Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

Определение. $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на (a,b), если

- y – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на (a,b).

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0,\ G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем (x_0,y_0), если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a,b);
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0,y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

-
$$y_1 = 0$$

- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью существования.*

Теорема (*О единственности*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью единственности.*

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии (x_0,y_0) будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*)**.**

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

- $$F(x_0,y_0) = 0$$
- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*)**.** *Пусть* U *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$. *Тогда* $\forall (x_0,y_0) \in H$ $\exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* (x_0,y_0)
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют I_0, J_0 $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$. По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \mathrm{const}$ $\Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. □

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} &y' = m(x) \cdot n(y) \\ &m \in C((a,b)), n \in C((\alpha,\beta)) \\ &G = (a,b) \times (\alpha,\beta) \end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha,\beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подстановкой

- $I \subset (\alpha,\beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

  $$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

  Замена $z = y(t)$

  $$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

  Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

  $$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) &= M(x) - M(x_0) \\ U(x,y) &:= N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли U интегралом.

Утверждение. (*Критерий интеграла*)

U – интеграл для уравнения $y' = f(x,y) \iff$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$
- $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

Доказательство. Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = \mathrm{const}$

$$\frac{dU}{dx} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

$\square$

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \tag{1}$$

Замена переменных

Пример(ы). 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – x

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – x

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x), \;\; p,q \in C((a,b))$$

$f(x,y)$ определена на $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G, поэтому G – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

$$y' = p(x)y$$

Есть решение $y \equiv 0, x \in (a,b)$

Если $y > 0$, то

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

Воспользуемся заменой переменной:

Новая независимая переменная – x

Новая функция – $v(x)$

Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

$$\begin{aligned} y' &= v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx} \\ p(x)y + q(x) &= p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x) \\ v' \cdot e^{\int p(x)dx} &= q(x) \\ v' &= q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \\ v &= \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\ y &= e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right) \end{aligned}$$

Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

Для задачи Коши с начальным условием (x_0,y_0) имеем

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds\right)$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \text{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то воспользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x)$$
$$v' = (1-m)y'y^{-m}$$
$$\frac{v'}{(1-m)} = p(x)v + q(x)$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если α – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение Пфаффа

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Определение. *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m,n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

Определение. *Интегральная кривая дифференциальной формы* F – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Примечание. Кривая называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\dot\gamma_1, \dot\gamma_2$ и $(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) \neq 0$

Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая F

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot\gamma_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot\gamma_1(t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot\gamma_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на (α, β), то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для y:

$$\frac{dy}{dx} = \dot\gamma_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}$$

γ была интегральной кривой формы F, то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая γ уравнения $F = 0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $mdx + ndy = 0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \dot{\gamma}_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F = mdx + ndy = 0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \\ \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m} \end{array}\right.$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Форма F – *точная*, если $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Если F – точная, то $F = 0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

Теорема. *Если F – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0) \in G$ U – интеграл одного из уравнений:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ или } \frac{dx}{dx} = -\frac{n}{m}$$

Доказательство. $(x_0,y_0) \in G$ можно считать, что $n(x_0,y_0) \neq 0$, тогда $n(x,y) \neq 0$ в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{m}{n}$

Пусть $y(x)$ – решение

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = m + n \cdot (-\frac{m}{n}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n \neq 0$$

Получаем, что U – интеграл

□

Условие точности 1-формы

$$U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна } \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Утверждение.

$$G = (a,b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных m и n следует, что F – точна

Доказательство. Фиксируем $(x_0,y_0) \in G$

Хотим построить U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти φ

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial m}{\partial y}(s,y)ds + \varphi'(y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial n}{\partial x}(s,y)ds + \varphi'(y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Хотим

$$n(x,y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$$

□

Примечание. Это утверждение верно не для любой области G, хотя верно, если G – звездчатое множество

Интегрирующий множитель

Определение. $\mu \in C^1, \mu \neq 0$ называется *интегрирующим множителем*, если μF – точная форма

Пример(ы). Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель – $\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{n(y)})$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x,y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться t и искать мы будем функции $x(t)$

Определение. *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

n и $m_1, \dots, m_n$ – фиксированные натуральные числа

Для каждого $i = 1, \dots, n$ имеем уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f_i(t,x_1, \dot{x}_1, \dots, \frac{d^{m_1-1}}{dt^{m_1-1}}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$ называется *порядком системы*

Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем $x_1(t), \dots, x_n(t)$, все $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x_1, \dots, x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка m* $x(t)$ – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t,y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases} \iff \frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Если x решение уравнения, то очевидно, что $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \dots y_m = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$ решения системы и наоборот, если $y_1, y_2, \dots y_m$ решения системы, то $x = y_1$ решение уравнения.

Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на $\mathbb{R}^n$ зафиксируем $||x|| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

Определение. Для уравнения $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$ ($f \in C(G) G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$) функция $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется *решением*, если

- $\exists \dot{x}$ на (a,b)
- $(t,x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t,x(t)), t \in (a,b)$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется решением задачи Коши с начальным условием (t_0,x_0), если

- x – решение
- $x(t_0) = x_0$

Теоремы существования

Теорема. *существования (Пеано)*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ *решение задачи Коши*

Доказательство. Рассмотрим $(t_0,x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \in G \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \text{ – компакт}$$

$$\exists M : |(t,x)| \leqslant M \ \forall (t,x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказываеть, что существует решение на промежутке $(t_0 - h, t_0 + h)$
Эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение интегрального уравнения*, если

1. $x \in C((a,b))$
2. $(t,x(t)) \in G$
3. $x(t)$ удоавлетворяет интегральному уравнению

Лемма. *x – решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \Leftrightarrow x$ – решение задачи Коши с начальным условием t_0,x_0*

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок $[t_0,t_0 + h]$ (для $[t_0 - h, t_0]$ все аналогично)

Ломаные Эйлера

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и разобьем отрезок $[t_0,t_0+h]$ на N равных частей $[t_k,t_{k+1}]$, $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0,x_0)(t - t_0), t \in [t_0,t_1]$$
$$g(t) = g(t_k) + f(t_k,g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Введем $\dot{g}(t)$ (точечка сверху это просто символ, так как g не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k,g(t_k)), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Лемма. $\forall k = 0,1,\ldots,n$

1. *g определена на $[t_k, t_{k+1}]$*
2. *$|g(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0), t \in [t_0,t_k]$*
3. *$g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{g}(s)ds$*

Доказательство. Индукция по k

База: $k = 1$ Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что $f(t_k,g(t_k))$ определено, для этого достаточно показать, что $(t_k,g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t-t_0| \leqslant \alpha, |g(t_k)-x_0| \leqslant \beta$

   Это верно, так как $|g(t_k)-x_0| \leqslant M|t_k-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$

2. $|g(t)-x_0| \leqslant |g(t)-g(t_k)| + |g(t_k)-x_0| \leqslant |f(t_k,g(t_k))|(t-t_k) + M(t_0-t_0) \leqslant M(t-t_0)$

3. $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)ds + \int_{t_k}^t g(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)ds$

□

Лемма. *(Арцела-Аскори)*

$$G = \{g_k : I \to \mathbb{R}^n, k \geqslant 0\}$$

Определение. G равномерно ограничено, если существет $N: \ |g_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in I$

Определение. G рваностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$
$\forall k \geqslant 0 \ \forall t_1, t_2 \in I \ |t_1-t_2| < \delta \to |g_k(t_1)-g_k(t_2)| < \varepsilon$

Если G - равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда из G можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера $g_N, N > 0$ и докажем, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерынва

$$|g_N(t)-x_0| \leqslant M(t-t_0) \leqslant Mh \Rightarrow |g_n(t)| \leqslant |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1)-g_N(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}_N(s)ds \right| \leqslant M|t_1-t_2| \leqslant M\delta$$

В качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность g_N действительно равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к g

Для удобства можем считать, что вся последовательность g_N равномерно сходится к g

Мы хотим доказать, что g будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства g

1. $g_N \rightrightarrows g$ на $[t_0,t_0+h]$, g – непрерывна

2. $(t,g_N(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$

3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds?$

$$g_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g_n(s))ds + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t,g_n(t)) \in R, f \in C(R)$$
$$\Downarrow$$
$$f(t,g_N(t)) \rightrightarrows f(t,g(t)) \text{ на } [t_0,t_0+h]$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{t_0}^t f(s,g_N(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds \to 0$$

Так как R – компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на R

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \wedge |g_N(t_1) - g_N(t_2)| < \delta \to |f(t_1,g(t_1)) - f(t_2,g(t_2))| < \varepsilon$$

Если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то $t - t_k < \frac{h}{N} < \delta$ при больших N

$\dot{g}_N(t) = f(t_k,g_N(t_k))$, поэтому $|\dot{g}_N(t) - f(t,g_N(t))| = |f(t_k,g_N(t_k)) - f(t,g_N(t))|$

Поэтому, если N достаточно велико

$$\int_{t_k}^{t} |\dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s))|ds \leqslant \varepsilon(t - t_k)$$

$$\text{Тогда } \left|\int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s))ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t_1}\right| + \ldots + \left|\int_{t_k}^{t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(t_1 - t_0) + \ldots + \varepsilon(t - t_k) = \varepsilon(t - t_0) \leqslant \varepsilon h$$

Отсюда получаем, что $\int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s))ds \to 0$, следовательно $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,g(s))ds$

Таким образом, мы нашли решение g для исходного уравнения, и доказали теорему.

