

Алгебра

Мастера конспектов

22 января 2020 г.

Честно говоря, ненависть к этой вашей топологии просто невообразима.

Содержание

1	Билеты	4
1.1	Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Области целостности	4
1.2	Евклидовы кольца. Евклидовость \mathbb{Z} . Неприводимые и простые элементы.	7
1.3	Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов	7
1.4	Основная теорема арифметики	7
1.5	Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Китайская теорема об остатках	7
1.6	Определение поля. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ как поле. Поле частных целостного кольца	7
1.7	Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо	7
1.8	Теорема о гомоморфизме	7
1.9	Кольцо многочленов. Целостность и евклидовость кольца многочленов над полем	7
1.10	Лемма Гаусса	7
1.11	Факториальность кольца многочленов	7
1.12	Теорема Безу. Производная многочлена и кратные корни	7
1.13	Интерполяция Лагранжа	7
1.14	Интерполяция Эрмита	7
1.15	Поле разложение многочлена	7
1.16	Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в	7
1.17	Основная теорема алгебры	7
1.18	Разложение рациональной функции в простейшие дроби над \mathbb{C} и над \mathbb{R}	7
1.19	Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса	7
1.20	Размерность векторного пространства	7
1.21	Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, факторпространство. Ранг линейного отображения	7
1.22	Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц	7
1.23	Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Системы линейных уравнений	7
1.24	Теорема Кронекера-Капелли	7
1.25	Определение группы. Циклическая группа. Порядок элемента	7
1.26	Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки	7
1.27	Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности	7
1.28	Группа обратимых элементов кольца. Вычисление обратимых элементов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Функция Эйлера	7
1.29	Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера	7
1.30	Многочлены деления круга	7
1.31	Конечные поля (существование, единственность, цикличность мультипликативной группы)	7
1.32	Фактор-группа, теорема о гомоморфизме	7
1.33	Определитель матрицы. Инвариантность при элементарных преобразованиях, разложение по строчке и столбцу	7

1.34	Присоединенная матрица. Формула Крамера. Определитель транспонированной матрицы	7
1.35	Вычисление определителя методом Гаусса	7
1.36	Принцип продолжения алгебраических тождеств. Определитель произведения матриц	7
2	Пофамильный указатель всех мразей	8

1 Билеты

1.1 Определение кольца. Простейшие следствия из аксиом. Примеры. Области целостности

Определение 1. *Кольцом* называется множество R вместе с бинарными операциями $+$ и \cdot (которые называются сложением и умножением соответственно), удовлетворяющим аксиомам:

- операция сложения ассоциативна;
- по отношению к сложению существует нейтральный элемент;
- у каждого элемента есть обратный по сложению
- операция сложения коммутативна;
- умножение ассоциативно;
- умножение дистрибутивно по сложению.

Также можно добавить, что если на множестве выполнены три первые аксиомы, то оно будет называться *группой*, а если выполнены первые четыре, то это уже *абелева группа*. Нейтральный по сложению элемент кольца называют *нулём*.

Пример(ы) 1. Кольцо называется:

- *коммутативным*, если оно коммутативно по умножению;
- *кольцом с единицей*, если оно содержит нейтральный элемент по умножению (единица);
- *телом*, если в нём есть 1, и для любых $a \neq 0 \rightarrow a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;
- *полем*, если это коммутативное тело;
- *полукольцом*, если нет требования противоположного элемента по сложению.

Следствие 1. Некоторые следствия из аксиом:

- $0 \cdot a = 0$

Доказательство.

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

Прибавим к обеим частям $-0 \cdot a$ и получим требуемое. □

- Нейтральный элемент по сложению единственный

Доказательство. Рассмотрим их сумму справа и слева. □

Определение 2. Коммутативное кольцо R с единицей, обладающее свойством

$$xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0 \quad (\forall x, y \in R)$$

называется *областью целостности* или просто *областью*.

Определение 3. Число $d \neq 0$ называется *делителем нуля*, если существует такое $d' \neq 0$, что $dd' = 0$.

Нетрудно понять, что область целостности - в точности коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

- 1.2 Евклидовы кольца. Евклидовость \mathbb{Z} . Неприводимые и простые элементы.
- 1.3 Идеалы, главные идеалы. Евклидово кольцо как кольцо главных идеалов
- 1.4 Основная теорема арифметики
- 1.5 Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Китайская теорема об остатках
- 1.6 Определение поля. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ как поле. Поле частных целостного кольца
- 1.7 Определение гомоморфизма и изоморфизма колец. Фактор-кольцо
- 1.8 Теорема о гомоморфизме
- 1.9 Кольцо многочленов. Целостность и евклидовость кольца многочленов над полем
- 1.10 Лемма Гаусса
- 1.11 Факториальность кольца многочленов
- 1.12 Теорема Безу. Производная многочлена и кратные корни
- 1.13 Интерполяция Лагранжа
- 1.14 Интерполяция Эрмита
- 1.15 Поле разложение многочлена
- 1.16 Комплексные числа. Решение квадратных уравнений в
- 1.17 Основная теорема алгебры
- 1.18 Разложение рациональной функции в простейшие дроби над \mathbb{C} и над \mathbb{R}
- 1.19 Определение векторного пространства. Линейная зависимость. Существование базиса
- 1.20 Размерность векторного пространства
- 1.21 Линейные отображения векторных пространств. Подпространство, фактор-пространство. Ранг линейного отображения
- 1.22 Матрица линейного отображения. Композиция линейных отображений и произведение матриц. Кольцо матриц
- 1.23 Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Системы линейных уравнений
- 1.24 Теорема Кронекера-Капелли
- 1.25 Определение группы. Циклическая группа. Порядок элемента
- 1.26 Группа перестановок. Циклы, транспозиции. Знак перестановки
- 1.27 Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности
- 1.28 Группа обратимых элементов кольца. Вычисление обратимых элементов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Функция Эйлера
- 1.29 Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера

И в заключение...

2 Пофамильный указатель всех мразей

Быстрый список для особо забывшегося поиска.

[делитель нуля](#)

[область целостности](#)

[кольцо, а также его вариации](#)