

# Матлог. Основные записи

Кабашный Иван (@keba4ok)  
на основе лекций С. О. Сперанского

22 января 2020 г.

Основные моменты.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Лекция 3.</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Лекция 4.</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Лекция 5.</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Лекция 6.</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Билеты.</b>	<b>15</b>

## 1 Лекция 1.

**Определение 1.** Конкатенация - записали подряд два слова. ( $A$  - алфавит,  $A^*$  - слова).

**Определение 2.** Подслово - как есть, вхождение - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как  $\psi \sqsubseteq \varphi$ .

**Определение 3.**  $w[w'/u, k]$  - замена подслова  $w'$  на  $u$ , начинающегося в позиции  $k$ .

---

Начало 1 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 6

**Определение 4.** Фиксированное счётное множество  $\text{Prop}$  - пропозициональные переменные. Язык  $\mathcal{L}$  классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов  $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$  и круглых скобочек.

**Определение 5.**  $\text{Form}$  (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $p \in \text{Prop}$ , то  $p \in \text{Form}$ ;
- если  $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ , то  $(\varphi * \psi) \in \text{Form}$ , где  $*$  - любая из операций в определении выше (если отрицание, то относительно одной формулы, конечно).

**Лемма 1.** Пусть  $\{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$  таковы, что  $\psi \sqsubseteq \varphi$ . Тогда  $\psi = \varphi$ .

*Доказательство.* По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе  $\psi$  представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как  $\varphi$  представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально.  $\square$

Конец 1 билета.

---

Начало 2 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 10

**Лемма 2.** Каждую  $\varphi \in \text{Form} \setminus \text{Prop}$  можно единственным способом представить в виде  $(\theta \rightarrow \chi)$ ,  $(\theta \vee \chi)$ ,  $(\theta \wedge \chi)$  или  $\neg\theta$ , где  $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$  (это я везде безграмотно называю композицией).

*Доказательство.* Ясно, что представление существует. А вот доказательство единственности - от противного по лемме 1.  $\square$

Конец 2 билета.

---

Начало 3 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 11

**Определение 6.** Для каждой  $\varphi \in \text{Form}$  определим  $\text{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \text{Form} \mid \psi \preceq \varphi\}$  - подформулы.

**Лемма 3.** Пусть  $\varphi \in \text{Form}$ . Тогда каждое вхождение  $\neq$  или  $($  является началом вхождения некоторой подформулы.

*Доказательство.* Возвратная индукция по длине формулы.  $\square$

Конец 3 билета.

**Лемма 4.** Множество подслов  $\varphi$  - объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.

*Доказательство.* Из лемм выше. □

Начало 4 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 13

**Определение 7.** Оценка  $(v)$  - произвольная функция из  $\text{Pgor}$  в  $\{0, 1\}$ , которую можно расширить и до  $\text{Form}(v^*)$  посредством применения операций к переменным. Если  $v^*(\varphi) = 1$ , то порой пишут  $v \models \varphi$ .

Конец 4 билета.

**Определение 8.** Формулу называют *выполнимой*, если  $v \models \varphi$  для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если  $v \models \varphi$  для всех оценок.

Начало 6 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 16

**Определение 9.** Формула *семантически следует* из множества формул и записывается  $\Gamma \models \varphi$ , если для любой оценки  $v$ , любая формула из множества истина, то  $\varphi$  истина.

Формулы называют *семантически эквивалентны*, и пишут  $\varphi \equiv \psi$ , если  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ .

Конец 6 билета.

## 2 Лекция 2.

Начало 7 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 2

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negotiation):

- (I1).  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ;
- (I2).  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ;
- (C1).  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ ;
- (C2).  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ ;
- (C3).  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$ ;
- (D1).  $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ ;
- (D2).  $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ ;
- (D3).  $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$ ;
- (N1).  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ ;

- (N2).  $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ;
- (N3).  $\varphi \vee \neg\varphi$ ,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Конец 7 билета.

