Теория категорий

Тутанов Михаил и Копейкина Софья
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

24 сентября 2021 г.

Содержание

Основные определения 3

Примеры на основные определения 3

Ещё определения 4

Функтор 6

Примеры функторов 6

Мономорфизмы и эпиморфизмы 7

Естественные преобразования 8

Эквивалентность категорий 9

Скелеты 10

Основные определения

Определение 1. *Категория $\mathcal{C}$* – это

- класс[1] $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $\mathrm{Hom}(X, Y)$[2] для любых двух X и Y из $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ$: $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- для любого A из $\mathcal{C}$[3] существует $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ такое, что $f \circ \mathrm{id}_A = f$, $\mathrm{id}_A \circ f = f$ для любого осмысленного f.

Определение 2. Два объекта X и Y в категории $\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, если $\exists f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ такие, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами*.

Определение 3. Объект A в категории $\mathcal{C}$ называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из $\mathcal{C}$ $|\mathrm{Hom}(X, A)| = 1$ ($|\mathrm{Hom}(A, X)| = 1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A, композиция $f \circ g$ в этом случае будет элементом $\mathrm{Hom}(A', A')$, но $\mathrm{id}_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f \circ g = \mathrm{id}_{A'}$, аналогично $g \circ f = \mathrm{id}_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. □

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории $\mathcal{C}$ определим следующую категорию $\mathcal{C}^{op}$, которую будем называть *двойственной* (*противоположной*): $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g \circ f$.

Примечание 1. Иницальный объект в $\mathcal{C}$ соответсвует терминальному в $\mathcal{C}^{op}$ и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- $Sets$: $\mathrm{Ob}\,Sets$ = все множества, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ = все отображения из X в Y, $\circ$ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – $\emptyset$, терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

[1] Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

[2] Обозначение Mor на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

[3] Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups*, *Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*: $\mathrm{Ob}\, HTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = M$, $\mathrm{Hom}(x, y) = \emptyset$, если $x \le y$, $= \emptyset$, иначе.
- *Rels*, $\mathrm{Ob}\, Rels$ = все множества, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ = все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \to X$ и $pr_Y : X \times Y \to Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$, существует единственный морфизм $h : Z \to X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$ и $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \leftarrow X$ и $g : Z \leftarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \leftarrow X \amalg Y$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id, подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. □

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y[4];
- *Groups*: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;

[4]Здесь ранее было указано, что оно существует не всегда, это неправда,оно всегда есть

- ЧУМ: $x \times y = min(x, y)$, $x \amalg y = max(x, y)$.

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

Определение 7. *Категорией стрелки* $\mathcal{C}/A$, где $\mathcal{C}$ – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/A =$ пары (X, f), где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$; $\mathrm{Hom}((X, f), (Y, g)) = \{h \in \mathrm{Hom}(X, Y) | f = g \circ h\}$.

Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A). Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- $Sets$: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$;
- $Sets^{op}$: $X \amalg_A Y = X \amalg Y / \sim$, где $\sim$ порождено $f(a) \sim g(a)$. В Top это просто склейка;
- $Groups$: произведение как на $Sets$, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 9. *Функтором* $\mathcal{F}$ называется отображение между двумя категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ (определённое и на объектах, и на морфизмах) со свойствами:

- Если $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$.

Примеры функторов:

- $\pi_1 : Top \to Groups$;
- Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда $\mathcal{F}$ – гомоморфизм моноидов;
- M – моноид, $\mathcal{F} : M \to Vect_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \to End(V)$;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ – выбор объекта в $\mathcal{C}$, а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

Функтор

Определение 10. *Функтор* - это отображение $F : C \to D$ между категориями со следующими свойствами:

1. Если $X \in \text{Ob } C$, то $F(x) \in \text{Ob } D$
2. $\forall A, B \in \text{Ob } C$ и $F : A \to B$ – $F(f) : F(A) \to F(B)$, причем "произведение переходит в произведение"и "единичный гомоморфизм в единичный гомоморфизм т.е.
   $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ и $F(id_A) = id_{F(A)}$

Утверждение 3. $A \simeq B \Rightarrow F(A) \simeq F(B)$
Доказательство:
$A \simeq B$, значит $\exists f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$.
Вспомним, что функтор сохраняет произведение и единичный гомоморфизм:
$F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$ и $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$.
Мы нашли гомоморфизмы с нужными нам свойствами, а значит $F(A) \simeq F(B)$.

