

Первая контрольная 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Белова Ю. С.,
а также других источников)

31 марта 2021 г.

Темы задач. Кстати, конкретно про асимптотику суммы тут ничего нет, там всё-таки как-то трудно пером общий случай описать, ну и про определённые интегралы - тоже пусто, из фактов только таблица первообразных и интегрирование по частям, думаю уж, упустить можно. Пока есть время - можете предложить, что стоит добавить помимо всего, что есть.

Содержание

1	Несобственный интеграл.	
	Равномерная сходимость интегралов.	3
2	Кривые.	4
3	Многомерные функции.	5
4	Дифференцирование.	5

1 Несобственный интеграл.

Равномерная сходимость интегралов.

Определение 1. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \omega)$ (где ω может быть действительным числом или $+\infty$) и интегрируема на любом промежутке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке. Величина

$$\int_a^\omega f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x)dx,$$

если указанный предел существует, называется *несобственным интегралом* от функции f по промежутку $[a, \omega)$. Если указанный предел существует, то говорят, что интеграл *сходится*, и *расходится* в противном случае.

Утверждение 1. (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Если функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, лежащем внутри, то интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $B \in [a, \omega)$ так, что при любых $b_1, b_2 \in [a, \omega)$ таких, что $B < b_1, b_2$ имеет место соотношение

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Определение 2. Про несобственный интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ говорят, что он *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^\omega |f|(x)dx$.

Примечание 1. Нетрудно заметить, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Утверждение 2. Если функция f удовлетворяет условиям первого определения и неотрицательна на $[a, \omega)$, то несобственный интеграл существует в том и только том случае, когда функция

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)dx$$

ограничена на $[a, \omega)$.

Теорема 1. (Теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом его отрезке. Если на данном промежутке выполнено $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости несобственного интеграла по g следует сходимость несобственного интеграла по f , и из расходимости несобственного интеграла f следует расходимость несобственного интеграла g .

Примечание 2. Если к функциям из теоремы выше можно добавить такое условие: существуют две положительные константы c_1, c_2 , что $c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)$, то с учётом линейности несобственного интеграла, можно заключить, что интегралы по функциям f и g сходятся или расходятся одновременно.

Определение 3. Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно*.

Утверждение 3. (Признак Абеля-Дирихле сходимости интеграла). Пусть $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ - функции, определённые на промежутке $[a, \omega)$ и интегрируемые на любом его отрезке. Пусть g - монотонная функция.

Тогда для сходимости несобственного интеграла

$$\int_a^\omega (f \cdot g)(x) dx$$

достаточно, чтобы выполнялись либо пара условий

- интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится;
- функция g ограничена на $[a, \omega)$,

либо пара условий

- функция $\mathcal{F} = \int_a^b f(x) dx$ ограничена на $[a, \omega)$;
- функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \omega$, $x \in [a, \omega)$.

Определение 4. Несобственный параметрический интеграл $\int_a^\omega f(x, \alpha) dx$ называется *равномерно сходящимся* на множестве E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (a, \omega) \forall \xi \in [t, \omega) \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_\xi^\omega f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. (Признак Вейерштрасса). Если подынтегральная функция в параметрическом интеграле может быть ограничена функцией одной переменной сверху, и интеграл от данной функции сходится, то и изначальный интеграл сходится.

Теорема 3. (Признак Дирихле). Достаточное условие равномерной сходимости интеграла вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$. Если выполнены следующие условия:

- первообразная $f(x)$ ограничена;
- $g(x)$ дифференцируема, больше нуля, её производная отрицательна;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Теорема 4. (Критерий Коши). Параметрический интеграл сходится тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (a, \omega) : \forall \xi_1, \xi_2 \in [t, \omega) \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

2 Кривые.

Определение 5. Кривые в \mathbb{R}^n - непрерывное отображение $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Утверждение 4. (Длина кривой). Если непрерывная кривая γ задана параметрически: $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, ..., то можно найти её длину:

$$\int_a^b \sqrt{(f'_1)^2(x) + \dots + (f'_n)^2(x)} dx.$$

Естественно, все f_i должны быть дифференцируемы на нужном промежутке.

Примечание 3. Ну а площадь - сам бог велел использовать интегралы (наверное).

3 Многомерные функции.

Определение 6. f дифференцируема в точке (x_1, \dots, x_m) , если $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|x - y\|)$, где L - линейное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, причём однородное, то есть, $L(0) = 0$.

Определение 7. Это линейное отображение L называется *дифференциалом* в точке x .

Определение 8. *Частная производная.* Пусть имеется $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда частная производная по x_k , $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) = g(x)$, $g'(x_k^0)$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x^0} := g'(x_k^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_k^0 + \varepsilon, \dots) - f(\dots)}{\varepsilon}.$$

Определение 9. *Производная по направлению.* Пусть направление задаётся $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, f - дифференцируема по направлению e , если $g(t) = f(x^0 + te)$, $t \in \mathbb{R}$ и существует $g'(0)$, то производная по направлению e - $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t}$.

Теорема 5. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, f - гладкая в окрестности x^0 (верхние индексы), $y^0 = f(x^0)$, $g : V_{f(x^0)} \rightarrow \mathbb{R}^k$, гладкая в $f(x^0)$, для f и g существуют линейные операторы $A(x_0)$ и $B(f(x_0))$. Тогда $g(f(x))$ - гладкое отображение в x_0 с линейным оператором $BA : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Теорема 6. Пусть у нас есть отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $V_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, причём существуют все частные производные в V_{x^0} и они непрерывны в x^0 . Тогда f дифференцируема в точке x^0 .

Теорема 7. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f - гладкая на G - открытом множестве, причём частные производные существуют и непрерывны в каждой точке (условно говоря, f гладкая). Предположим, что точка x^0 - локальный максимум или минимум. Тогда $\text{grad } f|_{x^0} \equiv 0$.

Теорема 8. Если функция $E \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то в этой точке функция имеет все частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m.$$

4 Дифференцирование.

Теорема 9. Если отображение $f_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, определённые на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то их линейная комбинация также является дифференцируемым в этой точке отображением, причём имеет место равенство

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) = (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(x).$$

Примечание 4. Про произведение и частное - тоже точно так же, как и в случае с одномерными функциями.

Определение 10. Пусть $x \in \mathbb{R}^m$. Через $T\mathbb{R}_x^m$ обозначим совокупность векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^m$. Это векторное пространство называют *касательным пространством* к \mathbb{R}^m в точке x .

Теорема 10. (Дифференцирование композиции). Если отображение $f : X \rightarrow Y$ множества $x \in \mathbb{R}^m$ в множество $y \in \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x \in X$, а отображение $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ этих отображений дифференцируема в точке x , причём дифференциал $d(g \circ f) : T\mathbb{R}_x^m \rightarrow T\mathbb{R}_{g(f(x))}^k$ композиции равен композиции дифференциалов.