

# Матанализ. Конспект 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Белова Ю. С.,  
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по матанализу.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Лекция 3.</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Лекция 4.</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Лекция 5.</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Лекция 6.</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Лекция 7.</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Лекция 8.</b>	<b>14</b>
<b>9</b>	<b>Лекция 9.</b>	<b>15</b>
<b>10</b>	<b>Лекция 10.</b>	<b>17</b>
<b>11</b>	<b>Основные теоретические факты для контрольных.</b>	<b>20</b>
	11.1 Интегралы. . . . .	20
	11.2 Кривые. . . . .	21
	11.3 Многомерный анализ. . . . .	21

## 1 Лекция 1.

В этом семестре мы будем заниматься анализом функций от многих переменных, то есть,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , и если  $m = 1$ , то такая функция называется функцией многих переменных.

**Определение 1.** Кривые в  $\mathbb{R}^n$  - непрерывное отображение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Основная проблема состоит в том, что образ может выглядеть очень и очень сложно, потому нам хотелось бы более точно понять, как всё это устроено. Потому начнём рассматривать *спрямляемые кривые*, то есть, кривые с конечной длиной. Введём следующее определение:

**Определение 2.** Вариация функции -  $V_f([a, b]) = \sup_{a=x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ .

$(x - y)$  - евклидово расстояние.

*Утверждение 1.* Если  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна, то  $V_f([a, b]) = |f(a) - f(b)|$ .

*Утверждение 2.*  $V_f([a, b]) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}$ .

*Утверждение 3.*  $V_{f+g} \leq V_f + V_g$ .

*Утверждение 4.*  $V_f$  аддитивна на промежутке:  $a \leq b \leq c$ , тогда  $V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$ .

**Определение 3.** Вариация ограничена, если  $V_f < \infty$  на  $[a, b]$ .

**Лемма 1.**

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1$  и  $f_2$  монотонны, тогда  $f_1 - f_2$  имеют ограниченную вариацию.
- $f$  имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда  $f = f_1 - f_2$  на отрезке  $[a, b]$ , причём эти две функции монотонно возрастают.

*Доказательство.* Пусть у нас есть  $f$ , а также  $V_f([a, b]) < \infty$ . Рассмотрим  $\varphi(x) = V_f([a, x])$ .  $\varphi$  определена корректно, причём возрастает.  $f = \varphi - (\varphi - f)$ , скажем, что  $(\varphi - f) = h$ , тогда  $h(x) \leq h(y)$  при  $x \leq y$ . Но это нетрудно показать,  $\varphi(x) - f(x) \leq \varphi(y) - f(y)$  равносильно  $f(y) - f(x) \leq \varphi(y - \varphi(x)) = V_f([x, y])$ .  $\square$

По сути, если понимать определение вариации геометрически, то это просто длина кривой на отрезке. Перейдём теперь к способам обхода кривой.

**Лемма 2.** Пусть  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  - непрерывная биекция (тогда и монотонная). Тогда  $V_f[c, d] = V_{f \circ g}([a, b])$ .

*Доказательство.* Левая и правая части равны соответственно  $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$  и  $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(g(y_{k+1})) - f(g(y_k))|$ . Это, очевидно, одно и то же.  $\square$

Теперь стоит задаться вопросом: а когда же это  $V_f$  (или же, длину кривой) можно посчитать. Если  $f$  - гладкая функция (гладкая по координатам  $f_k$ ).  $f := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$V_f([a, b]) = \int_a^b \sqrt{(f'_1)^2(x) + \dots + (f'_n)^2(x)} dx.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sup_{a=x_0, \dots, x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^2 + \dots + (f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k))^2} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{f_1'^2(\xi_{1,k}) + \dots + f_n'^2(\xi_{n,k})} \end{aligned}$$

Если  $f_i$  непрерывна, то  $f_i^2$  равномерно непрерывна.  $f_i'^2(\xi_{i,k}) \leq \min_{[x_k, x_{k+1}]} f_i'^2 + \varepsilon^2$  (для достаточно мелких разбиений и любого эpsilon, большего нуля). Тогда можно получить верхнюю оценку:  $\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{l=1}^n \min_{[x_k]} (f_l'^2) + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)} \leq \int_a^b \sqrt{\dots} + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)$  (устремляем разбиение к бесконечно малому). А затем делаем аналогично снизу и получаем требуемое равенство.

## 2 Лекция 2.

Пусть  $\varphi$  - функция, которая определялась на прошлой лекции, а  $\psi$  - обратная ей.  $\psi$  - биекция, рассматриваем  $f \circ \psi$ . Посмотрим на  $\psi([0, \beta]) = [a, b]$ , тогда для любых  $c, d \in [0, b]$   $V_{f \circ \psi}([c, d]) = d - c$ .

Естественная параметризация гладкого пути практически не отличается от того, что мы уже рассматривали за одним небольшим исключением.

$$\varphi(x) = V_f([a, x]) = \int_a^x |f'(s)| ds = \int_a^x \sqrt{f_1'^2 + \dots + f_n'^2} ds,$$

причём предпоследнее вырежение равно  $|(f_1', \dots, f_n')|$ , а под корнем все функции от  $s$ . Рассмотрим опять  $\psi$ , и как выглядит вектор  $f(\psi(x)) = (f_1(\psi(x)), \dots, f_n(\psi(x)))$ , рассмотрим его производную, берём по координатам:  $f'(\psi(x)) = (f_1'(\psi(x)), \dots, f_n'(\psi(x)))$ . Но  $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}$ , тогда  $\varphi(s) = |f'(s)|$ , а также  $|f'(\psi(x))| = 1$ .

*Примечание 1.* Если  $f$  - гладкая на  $[a, b]$  и существует  $\int_a^b |f'(s)| ds$ , тогда выполнено то же самое, просто  $\varphi(x) = \int_a^x |f'(s)| ds$ .

Перейдём теперь к тригонометрии. Рассмотрим окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , мы планируем её обходить (то есть, через каждую точку по разу, с одинаковой скоростью, и так далее). Введём попутно также комплексное обозначение (мы не будем заниматься комплексным анализом, просто это удобно). отождествим  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$  понятно каким образом. Тогда какое вращение мы хотим? Мы хотим найти функцию  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{z : |z| = 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$ , а хотим потребовать также следующее:

- $\Gamma \in C^1$  (гладкая),
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$  (место старта и начальная скорость, с которой мы идём),
- $|\Gamma'(t)| = 1$  для любого  $t$  (постоянная скорость 1).

