Матлог. Основные записи

Кабашный Иван (@keba4ok)
на основе лекций С. О. Сперанского

22 января 2020 г.

Основные моменты.

Содержание

1 Лекция 1.

Определение 1. *Конкатенация* - записали подряд два слова. (A - алфавит, A^* - слова).

Определение 2. *Подслово* - как есть, *вхождение* - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как $\psi \sqsubseteq \varphi$.

Определение 3. $w[w'/u, k]$ - замена подслова w' на u, начинающегося в позиции k.

Определение 4. Фиксированное счётное множество Prop - *пропозициональные переменные.* Язык $\mathscr{L}$ классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов $\to, \vee, \wedge, \neg$ и круглых скобочек.

Определение 5. Form (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\varphi * \psi) \in \mathrm{Form}$, где $*$ - любая из операций в определении выше (если отрицание, то отсительно одногой формулы, конечно).

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\psi \sqsubseteq \varphi$. *Тогда* $\psi = \varphi$.

Доказательство. По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе ψ представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как φ представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально. □

Лемма 2. *Каждую* $\varphi \in \mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ *можно единственным способом представить в виде* $(\theta \to \chi)$, $(\theta \vee \chi)$, $(\theta \wedge \chi)$ *или* $\neg\theta$, *где* $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *(это я везде безграмотно называю композицией).*

Доказательство. От противного по лемме 2. □

Определение 6. Для каждой $\varphi \in \mathrm{Form}$ определим $\mathrm{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \mathrm{Form} \,|\, \psi \preccurlyeq \varphi\}$ - *подформулы.*

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$. *Тогда каждое вхождение* $\neq$ *или* (*является началом вхождения некоторой подформулы.*

Доказательство. Возвратная индукция по длине формулы. □

Лемма 4. *Множество подслов* φ *- объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.*

Доказательство. Из лемм выше. □

Определение 7. *Оценка* (v) - произвольная функция из Prop в $\{0, 1\}$, которую можно расширить и до Form (v^*) посредством применения операций к переменным. Если $v^*(\varphi) = 1$, то порой пишут $v \Vdash \varphi$.

Определение 8. Формулу называют *выполнимой*, если $v \Vdash \varphi$ для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если $v \Vdash \varphi$ для всех оценок.

Определение 9. Формула *семантически следует* из множества формул и записывается $\Gamma \vDash \varphi$, если для любой оценки v, любая формула из множества истина, то φ истина.

Формулы называют *семантически эквивалентны*, и пишут $\varphi \equiv \psi$, если $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$.

2 Лекция 2.

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negotiation):

- (I1). $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
- (I2). $\varphi \to (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;
- (C1). $\varphi \wedge \psi \to \varphi$;
- (C2). $\varphi \wedge \psi \to \psi$;
- (C3). $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$;
- (D1). $\varphi \to \varphi \vee \psi$;
- (D2). $\psi \to \varphi \vee \psi$;
- (D3). $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$;
- (N1). $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;
- (N2). $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;
- (N3). $\varphi \vee \neg\varphi$,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponents*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \quad \to \quad \psi}{\psi}$$

Определение 10. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$, тогда *выводом* из него в гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) элементов Form, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующиъ условий:

- φ_i - аксиома;
- φ_i - элемент Γ;
- $\exists\{j, k\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\}$ такие, что φ_k есть $\varphi_j \to \varphi_i$.

При этом, φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы*. Если φ выводится из Γ, то пишут $\Gamma \vdash \varphi$.

Основные свойства $\vdash$:

- монотонность;
- транзитивность;
- компактность (если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Delta \vdash \varphi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Теорема 1. *(О дедукции). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Доказательство. В одну правую сторону очевидно, в обратную - по индукции по $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ показываем, что $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$, там три случая, и все, кроме одного, тривиальны. $\square$

Введём обозначения: $\top := p \to p$ и $\bot := \neg\top$, где p - фиксированная пропозициональная переменная.

Следствие 1. Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \varphi$$

для некоторых $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$.

