Дифференциальная геометрия

Содержание

Разделы курса.

Алгебраическая топология

- Фундаментальная группа.
- Накрытия.
- Приложения.

Дифференциальная геометрия

- Гладкие кривые и поверхности.
- Гладкие многообразия.
- Римановы многообразия.

Литература

- Виро и др – Элементарная топология.
- Munkres – Topology

Лекция 1.

Определение 1. *Ретракция* — непрерывное отображение $f : X \to A$, где $A \subset X$, такое, что $f|_A = id_A$.
Если существует ретракция $f : X \to A$, то A называется ретрактом пространства X.

Пример(ы).

- Всякое одноточечное подмножество является ретрактом.
- Никакое двухточечное подмножество прямой не является её ретрактом.

Теорема 1. *Подмножество A топологического пространства X является его ретрактом $\iff$ всякое непрерывное отображение $g : A \to Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$.*

Доказательство.
"$\Rightarrow$" пусть $\rho : X \to A$ ретракция, тогда $g \circ \rho$ искомое продолжение.
(композиция непрерывных отображений непрерывна; действует так: $X \to A \to Y$; на множестве A: $g \circ \rho|_A = g \circ id_A = g$).
"$\Leftarrow$" рассмотрим ρ - непрерывное продолжение $g = id_A$ ($Y = A$), тогда ρ - ретракция. ($\rho : X \to A$ непрерывно, $\rho|_A = id_A$) □

$A \subset X, in : A \to X$ - включение ($\forall a \in A :\ in(a) = a$).
Лемма 1. *Если $\rho : X \to A$– ретракция, $in : A \to X$ – включение и $x_0 \in A$, то*

- $\rho_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(A,x_0)$ *- сюрьекция;*
- $in_* : \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ *- инъекция;*

Доказательство.

$$\rho \circ in = id \Rightarrow (\rho \circ in)_* = \rho_* \circ in_* = id_*$$

□

Теорема 2. *(Теорема Борсука (в размерности 2))*
Не существует ретракции из D^2 на S^1.

Доказательство. От противного. Пусть $\rho : D^2 \to S^1$ – ретракция, $x_0 \in S^1$. $\pi_1(D^2,x_0) = \mathbb{Z}, \pi_1(S^1,x_0) = 0$, тогда по лемме $in : \mathbb{Z} \to 0$ - инъекция. Противоречие. □

Определение 2. Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f : X \to X$, если $f(a) = a$.

Примечание. Говорят, что пространство обладает свойством неподвижной точки, если всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.

Пример(ы). Отрезок $[a; b]$ обладает свойством неподвижной точки.

Теорема 3. *(Теорема Брауэра о неподвижной точке) Любое непрерывное отображение $f : D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. От противного, пусть $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$.
Построим $g : D^2 \to S^1$ так: $g(x)$ - точка пересечения луча, начинающегося в $f(x)$ и проходящего через x, с окружностью. Это g противоречит теореме Борсука.

$$|(x - f(x))t + x| = 1$$

□

Определение 3. X и Y гомотопически эквивалентны ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim id_X$ и $f \circ g \sim id_Y$. Такие f и g называются *гомотопически обратными отображениями*. Каждое из f и g называется *гомотопической эквивалентностью*.

Примечание. Отображения бывают гомотопными, а пространства - гомотопически эквивалентными.

Пример(ы). $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно $\{0\}$.

Определение 4. Ретракция $f : X \to A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $in : A \to X$ гомотопна тождественному отображению, т.е.

$$in \circ f \sim id_X$$

Если существует деформационная ретракция X на A, то A называется деформационным ретрактом пространства X

Теорема 4. *Деформационная ретракция является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Деформационная ретракция и включение – гомотопически обратные отображения. □

Пример(ы).

- $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \sim S^{n-1}$. $(f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}, f(x) = \frac{x}{|x|})$.
- Лента Мёбиуса (или кольцо) $\sim S^1$.
- Плоскость без n точек $\sim$ букет n окружностей.
- Тор с дыркой $\sim$ букет двух окружностей.

Примечание. В примерах правое пространство - деформационный ретракт левого.

Теорема 5. *Гомотопическая эквивалентность — отношение эквивалентности между топологическими пространствами.*

Доказательство.
Рефлексивность $X \sim X$: $f = g = id_X$.
Симметричность $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$: $(f \circ g$ и $g \circ f) \to (g \circ f$ и $f \circ g)$.
Транзитивность: $f_1 : X \to Y, g_1 : Y \to X$ гомотопически обратны, $f_2 : Y \to Z$, $g_2 : Z \to Y$ гомотопически обратны $\Rightarrow$ $f_2 \circ f_1$ и $g_1 \circ g_2$ гомотопически обратны, т.к.:

$$f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \sim f_2 \circ id_Y \circ g_2 \sim f_2 \circ g_2 \sim id_Z$$

$$g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \sim g_1 \circ id_Y \circ f_1 \sim g_1 \circ f_1 \sim id_X$$

□

Определение 5. Класс пространств, гомотопически эквивалентных данному X, называется его *гомотопическим типом*. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопически эквивалентных, - *гомотопические свойства (гомотопические инварианты)*.

Упражнение. Число компонент линейной связности - гомотопический инвариант.

Лекция 2.

Изоморфмность фундаментальных групп

Теорема 6. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.*

Лемма 2. *Пусть* $f, g : X \to Y$ *- гомотопные отображения,* $H : X \times I \to Y$ *- гомотопия между ними.* $f(x_0) = y_0, g(x_0) = y_1, \gamma(t) = H(x_0, t)$ *- путь от* y_0 *к* y_1*. Тогда* $g_* = T_\gamma \circ f_*$

Определение 6. Топологическое пространтсов X стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример(ы). Переформулировки стягиваемости:

- тождественное отображение гомотопно постоянному
- некоторая точка - деформационный ретракт

Лемма 3. *Пусть* $h : S^1 \to X$ *- непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *h гомотопно постоянному отображению.*
2. *h продолжается до непрерывного от.* $D^2 \to X$*.*
3. *h_* - тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.*

Предметный указатель