

Матанализ. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Белова Ю. С.,
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по матанализу.

Содержание

1	Лекция 1.	3
2	Лекция 2.	4
3	Лекция 3.	6
4	Лекция 4.	8
5	Лекция 5.	9
6	Лекция 6.	11
7	Лекция 7.	12

1 Лекция 1.

В этом семестре мы будем заниматься анализом функций от многих переменных, то есть, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, и если $m = 1$, то такая функция называется функцией многих переменных.

Определение 1. Кривые в \mathbb{R}^n - непрерывное отображение $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Основная проблема состоит в том, что образ может выглядеть очень и очень сложно, потому нам хотелось бы более точно понять, как всё это устроено. Потому начнём рассматривать *спрямляемые кривые*, то есть, кривые с конечной длиной. Введём следующее определение:

Определение 2. Вариация функции - $V_f([a, b]) = \sup_{a=x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$.

$(x - y)$ - евклидово расстояние.

Утверждение 1. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, то $V_f([a, b]) = |f(a) - f(b)|$.

Утверждение 2. $V_f([a, b]) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}$.

Утверждение 3. $V_{f+g} \leq V_f + V_g$.

Утверждение 4. V_f аддитивна на промежутке: $a \leq b \leq c$, тогда $V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$.

Определение 3. Вариация ограничена, если $V_f < \infty$ на $[a, b]$.

Лемма 1.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f_1 и f_2 монотонны, тогда $f_1 - f_2$ имеют ограниченную вариацию.
- f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $f = f_1 - f_2$ на отрезке $[a, b]$, причём эти две функции монотонно возрастают.

Доказательство. Пусть у нас есть f , а также $V_f([a, b]) < \infty$. Рассмотрим $\varphi(x) = V_f([a, x])$. φ определена корректно, причём возрастает. $f = \varphi - (\varphi - f)$, скажем, что $(\varphi - f) = h$, тогда $h(x) \leq h(y)$ при $x \leq y$. Но это нетрудно показать, $\varphi(x) - f(x) \leq \varphi(y) - f(y)$ равносильно $f(y) - f(x) \leq \varphi(y - \varphi(x)) = V_f([x, y])$. \square

По сути, если понимать определение вариации геометрически, то это просто длина кривой на отрезке. Перейдём теперь к способам обхода кривой.

Лемма 2. Пусть $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$ - непрерывная биекция (тогда и монотонная). Тогда $V_f[c, d] = V_{f \circ g}([a, b])$.

Доказательство. Левая и правая части равны соответственно $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ и $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(g(y_{k+1})) - f(g(y_k))|$. Это, очевидно, одно и то же. \square

Теперь стоит задаться вопросом: а когда же это V_f (или же, длину кривой) можно посчитать. Если f - гладкая функция (гладкая по координатам f_k). $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$V_f([a, b]) = \int_a^b \sqrt{(f'_1)^2(x) + \dots + (f'_n)^2(x)} dx.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sup_{a=x_0, \dots, x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^2 + \dots + (f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k))^2} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{f_1'^2(\xi_{1,k}) + \dots + f_n'^2(\xi_{n,k})} \end{aligned}$$

Если f_i непрерывна, то f_i^2 равномерно непрерывна. $f_i'^2(\xi_{i,k}) \leq \min_{[x_k, x_{k+1}]} f_i'^2 + \varepsilon^2$ (для достаточно мелких разбиений и любого эpsilon, большего нуля). Тогда можно получить верхнюю оценку: $\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{l=1}^n \min_{[x_k]} (f_l'^2) + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)} \leq \int_a^b \sqrt{\dots} + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)$ (устремляем разбиение к бесконечно малому). А затем делаем аналогично снизу и получаем требуемое равенство.

2 Лекция 2.

Пусть φ - функция, которая определялась на прошлой лекции, а ψ - обратная ей. ψ - биекция, рассматриваем $f \circ \psi$. Посмотрим на $\psi([0, \beta]) = [a, b]$, тогда для любых $c, d \in [0, b]$ $V_{f \circ \psi}([c, d]) = d - c$.