□

Напоминание из анализа

Определение. f удовлетворяет *условию Липшица* по x в $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ ($f \in \mathrm{Lip}_x(G)$)

Если $\exists L > 0$ такое, что $\forall (t,x), (t,x') \in G$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x - x'|$$

Определение. f удовлетворяет *локальномум условию Липшица* по x в G, если $\forall (t_0,x_0) inG$ $\exists U$ – окрестность, такая что $f \in \mathrm{Lip}_x(U)$

$$f \in \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ и } \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \forall i,j = 1,\ldots,n$$

Определение. *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение. A – матрица, тогда норма $||A|| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$

$$\forall x\ |x| \leqslant ||A|| \cdot |x|$$

Лемма.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow f \in \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

Доказательство. Фиксируем (t_0,x_0)

$$\exists \alpha,\beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leqslant \alpha, |x-x_0| \leqslant \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \ ||\frac{\partial f}{\partial x}|| \text{ в } R$$

Рассмотрим $(t,x),(t,x') \in R,\ g(s) = f(t, sx + (1-s)x')$

$$f(t,x) - f(t,x') = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,sx + (1-s)x')ds$$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant |\int_0^1| \leqslant \int_0^1 |\ldots| \leqslant \int_0^1 L|x-x'|ds = L|x-x'|$$

□

Лемма.

$$f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G), K \text{ – } \textit{компакт в } G$$

$$\Downarrow$$

$$f \in \mathrm{Lip}_x(K)$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall L_n \to \infty\ \exists (t_n,x_n),(t_n,x_n') \in K :$$

$$|f(t_n,x_n) - f(t_n,x_n')| > L_n|x_n - x_n'|$$

Так как K – компакт, то из (t_n,x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_{n_k},x_{n_k}) \to (t_0,x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из t_{n_k}, x'_{n_k}, сходящуюся к (t_0,x_0')

Для удобства будем считать, что $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0),\ (t_n,x_n') \to (t_0,x_0)$

Случай 1 $x_0 = x_0'$ Так как f – локально-липшицева по x, то $\exists U \ni (t_0,x_0)$ и L, такие, что

$$(t,x),(t,x') \in U \to |f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x-x'|$$

При достатчно больших n $(t_n,x_n),\ (t_n,x_n') \in U$ и мы получаем противоречие

Случай 2 $x_0 \neq x_0'$

Рассмотрим $g(t,x,y) = \frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|}$, $f \in C(G) \Rightarrow g$ непрервывна в окрестности U точки (t_0,x_0,x_0')

$$\Rightarrow \exists L : |g(t,x,y)| \leqslant L \Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|$$

Тогда для достаточно больших n $(t_n,x_n,x_n') \in U$ и мы снова получаем противоречие.

□

Лемма Гронуолла

Лемма. *(Лемма Гронуолла)*
Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$ *при* $t \in (a,b)$ *и* $\exists t_0 \in (a,b), \lambda, \mu \geqslant 0$, *такие что*

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \right|, \ t \in (a,b)$$

$$\textit{Тогда } \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

Доказательство. Разберем случай, когда $t \leqslant t_0$ (случай $t < t_0$ оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \right| \geqslant \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu\Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)}\dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)}\Phi \leqslant 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leqslant \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

Метод приближений Пикара

Теорема. *(Теорема Пикара)*

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \ G \textit{ – область существования и единственности}$$

Доказательство. **Существование** Зафиксируем $(t_0,x_0) \in G$ Возьмем $\alpha, \beta > 0$, что $R = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leqslant \alpha, |x-x_0| \leqslant \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 : \ |f(t,x)| \leqslant M, \ (t,x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$ – константа Липшица по x в R

Последовательные приближения Пикара $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds,\ \ k \leqslant 0$$

Лемма. $\forall k$ φ_k *определены на* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *и их графики лежат в* R

Доказательство. Идукция по k

База $\varphi_0 \equiv x_0$ для всех t, график очевидно лежит в R

Переход

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$(s,\varphi_k(s)) \in R \Rightarrow\ \ f \text{ – определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)ds \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

$\square$

Докажем теперь, что φ_k – равномерно сходятся на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Введем $\psi_0(t) = \phi_0(t),\ \ \psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$ при $k \geqslant 0$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частинчые суммы этого ряда равны $\varphi_k(t)$

Поэтому сходимость ряда $\Longleftrightarrow$ сходимость $\varphi_k(t)$

Лемма. $k \geqslant 1 \Rightarrow |\psi_k(t)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$

Доказательство. Рассмотрим только случай $t \geqslant t_0$

$k = 1$

$$|\psi_1(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))ds \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_0(s))|ds \leqslant M|t - t_0|$$

$k \to k + 1$

$$|\psi_{k+1}| = |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L|\psi_k(s)|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L\frac{M}{L}\frac{|L(s-t_0)|^k}{k!}ds = \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^{k+1}}{(k+1)!}$$

