

Геометрия и Топология

Мастера конспектов

14 января 2020 г.

Честно говоря, ненависть к этой вашей топологии просто невообразима.

Содержание

1 Билет	4
2 Билет	4
3 Билет	5
4 Билет	7
5 Билет	8
6 Билет	9
7 Билет	10
8 Билет	11
9 Билет	12
10 Билет	13
11 Билет	14
12 Билет	14
13 Билет	15
14 Билет	16
15 Билет	17
16 Билет	18
17 Билет	19
18 Билет	19
19 Билет	20
20 Билет	21
21 Билет	22
22 Билет	22
23 Билет	23
24 Билет	24

25 Билет	26
26 Билет	26
27 Билет	27
28 Билет	28
29 Билет	29
30 Билет	29
31 Билет	30
32 Билет	31
33 Билет	31
34 Билет	32
35 Билет	32
36 Билет	33
37 Билет	34
38 Билет	35
39 Билет	36
40 Билет	36
41 Билет	37
42 Билет	38
43 Билет	39
44 Билет	39
45 Билет	40
46 Билет	40
47 Билет	42
48 Билет	42
49 Билет	42
50 Пофамильный указатель всех мразей	43

1 Билет

Метрические пространства, произведение метрических пространств, пространство \mathbb{R}^n .

Функция $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X , если

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Пара (X, d) , где d - метрика в X , называется *метрическим пространством*.

Примеры:

- Модуль разности на прямой;
- Евклидова метрика;
- $X = \mathbb{R}^n, d(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$

Теорема 1. (Прямое произведение метрических пространств). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) - метрические пространства. Тогда функция

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

задаёт метрику на $X \times Y$.

Доказательство. 1 и 2 аксиомы очевидны. Проверим выполнение третьей. Сделать это несложно, нужно всего лишь написать неравенство и дважды возвести в квадрат. Можно как-нибудь поиспользовать Коши или КБШ, на ваш вкус. \square

Пространство $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, на котором задана метрика

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

(которая называется *евклидовой*), есть \mathbb{R}^n .

2 Билет

Шары и сферы. Открытые множества в метрическом пространстве. Объединения и пересечения открытых множеств.

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Множества

$$B_r(a) = \{x \in X : d(a, x) < r\},$$

$$\overline{B_r(a)} = D_r(a) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

называются, соответственно, открытым шаром (или просто шаром) и замкнутым шаром пространства (X, d) с центром в точке a и радиусом r .

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется открытым в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A.$$

Примеры:

- \emptyset , X и $B_r(a)$ открыты в произвольном метрическом пространстве X .
- В пространстве с дискретной метрикой любое множество открыто.

•

Теорема 2. В произвольном метрическом пространстве X

1. объединение любого набора открытых множеств открыто;
2. пересечение конечного набора открытых множеств открыто.

Доказательство.

1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — семейство открытых множеств в X . Хотим доказать, что $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \exists j \in I : x \in U_j \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_j \subseteq U.$$

2. Пусть семейство $\{U_i\}_{i=1}^n$ — семейство открытых множеств в X . Хотим доказать, что $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \forall i : x \in U_i \Rightarrow \exists r_i : B_{r_i}(x) \subseteq U_i;$$

$$r := \min\{r_i\} \Rightarrow B_r \subseteq U.$$

□

3 Билет

Топологические пространства. Замкнутые множества, их объединения и пересечения. Замкнутость канторова множества.

Определение: Пусть X — произвольное множество, и множество $\Omega \subset \rho(X)$ обладает следующими свойствами:

- $\emptyset, X \in \Omega$
- Объединение любого набора множеств из Ω также лежит в Ω
- Пересечение любого конечного набора множеств из Ω также лежит в Ω

В таком случае:

- Ω — топологическая структура (или топология) на X .
- Множество X с выделенной топологической структурой называется топологическим пространством.

- Элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω) .

Определение: Множество $F \subseteq X$ называется *замкнутым* в X , если $X \setminus F$ открыто

Теорема 3. В произвольном топологическом пространстве X :

1. \emptyset и X замкнуты
2. Объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто
3. Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто

Доказательство. Замкнутость множеств их всех трёх пунктов проверяется по определению:

1. $\emptyset = X \setminus X$ и $X = X \setminus \emptyset$
2. $X \setminus \bigcap F_i = \bigcup (X \setminus F_i)$
3. $X \setminus \bigcup F_i = \bigcap (X \setminus F_i)$

В пунктах (b) и (c) мы использовали формулы Де Моргана. □

Примеры:

- В дискретной топологии все множества замкнуты
- В антидискретной топологии замкнуты только \emptyset и X
- В метрическом пространстве любое одноточечное множество замкнуто.

Доказательство. $X \setminus \{a\} = \bigcup_{b \in X \setminus \{a\}} B_{d(b,a)}(b)$ - открыто. □

- В метрическом пространстве любой замкнутый шар замкнут

Доказательство. Для каждой точки $b \in X \setminus D_r(a)$ можно выбрать открытый шар $B_{d(b,a)-r}(b)$, который, во-первых, корректно определён (так как $b \notin D_r(a) \Rightarrow d(b,a) > r$), а во-вторых, не содержит точек из $D_r(a)$ (так как если $c \in B$ и $c \in D$, то $\Rightarrow d(c,b) < d(b,a) - r \Rightarrow d(c,a) \geq d(c,b) + d(b,a) > r$ и $d(c,a) \leq r$, противоречие) □

- Канторово множество замкнуто в стандартной топологии на \mathbb{R}

Доказательство. Следует из построения множества. □

Утверждение-сюрприз от leon.tyumen: Пусть U открыто в X , а V замкнуто. Тогда:

- $U \setminus V$ открыто в X .

Доказательство. $U \setminus V = U \cap (X \setminus V)$ □

- $V \setminus U$ замкнуто в X .

Доказательство. $V \setminus U = V \cap (X \setminus U)$ □

4 Билет

Внутренность, замыкание и граница множества: определение и свойства включения, объединения, пересечения.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Внутренностью* множества A называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в A , т. е.:

$$\text{Int}A = \bigcup_{U \in \Omega, U \subseteq A} U.$$

Свойства:

- $\text{Int}A$ - открытое множество;
- $\text{Int}A \subseteq A$;
- B открыто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \text{Int}A$;
- $A = \text{Int}A \Leftrightarrow A$ открыто;
- $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$;
- $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}A \subseteq \text{Int}B$;
- $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$;
Доказательство:
 $\subseteq: A \cap B \subseteq A \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}A \dots$;
 $\supseteq: \text{Int}A \cap \text{Int}B \subseteq A \cap B \Rightarrow \text{Int}A \cap \text{Int}B \subseteq \text{Int}(A \cap B)$.
- $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}A \cup \text{Int}B$;
Доказательство \neq :
 $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
 $\text{Int}A = \text{Int}B = \emptyset, \text{Int}(A \cup B) = \text{Int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A , т. е.:

$$\text{Cl}A = \bigcap_{X \setminus V \in \Omega, V \supseteq A} V.$$

Свойства:

- $\text{Cl}A$ - замкнутое множество;
- $A \subseteq \text{Cl}A$;
- B замкнуто, $B \supseteq A \rightarrow B \supseteq \text{Cl}A$;
- $A = \text{Cl}A \Leftrightarrow A$ замкнуто;
- $\text{Cl}(\text{Cl}A) = \text{Cl}A$;
- $A \subseteq B \rightarrow \text{Cl}A \subseteq \text{Cl}B$;

- $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}A \cup \text{Cl}B$;
Доказательство:
 \subseteq : $\text{Cl}(A \cup B) \subseteq A \cup B$, причём наименьший;
 \supseteq : $\text{Cl}(A \cup B) \subseteq \text{Cl}A$
- $\text{Cl}(A \cap B) \subseteq \text{Cl}A \cap \text{Cl}B$ (на самом деле, даже \neq);
- $\text{Cl}A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *границей* множества A называется разность его замыкания и внутренности: $\text{Fr}A = \text{Cl}A \setminus \text{Int}A$.

Свойства:

- $\text{Fr}A$ - замкнутое множество;
- $\text{Fr}A = \text{Fr}(X \setminus A)$;
- A замкнуто $\Leftrightarrow A \supseteq \text{Fr}A$;
- A открыто $\Leftrightarrow A \cap \text{Fr}A = \emptyset$.

5 Билет

Расположение точки относительно множества: внутренние и граничные точки, точки прикосновения, предельные и изолированные точки. Внутренность, замыкание и граница множества: из каких точек они состоят.

- Определения (A - множество в топологическом пространстве):
 1. Окрестностью точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.
 2. Точка называется внутренней для A , если некоторая её окрестность содержится в A .
 3. Точка называется точкой прикосновения для A , если любая её окрестность пересекается с A .
 4. Точка называется граничной для A , если любая её окрестность пересекается с A и с дополнением A .
 5. Точка называется изолированной для A , если она лежит в A и некоторая её окрестность пересекается по A ровно по этой точке.
 6. Точка называется предельной для A , если любая её выколота окрестность пересекается с A .

Примеры... :(

- 1. Внутренность множества есть множество его внутренних точек:
 - b — внутр. точка для $A \Rightarrow \exists U_\varepsilon(b) \subseteq A \Rightarrow U_\varepsilon(b) \subseteq \text{Int}A \Rightarrow b \in \text{Int}A$;
 - $b \in \text{Int}A \Rightarrow b$ лежит в A вместе с окрестностью $\text{Int}A \Rightarrow b$ — внутренняя точка для A .

2. Замыкание множества есть множество его точек прикосновения: b — точка прикосновения для $A \iff b \notin \text{Int}(X \setminus A) \iff b \in \text{Cl}A$
3. Граница множества есть множество его граничных точек:
 b — граничная точка множества $A \iff (b \in \text{Cl}A) \wedge (b \in \text{Cl}(X \setminus A)) \iff (b \in \text{Cl}A) \wedge (b \notin \text{Int}A) \iff b \in \text{Fr}A$.
4. Замыкание множества есть объединение множеств предельных и изолированных точек:
 $b \in \text{Cl}A \iff b$ — точка прикосновения \iff любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая выколота окрестность b пересекается с A , либо существует выколота окрестность, не пересекающаяся с A (тогда $b \in A$) \iff либо b — предельная точка, либо b — изолированная точка.
5. Замыкание множества есть объединение граничных и внутренних точек:
 $b \in \text{Cl}A \iff b$ — точка прикосновения \iff любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая окрестность b пересекается с $X \setminus A$, либо существует окрестность, которая не пересекается с $X \setminus A \iff$ либо b — граничная точка, либо b — внутренняя точка.

6 Билет

Сравнение метрик и топологий (грубее/тоньше). Липшицево эквивалентные метрики.

Определение: Топология Ω_1 *слабее (грубее)* топологии Ω_2 на X , если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. В этом случае топология Ω_2 *сильнее (тоньше)* топологии Ω_1

Пример: Из всех топологических структур на X антидискретная топология - самая грубая; дискретная топология - самая тонкая.

