Личные записи по дифурам$^\beta$

@keba4ok

8 ноября 2021г.

Некоторые материалы пока что с практик в рамках подготовки к ближайшим контрольным.

Содержание

3 семестр.

Изоклины.

Пусть у нас есть уравнение $y' = f(x, y)$, $f \in C(G)$, где G - область $(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$. В каждой точке тогда задаётся направление и $f(x, y) = \text{const} = k$ образуют линии *изоклины*. Графики решения, которые эти линии пересекают называются *интегральными кривыми* и образуют семейство.

Задача. Составить дифференциальное уравнение для окружностей, касающихся прямых $x = 0$ и $y = 0$.

Решение. Общее уравнение окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$. Очевидно, так как центр окружности лежит на одной из биссектрис осей координат, а также они должны их касаться, возможны два варианта:

$$\left[\begin{aligned}&(x-c)^2 + (y-c)^2 = c^2\\&(x-c)^2 + (y+c)^2 = c^2.\end{aligned}\right.$$

Продифференцируем каждое из них:

$$\left[\begin{aligned}&(x-c) + (y-c)y' = 0\\&(x-c) + (y+c)y' = 0.\end{aligned}\right.$$

Из первого уравнения получается, что $c_1 = \frac{x+yy'}{1+y'}$, а из второго - $c_2 = \frac{x+yy'}{1-y'}$. Ничего лучше, чем сказать, что $c = \frac{x+yy'}{1\pm y'}$, я не придумал. Поэтому получится такой результат:

$$\left(x - \frac{x+yy'}{1\pm y'}\right)^2 + \left(y - \frac{x+yy'}{y'\pm 1}\right)^2 = \left(\frac{x+yy'}{1\pm y'}\right)^2$$

Уравнения с разделяющимися переменными.

Если у нас есть уравнение вида $y' = m(x)n(y)$, то они очень хорошо решаются. Для начала нужно найти тривиальные решения вида $y = \text{const}$, а затем - проинтегрировать $\frac{1}{n(y)}$, $m(x)$ и получить решения вида $N(y) - M(x) = C$.

Задача (Phil.56)**.** Преобразуем:

$$y' = (y^2 - y)\cdot\frac{1}{x},$$

и обозначим тривиальные решения: $y = 0$ и $y = 1$. Также обозначим ОДЗ, $x \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}N(y) &= \int\frac{dy}{y^2-y} = \int\frac{dy}{y-1} - \int\frac{dy}{y} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + C\\M(x) &= \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\end{aligned}$$

тогда

$$U = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| - \ln|x| = C,$$

и подставив необходимые значения, поймём, что $C = 0$.

Линейные уравнения.

Уравнения вида $y' = a(x)y + b(x)$. Чтобы его решить, нужно для начала справиться с частным случаем $y' = a(x)y$, и это выполнимо, так как данное уравнение - с разделяющимися переменными. Получаем решение с константой, которая зависит от x, подставим его в изначальное уравнение и разрешим относительно неё. Итоговое опять подставляем и получаем ответ.

Задача (Phil.147)**.**

$$(\sin^2 y + x\cot y)y' = 1.$$

Запишем тогда

$$\sin^2 y + x\cot y = \frac{dx}{dy},$$

и решать будем как линейное относительно x. Для начала - частный случай:

$$x' = x\cot y.$$

$$N(x) = \ln(x) + C$$
$$M(y) = \ln|\sin(y)| + C,$$

тогда

$$U = \ln(x) - \ln|\sin(y)| = C,$$

тогда $x = C\sin y$, подставим это в исходное уравнение и найдём $C(y)$.

$$\sin^2(y) + C\cos(y) = C\cos(y) + C'\sin(y)$$

$$C' = \sin(y),$$

тогда $C(y) = -\cos(y) + d$ и итоговый ответ: $x = (-\cos(y) + d)\sin(y)$.