$\square$

$$\sum|\psi_k(t)| \leqslant \sum \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}e^{Lh}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \psi_k \text{ – сходистя равномерно на } [t_0-h, t_0+h]$$

$$\varphi_k \rightrightarrows g$$

Проверим, тчо g является решением нашего уравнения, для этого достаточно проверить, что g – решение эквивалентного интегрального уравнения

$$\varphi_k \text{ непрерывна } \Rightarrow g \text{ непрерывна}$$

$$(t,\varphi_k(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$f \text{ равномерно непрерывна на } R \Rightarrow f(s,\varphi_k(s)) \rightrightarrows f(s,g(s)) \text{ на } R$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s,g(s))ds$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = x_0$$

Единственность Предположим, что существуют два различных решения $x_1(t), x_2(t)$ задачи Коши с начальным условиям (t_0,x_0)

$$(t,x_1(t)), (t,x_2(t)) \in R$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_1(s))ds$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_2(s))ds$$

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,x_1(s))dsf(s,x_2(s))|ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} L|x_1(s)-x_2(s)|ds\right|$$

$$|x_1 - x_2| \geqslant 0 \Rightarrow \text{ по лемме Гронуолла } x_1 = x_2$$

□

Теорема. *G – область единственности, тогда если существует два решения x_1, x_2 на промежутках (a_1,b_1) и (a_2,b_2) соответственно и $\exists\ t_0 \in (a,b) = (a_1,b_1)\cap(a_2,b_2) :\ x_1(t_0) = x_2(t_0)$*

$$\Downarrow$$

$$x_1 \equiv x_2 \text{ на } (a,b)$$

Доказательство. Докажем, что они совпадают на $[t_0,b)$, остальное аналогично

$$T := \{t' \mid t' \geqslant t_0, x_1|_{[t_0,t']} = x_2|_{[t_0,t']}\}$$

$$T' = \sup T$$

Предположим, что $T' < b$

Тогда по непрерывности $x_1(T') = x_2(T') = x'$

Так как $(T',x') \in G$, а G – область единственности, то $x_1(t) = x_2(t)$ на $[T',T'+\varepsilon)$ $\Rightarrow T'+\varepsilon \in T$, получаем противоречие с тем, что T' – sup □

Метод сжимающих отображений

$$\dot{x} = f(t,x),\ \ f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

$$(t_0,x_0) \in G,\ \ (t_{,0},x_0) \in R \subset G,\ \ L \text{ – константа Липшица}$$

$$h_0 \leqslant h \text{ такое что } Lh_0 < 1$$

$$X := \{x \text{ – непрерывные функции на } [t_0-h_0,t_0+h_0], (t,x(t)) \in R\}$$

$$\text{Метрика на } X\text{: } \rho(x,y) = \max_{t\in[t_0-h_0,t_0+h_0]} |x(t)-y(t)|$$

$$(X,\rho) \text{ – полное метрическое пространство}$$

Введем оператор $\mathcal{L} : X \to X$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \psi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

Корректность Очевидно, ψ непрерывна, нам нужно только показать, что $(t,\psi(t)) \in R$

$$|\psi(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\right| \leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

$$\Downarrow$$

$$(t,\psi(t)) \in R$$

Сжимаемость

$$\varphi_1,\varphi_2 \in X$$

$$\rho(\mathcal{L}(\varphi_1),\mathcal{L}(\varphi_2)) = \max_t \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t \int_{t_0}^{t} L|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds \leqslant \max_t \left|\int_{t_0}^{t} L\rho(\varphi_1,\varphi_2)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t |t-t_0|L\rho(\varphi_1,\varphi_2) \leqslant Lh_0\rho(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$Lh_0 < 1$$

По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

Отсюда мы получаем существование и единственность решения для задачи Коши.

Продолжимость решений

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G),\ G \text{ – область единственности}$$

Определение. $x(t)$ – решение на (a,b)

Решение $y(t)$ – *продолжение вправо* $x(t)$, если y решение на (a,b_1), $b_1 > b$ и $x|_{(a,b)} = y|_{(a,b)}$

Теорема. *Теорема о продолжимости вправо* *Решение x на (a,b) продолжимо вправо за b* $\iff \exists x' = \lim\limits_{t \to b-0} x(t), (b,x') \in G$

Доказательство. "$\Rightarrow$" Очевидно

"$\Leftarrow$" По теореме существования $\exists z(t)$ на промежутке $(b-h, b+h) : z(b) = x'$

$$\text{Рассмотрим } y(t) = \begin{cases} x(t), t \in (a,b) \\ z(t), t \in [b,b+h) \end{cases}$$

$$y'(b) = z'(b) = f(b,x')$$
$$y(b) = z(b)$$

$y(t)$ – продолжение x вправо за b

□

Определение. $x(t)$ – *полное решение* на (a,b), если оно не продолжимо вправо за b и влево за a

Теорема. *Существование и единственность полного решения*

$\forall (t_0,x_0) \in G$ $\exists!$ *полное решения задачи Коши с н.д.* (t_0,x_0)

Доказательство. Фиксируем (t_0,x_0)

Рассмотрим

$$T = \{(a,b) \ni t_0 \mid \exists \text{ решение задачи Коши } x(t) \text{ на } (a,b)\}$$

$$T \neq \emptyset$$

$$A = \inf a, B = \sup b : (a,b) \in T$$

Докажем, что $\exists!$ полное решение на (A,B)

Будем рассматривать только $[t_0,B)$ (влево аналогично). Для начала определим решение на этом промежутке.