Начало 8 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 3

**Определение 10.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ , тогда *выводом* из него в гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) элементов  $\text{Form}$ , что для каждого  $i \in \{0, \dots, n\}$  выполнено одно из следующих условий:

- $\varphi_i$  - аксиома;
- $\varphi_i$  - элемент  $\Gamma$ ;
- $\exists \{j, k\} \subseteq \{0, \dots, i-1\}$  такие, что  $\varphi_k$  есть  $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ .

При этом,  $\varphi_n$  - *заключение*, а элементы  $\Gamma$  - *гипотезы*. Если  $\varphi$  выводится из  $\Gamma$ , то пишут  $\Gamma \vdash \varphi$ .

Основные свойства  $\vdash$ :

- монотонность;
- транзитивность;
- компактность (если  $\Gamma \vdash \varphi$ , то  $\Delta \vdash \varphi$  для некоторого конечного  $\Delta \subseteq \Gamma$ ).

Конец 8 билета.

Начало 11 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 9

**Теорема 1.** (*О дедукции*). Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

*Доказательство.* В одну правую сторону очевидно, в обратную - по индукции по  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  показываем, что  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ , там три случая, и все, кроме одного, тривиальны.  $\square$

Конец 11 билета.

Введём обозначения:  $\top := p \rightarrow p$  и  $\perp := \neg\top$ , где  $p$  - фиксированная пропозициональная переменная.

*Следствие 1.* Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \rightarrow \varphi$$

для некоторых  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ .

*Доказательство.* Влево - очевидно, вправо - очевидно и применяется теорема о дедукции.  $\square$

**Лемма 5.** *Всякая аксиома гильбертовского исчисления для классической пропозициональной логики общезначима.*

---

Начало 12 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 15

**Теорема 2.** (О корректности). Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \implies \Gamma \models \varphi.$$

*Доказательство.* Фиксируем вывод  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ . Затем рассматриваем произвольную оценку  $v$  такую что  $v \models \psi$  для всех  $\psi \in \Gamma$  и покажем по индукции по  $i \in \{0, \dots, n\}$ , что  $v \models \varphi_i$ .  $\square$

Конец 12 билета.

---

Начало 14 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 17

**Определение 11.**  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  называется *простой теорией*, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \text{Form}$ ;
- $\{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$ ;
- для любого  $\varphi \vee \psi \in \Gamma$  верно  $\varphi \in \Gamma$  или  $\psi \in \Gamma$ .

Про эквивалентные определения см. в доп. материалах с практик, страница 4

Конец 14 билета.

---

**Лемма 6.** Пусть  $\Gamma$  - простая теория, тогда для любых её элементов можно переписать действия над ними в рамках принадлежности к теории.

**Лемма 7.** (О расширении. а.к.а. Линденбаума). Пусть  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$  таковы, что  $\Gamma \not\vdash \varphi$ . Тогда существует простая теория  $\Gamma' \supseteq \Gamma$  такая, что  $\Gamma' \not\vdash \varphi$ .

*Доказательство.* Рекурсивно докидываем к  $\Gamma$  элементы  $\text{Form}$  (их счётно).  $\square$

### 3 Лекция 3.

Для каждой простой теории  $\Gamma$  определим оценку  $v_\Gamma$  по правилу  $v_\Gamma(p) := 1$ , если  $p \in \Gamma$  и 0 иначе.

**Лемма 8.** Пусть  $\Gamma$  - простая теория. Тогда для любой  $\varphi \in \text{Form}$ ,

$$v_\Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

*Доказательство.* Индукция по построению  $\varphi$ , используя лемму 6.  $\square$

**Теорема 3.** (О сильной полноте  $\vdash$ ). Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

В частности,  $\Gamma \not\vdash \perp$  если и только если  $\Gamma \not\models \perp$ , а значит,  $\Gamma$  непротиворечиво если и только если  $\Gamma$  выполнимо.

