# Геометрия и топология. Факты 2 сем., которые вскоре станут билетами

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Фоминых Е. А., конспекта Георгия Миллера, а также других источников)

26 марта 2021 г.

Основные (по моему мнению) определения и факты из топологии (на самом деле, почти всё, что можно).

# Содержание

# 1 Аффинные пространства.

## 1.1 Начальные определения и свойства.

Билет 1.

**Определение 1.** *Аффинное пространство* - тройка $(X, \vec{X}, +)$, состоящая из непустого множества *точек*, векторного пространства над $\mathbb{R}$ (*присоединённое*) и операцией $+ : X \times \vec{X} \to X$ *откладывания вектора*.

Налагаемые условия - для любых точек $x, y \in X$ существует единственный вектор $v \in \vec{X}$ такой, что $x + v = y$ ($\vec{xy}$), а также ассоциативность откладывания вектора.

*Утверждение* 1.
1. $x + \vec{xy} = y$
2. (правило треугольника) $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$
3. $\vec{xx} = \vec{0}$
4. $x + \vec{0} = x$
5. $\vec{yx} = -\vec{xy}$
6. $x + \vec{u} = y + \vec{u} \longrightarrow x = y$
7. $\vec{xy} = \vec{0} \longrightarrow x = y$

*Доказательство.*
1. Из определения
2. $x + (\vec{xy} + \vec{yz}) = (x + \vec{xy}) + \vec{yz} = y + \vec{yz} = z$, но $x + \vec{xz} = z$, а тогда из первого свойства операции $+$ получаем равенство векторов.
3. $\vec{xx} + \vec{xx} = \vec{xx} \implies \vec{xx} = \vec{0}$
4. $x + \vec{0} = x + \vec{xx} = x$
5. $\vec{xy} + \vec{yx} = \vec{xx} = \vec{0} \implies \vec{yx} = -\vec{xy}$
6. $x = (x + \vec{u}) - \vec{u} = (y + \vec{u}) - \vec{u} = y$
7. $y = x + \vec{xy} = x + \vec{0} = x$

□

**Определение 2.** *Начало отсчёта* аффинного пространства - произвольная фиксированная точка $o \in X$.

**Лемма 1.** *Начало отсчёта $o \in X$ задаёт биекцию $\varphi_o : X \to \vec{X}$ по правилу:*

$$\varphi_o(x) = \vec{ox} \; \forall x \in X.$$

*Такая биекция называется векторизацией аффинного пространства.*

**Определение 3.** *Линейная комбинация* $\sum t_i p_i$ точек с коэффициентами относительно начала отсчёта $o \in X$ - вектор $v = \sum t_i \vec{op_i}$, или точка $p = o + v$. Комбинация называется *барицентрической*, если сумма коэффициентов равна единице, и *сбалансированной*, если сумма коэффициентов равна нулю.

**Теорема 1.** *Барицентрическая комбинация точек - точка, не зависящая от начала отсчёта. Сбалансированная комбинация точек - вектор, не зависящий от начала отсчёта.*

*Доказательство.* Вычислим $\sum t_i p_i$ относительно начала отсчета $o$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{op_i} \text{ (вектор)}, \quad p = o + v \text{(точка)}$$

И относительно начала отсчета $o'$, обозначая $w = \overrightarrow{o'o}$, используя равенство треугольника:

$$v = \sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{o'p_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i(\overrightarrow{o'p_i} + w) = v + w \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение о сбалансированной комбинации, а если комбинация барицентрическая, то $v' = v + w \Rightarrow o' + v' = o' + w + v = o + v = p$. □

## 1.2 Материальные точки.

**Определение 4.** Пусть $x$ — некоторая точка аффинного пространства и $m$ — ненулевое число. *Материальной точкой* $(x,m)$ называется пара: точка $x$ с вещественным числом $m$, причем число m называется *массой* материальной точки $(x,m)$, а точка $x$ — носителем этой материальной точки.

**Определение 5.** *Центром масс* системы материальных точек $(x_i, m_i)$ называется такая точка $z$ (притом единственная), для которой имеет место равенство

$$m_1 \cdot z\vec{x}_1 + \ldots + m_n \cdot z\vec{x}_n = 0.$$

## 1.3 Аффинные подпространства и оболочки.

Билет 2.

**Определение 6.** Множество $Y \subset X$ - *аффинное подпространство*, если существуют такие линейное подпространство $V \subset \vec{X}$ и точка $p \in Y$, что $Y = p+V$. $V$ называется *направлением* $Y$. Определение подпространства не зависит от выбора точки в нём.

Билет 3.

**Определение 7.** *Размерность* $\dim X$ афинного пространства есть размерность его присоединённого векторного пространства.

Билет 6.

**Определение 8.** *Параллельный перенос* на вектор $v \in \vec{X}$ - отображение $T_v : X \to X$, заданное равенством $T_v(x) = x + v$.

**Определение 9.** Аффинные подпространства одинаковой размерности *параллельны*, если их направления совпадают.

**Определение 10.** *Прямая* - аффинное подпространство размерности 1, *гиперплоскость* в $X$ - аффинное подпространство размерности $\sim X - 1$.

**Лемма 2.** *(Свойства аффинного подпространства). Пусть $Y = p + V$ — аффинное подпространство. Тогда*

- *Определение подпространства не зависит от выбора точки в нем, то есть для любой $q \in Y$ верно, что $q + V = Y$.*
- *$Y$ — аффинное пространство с $\overrightarrow{Y} = Y$.*
- *Для любой $q \in Y$ верно, что $\varphi_q(Y) = V$*

Доказательства несложные, надо просто попроверять эти утверждения.

*Утверждение* 2. Две различные гиперплоскости не пересекаются тогда и только тогда, когда они параллельны.

**Определение 11.** *Суммой аффинных подпространств* называется наименьшее аффинное подпространство, их содержащее.

**Теорема 2.** *Пересечение любого набора аффинных подпространств - либо пустое множество, либо аффинное подпространство.*

*Доказательство.* Пусть $\{Y_i\}_{i\in I}$ - аффинные подпространства, $p \in Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$. Тогда $Y_i = p + V_i$, и $Y = p + \bigcap_{i\in I} V_i$. □

**Определение 12.** *Аффинная оболочка* $\operatorname{Aff} A$ непустого множества $A \subset X$ - пересечение всех аффинных подпространств, содержащих $A$. Как следствие, это - наименьшее аффинное подпространство, содержащее $A$.

**Теорема 3.** $\operatorname{Aff}(A)$ *- множество всех барицентрических комбинаций точек из $A$.*

*Доказательство.* Зафиксируем точку $p \in A$, $B = \phi_p(A)$.

- Если $x \in \operatorname{Aff}(A)$, то $\vec{px} \in \operatorname{Lin}(B)$, т.е. существуют вещественные числа $t_1, ...t_k$ и вектора $\vec{v_1}, ...\vec{v_k}$. такие, что $\vec{px} = \sum_{i=1}^k t_i\vec{v_i} = \sum_{i=1}^k t_i\vec{pp_i}$, где $p + \vec{v_i} = p_i$. Тогда $\vec{px} = \sum_{i=1}^{k+1} t_i\vec{pp_i}$ ($p_{k+1} = p$, $t_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k t_i$) - искомая барицентрическая комбинация.
- Наоборот, если $x = \sum_{i=1}^k t_ip_i$, то $x = p + \sum_{i=1}^k t_i\vec{pp_i}$. Так как $p, p_i \in A$, то $\vec{pp_i} \in B \implies \sum_{i=1}^k t_i\vec{pp_i} \in \operatorname{Lin}(B) \implies x \in \operatorname{Aff}(A)$

□

**Определение 13.** Точки $p_1, \dots, p_k$ *аффинно зависимы*, если существуют такие коэффициенты $t_i \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $\sum t_i = 0$ и $\sum t_ip_i = 0$. Если такой комбинации нет, то точки *аффинно независимы*.

**Теорема 4.** *(Переформулировки аффинной независимости.) Для $p_1, \dots, p_k \in X$ следующие свойства эквивалентны:*

- *они аффинно независимы;*
- *векторы $p_1p_i$, $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, линейно независимы;*
- $\dim \operatorname{Aff}(p_1, \dots, p_k) = k - 1$*;*
- *каждая точка из $\operatorname{Aff}(p_1, \dots, p_k)$ единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации $p_i$.*

*Доказательство.* $1 \Leftrightarrow 2$. Точки аффинно зависимы тогда и только тогда, когда существует набор $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, не все из которых равны нулю,

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = 0 : \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{p_1 p_i} = 0 \Leftrightarrow \exists t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R},$$

не все из которых равны нулю: $\sum_{i=2}^{k} t_i \vec{p_1 p_i} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.

$2 \Leftrightarrow 3$. $\mathrm{Aff}(p_1, \dots, p_k) = p_1 + \mathrm{Lin}(\vec{p_1 p_2}, \dots, \vec{p_1 p_k})$.

$1 \Rightarrow 4$. От противного. Пусть есть две барицентрические комбинации с одинаковым значением $x = \sum t_i p_i = \sum s_i p_i$. Возьмём произвольную точку $p : \vec{px} = \sum t_i \vec{pp_i} = \sum s_i \vec{pp_i}$. Тогда $\sum (t_i - s_i) \vec{pp_i} = 0$. Получится сбалансированная комбинация, равная нулевому вектору, что противоречит независимости точек.

$4 \Rightarrow 1$. Также от противного. Пусть есть сбалансированная комбинация, равная нулевому вектору: $\sum t_i p_i = 0$. Возьмём произвольную барицентрическую комбинацию: $x = \sum s_i p_i$. Тогда $x = \sum (s_i + t_i) p_i$ - другая барицентрическая комбинация с тем же значением $x$, что противоречит условию. $\square$

## 1.4 Базисы и отображения.

**Определение 14.** *Аффинный базис* - набор $n+1$ точке в $X$, пространстве размерности $n$, являющийся аффинно независимым. Или же, это - точке $o \in X$ и базис $e_0, \dots, e_n$ пространства $\vec{X}$.

