Личные записи по матану$^\beta$

@keba4ok

18 октября 2021г.

Некоторые материалы пока что с практик в рамках подготовки к ближайшим контрольным.

Содержание

Интегралы с параметром.

Грубые оценки.

Задача (1.3.1).

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{\alpha+x^2(\alpha+\alpha^3)}\geq\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1+\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)}\geq 1$$
$$\leq\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1-\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)}\leq 1$$

Задача (1.3.2).

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta\geq\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\theta}d\theta=-\frac{e^{-R\theta}}{R}\bigg|_0^\pi=$$
$$=-\frac{-e^{-R\frac{\pi}{2}}}{R}+\frac{1}{R}.$$

Разбиение на части.

Посредством замены переменных.

Задача (1.3.4).

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-\sin R\theta}d\theta=[R]\frac{1}{R}\int_0^\pi e^{-\sin\theta}d\theta.$$

Интегрирование по параметру.

Теорема 1. *Пусть $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция , дифференцируемая по первой переменной и такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ тоже непрерывна. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть c или d бесконечно и существуют g и h - непрерывные на [c,d] такие, что к условиям непрерывности добавляются*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq h(y),\ |f(x,y)|\leq g(y)$$

и

$$\int_c^d h(y)dy<\infty,\ \int_c^d g(y)dy<\infty,$$

тогда формула (1) также верна.

Задача (1.5.1).

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=[H_\varepsilon(t)=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^t}{\ln x}dx]=H_\varepsilon(b)-H_\varepsilon(a)=$$
$$=\int_a^b H_\varepsilon'(t)dt=\int_a^b\frac{dt}{t+1}.$$

Использование комплексов.

Задача (1.5.2)**.** $a > 0$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx &= -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = \\ &= -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = -\int_0^\infty \frac{e^i x - e^{-ix}}{2i} e^{-ax} dx = \\ &= -\frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{(i-a)x} - e^{-(i+a)x}) dx = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i-a} + \frac{1}{i+a} \right] = \frac{-1}{1+a^2}.\end{aligned}$$

Теорема 3 (*Интеграл Френеля*)**.**

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

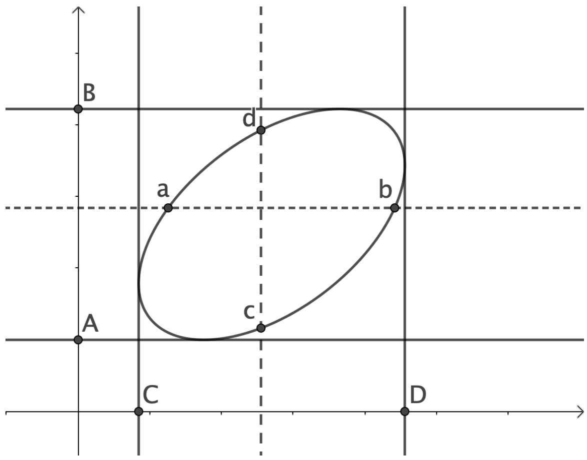
Многомерное интегрирование.

Порядки интегрирования.

Теорема 4 (*Тождество Фубини*)**.**

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy$$

Утверждение 1. Пусть Ω - (приличная) область в $\mathbb{R}^2$.



$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \chi_\Omega(x,y) dx dy = \\ &= \int_C^D \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy dx = \int_A^B \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx dy.\end{aligned}$$

Задача (4.1.3)**.** $f(x,y) = x^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} x^2 dy dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-x} x^2 dx\end{aligned}$$