Сформулируем теорему:

**Теорема 1.** *Функция с данными свойствами существует и единственна.*

*Доказательство.*  $\Gamma(t) \in \mathbb{T}$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$ . Продифференцируем последнее, получим

$$\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0,$$

что также равно

$$2 \operatorname{Re}(\overline{\Gamma'(t)}\Gamma(t)) = 0.$$

То есть, мы получили, что  $\Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = ih(t)$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}$ . Применим теперь оставшееся неиспользованное условие:  $|\Gamma(t)| = 1$ , а чтобы параметризация была естественна,  $|\Gamma'(t)|$  должно быть равно 1. То есть,  $h(t) = \pm 1$ . Подставим теперь нуль и получим, что функция в этой точке должна быть равна единице, а производная -  $i$ . Тогда остаётся один вариант:  $h(t) \equiv 1$ .

Посмотрим теперь ещё раз на начальное уравнение:  $\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ , то есть,

$$\Gamma'(t) = i\Gamma(t). \quad (1)$$

Таким образом, мы уже пришли к тому, что если вращение существует, то оно должно удовлетворять последнему уравнению, а также  $\Gamma(0) = 1$ . Это означает, что вращение, которое мы получаем, будет дифференцируемо бесконечно много раз.

Пока что, казалось бы, ни единственности, ни существования, однако из последних утверждений легко получается единственность. Пусть у нас есть  $\Gamma_{1,2}$  - два простых вращения. Дначит, они оба удовлетворяют (1). Тогда давайте запишем их частное через сопряжённые и возьмём производную:  $\left(\Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2(t)}\right)' = \Gamma_1'(t)\overline{\Gamma_2(t)} + \Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2'(t)}$ , что равно  $i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1 i\overline{\Gamma_2} = 0$ .

Таким образом, мы получили, что  $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = \text{const}$ , но поскольку  $\Gamma(0) = 1$ , то эта константа и равна единице. То есть,  $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1$ , следовательно, эти функции равны, единственность доказана.

Докажем теперь существование. Предъявим сначала произвольную параметризацию окружности, а затем постараемся сделать в ней замену переменной, чтобы получить хорошую функцию (которая должна быть, конечно, гладкой). Давайте параметризуем верхнюю половину  $\mathbb{T}$  самым естественным образом: примем  $x = t$ ,  $y = \sqrt{1-t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  (двигаемся по часовой стрелке). Теперь нам нужно отпараметризовать нижнюю половину, возьмём для этого  $x = -t$ ,  $y = -\sqrt{1-t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , двигаться мы теперь будем по нижней половине, но в другом направлении, то есть, одну из половин нужно перевернуть и "склеить" в один целостный проход. Тогда в нижней половине "сдвинем" рассмотрение на  $1 \leq t \leq 3$ , и преобразуем:  $y = -\sqrt{1-(2-t)^2}$ .

Осталось проверить, что полученная функция гладкая. Вообще, это почти очевидно, кроме  $\pm 1$ , это и проверим.  $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ , а вектор  $f'(t) = (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})$ . Функция  $\varphi(x)$  на  $(-1, 1)$  выглядит как

$$\int_{-1}^x |f'(s)| ds = \int_{-1}^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Функция  $\varphi(x)$  - возрастающая биекция, значит, мы можем посмотреть на обратную функцию  $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ . Рассмотрим теперь для  $x \in (-1, 1)$ ,

$$(f^{-1}(\psi(x)))' = (f_1'(\psi(x))\psi'(x), f_2'(\psi(x))\psi'(x)).$$

Тогда, так как  $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$ , это также и равно  $\sqrt{1-\psi^2(x)}$ , что также равно

$$(\psi'(x), \frac{-\psi(x)}{\sqrt{1-\psi^2(x)}} \sqrt{1-\psi^2(x)}).$$

В последнем также можно сократить числитель и знаменатель. Итого,  $f(\psi(x))$  - гладкая на  $(-1, 1)$ , и более того, если  $x \rightarrow \pm 1$ , производная имеет конечный предел. Получается, дифференцируема на интервале, и производная имеет предел в крайних точках, тогда она в них также дифференцируема. Таким образом, для верхней половины мы всё показали, для нижней - аналогично, всего лишь с линейной заменой.  $\square$

После доказательства теоремы, можно, наконец, ввести определения:

**Определение 4.**

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\Gamma(x)),$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(\Gamma(x)).$$

Далее уже можно поговорить о бесконечной дифференцируемости и формуле Муавра, этим, вместе с доказательством, что мы нашли привычные функции, мы, кажется, и планируем заниматься далее.

### 3 Лекция 3.

Для начала, закончим с тригонометрией. Мы научились строить синус и косинус через вращение окружности. Немного не помню, обговаривали ли мы это на прошлой лекции, но Юрий Сергеевич кратко цпомянул, что мы можем разложить  $\Gamma(x)$  в ряд Тэйлора в  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$  в силу свойства  $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)$  и того, что остаточный член в форме Лагранжа будет стремиться к нулю при стремлении  $n$  к бесконечности.

Тогда

$$\cos x = \operatorname{Re} \Gamma(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

и аналогично синус по нечётным степеням.

Мнимая экспонента обладает свойствами, аналогичным обыкновенной экспоненте, поэтому покажем, что  $\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ . Рассмотрим  $\Gamma(x+y)\overline{\Gamma(y)}$  - функцию от  $x$ , а  $y$  - параметр. Это - некоторый обход окружности, который также удовлетворяет всем нормировочным условиям.  $\varphi(0) = 1$ ,  $|\varphi'(x)| = 1$ , и, наконец,  $\varphi'(0) = \Gamma'(0) = i$ .

Теперь все прекрасные формулы косинуса и синуса суммы и разностей легко выводятся из доказанной формулы. Через мнимую экспоненту запишем:  $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ , а там уже просто надо посмотреть на мнимые и действительные части.

Из полученных свойств получим, что  $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \Gamma(0) = 1$ , тогда  $\Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)}$ , откуда мы получаем чётность косинуса и нечётность синуса.

Можно упомянуть и формулу муавра. Распишем

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

это формулы Муавра. Также можно получить и периодичность, это, вообще-то очевидно и завершает наш разговор об элементарных функциях.

Перейдём теперь к многомерному анализу. Мы бы хотели точно также уметь анализировать функции и делать всё то, что мы уже умеем делать для одномерных функций, в том числе, решать экстремальные задачи. Нас интересуют функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Начнём с того, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$  расстояние задаётся как

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2} = \|x - y\|.$$

И если у нас имеется точка  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , то её норма есть  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ . Вообще, норму можно задать как угодно, если она удовлетворяет таким свойствам:

- норма - функция  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ ,
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv (0, \dots, 0)$ ,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Разберёмся с понятием *гладкости*. Для начала, алгебраически. Пусть у нас есть функция нескольких переменных  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_m)$ .

**Определение 5.**  $f$  дифференцируема в точке  $(x_1, \dots, x_m)$ , если  $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|x - y\|)$ , где  $L$  - линейное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , причём однородное, то есть,  $L(0) = 0$ .

**Определение 6.** Это линейное отображение  $L$  называется *дифференциалом* в точке  $x$ .

На топологии мы доказывали, что в конечномерном пространстве различные норма липшицево-эквивалентны, потому мы просто во всех рассуждениях будем использовать именно евклидовы нормы, потому что они удобные. А теперь перейдём к базовым свойствам.

