# Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

# Содержание

Литература . . . . . . 3

**Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной** **3**

Задача Коши . . . . . . 3

Единственность . . . . . . 3

Поле направлений . . . . . . 4

Основные теоремы . . . . . . 4

**Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка** **4**

Интеграл . . . . . . 4

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными . . . . . . 5

**Замена переменных** **6**

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . . . 7

Уравнения, сводящиеся к линейным . . . . . . 8

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме . . . 8

**Уравнение в полных дифференциалах** **9**

Условие точности 1-формы . . . . . . 10

Интегрирующий множитель . . . . . . 10

**Системы дифференциальных уравнений** **11**

Частные случаи . . . . . . 11

Векторная запись нормальных систем . . . . . . 12

**Теоремы существования** **12**

Ломаные Эйлера . . . . . . 13

Напоминание из анализа . . . . . . 15

Лемма Гронуолла . . . . . . 17

Метод приближений Пикара . . . . . . 17

Метод сжимающих отображений . . . . . . 20

**Продолжимость решений** **21**

## Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

**Определение.** *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$

# Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

**Определение.** *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где $G$ – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

**Определение.** $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на $(a,b)$, если

- $y$ – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на $(a,b)$.

**Пример(ы).**

- $y' = ky, k > 0,\ G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

**Определение.** *Интегральная кривая* – график решения.

## Задача Коши

**Определение.** $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем $(x_0,y_0)$, если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на $(a,b)$;
- $y(x_0) = y_0$.

## Единственность

**Определение.** $(x_0,y_0)$ – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

**Пример(ы).**

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

-
$$y_1 = 0$$

- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$
- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0{,}0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1{,}1)$ уже будет точкой единственности

### Поле направлений

**Определение.** Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке $(x,y)$

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке $(x,y)$ области $G$ провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

### Основные теоремы

**Теорема** (*О существовании*). *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G\ \exists$ решение задачи Коши с начальными данными $(x_0,y_0)$ $G$ называется областью существования.*

**Теорема** (*О единственности*). *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G\ \exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными $(x_0,y_0)$ $G$ называется областью единственности.*

## Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

**Пример(ы).** $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии $(x_0,y_0)$ будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

### Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

**Определение.** Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в $H$, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

**Теорема** (Напоминание *теоремы о неявной функции*).

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

*Если*

- $$F(x_0,y_0) = 0$$
- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

*тогда* $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

**Теорема** (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*)**.** *Пусть* $U$ *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$. *Тогда* $\forall (x_0,y_0) \in H$ $\exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* $(x_0,y_0)$
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

*Доказательство.* Фиксируем произвольную точку $(x_0,y_0)$. Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. $F$ удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют $I_0$, $J_0$ $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$. По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями $(x_0,y_0)$ на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \text{const}$ $\Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. □

## Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} &y' = m(x) \cdot n(y) \\ &m \in C((a,b)), n \in C((\alpha,\beta)) \\ &G = (a,b) \times (\alpha,\beta) \end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha,\beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подставнкой

- $I \subset (\alpha,\beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

  $$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

  Замена $z = y(t)$

  $$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

  Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

  $$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) &= M(x) - M(x_0) \\ U(x,y) &:= N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли $U$ интегралом.

*Утверждение.* (*Критерий интеграла*)

$U$ – интеграл для уравнения $y' = f(x,y) \iff$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$
- $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

*Доказательство.* Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = \text{const}$

$$\frac{dU}{dx} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \tag{1}$$

## Замена переменных

**Пример(ы).** 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – $x$

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – $x$

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

## Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x),\ \ p,q \in C((a,b))$$

$f(x,y)$ определена на $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, $f$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $G$, поэтому $G$ – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

$$y' = p(x)y$$

Есть решение $y \equiv 0, x \in (a,b)$

Если $y > 0$, то

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

Воспользуемся заменой переменной:

Новая независимая переменная – $x$

Новая функция – $v(x)$

Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

$$\begin{aligned}
y' &= v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx} \\
p(x)y + q(x) &= p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x) \\
v' \cdot e^{\int p(x)dx} &= q(x) \\
v' &= q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \\
v &= \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\
y &= e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right)
\end{aligned}$$

Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

Для задачи Коши с начальным условием $(x_0,y_0)$ имеем

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds\right)$$

## Уравнения, сводящиеся к линейным

*Уравнение Бернулли* $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \text{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то возпользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x)$$
$$v' = (1-m)y'y^{-m}$$
$$\frac{v'}{(1-m)} = p(x)v + q(x)$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

*Уравнение Рикатти*

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если $\alpha$ – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

## Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

*Уравнение Пфаффа*

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

**Определение.** *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m,n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

**Определение.** *Интегральная кривая дифференциальной формы* $F$ – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

*Примечание.* Кривая называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\dot\gamma_1, \dot\gamma_2$ и $(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) \neq 0$

*Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением*

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая $F$

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot\gamma_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot\gamma_1(t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot\gamma_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на $(\alpha, \beta)$, то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для $y$:

$$\frac{dy}{dx} = \dot\gamma_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}$$

$\gamma$ была интегральной кривой формы $F$, то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая $\gamma$ уравнения $F = 0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $mdx + ndy = 0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \dot{\gamma}_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F = mdx + ndy = 0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{m}{n} \\ \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{n}{m} \end{array}\right.$$

# Уравнение в полных дифференциалах

**Определение.** Форма $F$ – *точная*, если $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Если $F$ – точная, то $F = 0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

**Теорема.** *Если $F$ – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0) \in G$ $U$ – интеграл одного из уравнений:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ или } \frac{dx}{dx} = -\frac{n}{m}$$

*Доказательство.* $(x_0,y_0) \in G$ можно считать, что $n(x_0,y_0) \neq 0$, тогда $n(x,y) \neq 0$ в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{m}{n}$

Пусть $y(x)$ – решение

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = m + n \cdot (-\frac{m}{n}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n \neq 0$$

Получаем, что $U$ – интеграл

□

## Условие точности 1-формы

$$U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна } \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

*Утверждение.*

$$G = (a,b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных $m$ и $n$ следует, что $F$ – точна

*Доказательство.* Фиксируем $(x_0,y_0) \in G$

Хотим построить $U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти $\varphi$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial m}{\partial y}(s,y)ds + \varphi'(y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial n}{\partial x}(s,y)ds + \varphi'(y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Хотим

$$n(x,y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$$

□

*Примечание.* Это утверждение верно не для любой области $G$, хотя верно, если $G$ – звездчатое множество

## Интегрирующий множитель

**Определение.** $\mu \in C^1, \mu \neq 0$ называется *интегрирующим множителем*, если $\mu F$ – точная форма

**Пример(ы).** Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель – $\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{n(y)})$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x,y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

# Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться $t$ и искать мы будем функции $x(t)$

**Определение.** *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

$n$ и $m_1, \ldots, m_n$ – фиксированные натуральные числа

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f_i(t,x_1, \dot{x}_1, \ldots, \frac{d^{m_1-1}}{dt^{m_1-1}}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$ называется *порядком системы*

## Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, все $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x_1, \ldots ,x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка $m$* $x(t)$ – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t,y_1, \ldots, y_{m-1}) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Если $x$ решение уравнения, то очевидно, что $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \ldots y_m = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$ решения системы и наоборот, если $y_1, y_2, \ldots y_m$ решения системы, то $x = y_1$ решение уравнения.

## Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на $\mathbb{R}^n$ зафиксируем $||x|| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

**Определение.** Для уравнения $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$ ($f \in C(G) G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$) функция $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется *решением*, если

- $\exists \dot{x}$ на $(a,b)$
- $(t,x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t,x(t)), t \in (a,b)$

**Определение.** $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется решением задачи Коши с начальным условием $(t_0,x_0)$, если

- $x$ – решение
- $x(t_0) = x_0$

# Теоремы существования

**Теорема.** *существования (Пеано)*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ *решение задачи Коши*

*Доказательство.* Рассмотрим $(t_0,x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \in G \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} - \text{компакт}$$

$$\exists M : |(t,x)| \leqslant M \ \forall (t,x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказываеть, что существует решение на промежутке $(t_0 - h, t_0 + h)$
*Эквивалентное интегральное уравнение*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

**Определение.** $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение интегрального уравнения*, если

1. $x \in C((a,b))$
2. $(t,x(t)) \in G$
3. $x(t)$ удоавлетворяет интегральному уравнению

**Лемма.** *$x$ – решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \Leftrightarrow x$ – решение задачи Коши с начальным условием $t_0,x_0$*

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок $[t_0,t_0 + h]$ (для $[t_0 - h, t_0]$ все аналогично)

## Ломаные Эйлера

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и разобьем отрезок $[t_0,t_0+h]$ на $N$ равных частей $[t_k,t_{k+1}]$, $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0,x_0)(t - t_0), t \in [t_0,t_1]$$
$$g(t) = g(t_k) + f(t_k,g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Введем $\dot{g}(t)$ (точечка сверху это просто символ, так как $g$ не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k,g(t_k)), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

**Лемма.** $\forall k = 0,1,\dots,n$

1. *$g$ определена на $[t_k, t_{k+1}]$*
2. $|g(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0), t \in [t_0,t_k]$
3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{g}(s)ds$

*Доказательство.* Индукция по $k$

*База:* $k = 1$ Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что $f(t_k,g(t_k))$ определено, для этого достаточно показать, что $(t_k,g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t-t_0| \leqslant \alpha, |g(t_k)-x_0| \leqslant \beta$

   Это верно, так как $|g(t_k)-x_0| \leqslant M|t_k-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$

2. $|g(t)-x_0| \leqslant |g(t)-g(t_k)| + |g(t_k)-x_0| \leqslant |f(t_k,g(t_k))|(t-t_k) + M(t_0-t_0) \leqslant M(t-t_0)$

3. $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot g(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot g(s)ds + \int_{t_k}^t g(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)ds$

$\square$

**Лемма.** *(Арцела-Аскори)*

$$G = \{g_k : I \to \mathbb{R}^n, k \geqslant 0\}$$

**Определение.** $G$ равномерно ограничено, если существует $N: \ |g_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in I$

**Определение.** $G$ рваностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$
$\forall k \geqslant 0 \ \forall t_1, t_2 \in I \ |t_1-t_2| < \delta \to |g_k(t_1)-g_k(t_2)| < \varepsilon$

*Если $G$ - равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда из $G$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность*

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера $g_N, N > 0$ и докажем, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерынва

$$|g_N(t)-x_0| \leqslant M(t-t_0) \leqslant Mh \Rightarrow |g_n(t)| \leqslant |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1)-g_N(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \dot g_N(s)ds\right| \leqslant M|t_1-t_2| \leqslant M\delta$$

В качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность $g_N$ действительно равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к $g$

Для удобства можем считать, что вся последовательность $g_N$ равномерно сходится к $g$

Мы хотим доказать, что $g$ будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства $g$

1. $g_N \rightrightarrows g$ на $[t_0,t_0+h]$, $g$ – непрерывна
2. $(t,g_N(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$
3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$?

$$g_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot g_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g_n(s))ds + \int_{t_0}^t \dot g_N(s) - f(s,g_n(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t,g_n(t)) \in R, f \in C(R)$$
$$\Downarrow$$
$$f(t,g_N(t)) \rightrightarrows f(t,g(t)) \text{ на } [t_0,t_0+h]$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{t_0}^t f(s,g_N(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot g_N(s) - f(s,g_n(s))ds \to 0$$

Так как $R$ – компакт и $f$ непрерывна на нем, то $f$ равномерно непрерывна на $R$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \wedge |g_N(t_1) - g_N(t_2)| < \delta \to |f(t_1,g(t_1)) - f(t_2,g(t_2))| < \varepsilon$$