**Определение 15.** Каждая точка однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $\sum_{i=0}^{n} t_i e_i$, а числа $t_i$ называют *барицентрическими координатами* этой точки.

Билет 4.

**Определение 16.** (Говно-определение). Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если отображение $\tilde{F}_p$ линейно для некоторой точки $p \in X$. Отображение $\tilde{F}_p : \vec{X} \to \vec{Y}$ индуцируется из любого отображения $F : X \to Y$ посредством формулы $\forall v \in \vec{X}\ \tilde{F}_p(v) = \overrightarrow{F(p)F(q)}$, где $q = p + v$.

**Определение 17.** Отображение $\tilde{F}$ называется *линейной частью* аффинного отображения $F$.

**Определение 18.** (Нормальное определение.) Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если существует такое линейное $L : \vec{X} \to \vec{Y}$, что для любых $q, p \in X$, $\overrightarrow{F(p)F(q)} = L(\vec{pq})$.

*Утверждение* 3. Два эти определения эквивалентны, из первого во второе - полагаем $L := \tilde{F}_p$. В обратную же проверяем, что $\tilde{F}_p = L$.

**Лемма 3.** *Пусть $p_1, \dots p_n$ - аффинно независимые точки в аффинном пространстве $X$, а $q_1, \dots q_n$ - точки в аффинном пространстве $Y$. Тогда существует такое аффинное отображение $F : X \to Y$ что $F(p_i) = q_i$. Кроме того, если $\dim X = n-1$, то такое отображение единственно.*

*Доказательство.* Точки $p_1, \dots p_n$ - аффинно независимы $\iff$ вектора $\{\vec{p_1 p_i}\}_{i=2}^{n}$ линейно независимы $\implies$ существует линейное отображение $L : \vec{X} \to \vec{Y}$ такое, что $L(\vec{p_1 p_i}) = \vec{q_1 q_i}$ (такое отображение единственно $\iff$ $\dim X = n-1$). Тогда существует единственное аффинное отображение $F : X \to Y$ такое, что $F(p_1) = q_1$ и $\tilde{F} = L$. Легко видеть, что $F(p_i) = F(p_1) + L(\vec{p_1 p_i}) = q_1 + \vec{q_1 q_i} = q_i$. $\square$

**Теорема 5.** *Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $L : \vec{X} \to \vec{Y}$ линейно. Тогда существует единственное аффинное отображение $F : X \to Y$ такое, что $\tilde{F} = L$ и $F(x) = y$.*

*Доказательство.* Начнём с существования. Определим $F : X \to Y$ формулой $F(p) = y + L(\vec{xp})$ для всех $p \in X$. Тогда для всех $p \in X$ выполнено:

$$\tilde{F}_x(\vec{xp}) = \overrightarrow{F(x)F(p)} = \overrightarrow{yF(p)} = L(\vec{xp}),$$

откуда $\tilde{F}_x$ равно $L$ и, в частности, линейно, а потому $F$ - аффинное.

Теперь - единственность. Пусть $F$ и $G$ - два аффинных отображения, которые удовлетворяют условиям теоремы. Тогда для любой $p \in X$,

$$F(p) = F(x + \vec{xp}) = F(x) + \tilde{F}(\vec{xp}) = y + L(\vec{xp}) = G(x) + \tilde{G}(\vec{xp}) = G(p).$$

□

**Лемма 4.** *Пусть $p_1, \dots, p_n$ - аффинно независимые точки в аффинном пространстве $X$, $q_1, \dots, q_n$ - точки в аффинном пространстве $Y$. Тогда существует такое аффинное отображение $F : X \to Y$, что $F(p_i) = q_i$ $\forall i$. Кроме того, если $\dim X = n - 1$, то такое отображение единственно.*

**Лемма 5.** *Аффинное отображение сохраняет барицентрические комбинации.*

*Доказательство.* Пусть $x \in X$ - какая-то точка. Тогда $F(\sum_{i=1}^n t_i x_i) = F(x + \sum_{i=1}^n t_i \vec{xx_i}) = F(x) + \tilde{\sum}_{i=1}^n t_i \vec{xx_i} = F(x) + \sum_{i=1}^n t_i \tilde{F}(\vec{xx_i}) = F(x) + \sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{F(x)F(x_i)} = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$ □

**Лемма 6.** *Композиция аффинных отображений - аффинное отображение. При этом линейная часть композиции - композиция линейных частей.*

*Доказательство.* $\overrightarrow{F(G(x))F(G(y))} = \tilde{F}(\overrightarrow{G(x)G(y)}) = \tilde{F}(\tilde{G}(\vec{xy}))$ □

*Утверждение* 4. Образ и прообраз аффинного подпространства - аффинное подпространство. Образы (прообразы) параллельных подпространств параллельны.

*Утверждение* 5. $F : X \to Y$ - аффинное отображение.

- Пусть $A$ - аффинное подпространство в $X$. Тогда $F(A)$ - подпространство в $Y$. Более того, образы параллельных подпространств параллельны.
- Прообраз $F^{-1}(B)$ аффинного подпространства $B \subset Y$ является аффинным подпространством (или пустым множеством) в $A$. Непустые прообразы параллельных пространств параллельны.

*Доказательство.*
- $A = p + \vec{A}$, тогда $\forall v \in \vec{A}$ $F(p + v) = F(p) + \tilde{F}(v)$. Когда $v$ пробегает $\vec{A}$, $\tilde{F}(v)$ пробегает $\tilde{F}(\vec{A})$, а тогда $F(a) = F(p) + \tilde{F}(\vec{A})$. Направление пространства $F(a)$ - $\tilde{F}(\vec{A})$ - зависит только от $F$ и $\vec{A}$.
- Выберем $p \in F^{-1}(B)$. Покажем, что $F^{-1}(B) = p + \tilde{F}^{-1}(B)$. Действительно, $x \in F^{-1}(B) \iff F(x) \in B \iff \overrightarrow{F(p)F(x)} \in \vec{B} \iff \tilde{F}(\vec{px}) \in \vec{B} \iff \vec{px} \in \tilde{F}^{-1}(\vec{B}) \iff x \in p + \tilde{F}^{-1}(\vec{B})$ Значит, $F^{-1}(B)$ - аффинное подпространство с направлением $\tilde{F}^{-1}(\vec{B})$, которое зависит только от $F$ и направления подпространства $B$.

□

**Лемма 7.** *Если $\tilde{F}_p$ линейно для некоторого $p$, то для любого $q$ $\tilde{F}_q = \tilde{F}_p$*

*Доказательство.* Пусть $q+\vec{v}=r$. $\tilde{F}_q(\vec{v}) = \overrightarrow{F(q)F(r)} = \overrightarrow{F(q)F(p)} + \overrightarrow{F(p)F(r)} = -\overrightarrow{F(p)F(q)} + \overrightarrow{F(p)F(r)} = -\tilde{F}_p(\vec{pq}) + \tilde{F}_p(\vec{pr}) = \tilde{F}_p(\vec{qr}) = \tilde{F}_p(v)$ □

*Примечание* 1. В лемме достаточно только аддитивности $\tilde{F}_p$

**Теорема 6.** *Параллельный перенос - аффинное отображение, его линейная часть тождественна. Верно также и обратное.*

**Определение 19.** По определению. Пусть $L = \mathrm{id} : \vec{X} \to \vec{X}$. Покажем, что для любых $x, y \in X$, $\overrightarrow{T_v(x)T_v(y)} = \vec{xy}$. Обозначим: $p = T_v(x)$, $q = T_v(y)$. Тогда $\vec{pq} = \vec{py} + \vec{yq} = \vec{py} + \vec{xp} = \vec{xy}$.

А теперь, в обратную сторону. Пусть $F : X \to X$ - аффинное отображение, $\vec{F} = \mathrm{id}$. Выберем $p \in X$ и обозначим $q := F(p)$. Параллельный перенос $T_{\vec{pq}}$ на вектор $\vec{pq}$ также имеет тождественную линейную часть и $T_{\vec{pq}}(p) = p + \vec{pq} = q$. Так как аффинное отображение задаётся линейной частью и образом одной точки, то $F = T_{\vec{pq}}$.

**Определение 20.** Аффинное отображение $F : X \to X$ такое, что $\tilde{F} = k\,\mathrm{id}$ для некоторого $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, называется *гомотетией*, а $k$ называют *коэффициентом растяжения* гомотетии $F$. Такое отображение имеет ровно одну неподвижную точку, называемую центром.

**Теорема 7.** *Гомотетия имеет ровно одну неподвижную точку.*

*Доказательство.* Начнём с существования. Фиксируем $p \in X$. Пусть $q \in X$ - произвольная точка. Тогда

$$F(q) = F(p + \vec{pq}) = F(p) + k\vec{pq} = p + \overrightarrow{pF(p)} + k\vec{pq}.$$

Следовательно, $q$ - неподвижная точка $F$ тогда и только тогда, когда $F(q) = p + \vec{pq}$, равносильно

$$\overrightarrow{pF(p)} = (1-k)\vec{pq}.$$

Иначе говоря,

$$q = p + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{pF(p)}.$$

Теперь - единственность. Если $q'$ - другая неподвижная точка, то

$$\tilde{F}(\overrightarrow{qq'}) = \overrightarrow{F(q)F(q')} = \overrightarrow{qq'},$$

и $k = 1$, что противоречит условию. □

**Определение 21.** Неподвижная точка гомотетии называется её *центром.*

*Следствие* 1. Гомотетии и параллельные переносы образуют группу.