Фиксируем $\tau \in (t_0,B)$

Так как $B = \sup\{b\} \Rightarrow \exists b \in (\tau,B),\ \exists x_b$ – решение на $[t_0,b)$

Положим $x(\tau) = x_b(\tau)$

Корректность Рассмотрим $b' \in (\tau,b)$

По теореме об области единственности $x_b(t) = x_{b'}(t)$ на $[t_0,b) \cap [t_0,b') \Rightarrow x_b(\tau) = x_{b'}(\tau)$

Получаем, что $x(t)$ – корректно определенная функция, очевидно, что она является решением.

Единственность Пусть есть $x_1(t)$ – полное решение на (A_1,B_1) и $x_2(t)$ – полное решение на (A_2,B_2), по теореме единственности они совпадают на пересечении

Если $(A_1,B_1) \cap (A_2,B_2) \neq (A_1,b_1)$, то (без ограничения общности можно считать, что $B_2 > B_1$) тогда x_2 – продолжение x_1 вправо, но x_1 было полным, получаем противоречие.

□

Теорема. *Теорема о полном решении и компакте*
Пусть K – компактное подмножество в G
$x(t)$ – полное решение на конечном промежутке (a,b)
$\Rightarrow \exists \Delta = \Delta(K) > 0 : (t,x(t)) \notin K, t \in (a,a+\Delta) \cup (b-\Delta, b)$

Доказательство.

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \ \forall (t_0,x_0) \in K : H(t_0,x_0) = \{|t-t_0| \leqslant \alpha, |x-x_0| \leqslant \beta\} \subset G$$

$$\Rightarrow H' = \bigcup_{(t_0,x_0)\in K} H(t_0,x_0) \text{ – компакт в } G$$

$$\Rightarrow \ \exists M > 0 \ |f(t,x)| \leqslant M \text{ в } H'$$

$$\Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in K \text{ берем } R = H(t_0,x_0)$$

$$\exists h \ \forall (t_0,x_0) \in K : \ [t_0 - h, t_0 + h] \text{ – промежуток Пеано}$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$$\Delta := \frac{h}{2}$$

Рассмотрим полное решение $x(t)$ на (a,b)
Предположим, что $\exists \tau \in (b-\Delta,b) : (\tau,x(\tau)) \in K$
Тогда $\exists$ решение $x(t)$ задачи Коши с н.д. $(\tau,x(\tau))$ на $[\tau-h,\tau+h]$
Рассмотрим

$$y(t) = \begin{cases} x(t), t \in (a,\tau) \\ z(t), t \in [\tau, \tau+h) \end{cases}$$

Определено на $(a,\tau+h), \tau+h = \tau+2\Delta > b$
$\Rightarrow y$ – продолжение $x(t)$ за b вправо. □

$$y' = f(y), y \in \mathbb{R} f \in C[0,1], f(y) > 0, y \in (0,1], f(0) = 0$$

Определение. Система $\dot{x} = f(t,x)$ называется *сравнимой с линейной*, если

1. $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$
2. $\exists$ непрерывные $m(t)$ и $n(t)$ на $(a,b) : m(t), n(t) \leqslant 0$

$$|f(t,x)| \leqslant m(t)|x| + n(t)$$

Теорема. *Если система сравнима с линейной, то любое полное решение определено на промежутке (a,b)*

Доказательство. Пусть $x(t)$ – полное решенеие на (a',b')

Предположим, что $b'<b$, выберем $t_0 \in (a',b'),\ x_0 = x(t_0)$

Рассмотрим $[t_0,b'] \subset (a,b) \Rightarrow \exists M,N > 0:\ m(t) \leqslant M, n(t) \leqslant N$ на $[t_0,b']$

Запишем интегральное уравнение для x

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

$$t \in [t_0,b'):\ |x(t)| \leqslant |x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} m(s)|x(s)| + n(s)ds \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} M|x(s)| + Nds\right.$$

$$\Downarrow$$

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + N|b'-t_0| + M\int_{t_0}^{t} |x(s)|ds$$

$$\Downarrow \text{ (лемма Гроуолла)}$$

$$|x(t)| \leqslant (|x_0 + N|b-t_0|)e^{M(t-t_0)} \leqslant (|x_0| + N|b-t_0|)e^{M(b'-t_0)} =: N_1$$

$$(t,x(t)) \in K,\ t \in [t_0,b'),\ K = [t_0,b'] \times \{|x| \leqslant N1\}$$

Получаем противоречие с теоремой о полном решении и компакте, так как для любого сколь угодно близкого слева к b' числа t $(t,x(t))$ содержится в компакте K □

Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = P(t)x+q(t), x \in \mathbb{R}^n,\ P(t)$ непрерывная на (a,b) $n \times n$-матрица $q(t)$ непрерывный на (a,b) вектор

Что мы знаем про нашу систему?

$$f(t,x) = P(t)x + q(t)$$

$$f \in C(G), G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$$

Матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x} = P(t)$ – непрерывна в G

$$f \in \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

G – область существования и единственности

$$|f(t,x)| \leqslant ||P(t)|| \cdot |x| + |q(t)|$$

$$||P(t)||, |q(t)| \leqslant 0 \text{ и непрерывны в } G$$

Любое полное решение $x(t)$ определено на (a,b)

Далее мы будем рассматирвать только полные решения.