Если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то $t - t_k < \frac{h}{N} < \delta$ при больших $N$
$\dot{g}_N(t) = f(t_k,g_N(t_k))$, поэтому $|\dot{g}_N(t) - f(t,g_N(t))| = |f(t_k,g_N(t_k)) - f(t,g_N(t))|$
Поэтому, если $N$ достаточно велико

$$\int_{t_k}^{t} |\dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s))| ds \leqslant \varepsilon(t - t_k)$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s)) ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t_1} \right| + \ldots + \left| \int_{t_k}^{t} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(t_1 - t_0) + \ldots + \varepsilon(t - t_k) = \varepsilon(t - t_0) \leqslant \varepsilon h$$

Отсюда получаем, что $\int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s,g_N(s)) ds \to 0$, следовательно $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,g(s)) ds$

Таким образом, мы нашли решение $g$ для исходного уравнения, и доказали теорему.

□

## Напоминание из анализа

**Определение.** $f$ удовлетворяет *условию Липшица* по $x$ в $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ ($f \in \mathrm{Lip}_x(G)$)
Если $\exists L > 0$ такое, что $\forall (t,x), (t,x') \in G$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x - x'|$$

**Определение.** $f$ удовлетворяет *локальномум условию Липшица* по $x$ в $G$, если $\forall (t_0,x_0) in G$ $\exists U$ – окрестность, такая что $f \in \mathrm{Lip}_x(U)$

$$f \in \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ и } \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \forall i,j = 1, \ldots, n$$

**Определение.** *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Определение.** $A$ – матрица, тогда норма $||A|| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$

$$\forall x\ |x| \leqslant ||A|| \cdot |x|$$

**Лемма.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow f \in \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

*Доказательство.* Фиксируем $(t_0,x_0)$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \mid |t-t_0| \leqslant \alpha, |x-x_0| \leqslant \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \ ||\frac{\partial f}{\partial x}|| \text{ в } R$$

Рассмотрим $(t,x),(t,x') \in R,\ g(s) = f(t, sx + (1-s)x')$

$$f(t,x) - f(t,x') = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,sx + (1-s)x')ds$$

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant |\int_0^1| \leqslant \int_0^1 |\ldots| \leqslant \int_0^1 L|x-x'|ds = L|x-x'|$$

□

**Лемма.**

$$f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G), K \text{ – \textit{компакт в} } G$$

$$\Downarrow$$

$$f \in \mathrm{Lip}_x(K)$$

*Доказательство.* Предположим противное:

$$\forall L_n \to \infty\ \exists (t_n,x_n),(t_n,x'_n) \in K :$$

$$|f(t_n,x_n) - f(t_n,x'_n)| > L_n|x_n - x'_n|$$

Так как $K$ – компакт, то из $(t_n,x_n)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_{n_k},x_{n_k}) \to (t_0,x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из $t_{n_k}, x'_{n_k}$, сходящуюся к $(t_0,x'_0)$

Для удобства будем считать, что $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0),\ (t_n,x'_n) \to (t_0,x_0)$

**Случай 1** $x_0 = x'_0$ Так как $f$ – локально-липшицева по $x$, то $\exists U \ni (t_0,x_0)$ и $L$, такие, что

$$(t,x),(t,x') \in U \to |f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x-x'|$$

При достатчно больших $n$ $(t_n,x_n),\ (t_n,x'_n) \in U$ и мы получаем противоречие

Случай 2 $x_0 \neq x'_0$

Рассмотрим $g(t,x,y) = \frac{|f(t,x)-f(t,y)|}{|x-y|}$, $f \in C(G) \Rightarrow g$ непрервывна в окрестности $U$ точки $(t_0,x_0,x'_0)$

$$\Rightarrow \exists L : |g(t,x,y)| \leqslant L \Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|$$

Тогда для достаточно больших $n$ $(t_n,x_n,x'_n) \in U$ и мы снова получаем противоречие.