*Доказательство.* Вправо - теорема о корректности, влево - от противного, рассматриваем  $\Gamma'$ , как в лемме 7.  $\square$

**Теорема 4.** (О слабой полноте  $\vdash$ ). Для любой  $\varphi \in \text{Form}$ ,

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

то есть, выводимость из пустого равносильна обозначимости,

**Теорема 5.** (О компактности  $\models$ ). Для любых  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ ,

$$\Gamma \models \varphi \iff \Delta \models \varphi$$

для некоторого конечного  $\Delta \subseteq \Gamma$ . В частности,  $\Gamma \not\models \perp$  тогда и только тогда, когда  $\Delta \not\models \perp$  для всех конечных  $\Delta \subseteq \Gamma$ , а значит,  $\Gamma$  выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество  $\Gamma$  выполнимо.

*Утверждение 1.* Слабая полнота  $\vdash$  плюс компактность  $\models$  равно сильная полнота  $\vdash$ .

**Определение 12.** Сигнатура - четвёрка вида

$$\sigma = \langle \text{Pred}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Const}_\sigma, \text{arity}_\sigma \rangle,$$

где первые три - попарно непересекающиеся множества, а последнее - функция из  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma$  в  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**Определение 13.**  $\sigma$ -структура - пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где  $A$  - непустое множество, а  $I_{\mathfrak{A}}$  - функция с областью определения  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma$ , такая что:

- для любого  $n$ -местного  $P \in \text{Pred}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$ ;
- для любого  $m$ -местного  $f \in \text{Func}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \rightarrow A$ ;
- для любого  $c \in \text{Const}_\sigma$  верно  $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$ .

При этом,  $A$  - носитель, а  $I_{\mathfrak{A}}$  - интерпретация  $\sigma$  в  $\mathfrak{A}$ .

**Определение 14.** Пусть  $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$  - две  $\sigma$ -структуры. Говорят, что  $\xi : A \rightarrow B$  есть гомоморфизм из  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ , если выполнены следующие условия:

- для любого  $n$ -местного предиката и всех  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ,

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

- для любого  $m$ -местного функционала и всех  $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ ,

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$

- для любой константы,

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

**Определение 15.** Инъективный гомоморфизм называют *сложением*, если выполнено усиление первого пункта, где следствие заменяется на равносильность.

**Определение 16.** Сюръективное вложение называют *изоморфизмом* и пишут  $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ , если они изоморфны, т.е. между ними существует изоморфизм.

**Определение 17.** *Автоморфизм* - изоморфизм на себя.  $\text{Aut}(\mathfrak{A})$  - множество всех автоморфизмов  $\mathfrak{A}$ .

## 4 Лекция 4.

**Определение 18.**

$$\text{Var} := \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

есть фиксированное на всю жизнь счётное множество *предметных переменных* или просто *переменных*.

**Определение 19.** Язык  $\mathcal{L}_\sigma$  кванторной классической логики над сигнатурой  $\sigma$  состоит из элементов  $\text{Pred}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Const}_\sigma \cup \text{Var}$ , а также *символов связок*, *символов кванторов* и *вспомогательных символов*.

**Определение 20.**  $\text{Term}_\sigma$  - наименьшее множество слов в алфавите  $\mathcal{L}_\sigma$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $x \in \text{Var}$ , то  $x \in \text{Term}_\sigma$ ;
- если  $c \in \text{Const}_\sigma$ , то  $c \in \text{Term}_\sigma$ ;
- если  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то

$$(t_1, \dots, t_n) \in \text{Term}_\sigma.$$

Элементы  $\text{Term}_\sigma$  называют  $\sigma$ -термами.