Свойство существования и единственности

1. $\forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0,x_0), определенное на (a,b)
2. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения на (a,b) и $\exists t_0 \in (a,b):\ x_1(t_0) = x_2(t_0)$, то $x_1|_{(a,b)} = x_2|_{(a,b)}$

Однородные линейные системы

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P(t) \in C((a,b))$$

Теорема. *Множество решений ЛОС – линейное пространство над* $\mathbb{R}$

Доказательство. Очевидно. □

Рассмотрим n решений $x_1(t), \dots x_n(t)$
Сопоставим им $n \times n$ матрицу

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Обозначим $W(t) = \det \Phi(t)$ – *Определитель Вронского (вронскиан)*
Лемма. $\exists t_0 : W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) \equiv 0$

Доказательство. Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = 0$$

Так как $\det = 0 \Rightarrow \exists c \neq 0$ – решение

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Тогда $x(t) = \Phi(t)c = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t)$ – решение

$$x(t_0) = \Phi(t_0)c = 0$$

$$\text{Естьрешение } y(t) \equiv 0$$

$$x(t_0) = y(t_0) \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

$$\Phi(t)c \equiv 0, \ c \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \equiv 0$$

□

Главная задача – описать структуру множества решений линейной однородной системы

Определение. $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – *фундаментальная матрица*, если существует $t_0 \in (a,b)$, в которой $W(t_0) \neq 0$ (тогда по предыдущей лемме $W(t) \neq 0$ на (a,b))

Теорема. $\forall$ *ЛОС* $\exists$ *фундаментальная матрица*

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (a,b)$, $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}^n$ – линейно независимы.
Тогда $\forall i$ существует решение $x_i(t), x_i(t_0) = a_i$
Возьмем в качестве фундаментальной матрицы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, $\Phi(t_0) = (a_1, \dots a_n)$,
$W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0$ на всем интервале.

□

Примечание. $a_i = e_i$ – базисные векторы тогда $\Phi(t_0) = E$
$\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица, нормированная к единичной* при $t = t_0$

Теорема. *об общем решении ЛОС*
$\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица* $\Rightarrow \forall x(t)$ – *решение ЛОС* $\exists! \ c \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c$

Доказательство. $\Phi(t)$, рассмотрим решение $x(t)$, фиксируем точку $t_0 \in (a,b)$

Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = x(t_0)$$

Поскольку Φ – фундаментальная матрица, ее определитель отличен от нуля и эта система имеет единственное решение.

Рассмотрим $y(t) = \Phi(t)c$ – линейная комбинация столбцов $\Phi(t)$, поэтому это тоже решение ЛОС

$$y(t_0) = \Phi(t_0)c = x(t_0)$$

По единственности решений ЛОС $y(t) = x(t)$ на (a,b)

Единственность c следует из единственности решения алгебраической системы. □

Таким образом, мы установили линейный изоморфизм:

$$\{\text{решения ЛОС}\} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \Phi(t)c$$

Выбор фундаментальной матрицы – выбор базиса пространства решений.

Теорема. *о множестве фундаментальных матриц*

Φ – *ф.м.* $\Rightarrow \{\text{ф.м. ЛОС}\} = \{\Phi(t)C : C \text{ – матрица } n \times n, \det C \neq 0\}$

Доказательство. $"\supset"$ Рассмотрим $\Psi = \Phi C$

Столбцы Ψ – линейные комбинации столбцов Φ, значит они решения. $\det \Psi = \det \Phi \cdot \det C \neq 0$

$"\subset"s$ Ψ – ф.м. $\Psi = (\psi_1, \dots \psi_n)$

$\forall i \ \psi_i = \Phi c_i \Rightarrow \Psi = (\Phi c_1, \dots, \Phi c_n) = \Phi C, \ C = (c_1, \dots, c_n)$

$0 \neq \det \Psi \det \Phi \det C \Rightarrow \det C \neq 0$

□

Теорема. *Пусть* $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, x_i – *решения ЛОС*

$\Rightarrow \frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t)$

Доказательство.

$$\frac{dx_i}{dt} = Px_i$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = (Px_1, \dots, Px_n) = P(x_1, \dots, x_n) = P\Phi$$

□

Задача нахождения фундаментальной матрицы

- Тривиальна в случае $n = 1$

$$\dot{x} = p(t), \ \Phi(t) = e^{\int p(t)dt}$$

- $n = 2$ Построение ф.м. по $P(t)$ – неразрешимая задача:

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\ddot{y} + t^\alpha y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -t^\alpha y \end{cases}$

Предположим $y(t) \not\equiv 0$

$$\text{Рассмотрим } x(t) = \frac{\dot{y}}{y}$$

$$\text{Тогда } \dot{x} = -\frac{1}{y^2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{y}\ddot{y} = -x^2 - t^\alpha$$

– уравнение Рикатти, для которого ни одно решение не представимо в элементарных функциях.