Теорема 4. Топология метрики d_1 грубее топологии метрики $d_2 \iff$ в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром

Доказательство. " \Rightarrow " шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в $d_2 \Rightarrow$ точка a входит в $B_r^{d_2}(a)$ вместе с некоторой своей окрестностью $B_q^{d_2}(a)$ " \Leftarrow " U открыто в $d_1 \Rightarrow \forall a \in U \exists q > 0 : B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow \exists r > 0 : B_r^{d_2}(a) \subseteq B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow U$ открыто в d_2 □

Следствие 1: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X . Если $d_1(a, b) \leq d_2(a, b)$ для любых $a, b \in X$, то топология d_1 грубее топологии d_2

Доказательство. $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \forall r > 0 \forall a \in X B_r^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a) \iff$ топология d_1 грубее топологии d_2 □

Определение: Две метрики в одном множестве называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

Лемма: Пусть (X, d) - метрическое пространство. Тогда для любого $C > 0$ функция $C \cdot d$ - тоже метрика, причём эквивалентная метрике d .

Доказательство. НУ ОЧЕВИДНО ЖЕ □

Следствие 2: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X , причём для любых $a, b \in X$ выполнено $d_1(a, b) \leq C d_2(a, b)$. Тогда топология d_1 грубее топологии d_2 .

Доказательство. По лемме d_2 и $C \cdot d_2$ эквивалентны, а по следствию 1 d_1 грубее $C \cdot d_2$ □

Определение: Метрики d_1, d_2 называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$ такие, что для любых $a, b \in X$ $c \cdot d_2(a, b) \leq d_1(a, b) \leq C \cdot d_2(a, b)$

Теорема 5. Если метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны, то они эквивалентны.

Доказательство. Согласно следствию 2, каждая из метрик грубее другой \Rightarrow они эквивалентны. □

Упражнение: Верно ли обратное утверждение?

Ответ на упражнение: Нет.

Пример: Три метрики на \mathbb{R}^2 - Евклидова, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ и $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ эквивалентны (точки - это (x_1, y_1) и (x_2, y_2)).

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому первая и вторая метрики эквивалентны по предыдущей теореме. Аналогично, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому вторая и третья метрики также эквивалентны. □

Определение: Топологическое пространство называется *метризуемым*, если существует метрика, порождающая его топологию.

Примеры:

- Дискретная топология порождается дискретной метрикой
- X с антидискретной топологией неметризуемо при $|X| > 1$

Доказательство. Пусть $a, b \in X$ ($a \neq b$), и $r = d(a, b)$. Тогда шар $B_r(a)$ открыт, непуст (так как $a \in B_r(a)$) и не совпадает со всем пространством (так как $b \notin B_r(a)$) □

7 Билет

База топологии: два определения и их эквивалентность. Критерий базы

Базой топологии Ω называется такой набор Σ открытых множеств, что всякое открытое множество представимо в виде объединения множеств из Σ .

$$\Omega \supseteq \Sigma \text{ - база} \Leftrightarrow \forall U \in \Omega \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W.$$

Теорема 6. (Второе определение базы). Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $\Sigma \subseteq \Omega$. Σ - база топологии $\Omega \iff \forall U \in \Omega \forall a \in U \exists V_a \in \Sigma : a \in V_a \subseteq U$.

Доказательство. Совсем немного формулок:

- $\forall U \in \Omega$ и $\forall a \in U$.
 Σ – база $\Rightarrow \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W \Rightarrow \exists V_a \in \Lambda : a \in V_a$
- $\forall U \in \Omega : U = \bigcup_{a \in U} V_a$.

□

Теорема 7. (Критерий базы). Пусть X – произвольное множество и $\Sigma = \{A_i\}_{i \in I}$ – его покрытие. Σ – база некоторой топологии $\iff \forall A_s, A_m \in \Sigma \exists J_{s,m} \subseteq I : A_s \cap A_m = \bigcup_{j \in J_{s,m}} A_j$.

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: \Rightarrow По определению базы и открытости множеств $A_s \cap A_m$. \Leftarrow Пусть Ω – совокупность всевозможных объединений множеств из Σ . Докажем, что Ω – топология на X .

- Σ – покрытие для $X \Rightarrow X \in \Omega$;
- объединение объединений есть объединение;
- $U, V \in \Omega \Rightarrow U = \bigcup_{s \in S \subseteq I} A_s$ и $V = \bigcup_{m \in M \subseteq I} A_m$,

$$U \cap V = \bigcup_{s,m} (A_s \cap A_m) = \bigcup_{s,m} \left(\bigcup_{j \in J_{s,m}} A_j \right) \in \Omega.$$

□

8 Билет

База топологии в точке. Связь между базой топологии и базами в точках. Предбаза топологии, как из неё получается база.

- Пусть (X, Ω) – топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega$. Λ называется базой топологии (базой окрестностей) в точке a , если:
 1. $\forall U \in \Lambda : a \in U$;
 2. $\forall U_\varepsilon(a) \exists V_a \in \Lambda : V_a \subseteq U_\varepsilon(a)$.

Следствия

1. Σ – база топологии $\Rightarrow \forall a \in X \Sigma_a := \{U \in \Sigma : a \in U\}$ – база в точке a .
2. Пусть $\{\Sigma_a\}_{a \in X}$ – семейство баз во всех точках. Тогда $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$ – база топологии.

Пример

Множество $\Sigma_a = \{B_r(a) : r \in \mathbb{R}_+\}$ является базой метрического пространства в точке a .

- Набор Δ открытых множеств топологического пространства (X, Ω) называется *пред-базой* топологии, если Ω – наименьшая по включению топология, содержащая Δ .

Теорема 8. Любой набор Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X .

Доказательство. Очевидно, Δ будет предбазой топологии объединений конечных пересечений подмножеств Δ ($X \cup \{\cup \{\cap_{i=1}^k W_i\} : W_i \in \Delta\}$). \square

Пример (Следствие)

База топологии является её предбазой.

9 Билет

Топология подпространства. Свойства: открытость и замкнутость подмножеств, база индуцированной топологии, транзитивность, согласованность с метрическим случаем.

Определение: Пусть (X, Ω) - топологическое пространство, и $A \subseteq X$. Тогда совокупность $\Omega_A = \{U \cap A : U \in \Omega\}$ - топология на множестве A .

Доказательство. Просто проверка аксиом топологии. \square

Определение:

- Ω_A - индуцированная топология
- (A, Ω_A) - подпространство пространства (X, Ω) .

Свойства:

- Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в самом пространстве

Пример: $X = \mathbb{R}, A = [0, 1]$. Тогда $[0, 1)$ открыто в A , но не в X .

- Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.

Доказательство. U открыто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : U = V \cap A$, т.е. открыто в X , как пересечение двух открытых множеств. \square

- Множества, замкнутые в подпространстве, не обязательно замкнуты в самом пространстве

Пример: $X = \mathbb{R}, A = (0, 1)$. Тогда $(0, \frac{1}{2}] = (0, 1) \setminus (\frac{1}{2}, 1)$ замкнуто в A , но не в X .

- Замкнутые множества замкнутого подпространства замкнуты и во всём пространстве.

Доказательство. U замкнуто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : A \setminus U = V \cap A$, но тогда $X \setminus U = (X \setminus A) \cup V$ т.е. открыто в X , как объединение двух открытых множеств. Значит, U замкнуто в X . \square

- **База индуцированной топологии:** Если Σ - база топологии Ω , то $\Sigma_A = \{U \cap A : U \in \Sigma\}$ - база топологии Ω_A .

Доказательство. Просто проверка определения базы. \square

- **"Транзитивность" индуцированных топологий:** Пусть X - топологическое пространство, и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$

Доказательство. Так как $U \cap B = (U \cap A) \cap B$, то $\Omega_B \subseteq (\Omega_A)_B$. Покажем обратное. Пусть $U \in (\Omega_A)_B$. Это значит, что существует открытое в A множество V такое, что $U = B \cap V$. V открыто в $A \Rightarrow$ существует открытое в X множество W такое, что $V = X \cap W$. Но тогда $U = B \cap (X \cap W) = B \cap W \Rightarrow U$ открыто в X . \square

- **Связь с метрическим случаем:** Пусть (X, d) - метрическое пространство, и $A \subseteq X$. Рассмотрим метрическое пространство $(A, d|_A)$, а также порождаемую его метрикой топологию Ω''_A . Кроме того, рассмотрим топологическое пространство (X, Ω) , порождаемую метрикой d , и его сужение (A, Ω_A) на A . Тогда $\Omega_A = \Omega''_A$

Доказательство. $U \in \Omega''_A \iff U = \bigcup B_{r_i}^A(a_i) \iff U \stackrel{a_i \in A}{=} A \cap \left(\bigcup B_{r_i}^X(a_i) \right) \stackrel{(!)}{=} U = A \cap V \iff U \in \Omega_A$. Таким образом, мы доказали одно вложение, и для полного счастья нам не хватает только равносильности в моменте (!). Мы победим, если для данного U , открытого в A , сможем выбрать открытое $V \in X$ такое, что $U = V \cap A$, и V представляется в виде объединения шаров из X с центрами из A . Но действительно, поскольку U открыто в A , существует какое-то $V' : U = V' \cap A$. Рассмотрим $V = \bigcup_{a_i \in V' \cap A} B_{r_i}^X(a_i)$, где $B_{r_i}^X(a_i)$ - шары, полностью содержащиеся в X (они существуют в силу его открытости). Тогда $U = V \cap A$, V открыто в X и удовлетворяет условию, которое мы так от него ждали. \square

10 Билет

Непрерывные отображения. Непрерывность композиции и сужения, замена области значений.

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества пространства Y является открытым подмножеством пространства X .

Также можно упомянуть, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Доказательство. $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$. \square

Теорема 9. (О композиции непрерывных). Композиция непрерывных отображений непрерывна.

Доказательство. Пусть $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ - непрерывны. Если $U \in \Omega_Z$, то $g^{-1}(U) \in \Omega_Y$, значит, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_X$. \square

Теорема 10. (О сужении отображения). Пусть Z - подпространство X и $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. $\text{in}_Z : Z \rightarrow X$ непрерывно, а также $f|_Z = f \circ \text{in}_Z$. \square

Теорема 11. (Об изменении области значений). Пусть Z - подпространство Y , $f : X \rightarrow Y$ - отображение и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\tilde{f} : X \rightarrow Z$, т. ч. $\tilde{f}(x) = f(x)$. Тогда f непрерывна $\iff \tilde{f}$ непрерывна.

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: $\Leftarrow f = \text{in}_Z \circ \tilde{f} \Rightarrow \forall U \in \Omega_Z \exists W \in \Omega_Y : U = W \cup Z, \tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(W) \in \Omega_X$. \square

11 Билет

Непрерывность в точке. Глобальная непрерывность эквивалентна непрерывности в каждой точке. Непрерывность и база окрестностей в точке.

- Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если $\forall U_\varepsilon(f(a)) \exists V_\delta(a) : f(V_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$. **Пример:** (...

Теорема 12. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно \iff оно непрерывно в каждой точке пространства.

Доказательство:

(\Rightarrow) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

(\Leftarrow) Пусть $U \in \Omega_Y \Rightarrow \forall a \in f^{-1}(U) \exists V_\varepsilon(a) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \Omega_X$

\square

•

Теорема 13. Пусть X, Y — топологические пространства, $a \in X, f : X \rightarrow Y$ — отображение, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall U \in \Lambda_{f(a)} \exists V_a \in \Sigma_a : f(V_a) \subseteq U$.

Доказательство:

(\Rightarrow) f непрерывно в точке $a \Rightarrow (\forall U \in \Lambda_{f(a)} \exists W_\varepsilon(a) : f(W_\varepsilon(a)) \subseteq U) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : V \subseteq W_\varepsilon(a))$.

(\Leftarrow) $(\forall U_\varepsilon(f(a)) \exists U \in \Lambda_{f(a)} : U \subseteq U_\varepsilon(f(a))) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : f(V) \subseteq U \subseteq U_\varepsilon(f(a)))$

\square

12 Билет

Непрерывность в метрических пространствах (ϵ - δ). Липшицевы отображения. Функции расстояния.

Следствие из последней теоремы билета 11: Пусть X, Y - метрические пространства, $a \in X, f : X \rightarrow Y$ - отображение.

- f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$
- f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X d_X(x, a) < \delta \rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$

Определение: Пусть X, Y - метрические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *липшицевым*, если существует $C > 0$ такое, что $d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a, b)$ для любых $a, b \in X$. Число C называют *константой Липшица* отображения f .

Теорема 14. *Всякое липшицево отображение непрерывно*

Доказательство. Напрямую следует из ϵ - δ определения непрерывности. \square

Примеры:

- Зафиксируем точку x_0 метрического пространства (X, d) . Тогда отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $f(a) = d(x_0, a)$ 1-липшицево и, как следствие, непрерывно.

Доказательство. Отображение f - 1-липшицево \iff для любых $a, b \in X$ $d(a, b) \geq |f(a) - f(b)| = |d(x_0, a) - d(x_0, b)|$, что верно по неравенству треугольника \square

- **Определение:** Пусть A - непустое подмножество метрического пространства (X, d) . *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества A* называют число $\inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой $f(x) = d(x, A)$, 1-липшицево и, как следствие, непрерывно.

Доказательство. f - 1-липшицево \iff для любых $a, b \in X$ $d(a, b) \geq |f(a) - f(b)| = |d(a, A) - d(b, A)|$. Докажем неравенство $d(a, b) \geq d(b, A) - d(a, A)$, второе неравенство доказывается аналогично. Для любого $\epsilon > 0$ найдётся точка $z \in A$ такая, что $0 < d(a, z) - d(a, A) < \epsilon$. Также можно заметить, что $d(b, A) \leq d(b, z)$. Тогда $d(b, A) \leq d(b, z) \leq d(b, a) + d(a, z) < d(b, a) + d(a, A) + \epsilon \implies d(b, a) \geq d(b, A) - d(a, A)$. \square

- Метрика d на множестве X является $\sqrt{2}$ -липшицевым и, как следствие, непрерывным отображением $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

Доказательство. Пусть \tilde{d} - стандартная метрика на $X \times X$. Пусть (x, y) и (a, b) - две точки из $X \times X$. Тогда по неравенству многоугольника (или просто два раза применённому неравенству треугольника) $|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b) \leq \sqrt{2}\sqrt{d(x, a)^2 + d(y, b)^2} = \sqrt{2}\tilde{d}((x, y), (a, b))$ \square

13 Билет

Фундаментальные покрытия. Их применение для доказательства непрерывности функций. Фундаментальность открытых и конечных замкнутых покрытий.

Покрытие $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : (\forall A_i \in \Gamma, U \cap A_i \text{ открыто в } A_i) \Rightarrow (U \text{ открыто в } X).$$

Теорема 15. Пусть X, Y - топологические пространства, $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ - фундаментальное покрытие X и $f : X \rightarrow Y$ - отображение. Если $\forall A_i \in \Gamma$ сужение $f|_{A_i}$ непрерывно, то и само отображение f непрерывно.

Доказательство. Хотим показать, что прообраз любого V , открытого в Y , открыт в X . Открытое в A_i $(f|_{A_i})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$, так как $f|_{A_i}$ непрерывна. Тогда $f^{-1}(V) \cap A_i$ открыто в A_i . Пусть $U = f^{-1}(V) \in X$, и для любого i мы тогда знаем, что $U \cap A_i$ открыто в A_i . Тогда из фундаментальности, U открыто в X . \square

Покрывание топологического пространства называется:

- *открытым*, если оно состоит из открытых множеств;
- *замкнутым*, если оно состоит из замкнутых множеств;
- *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 16. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A , а значит открыто в X . Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально. \square

Теорема 17. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A , а значит замкнуто в X . Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально. \square

14 Билет

Фундаментальность локально конечных замкнутых покрытий.

Покрывание называют *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Пример... :(

Теорема 18. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство:

Пусть $\{A_i\}$ — локально конечное замкнутое покрытие. Хотим проверить его фундаментальность;

1. Пусть U — произвольное множество, такое что $U \cap A_i$ — открытое в A_i .
2. В каждой точке b пространства рассмотрим окрестность U_b , пересекающуюся с конечным числом множеств покрытия (локальная конечность). Тогда $\{U_b\}$ — открытое покрытие пространства \Rightarrow оно фундаментально (13 билет).

3. Зафиксируем b , тогда $\{U_b \cap A_i\}$ — конечное замкнутое покрытие $U_b \Rightarrow \{U_b \cap A_i\}$ — фундаментальное покрытие U_b (13 билет).

Покажем, что $\forall b ((U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i))$ — открыто в $U_b \cap A_i \Rightarrow U \cap U_b$ — открыто в U_b (фундаментальность из п.3) $\Rightarrow U$ — открыто в пространстве (фундаментальность п.2).

Действительно, $(U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i) = (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i)$, $U \cap A_i$ — открытое в A_i (п.1) $\Rightarrow U \cap A_i = V \cap A_i$, где V — открытое во всём пространстве (определение открытого в подпространстве) $\Rightarrow (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = (V \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = V \cap (U_b \cap A_i)$ — открытое в $U_b \cap A_i$

□

15 Билет

Топология прямого произведения (конечный случай). Тихоновская топология. Согласованность с метрическим случаем.

Теорема 19.

- Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) — топологические пространства. Тогда $\Sigma = \{U \times V : U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y\}$ является базой топологии $\Omega_{X \times Y}$ на $X \times Y$
- Если Σ_X и Σ_Y — базы топологий (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) соответственно, то $\Lambda = \{U \times V : U \in \Sigma_X, V \in \Sigma_Y\}$ является базой топологии на $X \times Y$

Доказательство.

- Воспользуемся критерием базы. Во-первых, Σ — покрытие $X \times Y$, так как $X \times Y \in \Sigma$. Во-вторых, пересечение любых двух элементов из Σ представляется в виде объединения нескольких (в данном случае одного) элементов из Σ : $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ ($U_1, U_2 \in \Omega_X, V_1, V_2 \in \Omega_Y$)
- Аналогично предыдущему пункту доказываем, что Λ — база некоторой топологии $\Omega'_{X \times Y}$ на $X \times Y$, причём $\Omega'_{X \times Y} \subseteq \Omega_{X \times Y}$. Поэтому достаточно показать, что всякий элемент из $\Omega_{X \times Y}$ представляется в виде объединения элементов из $\Omega'_{X \times Y}$. Но это действительно так: Если $A \times B \in \Omega_{X \times Y}$, то $A = \bigcup A_i$ ($A_i \in \Sigma_X$), $B = \bigcup B_j$ ($B_j \in \Sigma_Y$), и $A \times B = \bigcup (A_i \times B_j)$

□

Определение: $X \times Y$ с описанной выше топологией называется *произведением* топологических пространств (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) , а сама топология называется *стандартной*.

Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение топологических пространств.
- Элементами X являются такие функции $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ что $x(i) \in X_i$
- $p_i : X \rightarrow X_i$ — координатная проекция, где $p_i(x) = x(i)$.

ПРИМЕРЫ? КАКИЕ ПРИМЕРЫ? В ПРЕЗЕНТАЦИИ НЕ БЫЛО НИКАКИХ ПРИМЕРОВ! Ну при желании можно сказать, что можно задать топологию на \mathbb{R}^2 не как обычно, а через произведение топологий, и получить "топологию квадратиков а на самом деле это будет одно и то же (см, например, второе определение базы)

Определение: Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$ - семейство топологических пространств. Тихоновская топология на $X = \prod_{i \in I} X_i$ задаётся предбазой, состоящей из всевозможных подмножеств вида $p_i^{-1}(U)$, где $i \in I$ и $U \in \Omega_i$

Теорема 20. Пусть (X, d_x) и (Y, d_y) - два метрических пространства. Метрики d_x, d_y задают метрику на $X \times Y$, которая порождает топологию Ω_1 . Кроме того, метрики d_x, d_y порождает топологии Ω_X, Ω_Y на множествах X, Y соответственно, которые в свою очередь образуют топологию Ω_2 на $X \times Y$, Тогда $\Omega_1 = \Omega_2$.

Доказательство. Рассмотрим на $X \times Y$ метрику $\tilde{d}: \tilde{d}((x, y), (a, b)) = \max\{d_X(x, a), d_Y(y, b)\}$. Легко проверить, что $\tilde{d} \leq d \leq \sqrt{2}\tilde{d} \Rightarrow \tilde{d}$ и d липшицево эквиваленты, а тогда она задают одну топологию.

$\Sigma_1 = \{B_r^{\tilde{d}}(x, y) : (x, y) \in X \times Y\}$ - база топологии Ω_1 . Заметим, что $B_r^{\tilde{d}}(x, y) = B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y)$ и рассмотрим множество $\Sigma_2 = \{B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y) : (x, y) \in X \times Y\}$. Докажем, что Σ_2 - база топологии Ω_2 . Попытаемся проверить второе определение базы, для этого рассмотрим произвольные $U \in \Sigma_2$ и $(x_0, y_0) \in U$ и попытаемся найти элемент $V \in \Sigma_2$ такой, что $(x_0, y_0) \in V \subseteq U$. Так как $(x_0, y_0) \in U$, то существуют открытые $U_x \in \Omega_X, U_y \in \Omega_Y$ такие, что $(x_0, y_0) \in U_x \times U_y \subseteq U$. Но тогда существуют шары $B_{r_x}^{d_x}(x_0) \subseteq U_x$ и $B_{r_y}^{d_y}(y_0) \subseteq U_y$, откуда следует, что $(x_0, y_0) \in V = B_r^{\tilde{d}}(x_0, y_0) \in U$ ($r = \max(r_x, r_y)$), что и требовалось. \square

16 Билет

Непрерывность и произведение: проекции, теорема о покоординатной непрерывности.

