

Теория категорий

Тутанов Михаил и Копейкина Софья
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

15 сентября 2021 г.

Содержание

Основные определения	3
Примеры на основные определения	3
Ещё определения	4
Функтор	6
Примеры функторов	6
Мономорфизмы и эпиморфизмы	7
Естественные преобразования	8
Эквивалентность категорий	9

Основные определения

Определение 1. *Категория \mathcal{C}* – это

- класс¹ $\text{Ob } \mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $\text{Hom}(X, Y)$ ² для любых двух X и Y из $\text{Ob } \mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ: \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- для любого A из \mathcal{C} ³ существует $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ такое, что $f \circ \text{id}_A = f$, $\text{id}_A \circ f = f$ для любого осмысленного f .

Определение 2. Два объекта X и Y в категории \mathcal{C} называются *изоморфными*, если $\exists f \in \text{Hom}(X, Y)$ и $g \in \text{Hom}(Y, X)$ такие, что $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами*.

Определение 3. Объект A в категории \mathcal{C} называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из \mathcal{C} $|\text{Hom}(X, A)| = 1$ ($|\text{Hom}(A, X)| = 1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A , композиция $f \circ g$ в этом случае будет элементом $\text{Hom}(A', A')$, но $\text{id}_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f \circ g = \text{id}_{A'}$, аналогично $g \circ f = \text{id}_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. \square

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории \mathcal{C} определим следующую категорию \mathcal{C}^{op} , которую будем называть *двойственной* (*противоположной*): $\text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g \circ f$.

Примечание 1. Инициальный объект в \mathcal{C} соответствует терминальному в \mathcal{C}^{op} и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- *Sets*: $\text{Ob } \text{Sets} =$ все множества, $\text{Hom}(X, Y) =$ все отображения из X в Y , \circ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – \emptyset , терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

¹Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

²Обозначение *Mor* на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

³ Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups, Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*: $Ob\ HTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом, $Ob\ C = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $Ob\ C = M$, $Hom(x, y) = \emptyset$, если $x \leq y$, $= \emptyset$, иначе.
- *Rels*, $Ob\ Rels =$ все множества, $Hom(X, Y) =$ все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории C называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \rightarrow X$ и $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \rightarrow X$ и $g : Z \rightarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \rightarrow X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории C называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$ и $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \leftarrow X$ и $g : Z \leftarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \leftarrow X \amalg Y$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id , подробнее см. утверждение 1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. \square

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y ⁴;
- *Groups*: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;

⁴Для меня странно, что произведение в этом случае существует всегда, а двойственное к нему – нет, но что поделать

- ЧУМ: $x \times y = \min(x, y)$, $x \amalg y = \max(x, y)$.

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

Определение 7. *Категорией стрелки* \mathcal{C}/A , где \mathcal{C} – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $\text{Ob } \mathcal{C}/A = \text{пары } (X, f)$, где $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}(X, A)$; $\text{Hom}((X, f), (Y, g)) = \{h \in \text{Hom}(X, Y) \mid f = g \circ h\}$.

Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A) . Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- *Sets*: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$;
- *Sets*^{op}: $X \amalg_A Y = X \amalg Y / \sim$, где \sim порождено $f(a) \sim g(a)$. В *Top* это просто склейка;
- *Groups*: произведение как на *Sets*, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 9. *Функтором* \mathcal{F} называется отображение между двумя категориями \mathcal{C} и \mathcal{D} (определённое и на объектах, и на морфизмах) с ожидаемыми свойствами:

- Если $f \in \text{Hom}(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
- $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$.

Примеры функторов:

- $\pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Groups}$;
- Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда \mathcal{F} – гомоморфизм моноидов;
- M – моноид, $\mathcal{F} : M \rightarrow \text{Vect}_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \rightarrow \text{End}(V)$;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$ – выбор объекта в \mathcal{C} , а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

Функтор

Определение 10. *Функтор* - это отображение $F : C \rightarrow D$ между категориями со следующими свойствами:

1. Если $X \in \text{Ob } C$, то $F(x) \in \text{Ob } D$
2. $\forall A, B \in \text{Ob } C$ и $F : A \rightarrow B - F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, причем "произведение переходит в произведение" и "единичный гомоморфизм в единичный гомоморфизм т.е.
 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ и $F(id_A) = id_{F(A)}$

Утверждение 3. $A \simeq B \Rightarrow F(A) \simeq F(B)$

Доказательство:

$A \simeq B$, значит $\exists f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$.

Вспомним, что функтор сохраняет произведение и единичный гомоморфизм:

$F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$ и $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$.

Мы нашли гомоморфизмы с нужными нам свойствами, а значит $F(A) \simeq F(B)$.

