Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвествной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

Определение. $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на (a,b), если

- y – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на (a,b).

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0,\ G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем (x_0,y_0), если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a,b);
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0,y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

- $$y_1 = 0$$

- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью существования.*

Теорема (*О единственности*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью единственности.*

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии (x_0,y_0) будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*)**.**

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

- $$F(x_0,y_0) = 0$$
- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*)**.** *Пусть* U *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$*. Тогда* $\forall (x_0,y_0) \in H\ \exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* (x_0,y_0)
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют I_0, J_0 $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$. По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \mathrm{const}$ $\Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. □

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned}
&y' = m(x) \cdot n(y) \\
&m \in C((a,b)), n \in C((\alpha, \beta)) \\
&G = (a,b) \times (\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha, \beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подстановкой
- $I \subset (\alpha, \beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

  $$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

  Замена $z = y(t)$

  $$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

  Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

  $$\begin{aligned}
  N(y(x)) - N(y(x_0)) = M(x) - M(x_0) \\
  U(x,y) := N(y) - M(x).
  \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли U интегралом.

Утверждение. (*Критерий интеграла*)

U – интеграл для уравнения $y' = f(x,y) \iff$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$
- $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

Доказательство. Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = \text{const}$

$$\frac{dU}{dy} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dy}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \tag{1}$$

Замена переменных

Пример(ы). 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – x

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – x

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x),\ \ p,q \in C((a,b))$$

$f(x,y)$ определена на $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G, поэтому G – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

   $$y' = p(x)y$$

   Есть решение $y \equiv 0, x \in (a,b)$

   Если $y > 0$, то

   $$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

   $$y = ce^{\int p(x)dx}$$

   Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

   Воспользуемся заменой переменной:

   Новая независимая переменная – x

   Новая функция – $v(x)$

   Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

   $$\begin{aligned} y' &= v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx} \\ p(x)y + q(x) &= p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x) \\ v' \cdot e^{\int p(x)dx} &= q(x) \\ v' &= q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \\ v &= \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\ y &= e^{\int p(x)dx}(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx) \end{aligned}$$

   Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

   Для задачи Коши с начальным условием (x_0,y_0) имеем

   $$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds)$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \text{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то возпользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x)$$
$$v' = (1-m)y'y^{-m}$$
$$\frac{v'}{(1-m)} = p(x)v + q(x)$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если α – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение Пфаффа

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Определение. *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m,n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

Определение. *Интегральная кривая дифференциальной формы* F – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Примечание. Кривая называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\dot\gamma_1, \dot\gamma_2$ и $(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) \neq 0$

Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая F

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot\gamma_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot\gamma_1(t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot\gamma_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на (α, β), то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для y:

$$\frac{dy}{dx} = \dot\gamma_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}$$

γ была интегральной кривой формы F, то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая γ уравнения $F = 0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $mdx + ndy = 0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot\gamma_1(t) = 1, \dot\gamma_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F = mdx + ndy = 0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{m}{n} \\ \frac{dx}{dy} &= -\frac{n}{m} \end{aligned}\right.$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Форма F – *точная*, если $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Если F – точная, то $F = 0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

Теорема. *Если F – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0) \in G$ U – интеграл одного из уравнений:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ или } \frac{dx}{dx} = -\frac{n}{m}$$

Доказательство. $(x_0,y_0) \in G$ можно считать, что $n(x_0,y_0) \neq 0$, тогда $n(x,y) \neq 0$ в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{m}{n}$

Пусть $y(x)$ – решение

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx} = m + n \cdot (-\frac{m}{n}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n \neq 0$$

Получаем, что U – интеграл

□

Условие точности 1-формы

$$UinC^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна } \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Утверждение.

$$G = (a,b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных m и n следует, что F – точна

Доказательство. Фиксируем $(x_0,y_0) \in G$

Хотим построить U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти φ

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial m}{\partial y}(s,y)ds + \varphi'(y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial n}{\partial x}(s,y)ds + \varphi'(y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Хотим

$$n(x,y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$$

□

Примечание. Это утверждение верно не для любой области G, хотя верно, если G – звездчатое множество

Интегрирующий множитель

Определение. $\mu \in C^1, \mu \neq 0$ называется *интегрирующим множителем*, если μF – точная форма

Пример(ы). Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель – $\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{n(y)})$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x,y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться t и искать мы будем функции $x(t)$

Определение. *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

n и $m_1, \ldots, m_n$ – фиксированные натуральные числа

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f_i(t,x_1, \dot{x}_1, \ldots, \frac{d^{m_1-1}}{dt^{m_1-1}}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$ называется *порядком системы*

Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, все $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x_1, \ldots ,x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка m* $x(t)$ – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t,y_1, \ldots, y_{m-1}) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Если x решение уравнения, то очевидно, что $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \ldots y_m = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$ решения системы и наоборот, если $y_1, y_2, \ldots y_m$ решения системы, то $x = y_1$ решение уравнения.

Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на $\mathbb{R}^n$ зафиксируем $||x|| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

Определение. Для уравнения $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$ $(f \in C(G) G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$ функция $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется *решением*, если

- $\exists \dot{x}$ на (a,b)
- $(t,x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t,x(t)), t \in (a,b)$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется решением задачи Коши с начальным условием (t_0,x_0), если

- x – решение
- $x(t_0) = x_0$

Теорема существования

Теорема. *существования (Пеано)*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ *решение задачи Коши*

Доказательство. Рассмотрим $(t_0,x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \in G \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \text{ -- компакт}$$

$$\exists M : |(t,x)| \leqslant M \ \forall (t,x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказываеть, что существует решение на промежутке $(t_0 - h, t_0 + h)$
Эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение интегрального уравнения*, если

1. $x \in C((a,b))$
2. $(t,x(t)) \in G$
3. $x(t)$ удоавлетворяет интегральному уравнению

Лемма. *x – решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \Leftrightarrow x$ – решение задачи Коши с начальным условием t_0,x_0*

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок $[t_0,t_0 + h]$ (для $[t_0 - h, t_0]$ все аналогично)

Ломаные Эйлера

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и разобьем отрезок $[t_0,t_0+h]$ на N равных частей $[t_k,t_{k+1}]$, $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0,x_0)(t - t_0), t \in [t_0,t_1]$$
$$g(t) = g(t_k) + f(t_k,g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Введем $\dot{g}(t)$ (точечка сверху это просто символ, так как g не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k,g(t_k)), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Лемма. $\forall k = 0,1, \ldots, n$

1. *g определена на $[t_k, t_{k+1}]$*
2. $|g(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0), t \in [t_0,t_k]$
3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{g}(s)ds$

Доказательство. Индукция по k

База: $k = 1$ Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что $f(t_k,g(t_k))$ определено, для этого достаточно показать, что $(t_k,g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t-t_0| \leqslant \alpha, |g(t_k)-x_0| \leqslant \beta$

   Это верно, так как $|g(t_k)-x_0| \leqslant M|t_k-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$

2. $|g(t)-x_0| \leqslant |g(t)-g(t_k)| + |g(t_k)-x_0| \leqslant |f(t_k,g(t_k))|(t-t_k) + M(t_0-t_0) \leqslant M(t-t_0)$

3. $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)ds + \int_{t_k}^t g(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)ds$

□

Лемма. *(Арцела-Аскори)*

$$G = \{g_k : I \to \mathbb{R}^n, k \geqslant 0\}$$

Определение. G равномерно ограничено, если существует $N: \ |g_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in I$

Определение. G рваностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$
$\forall k \geqslant 0 \ \forall t_1, t_2 \in I \ |t_1 - t_2| < \delta \to |g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \varepsilon$

Если G - равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда из G можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера $g_N, N > 0$ и докажем, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерынва

$$|g_N(t) - x_0| \leqslant M(t-t_0) \leqslant Mh \Rightarrow |g_n(t)| \leqslant |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1) - g_N(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}_N(s)ds \right| \leqslant M|t_1-t_2| \leqslant M\delta$$

В качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность g_N действительно равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к g

Для удобства можем считать, что вся последовательность g_N равномерно сходится к g

Мы хотим доказать, что g будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства g

1. $g_N \rightrightarrows g$ на $[t_0,t_0+h]$, g – непрерывна

2. $(t,g_N(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$

3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds?$

$$g_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g_n(s))ds + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t,g_n(t)) \in R, f \in C(R)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t,g_N(t)) \rightrightarrows f(t,g(t)) \text{ на } [t_0,t_0+h]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^t f(s,g_N(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds \to 0$$

Так как R – компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на R

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \wedge |g_N(t_1) - g_N(t_2)| < \delta \to |f(t_1{,}g(t_1)) - f(t_2{,}g(t_2))| < \varepsilon$$

Если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то $t - t_k < \frac{h}{N} < \delta$ при больших N

$\dot{g}_N(t) = f(t_k{,}g_N(t_k))$, поэтому $|\dot{g}_N(t) - f(t{,}g_N(t))| = |f(t_k{,}g_N(t_k)) - f(t{,}g_N(t))|$

Поэтому, если N достаточно велико

$$\int_{t_k}^{t} |\dot{g}_N(s) - f(s{,}g_N(s))|ds \leqslant \varepsilon(t - t_k)$$

$$\text{Тогда } \left|\int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s{,}g_N(s))ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t_1}\right| + \ldots + \left|\int_{t_k}^{t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(t_1 - t_0) + \ldots + \varepsilon(t - t_k) = \varepsilon(t - t_0) \leqslant \varepsilon h$$

Отсюда получаем, что $\int_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) - f(s{,}g_N(s))ds \to 0$, следовательно $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s{,}g(s))ds$

Таким образом, мы нашли решение g для исходного уравнения, и доказали теорему.