$X = \prod_{i \in I} X_i$ - произведение топологических пространств.

Теорема 21. Координатные проекции $p_i : X \rightarrow X_i$ непрерывны.

Доказательство. $\forall U$ открытого в X_i : $p_i^{-1}(U)$ - элемент предбазы Тихоновской топологии (по определению), следовательно открыт в X . \square

(Отображение в произведение двух) Пусть X, Y, Z - топологические пространства. Любое отображение $f : Z \rightarrow X \times Y$ имеет вид

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z)), \text{ для всех } z \in Z,$$

где $f_1 : Z \rightarrow X, f_2 : Z \rightarrow Y$ - некоторые отображения, называемые *компонентами* отображениями f .

(Отображение в произведение дохуя) Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ - топологические пространства. Компонентами отображения $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ называются отображения $f_i : Z \rightarrow X_i$, задаваемые формулами

$$f_i := p_i \circ f$$

Теорема 22. (О покоординатной непрерывности). Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ - топологические пространства, $X = \prod_{i \in I} X_i$ - тихоновское произведение. Тогда отображение $f : Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ непрерывно, равносильно тому что каждая его компонента f_i непрерывна.

Доказательство. Докажем в обе стороны:

\Rightarrow $f_i = p_i \circ f$, при этом p_i и f непрерывны, следовательно, и f_i непрерывна.

\Leftarrow Сначала для любого U из предбазы X существует такой индекс $i \in I$ и $V \in \Omega_i$ такой, что $U = p_i^{-1}(V)$. Тогда $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(V) = f_i^{-1}(V)$ - открытое, так как f_i непрерывно.

$\forall W$ открытого в X , $W = \bigcup$ (конечных пересечений эл-в предбазы) (далее - $\bigcup_{f_{uck}}$)

$f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{f_{uck}}) = \bigcup f^{-1}(\text{конечных пересечений}) = \bigcup$ (конечных пересечений прообразов элементов предбазы)

□

Дополнительно от keba4ok: Также для проверки на непрерывность $f : X \rightarrow Y$ достаточно проверить открытость $f^{-1}(U)$ для всякого U из какой-либо базы или предбазы Y .

17 Билет

Пример функции на плоскости, непрерывной по каждой координате, но разрывной.

Функция : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданная уравнением

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Непрерывна по каждой координате, но разрывна в точке $(0,0)$.

Доказательство. Док-во непрерывности функции $f(x) = \frac{2cx}{x^2+c^2}$ полагаем, не представляет труда доказать студентам, получившим 5 за матанализ. А в точке $(0,0)$ функция разрывна, так как при $x = y \neq 0$ функция равна 1. □

18 Билет

Арифметические операции. Сумма, произведение, частное непрерывных функций.

Теорема 23. Следующие функции являются непрерывными из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R} в стандартной метрике:

- $f(x, y) = x + y$
- $f(x, y) = xy$

Доказательство.

- Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Тогда $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow |x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, откуда получаем, что $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < 2\delta = \epsilon$
- Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2 \max\{|x_0|, |y_0|\} + 1}$. Также пусть $x = x_0 + a, y = y_0 + b, |a|, |b| < \delta$. Тогда $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |ay_0 + bx_0 + ab| < \delta|y_0| + \delta|x_0| + \delta^2 \leq \delta(2 \max\{|x_0|, |y_0|\} + 1) \leq \epsilon$

□

Следствие: Пусть X - топологическое пространство, и $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные функции. Тогда функции $f + g$ и fg также непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, действующую по правилу $F(x) = (f(x), g(x))$. Она непрерывна по каждой координате \Rightarrow она непрерывна. Тогда $f + g = (x + y) \circ F$ - непрерывна как композиция непрерывных функций. Аналогично для функции fg . □

Следствие: Пусть X - топологическое пространство, а функции $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда функция $\frac{f}{g}$ непрерывна на своей области определения

Доказательство. Пусть $D = \{a \in X : g(a) \neq 0\}$ - область определения функции $\frac{f}{g}$ и подпространство в X . Тогда $g|_D$ - непрерывная функция на D (так как $(g|_D)^{-1}(U) = g^{-1}(U) \cap D$). Рассмотрим также непрерывную функцию $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $h \circ \frac{1}{g}$ также непрерывна, и $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ тоже непрерывна на D . □

19 Билет

Гомеоморфизм. Гомеоморфные интервалы на прямой, $S^n \setminus \{p\}$ и \mathbb{R}^n .

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

- f - биекция;
- f - непрерывно;
- f^{-1} - непрерывно;

Говорят, что пространство X *гомеоморфно* пространству Y ($X \simeq Y$), если существует гомеоморфизм $X \rightarrow Y$.

Дополнительно от keba4ok: Гомеоморфность - отношение эквивалентности среди топологических пространств.

Примеры на прямой, плоскости и т.д....:(

20 Билет

Аксиомы счётности. Теорема Линделёфа.

Будем считать, что множество X счётно, если существует инъекция $X \rightarrow \mathbb{N}$ (всякое подмножество счётного - счётно).

1. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, если оно обладает счётными базами во всех своих точках.
2. Топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме счётности*, если оно имеет счётную базу.
3. Топологическое свойство называется *наследственным*, если из того, что пространство X обладает этим свойством, следует, что любое его подпространство тоже им обладает (аналогично про наследование при произведении).

Свойства:

1. $2AC \Rightarrow 1AC$:
см. 8 билет
2. Обратное неверно:
 X — несчётное множество с дискретной метрикой. Тогда в каждой точке есть счётная база - сама точка, но при этом счётной базы всего пространства нет — каждый элемент должен входить в базу.
3. Всякое метрическое пространство удовлетворяет $1AC$:
Шары вида $B_{\frac{1}{n}}(a)$, где $n \in \mathbb{N}$ — база в точке a .
4. $2AC$ наследственна (в обоих смыслах):
 - Пересечём базу с подмножеством — получится счётная база подпространства.
 - Рассмотрим декартово произведение счётных баз — получим счётную базу декартова произведения пространств.

Теорема 24 (Теорема Линделёфа). *Если пространство удовлетворяет $2AC$, то из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие X , а Σ — счётная база. Рассмотрим $\Lambda := \{V \in \Sigma \mid \exists U_i : V \subseteq U_i\}$. Заметим, что Λ — покрытие любого U_i (из определения базы) $\Rightarrow \Lambda$ — покрытие X , тогда каждому $V \in \Lambda$ сопоставим произвольное U_j , в котором оно лежит. Тогда $\{U_j\}$ — счётное покрытие X . \square

21 Билет

Сепарабельные пространства. Сепарабельность и счетная база.

Определение: Подмножество A топологического пространства X называется *всюду плотным*, если $\text{Cl}(A) = X$.

Переформулировка: A всюду плотно \iff любая точка из X - точка прикосновения для $A \iff \forall U \in \Omega \setminus \{\emptyset\} U \cap A \neq \emptyset$

Пример: \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R} .

Определение: Топологическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит счётное всюду плотное множество.

Теорема 25.

- Если топологическое пространство удовлетворяет $2AC$, то оно сепарабельно.
- Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет $2AC$.

Доказательство.

- $2AC \implies$ существует счётная база Σ . Из каждого множества $U \in \Sigma$ выберем одну точку. Множество A выбранных точек счётно и всюду плотно (см. переформулировку всюду плотного множества).
- Пусть A - счётное всюду плотное множество. Рассмотрим $\Sigma = \{B_{\frac{1}{n}}(a) : a \in A, n \in \mathbb{N}\}$, докажем, что это база. Проверим второе определение базы: выберем произвольное открытое U и произвольную точку $x \in U$. Существует такое k , что $B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$. Но $B_{\frac{1}{2k}}(x) \cap A \neq \emptyset$, то есть содержит какую-то точку a . Тогда шар $B_{\frac{1}{2k}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$, и он открыт.

□

22 Билет

Аксиомы отделимости $T_1 - T_3$. Замкнутость диагонали в $X \times X$. Критерий регулярности.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* T_1 , если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме отделимости* T_2 , если любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2 , называются *хаусдорфовыми*.

Теорема 26. (Замкнутость ёбаной диагонали). X хаусдорфово равносильно тому, что $\{(a, a) : a \in X\}$ замкнуто в $X \times X$.

Доказательство. (by lounres)

\Rightarrow Покажем, что $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Пусть $(b, c) \notin \Delta$. Тогда по T_2 есть окрестности U_b и U_c точек b и c в X , что $U_b \cap U_c = \emptyset$. Следовательно $(U_b \times U_c) \cap \Delta = \emptyset$, тогда $U_b \times U_c$ — окрестность (b, c) , лежащая в $(X \times X) \setminus \Delta$ как подмножество.

\Leftarrow Пусть b и c — различные точки X . Тогда $(b, c) \notin \Delta$. Поскольку Δ замкнуто, то $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Поскольку $\{U \times V \mid U, V \in \Omega_X\}$ — база $X \times X$, то есть некоторые открытые в X множества U и V , что

$$(b, c) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Следовательно, $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, а значит, $U \cap V = \emptyset$. При этом $b \in U$, а $c \in V$. Значит U и V — непересекающиеся окрестности b и c . Поскольку b и c случайны, то выполнена T_2 . \square

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости* T_3 , если в нём любое замкнутое множество или любая не содержащаяся в этом множестве точка обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3 , называются *регулярными*.

Теорема 27. (Критерий блядской регулярности). X регулярно тогда и только тогда, когда удовлетворяет T_1 и $\forall a \in X$ любой окрестности U_a существует окрестность V_a такая, что $\text{Cl}V_a \subseteq U_a$.

Доказательство. (by lounres)

\Rightarrow Пусть U_a — некоторая окрестность некоторой точки a в X . Тогда $X \setminus U_a$ замкнуто. По T_3 у $X \setminus U_a$ и a есть непересекающиеся окрестности W_a и V_a соответственно. Тогда $X \setminus W_a$ замкнуто; при этом $W_a \supseteq X \setminus U_a$, следовательно $X \setminus W_a \subseteq U_a$; аналогично имеем, что $V_a \subseteq X \setminus W_a$. Следовательно

$$\text{Cl}(V_a) \subseteq X \setminus W_a \subseteq U_a.$$

Таким образом мы нашли искомую окрестность V_a .

\Leftarrow Пусть даны замкнутое F и точка a вне него. Тогда $U_a := X \setminus F$ — окрестность a . Тогда есть окрестность V_a точки a , что $\text{Cl}(V_a) \subseteq U_a$. Следовательно $\text{Int}(X \setminus V_a) \supseteq X \setminus U_a = F$. Значит $\text{Int}(X \setminus V_a)$ и V_a — непересекающиеся окрестности F и a . \square

23 Билет

Аксиома отделимости T_4 . Нормальность метрических пространств.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *четвёртой аксиоме отделимости*, если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями.

Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4 , называется *нормальным*.

Теорема 28. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть (X, d) — метрическое пространство. В нём выполняется T_1 ($r = \frac{d(x, y)}{2}$). Покажем T_4 — пусть A, B — непересекающиеся замкнутые множества. $X \setminus B$ — открытое и содержит $A \Rightarrow \forall a \in A \exists r_a : B_{r_a}(a) \subseteq X \setminus B \iff B_{r_a}(a) \cap B = \emptyset$. Аналогично для каждой точки b из B находим окрестность $B_{r_b}(b)$, не пересекающуюся с A . Рассмотрим $U = \bigcup B_{r_a}(a)$ и $V = \bigcup B_{r_b}(b)$. Допустим $z \in (U \cap V)$ (иначе мы нашли две непересекающиеся окрестности, т.к. объединение открытых — открыто). $z \in (U \cap V) \Rightarrow \exists x \in A, y \in B : z \in (B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap B_{\frac{r_y}{2}}(y)) \Rightarrow d(x, y) \leq \frac{r_x}{2} + \frac{r_y}{2} \leq \max(r_x, r_y) \Rightarrow (x \in B_{r_y}(y) \text{ or } y \in B_{r_x}(x))$ — противоречие. \square

Дополнительно от artemi.sav:

X — нормально $\Rightarrow X$ — регулярно $\Rightarrow X$ — хаусдорфо $\Rightarrow X$ удовлетворяет T_1 .

Заметим, что из T_1 следует, что любая точка — замкнута, из чего следует, что каждое следующее условие — частный случай предыдущего (например, X — нормально, то есть удовлетворяет T_4 и T_1 , вместо одного замкнутого множества в условии T_4 можем взять точку и получить T_3 , то есть регулярность).

24 Билет

Связность. Связные подмножества прямой.

Определение: Топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Примечание: Когда говорят, что какое-то множество связно, то всегда имеют в виду, что множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно — должно быть ясно из контекста) что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

Теорема 29. *Следующие утверждения эквивалентны связности пространства X :*

- X нельзя разбить на два непустых замкнутых множества
- Любое подмножество X , открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем X .
- Не существует непрерывного сюръективного отображения из X в пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией.

Доказательство.

- U и V открыты в $X \iff V = X \setminus U$ и $U = X \setminus V$ замкнуты в X .

- Если $U \subseteq X$ открыто и замкнуто одновременно, то $V = X \setminus U$ тоже открыто и замкнуто одновременно, причём $U \sqcup V = X$. Значит, либо U пусто или совпадает со всем X , либо X несвязно.
- Для произвольного сюръективного отображения f рассмотрим $U = f^{-1}(0)$, $V = f^{-1}(1)$. Заметим, что $U \sqcup V = X$. Так как $\{0\}$ и $\{1\}$ открыты, то открытость U, V равносильна непрерывности f .

□

Примеры:

- Антидискретное пространство связно.
- Дискретное пространство из ≥ 2 точек несвязно.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ несвязно.
- $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно.

Теорема 30. *Отрезок $[0, 1]$ связан.*

Доказательство. $X = [0, 1]$ - подпространство в \mathbb{R} . Предположим противное: $X = U \sqcup V$, U и V непусты и открыты. Не умаляя общности, пусть $0 \in U$. Тогда 0 входит в U с некоторой своей окрестностью $[0, a)$. Рассмотрим $t = \sup\{x : [0, x) \subseteq U\}$. Очевидно, что $t \in X$. Возможны два случая: $t \in U$ или $t \in V$. В первом случае t входит в U с некоторой своей окрестностью, и, так как $t < 1$, мы можем "чуть-чуть подвинуть" границу вправо, противоречие. Во втором же случае t входит в V с некоторой своей окрестностью, и мы получаем противоречие по аналогичной причине. □

Теорема 31. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- X связно
- X выпукло (т.е. $\forall a < b \in X$ верно $[a, b] \subseteq X$)
- X есть интервал (в широком смысле), точка или пустое множество.

Доказательство.

- (1) \implies (2): Предположим противное: X не выпукло. Тогда существуют $a < b < c$ такие, что $a, c \in X$ и $b \notin X$. Тогда $X = ((-\infty, b) \cap X) \sqcup ((b, \infty) \cap X)$. Оба множества непусты, так как первое содержит a , а второе - c . Противоречие со связностью X .
- (2) \implies (1): Предположим, $X = U \sqcup V$, U и V непусты и открыты в X . Выберем $a \in U$, $b \in V$. Не умаляя общности, $a < b$. Тогда отрезок $[a, b]$ разбивается на два непустых открытых в нём множества - $[a, b] \cap U$ и $[a, b] \cap V$, что противоречит его связности.
- (2) \implies (3): Либо X пусто (и всё хорошо), либо существует точка $a \in X$. Рассмотрим $l = \inf\{x : x \in X\}$, $r = \sup\{x : x \in X\}$. Либо $l = -\infty$, и тогда $(-\infty, a] \subseteq X$, либо l конечно, и тогда $[l, a] \subseteq X$ или $(l, a] \subseteq X$, и ничего левее не принадлежит. Аналогично с r . В любом случае получаем требуемое.

- (3) \implies (2): Очевидно.

□

25 Билет

Непрерывный образ связного пространства. Теорема о промежуточном значении.

Теорема 32. (Непрерывный образ связного пространства связан). Если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение и пространство X связно, то и множество $f(X)$ связно.

Доказательство. От противного, пусть $f(X)$ несвязно. Тогда $f(X) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, где U, V непусты и открыты.

Следовательно, мы имеем разбиение пространства X на два непустых открытых множества - $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, что противоречит связности пространства X . □

Теорема 33. (О промежуточном значении). Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывное отображение, и пространство X связно, тогда для любых $a, b \in f(X)$ множество $f(X)$ содержит все числа между a и b .

Доказательство. $f(X)$ связно $\implies f(X)$ выпукло $\implies f(X)$ содержит $[a, b]$. □

26 Билет

Компоненты связности. Разбиение пространства на компоненты связности.

Компонентой связности пространства X называется всякое его максимальное по включению связное подмножество.

Лемма. Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.

Доказательство. Обозначим это семейство множеств за $\{A_i\}$, $Y := \bigcup A_i$. Допустим Y — несвязно, тогда $Y = U \cup V$, где U и V — открытые непересекающиеся множества. Заметим, что $\forall A_i : A_i \subseteq U \vee A_i \subseteq V$ (иначе $A_i = (A_i \cap U) \cup (A_i \cap V)$, где $A_i \cap U$ и $A_i \cap V$ — непустые открытые подмножества в A_i). Зафиксируем A_0 , НУО $A_0 \subseteq V \implies \forall A_i (A_i \cap A_0 \neq \emptyset) \implies \forall A_i \subseteq V \implies U = \emptyset$, противоречие. □

Теорема 34. 1. Каждая точка пространства X содержится в некоторой компоненте связности.

2. Различные компоненты связности пространства X не пересекаются.

Доказательство.

1. Пусть $x \in X$. Тогда множество A — объединение всех связных множеств, содержащих x , является искомой компонентой связности (оно связно по лемме и наибольшее по включению по своему определению).
2. Пусть U, V — пересекающиеся компоненты связности, тогда $U \cup V$ — связное множество (по лемме), содержащее U и V , что противоречит определению компоненты связности.

□

27 Билет

Свойства компонент связности, их замкнутость.

Свойства компонент связности:

- Любое связное множество содержится в некоторой его компоненте связности.

Доказательство. Пусть A — связное множество пространства X , а C — такая его компонента связности, что $A \cap C \neq \emptyset$. Тогда $C' = A \cup C$ также связно. Значит, $A \subseteq C$, так как иначе получается противоречие с максимальнойностью C . □

- Две точки содержатся в одной компоненте связности \iff они содержатся в одном связном подмножестве.
- Пространство несвязно \iff оно имеет хотя бы две компоненты связности.

Следствие: Число компонент связности — топологический инвариант.

Доказательство. Предположим, $X \cong Y$. Докажем, что если a, b лежат в одной компоненте связности C множества X , то $f(a), f(b)$ лежат в одной компоненте связности множества Y . Действительно, предположим, $f(C)$ несвязно. Тогда $f(C) = U \sqcup V$, где U, V непусты и открыты в Y . Тогда $C = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$, что противоречит его связности. Аналогично, свойство точек лежать в одном связном множестве сохраняется и при обратном преобразовании. Значит, любая компонента связности C в X перейдёт именно в компоненту связности $f(C)$ множества Y . □

Лемма: Замыкание связного множества связно.

Доказательство. Предположим противное: $\text{Cl}A = U \sqcup V$, где U, V открыты в $\text{Cl}A$ и непусты. Тогда A в силу связности целиком лежит либо в U , либо в V , не умаля общности в U . Но так как V открыто, то U замкнуто, и $A \subseteq U \subseteq \text{Cl}A$, откуда следует, что $U = \text{Cl}A$. □

Теорема 35. Каждая компонента связности топологического пространства замкнута.

Доказательство. Пусть $C \subseteq X$ — компонента связности. Тогда $C \subseteq \text{Cl}C$, причём это вложение строгое, если C не замкнуто. В этом случае получаем противоречие с максимальнойностью компоненты связности. □

28 Билет

Линейная связность. Непрерывный образ линейно связного множества. Компоненты линейной связности. Пространства с линейно связными окрестностями.

Путь в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Началом пути α называется точка $\alpha(0)$, а концом - точка $\alpha(1)$. При этом говорят, что путь α соединяет эти две точки.

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любые две точки можно соединить путём.

Теорема 36. (*Линейная связность и непрерывность*). Если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение и пространство X линейно связно, то и пространство $f(X)$ линейно связно.

Доказательство. Если α - путь, соединяющий точки $a, b \in X$, то $f \circ \alpha$ - путь, соединяющий точки $f(a), f(b) \in f(X)$. \square

Вообще, получается, что *соединимость путём* - отношение эквивалентности на множестве точек пространства. Доказать можно, но не хочется. Рефлексивность и симметричность очевидны, давайте проверим транзитивность.

Доказательство. Если α - путь из a в b , а β - путь из b в c , то

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{for } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & \text{for } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Данный путь искомый, так как непрерывность γ следует из фундаментальности покрытия $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ и непрерывности $\alpha(2t), \beta(2t - 1)$. \square

Компонентой линейной связности пространства X называется класс эквивалентности отношения соединимости путём.

Теорема 37. (*Для понта от кебадок*.) Всякое линейное пространство связно.

Следствие: компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.

Теорема 38. (*О точках со связной окрестностью*). В топологическом пространстве, каждая точка которого имеет линейно связную окрестность,

- Компоненты линейной связности открыты;
- Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности.

Доказательство.

- Пусть W - компонента линейной связности, $a \in W$ и U - линейно связная окрестность точки a . Тогда $U \subseteq W$, влечёт открытость W .

