

Личные записи по матану ^{β}

@keba4ok

18 октября 2021г.

Некоторые материалы пока что с практик в рамках подготовки к ближайшим контрольным.

Содержание

Интегралы с параметром.	2
Грубые оценки.	2
Разбиение на части.	2
Интегрирование по параметру.	2
Использование комплексов.	3
Многомерное интегрирование.	3
Порядки интегрирования.	3

Интегралы с параметром.

Грубые оценки.

Задача (1.3.1).

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{\alpha + x^2(\alpha + \alpha^3)} &\geq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha + (1+\alpha)^2(\alpha + \alpha^3)} \geq 1 \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha + (1-\alpha)^2(\alpha + \alpha^3)} \leq 1\end{aligned}$$

Задача (1.3.2).

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta &\geq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R\theta} d\theta = -\frac{e^{-R\theta}}{R} \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{e^{-R\frac{\pi}{2}}}{R} + \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Разбиение на части.

Посредством замены переменных.

Задача (1.3.4).

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-\sin R\theta} d\theta = [R] \frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-\sin \theta} d\theta.$$

Интегрирование по параметру.

Теорема 1. Пусть $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция, дифференцируемая по первой переменной и такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ тоже непрерывна. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть c или d бесконечно и существуют g и h - непрерывные на $[c, d]$ такие, что к условиям непрерывности добавляются

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq h(y), \quad |f(x, y)| \leq g(y)$$

и

$$\int_c^d h(y) dy < \infty, \quad \int_c^d g(y) dy < \infty,$$

тогда формула (1) также верна.

Задача (1.5.1).

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= [H_\varepsilon(t) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^t}{\ln x} dx] = H_\varepsilon(b) - H_\varepsilon(a) = \\ &= \int_a^b H'_\varepsilon(t) dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1}.\end{aligned}$$

Использование комплексов.

Задача (1.5.2). $a > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = \\ &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-ax} dx = - \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-ax} dx = \\ &= - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{(i-a)x} - e^{-(i+a)x}) dx = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i-a} + \frac{1}{i+a} \right] = \frac{-1}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Теорема 3 (*Интеграл Френеля*).

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

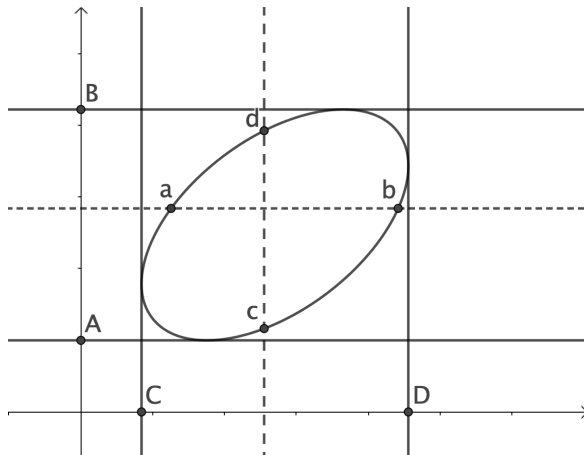
Многомерное интегрирование.

Порядки интегрирования.

Теорема 4 (*Тождество Фубини*).

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

Утверждение 1. Пусть Ω - (приличная) область в \mathbb{R}^2 .



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \chi_{\Omega}(x, y) dx dy = \\ &= \int_C^D \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx = \int_A^B \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Задача (4.1.3). $f(x, y) = x^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} x^2 dy dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-x} x^2 dx \end{aligned}$$