**Теорема 8.** *(Основная теорема аффинной геометрии.) Пусть $X, Y$ - аффинные пространства, $\dim X \geq 2$. Пусть $F : X \to Y$ - инъективное отображение, и для любой прямой $l \subset X$ её образ $F(l)$ - тоже прямая. Тогда $F$ - аффинное отображение.*

*Доказательство.*
**Лемма 8.** *Пусть $X$ - АП, $\dim X \geq 2$, $l_1$ и $l_2$ - различные параллельные прямые. Также есть три различные точки: $a, b \in l_1$, $c \in l_2$. Пусть $l_3 = (ac)$, $b \in l_4$, $l_3 || l_4$. Тогда:*

1. *Существует аффинная плоскость $\Sigma$, содержащая $l_1$ и $l_2$*

2. *Прямые $l_3$ и $l_4$ также лежат в $\Sigma$.*

3. *Прямые $l_2$ и $l_4$ пересекаются в одной точке, обозначим её $d$.*

4. $\vec{ab} = \vec{cd}$ *и* $\vec{ac} = \vec{bd}$.

5. *Прямые $l_5 = (ad)$ и $l_6 = (bc)$ также лежат в $\Sigma$ и пересекаются в точке $o$.*

*Доказательство.* 1. Легко понять, что векторы $\vec{ab}$ и $\vec{ac}$ линейно независимы и подойдёт плоскость $\Sigma = a + \mathrm{Lin}(\vec{ab}, \vec{ac})$.

2. С $l_3$ всё понятно, а $l_4 = b + \mathrm{Lin}(\vec{ac}) = a + \vec{ab} + \mathrm{Lin}(\vec{ac}) \subset a + \mathrm{Lin}(\vec{ab}, \vec{ac}) = \Sigma$

3. Точка $d = a + \vec{ab} + \vec{ac}$ лежит на обеих прямых.

4. Следует из построения точки $d$.

5. Точка $o = a + \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac})$ лежит на $(ad)$ по понятным причинам, а также лежит на $(bc)$, так как является барицентрической комбинацией точек $b$ и $c$.

$\square$

**Шаг 1:** Докажем, что $F$ сохраняет параллельность прямых, т.е. что если $l_1||l_2$, то $F(l_1)||F(l_2)$. Достаточно показать, что $F(l_1)$ и $F(l_2)$ лежат в одной плоскости, тогда требуемое утверждение будет следловать из инъективности отображения. Применим лемму и построим на прямой $l_1$ точки $a, b$, а на прямой $l_2$ - точку $c$. Тогда можно определить прямые $l_3, ...l_6$ и точки $d, o$. Более того, прямые $l_5$ и $l_6$ пересекаются в точке $o$ и определяют плоскость $\Sigma$, а тогда прямые $F(l_5)$ и $F(l_6)$ пересекаются в точке $F(o)$ и определяют плоскость $\Pi \subset Y$, в которой лежат точки $F(a), F(b), F(c), F(d)$ и прямые $l_1, l_2, l_3, l_4$. Более того, мы доказали, что точки $F(a), F(b), F(c), F(d)$ образуют параллелограмм, и, например, $\overrightarrow{F(a)F(c)} = \overrightarrow{F(b)F(d)}$.

**Шаг 2:** Выберем какую-нибудь точку $a \in X$ и рассмотрим отображение $\tilde{F}_a(\vec{ax}) = \overrightarrow{F(a)F(x)}$. Покажем, что $\tilde{F}_a$ аддитивно.

- Вектора $u = \vec{ab}, v = \vec{ac}$ линейно независимы. Тогда построим конструкцию как в лемме, и $\tilde{F}_a(u) + \tilde{F}_a(v) = \overrightarrow{F(a)F(b)} + \overrightarrow{F(a)F(c)} = \overrightarrow{F(a)F(b)} + \overrightarrow{F(b)F(d)} = \overrightarrow{F(a)F(d)} = \tilde{F}_a(u+v)$.

- Вектора $u$ и $v$ линейно зависимы. Выберем произвольный вектор $w$, линейно независимый с ними. Тогда следующие пары векторов: $v+w$ и $u$, $u+v$ и $w$ - также будут линейно независимы, и мы можем применить предыдущий пункт: $F(u+v)+F(w) = F((u+v)+w) = F(u+(v+w)) = F(u)+F(v+w) = F(u)+F(v)+F(w) \implies F(u+v) = F(u)+F(v)$.

мы доказали аддитивность отображения $\tilde{F}_a$, откуда по лемме, которую Иван Кабашный не хотел вставлять в конспект, потому что "это точно всё нужная информация? следует независимость его от точки $a$.

**Шаг 3:** Докажем, что $\tilde{F}$ однородно над $\mathbb{Q}$, т.е. что $\tilde{F}(k\vec{v}) = k\tilde{(\vec{v})}$

1. Случай $k \in \mathbb{N}$ следует из аддитивности.

2. Случай $k = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$: $\tilde{F}(x) = \tilde{F}(n(\frac{1}{n}\vec{x})) = n\tilde{F}(\frac{1}{n}\vec{x})$, откуда следует требуемое

3. Случай $k = -1$: $\vec{0} = \tilde{F}(\vec{0}) = \tilde{F}(\vec{x} + \vec{-x}) = \tilde{F}(\vec{x}) + \tilde{F}(-x)$, откуда следует требуемое.

4. Случай $k \in \mathbb{Q}$ следует из предыдущих пунктов.

**Шаг 4:** Докажем, что для любого $u \in \vec{X}$ и $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ найдётся такое $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, что $\tilde{F}(\lambda^2 u) = \mu^2 \tilde{F}(u)$. Для этого рассмотрим точку $o$ и проведём через неё различные прямые $l_1 = o + \mathrm{Lin}(u)$ и $l_2$. На $l_1$ отметим точки $x = o + u$, $x_1 = o + \lambda u$, $x_2 = o + \lambda^2 u$, а на $l_2$ - точки $y \neq o$, $y_1 = o + \lambda \vec{oy}$. Если $G$ - гомотетия с центром $p$ и коэффициентом $\lambda$, то $G(x) = x_1$, $G(x_1) = x_2$, $G(y) = y_1$. Мы знаем, что любое инъективное аффинное отображение переводит прямые в прямые (причём параллельные в параллельные). Значит, $(xy)||(x_1, y_1)$ и $(x_1 y)||(x_2 y_1)$. Далее этом шаге мы вместо $F$(что-то там) будем писать (что-то там)$'$. $l_1' \cap l_2' = \{o'\}$, а $x', x_1', x_2' \in l_1'$ $y', y_1' \in l_2'$ - различные прямые и точки. Тогда существует $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ такое, что $\vec{o'x_1'} = \mu \vec{o'x'}$, а тогда из параллельностей разных прямых следует, что $\vec{o'y_1'} = \mu \vec{o'y'}$, и $\vec{o'x_2'} = \mu \vec{o'x_1'} = \mu^2 \vec{o'x'}$. В итоге $\tilde{F}(\lambda^2 u) = \tilde{F}(o\vec{x}_2) = \overrightarrow{F(o)F(x_2)} = \vec{o'x_2'} = \mu^2 \vec{o'x'} = \mu^2 \tilde{F}(u)$.

**Шаг 5:** Осталось доказать, что для иррационального $r$ и любого вектора $u$ верно $\tilde{F}(ru) = r\tilde{F}(u)$. Из пункта 4 следует, что $\tilde{F}$ сохраняет порядок точек на прямой. Рассмотрим тогда произвольную точку $x$ и прямую $l$, проходящую через неё с направлением $u$. Пусть $a = x + ru$, $v = \tilde{F}(u) \in \tilde{Y}$, $b = F(a), y = F(x)$. Нам надо доказать, что $b = y + rv$. Рассмотрим теперь две последовательность рациональных чисел $(s_i) \to r_-$ и $(t_i) \to r_+$ и соответствующие им последовательность точек $(S_i)$ и $(T_i)$ ($S_i = x + s_i u$ и алаогично для $T_i$). Тогда для любых $i, j$ точка $S_i$ лежит "левее"$a$, а $T_j$ - "правее". Значит, то же самое верно для точек $F(S_i)$, $F(T_i)$ и $b = F(a)$. Если вдруг $b \neq y + rv$, а равно $y + r'v$ (НУО, $r' < r$), то для достаточно больших индексов точки $(S_i)$ окажутся "очень близки"к $b + rv$ и, в частности, "правее"$F(b)$, противоречие. □

# 2 Проективные пространства.

## 2.1 Начальные определения и свойства.

**Определение 22.** Пусть $V$ - векторное пространство над полем $K$. На множестве $V\setminus\{0\}$ введём отношение эквивалентности

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in K : x = \lambda y.$$

Тогда фактор $V$ по этому отношению называют *проективным пространством* ($\mathbb{P}(V)$), порождённым векторным $V$. Само отображение из векторного пространства в соответствующее проективное называют *проективизацией*.

*Примечание* 2. *Размерность* $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

**Теорема 9.** *Пусть* $Y, Z \subset X$ *- подпространства,* $\dim Y + \dim Z \geq \dim X$*, тогда*

- $Y \cap Z \neq \emptyset$*;*
- $Y \cap Z$ *- подпространство;*
- $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$*.*

*Доказательство.* Идея доказательства - свести всё к линейной алгебре. Пусть $Y = \mathbb{P}(W)$, $Z = \mathbb{P}(U)$, $n$, $m$, $k$ - соответственные размерности $X$, $Y$, $Z$. Тогда $\dim V = n + 1$, $\dim W = m + 1$, $\dim U = k + 1$, где $m + k \geq n$ по условию. Заметим, что $W \cap U$ - подпространство и

$$\dim W \cap U = \dim W + \dim U - \dim(W + U) \geq m + k - 2 - (n + 1) \geq 1.$$

Значит, $Y \cap Z \neq \emptyset$ и $\dim(Y \cap Z) \geq m + k - n$. □

**Определение 23.** Пусть $W$ - непустое векторное подпространство $V$. Тогда $\mathbb{P}(W)$ называется *проективным подпространством* $\mathbb{P}(V)$.

**Определение 24.** Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство размерности $n$. Числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, являющиеся координатами вектора $v$, порождающего $p \in \mathbb{P}(V)$, называются *однородными координатами*.