*Примечание 2.*  $L$  - единственно.

*Примечание 3.* Если у нас есть две функции:  $f$  и  $g$ , то дифференциал  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  есть  $\alpha L_1 + \beta L_2$ , где  $L_1$  и  $L_2$  - дифференциалы  $f$  и  $g$ .

Рассмотрим теперь отображение общего вида:  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда

**Определение 7.** (Гладкость).  $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|y - x\|)$ , где  $L$  - линейное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L(x + y) = L(x) + L(y)$ .  $o$ -малое в данном случае можно понять как

$$\frac{f(y) - f(x) - L(y - x)}{\|y - x\|} \rightarrow 0,$$

то есть, элемент  $\mathbb{R}^n$  стремится к нулю, но для удобства можно взять евклидову норму этого выражения.

Какой вид имеет общее линейное отображение из  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ? Естественно, это - матрица, это мы знаем из алгебры и умеем расписывать переход в тривиальном базисе.

Перейдём к свойствам линейных отображений. Мы умеем их складывать, умножать, а также, совершать композиции в случае согласованности размерностей, которая соответствует перемножению матриц.

Пусть теперь, опять же, у нас есть отображение  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то  $L(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$  - подпространство, которое имеет размерность от 0 до  $n$ , эту размерность мы понимаем как *ранг* линейного отображения. Если же мы берём композицию линейных отображений, то ранг не может вырасти (куда растягивать-то). Также, легко видеть, что если  $m < n$ , то  $\dim(L(\mathbb{R}^m)) \leq m < n$ .

Зададимся теперь вопросом, какая существует естественная метрика на линейных отображениях  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . По сути, эти линейные отображения представляют собой евклидово пространство размерности  $m \cdot n$ . Задать на нём мы можем евклидову метрику: под корнем будут квадраты всех матричных элементов. Эта норма вычисляется проще, но зато гораздо менее естественна, чем следующая (например, относительно вопроса о композиции).  $\|L\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $Lx \in \mathbb{R}^n$ . Эта вещь конечна, так как она не превосходит  $\sum_{k=1}^m \|Le_k\|$ , а также выполняются все свойства нормы.

Геометрический смысл у данной нормы очень простой: мы смотрим, насколько сильно она растягивает расстояние в зависимости от направления.

Завершаем лекцию несколькими переопределениями нормы:

- $\sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$ ,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$ ,
- $\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$ ,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$ .

## 4 Лекция 4.

Продолжаем с операторами, пусть  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  - линейный,  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$  - норма, где  $\|x\|$  - Евклидово.  $A \cong \mathbb{R}^{nm}$ , так как можно выносить константу, не меньше нуля (притом равна тогда и только тогда, когда сам оператор - нуль), а также, норма суммы не превосходит сумму норм.

**Определение 8.**  $\|A\|$  - операторная норма, притом супремум всегда достигается.

Операторная норма есть самое большое по модулю собственное число. Предположим, что у  $A$  есть  $n$  различных  $\lambda_i$  собственных чисел, у которых есть соответственные  $x^i$  собственные векторы. Запишем тогда  $x = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ ,  $Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k x^k$ , тогда  $\|Ax\| \leq \max_k |\lambda_k| \cdot \|x\|$ , но это мы объяснить не смогли.

Однако разговор сейчас шёл о различных собственных числах, бывают же *кратные* собственные числа. Что происходит?

Важный момент, почему важна операторная норма. Пусть  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ , тогда  $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ , так как левая часть по определению равна  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|BAx\| \leq \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|By\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ . Заметим также две следующие вещи для линейного  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  равносильны:

- $\ker A = \{0\}$
- $\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\|$ ,  $\exists \varepsilon > 0$ .

*Доказательство.*  $\{x : \|x\| = 1\}$  - единичная сфера в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $f(x) : x \rightarrow \|Ax\|$ ,  $f$  - непрерывная (?),  $f \neq 0$  на единичной сфере, тогда  $f \geq \varepsilon > 0$ ,  $\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\|$ ,  $\|x\| = 1$ .  $\square$

Вообще, нам все эти операторы нужны для рассуждений о гладкости, сформулируем теорему:



**Теорема 2.**  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  - открытое,  $f$  - гладкая в окрестности  $x^0$  (верхние индексы),  $y^0 = f(x^0)$ ,  $g : V_{f(x^0)} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , гладкая в  $f(x^0)$ , для  $f$  и  $g$  существуют линейные операторы  $A(x_0)$  и  $B(f(x_0))$ . Тогда  $g(f(x))$  - гладкое отображение в  $x_0$  с линейным оператором  $BA : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

*Доказательство.* Мы знаем, что существует представление  $f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$ . Применим  $g$ , получим

$$g(f(x)) = g(y^0 + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)). \quad (2)$$

Также мы знаем, что  $g$  гладкая, то есть, также представима в виде  $g(y) = g(y^0) + B(y - y^0) + o(\|y - y^0\|)$ , тогда приняв аргумент правой части (1) за  $y$ , получим продолжение тождества:

$$g(y^0) + B(A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)) + o(A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)) = g(y^0) + BA(x - x^0) + o(\|x - x^0\|). \quad (3)$$

□

Нам много чего хочется от анализа многих переменных, но тут всё, конечно, гораздо сложнее. Перейдём к *частным производным*.

*Примечание 4.*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  - гладкая в  $x^0$  тогда и только тогда, когда при записи  $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$   $f_k$  - гладкая  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  для всех  $k$  (можно написать доказательство).

**Определение 9.** *Частная производная.* Пусть имеется  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Тогда частная производная по  $x_k$ ,  $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) = g(x)$ ,  $g'(x_k^0)$ .

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x^0} := g'(x_k^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_k^0 + \varepsilon, \dots) - f(\dots)}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь *производную по направлению*. Пусть направление задаётся  $e \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|e\| = 1$ ,  $f$  - дифференцируема по направлению  $e$ , если  $g(t) = f(x^0 + te)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  и существует  $g'(0)$ , то производная по направлению  $e$  -  $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t}$ .

## 5 Лекция 5.

Введём несколько дополнительных терминологий. Пусть у нас есть отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ , тогда *матрица Якоби* выглядит как

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

**Теорема 3.** Пусть у нас есть отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $V_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причём существуют все частные производные в  $V_{x^0}$  и они непрерывные в  $x^0$ . Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x^0$ .

