

Матлог. Основные записи

Мастера конспектов
на основе лекций С. О. Сперанского

22 января 2020 г.

Основные моменты.

Содержание

1	Лекция 1.	3
2	Лекция 2.	4
3	Лекция 3.	5
4	Лекция 4.	7

1 Лекция 1.

Определение 1. *Конкатенация* - записали подряд два слова. (A - алфавит, A^* - слова).

Определение 2. *Подслово* - как есть, *вхождение* - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как $\psi \sqsubseteq \varphi$.

Определение 3. $w[w'/u, k]$ - замена подслова w' на u , начинающегося в позиции k .

Определение 4. Фиксированное счётное множество Prop - *пропозициональные переменные*. Язык \mathcal{L} классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ и круглых скобочек.

Определение 5. Form (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \text{Prop}$, то $p \in \text{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$, то $(\varphi * \psi) \in \text{Form}$, где $*$ - любая из операций в определении выше (если отрицание, то относительно одной формулы, конечно).

Лемма 1. Пусть $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ таковы, что $\psi \sqsubseteq \varphi$. Тогда $\psi = \varphi$.

Доказательство. По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе ψ представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как φ представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально. \square

Лемма 2. Каждую $\varphi \in \text{Form} \setminus \text{Prop}$ можно единственным способом представить в виде $(\theta \rightarrow \chi)$, $(\theta \vee \chi)$, $(\theta \wedge \chi)$ или $\neg\theta$, где $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$ (это я везде безграмотно называю композицией).

Доказательство. От противного по лемме 2. \square

Определение 6. Для каждой $\varphi \in \text{Form}$ определим $\text{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \text{Form} \mid \psi \preceq \varphi\}$ - *подформулы*.

Лемма 3. Пусть $\varphi \in \text{Form}$. Тогда каждое вхождение \neq или $($ является началом вхождения некоторой подформулы.

Доказательство. Возвратная индукция по длине формулы. \square

Лемма 4. Множество подслов φ - объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.

Доказательство. Из лемм выше. \square

Определение 7. *Оценка* (v) - произвольная функция из Prop в $\{0, 1\}$, которую можно расширить и до Form (v^*) посредством применения операций к переменным. Если $v^*(\varphi) = 1$, то порой пишут $v \models \varphi$.

Определение 8. Формулу называют *выполнимой*, если $v \models \varphi$ для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если $v \models \varphi$ для всех оценок.

Определение 9. Формула *семантически следует* из множества формул и записывается $\Gamma \models \varphi$, если для любой оценки v , любая формула из множества истина, то φ истина.

Формулы называют *семантически эквивалентными*, и пишут $\varphi \equiv \psi$, если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

2 Лекция 2.

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negation):

- (I1). $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (I2). $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$;
- (C1). $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$;
- (C2). $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$;
- (C3). $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$;
- (D1). $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$;
- (D2). $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$;
- (D3). $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$;
- (N1). $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$;
- (N2). $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$;
- (N3). $\varphi \vee \neg\varphi$,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Определение 10. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Form}$, тогда *выводом* из него в гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) элементов Form , что для каждого $i \in \{0, \dots, n\}$ выполнено одно из следующих условий:

- φ_i - аксиома;
- φ_i - элемент Γ ;
- $\exists \{j, k\} \subseteq \{0, \dots, i-1\}$ такие, что φ_k есть $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

При этом, φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы*. Если φ выводится из Γ , то пишут $\Gamma \vdash \varphi$.

Основные свойства \vdash :

- монотонность;
- транзитивность;
- компактность (если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Delta \vdash \varphi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Теорема 1. (*О дедукции*). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Доказательство. В одну правую сторону очевидно, в обратную - по индукции по $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ показываем, что $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$, там три случая, и все, кроме одного, тривиальны. \square

Введём обозначения: $\top := p \rightarrow p$ и $\perp := \neg \top$, где p - фиксированная пропозициональная переменная.

Следствие 1. Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \rightarrow \varphi$$

для некоторых $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$.

Доказательство. Влево - очевидно, вправо - очевидно и применяется теорема о дедукции. \square

Лемма 5. *Всякая аксиома гильбертовского исчисления для классической пропозициональной логики общезначима.*

Теорема 2. *(О корректности). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,*

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi.$$

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$. Затем рассматриваем произвольную оценку v такую что $v \models \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$ и покажем по индукции по $i \in \{0, \dots, n\}$, что $v \models \varphi_i$. \square

Определение 11. $\Gamma \subseteq \text{Form}$ называется *простой теорией*, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \text{Form}$;
- $\{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Лемма 6. *Пусть Γ - простая теория, тогда для любых её элементов можно переписать действия над ними в рамках принадлежности к теории.*

Лемма 7. *(О расширении. а.к.а. Линденбаума). Пусть $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ таковы, что $\Gamma \not\vdash \varphi$. Тогда существует простая теория $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такая, что $\Gamma' \not\vdash \varphi$.*

Доказательство. Рекурсивно докидываем к Γ элементы Form (их счётно). \square

3 Лекция 3.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу $v_\Gamma(p) := 1$, если $p \in \Gamma$ и 0 иначе.