Доказательство. Влево - очевидно, вправо - очевидно и применяется теорема о дедукции. $\square$

Лемма 5. *Всякая аксиома гильбертовского исчисления для классической пропозициональной логики общезначима.*

Теорема 2. *(О корректности). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$. Затем рассматриваем произаольную оценку v такую что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$ и покажем по индукции по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $v \Vdash \varphi_i$. $\square$

Определение 11. $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называется *простой теорией*, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \mathrm{Form}$;
- $\{\varphi \in \mathrm{Form} \,|\, \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Лемма 6. *Пусть* Γ *- простая теория, тогда для любых её элементов можно переписать действия над ними в рамках принадлежности к теории.*

Лемма 7. *(О расширении. a.k.a. Линденбаума). Пусть* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \varphi$*. Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \varphi$.

Доказательство. Рекурсивно докидываем к Γ элементы Form (их счётно). $\square$

3 Лекция 3.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу $v_\Gamma(p) := 1$, если $p \in \Gamma$ и 0 иначе.

Лемма 8. *Пусть* Γ *- простая теория. Тогда для любой* $\varphi \in \mathrm{Form}$,

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$$

Доказательство. Индукция по построению φ, используя лемму 6. □

Теорема 3. *(О сильной полноте $\vdash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$ если и только если $\Gamma \nvDash \bot$, а значит, Γ непротиворечиво если и только если Γ выполнимо.

Доказательство. Вправо - теорема о корректности, влево - от противного, рассматриваем Γ', как в лемме 7. □

Теорема 4. *(О слабой полноте $\vdash$). Для любой $\varphi \in \mathrm{Form}$,*

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vDash \varphi$$

то есть, выводимость из пустого равносильна обзезначимости,

Теорема 5. *(О компактности $\vDash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vDash \varphi \Longleftrightarrow \Delta \vDash \varphi$$

для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. В частности, $\Gamma \nvDash \bot$ тогда и только тогда, когда $\Delta \nvDash \bot$ для всех конечных $\Delta \subseteq \Gamma$, а значит, Γ выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество Γ выполнимо.

Утверждение 1. Слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\vDash$ равно сильная полнота $\vdash$.

Определение 12. *Сигнатура* - четвёрка вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где первые три - попарно непересекающиеся множества, а последнее - функция из $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 13. *σ-структура* - пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A - непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ - функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$, такая что:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$.

При этом, A - носитель, а $I_{\mathfrak{A}}$ - интерпретация σ в $\mathfrak{A}$.

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A}$ b $\mathfrak{B}$ - две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ есть *гомоморфизм* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

- для любого n-местного предиката и всех $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

- для любого m-местного функционала и всех $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$,

$$\xi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$

- для любой константы,

$$\xi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Определение 15. Инъективный гомоморфизм называют *сложением*, если выполнено усиление первого пункта, где следствие заменяется на равносильность.

Определение 16. Сюръективное вложение называют *изоморфизмом* и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если они изоморфны, т.е. между ними существует изоморфизм.

Определение 17. *Автоморфизм* - изоморфизм на себя. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ - множество всех автоморфизмов $\mathfrak{A}$.

4 Лекция 4.

Определение 18.

$$\mathrm{Var} := \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

есть фиксированное на всю жизнь счётное множество *предметных переменных* или просто *переменных.*

Определение 19. *Язык* $\mathscr{L}_\sigma$ кванторной классической логики над сигнатурой σ состоит из элементов $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Var}$, а также *символов связок*, *символов кванторов* и *вспомогательных символов.*

Определение 20. Term_σ - наименьшее множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma .$$

Элементы Term_σ называют *σ-термами.*

Определение 21. $_\sigma$ - наименьшее множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \mathrm{Pred}$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{Form}_\sigma;$$

- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$, то

$$\{(\Phi \to \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \wedge \Psi), \neg\Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma;$$

- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то

$$\{\forall x\, \Phi, \exists x\, \Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma\,.$$

Элементы которого называются *σ-формулами.* Атомарными формулами называются формулы, которые не содержат ни символов связок, ни символов кванторов. Их множество - Atom_σ.

Примечание 1. Для понимания, кажется, Term - выражения с переменными, константами, действиями и т.д., а вот Form - сравнения выражений (в частности), логические утверждения, кванторные.