Задача (Phil.152)**.**

$$(x+1)(y' + y^2) = -y,$$

Преобразуем к

$$y' = \frac{-y}{x+1} - y^2,$$

поделим на y^2, после чего сделаем замену $z = \frac{1}{y}$. Тогда уравнение примет вид

$$z' = -\frac{z}{x+1} - 1.$$

Решаем частный случай:

$$N(z) = \ln(z) + C,$$
$$M(x) = -\ln(x+1) + C,$$

тогда

$$U = \ln(z) + \ln(x+1) = C,$$

$$z = \frac{C}{x+1}.$$

Подставим полученное в исходное:

$$\frac{C'(x+1)-C}{(x+1)^2}=\frac{-C-(x+1)^2}{(x+1)^2},$$

откуда $C=d-\frac{x^2}{2}-x$. Тогда $z=\frac{d-\frac{x^2}{2}-x}{x+1}$, и осталось только подставить обратно y:

$$y=\frac{x+1}{d-\frac{x^2}{2}-x}.$$

Уравнение Бернулли.

Уравнения вида $y'+a(x)y=b(x)y^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$). Делим все члены на y^n, после чего делаем замену $z=y^{1-n}$ $[\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{n-1}\frac{dy}{dx}]$, дифференцируем и приводим к линейному.

Уравнение Риккати.

Это - уравнения вида $y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2$, то есть, условно квадратное дифференциальное уравнение. Решить его просто «в лоб» получается не всегда, для этого нужно найти частное решение (y_1), а затем рассмотрев $y=y_1+u$, найти общее.

$$u'=ru^2+[2ry_1+q]u.$$

Однородные уравнения.

Уравнения вида

$$y'=f(x,y),$$

где f - однородная функция нулевого порядка по отношению к обоим переменным ($f(tx,ty)=f(x,y)$), называются однородными. Согласно решённым задачам и записям на уроке, действенными методом является замена $y=tx$, и последующее сведение к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача (Phil.111)**.**

$$(y+\sqrt{xy})dx=xdy$$

Сделаем замену $y=tx$, тогда получим

$$(tx+\sqrt{tx^2})dx=x(tdx+xdt).$$

Отметим, что очевидными решениями являются $x=0$ и $y=0$, чтобы далее безнаказанно обозначить такую одз и делить на них. Поделив на x, получим

$$(t\pm\sqrt{t})dx=tdx+xdt,$$

тогда $\pm\sqrt{t}dx=xdt$, а теперь поделим на $x\sqrt{t}$ (так как $y=0$ - решение), и получим, что

$$\pm\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{dx}{x},$$

откуда $\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln Cx$. Но семейства $+2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln C_1x$ и $-2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln C_2x$ совпадают, если $C_1=C_2$.

Уравнение в полных дифференциалах.

Уравнения в полных дифференциалах - уравнение вида $m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$, где левая часть является полным дифференциалом какой-то функции двух переменных. Для того, чтобы проверить, так ли это, нужно рассмотреть

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x},$$

и если это равенство выполнено, то уравнение таково. Чтобы далее его решить, нужно обозначить ту самую функцию двух переменных за F, составить систему относительно дифференцирования её по первой и второй переменной, а затем решить её.

Также для «сборки» выражений часто используются следующие полезные формулы:

- $d(xy) = xdy + ydx$,
- $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xdy - ydx}{y^2}$,
- $d(\ln(y)) = \frac{dy}{y}$,
- $d(y^2) = 2ydy$.

Задача (Phil.191)**.** Заметим, что это - уравнение в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Тогда рассмотрим

$$F(x,y) = -\int \sqrt{x^2 - y}dy = \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + C(x),$$

и производная этой штуки по x должна быть равна N:

$$2x\sqrt{x^2 - y} + C'(x) = 2x + 2x\sqrt{x^2 - y},$$

а следовательно, $C(x) = x^2 + d$, и окончательный результат:

$$\frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + x^2 = d.$$

Задача (Phil.199)**.** Заметим, что при $x = 0$ и $y = 0$ получаются тривиальные решения. Преобразуем тогда уравнение к виду

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - \frac{x}{y}dy = 0.$$

Положим $u = \frac{x}{y}$, тогда получится

$$du + \frac{dy}{u} = 0,$$

что можно проинтегрировать и получить

$$u^2 + 2y = C,$$

а при обратной замене это -

$$y^2 + 2x^2y - Cx^2 = 0.$$

Разные определения.

Определение 1. (x_0, y_0) - *точка единственности*, если для любого y_0: $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ существует единственное решение (в рамках окрестности).