Лемма 8. *Пусть Γ - простая теория. Тогда для любой $\varphi \in \text{Form}$,*

$$v_\Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

Доказательство. Индукция по построению φ , используя лемму 6. \square

Теорема 3. (О сильной полноте \vdash). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

В частности, $\Gamma \not\vdash \perp$ если и только если $\Gamma \not\models \perp$, а значит, Γ непротиворечиво если и только если Γ выполнимо.

Доказательство. Вправо - теорема о корректности, влево - от противного, рассматриваем Γ' , как в лемме 7. \square

Теорема 4. (О слабой полноте \vdash). Для любой $\varphi \in \text{Form}$,

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

то есть, выводимость из пустого равносильна обозначимости,

Теорема 5. (О компактности \models). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \models \varphi \iff \Delta \models \varphi$$

для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. В частности, $\Gamma \not\models \perp$ тогда и только тогда, когда $\Delta \not\models \perp$ для всех конечных $\Delta \subseteq \Gamma$, а значит, Γ выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество Γ выполнимо.

Утверждение 1. Слабая полнота \vdash плюс компактность \models равно сильная полнота \vdash .

Определение 12. Сигнатура - четвёрка вида

$$\sigma = \langle \text{Pred}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma, \text{arity}_\sigma \rangle,$$

где первые три - попарно непересекающиеся множества, а последнее - функция из $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 13. σ -структура - пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A - непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ - функция с областью определения $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma$, такая что:

- для любого n -местного $P \in \text{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m -местного $f \in \text{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \rightarrow A$;
- для любого $c \in \text{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$.

При этом, A - носитель, а $I_{\mathfrak{A}}$ - интерпретация σ в \mathfrak{A} .

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$ - две σ -структуры. Говорят, что $\xi : A \rightarrow B$ есть гомоморфизм из \mathfrak{A} в \mathfrak{B} , если выполнены следующие условия:

- для любого n -местного предиката и всех $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

- для любого m -местного функционала и всех $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$,

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$

- для любой константы,

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Определение 15. Инъективный гомоморфизм называют *сложением*, если выполнено усиление первого пункта, где следствие заменяется на равносильность.

Определение 16. Сюръективное вложение называют *изоморфизмом* и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если они изоморфны, т.е. между ними существует изоморфизм.

Определение 17. *Автоморфизм* - изоморфизм на себя. $\text{Aut}(\mathfrak{A})$ - множество всех автоморфизмов \mathfrak{A} .

4 Лекция 4.

Определение 18.

$$\text{Var} := \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

есть фиксированное на всю жизнь счётное множество *предметных переменных* или просто *переменных*.

Определение 19. Язык \mathcal{L}_σ кванторной классической логики над сигнатурой σ состоит из элементов $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma \cup \text{Var}$, а также *символов связок*, *символов кванторов* и *вспомогательных символов*.

Определение 20. Term_σ - наименьшее множество слов в алфавите \mathcal{L}_σ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \text{Var}$, то $x \in \text{Term}_\sigma$;
- если $c \in \text{Const}_\sigma$, то $c \in \text{Term}_\sigma$;
- если $f \in \text{Func}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$, то

$$(t_1, \dots, t_n) \in \text{Term}_\sigma.$$

Элементы Term_σ называют σ -термами.

Определение 21. Form_σ - наименьшее множество слов в алфавите \mathcal{L}_σ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \text{Pred}$, $\text{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$, то

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \text{Form}_\sigma;$$

- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$, то

$$\{(\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \wedge \Psi), \neg \Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma;$$

- если $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ и $x \in \text{Var}$, то

$$\{\forall x \Phi, \exists x \Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma.$$

Элементы которого называются σ -формулами. Атомарными формулами называются формулы, которые не содержат ни символов связок, ни символов кванторов. Их множество - Atom_σ .

Примечание 1. Для понимания, кажется, Term - выражения с переменными, константами, действиями и т.д., а вот Form - сравнения выражений (в частности), логические утверждения, кванторные.

Определение 22. Для любых $t \in \text{Term}_\sigma$ и $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ определим

$$\begin{aligned} \text{sub}(t) &:= \{s \in \text{Term}_\sigma \mid s \preceq t\}, \\ \text{Sub}(\Phi) &:= \{\Psi \in \text{Form}_\sigma \mid \Psi \preceq \Phi\}, \end{aligned}$$

которые называются соответственно *подтермами* и *подформулами*.

Лемма 9. Пусть $\{t, s\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ таковы, что $t \sqsubseteq s$. Тогда $t = s$.