Определение 22. Для любых $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ определим

$$\mathrm{sub}(t) := \{s \in \mathrm{Term}_\sigma\, | s \preccurlyeq t\},$$
$$\mathrm{Sub}(\Phi) := \{\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma\, | \Psi \preccurlyeq \Phi\},$$

которые называются соответственно *подтермами* и *подформулами.*

Лемма 9. *Пусть* $\{t, s\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$ *таковы, что* $t \sqsubseteq s$*. Тогда* $t = s$*.*

Лемма 10. *(О единственности представления термов). Всякий* $t \in \mathrm{Term}_\sigma \setminus (\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma)$ *можно единственным образом представить в виде* $f(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*.*

Лемма 11. *Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ *и* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*. Тогда всякое вхождение* f *в* t *является началом вхождения некоторого подтерма.*

Лемма 12. *(О подтермах). Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$*.*

- *если* $t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma$*, то* $\mathrm{sub}(t) = \{t\}$*;*
- *если* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*, то*

$$\mathrm{sub}(t) = \mathrm{sub}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

Лемма 13. *(О единственности представления атомов). Всякий* $\Phi \in \mathrm{Atom}$ *можно единственными образом представить в виде* $P(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*.*

Лемма 14. *Пусть* $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *таковы, что* $\Phi \sqsubseteq \Psi$*. Тогда* $\Phi = \Psi$*.*

Лемма 15. *(О единственности представления формул). Всякую* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \setminus \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно единственным образом представить в виде комбинации формул (одной или двух) и символов связок или символов кванторов.*

Лемма 16. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*. Тогда всякое вхождение* $\neg$*, (,* $\forall$ *или* $\exists$ *в* Φ *является началом вхождения некоторой подформулы.*

Лемма 17. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*.*

- *Если* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$, *то* $\mathrm{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$;
- *Если* $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$, *где* $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, *то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \mathrm{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\};$$

- *Если* $\Phi = \neg\Theta$, *где* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$, *или* $\Phi = Q \times \Theta$, *где* $x \in \mathrm{Var}$, $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $Q \in \{\forall, \exists\}$, *то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

Определение 23. Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$. Тогда каждое вхождение Qx в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют *областью действия* данного вхождения Qx. Вхождение x в Φ называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и *свободным* иначе. Далее, говорят, что x является *свободной переменной* в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Скажем, что $\mathrm{FV}(\Phi)$ - множество $z \in \mathrm{Var}$ таких, что у z имеется хотя бы одно свободное вхождение в Φ. Интуитивно, элементы этого множества играют роль параметров Φ, а запись $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ указывает на то, что $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_l\}$.

Определение 24.

$$\mathrm{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \emptyset\}/$$

Элементы которого называют *σ-предложениями.* Они могут выступать в качестве *нелог. аксиом.*

Определение 25. t называем *свободным для подстановки* вместо x в Φ, если ни одно из свободных вхождений x в Φ не находится в области действия квантора по переменной из t.

Определение 26. *Означивание переменных* - функции из Var в A. Каждое означивание v в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{v} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\begin{aligned} \overline{v}(x) &:= v(x); \\ \overline{v}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \overline{v}(f(t_1, \ldots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_n)). \end{aligned}$$

А через v^x_a (x - переменная, a - элементA) будет обозначаться особенное означивание такое, что оно равно $v^x_a(y) = a$, если $y = x$ и $v(y)$ - иначе.

Определение 27. Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ индукцией по построению Φ. Короче, надо просто расписать все логические связки и кванторы, что они означают. Когда эта вещь выполнена, мы будем говорить, что Φ *истинно* в $\mathfrak{A}$ при v.