Естественная параметризация гладкого пути практически не отличается от того, что мы уже рассматривали за одним небольшим исключением.

$$\varphi(x) = V_f([a, x]) = \int_a^x |f'(s)| ds = \int_a^x \sqrt{f_1'^2 + \dots + f_n'^2} ds,$$

причём предпоследнее вырежение равно $|(f_1', \dots, f_n')|$, а под корнем все функции от s . Рассмотрим опять ψ , и как выглядит вектор $f(\psi(x)) = (f_1(\psi(x)), \dots, f_n(\psi(x)))$, рассмотрим его производную, берём по координатам: $f'(\psi(x)) = (f_1'(\psi(x)), \dots, f_n'(\psi(x)))$. Но $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}$, тогда $\varphi(s) = |f'(s)|$, а также $|f'(\psi(x))| = 1$.

Примечание 1. Если f - гладкая на $[a, b]$ и существует $\int_a^b |f'(s)| ds$, тогда выполнено то же самое, просто $\varphi(x) = \int_a^x |f'(s)| ds$.

Перейдём теперь к тригонометрии. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$, мы планируем её обходить (то есть, через каждую точку по разу, с одинаковой скоростью, и так далее). Введём попутно также комплексное обозначение (мы не будем заниматься комплексным анализом, просто это удобно). отождествим \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} понятно каким образом. Тогда какое вращение мы хотим? Мы хотим найти функцию $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{z : |z| = 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$, а хотим потребовать также следующее:

- $\Gamma \in C^1$ (гладкая),
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$ (место старта и начальная скорость, с которой мы идём),
- $|\Gamma'(t)| = 1$ для любого t (постоянная скорость 1).

Сформулируем теорему:

Теорема 1. *Функция с данными свойствами существует и единственна.*

Доказательство. $\Gamma(t) \in \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$. Продифференцируем последнее, получим

$$\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0,$$

что также равно

$$2 \operatorname{Re}(\overline{\Gamma'(t)}\Gamma(t)) = 0.$$

То есть, мы получили, что $\Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = ih(t)$, $h(t) \in \mathbb{R}$. Применим теперь оставшееся неиспользованное условие: $|\Gamma(t)| = 1$, а чтобы параметризация была естественна, $|\Gamma'(t)|$ должно быть равно 1. То есть, $h(t) = \pm 1$. Подставим теперь нуль и получим, что функция в этой точке должна быть равна единице, а производная - i . Тогда остаётся один вариант: $h(t) \equiv 1$.

Посмотрим теперь ещё раз на начальное уравнение: $\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$, то есть,

$$\Gamma'(t) = i\Gamma(t). \quad (1)$$

Таким образом, мы уже пришли к тому, что если вращение существует, то оно должно удовлетворять последнему уравнению, а также $\Gamma(0) = 1$. Это означает, что вращение, которое мы получаем, будет дифференцируемо бесконечно много раз.

Пока что, казалось бы, ни единственности, ни существования, однако из последних утверждений легко получается единственность. Пусть у нас есть $\Gamma_{1,2}$ - два простых вращения. Дначит, они оба удовлетворяют (1). Тогда давайте запишем их частное через сопряжённые и возьмём производную: $\left(\Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2(t)}\right)' = \Gamma_1'(t)\overline{\Gamma_2(t)} + \Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2'(t)}$, что равно $i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1 i\overline{\Gamma_2} = 0$.

Таким образом, мы получили, что $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = \text{const}$, но поскольку $\Gamma(0) = 1$, то эта константа и равна единице. То есть, $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1$, следовательно, эти функции равны, единственность доказана.

Докажем теперь существование. Предъявим сначала произвольную параметризацию окружности, а затем постараемся сделать в ней замену переменной, чтобы получить хорошую функцию (которая должна быть, конечно, гладкой). Давайте параметризуем верхнюю половину \mathbb{T} самым естественным образом: примем $x = t$, $y = \sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$ (двигаемся по часовой стрелке). Теперь нам нужно отпараметризовать нижнюю половину, возьмём для этого $x = -t$, $y = -\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$, двигаться мы теперь будем по нижней половине, но в другом направлении, то есть, одну из половин нужно перевернуть и "склеить" в один целостный проход. Тогда в нижней половине "сдвинем" рассмотрение на $1 \leq t \leq 3$, и преобразуем: $y = -\sqrt{1-(2-t)^2}$.