QED

Примеры функторов

1. Забывающий функтор

Такой функтор стандартно обозначается как U , он "забывает" алгебраические структуры. Рассмотрим на примере групп:

$U : \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$

$U(G) = G$ как множество

$U(f) = f$ как отображение множеств

2. Свободный функтор

Это функтор, который "вспоминает" алгебраическую структуру. Рассмотрим также на примере групп:

$F : \text{Sets} \rightarrow \text{Groups}$

$F(X)$ = свободная группа, порожденная X

$F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, который переводит образующие в образующие: $x \mapsto f(x)$

3. Конкретный пример свободного функтора между ассоциативными алгебрами с единицей и векторными пространствами:

K - поле, $U : K - \text{Alg} \rightarrow \text{Vect}_K$ и $F : \text{Vect}_K \rightarrow K - \text{Alg}$

$F(V) = T(V) = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$

Со следующей структурой:

$V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes (n+m)}$

$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n; u_1 \otimes \dots \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m$

А с гомоморфизмами дела обстоят следующим образом:

$f : V \rightarrow W$, тогда $F(f) : T(V) \rightarrow T(W)$, который работает так:

$V^{\otimes n} \rightarrow W^{\otimes n}$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \rightarrow f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_n)$

4. Аналогично между коммутативными алгебрами и векторными пространствами:

$S : K - \text{CommAlg} \rightarrow \text{Vect}_K$

$S(V) = T(V)_{\langle u \otimes v - v \otimes u \rangle}$, что называется *симметрической алгеброй*

5. Еще пример - между абелевыми и обычными группами:

$$F : AbGroups \rightarrow Groups$$

$$F(G) = G/[G, G]$$

$$F(f)[g] = [f(g)]$$

6. *Множества с выделенной точкой* и свободный функтор между ними и категорией множеств:

$Sets_*$ - это категория, определенная следующим образом: $Ob\ Sets_*$ состоит из элементов следующего вида: $(A, a \in A)$. Гомоморфизмы устроены так: $f_* : (A, a) \rightarrow (B, b)$, причем переводит выделенную точку в выделенную точку.

Свободный функтор выглядит так:

$$F : Sets \rightarrow Sets_*$$

$$A \mapsto A \sqcup \{\emptyset\}$$

$$f \mapsto f \times (\emptyset; \emptyset)$$

7. *Контрпредставимый функтор* - это функтор, действующий из категории в категорию множеств $F : C \rightarrow Sets$, построенный следующим образом:

$$A \in Ob\ C \quad F(A) = Hom(A, X)$$

$$f : X \rightarrow Y \quad F(f) : Hom(A, X) \rightarrow Hom(A, Y)$$

$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

Определение 11. *Контрвариантный функтор* из C в D - это функтор из C^{op} в D^{op} :

$$A \in Ob\ C \quad F(A) \in Ob\ D$$

$$f : A \rightarrow B \quad F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \text{ и } F(f \circ g) = F(g) \circ F(f), F(id_A) = id_{F(A)}$$

Определение 12. *Представимый функтор* - это такой функтор $h_A : C^{op} \rightarrow Sets$, $A \in Ob\ C$, действующий по правилу:

$$h_A(X) = Hom(X, A), \quad h_A(f) : \phi \mapsto \phi \circ f$$

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Мы хотим определить "инъективность" и "сюръективность" для гомоморфизмов между элементами категорий. Делается это следующим образом:

Определение 13. Гомоморфизм f называется *мономорфизмом*, если "на него можно сокращать слева т.е. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ "

Примеры

- $Sets$ - инъективные отображения
- $Groups$ - инъективные гомоморфизмы групп
- $Rings$ - инъективные гомоморфизмы колец

Примечание 2. Сохраняют ли функторы мономорфизмы? НЕТ

Определение 14. Гомоморфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *расщепимым мономорфизмом*, если $\exists r : Y \rightarrow X$ такой, что $r \circ f = id_X$

Примечание 3. Сохраняют ли функторы расщепимые мономорфизмы? ДА

Определение 15. Гомоморфизм f называется *эпиморфизмом*, если "на нее можно сокращать справа т.е. $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ "

Аналогично можно определить расщепимый эпиморфизм:

Определение 16. Гомоморфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *расщепимым эпиморфизмом*, если $\exists s : Y \rightarrow X$ такой, что $f \circ s = id_Y$. **Примеры эпиморфизмов**

- Sets - сюръективные отображения
- Groups - сюръективные гомоморфизмы групп
- HausTop - непрерывные отображения с $f(X) = Y$

Упражнение 1. *Расщепимый мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм* и *Расщепимый эпиморфизм + мономорфизм = изоморфизм*

