Геометрия и топология. Факты 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Фоминых Е. А.,
практик, а также других источников)

26 марта 2021 г.

Основные (по моему мнению) определения и факты из топологии (на самом деле, почти всё, что можно).

Содержание

1 Аффинные пространства.

1.1 Начальные определения и свойства.

Определение 1. *Аффинное пространство* - тройка $(X, \vec{X}, +)$, состоящая из непустого множества *точек*, векторного пространства над $\mathbb{R}$ (*присоединённое*) и операцией $+ : X \times \vec{X} \to X$ *откладывания вектора*.

Налагаемые условия - для любых точек $x, y \in X$ существует единственный вектор $v \in \vec{X}$ такой, что $x + v = y$ $(\vec{xy})$, а также ассоциативность откладывания вектора.

Определение 2. *Начало отсчёта* аффинного пространства - произвольная фиксированная точка $o \in X$.

Лемма 1. *Начало отсчёта $o \in X$ задаёт биекцию $\varphi_o : X \to \vec{X}$ по правилу:*

$$\varphi_o(x) = \vec{ox}\ \forall x \in X.$$

Такая биекция называется векторизацией аффинного пространства.

Определение 3. *Линейная комбинация* $\sum t_i p_i$ точек с коэффициентами относительно начала отсчёта $o \in X$ - вектор $v = \sum t_i \vec{op_i}$, или точка $p = o + v$. Комбинация называется *барицентрической*, если сумма коэффициентов равна единице, и *сбалансированной*, если сумма коэффициентов равна нулю.

Теорема 1. *Барицентрическая комбинация точек - точка, не зависящая от начала отсчёта. Сбалансированная комбинация точек - вектор, не зависящий от начала отсчёта.*

1.2 Материальные точки.

Определение 4. Пусть x — некоторая точка аффинного пространства и m — ненулевое число. *Материальной точкой* (x,m) называется пара: точка x с вещественным числом m, причем число m называется *массой* материальной точки (x,m), а точка x — носителем этой материальной точки.

Определение 5. *Центром масс* системы материальных точек (x_i, m_i) называется такая точка z (притом единственная), для которой имеет место равенство

$$m_1 \cdot \vec{zx}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{zx}_n = 0.$$

1.3 Аффинные подпространства и оболочки.

Определение 6. Множество $Y \subset X$ - *аффинное подпространство*, если существуют такие линейное подпространство $V \subset \vec{X}$ и точка $p \in Y$, что $Y = p + V$. V называется*направлением* Y. Определение подпространства не зависит от выбора точки в нём.

Определение 7. *Размерность* $\dim X$ афинного пространства есть размерность его присоединённого векторного пространства.

Определение 8. *Параллельный перенос* на вектор $v \in \vec{X}$ - отображение $T_v : X \to X$, заданное равенством $T_v(x) = x + v$.

Определение 9. Аффинные подпространства одинаковой размерности *параллельны*, если их направления совпадают.

Определение 10. *Прямая* - аффинное подпространство размерности 1, *гиперплоскость* в X - аффинное подпространство размерности $\sim X - 1$.

Утверждение 1. Две различные гиперплоскости не пересекаются тогда и только тогда, когда они параллельны.

Определение 11. *Суммой аффинных подпространств* называется наименьшее аффинное подпространство, их содержащее.

Теорема 2. *Пересечение любого набора аффинных подпространств - либо пустое множество, либо аффинное подпространство.*

Определение 12. *Аффинная оболочка* $\operatorname{Aff} A$ непустого множества $A \subset X$ - пересечение всех аффинных подпространств, содержащих A. Как следствие, это - наименьшее аффинное подпространство, содержащее A.

Теорема 3. $\operatorname{Aff}(A)$ - *множество всех барицентрических комбинаций точек из* A.

Определение 13. Точки $p_1, \ldots, p_k$ *аффинно зависимы*, если существуют такие коэффициенты $t_i \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $\sum t_i = 0$ и $\sum t_i p_i = 0$. Если такой комбинации нет, то точки *аффинно независимы*.