Осталось проверить, что полученная функция гладкая. Вообще, это почти очевидно, кроме ± 1 , это и проверим. $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, а вектор $f'(t) = (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})$. Функция $\varphi(x)$ на $(-1, 1)$ выглядит как

$$\int_{-1}^x |f'(s)| ds = \int_{-1}^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Функция $\varphi(x)$ - возрастающая биекция, значит, мы можем посмотреть на обратную функцию $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$. Рассмотрим теперь для $x \in (-1, 1)$,

$$(f^{-1}(\psi(x)))' = (f_1'(\psi(x))\psi'(x), f_2'(\psi(x))\psi'(x)).$$

Тогда, так как $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$, это также и равно $\sqrt{1-\psi^2(x)}$, что также равно

$$(\psi'(x), \frac{-\psi(x)}{\sqrt{1-\psi^2(x)}} \sqrt{1-\psi^2(x)}).$$

В последнем также можно сократить числитель и знаменатель. Итого, $f(\psi(x))$ - гладкая на $(-1, 1)$, и более того, если $x \rightarrow \pm 1$, производная имеет конечный предел. Получается, дифференцируема на интервале, и производная имеет предел в крайних точках, тогда она в них также дифференцируема. Таким образом, для верхней половины мы всё показали, для нижней - аналогично, всего лишь с линейной заменой. \square

После доказательства теоремы, можно, наконец, ввести определения:

Определение 4.

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\Gamma(x)),$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(\Gamma(x)).$$

Далее уже можно поговорить о бесконечной дифференцируемости и формуле Муавра, этим, вместе с доказательством, что мы нашли привычные функции, мы, кажется, и планируем заниматься далее.

3 Лекция 3.

Для начала, закончим с тригонометрией. Мы научились строить синус и косинус через вращение окружности. Немного не помню, обговаривали ли мы это на прошлой лекции, но Юрий Сергеевич кратко цпомянул, что мы можем разложить $\Gamma(x)$ в ряд Тэйлора в $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ в силу свойства $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)$ и того, что остаточный член в форме Лагранжа будет стремиться к нулю при стремлении n к бесконечности.

Тогда

$$\cos x = \operatorname{Re} \Gamma(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

и аналогично синус по нечётным степеням.

Мнимая экспонента обладает свойствами, аналогичным обыкновенной экспоненте, поэтому покажем, что $\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Рассмотрим $\Gamma(x+y)\overline{\Gamma(y)}$ - функцию от x , а y - параметр. Это - некоторый обход окружности, который также удовлетворяет всем нормировочным условиям. $\varphi(0) = 1$, $|\varphi'(x)| = 1$, и, наконец, $\varphi'(0) = \Gamma'(0) = i$.

Теперь все прекрасные формулы косинуса и синуса суммы и разностей легко выводятся из доказанной формулы. Через мнимую экспоненту запишем: $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$, а там уже просто надо посмотреть на мнимые и действительные части.

Из полученных свойств получим, что $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \Gamma(0) = 1$, тогда $\Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)}$, откуда мы получаем чётность косинуса и нечётность синуса.

Можно упомянуть и формулу муавра. Распишем

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

это формулы Муавра. Также можно получить и периодичность, это, вообще-то очевидно и завершает наш разговор об элементарных функциях.

Перейдём теперь к многомерному анализу. Мы бы хотели точно также уметь анализировать функции и делать всё то, что мы уже умеем делать для одномерных функций, в том числе, решать экстремальные задачи. Нас интересуют функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Начнём с того, что в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m расстояние задаётся как

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2} = \|x - y\|.$$

И если у нас имеется точка $x = (x_1, \dots, x_m)$, то её норма есть $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$. Вообще, норму можно задать как угодно, если она удовлетворяет таким свойствам:

- норма - функция $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$,
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv (0, \dots, 0)$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Разберёмся с понятием *гладкости*. Для начала, алгебраически. Пусть у нас есть функция нескольких переменных $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_m)$.

Определение 5. f дифференцируема в точке (x_1, \dots, x_m) , если $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|x - y\|)$, где L - линейное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, причём однородное, то есть, $L(0) = 0$.

Определение 6. Это линейное отображение L называется *дифференциалом* в точке x .

На топологии мы доказывали, что в конечномерном пространстве различные норма липшицево-эквивалентны, потому мы просто во всех рассуждениях будем использовать именно евклидовы нормы, потому что они удобные. А теперь перейдём к базовым свойствам.

Примечание 2. L - единственно.