Пусть $X$ - АП. Фиксируем $a \in X$. $\phi_a : X \to \vec{X}$ - стандартная векторизация. Рассмотрим векторное пространство $V = \vec{X} \times \mathbb{R}$ и порождаемое им АП $V$. Есть вложение $i : X \to V$, $i(x) = (\phi_a(x), 1)$.

**Определение 25.** $\hat{X} = \mathbb{P}(V)$ - *проективное пополнение* аффинного пространства $X$, а множество $X_\infty = \mathbb{P}(\vec{X} \times 0) \subset \hat{X}$ - *бесконечно удалённые точки*. Также, множество этих точек есть гиперплоскость в $\hat{X}$, которая называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью*.

Рассмотрим векторное пространство $V$ и его линейную гиперплоскость $W \subset V$. Посмотрим на $V$ как на аффинное пространство. Выберем аффинную гиперплоскость $X \subset V \backslash \{0\}$, параллельную $W$ и не содержащую 0. Тогда каждая прямая из $V \backslash W$ пересекает $X$ ровно в одной точке. Значит, мы можем отождествить $\mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(W)$ с $X$ и задать на нём аффинную структуру.

*Примечание* 3.

- $W = \vec{X}$
- $\mathbb{P}(V) = \hat{X}$
- $\mathbb{P}(W)$ - бесконечно удалённая гиперплоскость для $X$.

**Определение 26.** Пусть $V$ - векторное пространство, $W \subset V$ - линейная гиперплоскость, $X$ - гиперплоскость ей пареллельная. Тогда биекцию $\mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(W) \to X$ называют *картой* пространства $\mathbb{P}(V)$.

**Определение 27.** Пусть на $\mathbb{R}p^1$ (прямая с бесконечно удалённой точкой) выбрана аффинная система координат, в которой $A = a$, $B = b$, $C = c$ и $D = d$. Определим *двойное отношение* четвёрки точек $(A, B, C, D)$ формулой

$$[A, B, C, D] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-c}{b-d}.$$

*Утверждение* 6. Данное определение инвариантно относительно выбора карты, а само отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

## 2.2 Проективные отображения.

**Лемма 9.** *Пусть $V, W$ - векторные пространства и $L : V \to W$ - инъективное линейное отображение. Тогда существует единственное отображение $F : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ такое, что*

$$P_W \circ L = F \circ P_V,$$

*где $P_V$, $P_W$ - проекции из $V \backslash \{0\}$ и $W \backslash \{0\}$ в $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(W)$ соответственно.*

**Определение 28.** Отображение $F$ из леммы выше называется *проективизацией* $L$, и обозначается как $F = \mathbb{P}(L)$.

**Определение 29.** Отображение из $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ - *проективное*, если оно является проективизацией некоторого линейного $L : V \to W$.

*Утверждение* 7. Проективное отображение переводит проективные подпространства (в том числе, всё пространство) в проективные пространства той же размерности.

**Теорема 10.** *Пусть $X, Y$ - аффинные пространства, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ - их проективыне пополнения, $F : X \to Y$ - инъективное аффинное отображение. Тогда существует единственное проективное отображение $\hat{F} : \hat{X} \to \hat{Y} : \hat{F}|_X = F$. Причём оно переводит бескоречно удалённые в бесконечно удалённые.*

**Определение 30.** Пусть $H_1, H_2 \subset X$ - гиперплоскости ($X$ - проективное), $p \in X \backslash (H_1 \cup H_2)$. *Центральная проекция* $H_1$ и $H_2$ с центром $p$ - проективное отображение $F : H_1 \to H_2$, определяемое так: пусть $x \in H_1$, тогда $F(x)$ - точка пересечения прямой $(px)$ и гиперплоскости $H_2$.

**Теорема 11.** *Центральная проекция - проективное преобразование.*

*Доказательство.* Пусть $V$ - векторное пространство, $W_1, W_2 \subset V$ - гиперплоскости, а $l \subset V$ - прямая. $X = \mathbb{P}(V)$, $H_{1,2} = \mathbb{P}(W_{1,2})$, $p = \mathbb{P}(l)$ (конечно, $p \notin H_1 \cup H_2$). Так как $W_2 \cap l = \{0\}$, и $\dim W_2 + \dim l = \dim V$, то $V = W_2 \oplus l$. Определим линейное отображение $L : V \to W_2$ - проекцию вдоль $l$ (т.е. если $x = a + b$, $a \in W_2, b \in l$, то $L(x) = a$). Заметим, что $L \restriction_{W_1}$ инъективно (действительно, если $L(a+b) = a = 0$, $a \in W_2, b \in l, a + b \in W_2$, то $b = a + b \in W_2$, противоречие с тем, что $W_2 \cap l = \{0\}$), а тогда $\dim \operatorname{Im} L \restriction_{W_1} = \dim W_1 = \dim W_2$, т.е. $L \restriction_{W_1}$ - биекция. Тогда нетрудно (трудно) понять, что $\mathbb{P}(L \restriction_{W_1})$ - искомая центральная проекция. □

**Определение 31.** Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство, размерности $n$. *Проективный базис* $X$ - набор из $n + 2$ точек, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной проективной гиперплоскости.

**Лемма 10.** *Можно выбрать такие векторы $v_1, \ldots, v_{n+2} \in V \backslash \{0\}$, порождающие проективный базис $p_1, \ldots, p_{n+2}$, что $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$.*

*Доказательство.* Выберем произвольные $v_1, \ldots, v_{n+2}$, порождающие $p_1, \ldots, p_{n+2}$. $p_1, \ldots, p_{n+1}$ не лежат в одной гиперплоскости, тогда $v_1, \ldots, v_{n+1}$ не лежат в одной линейной гиперплоскости, то есть, они образуют базис $V$, откуда $v_{n+2}$ равен линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$ ($a_i \in \mathbb{R}$).

Среди $a_i$ нет нулей, иначе векторы $v_i$ без одного из них линейно зависимы, а тогда $n+1$ точек лежат в одной гиперплоскости. Заменим каждый $v_i$ на $a_i v_i$, и всё получится. □

**Теорема 12.** *Пусть $X, Y$ - проективные пространства, размерностей $n$, $p_1, \ldots, p_{n+2} \in X$ и $q_1, \ldots, q_{n+2} \in Y$ - проективные базисы. Тогда существует единственное проективное отображение $F : X \to Y$ такое, что $F(p_i) = q_i$ для всех $i$.*

*Доказательство.* Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $Y = \mathbb{P}(W)$. По лемме выберем $v_i$, порождающие $p_i$, и $w_i$, порождающие $q_i$ (всех по $n + 2$) с равенствами $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$ и $w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i$. $v_1, \ldots, v_{n+1}$ - базис $V$, $w + i$ - базис $W$. Определим линейную биекцию $L : V \to W$ на базисе: $L(v_i) = w_i$ для $i$ от 1 до $n + 1$. По линейности получается, что $L(v_{n+2}) = w_{n+2}$. Положим $F = \mathbb{P}(L)$. Тогда $F(p_i) = q_i$ для всех $i$. Существование доказано.

Пусть теперь $F' : X \to Y$ - другое проективное отображение, для которого $F'(p_i) = q_i$ при всех $i$. Тогда $F' = \mathbb{P}(L')$, где $L' : V \to W$ - некоторая линейная биекция. Тогда $L'(v_i) = \lambda_i w_i$ для некоторого $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i$ от 1 до $n+2$. Умножим $L'$ на $\lambda_{n+2}^{-1}$, от этого $\mathbb{P}(L')$ не изменится. Для удобства новые коэффициенты также обозначим $\lambda_i$. Мы свели дело к случаю, когда $L'(v_{n+2}) = w_{n+2}$. Так как $v_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$, из линейности $L'(v_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} L'(v_i)$, тогда

$w_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i w_i$. Разложение по базису $w_1, \ldots, w_{n+1}$ единственно, откуда все $\lambda_i$ равны 1, $L' = L$, и $F' = F$. □

*Примечание* 4. Рассмотрим $\mathbb{R}P^1$ - прямую с бескоечно удалённой точкой. Числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует $[x : 1] \in \mathbb{R}P^1$, точке $[x : y] \in \mathbb{R}P^1$ - число $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$ или $\infty$. Проективное преобразование прямой с бесконечно удалёнными точками имеет вид

$$[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy],$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$. Для $\hat{\mathbb{R}}$ это - дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Особые случаи, если $cx + d = 0$, то $f(x) = \infty$, и если $x = \infty$, то $f(x) = \frac{a}{c}$.

## 2.3 Проективные и аффинные теоремы.

**Теорема 13.** *(Теорема Паппа (аффинная)). Пусть $X$ - аффинная плоскость, $l$, $l'$ - рразличные прямые в $X$. $x, y, z \in l$, $x', y', z' \in l'$ - различные точки, отличные от $l \cap l'$. Тогда из $(xy')||(x'y)$, $(yz')||(y'z)$ следует, что $(xz')||(x'z)$.*

**Теорема 14.** *(Теорема Паппа (проективная)). Пусть $\mathbb{P}(E)$ - проективная плоскость, $l, l'$ - различные прямые в $\mathbb{P}(E)$, $a, b, c \in l$, $a', b', c' \in l'$ - различные точки, отличные от $l \cap l'$. Тогда три точки - $\gamma = (ab') \cap (a'b)$, $\alpha = (bc') \cap (b'c)$ и $\beta = (ac') \cap (a'c)$ лежат на одной прямой.*

**Определение 32.** *Треугольник* - тройка точек (*вершин*), не лежащих на одной прямой. *Стороны* треугольника - прямые, содержащие пары вершин.