□

Напоминание из анализа

Определение. f удовлетворяет *условию Липшица* по x в $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ ($f \in \mathrm{Lip}_x(G)$)
Если $\exists L > 0$ такое, что $\forall(t{,}x), (t'{,}x) \in G$

$$|f(t{,}x) - f(t{,}x')| \leqslant L|x - x'|$$

Определение. f удовлетворяет *локальномум условию Липшица* по x в G, если $\forall(t_0{,}x_0)inG$ $\exists U$ – окрестность, такая что $f \in \mathrm{Lip}_x(U)$

$$f \in \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ и } \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \forall i{,}j = 1, \ldots{,}n$$

Определение. *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение. A – матрица, тогда норма $||A|| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$

$$\forall x\ |x| \leqslant ||A|| \cdot |x|$$

Лемма.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow f \in \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

Доказательство. Фиксируем (t_0,x_0)

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \ ||\frac{\partial f}{\partial x}|| \text{ в } R$$

Рассмотрим $(t,x), (t,x') \in R, \ g(s) = f(t, sx + (1-s)x')$

$$f(t,x) - f(t,x') = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,sx + (1-s)x')ds$$
$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant |\int_0^1| \leqslant \int_0^1 |\dots| \leqslant \int_0^1 L|x - x'|ds = L|x - x'|$$

□

Лемма.

$$f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G), K \text{ – \textit{компакт в} } G$$
$$\Downarrow$$
$$f \in \mathrm{Lip}_x(K)$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall L_n \to \infty \ \exists (t_n,x_n), (t_n, x_n') \in K :$$
$$|f(t_n,x_n) - f(t_n,x_n')| > L_n|x_n - x_n'|$$

Так как K – компакт, то из (t_n,x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_{n_k},x_{n_k}) \to (t_0, x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из t_{n_k}, x_{n_k}', сходящуюся к (t_0,x_0')

Для удобства будем считать, что $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0), \ (t_n,x_n') \to (t_0,x_0)$

Случай 1 $x_0 = x_0'$ Так как f – локально-липшицева по x, то $\exists U \ni (t_0,x_0)$ и L, такие, что

$$(t,x), (t,x') \in U \to |f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x - x'|$$

При достатчно больших n $(t_n,x_n), \ (t_n,x_n') \in U$ и мы получаем противоречие

Случай 2 $x_0 \neq x_0'$

Рассмотрим $g(t,x,y) = \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|}$, $f \in C(G) \Rightarrow g$ непрервывна в окрестности U точки (t_0,x_0,x_0')

$$\Rightarrow \exists L : |g(t,x,y)| \leqslant L \Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x - y|$$

Тогда для достаточно больших n $(t_n,x_n,x_n') \in U$ и мы снова получаем противоречие.

□

Лемма Гронуолла

Лемма. (*Лемма Гронуолла*)

Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$ *при* $t \in (a,b)$ *и* $\exists t_0 \in (a,b), \lambda, \mu \geqslant 0$, *такие что*

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \mu\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds\right|,\ t \in (a,b)$$

$$\text{Тогда } \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

Доказательство. Разберем случай, когда $t \leqslant t_0$ (случай $t < t_0$ оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds\right| \geqslant \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu\Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)}\dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)}\Phi \leqslant 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leqslant \mu\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds\right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

Метод приближений Пикара

Теорема. (*Теорема Пикара*)

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow\ G \text{ – область существования и единственности}$$

Доказательство. Зафиксируем $(t_0,x_0) \in G$ Возьмем $\alpha, \beta > 0$, что $R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 :\ |f(t,x)| \leqslant M,\ (t,x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$ – константа Липшица по x в R

Последовательные приближения Пикара $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds,\ \ k \leqslant 0$$

Лемма. $\forall k$ φ_k *определены на* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *и их графики лежат в* R

Доказательство. Идукция по k

База $\varphi_0 \equiv x_0$ для всех t, график очевидно лежит в R

Переход

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$(s,\varphi_k(s)) \in R \Rightarrow\ \ f \text{ -- определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)ds \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

□

Докажем теперь, что φ_k – равномерно сходятся на $[t_0 - h, t_0 + h]$
Введем $\psi_0(t) = \phi_0(t),\ \psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$ при $k \geqslant 0$
Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частинчые суммы этого ряда равны $\varphi_k(t)$
Поэтому сходимость ряда $\Longleftrightarrow$ сходимость $\varphi_k(t)$

□

Предметный указатель