**Определение 21.**  $\text{Form}_\sigma$  - наименьшее множество слов в алфавите  $\mathcal{L}_\sigma$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если  $P \in \text{Pred}$ ,  $\text{arity}_\sigma(P) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \text{Form}_\sigma;$$

- если  $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$ , то

$$\{(\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \wedge \Psi), \neg \Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma;$$



- если  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  и  $x \in \text{Var}$ , то

$$\{\forall x \Phi, \exists x \Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma.$$

Элементы которого называются  $\sigma$ -формулами. Атомарными формулами называются формулы, которые не содержат ни символов связок, ни символов кванторов. Их множество -  $\text{Atom}_\sigma$ .

*Примечание 1.* Для понимания, кажется,  $\text{Term}$  - выражения с переменными, константами, действиями и т.д., а вот  $\text{Form}$  - сравнения выражений (в частности), логические утверждения, кванторные.

**Определение 22.** Для любых  $t \in \text{Term}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  определим

$$\begin{aligned} \text{sub}(t) &:= \{s \in \text{Term}_\sigma \mid s \preceq t\}, \\ \text{Sub}(\Phi) &:= \{\Psi \in \text{Form}_\sigma \mid \Psi \preceq \Phi\}, \end{aligned}$$

которые называются соответственно *подтермами* и *подформулами*.

**Лемма 9.** Пусть  $\{t, s\} \subseteq \text{Term}_\sigma$  таковы, что  $t \sqsubseteq s$ . Тогда  $t = s$ .

**Лемма 10.** (О единственности представления термов). Всякий  $t \in \text{Term}_\sigma \setminus (\text{Var} \cup \text{Const}_\sigma)$  можно единственным образом представить в виде  $f(t_1, \dots, t_n)$ , где  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ .

**Лемма 11.** Пусть  $t \in \text{Term}_\sigma$  и  $f \in \text{Func}_\sigma$ . Тогда всякое вхождение  $f$  в  $t$  является началом вхождения некоторого подтерма.

**Лемма 12.** (О подтермах). Пусть  $t \in \text{Term}_\sigma$ .

- если  $t \in \text{Var} \cup \text{Const}_\sigma$ , то  $\text{sub}(t) = \{t\}$ ;
- если  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , где  $f \in \text{Func}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(f) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ , то

$$\text{sub}(t) = \text{sub}(t_1) \cup \dots \cup \text{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

**Лемма 13.** (О единственности представления атомов). Всякий  $\Phi \in \text{Atom}$  можно единственным образом представить в виде  $P(t_1, \dots, t_n)$ , где  $P \in \text{Pred}_\sigma$ ,  $\text{arity}_\sigma(P) = n$  и  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$ .

**Лемма 14.** Пусть  $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$  таковы, что  $\Phi \sqsubseteq \Psi$ . Тогда  $\Phi = \Psi$ .

**Лемма 15.** (О единственности представления формул). Всякую  $\Phi \in \text{Form}_\sigma \setminus \text{Atom}_\sigma$  можно единственным образом представить в виде комбинации формул (одной или двух) и символов связок или символов кванторов.

**Лемма 16.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ . Тогда всякое вхождение  $\neg$ ,  $($ ,  $\forall$  или  $\exists$  в  $\Phi$  является началом вхождения некоторой подформулы.

**Лемма 17.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ .

- Если  $\Phi \in \text{Atom}_\sigma$ , то  $\text{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$ ;
- Если  $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$ , где  $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \text{Form}_\sigma$  и  $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ , то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \text{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\};$$

- Если  $\Phi = \neg\Theta$ , где  $\Theta \in \text{Form}_\sigma$ , или  $\Phi = Q \times \Theta$ , где  $x \in \text{Var}$ ,  $\Theta \in \text{Form}_\sigma$  и  $Q \in \{\forall, \exists\}$ , то

$$\text{Sub}(\Phi) = \text{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

**Определение 23.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,  $x \in \text{Var}$  и  $Q \in \{\forall, \exists\}$ . Тогда каждое вхождение  $Qx$  в  $\Phi$  является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют *областью действия* данного вхождения  $Qx$ . Вхождение  $x$  в  $\Phi$  называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения  $\forall x$  или  $\exists x$ , и *свободным* иначе. Далее, говорят, что  $x$  является *свободной переменной* в  $\Phi$ , если у  $x$  есть хотя бы одно свободное вхождение в  $\Phi$ .