Примечание 3. Если у нас есть две функции: f и g , то дифференциал $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ есть $\alpha L_1 + \beta L_2$, где L_1 и L_2 - дифференциалы f и g .

Рассмотрим теперь отображение общего вида: $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда

Определение 7. (Гладкость). $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|y - x\|)$, где L - линейное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L(x + y) = L(x) + L(y)$. o -малое в данном случае можно понять как

$$\frac{f(y) - f(x) - L(y - x)}{\|y - x\|} \rightarrow 0,$$

то есть, элемент \mathbb{R}^n стремится к нулю, но для удобства можно взять евклидову норму этого выражения.

Какой вид имеет общее линейное отображение из $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$? Естественно, это - матрица, это мы знаем из алгебры и умеем расписывать переход в тривиальном базисе.

Перейдём к свойствам линейных отображений. Мы умеем их складывать, умножать, а также, совершать композиции в случае согласованности размерностей, которая соответствует перемножению матриц.

Пусть теперь, опять же, у нас есть отображение $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $L(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$ - подпространство, которое имеет размерность от 0 до n , эту размерность мы понимаем как *ранг* линейного отображения. Если же мы берём композицию линейных отображений, то ранг не может вырасти (куда растягивать-то). Также, легко видеть, что если $m < n$, то $\dim(L(\mathbb{R}^m)) \leq m < n$.

Зададимся теперь вопросом, какая существует естественная метрика на линейных отображениях $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. По сути, эти линейные отображения представляют собой евклидово пространство размерности $m \cdot n$. Задать на нём мы можем евклидову метрику: под корнем будут квадраты всех матричных элементов. Эта норма вычисляется проще, но зато гораздо менее естественна, чем следующая (например, относительно вопроса о композиции). $\|L\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$, $x \in \mathbb{R}^m$, $Lx \in \mathbb{R}^n$. Эта вещь конечна, так как она не превосходит $\sum_{k=1}^m \|Le_k\|$, а также выполняются все свойства нормы.

Геометрический смысл у данной нормы очень простой: мы смотрим, насколько сильно она растягивает расстояние в зависимости от направления.

Завершаем лекцию несколькими переопределениями нормы:

- $\sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$,
- $\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$,
- $\sup_{\|x\| < \infty} \|Lx\|$.

4 Лекция 4.

Продолжаем с операторами, пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейный, $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ - норма, где $\|x\|$ - Евклидово. $A \cong \mathbb{R}^{nm}$, так как можно выносить константу, не меньше нуля (притом равна тогда и только тогда, когда сам оператор - нуль), а также, норма суммы не превосходит сумму норм.

Определение 8. $\|A\|$ - операторная норма, притом супремум всегда достигается.

Операторная норма есть самое большое по модулю собственное число. Предположим, что у A есть n различных λ_i собственных чисел, у которых есть соответственные x^i собственные векторы. Запишем тогда $x = \sum_{k=1}^n a_k x^k$, $Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k x^k$, тогда $\|Ax\| \leq \max_k |\lambda_k| \cdot \|x\|$, но это мы объяснить не смогли.

Однако разговор сейчас шёл о различных собственных числах, бывают же *кратные* собственные числа. Что происходит?

Важный момент, почему важна операторная норма. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, тогда $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$, так как левая часть по определению равна $\sup_{\|x\| \leq 1} \|BAx\| \leq \sup_{\|y\| \leq \|A\|} \|By\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Заметим также две следующие вещи для линейного $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ равносильны:

- $\ker A = \{0\}$
- $\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\|, \exists \varepsilon > 0$.

Доказательство. $\{x : \|x\| = 1\}$ - единичная сфера в \mathbb{R}^n . Пусть $f(x) : x \rightarrow \|Ax\|$, f - непрерывная (?), $f \neq 0$ на единичной сфере, тогда $f \geq \varepsilon > 0$, $\|Ax\| \geq \varepsilon \|x\|$, $\|x\| = 1$. \square

Вообще, нам все эти операторы нужны для рассуждений о гладкости, сформулируем теорему:

