

# Теория вероятностей. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Давыдова Ю. А.,  
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по теории вероятностей.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2.</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Пофамильный указатель всех важных предметов</b>	<b>8</b>

## 1 Лекция 1.

Начинаем мы с самого базового - аксиоматики и введения определений.

**Определение 1.**  $\Omega$  - *пространство элементарных событий* или *множество элементарных исходов*, есть множество, состоящее из  $\omega_i$ , *элементарных событий*. Нам важно лишь, чтобы это множество было непустым.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  - некоторая совокупность подмножеств  $\Omega$ , есть *множество событий*, элементы которого есть  $A_i$  - события.

**Определение 2.**  $\mathbb{P}$  - вероятность  $A \Rightarrow \mathbb{P}(A)$  - вероятность события  $A$ .

**Определение 3.** Вся же тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  называется *вероятностным пространством*.

Для вероятностей существует несколько аксиом:

- $0 \leq \mathbb{P}(A \leq 1)$  для любого события,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- для любого счётного набора попарно непересекающихся события  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  выполняется *счётная аддитивность*:

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Некоторые свойства вероятностей:

- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ;
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ ;
- $\forall A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ;
- $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ .

Теперь перейдём к некоторым примерам вероятностных пространств:

**Пример(ы) 1.** Пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  *дискретно*, если  $\Omega$  не более, чем счётно.  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , элементы  $\{\omega\}$  также считаем событиями.

*Утверждение 1.* Несколько предложений:

- Пусть  $\mathbb{P}$  - вероятность в  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Тогда  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ , где  $p_\omega = \mathbb{P}\{\omega\}$ . При этом  $p_\omega \geq 0$ ,  $\sum_\omega p_\omega = 1$ .
- Предположим, что  $\{p_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  такие, что выполнено последнее предложение предыдущего пункта, тогда  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$  - вероятность.

Также, можно упомянуть про *равновероятные исходы*, из названия понятно, что это. Если  $|\Omega| < \infty$  и  $p_\omega = p$  для любого  $\omega$ , тогда  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

Начнём теперь разбираться с понятием *условная вероятность*.

**Пример(ы) 2.** Начнём с такого примера. Пусть у нас есть события  $A, B$ , причём их пересечение в вероятностном пространстве пусть. Тогда если исполнится  $B$ , то  $A$  уже исполнится не может.

**Определение 4.** *Условная вероятность*:  $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$  (при  $\mathbb{P}(B) > 0$ ).

*Утверждение 2.* Для условной вероятности выполнены аксиомы вероятности.

А теперь - несколько утверждений, которые касаются условной вероятности.

*Утверждение 3.*  $(B_n)$  - разбиение  $\Omega$  (дизъюнктивный набор, который в объединении даёт всё множество). Тогда для любого  $A$   $\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_n B_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_n (A \cap B_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) \cdot \mathbb{P}_{B_n}(A).$$

□

*Утверждение 4.* *Формула Байеса*. Пусть мы знаем событие  $A$ , имеется разбиение  $(B_n)$ , тогда

$$\mathbb{P}_A(B_k) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{B_n}(A)}$$

*Утверждение 5.* *Формула умножения*.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_1^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots$$

Перейдём к *независимости событий*. Начнём рассуждения с двух событий:  $A$  и  $B$ . Если  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$ ,  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$ , или, что равносильно им обоим  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ , то события называются *независимыми*.

Пусть теперь имеется не два, а больше событий  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Нельзя сказать, что нам хватает попарной независимости для независимости совокупной.

**Пример(ы) 3.** (Пирамида Бернштейна). Рассмотрим тетраэдр, у которого стороны покрашены таким образом: белый, синий, красный и флаг России. Рассматриваем события:  $A_1$  - на выпавшем основании есть белый цвет, и так далее  $A_2$  и  $A_3$ . Эти события попарно независимы, но не независимы в совокупности.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2),$$

но тогда

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Таким образом, нужно ввести корректное определение.

**Определение 5.** События  $A_1, \dots, A_n$  *независимы*, если выполнено:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j), \forall i \neq j, \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(A_k), \forall i \neq j \neq k, \\ &\dots \\ \mathbb{P}\left(\bigcup_1^n A_i\right) &= \prod_1^n \mathbb{P}(A_i). \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Пусть имеется  $T_1, \dots, T_m$  - разбиение  $\{1, \dots, n\}$ , независимые события  $A_1, \dots, A_n$ ,  $\{B_j\}_m$  - комбинация (всякие действия между элементами) событий  $\{A_s, s \in T_j\}$ . Тогда  $\{B_j\}$  - независимы.

*Доказательство.* По индукции. □

**Определение 6.** *Случайная величина* - это функция  $X : \Omega \rightarrow R$ .

**Пример(ы) 4.** Число выпавших решек на  $n$  бросках.

Теперь немного о *распределении случайной величины*. Пусть имеется вероятностное пространство и случайная величина  $X$ . Нас интересует  $\{\omega | X(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}\}$ , то есть, мы хотим исследовать попадания случайной величины в те или иные зоны на прямой. Такую вероятность можно рассматривать как вероятность от множества  $B$ , но это слишком сложно, поэтому продолжим на таких двух пунктах:

- значения  $X$ ,  $X(\Omega) = \{a_1, \dots\}$ ,  $\{a_k\}$  - значение  $X$ ,
- $A_k = \{\omega | X(\omega) = a_k\}$ ;  $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ , причём каждая  $p_k \geq 0$ , а их сумма равна единице.