*Доказательство.* Для начала, мы можем полагать, что  $m = 1$ , так как можно доказывать, по сути, покомпонентно. Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  (докажем для 3, потом обсудим общий случай), ну а  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Нас интересует  $f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ . Действуем стандартным

образом, будем двигать координаты по одной (так как все сразу двигать не можем). Меняя по одной координате, представим разности из частных производных. Разность равна

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3) + f(x_1^0, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3) + f(x_1^0, x_2^0, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

Разбивается в две подряд идущие разности, достаточно удобные, но последняя всё равно "не айс":

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3) + f(x_1^0, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3) + f(x_1^0, x_2^0, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

Теперь уже три удобные разности, так и запишем равенство далее:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(\xi_1, x_2, x_3)_{\xi \in [x_1^0, x_1]}} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, \xi_2, x_3)} (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, \xi_3)} (x_3 - x_3^0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_3 - x_3^0) + \\ &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_1 - x_1^0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_2 - x_2^0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_3 - x_3^0) \end{aligned}$$

Последние три слагаемых - остаток,  $R(x)$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \|x - x^0\| < \delta, |R(x)| < \varepsilon \|x - x^0\|$ .

□

**Теорема 4.** Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - гладкая на  $G$  - открытом(???) . Я нихуя не могу прочитать, что тут написано.

*Доказательство.*  $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ,  $f$  - локальный максимум  $f$ ,  $x^0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_0} \neq 0$ .

$$\begin{aligned} &(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - (x_1^0, \dots, x_m^0) = \\ &\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x^0} (x_k - x_k^0) + o(|x_k - x_k^0|), \end{aligned}$$

причём первое слагаемое не нуль.

□

Нам бы ещё хотелось иметь теорему об обратном отображении.

**Теорема 5.** (Об обратном отображении). Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G$  - открыто в  $\mathbb{R}^n$ , у  $f$  есть непрерывные частные производные,  $f$  - в точке  $x^0$  имеет дифференциал  $A$ ,  $A$  - невырожденная. Тогда в некоторой  $V_{x^0}$  существует обратная функция  $g$  - гладкая, задана в как минимум какой-то окрестности  $f(x^0)$ ,  $g(f(x)) = x$ ,  $g$  - дифференцируема в  $f(x^0) \Rightarrow A^{-1}$ .

*Доказательство.*  $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$  - вспомнили, а теперь - к доказательству.

**Утв. 1.**  $f$  - гладкая в окрестности точки  $x^0$  с непрерывными частными производными, тогда  $f$  липшицева, то есть,  $|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|$ . Если мы зафиксируем точку  $x$ , то  $|f(x) - f(y)| \leq (\|A\| + \varepsilon) \|x - y\| \forall \varepsilon > 0, A = A_x. \|A_x\| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_x \right|$ .

**Утв. 2.** Если к тому же  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ , то  $f$  - билипшицево (в окрестности  $x^0$ ),  $C_2 \|x - y\| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_1 \|x - y\|$ . Докажем и его.  $f(y) = f(x) + A_x(y - x) + o(\|x - y\|)$ , тогда

$\|A_{x^0}z\| \geq \varepsilon\|z\|$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|A_x z\| - A_x z = A_{x^0}z + (A_x - A_{x^0})z$ . Первый элемент не меньше  $\varepsilon\|z\|$ , а  $\|A_x - A_{x^0}\|$  стремится к 0 в окрестности этой точки, тогда

$$|f(y) - f(x)| = |A_x(y - x) + o(\|x - y\|),$$

но каждый из них можно ограничить снизу  $\frac{\varepsilon}{2}\|x - y\|$ .

Тогда  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\text{Ker } A = \{0\}$ , тогда  $n \leq m$ .

Итого, у нас есть отображение  $f: f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$ . Рассмотрим шарик  $B_r(x^0) = \{x: \|x - x^0\| < r\}$ ,  $f(B_r(x^0))$ ,  $f$  - биективна. Проверим, что он содержится в каком-то  $B_{r'}(f(x^0))$ .

**Утв. 3.** В условиях теоремы для любого  $r$  существует  $r'$ ,  $f(\overline{B_r(x^0)}) \subset \overline{B_{r'}(f(x^0))}$ . Для любого  $y \in B_{r'}(f(x^0))$   $f(x) = y$ , хотим найти  $x$ .  $F(x) = \|f(x) - y\|^2$ , гладкая в окрестности  $x^0$ . Минимум этой функции где-то достигается (непрерывная на компакте).  $F(x^0) = \|f(x^0) - y\|^2 \leq r'^2$ , тогда минимум не может достигаться на границе, так как иначе  $\|x - x^0\| = r$ . Тогда с одной стороны  $\|f(x) - y\|^2 = \|f(x) - f(x^0) + f(x^0) - y\|^2$ .  $f$  билипшицева, поэтому разность первых двух можно оценить снизу  $\varepsilon\|x - x^0\|$ , а разность последних двух можно ограничить сверху  $r'^2$ , то есть, вся эта вещь как минимум  $r'^2$ .

Пусть  $w$  - минимум  $F(x)$  на  $B_r(x^0)$ , тогда  $\text{grad } F(w) = 0$ ,  $= \|f(x) - y\|^2 = \sum_{k=1}^n (f_k(x) - y_k)^2$ ,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_l} \right|_w = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_w 2(f_k(x) - y_k),$$

И теперь, если подставить в обе стороны  $w$ , то получатся нули. Посмотрим на правую часть как на СЛУ. Дробы фиксированы - числа из матрицы Якоби (изнач. -  $A_w$ ),  $f_k(x)$  - какие-то неизвестные. Матрица невырождена, так как невырожденность не меняется от приведённого шевеления. Значит, решение этой системы единственно, но одно из решений мы уже знаем:  $f_k(w) = y_k$ . Поэтому, если мы подставим точку минимума функции  $F$ , то окажется, что эта точка переводится как раз в точку  $y$ , и тогда  $F = 0$ , а мы в точности нашли прообраз.  $\square$

## 6 Лекция 6.

Заканчиваем доказательство теоремы об обратном отображении. Мы уже установили, что  $f$  - билипшицева, что  $f$  в какой-то окрестности  $f(V_{x_0})$  содержит  $V_{g_0}$ , а также, что обратное отображение  $g$  по крайней мере существует в какой-то окрестности.

Осталось лишь доказать один небольшой оставшийся момент. Пусть  $f$  - гладкая в  $x^0$ , тогда мы можем расписать  $f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + R(x)$ , где  $|R(x)| = o(\|x - x^0\|)$  (модули над векторами с данного момента - естественно, нормы). Воспользуемся тем, что любая точка  $y$ , достаточно близкая к  $y^0$ , то, по доказанному ранее, у неё есть прообраз. Напишем тогда в виду прообразов:  $y = y^0 + A(g(y) - g(y^0)) + R(g(y))$ . Она выполнена для любого  $y$  в некоторой окрестности  $y^0$ .