**Теорема 15.** *(Теорема Дезарга (аффинная)). Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ - треугольники на аффинной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые $(aa')$, $(bb')$ и $(cc')$ пересекаются в одной точке или параллельны, и $(ab)||(a'b')$, $(bc)||(b'c')$, то $(ac)||(a'c')$.*

*Доказательство.* Возможны два случая. Случай 1: прямый $(aa')$, $(bb')$ и $(cc')$ пересекаются в точке $o$. Пусть $f$ - такая гомотетия с центром в $o$, что $f(a) = a'$. Тогда из $(ab)||(a'b')$ следует, что $f(b) = b'$, и аналогично, $f(c) = c'$,поэтому $(ac)||(a'c')$.

Если же прямые параллельны, то повторяем рассуждения из первого случая, заменяя гомотетию пареллельными переносами. □

**Теорема 16.** *(Теорема Дезарга (проективная)). Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ - треугольники на проективной плоскости, и их вершины и стороны все различны. Если прямые $(aa')$, $(bb')$ и $(cc')$ пересекаются в одной точке, то три точки $\gamma = (ab) \cap (a'b')$, $\alpha = (bc) \cap (b'c')$ и $\beta = (ac) \cap (a'c')$ лежат на одной прямой.*

*Доказательство.* (Аналогично проективному Паппу). Пусть прямые $(aa'), (bb'), (cc')$ пересекаются в точке $s$. Будем считать, что $s$ не совпадает ни с одной из вершин треугольников, иначе теорема тривиальна. Легко проверить, что прямые $(aa'), (bb'), (cc')$ различны, иначе какие-то стороны треугольников совпадают. Точки $\alpha, \beta, \gamma$ существуют и отличны от вершин.

Пусть тогда $V = (\alpha\gamma)$ - проективная прямая. Тогда $X = \mathbb{P}(E)\backslash V$ - аффинная плоскость, и $a, b, c, a', b', c' \in X$. В аффинной плоскости $X$ следующие аффинные прямые параллельны: $(ab)||(a'b')$, $(bc)||(b'c')$, так как их проективизации пересекаются на $V$. Из аффинной теоремы Дезарга, $(ac)||(a'c')$ в $X$ как аффинные прямые. Значит, точка $\beta$ пересечения проективных прямых $(ac)$ и $(a'c')$ лежит в $V$. □

# 3 Евклидовы пространства.

## 3.1 Начальные определения и свойства.

**Определение 33.** *Скалярное произведение* на векторном пространстве $X$ - функция

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая условиям симметричности, линейности по каждому аргументу и неотрицательности $\langle x, x\rangle$ (равно нулю только при $x = 0$).

*Евклидово протранство* - векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

**Определение 34.** *Длина* (норма) вектора $x \in X$ - $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, *расстояние* между $x, y \in X$ - $d(x, y) = |x - y|$.

**Теорема 17.** *(Неравенство КБШ). Для любых $x, y \in X$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

*Причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ линейно зависимы.*

*Следствие* 2. Для любых $x, y \in X$ $|x + y| \leq |x| + |y|$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда один из векторов равен нулю или они сонаправленны.

*Следствие* 3. Для любых $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы $x - y$ и $y - z$ сонаправлены или один из них равен нулю.

**Определение 35.** Пусть $X$ - евклидово пространство. *Угол* между ненулевыми векторами $x$ и $y$ - это $\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.

Свойства:

- $\angle(x, y) \in [0, \pi]$;
- $\angle(x, \lambda y) = \angle(x, y)$ при положительнос $\lambda$;
- $\angle(x, \lambda y) = \pi - \angle(x, y)$ при отрицательном $\lambda$.

**Теорема 18.** *(Теорема косинусов).*

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \angle(x, y).$$

**Теорема 19.** *(Неравенство треугольника для углов). Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,*

$$\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z).$$

*Доказательство.* Пусть $\alpha = \angle(x, y)$, $\beta = \angle(y, z)$, $\gamma = \angle(x, z)$. Можно считать, что $\alpha+\beta < \pi$, иначе неравенство тривиально.

Построим в $\mathbb{R}^2$: $|x'| = |x|$, $|z'| = |z|$, $\angle(x', z') = \alpha + \beta$, $u' \in [x'z']$, $\angle(x', u') = \alpha$. Построим в $X$ вектор $u$ так, что $u \upuparrows y$, $|u| = |u'|$. По теореме косинусов, $|x-u| = |x'-u'|$, $|u-z| = |u'-z'|$.

Тогда из неравенства КБШ $|x-z| \le |x-u| + |u-z| = |x'-u'| + |u'-z'| = |x'-z'|$. Тогда из теоремы косинусов,

$$\cos\angle(x,z) = \frac{|x|^2+|z|^2-|x-z|^2}{2|x||z|} \ge \cos\angle(x',z') = \frac{|x'|^2+|z'|^2-|x'-z'|^2}{2|x'||z'|},$$

и тогда $\gamma = \angle(x,z) \le \angle(x',z') = \alpha+\beta$. □

*Примечание* 5. Неравенство треугольника для углов позволяет определить *угловую метрику* на сфере $S = \{x \in X : |x| = 1\}$: $d_{\angle(x,y)} = \angle(x,y)$.

*Следствие* 4. Для любых ненулевых $x, y, z \in X$,

$$\angle(x,y) + \angle(y,z) + \angle(z,x) \le 2\pi.$$

## 3.2 Ортогональность.

**Определение 36.** Векторы $x, y \in X$ *ортогональны*, если $\langle x,y\rangle = 0$. Обозначается как $x \perp y$.

**Теорема 20.** *(Теорема Пифагора). Если $x \perp y$, то $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

*Следствие* 5. Если векторы $v_1, \dots, v_n$ попарно ортогональны, то

$$|v_1 + \ldots + v_n|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2.$$

**Определение 37.** *Ортонормированный* набор векторов - такой, в котором каждые два вектора ортогональны и все имеют длину 1.

**Теорема 21.** *Пусть $v_1, \dots, v_n$ - ортонормированный набор, $x = \sum \alpha_i v_i$, $y = \sum \beta_i v_i$ ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$). Тогда $\langle x,y\rangle = \sum \alpha_i\beta_i$, а $|x|^2 = \sum a_i^2$.*

**Теорема 22.** *Любой ортонормированный набор линейно независим.*

**Теорема 23.** *(Об ортогонализации по Граму-Шмидту). Для любого линейно-независимого набора векторов $v_1, \dots, v_n$ существует единственный ортонормированный набор $e_1, \dots, e_n$ такой, что для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ $\mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$ и $\langle v_k, e_k\rangle > 0$.*

*Доказательство.* Для начала, нужно построить ортонормированный набор с двумя свойствами. Строить будем по индукции, положим $e_1 := \frac{v_1}{|v_1|}$. Очевидно, что $\mathrm{Lin}(e_1) = \mathrm{Lin}(v_1)$ и $\langle v_1, e_1\rangle > 0$. Предположим, что $e_1, \dots, e_{k-1}$ с требуемыми двумя свойствами построены. Докажем переход. Полагаем $w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle v_k, e_i\rangle e_1$. Тогда $w_k$ ортогонален $e_1, \dots, e_{k-1}$ так как $\langle w_k, e_j\rangle = \langle v_k, e_j\rangle - \sum\langle v_k, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$. $w_k \ne 0$, иначе $v_k \in \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, x_{k-1})$. Положим теперь $e_k := \frac{w_k}{|w_k|}$. Нетрудно проверить требуемые свойства (если трудно - 12 страница 5 лекции).

Теперь проверим единственность набора. Вектор $e_k$ должен быть линейной комбинацией $e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$:

$$e_k = \alpha v_k + \sum \alpha_i e_i.$$

Из $\langle e_k, e_j\rangle = 0$ получаем $\alpha\langle v_k, e_j\rangle + \alpha_j = 0$ для всех $j$ от 1 до $k-1$. Эти уравнения однозначно определяют отношения $\alpha_j \backslash \alpha$. То есть, набор альф определён однозначно с точностью до пропорциональности. Коэффициент пропорциональности определяется однозначно из единичности нормы и $\langle v_k, e_k\rangle > 0$. □

*Следствие* 6. Пусть $X$ - конечномерное евклидово пространство. Тогда в $X$ существует ортонормаированный базис, и любой ортонормаированный набор можно дополнить до ортономированного базиса.

*Доказательство.* Существование показывается тем, что можно выбрать произвольный базис и его ортогонализировать. Второй пункт следует из того, что мы можем дополнить до произвольного базиса, затем ортогонализировать. Начальный ортонормированный набор не изменится. □

## 3.3 Изоморфизмы.

**Определение 38.** Евклидовы пространства $X$ и $Y$ *изоморфны*, если существует линейная биекция $f : X \to Y$, сохраняющая скалярное произведение:

$$\langle f(v), f(w)\rangle_Y = \langle v, w\rangle_X$$

для любых $v, w \in X$. Такое $f$ называется *изоморфизмом* (евклидовых пространств).

**Теорема 24.** *Пусть $X, Y$ - конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности. Тогда $X$ и $Y$ изоморфны.*

*Следствие* 7. Любое евклидово пространство размерности $n$ изоморфно $\mathbb{R}^n$.

## 3.4 Продолжение ортогональности.

**Определение 39.** Пусть $X$ - евклидово пространство, $A$ - его подмножество. *Ортогональное дополнение* множества $A$ это -

$$A^\perp = \{x \in X : \forall v \in A \ \langle x, v\rangle = 0\}.$$

*Утверждение* 8. Ортогональное дополнение - линейное пространсто. Если $A \subset B$, то $B^\perp \subset A^\perp$. Наконец, $A^\perp = \mathrm{Lin}(A)^\perp$.

**Теорема 25.** *Пусть $X$ - конечномерное евклидово пространство, $V \subset X$ - линейное подпространство. Тогда $X = V \oplus V^\perp$, и $(V^\perp)^\perp = V$.*

*Доказательство.* Пусть $n = \dim X$, $kk = \dim V$. Выберем тогда ортонормаированный базис $e_1, \dots, e_k$ в $V$, дополним до ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ в $X$. Тогда

$$V^\perp = \mathrm{Lin}(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Аналогично, $(V^\perp)^\perp = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = V$. □

**Определение 40.** *Ортогональная проекция* $x$ на $V$ ($\mathrm{Pr}_V(x)$) - такой вектор $y \in V$, что $x - y \in V^\perp$.