Скажем, что  $\text{FV}(\Phi)$  - множество  $z \in \text{Var}$  таких, что у  $z$  имеется хотя бы одно свободное вхождение в  $\Phi$ . Интуитивно, элементы этого множества играют роль параметров  $\Phi$ , а запись  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$  указывает на то, что  $\text{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_l\}$ .

**Определение 24.**

$$\text{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \text{Form}_\sigma \mid \text{FV}(\Phi) = \emptyset\} /$$

Элементы которого называют  $\sigma$ -предложениями. Они могут выступать в качестве *нелог. аксиом*.

**Определение 25.**  $t$  называем *свободным для подстановки* вместо  $x$  в  $\Phi$ , если ни одно из свободных вхождений  $x$  в  $\Phi$  не находится в области действия квантора по переменной из  $t$ .

**Определение 26.** *Означивание переменных* - функции из  $\text{Var}$  в  $A$ . Каждое означивание  $v$  в  $\mathfrak{A}$  можно расширить до  $\bar{v} : \text{Term}_\sigma \rightarrow A$  естественным образом:

$$\begin{aligned} \bar{v}(x) &:= v(x); \\ \bar{v}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \bar{v}(f(t_1, \dots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)). \end{aligned}$$

А через  $v_a^x$  ( $x$  - переменная,  $a$  - элемент  $A$ ) будет обозначаться особенное означивание такое, что оно равно  $v_a^x(y) = a$ , если  $y = x$  и  $v(y)$  - иначе.

**Определение 27.** Определим  $\mathfrak{A} \models \Phi[v]$  индукцией по построению  $\Phi$ . Короче, надо просто расписать все логические связки и кванторы, что они означают. Когда эта вещь выполнена, мы будем говорить, что  $\Phi$  *истинно* в  $\mathfrak{A}$  при  $v$ .

**Определение 28.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ . Поворят, что  $\mathfrak{A}$  *является моделью*  $\Gamma$  и пишут  $\mathfrak{A} \models \Gamma$ , если  $\mathfrak{A} \models \Phi$  для всех  $\Phi \in \Gamma$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\xi$  - изоморфизм из  $\mathfrak{A}$  на  $\mathfrak{B}$ . Тогда для каждой  $\sigma$ -формулы  $\Phi$  и любого означивания  $v$  в  $\mathfrak{A}$ ,

$$\mathfrak{A} \models \Phi[v] \iff \mathfrak{B} \models \Phi[v \circ \xi].$$

*Доказательство.* Примем  $\mu := v \circ \xi$ , заметим, что  $\bar{\mu}(t) = \xi(\bar{v}(t))$ , а потом провернём индукции по построению  $\Phi$ .  $\square$

**Определение 29.** Для произвольного класса  $\mathcal{K}$   $\sigma$ -структур Предположим

$$\text{Th}(\mathcal{K}) := \{\Phi \in \text{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Говорят, что  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  *элементарно эквивалентны*, если  $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ .

*Следствие 2.* Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

## 5 Лекция 5.

**Определение 30.**  $S \subseteq A^I$  называется *определимым* в  $\mathfrak{A}$ , если существует  $\sigma$ -формула  $\Phi(x_1, \dots, x_l)$  такая, что

$$S = \{\vec{a} \in A^I \mid \mathfrak{A} \models \Phi[\vec{a}]\};$$

в этом случае говорят, что  $\Phi$  *определяет*  $S$  в  $\mathfrak{A}$ .

**Определение 31.**  $\text{supp}(n)$  - множество всех простых делителей  $n \in \mathbb{N}$ .

*Утверждение 2.* Пусть  $S$  определимо в  $\mathfrak{A}$ . Тогда для любого  $\xi \in \text{Aut}(\mathfrak{A})$ ,

$$\xi[S] \subseteq S,$$

то есть,  $S$  замкнуто относительно автоморфизмов  $\mathfrak{A}$ .