QED

Примеры функторов

1. *Забывающий функтор*
   Такой функтор стандартно обозначается как U, он "забывает"алгебраические структуры. Рассмотрим на примере групп:
   $U : Groups \to Sets$
   $U(G) = G$ как множество
   $U(f) = f$ как отображение множеств
2. *Свободный функтор*
   Это функтор, который "вспоминает"алгебраическую структуру. Рассмотрим также на примере групп:
   $F : Sets \to Groups$
   $F(X) =$ свободная группа, порожденная X
   $F(f) : F(X) \to F(Y)$, который переводит образующие в образующие: $x \mapsto f(x)$
3. Конкретный пример свободного функтора между ассоциативными алгебрами с единицей и векторными пространствами:
   K - поле, $U : K - Alg \to Vect_K$ и $F : Vect_K \to K - Alg$
   $F(V) = T(V) = K \bigoplus V \bigoplus V^{\bigotimes 2} \bigoplus V^{\bigotimes 3} \bigoplus ...$
   Со следующей структурой:
   $V^{\bigotimes n} \times V^{\bigotimes m} \to V^{\bigotimes (n+m)}$
   $(v_1 \otimes ... \otimes v_n; u_1 \otimes ... \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes ... \otimes v_n \otimes u_1 \otimes ... \otimes u_m$
   А с гомоморфизмами дела обстоят следующим образом:
   $f : V \to W$, тогда $F(f) : T(V) \to T(W)$, который работает так:
   $V^{\bigotimes n} \to W^{\bigotimes n}$
   $v_1 \otimes ... \otimes v_n \to f(v_1) \otimes ... \otimes f(v_n)$
4. Аналогично между коммутативными алгебрами и векторными пространствами:
   $S : K - CommAlg \to Vect_K$
   $S(V) = T(V)_{/<u \otimes v - v \otimes u>}$, что называется *симметрической алгеброй*

5. Еще пример - между абелевыми и обычными группами:
$F: AbGroups \to Groups$
$F(G) = G_{/[G,G]}$
$F(f)[g] = [f(g)]$

6. *Множества с выделенной точкой* и свободный функтор между ними и категорией множеств:
$Sets_*$ - это категория, определенная следующим образом: $Ob\ Sets_*$ состоит из элементов следующего вида: $(A, a \in A)$. Гомоморфизмы устроены так: $f_* : (A, a) \to (B, b)$, причем переводит выделенную точку в выделенную точку.
Свободный функтор выглядит так:
$F : Sets \to Sets_*$
$A \mapsto A \sqcup \{\varnothing\}$
$f \mapsto f \times (\varnothing; \varnothing)$

7. *Копредставимый функтор* - это функтор, действующий их категории в категорию множеств $F : C \to Sets$, построенный следующим образом:
$A \in \mathrm{Ob}\ C\ F(X) = Hom(A, X)$
$f : X \to Y - F(f) : Hom(A, X) \to Hom(A, Y)$
$\phi \mapsto f \circ \phi$

Определение 11. *Контрвариантный функтор* из C в D - это функтор из C^{op} в D^{op}:
$A \in \mathrm{Ob}\ C - F(A) \in \mathrm{Ob}\ D$
$f : A \to B - F(f) : F(B) \to F(a)$ и $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, $F(id_A) = id_{F(A)}$

Определение 12. *Представимый функтор* - это такой функтор $h_A : C^{Op} \to Sets$, $A \in \mathrm{Ob}\ C$, действующий по правилу:
$h_A(X) = Hom(X, A)$, $h_A(f) : \phi \mapsto \phi \circ f$