*Утверждение* 9. (Переформулировка). Иначе говоря, $\mathrm{Pr}_V(x)$ - такой вектор $y \in V$, что $x - y \in V^\perp$.

Свойства:

- $\mathrm{Pr}_V : X \to V$ - линейное отображение (прямая проверка);
- $\mathrm{Pr}_v(x)$ - ближайшая к $x$ точка из $V$ (следует из теоремы Пифагора).

**Определение 41.** *Нормаль* линейной гиперплоскости $H$ - любой ненулевой вектор $v \in H^{\perp}$.

Свойства:

- нормаль гиперплоскости существует, она единственна с точностью до пропорциональности;
- если $v$ - нормаль для $H$, то $H = v^{\perp} = \{x \in X : x \perp v\}$ (нормаль задаёт гиперплоскость).

**Теорема 26.** *(Конечномерная теорема Рисса). Пусть $X$ - конечномерное евклидово пространство, $L : X \to \mathbb{R}$ - линейное отображение. Тогда существует единственный вектор $v \in X$ такой, что $L(x) = \langle v, x\rangle$ для всех $x \in X$.*

**Теорема 27.** *Любая линейная гиперплоскость имеет вид $\ker L$, где $L : X \to \mathbb{R}$ - линейное отображение, $L \neq 0$. Также, $L$ определена однозначно с точностью домножения на константу.*

**Теорема 28.** *(Расстояние до гиперплоскости). Пусть $H = v^{\perp}$. Тогда расстояние от $x$ до $H$ равно*

$$d(x, H) = \frac{|\langle v, x\rangle|}{|v|},$$

*или в координатах, где $a_1, \ldots, a_n$ - координаты $v$,*

$$d(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

**Определение 42.** *Изометрическое отображение* $X$ в $Y$ (евклидовы пространства) - линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение. *Ортогональное преобразование* пространства $X$ - изометрическое отображение из $X$ в себя.

**Определение 43.** *Ортогональная группа* порядка $n$ - группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$. Обозначается как $O(n)$.

*Утверждение* 10. Линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно сохраняет длины векторов. Или же, линейное отображение изометрическое тогда и только тогда, когда оно переводит какой-нибудь ортонормаированный базис в ортонормированный набор.

*Доказательство.* Первый пункт получается из формулы

$$\langle x, y\rangle = \frac{|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2}{2}.$$

Второй пункт, как сказано в слайдах лекций, где-то был. И где он был? □

### 3.5 Немного о матрицах отображений.

**Теорема 29.** *Пусть $f : X \to Y$ линейно, $A$ - его матрица в ортономированных базисах $X$ и $Y$. Тогда $f$ изометрическое тогда и только тогда, когда $A^T A = E$.*

*Доказательство.* Пусть $A^T A = (c_{ij})$. Тогда $c_{ij} = \langle f(e_i), f(e_j)\rangle$, где $\{e_i\}$ - выбранный ортонормированный базис $X$. Тогда то, что $f$ изометрическое, равносильно тому, что $\{f(e_i)\}$ - ортонормированный набор, равносильно тому, что $A^T A = E$. □

*Следствие* 8. При совпадении размерностей, это равносильно тому, что $AA^T = E$ или $A^T = A^{-1}$.

**Определение 44.** *Ортогональная матрица* - квадратная матрица $A$, для которой $A^TA = AA^T = E$.

*Утверждение* 11. Приведём несколько эквивалентных переформулировок:

- $AA^T = E$;
- $A^TA = E$;
- столбцы ортонормированы;
- строки ортонормированы.

**Теорема 30.** *Если $A$ - ортонормаированная матрица, то* $\det A = \pm 1$.

*Доказательство.* $\det(A^TA) = \det(E) = 1$, $\det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$. □

**Определение 45.** *Специальная ортогональная группа* $SO(n)$ - группа ортогональных преобразований с определителем 1.

## 3.6 Много какой-то хуйни.

**Определение 46.** *Инвариантное подпространство* линейного отображения $f : X \to X$ - линейное подпространство $Y \subset X$ такое, что $f(Y) \subset Y$.

*Утверждение* 12. Если $V$ - инварантное подпространство ортогонального преобразования, то $V^\perp$ - тоже инвариантное.

**Теорема 31.** *Пусть $f : X \to X$ - ортогональное преобразование. Тогда существует разложение $X$ в ортогональную прямую сумму*

$$X = X_+ \oplus X_- \oplus \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_m \ \ (m \geq 0)$$

*инвариантных подпространств таких, что $f|_{X_+} = \mathrm{id}$, $f|_{X_-} = -\mathrm{id}$, а $\dim \Pi_i = 2$, $f|_{\Pi_i}$ - поворот.*

**Определение 47.** Два базиса *одинаково ориентированы*, если матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

*Примечание* 6. Одинаковая ориентированность базисов - отношение эквивалентности. Классов эквивалентности ровно два (кроме случая нулевой размерности).

*Доказательство.* Матрицы перехода перемножаются. □

**Определение 48.** *Ориентированное векторное пространство* - векторное пространство, в котором выделен один их двух классов одинаково ориентированных базисов. Выделенные базисы - *положительно ориентированные* (положительные), остальные - *отрицательно ориентированные* (отрицательные).

**Определение 49.** Пусть $X$ - ориентированное евклидово пространство размерности $n$, $v_1, \ldots, v_n \in X$. *Смешанное произведение* $v_1, \ldots, v_n$ - определитель матрицы из координат $v_i$ в произвольном положительном ортонормированном базисе. Обозначается как $[v_1, \ldots, v_n]$.

**Теорема 32.** *Определение корректно, то есть, не зависит от выбора базиса.*

*Доказательство.* ? □

Свойства смешанного произведения:

- линейность по каждому аргументу;
- кососимметричность: при перестановке любых двух аргументов меняет знак;
- нулевое смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы;
- смешанное произведение положительно тогда и только тогда, когда они образуют положительный базис.

**Определение 50.** Пусть $X$ - трёхмерное ориентированное евклидово пространство, $u, v \in X$. Их *векторное произведение* - такой (единственный по лемме Рисса) вектор $h \in X$, что $\langle h, x\rangle = [u, v, x]$ для любого $x \in X$. Обозначается как $h = u \times v$.

**Теорема 33.** *Пусть $u, v$ линейно независимы. Тогда*

- *$u \times v$ - вектор, ортогональный $u$ и $v$;*
- *$u, v, u \times v$ - положительный базис;*
- *$|u \times v|$ равно площади параллелограмма, образованного векторами $u$ и $v$.*

**Теорема 34.** *Пусть $e_1, e_2, e_3$ - положительный ортонормированный базис, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x2y_1)e_3,$$

*или в псевдо-матричной записи:*

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

## 3.7 Движения евклидова аффинного пространства.

**Определение 51.** *Евклидово аффинное пространство* - аффинное пространство $X$ с заданным на $\vec{X}$ скалярным произведением. *Расстояние* в таком пространстве: $d(x, y) = |x-y|$.

**Определение 52.** *Движение* евклидова аффинного пространства $X$ - биекция из $X$ в $X$, сохраняющая расстояния. Группа движений обозначается как $\mathrm{Iso}(X)$.

**Теорема 35.** *Любое движение - аффинное преобразование, линейная часть которого - ортогональное преобразование, и обратно.*

*Доказательство.* Пусть $F : X \to X$ - движение. Тогда точки $x, y, z$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда одно из неравенств треугольника для них обращается в равенство, что равносильно тому, что их образы лежат на одной прямой. Следовательно, прямые переходят в прямые. По основной теорема отсюда следует, что $F$ аффинно. $\vec{F}$ сохраняет норму векторов, а значит, сохраняет и скалярное произведение (по словам лекции, у нас это где-то было). А значит, это ортогональное преобразование. Обратное утверждение очевидно. □

**Лемма 11.** *Пусть $X$ - аффинное пространство, $F : X \to X$ - аффинное отображение, и его линейная часть не имеет неподвижных ненулевых векторов, то есть, $\vec{F}(v) \neq v$ для всех $v \in \vec{X} \backslash \{0\}$. Тогда $F$ имеет неподвижную точку.*

*Следствие* 9. Если линейная часть движения плоскости - поворот на ненулевой угол, то и само движение - поворот на этот угол относительно некоторой точки.

*Следствие* 10. Композиция поворотов - поворот или параллельный перенос.

**Теорема 36.** *(Теорема Шаля). Любое движение есть одо из следующих:*

- *параллельный перенос,*
- *поворот,*
- *скользящая симметрия.*

# 4 Выпуклости.

## 4.1 Основное.

Далее, $X$ - аффинное пространство.

**Определение 53.** Пусть $x, y \in X$. *Отрезок* между точками - это множество $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$.

**Определение 54.** *Выпуклое множество* называется таковым, если для любых двух точек в нём лежащих, отрезок между ними также принадлежит множеству.

*Утверждение* 13. Выпуклое множество $(A)$ содержит все выпуклые комбинации своих точек (это множество обозначаем как $C$).

*Доказательство.* Будем вести индукцию по $m$ - количеству точек в комбинации. Если точек 1 или 2, то утверждение очевидно, поскольку единственная выппуклая комбинация - это либо точка, либо отрезок.

Пусть теперь $m \geq 3$, $c_i \in A$ для всех $i$, и $p = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i$, где $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, и все они не отрицательные. Если какой-то из коэффициентов $\lambda_i$ равен нулю, то утверждение верно в силу индукционного тпредположения.