Определение 28. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Поворят, что $\mathfrak{A}$ *является моделью* Γ и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Теорема 6. *Пусть* ξ *- изоморфизм из* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{B}$. *Тогда для каждой σ-формулы* Φ *и любого означивания* v *в* $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v] \Longleftrightarrow \mathfrak{B}\, \Phi[v \circ \xi].$$

Доказательство. Примем $\mu := v \circ \xi$, заметим, что $\overline{\mu}(t) = \xi(\overline{v}(t))$, а потом проверн\"ём индукции по построению Φ. □

Определение 29. Для произвольного класса $\mathscr{K}$ σ-структур Предположим

$$\mathrm{Th}(\mathscr{K}) := \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \,|\, \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathscr{K}\}.$$

Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны*, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Следствие 2. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

5 Лекция 5.

Определение 30. $S \subseteq A^l$ называется *определимым в* $\mathfrak{A}$, если существует σ-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ такая, что

$$S = \{\vec{a} \in A^l | \, \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{a}]\};$$

в этом случае говорят, что Φ *определяет* S *в* $\mathfrak{A}$.

Определение 31. $\mathrm{supp}(n)$ - множество всех простых делителей $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2. Пусть S определимо в $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$,

$$\xi[S] \subseteq S,$$

то есть, S замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$.

Утверждение 3. σ-структуру $\mathfrak{A}$ называют *нормальной*, если $=$ интерпретируется в $\mathfrak{A}$ как настоящее равенство, то есть, $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с id_A.

Определение 32. Eq_σ - множество состоящее из σ-предложений

- $\forall x \, x = x$;
- $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \to x = z)$;

а также всех σ-предложений видов

- $\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_n \forall y_n (\vec{x} = \vec{y} \to (P(\vec{x}) \leftrightarrow P(\vec{y})))$;
- $\forall x_1 \forall y_1 \ldots \forall x_m \forall y_m (\vec{x} = \vec{y} \to f(\vec{x}) = f(\vec{y}))$,

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\mathrm{arity}_\sigma(f) = m$. Под *аксиомами равенства для* σ понимают элементы Eq_σ.

Определение 33. Обозначим за $\mathfrak{A}'$ нормальную σ-структуру с носителем $A_{/=^{\mathfrak{A}}}$ такую, что мы заменяем константы и функционалы $\mathfrak{A}$ (произвольная модель Eq_σ) на их классы эквивалентности по равенству, и оставляем все предикаты.

Теорема 7. *Для любых σ-формул Φ и означивания v в $\mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v] \Longleftrightarrow \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[v'],$$

где v' отображает каждую $x \in \mathrm{Var}$ в $[v(x)]$.

Доказательство. Для начала, как в ещё одном недавнем доказательстве заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{v}' = [\overline{v}(t)],$$

что несложно доказывается индукцией по построению t, а затем опять же, индукция по постоению самой Φ. $\square$

Следствие 3. Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

- у Γ есть нормальная модель;
- у $\Gamma \cup \mathrm{Eq}_\sigma$ есть модель.

Определение 34. σ-формулу Φ называют

- *выполнимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и v;
- *общезначимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ для всех $\mathfrak{A}$ и v.

Определение 35. Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x_1, \ldots, x_l$ - в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке их появления в Φ. Определим тогда *универсальное замыкание* $\tilde{\forall}$ - $\forall x_1 \ldots \forall x_l \Phi$ и *экзистенциальное замыкание* $\tilde{\exists}$ аналогично.

Определение 36. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ *семантически следует из* Γ, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \Longrightarrow \mathfrak{A} \Vdash \tilde{\forall}\Phi.$$

Если выполнено $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$, то такие формулы называют *семантически эквивалентными* и пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Определение 37. σ-формула Φ называется *бескванторной*, если в ней нет кванторов.

Определение 38. Под *пренексными нормальными формами* понимаются σ-формулы вида

$$Q_1 x_1 \ldots Q_l x_l \Psi,$$

где Q_i - кванторы, x_i - переменные и Ψ бескванторная.

6 Лекция 6.