Нам хотелось бы выразить  $g(y^0)$ . Рассмотрим  $A(g(y) - g(y^0)) = y - y^0 - R(g(y))$ . Это равенство двух векторов  $\mathbb{R}^n$ , матрица  $A$  невырожденная, потому у неё есть обратная, применим это знание:  $g(y) - g(y^0) = A^{-1}(y - y^0) - A^{-1}(R(g(y)))$ . Надо оценить остаток, так как всё остальное уже хорошее. Из того, что мы уже знаем,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $V_{x^0}^\varepsilon |R(x)| \leq \varepsilon\|x - x^0\|$  (кажется, в некоторой окрестности, поэтому размер окрестности должен быть другой переменной). Тогда  $|R(g(y))| \leq \varepsilon\|g(y) - g(y^0)\|$ . Мы знаем, что  $f$  билипшицева, как и обратная, поэтому продолжим неравенство  $\leq \varepsilon C\|y - y^0\|$ . Но у нас изначально есть  $|A^{-1}(R(g(y)))| \leq \|A^{-1}\|\varepsilon C\|y - y^0\|$ . И теперь, собирая всё назад, получаем, что  $g(y) = g(y^0) + A^{-1}(y - y^0) + o(\|y - y^0\|)$ , это нам и нужно было: дифференцируемость в  $y^0$  и явный дифференциал.

Попытаемся обобщить Формулу Тейлора для многих переменных. Для начала, разберёмся с тем, как дифференцировать композицию функций многих переменных. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f$  - гладкая в  $x^0$ ,  $g$  - гладкая в  $f(x^0)$ , тогда  $g(f(x^0))$  - гладкая в  $x^0$ , дифференциал -  $BA$ .

**Пример(ы) 1.**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $g = (g_1, \dots, g_n)$ . Тогда  $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$ , и

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{\tilde{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g_1(x_1 + \varepsilon, \dots), \dots, g_n(x_1 + \varepsilon, \dots)) - f(\dots)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g_1(x_1, \dots, m_n) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x_1} + o(\varepsilon), \dots) - f(g(\dots), \dots)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{g_1(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \dots + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial g_n}{\partial x_1} + o(\varepsilon)}{\varepsilon} = \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), BA = \left( \sum_{k=1}^n \right)$$

**Пример(ы) 2.**  $f(e^{x_1+x_2+x_3}, x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_3) = F(x_1, x_2, x_3)$ . Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot e^{x_1+x_2+x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(-1).$$

Формула Лагранжа. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$ ,  $f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ .

Путь  $x(t) = x + th$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $h = y - x$  (покоординатно). Тогда  $\varphi(t) := f(x + th) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n)) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$ ,  $f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ,

$$\varphi'(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x(t)} (y_1 - x_1) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x(t)} (y_n - x_n) = (\text{grad } f, y - x).$$

Таким образом, формула Лагранжа:  $f(y) - f(x) = (\text{grad } f|_{\xi}, y - x)$ ,  $\xi \in [x, y]$ .

Получим ещё одно крутое обобщение:

$$\varphi'(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1} (y_1 - x_1) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_n} (y_n - x_n),$$

А теперь возьмём производную ещё раз.

$$\varphi''(t) = (\varphi'(t))' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_k} (y_k - x_k)(?) = ?$$

(не закончено и плохо составлено)

## 7 Лекция 7.

**Утверждение 5.** Пусть  $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ .  $(x_0, y_0) \in G$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  - существуют в окрестности точки. Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

*Доказательство.* Составим на плоскости прямоугольник со стороной  $\varepsilon$  в положительные стороны от изначальной точки, расставим в шахматном порядке в углах плюсы и минусы, в изначальной точке - плюс.

Рассмотрим теперь разностную сумму:  $f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2) = \Phi$ . Введём некоторые вспомогательные функции:  $F_1(y) = f(x_0 + \varepsilon_1, y) - f(x_0, y)$ , тогда  $\Phi = -F_1(y_0) + F_1(y_0 + \varepsilon_2) = \varepsilon_2 F_1'(\xi_1)$ ,  $\xi_1 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$ .  $F_1' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \varepsilon_1, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_2) \right)$ , а это равно  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_1, \xi_2$  лежат в прямоугольнике.

Теперь рассмотрим то же самое, только введём  $F_2(x) = f(x, y_0 + \varepsilon_2) - f(x, y_0)$ , опять применяем теорему Лагранжа, и получим  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\eta_1, \eta_2)$ , а теперь воспользуемся непрерывностью производной, устремим к изначальной точке и получим требуемое.  $\square$

**Примечание 5.** Менять можно любые частные производные в функциях от многих переменных (фиксируем остальные и меняем по лемме).

Перейдём, наконец, к формуле Тейлора для многих переменных. Выглядит она сложно, но идея простая: у нас есть некоторый центр - точка  $x \in \mathbb{R}^n$  и ещё одна точка  $y \in \mathbb{R}^n$ , мы тогда пойдём по прямой от второй точки к центра, напишем естественную параметризацию  $x(t) = x + t(y - x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $h = (y - x)$ . Введём тогда функцию  $\varphi(t) = f(x + th)$ , попробуем написать для  $\varphi$  обычную формулу Тейлора и подставим  $h$ .

$\varphi'(t) = (\text{grad } f, h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + th) \cdot h_k$ . Запишем теперь вторую производную:  $\varphi''(t) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x + th) h_k h_l$ , и, в итоге,

$$\varphi^{(s)}(t) = \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_s \leq n} \frac{\partial^s f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_s}} h_{k_1} \dots h_{k_s} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^s f(x + th).$$

В общем и целом, для написания формулы Тейлора уже всё готово. Осталось вспомнить, как она устроена от одной переменной.  $\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} \tau + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \tau^m + R_m(\tau, f)$ , тогда если  $\tau \equiv 1$ , то

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + R_m(1, f).$$

Рассмотрим теперь остаток:  $R_m(\tau, \varphi) = ?$  (остаток надо дописать).

**Теорема 6.** Пусть  $f$  имеет частные производные до  $(m+1)$ -ой в некоторой окрестности точки  $x$ ,  $h = y - x$ , тогда  $f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) h_k + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}(x) h_{k_1} h_{k_2} + \dots + \int_0^1 \frac{(\dots)(x+th)}{m!} (1-t)^m dt$ , также можно написать в форме Лагранжа или Пеано.

**Определение 10.**  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , имеет локальный минимум в точке  $x^0$ , если  $f(y) \geq f(x^0)$ ,  $\forall y \in V_{x^0}$ . Аналогично и максимум.

**Определение 11.** Экстремум:  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (дописать надо).

**Теорема 7.** Если квадратичная форма  $\sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x^0) h_k h_l$ ,  $\text{grad}(x^0) = 0$  определена положительно, то локальный минимум, если определена отрицательно, то локальный максимум.

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \{a_{kl}\}_{1 \leq k, l \leq n},$$

$$Q(x) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} x_k x_l, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad Q(x) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1 \dots x_n)^T.$$

**Теорема 8.** (Критерий Сильвестра). Пусть у нас имеется матрица  $Q$ ,  $n \times n$ , тогда  $Q$  положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые определители (два на главной диагонали и квадрат с ними, 4 элемента) не меньше нуля.

