Алгебра

Мастера конспектов

22 января 2020 г.

Честно говоря, ненависть к этой вашей топологии просто невообразимая.

Содержание

1 Билеты 4
1.1 Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Области целостности . . . 4
1.2 Евклидовы кольца. Евклидовость $\mathbb{Z}$. Неприводимые и простые элементы. . . 5
1.3 Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов . . 8
1.4 Основная теорема арифметики . . . 8
1.5 Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Китайская теорема об остатках . . . 8
1.6 Определение поля. $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ как поле. Поле частных целостного кольца . . . 8
1.7 Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо . . . 8
1.8 Теорема о гомоморфизме . . . 8
1.9 Кольцо многочленов. Целостность и евклидовость кольца многочленов над полем . . . 8
1.10 Лемма Гаусса . . . 8
1.11 Факториальность кольца многочленов . . . 8
1.12 Теорема Безу. Производная многочлена и кратные корни . . . 8
1.13 Интерполяция Лагранжа . . . 8
1.14 Интерполяция Эрмита . . . 8
1.15 Поле разложение многочлена . . . 8
1.16 Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в . . . 8
1.17 Основная теорема алгебры . . . 8
1.18 Разложение рациональной функции в простейшие дроби над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ . . . 8
1.19 Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса . . . 8
1.20 Размерность векторного пространства . . . 8
1.21 Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, фактор-пространство. Ранг линейного отображения . . . 8
1.22 Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц . . . 8
1.23 Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Системы линейных уравнений 8
1.24 Теорема Кронекера-Капелли . . . 8
1.25 Определение группы. Циклическая группа. Порядок элемента . . . 8
1.26 Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки . . . 8
1.27 Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности . . . 8
1.28 Группа обратимых элементов кольца. Вычисление обратимых элементов $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Функция Эйлера . . . 8
1.29 Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера . . . 8
1.30 Многочлены деления круга . . . 8
1.31 Конечные поля (существование, единственность, цикличность мультипликативной группы) . . . 8
1.32 Фактор-группа, теорема о гомоморфизме . . . 8
1.33 Определитель матрицы. Инвариантность при элементарных преобразованиях, разложение по строчке и столбцу . . . 8

1.34 Присоединенная матрица. Формула Крамера. Определитель транспонированной матрицы . . . 8
1.35 Вычисление определителя методом Гаусса . . . 8
1.36 Принцип продолжения алгебраических тождеств. Определитель произведения матриц . . . 8

2 Пофамильный указатель всех мразей **9**

1 Билеты

1.1 Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Области целостности

Определение 1. *Кольцом* называется множество R вместе с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ (которые называются сложением и умножением соответственно), удовлетворяющим аксиомам:

- операция сложения ассоциативна;
- по отношению к сложению существует нейтральный элемент;
- у каждого элемента есть обратный по сложению
- операция сложения коммутативна;
- умножение ассоциативно;
- умножение дистрибутивно по сложеиню.

Также можно добавить, что если на множестве выполныны три первые аксиомы, то оно будет называться *группой*, а если выполнены первые четыре, то это уже *абелева группа*. Нейтральный по сложению элемент кольца называют *нулём*.

Пример(ы) 1. Кольцо называется:

- *коммутативным*, если оно коммутативно по умножению;
- *кольцом с единицей*, если оно содержит нейтральный элемент по умножению (единица);
- *телом*, если в нём есть 1, и для любых $a \neq 0 \to a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;
- *полем*, если это коммутативное тело;
- *полукольцом*, если нет требования противоположного элемента по сложению.

Следствие 1. Некоторые следствия из аксиом:

- $0 \cdot a = 0$

  Доказательство.
  $$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$
  Прибавим к обеим частям $-0 \cdot a$ и получим требуемое. □

- Нейтральный элемент по сложению единственный

  Доказательство. Рассмотрим их сумму справа и слева. □

- $a \cdot 0 = 0$

Доказательство.

$$a \cdot 1 = a \Longrightarrow (0+1)a = a \Longrightarrow 0 \cdot a + 1 \cdot a = a \Longrightarrow 0 \cdot a = 0$$

□

Определение 2. Коммутативное кольцо R с единицей, обладающее свойством

$$xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0 \ (\forall x, y \in R)$$

называется *областью целостности* или просто *областью.*

Определение 3. Число $d \neq 0$ называется *делителем нуля*, если существует такое $d' \neq 0$, что $dd' = 0$.

Нетрудно понять, что область целостности - в точности коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

1.2 Евклидовы кольца. Евклидовость $\mathbb{Z}$. Неприводимые и простые элементы.

Для начала, некоторые связанные понятия, не упомянутые в билетах.

Определение 4. Говорят, что d *делит* p и пишут $d|p$, если $p = dq$ для некоторго $q \in R$.

Определение 5. Элемент ε называется *обратимым*, если он делит единицу, то есть существует такое $\varepsilon^{-1} \in R$, что $\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon = 1$.