□

## Лемма Гронуолла

**Лемма.** *(Лемма Гронуолла)*
*Пусть* $\varphi(t) \geqslant 0$ *при* $t \in (a,b)$ *и* $\exists t_0 \in (a,b), \lambda, \mu \geqslant 0$, *такие что*

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right|, \ t \in (a,b)$$

$$\textit{Тогда } \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

*Доказательство.* Разберем случай, когда $t \leqslant t_0$ (случай $t < t_0$ оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right| \geqslant \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu\Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)}\dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)}\Phi \leqslant 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leqslant \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

## Метод приближений Пикара

**Теорема.** *(Теорема Пикара)*

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \ G \textit{ – область существования и единственности}$$

*Доказательство.* **Существование** Зафиксируем $(t_0,x_0) \in G$ Возьмем $\alpha, \beta > 0$, что $R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 : \ |f(t,x)| \leqslant M, \ (t,x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$ – константа Липшица по $x$ в $R$

*Последовательные приближения Пикара* $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds,\ \ k \leqslant 0$$

**Лемма.** $\forall k$ $\varphi_k$ *определены на* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *и их графики лежат в* $R$

*Доказательство.* Идукция по $k$

**База** $\varphi_0 \equiv x_0$ для всех $t$, график очевидно лежит в $R$

**Переход**

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$(s,\varphi_k(s)) \in R \Rightarrow\ \ f \text{ -- определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)ds \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

$\square$

Докажем теперь, что $\varphi_k$ – равномерно сходятся на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Введем $\psi_0(t) = \phi_0(t),\ \ \psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$ при $k \geqslant 0$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частинчые суммы этого ряда равны $\varphi_k(t)$

Поэтому сходимость ряда $\Longleftrightarrow$ сходимость $\varphi_k(t)$

**Лемма.** $k \geqslant 1 \Rightarrow |\psi_k(t)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$

*Доказательство.* Рассмотрим только случай $t \geqslant t_0$

$k = 1$

$$|\psi_1(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))ds \right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_0(s))|ds \leqslant M|t - t_0|$$

$k \to k + 1$

$$|\psi_{k+1}| = |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L|\psi_k(s)|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L\frac{M}{L}\frac{|L(s - t_0)|^k}{k!}ds = \frac{M}{L}\frac{|L(t - t_0)|^{k+1}}{(k + 1)!}$$

$\square$

$$\sum |\psi_k(t)| \leqslant \sum \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}e^{Lh}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \psi_k \text{ – сходистя равномерно на } [t_0-h, t_0+h]$$

$$\varphi_k \rightrightarrows g$$

Проверим, тчо $g$ является решением нашего уравнения, для этого достаточно проверить, что $g$ – решение эквивалентного интегрального уравнения

$$\varphi_k \text{ непрерывна } \Rightarrow g \text{ непрерывна}$$

$$(t,\varphi_k(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$f \text{ равномерно непрерывна на } R \Rightarrow f(s,\varphi_k(s)) \rightrightarrows f(s,g(s)) \text{ на } R$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s,g(s))ds$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = x_0$$

**Единственность** Предположим, что существуют два различных решения $x_1(t), x_2(t)$ задачи Коши с начальным условиям $(t_0,x_0)$

$$(t,x_1(t)), (t,x_2(t)) \in R$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_1(s))ds$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_2(s))ds$$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,x_1(s))ds f(s,x_2(s))|ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds \right|$$

$$|x_1 - x_2| \geqslant 0 \Rightarrow \text{ по лемме Гронуолла } x_1 = x_2$$

□

**Теорема.** *$G$ – область единственности, тогда если существует два решения $x_1, x_2$ на промежутках $(a_1,b_1)$ и $(a_2,b_2)$ соответственно и $\exists\ t_0 \in (a,b) = (a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) :\ x_1(t_0) = x_2(t_0)$*