- Пусть $W_i, i \in I$ - компоненты линейной связности пространства. По предыдущему пункту, каждое W_i открыто. Пусть A - компонента связности. В силу связности, A не может пересекать несколько разных

□

29 Билет

Линейная связность влечёт связность. Пример связного, но не линейно связного пространства.

Теорема 39. *Всякое линейно связное пространство связно.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $a \in X$. Пусть A — её компонента связности. Т.к. пространство линейно связно, то $\forall b \in X \exists$ путь α_b , соединяющий a и b , путь — связное множество (почему-то подчёркнуто, надо чекнуть 8 лекцию/предыдущий билет) $\Rightarrow b \in A$, т.к. объединение связных множеств связно (26 билет), а A — максимальное по включению связное множество $\Rightarrow A = X$ — связно. □

Следствие: *Компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.*

Теорема 40. *Множество $X = \{(x, \cos \frac{1}{x}) \cup (0, 0) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ связно, но не линейно связно.*

Доказательство. $A = \{(x, \cos \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. График A линейно связан (как образ непрерывного отображения $f: (0, +\infty) \rightarrow (x, \cos \frac{1}{x})$), значит связан. X связно, так как $Cl A = X$, а замыкание связного множества — связно (27 билет).

Покажем, что X не линейно связно — от противного, пусть $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ — произвольный непрерывный путь, соединяющий $(0, 0)$ и $(c, \cos \frac{1}{c})$. Рассмотрим множество $T = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) = (0, 0)\}$.

T — замкнуто в $[0, 1]$, т.к. $T = \alpha^{-1}((0, 0))$, а прообраз замкнутого (точка, очевидно, замкнута в T) — замкнут.

Докажем теперь, что T — открыто, тогда $T = [0, 1]$ (т.к. открытое и замкнутое одновременно подмножество связного пространства $[0, 1]$, либо пустое, либо все пространство), и тогда $\alpha([0, 1]) = (0, 0)$.

Действительно, из непрерывности $\alpha : \forall t_0 \in T, \varepsilon = 1, \exists \delta > 0 : \alpha(B_\delta(t_0)) \subseteq B_1((0, 0))$. Покажем, что $B_\delta(t_0) \subseteq T$. От противного, пусть $t_1 \in B_\delta(t_0) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$. Но $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны (16 билет). НУО $x(t_1) > 0$, тогда $x(t_0) = 0 \Rightarrow \exists t_2 \in [t_0, t_1] : x(t_2) = \frac{1}{2\pi n}$ (кажется, была теорема о промежуточном значении при непрерывном отображении связного пространства в \mathbb{R}). А значит $t_2 \in B_\delta(t_0)$, но $\alpha(t_2) = (\frac{1}{2\pi n}, \dots) \notin B_1((0, 0))$, противоречие. □

30 Билет

Негомеоморфность разных видов интервалов, окружности и плоскости.

Следующие множества попарно негомеоморфны:

1. $[0, 1]$
2. $[0, 1)$
3. $(0, 1)$
4. S^1
5. \mathbb{R}

Доказательство. Чтобы доказать, что эти пространства попарно негомеоморфны, достаточно заметить, что в п. (а) связность (линейная связность) не теряется при удалении двух крайних точек, в пп. (b) и (d) - только при удалении одной точки, в п. (с) - всегда теряется. А в п. (е) вообще можно удалить много точек без потери линейной связности. \square

31 Билет

Компактные пространства. Компактность отрезка.

Топологическое пространство *компактно*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Примеры:

- Конечное пространство компактно;
- Любое антидискретное пространство компактно;
- Бесконечное дискретное пространство некомпактно;
- \mathbb{R} некомпактно.

Замечание: Когда говорят, что какое-то множество компактно, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

Теорема 41. (*Лемма Гейне-Бореля (нижуя себе, у неё есть название)*). Отрезок $[0, 1]$ компактен.

Доказательство. Докажем факт от противного, пусть $I = [0, 1]$ некомпактен. Тогда имеется его открытое покрытие $\{U_i\}$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Разделим I пополам на два отрезка. Тогда один из них, обозначим его I_1 , нельзя покрыть конечным числом множеств U_i . Далее продолжим так делить пополам, получим последовательность вложенных отрезков I_n , причём длина I_n равна 2^{-n} .

В силу аксиомы полноты найдётся точка $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Так как $c \in [0, 1]$, то найдётся такое U_j , что $c \in U_j$. Очевидно, что при достаточно больших n имеем $I_n \subseteq U_j$, что противоречит невозможности покрытия любого I_n конечным числом множеств U_i . \square

32 Билет

Замкнутое подмножество компакта компактно. Произведение компактов компактно.

Теорема 42. Пусть X — компактное пространство и A — его замкнутое подмножество. Тогда A — компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие A , тогда $\{U_i\} \cup (X \setminus A)$ — открытое покрытие X , выделим конечное подпокрытие и уберём $X \setminus A$, получим конечное подпокрытие A . \square

Теорема 43. Пусть X, Y — компактные пространства. Тогда их произведение $X \times Y$ компактно.

Доказательство. Пусть W_i — открытое покрытие, тогда представим его в виде объединения элементов базы, из них выберем конечное подпокрытие и для каждого выбранного множества базы рассмотрим какое-нибудь из исходных множеств, в котором оно содержалось.

Поэтому достаточно рассмотреть покрытие, состоящее из элементов базы — вида $U_i \times V_i$, где U_i открыто в X , а V_i открыто в Y . Т.к. Y компактно, то для любого слоя $\{x\} \times Y$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_{i_x} \times V_{i_x}$. Пусть $W_x = \bigcap U_{i_x}$, оно открыто в X , поэтому $\{W_x\}_{x \in X}$ — открытое покрытие X , значит можно выбрать конечное подпокрытие, тогда выбранное для соответствующих слоев $\{x_i\} \times Y$ конечное покрытие будет являться искомым конечным покрытием произведения (рассмотрим произвольное (x, y) — находим в каком множестве покрытия W_{x_i} лежит x , затем в каком множестве слоя $\{x_i\} \times Y$ лежит y и соответствующее множество $U \times V$ будет содержать (x, y)). \square

33 Билет

Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. Хаусдорфов компакт нормален.

Теорема 44. Пусть $A \subseteq X$ — компакт в Хаусдорфовом пространстве X . Тогда A замкнуто в X .

Доказательство. Пусть $b \in X \setminus A$ — произвольная точка. Покажем, что она внутренняя для $X \setminus A$. Для каждой точки $a \in A$ рассмотрим соответствующие ей непересекающиеся окрестности U_a и V_a точек a и b соответственно. Тогда $\{U_a\}_{a \in A}$ — покрытие A открытыми множествами. Так как A компактно, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{a_j}\}$. Тогда $W = \bigcap V_{a_j}$ — искомая окрестность точки b , не пересекающаяся с A . \square

Теорема 45. Если топологическое пространство X Хаусдорфово и компактно, то оно нормально.

Доказательство. Докажем сначала, что X регулярно. Пусть $A \subseteq X$ - замкнутое множество, и $b \in X \setminus A$. Заметим, что A - также компакт (как замкнутое подмножество компакта). Вспомним конструкцию из доказательства предыдущей теоремы и дополнительно рассмотрим открытое множество $R = \bigcup U_{a_j}$. Оно не пересекается с W . Значит, выполнена аксиома T_3 (T_1 выполнена в силу Хаусдорфовости пространства).

Докажем теперь, что X нормально. Пусть $A, B \subseteq X$ - замкнутые множества (и, как следствие, компактны). Для каждой точки $b \in B$ рассмотрим соответствующие окрестности R_b и W_b множества A и точки b соответственно. $\{W_b\}_{b \in B}$ - открытое покрытие $B \implies$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{W_{b_j}\}$. Тогда $\bigcup R_{b_j}$ и $\bigcup W_{b_j}$ - искомые окрестности множеств A и B соответственно. \square

34 Билет

Компактные множества в \mathbb{R}^n .

Сейчас будут предварительные подготовки к последней теореме. Возможно, в их доказательство поверят на слово.

Теорема 46. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $a \in X$ и рассмотрим открытое покрытие X шарами $B_r(a), r > 0$. В силу компактности X , выберем конечное подпокрытие $B_{r_1}(a), \dots, B_{r_k}(a)$. Пусть $r = \max\{r_1, \dots, r_k\}$, тогда $X \subseteq B_r(a)$. \square

Следствие: компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, а компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. \square

Теорема 47. *Множество в \mathbb{R}^n компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Доказываем в разные стороны поочерёдно:

\implies : Очевидно из последнего следствия.

\impliedby : Множество A ограничено в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$ содержится в некотором кубе $[-a, a]^n$. Куб компактен, так как это произведение компактов. Тогда A - замкнутое подмножество компакта $[-a, a]^n \Rightarrow$ компакт. \square

35 Билет

Компактность и центрированные наборы множеств. Их применение для доказательства непустоты пересечения замкнутых множеств.

Набор подмножеств множества X *центрирован*, если любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение.

Пример: Набор $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ непустых вложенных множеств центрирован.

Теорема 48. X компактно \iff любой центрированный набор замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.

Доказательство. Заметим, что $\{X \setminus A_i\}$ — покрытие $X \iff \bigcap A_i = \emptyset$, т.к. $\bigcup (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap A_i$.

(\Rightarrow) От противного, пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств и $\bigcap A_i = \emptyset$. Тогда $\{X \setminus A_i\}$ — открытое покрытие X . Выберем из него конечное подпокрытие, тогда соответствующие A_i имеют пустое пересечение, что противоречит центрированности.

(\Leftarrow) От противного, пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие X , из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $\{X \setminus U_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств. По предположению, $\bigcap (X \setminus U_i) \neq \emptyset$, что противоречит тому, что $\{U_i\}$ покрытие X . \square

Следствие: Пусть X — топологическое пространство, $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X , хотя бы одно из которых компактно. Тогда их пересечение непусто.

Доказательство. Пусть A_0 — компактно, тогда $\{A_0 \cap A_i\}$ — центрированный набор замкнутых подмножеств компакта A_0 . По теореме, пересечение всех этих множеств непусто. \square

Следствие: Пусть X — топологическое пространство, $\{A_i\}$ — линейно упорядоченный по включению набор непустых замкнутых множеств в X , хотя бы одно из которых компактно. Тогда их пересечение непусто.

Доказательство. $\{A_i\}$ — центрированный набор, значит из предыдущего следствия, их пересечение непусто. \square

36 Билет

Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово.

Теорема 49. Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, и X компактно, то Y тоже компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие $f(X)$. Так как f непрерывно, то $\{f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие X . Так как X компактно, можно выбрать конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_{i_k})\}$. Но тогда $\{U_{i_k}\}$ — конечное подпокрытие $f(X)$. \square

Следствие: Компактность — топологическое свойство.