Тогда мы можем сделать вывод, что  $\mathbb{P}\{X \in B\} = \sum_{k|a_k \in B} p_k$ , так как левая часть есть  $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} A_k\}$ , что равно  $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} \{x = a_k\}\} = \sum_{k|a_k \in B} \mathbb{P}\{x = a_k\}$ , что уже и равно левой части.

**Определение 7.** Таки образом, совокупность последовательностей  $\left\{ \frac{a_k}{p_k} \right\}$  и называется *рас-переделением случайной величины*.

**Пример(ы) 5.** Приведём примеры распределений:

- *вырожденное*:  $X(\omega) = a$  для любого  $\omega$ .
- *распределение Бернулли*:  $B(1, p)$ ,  $p \in [0, 1]$ , причём единица принимается с вероятностью  $p$ , 0 - иначе.
- *биномиальное*:  $B(n, p)$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $X \sim B(n, p)$ , если принимаются значения от 0 до  $n$ , причём  $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}_n(k)$  (просто обозначение), и равно  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

## 2 Лекция 2.

Приведём ещё несколько примеров распределений:

**Пример(ы) 6.** • *геометрическое*  $X = 1, 2, \dots$ ,  $p \in [0, 1]$ .  $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$ .

- *плацоновское*  $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $X = 0, 1, \dots$ ,  $P\{X = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$ .

Независимость случайных величин.

**Пример(ы) 7.** Пусть  $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ ,  $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$  - независимы (плацоновские распределения). Найдём тогда распределение  $X + Y$ ,  $X + Y = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X + Y = n\} &= \mathbb{P}\{\sqcup_{k=0}^n \{X + Y = n, X = k\}\} = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X + Y = n, X = k\} = \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X = k, Y = n - k\} = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}\{X = k\} \mathbb{P}\{Y = n - k\} = \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{k(n-k)!} e^{-\beta} = e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k \beta^{n-k} = \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} e^{-(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем вывод:  $X + Y \sim \mathcal{P}(\alpha + \beta)$  - плацоновское распределение.

Испытание Бернулли.

**Определение 8.** Рассмотрим последовательность  $\varepsilon_k$  - независимых бернуллиевских величин (два исхода),  $\varepsilon_k \sim B(1, p)$ ,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p \end{cases}$$

$\{\varepsilon_k = 1\}$  означает успех в каком-то испытании. То есть, *испытание Бернулли* - последовательность из однотипных испытаний.

$\nu_n$  - число успехов в  $n$  испытаниях., что равно  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ . Покажем, что распределение биномиально.  $\nu_n = 0, 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}
C_n^k p^k q^{n-k} &\stackrel{?}{=} \mathbb{P}\{\nu_n = l\} = \mathbb{P}\{\omega \mid \text{в цепочке } \varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega) \text{ в точности } k \text{ единиц}\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\sum_1^n \varepsilon_j = k\right\} = \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_n\} \\ \text{в } i \text{ } k \text{ единиц}}} \mathbb{P}\{\varepsilon_1 = i_1, \dots, \varepsilon_n = i_n\} = \\
&= \sum_{-// -} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.
\end{aligned}$$

Теперь встаёт вопрос: существует ли независимая бернуллиевская случайная величина. Пусть  $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_k = 0 \text{ или } 1\}$ ;  $|\Omega| = 2^n$ .  $p_\omega = p^k (1-p)^{n-k}$  для  $\omega = (i_1, \dots, i_n)$ , в которой ровно  $k$  единиц.  $\sum p_n = 1$ ,  $\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k(i_1, \dots, i_n) = i_k$ .

$P_n(k) = \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$  - можем ли мы как-то упростить это?

**Теорема 2.**  $n$  испытаний  $B$  с вероятностями успеха  $p = p_n$ ,  $n \cdot p_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \alpha$ , тогда  $\forall k \in \mathbb{N}$   $P_n(k) \rightarrow \pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
P_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} (np^k) q^{n-k} = \\
&= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k q^{n-k} \sim \frac{\alpha^k}{k!} q^{n-k}
\end{aligned}$$

Если что,  $k$  - константа.

$$\begin{aligned}
 q^{n-k} &= (1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k} \\
 &\sim \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \sim e^{-np_n} = e^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

В итоге,  $P_n(k) \sim \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$ .

□

А теперь - несколько слов о точности аппроксимации. Оценим  $|P_n(k) - \pi_k|$ .  $\pi_k = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ .

**Теорема 3.**  $\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - \pi_k| \leq 2np^2$ .

И в заключение...

### 3 Пофамильный указатель всех важных предметов

Быстрый список для особо ленивого поиска.

биномиальное распределение  
вероятностное пространство  
дискретное пространство  
независимые события  
равновероятные исходы

распределение случайной величины  
случайная величина  
условная вероятность  
формула Байеса  
формула умножения