Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алёшин Артём
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

Определение. $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на (a,b), если

- y – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на (a,b).

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R} \;\; y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем (x_0,y_0), если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a,b);
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0,y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha,\beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

- $$y_1 = 0$$
- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$
- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)
$$k = y'(x) = f(x,y)$$
Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0)*

G называется области существования.

Теорема (*О единственности*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0)*

G называется областью единственности.

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии (x_0,y_0) будет
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*).

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

- $$F(x_0,y_0) = 0$$
- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*). *Пусть* U *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$. *Тогда* $\forall (x_0,y_0) \in H$ $\exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* (x_0,y_0)
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство.

Фиксируем произвольную точку (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$.

F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют I_0, J_0 $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$.

По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$.

Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \text{const} \Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. $\square$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} &y' = m(x) \cdot n(y) \\ &m \in C((a,b)), n \in C((\alpha,\beta)) \\ &G = (a,b) \times (\alpha,\beta) \end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha,\beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подставнкой
- $I \subset (\alpha,\beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$

  Подсказка:

  Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0

  $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

$$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

Замена $z = y(t)$

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

$$N(y(x)) - N(y(x_0)) = M(x) - M(x_0)$$
$$U(x,y) := N(y) - M(x).$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Поэтому $U(x,y)$ – интеграл.

Предметный указатель