Теорема 4. *(Переформулировки аффинной независимости.) Для* $p_1, \ldots, p_k \in X$ *следующие свойства эквивалентны:*

- *они аффинно независимы;*
- *векторы* $p_1 p_i$, $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, *линейно независимы;*
- $\dim \operatorname{Aff}(p_1, \ldots, p_k) = k - 1$*;*
- *каждая точка из* $\operatorname{Aff}(p_1, \ldots, p_k)$ *единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации* p_i.

1.4 Базисы и отображения.

Определение 14. *Аффинный базис* - набор $n + 1$ точке в X, пространстве размерности n, являющийся аффинно независимым. Или же, это - точке $o \in X$ и базис $e_0, \ldots, e_n$ пространства $\vec{X}$.

Определение 15. Каждая точка однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $\sum_{i=0}^{n} t_i e_i$, а числа t_i называют *барицентрическими координатами* этой точки.

Определение 16. (Говно-определение). Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если отображение $\tilde{F}_p$ линейно для некоторой точки $p \in X$. Отображение $\tilde{F}_p : \vec{X} \to \vec{Y}$ индуцируется из любого отображения $F : X \to Y$ посредством формулы $\forall v \in \vec{X}\ \tilde{F}_p(v) = \overrightarrow{F(p)F(q)}$, где $q = p + v$.

Определение 17. Отображение $\tilde{F}$ называется *линейной частью* аффинного отображения F.

Определение 18. (Нормальное определение.) Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если существует такое линейное $L : \vec{X} \to \vec{Y}$, что для любых $q, p \in X$, $\overrightarrow{F(p)F(q)} = L(\vec{pq})$.

Теорема 5. *Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $L : \vec{X} \to \vec{Y}$ линейно. Тогда существует единственное аффинное отображение $F : X \to Y$ такое, что $\tilde{F} = L$ и $F(x) = y$.*

Лемма 2. *Пусть $p_1, \ldots, p_n$ - аффинно независимые точки в аффинном пространстве X, $q_1, \ldots, q_n$ - точки в аффинном пространстве Y. Тогда существует такое аффинное отображение $F : X \to Y$, что $F(p_i) = q_i\ \forall i$. Кроме того, если $\dim X = n - 1$, то такое отображение единственно.*

Лемма 3. *Аффинное отображение сохраняет барицентрические комбинации.*

Лемма 4. *Композиция аффинных отображений - аффинное отображение. При этом линейная часть композиции - композиция линейных частей.*

Утверждение 2. Образ и прообраз аффинного подпространства - аффинное подпространство. Образы (прообразы) параллельных подпространств параллельны.

Теорема 6. *Параллельный перенос - аффинное отображение, его линейная часть тождественна. Верно также и обратное.*

Определение 19. Аффинное отображение $F : X \to X$ такое, что $\tilde{F} = k\,\mathrm{id}$ для некоторого $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, называется *гомотетией*, а k называют *коэффициентом растяжения* гомотетии F. Такое отображение имеет ровно одну неподвижную точку, называемую центром.

Теорема 7. *(Основная теорема аффинной геометрии.) Пусть X, Y - аффинные пространства, $\dim X \geq 2$. Пусть $F : X \to Y$ - инъективное отображение, и для любой прямой $l \subset X$ её образ $F(l)$ - тоже прямая. Тогда F - аффинное отображение.*

2 Проективные пространства.

2.1 Начальные определения и свойства.

Определение 20. Пусть V - векторное пространство над полем K. На множестве $V \backslash \{0\}$ введём отношение эквивалентности

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in K : x = \lambda y.$$

Тогда фактор V по этому отношению называют *проективным пространством* ($\mathbb{P}(V)$), порождённым векторным V. Само отображение из векторного пространства в соответствующее проективное называют *проективизацией*.