Теорема 2. $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ - открытое, f - гладкая в окрестности x^0 (верхние индексы), $y^0 = f(x^0)$, $g : V_{f(x^0)} \rightarrow \mathbb{R}^k$, гладкая в $f(x^0)$, для f и g существуют линейные операторы $A(x^0)$ и $B(f(x^0))$. Тогда $g(f(x))$ - гладкое (?) отображение в x^0 с линейным оператором (?) $BA : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Мы знаем, что существует представление $f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$. Применим g , получим

$$g(f(x)) = g(y^0 + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)). \quad (2)$$

Также мы знаем, что g гладкая, то есть, также представима в виде $g(y) = g(y^0) + B(y - y^0) + o(\|y - y^0\|)$, тогда приняв аргумент правой части (1) за y , получим продолжение тождества:

$$\begin{aligned} g(y^0) + B(A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)) + o(A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)) = \\ g(y^0) + BA(x - x^0) + o(\|x - x^0\|). \end{aligned} \quad (3)$$

□

Нам много чего хочется от анализа многих переменных, но тут всё, конечно, гораздо сложнее. Перейдём к *частным производным*.

Примечание 4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ - гладкая в x^0 тогда и только тогда, когда при записи $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ f_k - гладкая $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ для всех k (можно написать доказательство).

Определение 9. *Частная производная.* Пусть имеется $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда частная производная по x_k , $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) = g(x)$, $g'(x_k^0)$.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x^0} := g'(x_k^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_k^0 + \varepsilon, \dots) - f(\dots)}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь *производную по направлению*. Пусть направление задаётся $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, f - дифференцируема по направлению e , если $g(t) = f(x^0 + te)$, $t \in \mathbb{R}$ и существует $g'(0)$, то производная по направлению e - $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t}$.

5 Лекция 5.

Введём несколько дополнительных терминологий. Пусть у нас есть отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, тогда *матрица Якоби* выглядит как

Теорема 3. Пусть у нас есть отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $V_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, причём существуют все частные производные в V_{x^0} и они непрерывные в x^0 . Тогда f дифференцируема в точке x^0 .

Доказательство. Для начала, мы можем полагать, что $m = 1$, так как можно доказывать, по сути, покомпонентно. Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ (докажем для 3, потом обсудим общий случай), ну а $x = (x_1, x_2, x_3)$. Нас интересует $f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Действуем стандартным образом, будем двигать координаты по одной (так как все сразу двигать не можем). Меняя по одной координате, представим разности из частных производных. Разность равна

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3) + f(x_1^0, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

Разбивается в две подряд идущие разности, достаточно удобные, но последняя всё равно "не айс":

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2, x_3) + f(x_1^0, x_2, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3) + f(x_1^0, x_2^0, x_3) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

Теперь уже три удобные разности, так и запишем равенство далее:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(\xi_1, x_2, x_3)_{\xi \in [x_1^0, x_1]}} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, \xi_2, x_3)} (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, \xi_3)} (x_3 - x_3^0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} (x_3 - x_3^0) + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_2 - x_2^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1^0, x_2^0, x_3^0)} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(x_1, x_2, x_3)} \right) (x_3 - x_3^0) \end{aligned}$$

Последние три слагаемых - остаток, $R(x)$, тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta ||x - x^0|| < \delta, |R(x)| < \varepsilon ||x - x^0||$.

□

Теорема 4. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f - гладкая на G - открытом(???) . Я ниже не могу прочитать, что тут написано.

Доказательство. $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, f - локальный максимум $f, x^0, \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_0} \neq 0$.

$$\begin{aligned} &(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - (x_1^0, \dots, x_n^0) = \\ &\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x^0} (x_k - x_k^0) + o(|x_k - x_k^0|), \end{aligned}$$

причём первое слагаемое не ноль.

□

Нам бы ещё хотелось иметь теорему об обратном отображении.

Теорема 5. (Об обратном отображении). Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, G - открыто в \mathbb{R}^n , у f есть гладкие частные производные (???), f - в точке x^0 дифференцируема A , A - (скака????????). Тогда $V_{x^0} \exists g$ - гладкая, (?????) $f(x^0)$, $g(f(x)) = x$, g - дифференцируема в $f(x^0) \Rightarrow A^{-1}$.

Доказательство. $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ - вспомнили, а теперь - к доказательству.

Утв. 1. f - гладкая в окрестности точки x^0 с непрерывными частными производными, тогда f липшицева, то есть, $|f(x) - f(y)| \leq C||x - y||$. Если мы зафиксируем точку x , то $|f(x) - f(y)| \leq (||A|| + \varepsilon)||x - y|| \forall \varepsilon > 0, A = A_x. ||A_x|| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_x \right|$.