*Утверждение 3.*  $\sigma$ -структуру  $\mathfrak{A}$  называют *нормальной*, если  $=$  интерпретируется в  $\mathfrak{A}$  как настоящее равенство, то есть,  $=^{\mathfrak{A}}$  совпадает с  $\text{id}_A$ .

**Определение 32.**  $\text{Eq}_\sigma$  - множество состоящее из  $\sigma$ -предложений

- $\forall x \, x = x$ ;
- $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ ;
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ ;

а также всех  $\sigma$ -предложений видов

- $\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (\vec{x} = \vec{y} \rightarrow (P(\vec{x}) \leftrightarrow P(\vec{y})))$ ;
- $\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_m \forall y_m (\vec{x} = \vec{y} \rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{y}))$ ,

где  $P \in \text{Pred}_\sigma$  и  $f \in \text{Func}_\sigma$ , причём  $\text{arity}_\sigma(P) = n$  и  $\text{arity}_\sigma(f) = m$ . Под *аксиомами равенства* для  $\sigma$  понимают элементы  $\text{Eq}_\sigma$ .

**Определение 33.** Обозначим за  $\mathfrak{A}'$  нормальную  $\sigma$ -структуру с носителем  $A_{/=^{\mathfrak{A}}}$  такую, что мы заменяем константы и функционалы  $\mathfrak{A}$  (произвольная модель  $\text{Eq}_\sigma$ ) на их классы эквивалентности по равенству, и оставляем все предикаты.

**Теорема 7.** Для любых  $\sigma$ -формул  $\Phi$  и означивания  $v$  в  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \Phi[v] \iff \mathfrak{A}' \models \Phi[v'],$$

где  $v'$  отображает каждую  $x \in \text{Var}$  в  $[v(x)]$ .

*Доказательство.* Для начала, как в ещё одном недавнем доказательстве заметим, что для всех  $t \in \text{Term}_\sigma$ ,

$$\bar{v}' = [\bar{v}(t)],$$

что несложно доказывается индукцией по построению  $t$ , а затем опять же, индукция по построению самой  $\Phi$ .  $\square$

*Следствие 3.* Для каждого  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  следующие условия эквивалентны:

- у  $\Gamma$  есть нормальная модель;
- у  $\Gamma \cup \text{Eq}_\sigma$  есть модель.

**Определение 34.**  $\sigma$ -формулу  $\Phi$  называют

- *выполнимой*, если  $\mathfrak{A} \models \Phi[v]$  для некоторых  $\mathfrak{A}$  и  $v$ ;
- *общезначимой*, если  $\mathfrak{A} \models \Phi[v]$  для всех  $\mathfrak{A}$  и  $v$ .

**Определение 35.** Пусть  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  и  $x_1, \dots, x_l$  - в точности все элементы  $\text{FV}(\Phi)$  в порядке их появления в  $\Phi$ . Определим тогда *универсальное замыкание*  $\tilde{\forall} - \forall x_1 \dots \forall x_l \Phi$  и *экзистенциальное замыкание*  $\tilde{\exists}$  аналогично.

**Определение 36.** Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ . Говорят, что  $\Phi$  *семантически следует из*  $\Gamma$ , и пишут  $\Gamma \models \Phi$ , если для любой  $\mathfrak{A}$ ,

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \implies \mathfrak{A} \models \tilde{\forall}\Phi.$$

Если выполнено  $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$ , то такие формулы называют *семантически эквивалентными* и пишут  $\Phi \equiv \Psi$ .

**Определение 37.**  $\sigma$ -формула  $\Phi$  называется *бескванторной*, если в ней нет кванторов.

**Определение 38.** Под *пренексными нормальными формами* понимаются  $\sigma$ -формулы вида

$$Q_1 x_1 \dots Q_l x_l \Psi,$$

где  $Q_i$  - кванторы,  $x_i$  - переменные и  $\Psi$  бескванторная.