Примечание 1. *Размерность* $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

Теорема 8. *Пусть $Y, Z \subset X$ - подпространства, $\dim Y + \dim Z \geq \dim X$, тогда*

- *$Y \cap Z \neq \emptyset$;*
- *$Y \cap Z$ - подпространство;*
- $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$.

Определение 21. Пусть W - непустое векторное подпространство V. Тогда $\mathbb{P}(W)$ называется *проективным подпространством* $\mathbb{P}(V)$.

Определение 22. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство размерности n. Числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, являющиеся координатами вектора v, порождающего $p \in \mathbb{P}(V)$, называются *однородными координатами*.

Определение 23. $\hat{X} = \mathbb{P}(V)$ - *проективное пополнение* аффинного пространства X, а множество $X_\infty = \mathbb{P}(\vec{X} \times 0) \subset \hat{X}$ - *бесконечно удалённые точки*. Также, множество этих точек есть гиперплоскость в $\hat{X}$, которая называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью*.

Определение 24. Пусть V - векторное пространство, $W \subset V$ - линейная гиперплоскость, X - гиперплоскость ей пареллельная. Тогда биекцию $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \to X$ называют *картой* пространства $\mathbb{P}(V)$.

Определение 25. Пусть на $\mathbb{R}p^1$ (прямая с бесконечно удалённой точкой) выбрана аффинная система координат, в которой $A = a$, $B = b$, $C = c$ и $D = d$. Определим *двойное отношение* четвёрки точек (A, B, C, D) формулой

$$[A, B, C, D] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-c}{b-d}.$$

Утверждение 3. Данное определение инвариантно относительно выбора карты, а само отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

2.2 Проективные отображения.

Лемма 5. *Пусть V, W - векторные пространства и $L : V \to W$ - инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное отображение $F : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ такое, что*

$$P_W \circ L = F \circ P_V,$$

где P_V, P_W - проекции из $V \setminus \{0\}$ и $W \setminus \{0\}$ в $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(W)$ соответственно.

Определение 26. Отображение F из леммы выше называется *проективизацией* L, и обозначается как $F = \mathbb{P}(L)$.

Определение 27. Отображение из $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ - *проективное*, если оно является проективизацией некоторого линейного $L : V \to W$.

Утверждение 4. Проективное отображение переводит проективные подпространства (в том числе, всё пространство) в проективные пространства той же размерности.

Теорема 9. *Пусть X, Y - аффинные пространства, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ - их проектиыне пополнения, $F : X \to Y$ - инъективное аффинное отображение. Тогда существует единственное проективное отображение $\hat{F} : \hat{X} \to \hat{Y} : \hat{F}|_X = F$. Причём оно переводит бескоречно удалённые в бесконечно удалённые.*

Определение 28. Пусть $H_1, H_2 \subset X$ - гиперплоскости (X - проективное), $p \in X \setminus (H_1 \cup H_2)$. *Центральная проекция* H_1 и H_2 с центром p - проективное отображение $F : H_1 \to H_2$, определяемое так: пусть $x \in H_1$, тогда $F(x)$ - точка пересечения прямой (px) и гиперплоскости H_2.

Определение 29. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство, размерности n. *Проективный базис* X - набор из $n+2$ точек, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной проективной гиперплоскости.

Лемма 6. *Можно выбрать такие векторы* $v_1, \ldots, v_{n+2} \in V \backslash \{0\}$, *порождающие проективный базис* $p_1, \ldots, p_{n+2}$, *что* $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$.

Теорема 10. *Пусть* X, Y *- проективные пространства, размерностей* n, $p_1, \ldots, p_{n+2} \in X$ *и* $q_1, \ldots, q_{n+2} \in Y$ *- проективные базисы. Тогда существует единственное проективное отображение* $F : X \to Y$ *такое, что* $F(p_i) = q_i$ *для всех* i.