Утв. 2. Если к тому же $\text{Ker}(A) = \{0\}$, то f - билипшицево (в окрестности x^0), $C_2||x - y|| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_1||x - y||$. Докажем и его. $f(y) = f(x) + A_x(y - x) + o(||x - y||)$, тогда $||A_{x^0}z|| \geq \varepsilon||z||, \forall z \in \mathbb{R}^n, ||A_x z|| - A_x z = A_{x^0}z + (A_x - A_{x^0})z$. Первый элемент не меньше $\varepsilon||z||$, а $||A_x - A_{x^0}||$ стремится к 0 в окрестности этой точки, тогда

$$|f(y) - f(x)| = |A_x(y - x) + o(||x - y||)|,$$

но каждый из них можно ограничить снизу $\frac{\varepsilon}{2}||x - y||$.

Тогда $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\text{Ker } A = \{0\}$, тогда $n \leq m$.

Итого, у нас есть отображение $f : f(x) = f(x^0) + A(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$. Рассмотрим шарик $B_r(x^0) = \{x : \|x - x^0\| < r\}$, $f(B_r(x^0))$, f - биективна. Проверим, что он содержится в каком-то $B_{r'}(f(x^0))$.

Утв. 3. В условиях теоремы для любого r существует r' , $f(\overline{B_r(x^0)}) \subset \overline{B_{r'}(f(x^0))}$. Для любого $y \in B_{r'}(f(x^0))$ $f(x) = y$, хотим найти x . $F(x) = \|f(x) - y\|^2$, гладкая в окрестности x^0 . Минимум этой функции где-то достигается (непрерывная на компакте). $F(x^0) = \|f(x^0) - y\|^2 \leq r'^2$, тогда минимум не может достигаться на границе, так как иначе $\|x - x^0\| = r$. Тогда с одной стороны $\|f(x) - y\|^2 = \|f(x) - f(x^0) + f(x^0) - y\|^2$. f билипшицева, поэтому разность первых двух можно оценить снизу $\varepsilon\|x - x^0\|$, а разность последних двух можно ограничить сверху r'^2 , то есть, вся эта вещь как минимум r'^2 .

Пусть w - минимум $F(x)$ на $B_r(x^0)$, тогда $\text{grad } F(w) = 0$, $= \|f(x) - y\|^2 = \sum_{k=1}^n (f_k(x) - y_k)^2$,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_l} \right|_w = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_w 2(f_k(x) - y_k),$$

Ну под конец не успел, слишком долго расшифровывать. □

6 Лекция 6.

(пропущено продолжения доказательства с прошлой лекции)

Попытаемся обобщить Формулу Тейлора для многих переменных. Для начала, разберёмся с тем, как дифференцировать композицию функций многих переменных. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, f - гладкая в x^0 , g - гладкая в $f(x^0)$, тогда $g(f(x^0))$ - гладкая в x^0 , дифференциал - BA .

Пример(ы) 1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$, $g_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leq k \leq n$), $g = (g_1, \dots, g_n)$. Тогда $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$, и

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{\tilde{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g_1(x_1 + \varepsilon, \dots), \dots, g_n(x_1 + \varepsilon, \dots)) - f(\dots)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g_1(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x_1} + o(\varepsilon), \dots) - f(g(\dots), \dots)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{g_1(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \dots + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial g_n}{\partial x_1} + o(\varepsilon)}{\varepsilon} = \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = ? \sum_i \frac{\partial f}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), BA = \left(\sum_{k=1}^n \right)$$

Пример(ы) 2. $f(e^{x_1+x_2+x_3}, x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_3) = F(x_1, x_2, x_3)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot e^{x_1+x_2+x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(-1).$$

Формула Лагранжа. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, (x_1, \dots, x_n) , (y_1, \dots, y_n) , $f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, \dots, x_n)$.

Путь $x(t) = x + th$, $0 \leq t \leq 1$, $h = y - x$ (покоординатно). Тогда $\varphi(t) := f(x + th) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n)) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$, $f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$,

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x(t)} (y_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{x(t)} (y_n - x_n) = (\text{grad } f, y - x).$$

Таким образом, формула Лагранжа: $f(y) - f(x) = (\text{grad } f|_{\xi}, y - x)$, $\xi \in [x, y]$.