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Мы хотим определить "инъективность"и "сюръективность"для гомоморфизмов между элементами категорий. Делается это следующим образом:

Определение 13. Гомоморфизм f называется *мономорфизмом*, если "на него можно сокращать слева т.е. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$
Примеры

- Sets - инъективные отображения
- Groups - инъективне гомоморфизмы групп
- Rings - инъективные гомоморфизмы колец

Примечание 2. Сохраняют ли функторы мономорфизмы? НЕТ

Определение 14. Гомоморфизм $f : X \to Y$ называется *расщепимым мономорфизмом*, если $\exists r : Y \to X$ такой, что $r \circ f = id_X$

Примечание 3. Сохраняют ли функторы расщепимые мономорфизмы? ДА

Определение 15. Гомоморфизм f называется *эпиморфизмом*, если "на нее можно сокращать справа т.е. $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$
Аналогично можно определить расщепимый эпиморфизм:

Определение 16. Гомоморфизм $f : X \to Y$ называется *расщепимым эпиморфизмом*, если $\exists s : Y \to X$ такой, что $f \circ s = id_Y$ **Примеры эпиморфизмов**

- Sets - сюръективные отображения
- Groups - сюръективные гомоморфизмы групп
- HausTop - непрерывные отображения с $f(X) = Y$

Упражнение 1. *Расщепимый мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм* и *Расщепимый эпиморфизм + мономорфизм = изоморфизм*

Естественные преобразования

Определение 17. $\alpha : F \to G$ называется *естественным преобразованием* для функторов $F, G : C \to D$, если $\forall A \in C\ \exists \alpha_A : F(A) \to G(A)$ такой, что $\forall f \in Hom(A, B)\ \exists \alpha_B : F(B) \to G(B)$, причем следующая диаграмма коммутативна:

$$f : A \to B, \quad A, B \in Ob\, C$$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_A : F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
\alpha_B : F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Упражнение 2. $I = [Ob\ I = \{0, 1\}, Hom(I) = \{Hom(0, 0) = \{id_0\}, Hom(0, 1) = \{f = \{(0, 1)\}\}, Hom(1, 0) = \varnothing, Hom(1, 1) = \{id_1\}\}]$.
Задать естественное преобразование это все равно, что задать следующий функтор: $H : C \times I \to D \mid H(\ , 0) = F$ и $H(\ , 1) = G$, со следующей структурой категории $C \times I$:
$Ob\ C \times I = \mathrm{Ob}\ C \times \mathrm{Ob}\ I$, $Hom(C \times I) = Hom(C) \times Hom(I)$
Примеры

- $V \in Vect_K$. Для функторов $Vect_K \to Vect_K$ $F : V \mapsto V, f \mapsto f$ и $G : V \mapsto V^{**}, \phi \mapsto \phi^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha \mid \alpha_V : F \to G : V = F(V) \mapsto G(V) = V^{**}$ такое, что $\alpha_V(f)(v) = f(v)$
- *Топологическая группа* - это группа с топологической структурой, на которой заданы две непрерывные операции: $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$ и $G \to G : a \mapsto a^{-1}$
(к примеру, $(\mathbb{R}, +)$ и $(S^1, \cdot)$ - это топологические группы). В данном примере нас будет интересовать *локально компактные тополгические абелевы группы*. Для каждой группы A определим двойственную: $A^* = Hom(A, S^1)$ - непрерывные гомоморфизмы групп (вместе с какой-то топологией).
Итак, для функторов $LocCompAb \to LocCompAb$ $F = Id$ и $G : A \mapsto A^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha : F \to G$, которое определяется так же, как и в предыдущем примере.

Эквивалентность категорий

Определение 18. Есть три функтора $F, G, H : C \to D$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$. *Композиция(вертикальная) естественных преобразований* это естественное преобразование $\beta \circ \alpha : F \to H \mid (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$

Примечание 4. Заметим, что мы таким образом определили категорию $Funct(C, D)$ - функторов из C в D, в которой морфизмы - это естественные преобразования.