Скажем тогда, что все $\lambda_i \neq 0$, но тогда и никакой из коэффициентов не равен единице. Распишем тогда

$$p = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i = \lambda_1 c_1 + (1 - \lambda_1) \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} c_i.$$

Заметим тогда, что $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} c_i$ - выпуклая комбинация из $(m-1)$-ой точки. Таким образом, по индукционному предположению всю эту сумму можно заменить на точку внутри множества, и сгруппировать с оставшейся. □

**Определение 55.** *Выпуклая оболочка* $A \subset X$ - пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $A$ (то есть, наименьшее из них). Обозначается как $\mathrm{Conv}(A)$

**Определение 56.** Пусть $p_1, \ldots, p_m$ - набор точек в $X$. *Выпуклой комбинацией* точек $p_i$ называется любая барицентрическая комбинация вида $\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_m p_m$, где сумма $\lambda_i$ равна 1, и все $\lambda_i$ неотрицательные.

**Определение 57.** $k$-мерный *симплекс* - выпуклая оболочка $k+1$ аффинно незваисимой точки.

**Теорема 37.** *Для любого $A \subset X$, $\mathrm{Conv}(A)$ - объединение всех симплексов с вершинами в $A$.*

**Теорема 38.** *(Теорема Каратеодори). Пусть $\dim X = n$, $A \subset X$, $p \in \mathrm{Conv}(A)$. Тогда $p$ представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точки из $A$.*

*Доказательство.* Коли уж $p$ лежит в выпуклой оболочке, то она представима в виде выаuклой комбинации какого-то конечного числа точек, выберем наименьший по мощности подходящий набор. Скажем, он содержит $m$ точек.

$$p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,$$

что есть, соответственно, выпуклая комбинация точек из $A$. Предположим теперь, что $m \geq n+2$.

Тогда замечаем, что $\{a_i\}$ аффинно зависимы (в силу того, что в $n$-мерном аффинном пространстве существует максимум $n+1$ аффинно независимых точек), то есть, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i = 0$, где $\mu_i \in \mathbb{R}$, не все нули, но сумма всех нулевая. Заметим, что

$$p = p + \vec{0} = p - t\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i - \sum_{i=1}^{m} t\mu_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t\mu_i) a_i.$$

Здесь $t$ выступает в качестве параметра, поэтому давайте подберём такое значение $t$, что один из этих новых коэффициентов будет нулевым, а остальные останутся неотрицательными. Нетрудно убедиться, что подойдёт $t = \min\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0\}$.

Итого мы получили, что $p$ представляется в виде выпуклой комбинации из меньшего числ точек, противоречие. □

*Следствие* 11. (О выпуклой оболочке компакта). Если $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то $\mathrm{Conv}(A)$ тоже компактно.

*Доказательство.* Определим множество $\delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ коэффициентов выпуклых комбинаций длины $n+1$:

$$\delta = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0\, \forall i, \sum t_i = 1\}.$$

Легко убедиться, что $\delta$ - компакт. Рассмотрим отображение $F : A^{n+1 \times \delta \to \mathbb{R}^n}$, которая выдаст $\sum t_i a_i$.

По теореме Каратеодори, $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Conv}(A)$. Более того, $F$ непрерывно, так как действует как многочлен. Тоггда из того, что произведение компактов - компакт, и непрерывный образ компакта - компакт, получаем, что $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Conv}(A)$ - компакт. □

**Теорема 39.** *(Теорема Радона). Пусть $X$ - аффинное пространство, размерности $n$. Пусть $M \subset X$, мощности хотя бы $n+2$. Тогда $M$ можно разбить на два подмножества $A$ и $B$ такие, что их* Conv *не пусто.*

*Доказательство.* Пусть $|M| = m$. Рассмотрим два случая.

Если $m$ конечно, то скажем, что $M = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Поскольку $m \geq n+2$, а размерность $X$ равна $n$, то наши точки аффинно зависимы,то есть, существует такой набор коэффициентов $t_i$, что комбинация будет равна нулю.

Пусть $I$ - множество индексов таких, что соответствующие им $t_i$ больше нуля, и $J$ - множество всех остальных индексов. Рассмотрим тогда $S = \sum_{i \in I} t_i$, поделим все $t_i$ на $S$, и это будут новые $t_i$. В таком случае, если мы возьмём $A = \{p_i : i \in I\}$, и $B$, соответственно, оставшаяся часть суммы. Нетрудно убедиться, что эти множества подходят, а пересечение их выпуклых оболочек есть $p = \sum_{i \in I} t_i p_i$ (а переобозначении).

Если же $m$ бесконечно, то сведём этот случай к предыдущему. Просто выберем конечное $M'$, по мощности хотя бы $n+2$ и разобъём их на $A$ и $B$, как в предыдущем пункте, оставшееся раскидаем как угодно. □

**Теорема 40.** *(Теорема Хели). Пусть $X$ - аффинное пространство, размерности $n$. Пусть $c_1, \ldots, c_m \subset X$ - выпуклые множества, $m \geq n+1$, и любые $n+1$ из этих множеств имеют непустое пересечение. Тогда пересечение всех $c_i$ непусто.*

*Доказательство.* Будем вести индукцию по $m$. База: $m = n+1$ очевидна. Докажем теперь переход от $m-1$ к $m$, где $m \geq n+2$. По предположению индукции, для каждого $k$ найдётся непустое пересечение всех $c_i$, кроме $c_k$. Выберем в кажлом таком переесечении точку $p_k$, и скажем, что $M$ - множество всех таких точек. Возможны два случая.

Пусть все $p_k$ различны. Тогда, поскольку $|M| = m \geq n+2$, то по теореме Радона мы можем получить разбиенние $M = A \cup B$ такое, что выпуклые оболочки $A$ и $B$ пересекаются.Рассмотрим точку из их пересечения и покажем, что она - искомое пересечение всех $c_i$.

Зафиксируем $i$. Точка $p_i$ - единственная из $M$ не лежит в $c_i$ по построению, и пусть она лежит в $A$. Тогда $B \subset c_i$ (так как $p_i$ ы отбросили в $A$). $c_i$ выпукло из условия, $B$ в нём лежит, но тогда $B$ лежит в нём вместе со своей выпуклой оболочкой. А тогда $p \in c_i$, факт доказан.

Если же среди $p_k$ есть совпадающие, то факт очевиден из предпроложения индукции. □

**Теорема 41.** *(Теорема Хели для бесконечного набора компактов). Пусть $\{C_i\}_{i \in I}$ - набор выпуклых компактов в $X$, размерности $n$, и любые $n+1$ из множеств $c_i$ имеют непустое пересечение. Тогда пересечение $c_i$ непусто.*

*Доказательство.* Из обычное теоремы Хели следует, что $\{c_i\}$ - центрированный набор (то есть, любой его конечный поднабор имеет непустое пересечение). Вспомним теперь, что компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут, а также, в компактном пространстве любой центрированный набор замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Из этих фактов следует, что любое центрированное семейство замкнутых множеств, хотя бы одно из которых компактно, имеет непустое пересечение, что и требовалось. □

**Теорема 42.** *(Теорема Юнга). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$,* $\mathrm{diam}(M) \leq 1$. *Тогда $M$ содержится в некотором замкнутом круге радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.*

*Доказательство.* Переформулируем утверждение теоремы. $M$ лежит в замкнутом круге радиуса $R$ тогда и только тогда, когда существтует $p$ - центр круга, $p \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in M : x \in \overline{B}_R(p)$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\cap_{x \in M} \overline{B}_R(x) \neq \emptyset$.

Поскольку замкнутые шары в $\mathbb{R}^2$ - замкнутые компакты, то по теореме Хели для компактов, достаточно показать последнее свойство лишь для трёх точек из $M$, то есть, что $\forall a, b, c \in M$ верно, что $\overline{B}_R(a) \cap \overline{B}_R(b) \cap \overline{B}_R(c) \neq \emptyset$. Сделаем тогда обратную переформулировку, и получим, что теорему надо доказать для случая $M = \{a, b, c\}$, но это уже просто факт из планиметрии. □

*Утверждение* 14. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Тогда его внутренность и замыкание тоже выпуклы.

*Доказательство.* Ну что тут доказывать? □

*Утверждение* 15. Выпуклый компакт с непустой внутренностью гомеоморфен шару.

**Определение 58.** *Размерностью* непустого выпуклого множества $A$ незывается размерностью его выпуклой оболочки.

**Определение 59.** *Относительная внутренность* выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ - его внутренность в индуцированной топологии его аффинной оболочки. Обозначается как $\mathrm{RelInt}(A)$.

**Теорема 43.** *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое выпуклое множество, то его относительная внутренность непустая.*

*Доказательство.* Пусть $Y = \mathrm{Aff}(A), \dim Y = k$. Существует аффинная биекция $f : Y \to \mathbb{R}^k$, она - гомеоморфизм. Достаточно доказать, что $f(A) \subset \mathbb{R}^k$ имеет непустую внутренность. В $f(A)$ найдутся $k+1$ аффинно независимых точек $p_i$ (сводится к линейной алгебре: помещаем 0 в $p_0$, тогда $\mathrm{Aff} = \mathrm{Lin}$). Тогда их выпуклая оболочка - $k$-мерный симплекс. Осталось доказать, что внутренность такого симплекса непуста. Все $k$-мерные симплексы аффинно эквивалентны, то есть, достаточно покзать данный факт для стандартного симплекса $\delta := \mathrm{Conv}\{0, e_1, \dots, e_k\}$. Эта выпуклая оболочка состоит из выпуклых комбинаций данных точек, но нуль мы можем нахуй убрать, и останутся $\sum_{i=1}^k t_i e_i$, где све коэффициенты неотрицательные, и их сумма не превосходит единицу. Тогда нас интересует $\{(t_1, \dots, t_k) : t_i \geq 0, \sum t_i \leq 1\}$. Эта вещь содержит открытое множество

$$\tilde{\delta} = \{(t_1, \dots, t_k) : t_i > 0, \sum t_i < 1\}.$$

Но $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$ там лежит, а тогда $\tilde{\delta}$ непусто, тогда и внутренность дельта не пуста, что и требовалось. □

*Следствие* 12. Относительная внутренность выпуклого множества выпукла.