## 6 Лекция 6.

Сейчас будет Гильбертовское исчисление для кванторной логики. В моём понимании, это как некоторый апдейт пропозициональной, во многом они схожи, достаточно только взглянуть на *схемы аксиом*:

- (I1).  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$ ;
- (I2).  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta))$ ;
- (C1).  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Phi$ ;
- (C2).  $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Psi$ ;
- (C3).  $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi)$ ;

- (D1).  $\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$ ;
- (D2).  $\Psi \rightarrow \Phi \vee \Psi$ ;
- (D3).  $(\Phi \rightarrow \Theta) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Theta) \rightarrow (\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta))$ ;
- (N1).  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow \neg\Phi)$ ;
- (N2).  $\neg\Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$ ;
- (N3).  $\Phi \vee \neg\Phi$ ;
- (Q1).  $\forall x\Phi \rightarrow \Phi(x/t)$ , где  $t$  свободен для  $x$  в  $\Phi$ ;
- (Q2).  $\Phi(x/t) \rightarrow \exists x\Phi$ , где  $t$  свободен для  $x$  в  $\Phi$ .

*Примечание 2.* В случаях, когда  $=$  содержится в  $\text{Pred}_\sigma$ , элементы  $\text{Eq}_\sigma$  также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Также имеется *modus ponens* (MP):

$$\frac{\Phi \quad \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}$$

И два новых "кванторных" правила вывода:

$$\frac{\Psi \rightarrow \Phi}{\Psi \rightarrow \forall x\Phi} \text{ (BR1)} \quad \text{и} \quad \frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\exists x\Phi \rightarrow \Psi} \text{ (BR2)},$$

где  $x \notin \text{FV}(\Psi)$ , и они традиционно называются *правилами Бернайса*.

**Определение 39.** *Вывод* - опять-таки, конечная последовательность  $\Phi_0, \dots, \Phi_n$  элементов  $\text{Form}_\sigma$  такую, что для каждого  $i$  от 0 до  $n$  выполнено одно из следующих условий:

- $\Phi_i$  - аксиома;
- $\Phi_i$  - элемент  $\Gamma$ ;
- $\Phi_i$  получается из некоторых предшествующих по (MP);
- $\Phi_i$  получается из некоторой предшествующей по (BRi).

$\Phi_n$  - *заключение*, а элементы  $\Gamma$  - *гипотезы*. Пишут  $\Gamma \vdash \Phi$ , если существует вывод из  $\Gamma$  с заключением  $\Phi$ .

**Определение 40.**  $\Phi$  *опровержима* в  $\Gamma$ , если  $\Gamma \vdash \neg\Phi$ ;  $\Phi$  *независима* от  $\Gamma$ , если  $\Gamma \not\vdash \Phi$  и  $\Gamma \not\vdash \neg\Phi$ .

Основные свойства  $\vdash$  - опять:

- монотонность (если  $\Gamma \subseteq \Delta$  и  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Delta \vdash \Phi$ );
- транзитивность (если  $\Delta \vdash \Psi$  для всех  $\Psi \in \Gamma$ , и  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Delta \vdash \Phi$ );
- компактность (если  $\Gamma \vdash \Phi$ , то  $\Delta \vdash \Phi$  для некоторого конечного  $\Delta \subseteq \Gamma$ ).

**Определение 41.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$ . Для всякой пропозициональной формулы  $\varphi$  обозначим  $\xi\varphi$  - результат замены (всех вхождений) каждой  $p \in \text{Prop}$  в  $\varphi$  на  $\xi(p)$ .

*Утверждение 4.* Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$  и  $\vdash \varphi$  (в пропозициональном исчислении). Тогда  $\vdash \xi\varphi$  (уже в кванторном исчислении).