Теорема 50. Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, и X компактно. Тогда $f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство. X — компактно, тогда и $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ компактно, т.е. замкнуто и ограничено \implies содержит свои \sup и \inf \square

Теорема 51. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - непрерывная биекция из компактного пространства X на Хаусдорфово пространство Y . Тогда f^{-1} тоже непрерывно.

Доказательство. Нам надо показать, что если $A \subseteq X$ замкнуто в X , то $f(A)$ замкнуто в Y . Заметим, что V компактно (как замкнутое подмножество компакта) $\implies f(V)$ компактно (как непрерывный образ компакта) $\implies f(V)$ замкнуто (так как любой компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут). \square

Определение: Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *вложением*, если f - гомеоморфизм между X и $f(X)$.

Следствие: Если $f : X \rightarrow Y$ - непрерывная инъекция компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y , то f - вложение.

37 Билет

Лемма Лебега. Равномерная непрерывность на компактах.

Теорема 52. (Лемма Лебега). Пусть X - компактное метрическое пространство и $\{U_i\}$ - его открытое покрытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r содержится в одном (согласно википедии, хотя бы) элементе покрытия.

Определение: число r называется *числом Лебега* данного покрытия.

Доказательство. $\forall a \in X \exists r_a > 0$: шар B_{r_a} содержится в одном из U_i . $\{B_{r_a/2}(a)\}_{a \in X}$ - открытое покрытие X , можно выбрать из него конечное подпокрытие и докажем, что в качестве числа Лебега r подходит наименьший из радиусов шаров подпокрытия.

Берём $\forall b \in X$ - центр шара $B_r(b)$. Находим шар $B_{r_a/2}$ из подпокрытия, содержащий точку b . Тогда $B_r(b) \subseteq B_{r_a}(a)$, а $B_{r_a}(a)$ содержится в одном из U_i . \square

Следствие: (Лемма Лебега для отображений (это в билете не просят)). Пусть X - компактное метрическое пространство, Y - топологическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно и $\{U_i\}$ - открытое покрытие Y . Тогда $\exists r > 0 : \forall a \in X f(B_r(a))$ содержится в одном из U_i .

Доказательство. Применим нормальную Лемму к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. \square

Пусть (X, d_X) , Y, d_Y - метрические пространства, тогда отображение $f : X \rightarrow Y$ *равномерно непрерывно*, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, b \in X d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon$.

Теорема 53. Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \rightarrow Y$ будет равномерно непрерывным.

Доказательство. Применим лемму Лебега для отображения f и покрытия пространства Y шарами радиуса $\epsilon/2$. \square

38 Билет

Предел последовательности, секвенциальное замыкание. Первая АС и секвенциальное замыкание.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек топологического пространства X . Точка $b \in X$ называется её **пределом**, если $\forall U_\varepsilon(b) \exists N \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(b), \forall n > N$. Если b — предел последовательности $\{a_n\}$, то говорят, что $\{a_n\}$ сходится к b ($a_n \rightarrow b, b = \lim a_n$).

Примеры:

- Постоянная последовательность сходится;
- Если $a_n \rightarrow b$, то любая её подпоследовательность сходится к b .
- В антидискретном пространстве каждая его точка является пределом любой последовательности.

Пусть A — подмножество топологического пространства X . Совокупность пределов всевозможных последовательностей точек множества A называют **секвенциальным замыканием** этого множества и обозначают $SClA$.

Теорема 54. Если пространство X удовлетворяет 1AC, то для любого $A \subseteq X$ верно $SClA = ClA$.

Доказательство. Пусть $b \in ClA$, $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — счётная база в b . Тогда $U_k = \bigcap_{i=1}^k V_i$ — убывающая база в b ($U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$).

$\forall n \in \mathbb{N}$ выбираем $a_n \in U_n \cap A$. Тогда $a_n \rightarrow b$. (Рассмотрим произвольную окрестность W точки b , существует V_m из базы, такое что $V_m \subseteq W$, тогда $U_m \subseteq V_m \subseteq W$, значит начиная с индекса m , все a_i лежат в этой окрестности). То есть $SClA \supseteq ClA$. Обратное доказано в теореме из дополнения (см. ниже). \square

Дополнительно от artemi.sav:

Теорема: $SClA \subseteq ClA$.

Доказательство: Предел последовательности точек из A — точка прикосновения (Любая окрестность пересекается с множеством).

Теорема: В хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность не может иметь больше одного предела.

Доказательство: Действительно, пусть имеется два предела, тогда по хаусдорфности у них есть непересекающиеся окрестности, а по определению предела для каждой окрестности, начиная с какого-то момента, элементы последовательности лежат в ней. Противоречие.

39 Билет

Полные метрические пространства. Полнота \mathbb{R}^n . Замкнутое подмножество полного пространства полно.

Определение: Последовательность точек $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ в метрическом пространстве (X, d) называется *фундаментальной* (сходящейся в себе, последовательностью Коши), если: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, k > N d(x_m, x_k) < \epsilon$

Свойства:

- Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна
- Всякая фундаментальная последовательность ограничена
- Всякая фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Определение: Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры:

- \mathbb{R} полно - было в анализе
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не полно.

Доказательство. Возьмём последовательность, стремящуюся к нулю. □

Теорема 55. \mathbb{R}^n полно.

Доказательство. Пусть $\{a_k\}$ - фундаментальная последовательность в \mathbb{R}^n . Тогда $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$. Если $\{a_k\}$ фундаментальна в \mathbb{R}^n , то $\{a_k^j\}$ - фундаментальна в \mathbb{R} для любого $1 \leq j \leq n$. Так как \mathbb{R} полно, то $\{a_k^j\}$ сходится к A^j . Но тогда $\{a_k\}$ сходится к $A = (A^1, \dots, A^n)$. □

Теорема 56. Пусть X - полное пространство, и $Y \subseteq X$ - замкнутое множество. Тогда Y тоже полно.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность в Y . Так как X полно, эта последовательность имеет предел $b \in X$. b - предельная точка для замкнутого $Y \Rightarrow b \in Y$. □

40 Билет

Теорема о вложенных шарах. Нигде не плотные множества. Теорема Бэра.

Теорема 57. Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность его замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, обладает непустым пересечением.

Доказательство.

\Rightarrow Пусть $D_{r_0} \supseteq D_{r_1} \supseteq \dots$ — убывающая последовательность замкнутых шаров, причём $(r_n)_{n=0}^\infty \rightarrow 0$. В каждом D_{r_n} выберем точку a_n . Поскольку $(r_n)_{n=0}^\infty \rightarrow 0$, то $(a_n)_{n=0}^\infty$ фундаментальна. Тогда по полноте X следует, что у неё есть предел a .

Заметим, что $a_k \in D_{r_n}$ для всяких $k \geq n \geq 0$, а D_{r_n} замкнуто, значит $a \in D_{r_n}$. Таким образом $a \in \bigcap_{n=0}^\infty D_{r_n}$.

\Leftarrow Пусть $(a_n)_{n=0}^\infty$ — фундаментальная последовательность. Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ есть $N_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всяких $k, l \geq N_n$ верно, что $d(a_k, a_l) \leq \frac{1}{2^n}$ и $N_{n+1} \geq N_n$. Значит $a_k \in D_{1/2^n}(a_{N_n})$ для всех $k \geq N_n$.

Таким образом получим последовательность шаров $D_1(a_{N_0}) \supseteq D_{1/2}(a_{N_1}) \supseteq D_{1/4}(a_{N_2}) \supseteq \dots$. Тогда в их пересечении есть точка a . Несложно понять, что a — предел $(a_n)_{n=0}^\infty$. \square

Пусть X — топологическое пространство. Тогда множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным*, если $\text{Int } \text{Cl } A = \emptyset$.

Определение: $\text{Ext } A = \text{Int}(X \setminus A)$.

Свойство: $\text{Ext } A$ открыто и $X = \text{Int } A \sqcup \text{Fr } A \sqcup \text{Ext } A$.

Лемма нахуй не нужная в билете: следующие утверждения эквивалентны:

- A нигде не плотно;
- $\text{Ext } A$ всюду плотно;
- Любое непустое открытое $U \subset X$ содержит непустое открытое $V \subset U$, что $V \cap A = \emptyset$.

Теорема 58. (Теорема Бэра). *Плотное пространство нельзя покрыть счётным набором нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ — счётное покрытие X нигде не плотными множествами.

Построим последовательность вложенных закрытых шаров $(D_n)_{n=0}^\infty$ с радиусами $(r_n)_{n=0}^\infty$ следующим образом. D_0 — любой шар (ненулевого радиуса). Шар D_{n+1} строится так. $\text{Int}(D_n) \cap \text{Ext}(A_n)$ непусто и открыто, значит содержит открытый шар B , а он содержит закрытый шар D_{n+1} чей радиус $r_{n+1} \leq r_n/2$. Значит $D_{n+1} \subseteq D_n$ и $D_{n+1} \cap A_n = \emptyset$.

Поскольку мы построили уменьшающуюся последовательность шаров, что их радиусы сходятся у нулю, то в их пересечении лежит некоторая точка a . Так как для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $a \in D_{n+1}$, то $a \notin A_n$, значит $a \notin \bigcup_{n=0}^\infty A_n = X$ — противоречие. \square

41 Билет

Секвенциальная компактность. Всякое компактное метрическое пространство секвенциально компактно. Компактность и 1АС влечёт секвенциальную

компактность.

Говорят, что топологическое пространство *секвенциально компактно*, если любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Точка b называется *точкой накопления* множества A , если любая её окрестность содержит бесконечно число точек этого множества.

Лемма: В компактном пространстве всякое бесконечное множество имеет точку накопления.

Доказательство: Пусть $S \subset X$ — бесконечное множество. От противного, пусть $\forall x \in X \exists$ окрестность U_x точки x : $|U_x \cap S| < \infty$. Тогда $\{U_x\}_{x \in X}$ покрытие компактного $X \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_k}$, но тогда $S = \bigcup_{i=1}^k (U_{x_i} \cap S)$ — конечно, противоречие.

Теорема 59. Всякое компактное метрическое пространство секвенциально компактно.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность в X . Выделим сходящуюся подпоследовательность:

Если различных точек в последовательности конечно, то это очевидно. Пусть множество $\{a_i\}$ бесконечно. Тогда по лемме у него существует точка накопления b . Рассмотрим шары $B_{\frac{1}{k}}(b)$ и в каждом выберем элемент a_{n_k} последовательности так, чтобы n_k была возрастающей последовательностью (так как на каждом шаге мы отбрасываем конечный префикс последовательности, а в шаре лежит бесконечное количество элементов, то мы можем так сделать). Полученная подпоследовательность будет сходиться к b . \square

Теорема 60. обобщение Если топологическое пространство компактно и удовлетворяет $1AC$, то оно секвенциально компактно.

Доказательство. Рассуждаем аналогично с предыдущим доказательством, только вместо шаров берём убывающую базу в точке b (см. билет 38). \square

42 Билет

Вполне ограниченность. Всякое секвенциально компактное метрическое пространство вполне ограничено и полно.

