $\Psi = \Phi C$

Столбцы Ψ – линейные комбинации столбцов Φ , значит они решения. $\det \Psi = \det \Phi \cdot \det C \neq 0$

” \subset ” Ψ – ф.м. $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$

$$\forall i \psi_i = \Phi c_i \Rightarrow \Psi = (\Phi c_1, \dots, \Phi c_n) = \Phi C, C = (c_1, \dots, c_n)$$

$$0 \neq \det \Psi \det \Phi \det C \Rightarrow \det C \neq 0$$

\square

Теорема. Пусть $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, x_i – решения ЛОС

$$\Rightarrow \frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t)$$

Доказательство.

$$\frac{dx_i}{dt} = Px_i$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = (Px_1, \dots, Px_n) = P(x_1, \dots, x_n) = P\Phi$$

\square

Задача нахождения фундаментальной матрицы

- Тривиальна в случае $n = 1$

$$\dot{x} = p(t), \quad \Phi(t) = e^{\int p(t)dt}$$

- $n = 2$ Построение ф.м. по $P(t)$ – неразрешимая задача:

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\ddot{y} + t^\alpha y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -t^\alpha y \end{cases}$

Предположим $y(t) \not\equiv 0$

Рассмотрим $x(t) = \frac{\dot{y}}{y}$

$$\text{Тогда } \dot{x} = -\frac{1}{y^2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{y}\ddot{y} = -x^2 - t^\alpha$$

– уравнение Рикатти, для которого ни одно решение не представимо в элементарных функциях.

А если x не представим в элементарных функциях, то и y не представим в элементарных функциях. \square

Комплексные Решения ЛОС

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P \in C(a, b)$$

$$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Лемма. $P(t)$ – вещественная матрица, $z = x + iy$ – комплексное решение $\Leftrightarrow x, y$ – вещественное решения

Лемма. *об овеществлении*

$\Psi(t) = (y_1, \dots, y_2)$ – комплексная фундаментальная матрица, у которой $y_1 = \overline{y_2}$

$\Phi(t) = (\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \dots, y_n)$ – ф.м

Доказательство.

$$\Phi = \Psi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \neq 0$$

\square

Системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$$

Метод Эйлера

Ищем решения в виде $x(t) = \gamma e^{\lambda t}$, $\gamma \neq 0$

$$\dot{x} = \lambda \gamma e^{\lambda t} = A \gamma e^{\lambda t}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\gamma = \lambda\gamma$$

Простой частный случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и простые (кратность каждого 1)
Тогда есть n решений $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t}$

$$\Phi(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t} - \text{фундаментальна}$$

$\{A \text{ } n \times n \text{ комплексные матрицы}\}$
 $\|A\|$ – операторная норма A

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Определение. *Матричная экспонента*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Теорема. *Этот ряд сходится*

Доказательство. $\Sigma_m = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$

$$\|\Sigma_m - \Sigma_{m+l}\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0$$

□

Теорема. $B = S^{-1}AS \Rightarrow e^B = S^{-1}e^A S$

Для матриц, вообще говоря, неверно равенство $e^{A+B} = e^A e^B$

Теорема.

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (A+B)^k &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (A+B) \dots (A+B) = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \rightarrow e^A e^B \end{aligned}$$

□

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Теорема.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k t^k = \frac{d}{dt} \left(E + At + \dots + \frac{1}{m!} A^m t^m \right) = A + A^2 t + \dots + \frac{1}{(m-1)!} A^m t^{m-1} = A \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k t^k}{k!} \right)$$

□

Следствие. e^{At} – фундаментальная матрица $\dot{x} = Ax$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \Rightarrow \text{столбцы } e^{At} - \text{решения}$$

$$t = 0, e^{A \cdot 0} = E$$

$$\text{Если } A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_n)$$

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$$e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

Предметный указатель

- Дифференциальная 1-форма, 8
- Дифференциальное уравнение, 3
 - 1-го порядка, 3
- Дифференциальное уравнение порядка m , 11
- Задача Коши, 3
- Интеграл уравнения, 4
- Интегральная кривая, 3
- Интегральная кривая дифференциальной формы, 8
- Интегрирующий множитель, 10
- Коэффициент наклона, 4
- Лемма Арцела-Аскори, 14
- Лемма Гронуолла, 17
- Лемма об овеществлении, 26
- Локальное условие Липшица, 15
- Матрица Якоби, 15
- Матричная экспонента, 27
- Метод вариации произвольной переменной, 7
- Нормальная система, 11
- Область
 - единственности, 4
 - существования, 4
- Однородное линейное уравнение, 7
- Определитель Вронского (вронскиан), 24
- Поле направлений, 4
- Полное решение, 21
- Порядок системы, 11
- Последовательные приближения Пикара, 17
- Продолжение решения, 21
- Решение дифференциального уравнения, 3
- Решение интегрального уравнения, 13
- Система дифференциальных уравнений общего вида, 11
- Сравнимая с линейной система, 22
- Существование и единственность полного решения, 21
- Теорема
 - об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка, 5
- Теорема Пикара, 17
- Теорема о множестве фундаментальных матриц, 25
- Теорема о полном решении и компакте, 22
- Теорема о продолжимости вправо, 21
- Теорема об общем решении ЛОС, 24
- Точка единственности, 3
- Точная форма, 9
- Уравнение Бернулли, 8
- Уравнение Пфаффа, 8
- Уравнение Рикатти, 8
- Уравнение полных дифференциалов, 9
- Условие Липшица, 15
- Эквивалентное интегральное уравнение, 13
- фундаментальная матрица, 24
- фундаментальная матрица, нормированная к единичной, 24