*Доказательство.* Применим лемму о выпуклости внутренности выпуклого множества в аффинной оболочке. □

## 4.2 Отделимости.

**Определение 60.** (*Отделимости*). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^n$ - непустые множества, $H$ - гиперплоскость.

- *$H$ строго отделяет* $A$ и $B$, если $A$ и $B$ лежат в разных открытых полуплоскостях относительно $H$.
- *$H$ нестрого отлеляет* $A$ и $B$, если $A$ и $B$ лежат в разных замкнутых полуплоскостях относительно $H$.

**Теорема 44.** *(Теорема о строгой отделимости). Пусть $A, B \in \mathbb{R}^n$ - непустые замкнутые и выпуклые множества, и хотя бы одно из них компактно. Если их пересечение непустоЕ тогда существует гиперплоскость, стого разделяющая $A$ и $B$.*

*Доказательство.*
**Лемма 12.** *(О существовании ближайших точек). Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ непусты, $A$ - компакт, $B$ - замкнуто. Тогда существуют $p, q$ из $A$ и $B$ соответственно, такие, что $|p - q| = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$.*

*Доказательство.* Если $B$ - компакт, то по теореме Вейерштрасса функция расстояние между точками, определённая на $A \times B$ даст нам искомый минимум. (Функцию на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ сужаем до $A \times B$: $\sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \ldots + (x_n - y_n)^2)$.

Если же $B$ не компактно, то возьмём замкнутый шар $D$ с центром в какой-нибудь точке из $A$, пересекающий $B$. Очевидно, что данный шар рано или поздно пересечёт $B$, так как $A$ компактно. Пусть $\tilde{B} := B \cap D$ - компакт, так как это пересечение замкнутого $B$ и компактного $D$.

Гипотеза: радиус $D$ много больше $\operatorname{diam} A + d(A, B)$. $\inf\{|x - y| : x \in A, y \in \tilde{B}\}$ (так как мы постепенно увеличиваем шарик). Теперь мы свели задачу к первому случаю ($A$ и $\tilde{B}$ - компакты). ☐

Применим аншу лемму: пусть расстояние от $A$ до $B$ реализуется на точках $p \in A$ и $q \in B$. Пусть $H$ - гиперплоскость, ортогональная $[pq]$ ии проходящая через его середину. Докажем, что это - искомая гиперплоскость.

Для определённости, пусть $p \in H^+$, $q \in H^-$, докажем тогда, что $A \subset H^+$, и $B \subset H^-$. Предположим противное, пусть $H$ не разделяет строго. Тогда, например, существует $\hat{a} \in A \cap \overline{H^-}$. $A$ выпукло, тогда $[\hat{a}, p] \subset A$, тогда $a = [\hat{a}, p] \cap H \in A$ ($\hat{a}$ может совпасть с $a$, но это не повлияет на доказательство). Тогда на $[ap]$ найдётся точка $X$, для которой $|qx| < |qp|$:

Для этого рассмотрим $\triangle apq$. Если $\alpha$ - тупой угол, то можно взять $x = a$. Если $\alpha$ - острый угол, то в качестве $x$ подойдёь основание высоты из вершины $q$. Получим противоречие с леммой, тогда $H$ строго отделяет $A$ и $B$.

☐

*Следствие* 13. (Отделимость от точки). Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое и выпуклое. Тогда $B$ строго отделимо от любой точки $x \notin B$.

*Доказательство.* В качестве компакта берём одну точку. ☐

## 4.3 Опорные гиперплоскости.

**Определение 61.** $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое множество, $H$ - гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Говорим, что $H$ - *опорная гиперплоскость* для $A$, если

- $A$ лежит по одну сторону от $H$ (нестрого);
- пересечение $H$ и замыкания $A$ непусто.

**Теорема 45.** *(1.) $A \subset \mathbb{R}^n$ - непустое и ограниченное множество. Тогда для любого $(n-1)$-мерного направления существует опорная гиперплоскость к $A$ в данном направлении (то есть, параллельная направлению). Количество таких опорных гиперплоскостей равно 1 или 2.*

**Теорема 46.** *(2.) $A \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое, выпукное, и $p$ лежит на границе $A$. Тогда существует опорная гиперплоскость $H$ к $A$, проходящая через точку $p$.*

## 4.4 Экстремальные точки.

**Определение 62.** $A \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое множество, $p$ лежит на границе. Точка $p$ называется *экстремальной* для $A$, если $A \backslash \{p\}$ выпукло.

**Теорема 47.** *(Теорема Крейна-Мильмана). Всякий выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.*

**Определение 63.** *Выпуклое полиэдральное множество* - пересечение конечного числа замкнутых полупространств.

**Теорема 48.** *(Теорема Вейля-Минковского). $A \subset \mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:*

- *$A$ - ограниченное выпуклое полиэдральное множество;*
- *$A$ - выпуклая оболочка конечного числа точек.*

**Определение 64.** $A \subset \mathbb{R}^n$. *Полярой* множества $A$ называется множесто $A^o = \{x \in \mathbb{R}^n \, |\forall a \in A, \langle x, a\rangle \leq 1\}$.

Свойства:

- антимонотонность;
- если $A$ - ограниченное, то $o$ лежит во внутренности $A$ (верно и обратное);
- $(A \cup B)^o = A^o \cap B^o$ (аналогичное верно и для кучи множеств);
- $A^o$ замункто, выпукло и содержит $o$;
- $(A \cup \{o\})^o = A^o$;
- $(\mathrm{Conv}(A))^o = A^o$;
- $(\overline{A})^o = A^o$.

**Теорема 49.** *(Теорема о биполяре). $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

- *Если $A$ - выпуклое, замкнутое и одержит $o$, то $A^{oo} = A$;*
- *В общем случае: $A^{oo}$ - замыкание $\mathrm{Conv}(A)$.*

# 5 Алгебраическая топология.

## 5.1 Гомотопии.

Будем считать, что $X$ и $Y$ - топологические пространства, $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения.

**Определение 65.** $f$ и $g$ *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0,1] \to Y$ такое, что

- $H(x,0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x,1) = g(x), \forall x \in X$.

**Определение 66.** Отображение $H$ называется *гомотопией* между $f$ и $g$.

**Теорема 50.** *Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из $X$ в $Y$.*

**Теорема 51.** *Пусть $X, Y, Z$ - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \to Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

**Определение 67.** Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0,1] \to Y$ *связана* на $A$, если $H(x,t) = H(x,0)$, $\forall x \in A$, $t \in [0,1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

**Определение 68.** Два пути $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0,1\}$.

**Определение 69.** Пусть $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), t \le \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1), t \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если $\varepsilon_p$ и $\varepsilon_q$ - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути $\alpha$. Тогда $\varepsilon_p\alpha \sim \alpha\varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim \varepsilon_p$.

## 5.2 Фундаментальная группа.

**Определение 70.** *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в $X$ с началом и концом в *отмеченной точке* $x_0$, обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

**Определение 71.** *Фундаментальная группа* топологического пространства $X$ с отмеченной точкой $x_0$ ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0)/\sim$, где $\sim$ - гомотопность путей с фиксированным концом в $x_0$;

- групповое произведение определяется форумлой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

**Определение 72.** Если $\gamma$ - путь из $p$ в $q$ (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

**Теорема 52.** *Если $X, Y$ - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**Определение 73.** (*Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением*). Если $X, Y$ - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ так:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- $*$ от композиции - композиция $*$ к функциям;
- $\mathrm{id} : X \to X \Rightarrow \mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

*Утверждение* 16. $f : X \to Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

## 6 Оставшаяся хуйня.

**Определение 74.** Топологическое пространство $X$ *односвязно*, если $X$ линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

**Теорема 53.** *$S^n$ односвязно при всех $n$ хотя бы 2.*

*Следствие* 14. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех $n$ хотя бы 3, односвязно.

**Определение 75.** $X, B$ - топологические пространства; $p : X \to B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall y \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое $v_i$ открыто в $X$ и $p_{\restriction v_i}$ - гомеоморфизм между $v_i$ и $U$.

**Пример(ы) 1.**

- гомеоморфизм ($v_i$ - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \to S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

**Теорема 54.** (*О постоянстве числа листов*). *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $B$ - связно. Тогда $|p^{-1}(B)|$ одинаково у всех $b \in B$.*

**Определение 76.** $|p^{-1}(b)|$ - *число листов* накрытия

**Определение 77.** $p : X \to B$ - накрытие; $f : Y \to B$ - непрервное отображение. *Поднятием отображения* $f$ называется непрерваное отбражение $\tilde{f} : Y \to X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

**Теорема 55.** *(О поднятиии пути). Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0,1] \to B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути $\alpha$ такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.*

**Лемма 13.** *(Лемма о непрерывном аргументе). Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

- *существует непрерывная функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$;*
- *такая $\varphi$ единственная с точностью до добавления числа, кратного $2\pi$.*

**Теорема 56.** *О поднятии гомотопии). Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \to B$ такого, что $H(0,0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие $\tilde{H}$, что $\tilde{H}(0,0) = x_0$.*

*Следствие* 15. Пусть $\alpha, \beta$ - пути в $B$ такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначально, $\tilde{\alpha(1)} \sim \tilde{\beta(1)}$.

**Определение 78.** Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

*Следствие* 16. Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

*Следствие* 17. Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

**Определение 79.** Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при $p_*$ называется *группой накрытия*.

*Утверждение* 17. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

**Определение 80.** Накрытие $p : X \to B$ называется *универсальным*, если $X$ односвязно ($\pi_1(x) = \{e\}$, $X$ - линейно связно).

**Лемма 14.** *Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в $x_0$, то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проецируется в $b_0$). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$.*

**Теорема 57.** $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, *при* $n \geq 2$.

**Теорема 58.** $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

*Следствие* 18. $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

# 7 Указатель.

Не используйте указатель во время сдачи экзамена, это противозаконно. (Не более эффективно, чем писать "Курение убивает" на пачках сигарет, но я пытался)