Примечание 2. Проективное преобразование прямой с бесконечно удалёнными точками имеет вид

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy],$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$. Для $\hat{\mathbb{R}}$ это - дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

2.3 Проективные и аффинные теоремы.

Теорема 11. *(Теорема Паппа (аффинная)). Пусть* X *- аффинная плоскость,* l, l' *- рразличные прямые в* X. $x, y, z \in l$, $x', y', z' \in l'$ *- различные точки, отличные от* $l \cap l'$. *Тогда из* $(xy')||(x'y)$, $(yz')||(y'z)$ *следует, что* $(xz')||(x'z)$.

Теорема 12. *(Теорема Паппа (проективная)). Пусть* $\mathbb{P}(E)$ *- проективная плоскость,* l, l' *- различные прямые в* $\mathbb{P}(E)$, $a, b, c \in l$, $a', b', c' \in l'$ *- различные точки, отличные от* $l \cap l'$. *Тогда три точки -* $\gamma = (ab') \cap (a'b)$, $\alpha = (bc') \cap (b'c)$ *и* $\beta = (ac') \cap (a'c)$ *лежат на одной прямой.*

Определение 30. *Треугольник* - тройка точек (*вершин*), не лежащих на одной прямой. *Стороны* треугольника - прямые, содержащие пары вершин.

Теорема 13. *(Теорема Дезарга (аффинная)). Пусть* $\triangle abc$ *и* $\triangle a'b'c'$ *- треугольники на аффинной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые* (aa'), (bb') *и* (cc') *пересекаются в одной точке или параллельны, и* $(ab)||(a'b')$, $(bc)||(b'c')$, *то* $(ac)||(a'c')$.

Теорема 14. *(Теорема Дезарга (проективная)). Пусть* $\triangle abc$ *и* $\triangle a'b'c'$ *- треугольники на проективной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые* (aa'), (bb') *и* (cc') *пересекаются в одной точке, то три точки* $\gamma = (ab) \cap (a'b')$, $\alpha = (bc) \cap (b'c')$ *и* $\beta = (ac) \cap (a'c')$ *лежат на одной прямой.*

3 Евклидовы пространства.

3.1 Начальные определения и свойства.

Определение 31. *Скалярное произведение* на векторном пространстве X - функция

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая условиям симметричности, линейности по каждому аргументу и неотрицательности $\langle x, x \rangle$ (равно нулю только при $x = 0$).

Евклидово протранство - векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

Определение 32. *Длина* (норма) вектора $x \in X$ - $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, *расстояние* между $x, y \in X$ - $d(x, y) = |x - y|$.

Теорема 15. *(Неравенство КБШ). Для любых $x, y \in X$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

Причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

Следствие 1. Для любых $x, y \in X$ $|x + y| \leq |x| + |y|$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда один из векторов равен нулю или они сонаправленны.

Следствие 2. Для любых $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы $x - y$ и $y - z$ сонаправлены или один из них равен нулю.

Определение 33. Пусть X - евклидово пространство. *Угол* между ненулевыми векторами x и y - это $\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.

Теорема 16. *(Теорема косинусов).*

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos\angle(x, y).$$

Теорема 17. *(Неравенство треугольника для углов). Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,*

$$\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z).$$

Следствие 3. Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,

$$\angle(x, y) + \angle(y, z) + \angle(z, x) \leq 2\pi.$$

3.2 Ортогональность.

Определение 34. Векторы $x, y \in X$ *ортогональны*, если $\langle x, y\rangle = 0$. Обозначается как $x \perp y$.

Теорема 18. *(Теорема Пифагора). Если $x \perp y$, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Следствие 4. Если векторы $v_1, \dots, v_n$ попарно ортогональны, то

$$|v_1 + \ldots + v_n|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2.$$

Определение 35. *Ортонормированный* набор векторов - такой, в котором каждые два вектора ортогональны и все имеют длину 1.