Лемма 10. (О единственности представления термов). Всякий $t \in \text{Term}_\sigma \setminus (\text{Var} \cup \text{Const}_\sigma)$ можно единственным образом представить в виде $f(t_1, \dots, t_n)$, где $f \in \text{Func}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$.

Лемма 11. Пусть $t \in \text{Term}_\sigma$ и $f \in \text{Func}_\sigma$. Тогда всякое вхождение f в t является началом вхождения некоторого подтерма.

Лемма 12. (О подтермах). Пусть $t \in \text{Term}_\sigma$.

- если $t \in \text{Var} \cup \text{Const}_\sigma$, то $\text{sub}(t) = \{t\}$;
- если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где $f \in \text{Func}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$, то

$$\text{sub}(t) = \text{sub}(t_1) \cup \dots \cup \text{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

Лемма 13. (О единственности представления атомов). Всякий $\Phi \in \text{Atom}$ можно единственным образом представить в виде $P(t_1, \dots, t_n)$, где $P \in \text{Pred}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$.

Лемма 14. Пусть $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$ таковы, что $\Phi \sqsubseteq \Psi$. Тогда $\Phi = \Psi$.

Лемма 15. (О единственности представления формул). Всякую $\Phi \in \text{Form}_\sigma \setminus \text{Atom}_\sigma$ можно единственным образом представить в виде комбинации формул (одной или двух) и символов связок или символов кванторов.

Лемма 16. Пусть $\Phi \in \text{Form}_\sigma$. Тогда всякое вхождение \neg , $($, \forall или \exists в Φ является началом вхождения некоторой подформулы.

Лемма 17. Пусть $\Phi \in \text{Form}_\sigma$.

- Если $\Phi \in \text{Atom}_\sigma$, то $\text{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$;
- Если $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$, где $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \text{Form}_\sigma$ и $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \text{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\};$$

- Если $\Phi = \neg\Theta$, где $\Theta \in \text{Form}_\sigma$, или $\Phi = Q \times \Theta$, где $x \in \text{Var}$, $\Theta \in \text{Form}_\sigma$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$, то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

Определение 23. Пусть $\Phi \in \text{Form}_\sigma$, $x \in \text{Var}$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$. Тогда каждое вхождение Qx в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют *областью действия* данного вхождения Qx . Вхождение x в Φ называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и *свободным* иначе. Далее, говорят, что x является *свободной переменной* в Φ , если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ .

Скажем, что $\text{FV}(\Phi)$ - множество $z \in \text{Var}$ таких, что у z имеется хотя бы одно свободное вхождение в Φ . Интуитивно, элементы этого множества играют роль параметров Φ , а запись $\Phi(x_1, \dots, x_l)$ указывает на то, что $\text{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_l\}$.

Определение 24.

$$\text{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \text{Form}_\sigma \mid \text{FV}(\Phi) = \emptyset\}/$$

Элементы которого называют σ -предложениями. Они могут выступать в качестве *нелог. аксиом*.

Определение 25. t называем *свободным для подстановки* вместо x в Φ , если ни одно из свободных вхождений x в Φ не находится в области действия квантора по переменной из t .

Определение 26. *Означивание переменных* - функции из Var в A . Каждое означивание v в \mathfrak{A} можно расширить до $\bar{v} : \text{Term}_\sigma \rightarrow A$ естественным образом:

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) &:= v(x); \\ \bar{v}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \bar{v}(f(t_1, \dots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)). \end{aligned}$$

А через v_a^x (x - переменная, a - элемент A) будет обозначаться особенное означивание такое, что оно равно $v_a^x(y) = a$, если $y = x$ и $v(y)$ - иначе.

Определение 27. Определим $\mathfrak{A} \models \Phi[v]$ индукцией по построению Φ . Короче, надо просто расписать все логические связки и кванторы, что они означают. Когда эта вещь выполнена, мы будем говорить, что Φ *истинно* в \mathfrak{A} при v .

Определение 28. Пусть $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$. Поворят, что \mathfrak{A} *является моделью* Γ и пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma$, если $\mathfrak{A} \models \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Теорема 6. Пусть ξ - изоморфизм из \mathfrak{A} на \mathfrak{B} . Тогда для каждой σ -формулы Φ и любого означивания v в \mathfrak{A} ,

$$\mathfrak{A} \models \Phi[v] \iff \mathfrak{B} \models \Phi[v \circ \xi].$$

Доказательство. Примем $\mu := v \circ \xi$, заметим, что $\bar{\mu}(t) = \xi(\bar{v}(t))$, а потом провернём индукции по построению Φ . \square

Определение 29. Для произвольного класса \mathcal{K} σ -структур Предположим

$$\text{Th}(\mathcal{K}) := \{\Phi \in \text{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Говорят, что \mathfrak{A} и \mathfrak{B} *элементарно эквивалентны*, если $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$.

Следствие 2. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.