А если x не представим в элементарных функция, то и y не представим в элементарных функциях. □

Комплексные Решения ЛОС

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P \in C(a,b)$$

$$z = x + iy,\ \ x,y \in \mathbb{R}^n$$

Лемма. $P(t)$ *– вещественная матрица,* $z = x + iy$ *– комплексное решение* $\Leftrightarrow$ x,y *– вещественное решения*

Лемма. *об овеществлении*

$\Psi(t) = (y_1, \dots, y_2)$ *– комплексная фундаментальная матрица, у котрой* $y_1 = \overline{y_2}$

$\Phi(t) = (\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \dots, y_n)$ *– ф.м*

Доказательство.

$$\Phi = \Psi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \neq 0$$

□

Системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$$

Метод Эйлера

Ищем решения в виде $x(t) = \gamma e^{\lambda t}$, $\gamma \neq 0$

$$\dot{x} = \lambda\gamma e^{\lambda t} = A\gamma e^{\lambda t}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\gamma = \lambda\gamma$$

Простой частный случай: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и простые(кратность каждого 1)
Тогда есть n решений $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \gamma_n e^{\lambda_n t}$

$$\Phi(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \gamma_n e^{\lambda_n t} \text{ – фудаментальна}$$

$\{A\ n \times n$ комплексные матрицы$\}$
$||A||$ – операторная норма A

$$||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$$

Определение. *Матричная экспонента*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^K}{k!}$$

Теорема. *Этот ряд сходистя*

Доказательство. $\Sigma_m = \sum_{k=0}^{M} \frac{A^k}{k!}$

$$||\Sigma_m - \Sigma_{m+l}|| = ||\sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{A^k}{k!}|| \leqslant \sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{||A||^k}{k!} \to 0$$

□

Теорема. $B = S^{-1}AS \Rightarrow e^B = s^{-1}e^A S$
Для матриц, вообще говоря, неверно равенство $e^{A+B} = e^A e^B$
Теорема.

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(A+B)\ldots(A+B) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \to e^A e^B$$

□

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},\ t \in \mathbb{R}$$

Теорема.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k t^k = \frac{d}{dt}\left(E + At + \ldots \frac{1}{m!} A^m t^m\right) = A + A^2 t + \ldots \frac{1}{(m-1)!} A^m t^{m-1} = A\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k t^k}{k!}\right)$$

□

Следствие. e^{At} – фундаментальная матрица $\dot{x} = Ax$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \Rightarrow \text{ столбцы } e^{At} \text{ – решения}$$

$$t = 0, e^{A\cdot 0} = E$$

$$\text{Если } A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_n)$$
$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$
$$e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Вычисление e^{At}

$$B = s^{-1}AS \Rightarrow e^{Bt} = S^{-1}e^{At}S$$

Матрицу A можно привести к ЖНФ
$\exists S : S^{-1}AS = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$, где J_i – жордановы блоки.

$$S^{-1}e^{At}S = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_m t})$$

Жорданов блок $J_l = \lambda E_s + I_s$

$$I_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_s t} = e^{\lambda E_s t + I_s t} = e^{\lambda E_s t} \cdot e^{I_s t}$$

$$e^{\lambda E_s t} = e^{\text{diag}(\lambda t, \dots, \lambda t)} = e^{\lambda t} \cdot E_s$$

$$\text{Вычислим } e^{I_s t}$$
$$I_s^0 = E_s$$
$$I_s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$I_s^{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$I_s^k = 0, k \geqslant s$$

$$e^{I_s t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_s^k t^k =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^{J_l t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Зная каждую матрицу $e^{J_s t}$, легко вычислить и всю e^{Jt}

Оценка фундаментальной матрицы

Теорема. *A – матрица, λ_j – собственные числа:*

$$\forall a > \operatorname{Re}\lambda_j, j = 1, \dots, n \exists c > 0 :$$
$$||e^{At}|| \leqslant Ce^{at}$$

Доказательство.

$$J = S^{-1}AS$$

Достаточно посчитать норму $||e^{Jt}||$

Ненулевой элемент – $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}, |e^{\lambda_j t}| = e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}$

$$a > \max \operatorname{Re}\lambda_j$$

$$e^{-at} \cdot \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j, t} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c_{j,k} : \ |e^{-at} \cdot \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j, t}| \leqslant c_{j,k}$$