Пусть (X, d) — метрическое пространство.

Определение: Подмножество $A \subseteq X$ называется его ϵ -сетью ($\epsilon > 0$), если $d(b, A) < \epsilon$ для любой точки $b \in X$.

Определение: Пространство X вполне ограничено, если для любого $\epsilon > 0$ существует его конечная ϵ -сеть.

Примеры:

- \mathbb{Z} — 1-сеть в \mathbb{R} .

Теорема 61. *Всякое секвенциально компактное метрическое пространство полно и вполне ограничено*

Доказательство.

- **Полнота:** Пусть $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность. Так как пространство секвенциально компактно, то можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. А любая фундаментальная последовательность, имеющая сходящуюся подпоследовательность, сходится.
- **Вполне ограниченность:** Предположим, для какого-то $\epsilon > 0$ не существует конечной ϵ -сети. Построим бесконечную последовательность $\{a_k\}$ так: в качестве a_1 возьмём произвольную точку из X , а на i -ом шаге будем брать такую точку a_i , что $d(a_j, a_i) \geq \epsilon \forall j < i$ (так сделать всегда можно, так как конечная сеть отсутствует). Но тогда из последовательности $\{a_k\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как расстояние между любыми двумя её элементами $\geq \epsilon = \text{const}$.

□

43 Билет

Всякое полное вполне ограниченное метрическое пространство компактно.

Теорема 62. *Всякое полное вполне ограниченное метрическое пространство компактно.*

Доказательство. От противного: пусть $\{U_1\}$ - открытое покрытие X , не имеющее конечного подпокрытия. Пусть A_1 - конечная 1-сеть. $\{D_1(a)\}_{a \in A_1}$ - конечное покрытие X . Тогда $\exists a_1 \in A_1 : C_1 = D_1(a_1)$ не покрывается конечным числом U_i . Одно из них не покрывается конечным числом U_i .

Пусть A_2 - конечная $\frac{1}{2}$ - сеть. Тогда короче возьмём C_1 , пересечём его с конечным покрытием вокруг этой сети, и получим, что один из элементов разбиения не покрывается конечным числом U_i . Получаем C_2 , и так далее строим убывающую последовательность замкнутых множеств, причём каждый элемент не покрывается конечным числом U_i и их диаметр стремится к нулю.

По теореме о вложенных шарах, у них есть непустое пересечение, но тогда $\exists j : b \in U_j \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(b) \subset U_j \Rightarrow \exists K : C_K \subset B_\epsilon(b) \subset U_j$. А это противоречие с тем, что C_K не покрывается конечным числом U_i . □

44 Билет

Всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено и имеет счётную базу.

Теорема 63. *Всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено.*

Доказательство. Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем конечное подпокрытие из всех шаров радиуса ϵ — центры выбранных шаров будут образовывать искомую ϵ -сеть. □

Лемма: *Всякое вполне ограниченное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Доказательство. Полагаем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, A_n — конечная ε_n -сеть. Полагаем $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

A — счётно (счётное объединение конечных множеств), A всюду плотно (в любом открытом есть шар $B_{\frac{1}{n}}(x)$, который пересекает A_n , а значит и A) $\Rightarrow X$ сепарабельно \Rightarrow имеет счётную базу (21 билет). \square

Теорема 64. *Всякое компактное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы и леммы получаем, что всякое метрическое пространство вполне ограничено, а значит, имеет счётную базу. \square

45 Билет

46 Билет

Факторпространства, их топологические свойства. Частные случаи: стягивание подмножества в точку, приклеивание по отображению, фактор по действию группы. Пропускание отображения через фактор.

(by lournes)

Разбиение множества — это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.

Фактормножество множества X по его разбиению S — это множество элементами которого являются подмножества X , составляющие разбиение S . Обозначение $X \setminus S$.

Теорема 65. *(Топологические свойства факторпространств).*

- Факторпространство связного пространства связно;
- Факторпространство линейно связного пространства линейно связно;
- Факторпространства сепарабельного пространства сепарабельно;
- Факторпространство компактного пространства компактно.

Доказательство. В целом, тут всё, очевидно, сохраняется при непрерывных отображениях. \square

Частные случаи факторпространств.

1. *Стягивание подмножества в точку.* Пусть $A \subseteq X$, тогда можно рассмотреть разбиение S , где A стягивается в одну точку, а все остальные точки не трогаются.
2. • *Несвязное объединение.* Пусть X, Y — топологические пространства. Тогда их *несвязное объединение* — множество $X \sqcup Y$ с топологией, где всякое подмножество U открыто тогда и только тогда, когда $U \cap X$ открыто в X и $U \cap Y$ открыто в Y .

- Аналогично можно рассматривать не только два пространства, а всякое семейство пространств. Если есть семейство топологических пространств Σ , то можно рассмотреть пространство $\bigsqcup_{X \in \Sigma} X$, где всякое подмножество U открыто тогда и только тогда, когда $U \cap X$ открыто в X для всех $X \in \Sigma$.
- *Приклеивание по отображению.* Пусть даны топологические пространства X , Y , множество $A \subseteq X$ и непрерывное отображение $f : A \rightarrow Y$. Рассмотрим факторпространство несвязного объединения $X \sqcup Y$, где стягиваются множества $\{b\} \cup f^{-1}(b)$ для каждого $b \in f(A)$, а остальные точки остаются как есть. Это пространство обозначается как $X \sqcup_f Y$.

Пример. Если $X = Y = S^1$, $A = \{x\}$, где $x \in X$, а f — любое, то $X \sqcup_f Y$ — “восьмёрка” (две окружности, склеенные по точке) со стандартной метрической топологией.

3. *Склеивание частей одного пространства.* Пусть даны топологическое пространство X , множество $A \subseteq X$ и непрерывная функция $f : A \rightarrow X$. Тогда можем рассмотреть разбиение S на минимальные множества, что для всякого $a \in f(A)$ точка a и элементы $f^{-1}(a)$ лежат в одном множестве; в случае, если $A \cap f(A) = \emptyset$ неодноточечными множествами разбиения S будут $\{a\} \cup f^{-1}(a)$ для каждого $a \in f(A)$. В таком случае X/f есть склейка X по функции f . Обозначение: X/f .

Пример. Пусть $X = [0; 1] \times [0; 1]$, $A = \{0\} \times [0; 1]$, $f : A \rightarrow X, (0, t) \mapsto (1, t)$. Тогда $X/f \simeq S^1 \times [0; 1]$ — боковая поверхность цилиндра.

4. *Фактор по действию группы.* Пусть даны топологическое пространство X и подгруппа Γ группы $\text{Номео}(X)$. Рассмотрим отношение эквивалентности \sim , где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\exists g \in \Gamma : g(x) = y$. Тогда X/\sim обозначается как X/Γ .

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $\Gamma = \{f : X \rightarrow X, x \mapsto x + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (в таком случае $\Gamma \cong \mathbb{Z}^+$). Тогда $X/\Gamma \simeq S^1$.

Пример.

1. $[0; 1]/[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}] \simeq [0; 1]$
2. Пространство $[0; 1]/(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ не метризуемо и не хаусдорфово (в отличие от $[0; 1]$). В данном случае $[0; 1]/(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) = [0; \frac{1}{3}] \cup b \cup [\frac{2}{3}; 1]$, где $\{b\}$ само по себе открыто, а всякие окрестности $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ содержат b .

Теорема 66 (о пропускании отображения через фактор). Пусть даны топологические пространства X и Y , отношение эквивалентности \sim на X , каноническая проекция $p : X \rightarrow X/\sim$ и отображение $f : X \rightarrow Y$, что для всяких $x_1, x_2 \in X$ верно, что $x_1 \sim x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Тогда

1. Существует единственное отображение $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$, что $f = \bar{f} \circ p$.
2. f непрерывно тогда и только тогда, когда \bar{f} непрерывно.

Доказательство.

1. Заметим, что для всякого $T \in X/\sim$ верно, что:
 - для каждого $x \in T$ значение $f(x)$ одно и то же;
 - для всякого $x \in T$ верно, что $f(x) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f}(T)$.

Из этого следует, что для всякого $T \in X/\sim$ значение \bar{f} определено строго единственным образом, значит \bar{f} существует и единственно.

2. (\Leftarrow) Очевидно, поскольку тогда f является композицией непрерывных отображений, а значит само непрерывно.
- (\Rightarrow) Пусть U — открытое множество в Y . Тогда $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ открыто в X . Следовательно $\bar{f}^{-1}(U)$ тоже открыто по определению топологии на X/\sim . Значит \bar{f} непрерывно.

□

47 Билет

Хаусдорфовы факторпространства компактов (следствие пропускания отображения через фактор). D^n/S^{n-1} гомеоморфно S^n .

Теорема 67. Пусть X, Y — топологические пространства, X — компакт, Y — Хаусдорфово (T_2). $f : X \rightarrow Y$ — непрерывно и сюръективно. Рассмотрим \sim по $X : x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $Y \cong X/\sim$.

Доказательство. Хотим доказать, что \bar{f} — гомеоморфизм (см. пропускание отображения через фактор).

Докажем, что оно — биекция: очевидно из определения X/\sim и Y (и там и там элементы — классы эквивалентности). \bar{f} — непрерывно по теореме о пропускании.

X — компакт $\Rightarrow X/\sim$ — компакт, а значит \bar{f} действует из компакта в Хаусдорфово, значит это гомеоморфизм (36 билет). □

Теорема 68. D^n/S^{n-1} гомеоморфно S^n .

Доказательство. $X = [0, 1]^n$ — компакт (32 билет — произведение компактов компакт), $Y = S^{n-1}$ — Хаусдорфово (по определению, видимо).

$f : D^n \rightarrow S^n, f(x) = (\frac{x}{|x|} \sin|x|, \cos|x|), f(0) = (0, 1); S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Первая координата лежит в \mathbb{R}^n , вторая координата лежит в \mathbb{R} . Проверяется, что эта функция удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и получаем искомое (TBC...). □

48 Билет

49 Билет

Всякая связная замкнутая поверхность гомеоморфна поверхности, задаваемой канонической разверткой I или II типа.

Доказательство. Не хочу я это писать, картинки никак не передать □

И в заключение...

50 Пофамильный указатель всех мразей

Быстрый список для особо забывшегося поиска.

[база](#)

[внутренность](#)

[граница](#)

[замыкание](#)

[критерий \(базы\)](#)

[метрика](#)

[множество \(замкнутое\)](#)

[множество \(открытое\)](#)

[окрестность](#)

[предбаза](#)

[пространство \(метрическое\)](#)

[пространство \(метризуемое\)](#)

[топология](#)

[топология \(сильнее, слабее,...\)](#)

[точки \(прикосновения, внутренние,...\)](#)

[шар](#)

[эквивалентность](#)

[эквивалентность \(по липшицу\)](#)