Сейчас будет Гильбертовское исчисление для кванторной логики. В моём понимании, это как некоторый апдейт пропозициональной, во многом они схожи, достаточно только взглянуть на *схемы аксиом*:

- (I1). $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
- (I2). $\Phi \to (\Psi \to \Theta) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta))$;
- (C1). $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$;
- (C2). $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$;
- (C3). $\Phi \to (\Psi \to \Phi \wedge \Psi)$;

- (D1). $\Phi \to \Phi \vee \Psi$;
- (D2). $\Psi \to \Phi \vee \Psi$;
- (D3). $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta))$;
- (N1). $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$;
- (N2). $\neg\Phi \to (\Phi \to \Psi)$;
- (N3). $\Phi \vee \neg\Phi$;
- (Q1). $\forall x\Phi \to \Phi(x/t)$, где t свободен для x в Φ;
- (Q2). $\Phi(x/t) \to \exists x\Phi$, где t свободен для x в Φ.

Примечание 2. В случаях, когда $=$ содержится в Pred_σ, элементы Eq_σ также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Также имеется *modus ponens* (MP):

$$\frac{\Phi \qquad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$

И два новых "кванторных" правила вывода:

$$\frac{\Psi \to \Phi}{\Psi \to \forall x\Phi}\,(\mathrm{BR1}) \qquad \text{и} \qquad \frac{\Phi \to \Psi}{\exists x\Phi \to \Psi}\,(\mathrm{BR2}),$$

где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$, и они традиционно называются *правилами Бернайса.*

Определение 39. *Вывод* - опять-таки, конечная последовательность $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ элементов Form_σ такую, что для каждого i от 0 до n выполнено одно из следующих условий:

- Φ_i - аксиома;
- Φ_i - элемент Γ;
- Φ_i полулчается из некоторых предшествующих по (MP);
- Φ_i получается из некоторой предшествующей по (BRi).

Φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы.* Пишут $\Gamma \vdash \Phi$, если существует вывод из Γ с заключением Φ.

Определение 40. Φ *опровержима* в Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$; Φ *независисма* от Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.

Основные свойства $\vdash$ - опять:

- монотонность (если $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$);
- транзитивность (если $\Delta \vdash \Psi$ для всех $\Psi \in \Gamma$, и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$);
- компактность (если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Определение 41. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$. Для всякой пропозицональной формулы φ обозначим $\xi\varphi$ - результат замены (всех вхождений) каждой $p \in \mathrm{Prop}$ в φ на $\xi(p)$.

Утверждение 4. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ и $\vdash \varphi$ (в пропозициональном исчислении). Тогда $\vdash \xi\varphi$ (уже в кванторном исчислении).

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, а затем рассмотрим $\xi\varphi_0, \ldots, \xi\varphi_n = \xi\varphi$, и нетрудно показать, что это также вывод, там только аксиомы и MP. □

Следствие 4. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ и $\vDash \varphi$ (в смысле пропозициональной логики). Тогда $\vdash \xi\varphi$.

Доказательство. В силу теоремы о (слабой) полноте для пропозиционального исчисления мы имеем $\vdash \varphi$, а потому $\vdash \xi\varphi$. □

Утверждение 5. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$.

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x \Phi.$$

Доказательство. В правую сторону: пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Значит, $\Gamma \vdash \top \to \Phi$. Применяем BR1, получаем $\Gamma \vdash \top \to \forall x\Phi$. Таким образрм, $\Gamma \vdash \forall x\Phi$.

В обратную: пусть $\Gamma \vdash \forall x\Phi$. Используем аксиому $\forall x\Phi \to \Phi$ (Q1), откуда легко получаем $\Gamma \vdash \Phi$. □

Примечание 3. Таким образом, мы получили *правило обобщения* (GR):

$$\frac{\Phi}{\forall x\Phi}$$

Следствие 5. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \tilde{\forall}\Phi.$$

Теорема 8. *(О дедукции). Для любых* $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$.

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

Доказательство. В левую сторону очевидно, в правую точно так же, как и в изначальной теореме о дедукции, разве что надо рассмотреть новые случаи BR1 и BR2. □

Следствие 6. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \Psi_i \to \Phi$$

для некоторых $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma$.

Лемма 18. *Пусть* $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\vDash \varphi$ *(в смысле пропозициональной логики). Тогда* $\vDash \xi\varphi$.

Лемма 19. *Пусть* Φ *- аксиома кванторного исчисления. Тогда* $\vDash \Phi$.

Теорема 9. *(О корректности). Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longrightarrow \Gamma \vDash \Phi.$$