## 8 Лекция 8.

В прошлый раз мы остановились на рассмотрении поля экстремумов  $f : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ . Мы нашли два условия:

- $\text{grad } f = 0$  (необходимое);
- если (квадратичная?) форма  $\sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$  положительно определена, то локальный минимум, если отрицательно, то локальный максимум.

Докажем второй пункт. Пусть  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , распишем формулу Тейлора  $f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + o(\|x - x^0\|^2)$ . Предпоследнее слагаемое - квадратичная форма, пусть  $A$ . Тогда запишем

$$(A(x - x^0), (x - x^0)) \geq \varepsilon \|x - x^0\|^2,$$

что следует из положительности функции.  $(Ax, x) > 0, x \neq 0$ , тогда  $(Ax, x) > \varepsilon$  при  $\|x\| = 1$ , тогда  $(Ax, x) \geq \varepsilon \|x\|^2$ .

Квадратичные формы, сопряжённые операторы. Каждая линейная операция  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  задаётся матрицей  $n \times n$ . Самосопряжённая матрица - матрица, которая удовлетворяет  $(Ax, y) = (x, Ay)$ , рассмотрим её свойства. Она диагонализируема, потому её собственные вектора это просто столбцы из нулей и единички на одном из мест. Собственные же числа - как раз числа на диагонали после диагонализации.

**Пример(ы) 3.**  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$ . Под подозрением к экстремуму имеются точки  $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$ . Рассмотрим  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ . Тогда для соответствующих точек мы получаем матрицы  $2 \times 2$ , состоящие из нулей, кроме левого верхнего нуля -  $(-4), 8$  и  $8$  соответственно. Так как глобальный минимум должен существовать, то он минимальный по значению в этих трёх точках, а это - две последние пары  $(-1)$ .

**Пример(ы) 4.** Рассмотрим  $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$ . Зададим  $f(0, 0) = 0$ , там с непрерывностью всё хорошо, а с гладкостью, конечно, нет.  $\frac{\partial f}{\partial y} = y \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$ , по  $xy$  симметрично. Приравняем оба выражения к нулю и будем решать систему. Пусть  $x, y \neq 0$ .

Поделим и получим систему поприятнее, вычтем из одного другое и получим, что  $x = \pm y$ . Тогда на одну переменную получим  $\log(2x^2) + 1 = 0$ , тогда  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$ , отсюда 4 точки, а также с нулями ещё точки  $(0, \pm 1)$ , и симметрично.

Как устроена  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)} + \frac{4xy(x^2+y^2)-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ . Вторая производная по  $y$  симметрична.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \log(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ . Попробуем теперь разобраться, что происходит с "подозрительными" точками. С точкой  $(0, 0)$  ничего не понятно, посмотрим на остальные.  $(1, 0)$  имеет квадратичную форму

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Про точку  $(-1, 0)$  и так всё понятно в силу нечётности функции, она не подходит. Для точки  $(0, 2)$  получаем аналогичную матрицу. Посмотрим теперь на  $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ , получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Если у одной из координат поменяем знак, то получим

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Осталась только точка  $(0, 0)$ , в которой ничего не понятно. Однако посмотрим на изменение знаков при фиксированных значениях и поймём, что она не обладает какими-то интересными свойствами.

Есть у нас в анализе одной переменной касательная к графику функции. Аналогичные вещи могут быть и в сарпших размерностях, посмотрим на  $\mathbb{R}^3$ . Напишем касательную  $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$ . По аналогичным аппроксимационным моображениям, получим, что эта вещь, как и на плоскости, прекрасно аппроксимирует график функции.

Вектор нормали:  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$ .

**Пример(ы) 5.** Параметризуем сферу широтой и долготой. Сфера в  $\mathbb{R}^3$  - точки, сумма квадратов координат которых равна единице. Ну там по углам параметризуем, в общем, география 0 класс.

## 9 Лекция 9.

(три минуты начала лекции пропаны)

**Теорема 9.** Пусть  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$  - открытое. Также выполнено:

- $F(x_0, y_0) = 0$ ;
- $F \in C^1(G)$ ;
- $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда  $x_0 \in I_x$ ,  $y_0 \in I_y$ ,  $I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\exists!$   $y = f(x)$  такая, что  $F(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = f(x)$ .

$$f \in C^1, f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x, f(x)) = 0$ ,  $F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))'f(x) = 0$ , это - неформальная мысль о том, почему производная именно такая, какая она и должна быть, а теперь перейдём к доказательству.

Для определённости будем считать, что  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . Поскольку мы предположили непрерывность производных, то  $F'_y > 0$  в некоторой окрестности этой точки. Зафиксируем одну из координат и посмотрим на функцию  $G(y) = F(x_0, y)$ , мы знаем, что  $G(y_0) = 0$ ,  $G' > 0$ , потому  $G$  возрастает, а  $G(y_1) < 0 < G(y_2)$  при  $y_1 < y_0 < y_2$ .

Сама функция  $F$  является непрерывной функцией двух переменных, потому если мы посмотрим  $G_x(y) = F(x, y)$ , то  $G$  - возрастающая. Давайте обозначим, что  $G$  задана (?) на  $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ , тогда фиксируя  $x$ ,  $G_x(y_0 - \beta), G_x(y_0 + \beta) > 0$  для  $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ . В силу того, что функция возрастает,  $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \exists! y, G_x(y) = F(x, y) = 0$ .

Рассмотрим  $y = f(x)$  и попробуем установить непрерывность  $f$  в окрестности точки  $x_0$ . Мы знаем, что  $y_0 = f(x_0)$ , и нам нужно понять, почему при довольно малом сдвиге по  $x$ ,  $f$  также изменится минимально.  $y_0 = f(x_0)$ . Рассмотрим множество решений уравнения  $F(x, y) = 0$  (внутри рассматриваемого прямоугольника). Мы уже доказали, что на каждом вертикальном отрезке (или горизонтальном, смотря как повернуть) есть ровно одна точка, которая удовлетворяет условию, тогда получим противоречие (не услышал в чём).

$f$  непрерывна в любой точке  $x$  из  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ . Рассмотрим теперь  $h \in \mathbb{R}$ , а также  $F(x, f(x)) = 0$ ,  $x$  - фиксированный.  $F(x + h, f(x + h)) = 0$ ,  $h \rightarrow 0$ . Тогда  $F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = F(x_h, f(x) + (f(x + h) - f(x)) - F(x, f(x))) = h(F'_x(x, f(x))) + h \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} F'_y(x, f(x)) + o(h) = 0$  - по формуле тейлора при  $h \rightarrow 0$  ( $o$  можно расписать получше). Тогда  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{F'_x}{F'_y}(x, f(x))$ .

*Примечание 6.* Если  $F \in C^k(G)$ , то  $f \in C^k$ , так как дробь первой производной можно как угодно кучу раз дифференцировать. □

Начнём повышать размерности.