$$\Downarrow$$

$$x_1 \equiv x_2 \textit{ на } (a,b)$$

*Доказательство.* Докажем, что они совпадают на $[t_0,b)$, остальное аналогично

$$T := \{t' \mid t' \geqslant t_0, x_1|_{[t_0,t']} = x_2|_{[t_0,t']}\}$$

$$T' = \sup T$$

Предположим, что $T' < b$

Тогда по непрерывности $x_1(T') = x_2(T') = x'$

Так как $(T',x') \in G$, а $G$ – область единственности, то $x_1(t) = x_2(t)$ на $[T', T' + \varepsilon)$ $\Rightarrow T' + \varepsilon \in T$, получаем противоречие с тем, что $T'$ – sup $\square$

## Метод сжимающих отображений

$$\dot{x} = f(t,x),\ \ f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

$$(t_0,x_0) \in G,\ \ (t_{,0},x_0) \in R \subset G,\ \ L \text{ – константа Липшица}$$

$$h_0 \leqslant h \text{ такое что } Lh_0 < 1$$

$$X := \{x \text{ – непрерывные функции на } [t_0 - h_0, t_0 + h_0], (t,x(t)) \in R\}$$

$$\text{Метрика на } X\text{: } \rho(x,y) = \max_{t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0]} |x(t) - y(t)|$$

$$(X, \rho) \text{ – полное метрическое пространство}$$

Введем оператор $\mathcal{L} : X \to X$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \psi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

**Корректность** Очевидно, $\psi$ непрерывна, нам нужно только показать, что $(t,\psi(t)) \in R$

$$|\psi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

$$\Downarrow$$

$$(t,\psi(t)) \in R$$

**Сжимаемость**

$$\varphi_1, \varphi_2 \in X$$

$$\rho(\mathcal{L}(\varphi_1),\mathcal{L}(\varphi_2)) = \max_t \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t \int_{t_0}^{t} L|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|ds \leqslant \max_t \left| \int_{t_0}^{t} L\rho(\varphi_1,\varphi_2)ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t |t - t_0| L\rho(\varphi_1,\varphi_2) \leqslant Lh_0\rho(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$Lh_0 < 1$$

По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

Отсюда мы получаем существование и единственность решения для задачи Коши.

# Продолжимость решений

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G),\ G \text{ – область единственности}$$

**Определение.** $x(t)$ – решение на $(a,b)$

Решение $y(t)$ – *продолжение вправо* $x(t)$, если $y$ решение на $(a,b_1),\ b_1 > b$ и $x|_{(a,b)} = y|_{(a,b)}$

**Теорема.** *Теорема о продолжимости вправо* *Решение $x$ на $(a,b)$ продолжимо вправо за $b$* $\iff \exists x' = \lim\limits_{t\to b-0} x(t), (b,x') \in G$

# Предметный указатель


Дифференциальная 1-форма, 8
Дифференциальное уравнение, 3
  1-го порядка, 3
Дифференциальное уравнение порядка $m$, 11
Задача Коши, 3
Интеграл уравнения, 4
Интегральная кривая, 3
Интегральная кривая дифференциальной формы, 8
Интегрирующий множитель, 10
Коэффициент наклона, 4
Лемма Арцела-Аскори, 14
Лемма Гронуолла, 17
Локальное условие Липшица, 15
Матрица Якоби, 15
Метод вариации произвольной переменной, 7
Нормальная система, 11
Область
  единственности, 4
  существования, 4
Однородное линейное уравнени, 7
Поле направлений, 4
Порядок системы, 11
Последовательные приближения Пикара, 17
Продолжение решения, 21
Решение дифференциального уравнения, 3
Решение интегрального уравнения, 13
Система дифференциальных уравнений общего вида, 11
Теорема
  об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка, 5
Теорема Пикара, 17
Теорема о продолжимости вправо, 21
Точка единственности, 3
Точная форма, 9
Уравнение Бернулли, 8
Уравнение Пфаффа, 8
Уравнение Рикатти, 8
Уравнение полных дифференциалов, 9
Условие Липшица, 15
Эквивалентное интегральное уравнение, 13