*Доказательство.* Фиксируем вывод  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , а затем рассмотрим  $\xi\varphi_0, \dots, \xi\varphi_n = \xi\varphi$ , и нетрудно показать, что это также вывод, там только аксиомы и *MP*.  $\square$

*Следствие 4.* Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$  и  $\models \varphi$  (в смысле пропозициональной логики). Тогда  $\vdash \xi\varphi$ .

*Доказательство.* В силу теоремы о (слабой) полноте для пропозиционального исчисления мы имеем  $\vdash \varphi$ , а потому  $\vdash \xi\varphi$ .  $\square$

*Утверждение 5.* Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ ,  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$  и  $x \in \text{Var}$ .

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vdash \forall x\Phi.$$

*Доказательство.* В правую сторону: пусть  $\Gamma \vdash \Phi$ . Значит,  $\Gamma \vdash \top \rightarrow \Phi$ . Применяем BR1, получаем  $\Gamma \vdash \top \rightarrow \forall x\Phi$ . Таким образом,  $\Gamma \vdash \forall x\Phi$ .

В обратную: пусть  $\Gamma \vdash \forall x\Phi$ . Используем аксиому  $\forall x\Phi \rightarrow \Phi$  (Q1), откуда легко получаем  $\Gamma \vdash \Phi$ .  $\square$

*Примечание 3.* Таким образом, мы получили *правило обобщения* (GR):

$$\frac{\Phi}{\forall x\Phi}$$

*Следствие 5.* Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vdash \tilde{\forall}\Phi.$$

**Теорема 8.** (О дедукции). Для любых  $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Psi \in \text{Form}_\sigma$ .

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \iff \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi.$$

*Доказательство.* В левую сторону очевидно, в правую точно так же, как и в изначальной теореме о дедукции, разве что надо рассмотреть новые случаи BR1 и BR2.  $\square$

*Следствие 6.* Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \vdash \bigwedge_{i=1}^n \Psi_i \rightarrow \Phi$$

для некоторых  $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma$ .

**Лемма 18.** Пусть  $\xi : \text{Prop} \rightarrow \text{Form}_\sigma$  и  $\models \varphi$  (в смысле пропозициональной логики). Тогда  $\models \xi\varphi$ .

**Лемма 19.** Пусть  $\Phi$  - аксиома кванторного исчисления. Тогда  $\models \Phi$ .

**Теорема 9.** (О корректности). Для любых  $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$  и  $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ ,

$$\Gamma \vdash \Phi \implies \Gamma \models \Phi.$$

## 7 Билеты.

Начало и конец обозначены в конспекте, чтобы я тысячу раз из документа в документ не копировал, и для общей полноты материала (вдруг чего спросят вне вопросов).

1. Что такое формула в PCL? Покажите, что если  $\psi$  является началом  $\varphi$ , то  $\psi = \varphi$ .
2. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности представления формул в PCL.
3. Сформулируйте и докажите основное утверждение о подформулах в PCL.
4. Опишите семантику для PCL.
5. Что такое гомоморфизм? Изоморфизм? Автоморфизм?
6. Определите семантическое следование и эквивалентность в PCL. Опишите алгоритм приведения формул в PCL к д.н.ф. (без построения их таблиц истинности)
7. Опишите гильбертовское исчисление для PCL.
8. Сформулируйте и докажите основные свойства  $\vdash$  в PCL.
9. Покажите, что  $\vdash p \rightarrow p$  и  $\{p \wedge q\} \rightarrow q \wedge p$ .  
См. 2 лекция, страница 7
10. Покажите, что  $\{\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q\} \vdash p$ .
11. Сформулируйте и докажите теорему дедукции для  $\vdash$  в PCL (считая известным  $\vdash p \rightarrow p$ ).
12. Сформулируйте и докажите теорему о корректности  $\vdash$  в PCL.
13. Какие множества формул называются противоречивыми в PCL? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях простоты в PCL.  
См. Доп. материал с практик, страница 2
14. Что такое простая теория в PCL? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях простоты в PCL.