Естественные преобразования

Определение 17. $\alpha : F \rightarrow G$ называется *естественным преобразованием* для функторов $F, G : C \rightarrow D$, если $\forall A \in C \exists \alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ такой, что $\forall f \in Hom(A, B) \exists \alpha_B : F(B) \rightarrow G(B)$, причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} f : A \rightarrow B, & A, B \in \text{Ob } C & \\ \alpha_A : F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A) & & \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ \alpha_B : F(B) \xrightarrow{\alpha_B} G(B) & & \end{array}$$

Упражнение 2. $I = [\text{Ob } I = \{0, 1\}, Hom(I) = \{Hom(0, 0) = \{id_0\}, Hom(0, 1) = \{f = \{(0, 1)\}\}, Hom(1, 0) = \emptyset, Hom(1, 1) = \{id_1\}\}]$.

Задать естественное преобразование это все равно, что задать следующий функтор: $H : C \times I \rightarrow D \mid H(, 0) = F$ и $H(, 1) = G$, со следующей структурой категории $C \times I$: $\text{Ob } C \times I = \text{Ob } C \times \text{Ob } I, Hom(C \times I) = Hom(C) \times Hom(I)$

Примеры

- $V \in Vect_K$. Для функторов $Vect_K \rightarrow Vect_K \quad F : V \mapsto V, f \mapsto f$ и $G : V \mapsto V^{**}, \phi \mapsto \phi^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha \mid \alpha_V : F \rightarrow G : V = F(V) \mapsto G(V) = V^{**}$ такое, что $\alpha_V(f)(v) = f(v)$
- *Топологическая группа* - это группа с топологической структурой, на которой заданы две непрерывные операции: $G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$ и $G \rightarrow G : a \mapsto a^{-1}$ (к примеру, $(\mathbb{R}, +)$ и (S^1, \cdot) - это топологические группы). В данном примере нас будет интересовать *локально компактные топологические абелевы группы*. Для каждой группы A определим двойственную: $A^* = Hom(A, S^1)$ - непрерывные гомоморфизмы групп (вместе с какой-то топологией). Итак, для функторов $LocCompAb \rightarrow LocCompAb \quad F = Id$ и $G : A \mapsto A^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha : F \rightarrow G$, которое определяется так же, как и в предыдущем примере.

Эквивалентность категорий

Определение 18. Есть три функтора $F, G, H : C \rightarrow D$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : G \rightarrow H$. *Композиция(вертикальная) естественных преобразований* это естественное преобразование $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H \mid (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$

Примечание 4. Заметим, что мы таким образом определили категорию $\text{Funct}(C, D)$ - функторов из C в D , в которой морфизмы - это естественные преобразования.

Определение 19. Есть четыре функтора $F, G : C \rightarrow D$, $H, K : D \rightarrow E$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : H \rightarrow K$.

Композиция(горизонтальная) естественных преобразований - это естественное преобразование $\beta \bullet \alpha : H \circ F \rightarrow K \circ G \mid (\beta \bullet \alpha)_A : H(F(A)) \rightarrow K(G(A))$, последнее работает следующим образом: $H(\alpha_A) : H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$, $(\beta \bullet \alpha)_A = \beta_{G(A)}(H(\alpha_A))$

Упражнение 3. Композиции, определенные таким образом, действительно являются естественными преобразованиями.

Упражнение 4. Горизонтальная композиция коммутует с вертикальной.

Определение 20. Категории C и D называются *эквивалентными*, если $\exists F : C \rightarrow D$ и $G : D \rightarrow C$, причем есть естественные преобразования

$\alpha : Id_C \rightarrow F \circ G$, $\alpha^{-1} : F \circ G \rightarrow Id_C$ и $\beta : Id_D \rightarrow G \circ F$, $\beta^{-1} : G \circ F \rightarrow Id_D$ такие, что $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = Id$ и $\beta \circ \beta^{-1} = Id$, $\beta^{-1} \circ \beta = Id$

Предметный указатель

Двойственная категория, 3
Естественное проеобразование, 8
Забывающий функтор, 6
Изоморфные объекты, 3
Категория, 3
Категория стрелки, 5
Композиция(вертикальная) естественных пре-
образований, 9
Композиция(горизнтальная) естественных
преобразований, 9
Контрвариантный функтор, 7
Копредставимый функтор, 7
Копроизведение объектов, 4
Множества с выделенной точкой, 7
Представимый функтор, 7
Произведение объектов, 4
Расслоённое произведение, 5
Расщепимый мономорфизм, 7
Расщепимый эпиморфизм, 8
Свободный функтор, 6
Терминальный объект, 3
Топологическая группа, 8
Функтор, 5, 6
Эквивалентность категорий, 9
Эпиморфизм, 7
мономорфизм, 7