Теорема 19. *Пусть $v_1, \dots, v_n$ - ортонормированный набор, $x = \sum \alpha_i v_i$, $y = \sum \beta_i v_i$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R})$. Тогда $\langle x, y\rangle = \sum \alpha_i\beta_i$, а $|x|^2 = \sum a_i^2$.*

Теорема 20. *Любой ортонормированный набор линейно независим.*

Теорема 21. *(Об ортогонализации по Граму-Шмидту). Для любого линейно-независимого набора векторов $v_1, \dots, v_n$ существует единственный ортонормированный набор $e_1, \dots, e_n$ такой, что для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ $\mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$ и $\langle v_k, e_k\rangle > 0$.*

Следствие 5. Пусть X - конечномерное евклидово пространство. Тогда в X существует ортонормаированный базис, и любой ортонормаированный набор можно дополнить до ортономированного базиса.

3.3 Изоморфизмы.

Определение 36. Евклидовы пространства X и Y *изоморфны*, если существует линейная биекция $f : X \to Y$, сохраняющая скалярное произведение:

$$\langle f(v), f(w)\rangle_Y = \langle v, w\rangle_X$$

для любых $v, w \in X$. Такое f называется *изоморфизмом* (евклидовых пространств).

Теорема 22. *Пусть X, Y - конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности. Тогда X и Y изоморфны.*

Следствие 6. Любое евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.

3.4 Продолжение ортогональности.

Определение 37. Пусть X - евклидово пространство, A - его подмножество. *Ортогональное дополнение* множества A это -

$$A^{\perp} = \{x \in X : \forall v \in A\ \langle x, v\rangle = 0\}.$$

Утверждение 5. Ортогональное дополнение - линейное пространсто. Если $A \subset B$, то $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Наконец, $A^{\perp} = \mathrm{Lin}(A)^{\perp}$.

Теорема 23. *Пусть X - конечномерное евклидово пространство, $V \subset X$ - линейное подпространство. Тогда $X = V \oplus V^{\perp}$, и $(V^{\perp})^{\perp} = V$.*

Определение 38. *Ортогональная проекция* x на V ($\mathrm{Pr}_V(x)$) - такой вектор $y \in V$, что $x - y \in V^{\perp}$.

Определение 39. *Нормаль* линейной гиперплоскости H - любой ненулевой вектор $v \in H^{\perp}$.

Теорема 24. *(Конечномерная теорема Рисса). Пусть X - конечномерное евклидово пространство, $L : X \to \mathbb{R}$ - линейное отображение. Тогда существует единственный вектор $v \in X$ такой, что $L(x) = \langle v, x\rangle$ для всех $x \in X$.*

Теорема 25. *Любая линейная гиперплоскость имеет вид $\ker L$, где $L : X \to \mathbb{R}$ - линейное отображение, $L \neq 0$. Также, L определена однозначно с точностью домножения на константу.*

Теорема 26. *(Расстояние до гиперплоскости). Пусть $x = v^{\perp}$. Тогда расстояние от x до H равно*

$$d(x, H) = \frac{|\langle v, x\rangle|}{|v|},$$

или в координатах, где $a_1, \ldots, a_n$ - координаты v,

$$d(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Определение 40. *Изометрическое отображение* X в Y (евклидовы пространства) - линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение. *Ортогональное преобразование* пространства X - изометрическое отображение из X в себя.

Определение 41. *Ортогональная группа* порядка n - группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$. Обозначается как $O(n)$.

Утверждение 6. Линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно сохраняет длины векторов. Или же, линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно переводит какой-нибудь ортонормаированный базис в ортонормированный набор.

3.5 Немного о матрицах отображений.

Теорема 27. *Пусть $f : X \to Y$ линейно, A - его матрица в ортономированных базисах X и Y. Тогда f изометрическое тогда и только тогда, когда $A^T A = E$.*

Следствие 7. При совпадении размерностей, это равносильно тому, что $AA^T = E$ или $A^T = A^{-1}$.