Определение 6. Будем говорит, что элементы a и b *ассоциированы* и писать $a \sim b$, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- существует обратимый элемент ε, для которого $a = \varepsilon b$;
- $a|b$ и $b|a$.

Покажем, что эти условия действительно эквивалентны.

Доказательство. Докажем в обе стороны:
$\Rightarrow$ Если $a = \varepsilon b$, то $\varepsilon^{-1} a = b$. Это и есть второе условие.
$\Leftarrow$ Пусть $a = bc$ и $b = ac'$ для каких-то c, c'. Тогда $a = (ac')c = a(cc') \leftrightarrow a(1 - cc') = 0$. Тогда либо $a = 0$, либо $cc' = 1$, потому что делителей нуля в нашем кольце нет. В любом случае, a и b отличаются на обратимый: либо они оба равны нулю, либо c - обратимый. □

А теперь, что касается самого билета.

Определение 7. Область целостности R называется *евклидовым кольцом*, если существует евклидова норма $N : R \to \mathbb{N}_0$ такая, что $N(0) = 0$ и для любых элементов $a, b \in R$, где $b \neq 0$, существует меньший чем b по норме элемент $r \in R$ такой, что выполнено равенство $a = bq + r$.

Пример(ы) 1. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ евклидово.

Доказательство. Пусть у нас имеются целое число a и ненулевое целое b. Тогда существуют такие целые числа q и r, что модуль r меньше модуля b, а также $a = bq + r$. Отметим на оси все ератные b. Тогда если число a попало на отрезок $[kb, (k+1)b]$, k будет частным, а $a - kb$ - остатком. Дальнейшую формализация можно провести индукцией. □

Опять несколько небольших новых определений перед тем как перейти к последнему пункту билета (их можно упустить).

Определение 8. Пусть R - область целостности; $a,b \in R$. Элемент $d \in R$ называется *наибольшим общим делителем* a и b, если

- $d|a$ и $d|b$;
- для любого $d' \in R$, который также делит a и b, выполнено также, что он делит d.

Теорема 1. *(О линейном представлении НОД в евклидовых кольцах). Пусть R - евклидово кольцо, $a, b \in R$.Тогда существуют $d := \gcd(a,b)$ и такие $x,y \in R$, что $d = ax + by$.*

Теперь про простые и неприводимые.

Определение 9. Пусть R - область. Необратимый элемент $p \in R$ - *неприводимый*, если

$$\forall d \in R : d|p \Longrightarrow d \sim 1 \vee d \sim p$$

Определение 10. Пусть R - область. Ненулевой необратимый элемент $p \in R \backslash 0$ называется *простым*, если $\forall a,b \in R : p|ab \Longrightarrow p|a \vee p|b$.

Лемма 1. *(Простые $\subset$ неприводимые). Если p - простой элемент произвольного коммутативног кольцв с единицей, то p - неприводим.*

Доказательство. Пусть d - какой-то делитель p, что эквивалентно равенству $p = da$ для какого-то a. Проверим, что либо $d \sim 1$, либо $d \sim p$. Раз p - простой, то либо он делит d, либо он делит a. Если первое, что сразу $d \sim p$.Если второе, перепишем в виде $da = p|a$. Это то же самое, что $bda = a$ для некоторого b. Здесь либо $a = 0$, то тогда $p = o$, что невозможно по определению простого, либо мы можем сократить на a и получим $bd = 1$, тогда d ассоциирован с 1. $\square$

1.3 Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов

1.4 Основная теорема арифметики

1.5 Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Китайская теорема об остатках

1.6 Определение поля. $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ как поле. Поле частных целостного кольца

1.7 Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо

1.8 Теорема о гомоморфизме

1.9 Кольцо многочленов. Целостность и евклидовость кольца многочленов над полем

1.10 Лемма Гаусса

1.11 Факториальность кольца многочленов

1.12 Теорема Безу. Производная многочлена и кратные корни

1.13 Интерполяция Лагранжа

1.14 Интерполяция Эрмита

1.15 Поле разложение многочлена

1.16 Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в

1.17 Основная теорема алгебры

1.18 Разложение рациональной функции в простейшие дроби над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$

1.19 Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса

1.20 Размерность векторного пространства

1.21 Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, фактор-пространство. Ранг линейного отображения

1.22 Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц

1.23 Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Системы линейных уравнений

1.24 Теорема Кронекера-Капелли

1.25 Определение группы. Циклическая группа. Порядок элемента

1.26 Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки

1.27 Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности

1.28 Группа обратимых элементов кольца. Вычисление обратимых элементов $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. Функция Эйлера

1.29 Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера

1.30 Многочлены деления круга

И в заключение...

2 Пофамильный указатель всех мразей

Быстрый список для особо заебавшегося поиска.

ассоциированность
делитель нуля
евклидово кольцо
кольцо, а также его вариации
неприводимые
НОД
область целостности
простые