Тогда $|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}| \leqslant c_{j,k}e^{at}$ при $t \geqslant 0$
В качестве константы C можно взять $\max c_{j,k}$ (пар (j,k) конечное число) $\square$

Сравнение с методом Эйлера

$$\dot{x} = Ax$$

Предполагаем, что с.ч. A вещественные и простые
λ_j – с.ч. A, γ_j – соответствующие с.в.
Методом Эйлера получаем, что ф.м. равна:

$$(\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t})$$

Если следовать методу матричной экспоненты:

Берем $S : S^{-1}AS = J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Тогда $S^{-1}e^{At}S = e^{Jt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$
S – решение уравнения $AS = SJ$, $S = (s_1, \dots, s_n)$
$As_j = \lambda_j s_j \Rightarrow s_j$ – собственные векторы.
Знаем, что e^{At} – фундаментальная матрица
По теореме об общем виде фундаментальных матриц $\Rightarrow e^{At} \cdot S$ – ф. м.

$$e^{At}S = Se^{Jt} = (s_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, s_n e^{\lambda_n t})$$

То же самое. что и методом Эйлера

Случай Лаппо-Данилевского

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n, A \in C(a,b)$$

Теорема. *предположим, что* $\exists t_0 \in (a,b)$*:*

$$A(t)\int_{t_0}^t A(s)ds = \left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right) \cdot A(t)$$
$$\Downarrow$$
$$e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} \text{ – \textit{фундаментальная матрица}}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$$

Тогда $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ – матрица решений и $W(t_0) = \det(E) = 1$

$$e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^t\right)^k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t\right)^k = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t \cdot \ldots \cdot \int_{t_0}^t\right) = A(t)\left(\int_{t_0}^t\right)^{k-1} + \left(\int_{t_0}^t\right)A(t)\left(\int_{t_0}^t\right)^{k-2} + \ldots$$

Так как матрица и интеграл коммутируют:

$$= kA(t)(\int_{t_0}^t)^{k-1}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}(\int_{t_0}^t)^k = \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!}\cdot k \cdot A(t)(\int_{t_0}^t)^{k-1} = A(t)\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{(k-1)!}(\int_{t_0}^t)^{k-1} \to A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$$

Откуда и следует формула для производной. □

Неоднородные линейныые системы

Определение. *Неоднородная линейная система*

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t), x \in \mathbb{R}^n$$

Соответствующая Лос $\dot{x} = P(t)x$

Теорема. *Об общем решении неоднородной линейной системы*
Пусть $y(t)$*– решение НЛС*
$\Phi(t)$ *– ф.м. соответсвующей ЛОС*
$\Rightarrow \forall x(t)$ *– решение НЛС* $\exists!\ c \in \mathbb{R}^n:\ x(t) = \Phi(t)c + y(t)$

Доказательство.

$$x(t) - y(t) - \text{решение ЛОС}$$

$$\dot{x} - \dot{y} = Px + Q - (Py + Q) = P(x - y)$$

Тогда $x - y = \Phi(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$
При фиксированном y, $x = \Phi(t)c + y(t)$, причем c – единственно.

□

Метод Лагранжа

$\Phi(t)$ – ф.м. соответствующей ЛОС
Ищем решение $x(t)$ НЛС в виде

$$x(t) = \Phi(t)\alpha(t), \alpha \in C^1$$

$$\dot{x} = \dot{\Phi}\alpha + \Phi\dot{\alpha} = Px + Q$$

Так как $\dot{\Phi}(t) = P\Phi(t)$, уравнение можно переписать в виде

$$P\Phi\alpha + \Phi\dot{\alpha} = P\Phi\alpha + Q$$

Откуда

$$\Phi\dot{\alpha} = Q, \det\Phi \neq 0$$

$$\exists\Phi^{-1} \in C$$

$$\Phi\dot{\alpha} = Q \Leftrightarrow \dot{\alpha} = \Phi^{-1}Q$$

$$\alpha = \int \Phi^{-1}Q dt$$

$$x(t) = \Phi \int \Phi^{-1}Q dt$$

Логарифм матрицы

Определение. *Логарифм матрицы* $\log(B)$ – такая матрица A, что $e^A = B$, так как e^A всегда обратима, необходимо, чтобы $\det B \neq 0$

Оказывается, что это условие необходимо и достаточно
Теорема.

$$\forall A, \det A \neq 0\ \exists \log A$$

Напомним, что

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица } r \times r$$

Лемма. $\lambda \neq 0$

$$Z = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$$

Тогда $e^Z = E_r + \frac{I_r}{\lambda}$

Доказательство. Ряд в определении Z конечен
$z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

$$\log(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p$$

$$e^{\log(1+z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p \right)^k = 1 + z$$

Частная сумма ряда $\sigma_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p)^k$

$$\sigma_{m+1}(z) - \sigma_m(z) = z^{m+1}(...)$$

$$\sigma_m(z) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} z + \ldots + a_m^{(m)} z^m + \ldots$$

□

Предметный указатель