**Теорема 10.** Пусть  $F : G \in \mathbb{R}$ ,  $G$  - открыто в  $\mathbb{R}^{m+1}$ , а также выполнено:

- $F \in C'(G)$ ;
- $F(x_1, \dots, x_m, y_0) = 0$ ;
- $F'_y(x_1^0, \dots, x_m^0, y_0) \neq 0$ .

Тогда  $I_x^m \times I_y$ ,  $F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ .

Опять-таки, записать можно такую же штуку для производной.

*Доказательство.* Да и доказательство не сильно поменяется, в общем-то. □

Посмотрим теперь, что это нам даёт. Это нам даёт, что поверхность может быть задана неявным образом. Пусть  $z = f(x, y)$ ,  $F(x, y, z) = 0$ , тогда если мы нашли какую-то точку  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Тогда  $F(x, y, z) = 0$  тогда и только тогда, когда  $z = f(x, y)$ .



Вектор нормали должен был выглядеть как  $(f'_x, f'_y, -1)$ , но тут много чего непонятно-го, запишем как  $\left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right)$ , при  $F'_z \neq 0$ . Тогда домножим и получим  $(F'_x, F'_y, F'_z) = \text{grad } F$ .

Попробуем начать формулировать теорему о неявной функции. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , и  $F_i$  (всех переменных) при  $1 \leq n$ . Тогда если  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ ,  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$  так что  $F_k(x^0, y^0) = 0$  для любого  $1 \leq k \leq n$ .  $F_k(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = f(x)$ ,  $y^0 = f(x^0)$ .

Зафиксируем  $(x_1, \dots, x_m)$ , Рассмотрим для  $F_k$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда дифференциал  $F$  - матрица  $A$  обратима.

**Теорема 11.**  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $G$  - открытое в  $\mathbb{R}^{m+n}$  и выполнено следующее:

- $F \in C^1(G)$ ;
- $F(x^0, y^0) = 0$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $y^0 \in \mathbb{R}^n$ ;
- $F'_y(x^0, y^0)$  - обратимая матрица.

Тогда окрестность  $(x^0, y^0)$ ,  $\exists! f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = f(x)$ .

$$f'(x) = -[f'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot F'_x(x, f(x)).$$

## 10 Лекция 10.

Продолжаем изучение теоремы о неявной функции.

**Теорема 12.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ . Тогда если

- $F \in C^1(G)$ ;
- $F(x^0, y^0) = 0$ ;
- $F'(x^0, y^0)$  - обратимо ( $n \times n$  - матрица).

Тогда в некоторой окрестности  $(x^0, y^0)$ ,  $F(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = f(x)$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.*  $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))$ . В правой части как раз матрицы  $n \times n$  и  $n \times m$ .

Мы сейчас находимся в положении, что если  $n = 1$ , то теорема доказана (на прошлой лекции). Докажем теперь всё остальное индукцией по  $n$ . Попробуем уменьшить на 1 число переменных. Мы знаем, что  $F = (F_1, \dots, F_n)$ ,  $F_k : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F_k = F_k(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$ , и эта вещь равна нулю из кучи соотношений. Нам хочется выделить одну переменную и посмотреть на это как на неявное соотношение между играками и иксами. Попробуем зафиксировать всю совокупность переменных, кроме одной, и, как раз, получится то, что надо.

Обозначим цель: выразить играки через иксы, то есть найти  $y^i = f_i(x_1, \dots, x_m)$ . Начинаем с малого, и выразим одну через все остальные. Выбирать мы будет не абы какую переменную.  $F'_y$  можно записать как матрицу Якоби. Поскольку мы знаем, что эта матрица невырожденная, то у неё есть хотя бы одна ненулевая строка, у которой есть ненулевой элемент. Не умаляя общности, это - последняя строка и последний в ней элемент.  $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x^0, y^0) \neq 0$  (даже в некоторой окрестности).  $y_n$  мы выражать и будем.

Применим теперь теорему о неявной функции в случае с одной переменной, и тогда  $F_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ , у нас есть столько соотношений, и нам бы хотелось их записать в виде того, что  $y_n$  является функцией от остальных переменных. Чтобы это сделать, нам достаточно только одного. Количество соотношений должно быть равно количеству переменных, поэтому нас из всех этих соотношений нужно только последнее -  $n$ -ое. У нас есть от него начальный вектор длины  $M + n - 1$ . Подставим

$$F_n(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, y_n^0) = 0,$$

это нам дано.

Тогда согласно теореме, у нас существует  $f^*$  такая, что  $y_n = f^*(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1})$ . У этой формулы есть, конечно, одна беда, было бы совсем круто, если бы мы выразили это всё только через иксы, а тут ещё куча игреков. Но тогда спустимся индукцией вниз, и дойдём до того, что как раз останутся только иксы. Однако, тут нужно следить за многими важными моментами, например, за невырожденностью матриц. Заведём следующую функцию:  $\varphi_1 = F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, f^*(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}))$ . Точно также мы можем сделать для  $1 \leq k \leq n-1$ . Тогда  $\varphi_n \equiv 0$ .

$\varphi_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ . Нам нужно проверить, что матрица отображения  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$  невырождена в точке. Тогда нам ещё нужно научиться считать производные  $\varphi_k$  по игреку. Попробуем продифференцировать  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l}$ , где  $l$  - от 1 до  $n-1$ . Эта производная равна  $\frac{\partial F_k}{\partial y_l} + \frac{\partial F_k}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y_l}$ , в  $f^*$  мы подставляем всё, кроме последней координаты, а в  $F$  подставляем всё, да на месте последней координаты -  $f^*$  от всего остального.

Рассмотрим, что у нас получается с матрицей  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l}$ ,  $(n-1) \times (n-1)$  (точнее, рассматриваем  $\frac{\partial F_k}{\partial y_l}$  и размера  $n \times n$ ). Рассматриваем теперь верхнюю левую подматрицу  $(n-1) \times (n-1)$ , а из большой получим при помощи элементарных преобразований получим красивую большую матрицу, которая состоит из элементов, идентичных  $\frac{\partial F_k}{\partial y_l} + \frac{\partial F_k}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y_l}$ . Внутри того куса  $(n-1) \times (n-1)$  получим красоту ( $\varphi'_y$ ), однако в последнем столбце у нас получается что-то не хорошее ( $\frac{\partial F_n}{\partial y_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y_1}$ , однако, так как это производные, то тождественные нули). Аналогично не очень хорошо получается в последней строке, а в правом нижнем углу стоит  $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$ .

Тогда определитель матрицы  $F'_y = \det \varphi'_y \cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}$ . Но ни первый, ни второй множитель не равняются нулю, поэтому и искомое не нуль.  $\varphi_i(\text{everything}) = 0$ , тогда существуют  $f_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , тогда  $y_n = f^*(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) = f^*(x_1, \dots, x_m, f_1(x's), \dots, f_{n-1}(x's))$ .