Определение 42. *Ортогональная матрица* - квадратная матрица A, для которой $A^T A = AA^T = E$.

Теорема 28. *Если A - ортонормаированная матрица, то $\det A = \pm 1$.*

Определение 43. *Специальная ортогональная группа* $SO(n)$ - группа ортогональных преобразований с определителем 1.

3.6 Много какой-то хуйни.

Определение 44. *Инвариантное подпространство* линейного отображения $f : X \to X$ - линейное подпространство $Y \subset X$ такое, что $f(Y) \subset Y$.

Утверждение 7. Если V - инварантное подпространство ортогонального преобразования, то $V^\perp$ - тоже инвариантное.

Теорема 29. *Пусть $f : X \to X$ - ортогональное преобразование. Тогда существует разложение X в ортогональную прямую сумму*

$$X = X_+ \oplus X_- \oplus \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_m \ \ (m \geq 0)$$

инвариантных подпространств таких, что $f|_{X_+} = \mathrm{id}$, $f|_{X_-} = -\mathrm{id}$, а $\dim \Pi_i = 2$, $f|_{\Pi_i}$ - поворот.

Определение 45. Два базиса *одинаково ориентированы*, если матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

Примечание 3. Одинаковая ориентированность базисов - отношение эквивалентности. Классов эквивалентности ровно два (кроме случая нулевой размерности).

Определение 46. *Ориентированное векторное пространство* - векторное пространство, в котором выделен один их двух классов одинаково ориентированных базисов. Выделенные базисы - *положительно ориентированные* (положительные), остальные - *отрицательно ориентированные* (отрицательные).

Определение 47. Пусть X - ориентированное евклидово пространство размерности n, $v_1, \ldots, v_n \in X$. *Смешанное произведение* $v_1, \ldots, v_n$ - определитель матрицы из координат v_i в произвольном положительном ортонормированном базисе. Обозначается как $[v_1, \ldots, v_n]$.

Теорема 30. *Определение корректно, то есть, не зависит от выбора базиса.*

Определение 48. Пусть X - трёхмерное ориентированное евклидово пространство, $u, v \in X$. Их *векторное произведение* - такой (единственный по лемме Рисса) вектор $h \in X$, что $\langle h, x\rangle = [u, v, x]$ для любого $x \in X$. Обозначается как $h = u \times v$.

Теорема 31. *Пусть u, v линейно независимы. Тогда*

- *$u \times v$ - вектор, ортогональный u и v;*
- *$u, v, u \times v$ - положительный базис;*
- *$|u \times v|$ равно площади параллелограмма, образованного векторами u и v.*

Теорема 32. *Пусть e_1, e_2, e_3 - положительный ортонормированный базис, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x2y_1)e_3,$$

или в псевдо-матричной записи:

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

3.7 Движения евклидова аффинного пространства.

Определение 49. *Евклидово аффинное пространство* - аффинное пространство X с заданным на $\vec{X}$ скалярным произведением. *Расстояние* в таком пространстве: $d(x, y) = |x - y|$.

Определение 50. *Движение* евклидова аффинного пространства X - биекция из X в X, сохраняющая расстояния. Группа движений обозначается как $\mathrm{Iso}(X)$.

Теорема 33. *Любое движение - аффинное преобразование, линейная часть которого - ортогональное преобразование, и обратно.*

Лемма 7. *Пусть X - аффинное пространство, $F : X \to X$ - аффинное отображение, и его линейная часть не имеет неподвижных ненулевых векторов, то есть, $\vec{F}(v) \neq v$ для всех $v \in \vec{X} \setminus \{0\}$. Тогда F имеет неподвижную точку.*

Следствие 8. Если линейная часть движения плоскости - поворот на ненулевой угол, то и само движение - поворот на этот угол относительно некоторой точки.

Следствие 9. Композиция поворотов - поворот или параллельный перенос.

4 Указатель.

Он самый.