Определение 19. Есть четыре функтора $F, G : C \to D,\ H, K : D \to E$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \to G$ и $\beta : H \to E$.
Композиция(горизнтальная) естественных преобразований - это естественное преобразование $\beta \bullet \alpha : H \circ F \to K \circ G \mid (\beta \bullet \alpha)_A : H(F(A)) \to K(G(A))$, последнее работает следующим образом: $H(\alpha_A) : H(F(A)) \to H(G(A)), (\beta \bullet \alpha)_A = \beta_{G(A)}(H(\alpha_A))$

Упражнение 3. Композициии, определенные таким образом, действительно являются естественными преобразованиями.

Упражнение 4. Горизонтальная композиция коммутирует с вертикальной.

Определение 20. Категории C и D называются *эквивалентными*, если $\exists F : C \to D$ и $G : D \to C$, причем есть естественные преобразования
$\alpha : Id_G \to F \circ G, \alpha^{-1} : F \circ G \to Id_G$ и $\beta : Id_C \to G \circ F, \beta^{-1} : G \circ F \to Id$ такие, что
$\alpha \circ \alpha^{-1} = Id, \alpha^{-1} \circ \alpha = Id$ и $\beta \circ \beta^{-1} = Id, \beta^{-1} \circ \beta = Id$
Теперь приведём некоторые примеры двойственных категорий:

- Двойственность Понтрягина: $LocCompAb \simeq LocCompAb^{op}$ со следующими функторами: $F(A) = Hom(A, S^1)$, где на второй группе компактная открытая топология, и в обратную сторону также. Теперь надо указать естественное преобразование $id \to G \circ F$: $A \to Hom(Hom(A, S^1), S^1)$. Примеры: $\mathbb{Z} \longleftrightarrow S^1$, $(\mathbb{R}, +) \longleftrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $CompAb \longleftrightarrow Ab$;

- Двойственность Стоуна: $TotDiscComp^{op} \simeq Bool$, где $TotDiscComp$ – вполне несвязные (дополнение открытого открыто) компактные топологичекие пространства, $Bool$ – коммутативные кольца с единицей, в которых квадрат любого элемента равен ему самого. $F(X) =$ булева алгебра открытых множеств в X, умножение – пересечение, сумма – симметрическая разность. $G(R) =$ множество максимальных идеалов в R с топологией Зарисского.

- Двойственность Гельфанда: $Comp^{op} \simeq$ коммутативныеC^*-алгебры, где C^*-алгебра – алгебра над $\mathbb{C}$ с инволюцией *, нормой, согласованной с *: $||a*|| = ||a||$, $||aa^*|| = ||a||^2$, и эта алгебра полна как метрическое простанство, с данной нормой, морфизмы – морфизмы алгебр, не увеличивающие норму. $F(X) \to Map(X, \mathbb{C})$, $f^*(x) = f(\bar{x})$, $||f|| = max|f(x)|$. Функтор в другую сторону: $A \to$ множество максимальных идеалов, устойчивых относительно инволюции, с некоторой топологией.

- Категория накрытий $Cov(X)$: фиксируем компактно-порождённое связное топологическое пространство X, $ObCov(X) =$ пары из Y и накрытия $Y \to X$, морфизмы – непрерывные отображения из Y в Z, коммутирующее с выбранными накрытиями. Тогда $Cov(X)^{op} \simeq \pi_1(X)$-множества [5];

- Есть двойственность категорий, возникающая из теории Галуа.

Теорема 1. *Критерий эквивалентности категорий: $F : C \to D$ задаёт эквивалентность категорий тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

[5]здесь может быть когда-нибудь будет определение G – множеств

- *F унивалентен, то есть отображение $Hom(X,Y) \to Hom(F(X),F(Y))$ инъективно;*
- *F полон, то есть отображение $Hom(X,Y) \to Hom(F(X),F(Y))$ сюръективно;*
- *F существенно сюръективен: $\forall A \in D\ \exists X \in C : A \cong F(X)$.*

  Примечание 5. первые два условия означают, что $F(C)$ – полная подкатегория в D.