Получим ещё одно крутое обобщение:

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x(0)} (y_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{x(0)} (y_n - x_n),$$

А теперь возьмём производную ещё раз.

$$\varphi''(t) = (\varphi'(t))' = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_k} (y_k - x_k)(?) = ?$$

(не закончено и плохо составлено)

7 Лекция 7.

Утверждение 5. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$. $(x_0, y_0) \in G$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - существуют в окрестности точки. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Доказательство. Составим на плоскости прямоугольник со стороной ε в положительные стороны от изначальной точки, расставим в шахматном порядке в углах плюсы и минусы, в изначальной точке - плюс.

Рассмотрим теперь разностную сумму: $f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2) = \Phi$. Введём некоторые вспомогательные функции: $F_1(y) = f(x_0 + \varepsilon_1, y) - f(x_0, y)$, тогда $\Phi = -F_1(y_0) + F_1(y_0 + \varepsilon_2) = \varepsilon_2 F_1'(\xi_1)$, $\xi_1 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$. $F_1' = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \varepsilon_1, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_2) \right)$, а это равно $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \xi_2)$, ξ_1, ξ_2 лежат в прямоугольнике.

Теперь рассмотрим то же самое, только введём $F_2(x) = f(x, y_0 + \varepsilon_2) - f(x, y_0)$, опять применяем теорему Лагранжа, и получим $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\eta_1, \eta_2)$, а теперь воспользуемся непрерывностью производной, устремим к изначальной точке и получим требуемое. \square

Примечание 5. Менять можно любые частные производные в функциях от многих переменных (фиксируем остальные и меняем по лемме).

Перейдём, наконец, к формуле Тейлора для многих переменных. Выглядит она сложно, но идея простая: у нас есть некоторый центр - точка $x \in \mathbb{R}^n$ и ещё одна точка $y \in \mathbb{R}^n$, мы тогда пойдём по прямой от второй точки к центра, напишем естественную параметризацию $x(t) = x + t(y - x)$, $0 \leq t \leq 1$, $h = (y - x)$. Введём тогда функцию $\varphi(t) = f(x + th)$, попробуем написать для φ обычную формулу Тейлора и подставим h .

$\varphi'(t) = (\text{grad } f, h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + th) \cdot h_k$. Запишем теперь вторую производную: $\varphi''(t) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x + th) h_k h_l$, и, в итоге,

$$\varphi^{(s)}(t) = \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_s \leq n} \frac{\partial^s f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_s}} h_{k_1} \dots h_{k_s} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^s f(x + th).$$

В общем и целом, для написания формулы Тейлора уже всё готово. Остлось вспомнить, как она устроена от одной переменной. $\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\tau + \dots + \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}\tau^m + R_m(\tau, f)$, тогда если $\tau \equiv 1$, то

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + R_m(1, f).$$

Рассмотрим теперь остаток: $R_m(\tau, \varphi) = ?$ (остаток надо дописать).

Теорема 6. Пусть f имеет частные производные до $(m+1)$ -ой в некоторой окрестности точки x , $h = y - x$, тогда $f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k + \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq k_1, k_2 \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}(x)h_{k_1}h_{k_2} + \dots + \int_0^1 \frac{(\dots)(x+th)}{m!}(1-t)^m dt$, также можно написать в форме Лагранжа или Пеано.

Определение 10. $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, имеет локальный минимум в точке x^0 , если $f(y) \geq f(x^0)$, $\forall y \in V_{x^0}$. Аналогично и максимум.

Определение 11. Экстремум: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (дописать надо).

Теорема 7. Если квадратичная форма $\sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x^0)h_k h_l$, $\text{grad}(x^0) = 0$ определена положительно, то локальный минимум, если определена отрицательно, то локальный максимум.

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \{a_{k,l}\}_{1 \leq k, l \leq n},$$

$$Q(x) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl}x_k x_l, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad Q(x) = (x_1, \dots, x_n)A(x_1 \dots x_n)^T.$$

Теорема 8. (Критерий Сильвестра). Пусть у нас имеется матрица Q , $n \times n$, тогда Q положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые определители (два на главной диагонали и квадрат с ними, 4 элемента) не меньше нуля.