Осталось лишь доказать формулы  $f'(x)$ ,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . У нас есть соотношение

$$F_k(x_1, \dots, x_m, f_1, \dots, f_n) = 0,$$

$1 \leq k \leq n$ . Давайте продифференцируем это дело. Мы имеем право дифференцировать по  $m$  переменным.  $\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = \frac{\partial F_k}{\partial x_1} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_1} = 0$ . Индексы при  $F$  и  $x$  могут быть любыми, тогда мы можем 1 заменить на  $s$ , и у нас выполнено  $m \times n$  соотношений ( $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq s \leq m$ ).  $F'_x + F'_y f' = 0$ , тогда посмотрим на размеры матриц, и пристальным взглядыванием получим из обратимости  $f' = -(F'_y)^{-1} \cdot F'_x$ . (немного перестал понимать, что происходит - надо вникнуть и записать).  $\square$

Перейдём теперь к теме *условные экстремумы*. Пусть  $f = f(x_2, \dots, x_n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F \rightarrow \mathbb{R}$ . Если у нас есть набор  $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  при  $1 \leq i \leq m$ , то хотелось бы, чтобы  $m \leq n$ . Тогда мы можем сократить количество переменных. Ну, Юрий Сергеевич начал рисовать картиночки, я так не умею. Пусть у нас есть поверхность  $S$  и  $f(x, y, z)$ , и мы хотим найти

экстремум по  $S - f|_S$ . Пусть у нас есть точка  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ , тогда мы хотим, чтобы в точке было касание. Если в общем и целом, то нас интересует касание, мы рассматриваем параметризацию от одной переменной  $t$  по кривой на поверхности, и дальше с ней чего-то там делаем.

## 11 Основные теоретические факты для контрольных.

(На мой субъективный выбор).

### 11.1 Интегралы.

Интегралы бывают:

- *неопределёнными* - совокупность всех первообразных функций;
- *определённым* - предел интегральных сумм;
- *несобственным*, если он определённый и либо область определения бесконечна, либо если подынтегральная функция неограничена в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Вычисляем первообразную самыми разными способами:

- *угадывание* - почему нет;
- *введение нового аргумента* - если  $\int g(x)dx = G(x) + C$ , то  $\int g(u)du = G(u) + C$ , где  $u = \varphi(x)$  - непрерывно дифференцируемая функция;
- *разложение* - по линейности;
- *подстановка* - если  $g(x)$  - непрерывная, то, полагая, что  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  непрерывна вместе со своей производной, получим, что  $\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ .
- *по частям* - если  $u$  и  $v$  - некоторые дифференцируемые функции от  $x$ , то  $\int u dv = uv - \int v du$ .

Также неплохо бы выучить хотя бы немного базовых интегралов.

Несобственные интегралы могут сходиться или нет. Рассмотрим свойства сходимости:

**Утверждение 6.** (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла). Если функция  $x \mapsto f(x)$  определена на промежутке  $[a, \omega[$  и интегрируема на любом отрезке  $[a, b]$ , лежащем внутри, то интеграл  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $B \in [a, \omega[$  так, что при любых  $b_1, b_2 \in [a, \omega[$  таких, что  $B < b_1, b_2$  имеет место соотношение

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

**Определение 12.** Про несобственный интеграл  $\int_a^\omega f(x)dx$  говорят, что он *сходится абсолютно*, если сходится интеграл  $\int_a^\omega |f|(x)dx$ .

**Утверждение 7.** Если функция  $f$  определена на промежутке, интегрируема на каждом его отрезке, и неотрицательна на нём, то несобственный интеграл существует в том и только том случае, когда функция ограничена на  $[a, \omega[$ .

**Теорема 13.** (Теорема сравнения). Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на промежутке  $[a, \omega[$  и интегрируемы на любом его отрезке. Если на промежутке  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , то из сходимости интеграла по  $g$  следует сходимость интеграла по  $f$ .

**Определение 13.** Несобственный интеграл  $\int_a^\omega f(x; \alpha) dx$  называется равномерно сходящимся на  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (a; b) \forall \xi \in [t, \omega) \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_\xi^\omega f(x; \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 14.** (Признак Вейерштрасса). Если подынтегральная функция в параметрическом интеграле может быть ограничена функцией одной переменной сверху, и интеграл от данной функции сходится, то и изначальный интеграл сходится.

**Теорема 15.** (Признак Дирихле). Достаточное условие равномерной сходимости интеграла вида  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ . Если выполнены следующие условия:

- первообразная  $f(x)$  ограничена;
- $g(x)$  дифференцируема, больше нуля, её производная отрицательна;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  сходится.

## 11.2 Кривые.

**Определение 14.** Кривые в  $\mathbb{R}^n$  - непрерывное отображение  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Нас, в основном, интересуют прямые, которые можно непрерывно нарисовать одной линией, если говорить на простейшем языке.

Если непрерывная кривая  $\gamma$  задана параметрически:  $x_1 = f_1(t)$ ,  $x_2 = f_2(t)$ , ..., то можно найти её длину:

$$\int_a^b \sqrt{(f'_1)^2(x) + \dots + (f'_n)^2(x)} dx.$$

Естественно, все  $f_i$  должны быть дифференцируемы на нужном промежутке.

## 11.3 Многомерный анализ.

**Определение 15.**  $f$  дифференцируема в точке  $(x_1, \dots, x_m)$ , если  $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|x - y\|)$ , где  $L$  - линейное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , причём однородное, то есть,  $L(0) = 0$ .

**Определение 16.** Это линейное отображение  $L$  называется дифференциалом в точке  $x$ .

*Примечание 7.* Зачастую ищем по определению, можно по ласт теореме из подтемы.

**Определение 17.** Частная производная. Пусть имеется  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Тогда частная производная по  $x_k$ ,  $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) = g(x)$ ,  $g'(x_k^0)$ .

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x^0} := g'(x_k^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_k^0 + \varepsilon, \dots) - f(\dots)}{\varepsilon}.$$

**Определение 18.** Производная по направлению. Пусть направление задаётся  $e \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|e\| = 1$ ,  $f$  - дифференцируема по направлению  $e$ , если  $g(t) = f(x^0 + te)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  и существует  $g'(0)$ , то производная по направлению  $e$  -  $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t}$ .

(тут хочется теорему, которая теорема 2.)

**Теорема 16.** Пусть у нас есть отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $V_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причём существуют все частные производные в  $V_{x^0}$  и они непрерывны в  $x^0$ . Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x^0$ .

(тут хочется теорему, которая теорема 4.)

**Теорема 17.** Если функция  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на множестве  $E \subset \mathbb{R}^m$ , дифференцируема во внутренней точке  $x \in E$  этого множества, то в этой точке функция имеет все частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)h_m.$$