Доказательство.
Лемма 1. *$A \cong B$, $C \cong D$, тогда $Hom(A,C) \cong Hom(B,D)$, причём каждому морфизму слева сопоставляется единственный морфизм, делающий диаграмму из этого морфизма и двух фиксированных изоморфизмов коммутативной.*

В одну сторону: $G : D \to C$, $F \circ G \simeq id_D$, $X \simeq F(G(X))$ – существенная сюръективность.
Пусть $Ff = Fg$, $GFf = GFg$, тогда и f, и g делают соответствующую диаграмму из леммы коммутативной, откуда совпадают, то есть F – унивалентен.
Полнота: $f : F(A) \to F(B)$, рассмотрим $G(f)$ и диаграмму с $A, B, GF(A), GF(B)$, есть единственное g, делающее диаграмму коммутативной, $GF(g) = G(f)$, откуда $F(g) = f$.
В другую сторону: построим G, так как F существенно сюръективно, можно определить $G(X) = Y : X \cong F(Y)$[6], определим G на морфизмах, сделав диаграмму из $A, B, F(G(A)), F(G(B))$ коммутативной получим $g : F(G(A)) \to F(G(B))$, но F – полный и унивалентный, поэтому $g = F(h)$, $G(f) := h$. Изоморфизм между id и $F \circ G$ есть по построению, дальше надо построить $\eta_X : X \to G(F(X))$, для этого найдём $F(\eta_X) : F(X) \to F(G(F(X)))$, такое отображение $F(\eta_X)$ уже найдётся, и F можно убрать из-за его хороших свойств. □

Скелеты

Определение 21. Категория *скелетная*, если в ней изоморфные объекты совпадают.

Определение 22. *Скелет* категории C – скелетная полная подкатегория D (для любого объекта из C есть изоморфный ему из D).

Примечание 6. Скелет категории эквивалентен исходной категории, так как можно взять одним из функторов вложение.
Примеры скелетов:

- $Sets$ – кардиналы;
- Вполне упорядоченные множества – ординалы;
- $Vect_F$ – $F^{(I)}$, где I – кардинал.

Утверждение 4.
- В каждой категории существует скелет;
- Скелет эквивалентен исходной категории;
- Скелетные категории эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны;
- Две категории эквивалентны $\Leftrightarrow$ их скелеты изоморфны.

Доказательство. Первое – возьмём по представителю из каждого класса эквивалентности по отношению изоморфности. Четвёртое следует из третьего. Третье: F и G задают эквивалентность C и D $A \cong F(G(A))$, но тогда $A = F(G(A))$, построим G', на объектах совпадает с G, $f = F(h)$ из хороших свойств F, $G(f) := h$. □

[6]при этом мы выбираем один элемент даже не из множества, а из класса

Предметный указатель

Двойственная категория, 3
Естественное проеобразование, 8
Забывающий функтор, 6
Изоморфные объекты, 3
Категория, 3
Категория стрелки, 5
Композиция(вертикальная) естественных преобразований, 9
Композиция(горизнтальная) естественных преобразований, 9
Контрвариантый функтор, 7
Копредставимый функтор, 7
Копроизведение объектов, 4
Критерий эквивалентности категорий, 9
Множества с выделенной точкой, 7
Полнота функтора, 10
Представимый функтор, 7
Произведение объектов, 4
Расслоённое произведение, 5
Расщепимый мономорфизм, 7
Расщепимый эпиморфизм, 8
Свободный функтор, 6
Скелет, 10
Скелетная категория, 10
Терминальный объект, 3
Топологическая группа, 8
Унивалентность функтора, 10
Функтор, 5, 6
Эквивалентность категорий, 9
Эпиморфизм, 7
мономорфизм, 7