Матлог. Основные записи

Мастера конспектов

22 января 2020 г.

Основные моменты.

Содержание

1 Лекция 1.

Определение 1. *Конкатенация* - записали подряд два слова. (A - алфавит, A^* - слова).

Определение 2. *Подслово* - как есть, *вхождение* - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как $\psi \sqsubseteq \varphi$.

Определение 3. $w[w'/u, k]$ - замена подслова w' на u, начинающегося в позиции k.

Определение 4. Фиксированное счётное множество Prop - *пропозициональные переменные.* Язык $\mathscr{L}$ классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов $\to, \vee, \wedge, \neg$ и круглых скобочек.

Определение 5. Form (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\varphi * \psi) \in \mathrm{Form}$, где $*$ - любая из операций в определении выше (если отрицание, то отсительно одногой формулы, конечно).

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\psi \sqsubseteq \varphi$. *Тогда* $\psi = \varphi$.

Доказательство. По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе ψ представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как φ представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально. □

Лемма 2. *Каждую* $\varphi \in \mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ *можно единственным способом представить в виде* $(\theta \to \chi)$, $(\theta \vee \chi)$, $(\theta \wedge \chi)$ *или* $\neg\theta$, *где* $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *(это я везде безграмотно называю композицией).*

Доказательство. От противного по лемме 2. □

Определение 6. Для каждой $\varphi \in \mathrm{Form}$ определим $\mathrm{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \mathrm{Form} \,|\psi \preccurlyeq \varphi\}$ - *подформулы.*

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$. *Тогда каждое вхождение* $\neq$ *или* (*является началом вхождения некоторой подформулы.*

Доказательство. Возвратная индукция по длине формулы. □

Лемма 4. *Множество подслов* φ *- объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.*

Доказательство. Из лемм выше. □

Определение 7. *Оценка* (v) - произвольная функция из Prop в $\{0, 1\}$, которую можно расширить и до Form (v^*) посредством применения операций к переменным. Если $v^*(\varphi) = 1$, то порой пишут $v \Vdash \varphi$.

Определение 8. Формулу называют *выполнимой*, если $v \Vdash \varphi$ для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если $v \Vdash \varphi$ для всех оценок.

Определение 9. Формула *семантически следует* из множества формул и записывается $\Gamma \vDash \varphi$, если для любой оценки v, любая формула из множества истина, то φ истина.

Формулы называют *семантически эквивалентны*, и пишут $\varphi \equiv \psi$, если $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$.

2 Лекция 2.

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negotiation):

- (I1). $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
- (I2). $\varphi \to (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;
- (C1). $\varphi \wedge \psi \to \varphi$;
- (C2). $\varphi \wedge \psi \to \psi$;
- (C3). $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$;
- (D1). $\varphi \to \varphi \vee \psi$;
- (D2). $\psi \to \varphi \vee \psi$;
- (D3). $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$;
- (N1). $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
- (N2). $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;
- (N3). $\varphi \vee \neg\varphi$,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponents*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \quad \to \quad \psi}{\psi}$$

Определение 10. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$, тогда *выводом* из него в гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) элементов Form, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующиъ условий:

- φ_i - аксиома;
- φ_i - элемент Γ;
- $\exists\{j, k\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\}$ такие, что φ_k есть $\varphi_j \to \varphi_i$.

При этом, φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы*. Если φ выводится из Γ, то пишут $\Gamma \vdash \varphi$.

Основные свойства $\vdash$:

- монотонность;
- транзитивность;
- компактность (если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Delta \vdash \varphi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Теорема 1. *(О дедукции). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$*,*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Доказательство. В одну правую сторону очевидно, в обратную - по индукции по $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ показываем, что $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$, там три случая, и все, кроме одного, тривиальны. □

Введём обозначения: $\top := p \to p$ и $\bot := \neg\top$, где p - фиксированная пропозициональная переменная.

Следствие 1. Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \varphi$$

для некоторых $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$.

Доказательство. Влево - очевидно, вправо - очевидно и применяется теорема о дедукции. □

Лемма 5. *Всякая аксиома гильбертовского исчисления для классической пропозициональной логики общезначима.*

Теорема 2. *(О корректности). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$. Затем рассматриваем произаольную оценку v такую что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$ и покажем по индукции по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $v \Vdash \varphi_i$. □

Определение 11. $\Gamma \subseteq \text{Form}$ называется *простой теорией*, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \text{Form}$;
- $\{\varphi \in \text{Form} \,|\Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Лемма 6. *Пусть Γ - простая теория, тогда для любых её элементов можно переписать действвия над ними в рамках принадлежности к теории.*

Лемма 7. *(О расширении. a.k.a. Линденбаума). Пусть* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \varphi$. *Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \varphi$.

Доказательство. Рекурсивно докидываем к Γ элементы Form (их счётно). □

3 Лекция 3.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу $v_\Gamma(p) := 1$, если $p \in \Gamma$ и 0 иначе.

Лемма 8. *Пусть Γ - простая теория. Тогда для любой* $\varphi \in \text{Form}$,

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$$

Доказательство. Индукция по построению φ, используя лемму 6. $\square$

Теорема 3. *(О сильной полноте $\vdash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$ если и только если $\Gamma \nvDash \bot$, а значит, Γ непротиворечиво если и только если Γ выполнимо.

Доказательство. Вправо - теорема о корректности, влево - от противного, рассматриваем Γ', как в лемме 7. $\square$

Теорема 4. *(О слабой полноте $\vdash$). Для любой $\varphi \in \mathrm{Form}$,*

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vDash \varphi$$

то есть, выводимость из пустого равносильна обзезначимости,

Теорема 5. *(О компактности $\vDash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vDash \varphi \Longleftrightarrow \Delta \vDash \varphi$$

для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. В частности, $\Gamma \nvDash \bot$ тогда и только тогда, когда $\Delta \nvDash \bot$ для всех конечных $\Delta \subseteq \Gamma$, а значит, Γ выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество Γ выполнимо.

Утверждение 1. Слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\vDash$ равно сильная полнота $\vdash$.

Определение 12. *Сигнатура* - четвёрка вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где первые три - попарно непересекающиеся множества, а последнее - функция из $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 13. *σ-структура* - пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_\mathfrak{A} \rangle,$$

где A - непустое множество, а $I_\mathfrak{A}$ - функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$, такая что:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(c) \in A$.

При этом, A - носитель, а $I_\mathfrak{A}$ - интерпретация σ в $\mathfrak{A}$.

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A}$ b $\mathfrak{B}$ - две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ есть *гомоморфизм* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

- для любого n-местного предиката и всех $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^\mathfrak{A} \Rightarrow (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^\mathfrak{B};$$

- для любого m-местного функционала и всех $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$,

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \ldots, \xi(a_m));$$

- для любой константы,

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Определение 15. Инъективный гомоморфизм называют *сложением*, если выполнено усиление первого пункта, где следствие заменяется на равносильность.

Определение 16. Сюръективное вложение называют *изоморфизмом* и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если они изоморфны, т.е. между ними существует изоморфизм.

Определение 17. *Автоморфизм* - изоморфизм на себя. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ - множество всех автоморфизмов $\mathfrak{A}$.