Теорема 1. *(Достаточное условие единственности) (x_0, y_0, y'), $F \in C$, $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$.*

Определение 2. $y(x)$ - *особое решение*, если $\forall (x, y(x), y'(x))$ - точка неединственности.

Определение 3. Пусть M - множество точек, описываемое системой

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \end{cases}$$

называется *дискриминантной кривой*. Короче, точки особого решения.

Определение 4. *Огибающая кривая* такова, если в каждой точка она касается решения, но не совпадает с ним.

Уравнения, неразрешимые относительно производной.

Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$. Один из подходящих методов решения - замена $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, $y' = p$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\varphi'_p + \frac{\partial F}{\partial \psi}\psi'_p + \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

а при решении нужно просто разобраться с φ и ψ, выразив их через p.

Решения образца КР1.

Задача (1)**.** Решить уравнение

$$(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0.$$

Решение. Преобразуем к

$$\frac{y^2(x+1)}{x^2(y-1)} = \frac{dy}{dx},$$

это - уравнение с разделяющимися переменными. Для начала обозначим, что $y \neq 1$, $x \neq 0$, а также тривиальное решение - $y = 0$.

$$M(x) = \int \frac{x+1}{x^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C,$$

$$N(y) = \int \frac{y-1}{y^2}dy = \ln|y| + \frac{1}{y} + C.$$

Откуда итоговый ответ - $U = N(x) - M(y) = \text{const}$.

Задача (2)**.** Решить уравнение

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение - в полных дифференциалах, в чём нетрудно убедиться (обе частные производные равны $2x$). Проинтегрируем тогда первое уравнение по x:

$$F = \int x(x+2y)dx = \frac{x^3}{3} + x^2y + \varphi(y).$$

И производная этой вещи по y должна быть равна $(x^2 - y^2)$. Тогда

$$(\frac{x^3}{3} + x^2y + \varphi(y))'_y = x^2 - y^2,$$

а следовательно, $\varphi' = -y^2$, $\varphi = -\frac{y^3}{3} + \text{const}$. Подставляем это в F и получаем итоговый ответ.

Задача (3)**.** Решить уравнение

$$y' - y = xy^2$$

и найти решение задачи Коши $y(0) = 1$.

Решение. Судя по всему, это похоже на уравнение Бернулли. Чтобы решить таковое, поделим всё на y^2 и сделаем замену $z = \frac{1}{y}$.

$$\frac{dz}{dx} - z = -x.$$

Это уже, конечно, линейное уравнение ($z' = z - x$). Его решение (как нетрудно понять) - $z = Ce^x + x + 1$, откуда можно восстановить решение изначального ($\frac{1}{y} = Ce^x + x + 1$). Подставим теперь $(0, 1)$ и получим, что искомая константа - 0.

Задача (4)**.** Решить уравнение

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0,$$

у которго есть интегрирующий множители $\mu(x)$ или $\mu(y)$.

Решение. Не уверен, что мне хочется решать это через интегрирующий множитель, потому что тут и так всё очевидно собирается (если я нигде не ошибся, конечно). Давайте поделим уравнение на x^2 и преобразуем к

$$dx - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Проинтегрируем это и получим решение $x - \frac{y}{x} = C$. Разве что, мы потеряли $x = 0$, не хочется проверять, подходит оно или нет.

Задача (5)**.** Найти особое решение уравнения

$$y = xy' + (y')^2.$$

Решение. Продифференцируем уравнение относительно y' и получим $0 = x + 2y'$, то есть $y' = -\frac{x}{2}$. Подставим это в изначальное уравнение и получим

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

Проверим, будет ли эта вещь особым решением. Для начала, это, как минимум, просто решение. А теперь придётся сделать замену $y' = p$ и решить изначальное уравнение.

$$y = xp + p^2 \Longleftrightarrow dy = d(xp) + d(p^2) \Longleftrightarrow pdx = d(xp) + d(p^2) \Longleftrightarrow 0 = xdp + 2pdp.$$

И получается довольно приличное $0 = (x + 2p)dp$. Проинтегрируем это и получим $xp + p^2 = C$. Теперь надо выразить p, подставить в изначальное уравнение, чтобы исключить из неё этот параметр и получить решение на x и y. А после чего нужно будет проверить, что $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ и $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$ в любой точке x_0.