Теория категорий

Тутанов Михаил и Копейкина Софья
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

18 октября 2021 г.

Содержание

Основные определения

Определение 1. *Категория $\mathcal{C}$* – это

- класс[1] $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $\mathrm{Hom}(X,Y)$[2] для любых двух X и Y из $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ$: $\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$;
- для любого A из $\mathcal{C}$[3] существует $\mathrm{id}_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$ такое, что $f\circ\mathrm{id}_A = f$, $\mathrm{id}_A\circ f = f$ для любого осмысленного f.

Определение 2. Два объекта X и Y в категории $\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, если $\exists f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и $g\in\mathrm{Hom}(Y,X)$ такие, что $f\circ g=\mathrm{id}_Y$, $g\circ f=\mathrm{id}_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами*.

Определение 3. Объект A в категории $\mathcal{C}$ называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из $\mathcal{C}$ $|\mathrm{Hom}(X,A)|=1$ ($|\mathrm{Hom}(A,X)|=1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A, композиция $f\circ g$ в этом случае будет элементом $\mathrm{Hom}(A',A')$, но $\mathrm{id}_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f\circ g=\mathrm{id}_{A'}$, аналогично $g\circ f=\mathrm{id}_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. □

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории $\mathcal{C}$ определим следующую категорию $\mathcal{C}^{op}$, которую будем называть *двойственной* (*противоположной*): $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op}=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, $f^{op}\circ^{op}g^{op}=g\circ f$.

Примечание 1. Иницальный объект в $\mathcal{C}$ соответсвует терминальному в $\mathcal{C}^{op}$ и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- $Sets$: $\mathrm{Ob}\,Sets$ = все множества, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ = все отображения из X в Y, $\circ$ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – $\emptyset$, терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

[1]Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

[2]Обозначение Mor на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

[3]Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- $Groups$, $Rings$ и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;

- Top: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для $Sets$;

- $HTop$: $\mathrm{Ob}\, HTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;

- Категория с одним элементом, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.

- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = M$, $\mathrm{Hom}(x, y) = \emptyset$, если $x \le y$, $= \emptyset$, иначе.

- $Rels$, $\mathrm{Ob}\, Rels$ = все множества, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ = все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \to X$ и $pr_Y : X \times Y \to Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$, существует единственный морфизм $h : Z \to X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$ и $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \leftarrow X$ и $g : Z \leftarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \leftarrow X \amalg Y$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id, подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. □

Примеры на произведение и копроизведение:

- $Sets$: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y[4];

- $Groups$: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);

- Top: аналогично $Sets$;

[4]Здесь ранее было указано, что оно существует не всегда, это неправда,оно всегда есть

- ЧУМ: $x \times y = min(x, y)$, $x \amalg y = max(x, y)$.

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

Определение 7. *Категорией стрелки* $\mathcal{C}/A$, где $\mathcal{C}$ – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/A =$ пары (X, f), где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$; $\mathrm{Hom}((X, f), (Y, g)) = \{h \in \mathrm{Hom}(X, Y) | f = g \circ h\}$.

Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A). Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- $Sets$: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$;
- $Sets^{op}$: $X \amalg_A Y = X \amalg Y/\sim$, где $\sim$ порождено $f(a) \sim g(a)$. В Top это просто склейка;
- $Groups$: произведение как на $Sets$, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 9. *Функтором* $\mathcal{F}$ называется отображение между двумя категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ (определённое и на объектах, и на морфизмах) со свойствами:

- Если $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$.

Примеры функторов:

- $\pi_1 : Top \to Groups$;
- Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда $\mathcal{F}$ – гомоморфизм моноидов;
- M – моноид, $\mathcal{F} : M \to Vect_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \to End(V)$;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ – выбор объекта в $\mathcal{C}$, а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

Функтор

Определение 10. *Функтор* - это отображение $F : C \to D$ между категориями со следующими свойствами:

1. Если $X \in \mathrm{Ob}\ C$, то $F(x) \in \mathrm{Ob}\ D$
2. $\forall A, B \in \mathrm{Ob}\ C$ и $F : A \to B$ – $F(f) : F(A) \to F(B)$, причем "произведение переходит в произведение"и "единичный гомоморфизм в единичный гомоморфизм т.е.
   $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ и $F(id_A) = id_{F(A)}$

Утверждение 3. $A \simeq B \Rightarrow F(A) \simeq F(B)$
Доказательство:
$A \simeq B$, значит $\exists f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$.
Вспомним, что функтор сохраняет произведение и единичный гомоморфизм:
$F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$ и $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$.
Мы нашли гомоморфизмы с нужными нам свойствами, а значит $F(A) \simeq F(B)$.

QED

Примеры функторов

1. *Забывающий функтор*
   Такой функтор стандартно обозначается как U, он "забывает"алгебраические структуры. Рассмотрим на примере групп:
   $U : Groups \to Sets$
   $U(G) = G$ как множество
   $U(f) = f$ как отображение множеств
2. *Свободный функтор*
   Это функтор, который "вспоминает"алгебраическую структуру. Рассмотрим также на примере групп:
   $F : Sets \to Groups$
   $F(X) =$ свободная группа, порожденная X
   $F(f) : F(X) \to F(Y)$, который переводит образующие в образующие: $x \mapsto f(x)$
3. Конкретный пример свободного функтора между ассоциативными алгебрами с единицей и векторными пространствами:
   K - поле, $U : K - Alg \to Vect_K$ и $F : Vect_K \to K - Alg$
   $F(V) = T(V) = K \bigoplus V \bigoplus V^{\bigotimes 2} \bigoplus V^{\bigotimes 3} \bigoplus ...$
   Со следующей структурой:
   $V^{\bigotimes n} \times V^{\bigotimes m} \to V^{\bigotimes (n+m)}$
   $(v_1 \otimes ... \otimes v_n; u_1 \otimes ... \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes ... \otimes v_n \otimes u_1 \otimes ... \otimes u_m$
   А с гомоморфизмами дела обстоят следующим образом:
   $f : V \to W$, тогда $F(f) : T(V) \to T(W)$, который работает так:
   $V^{\bigotimes n} \to W^{\bigotimes n}$
   $v_1 \otimes ... \otimes v_n \to f(v_1) \otimes ... \otimes f(v_n)$
4. Аналогично между коммутативными алгебрами и векторными пространствами:
   $S : K - CommAlg \to Vect_K$
   $S(V) = T(V)_{/<u \otimes v - v \otimes u>}$, что называется *симметрической алгеброй*

5. Еще пример - между абелевыми и обычными группами:
   $F : AbGroups \to Groups$
   $F(G) = G_{/[G,G]}$
   $F(f)[g] = [f(g)]$

6. *Множества с выделенной точкой* и свободный функтор между ними и категорией множеств:
   $Sets_*$ - это категория, определенная следующим образом: $Ob\ Sets_*$ состоит из элементов следующего вида: $(A, a \in A)$. Гомоморфизмы устроены так: $f_* : (A, a) \to (B, b)$, причем переводит выделенную точку в выделенную точку.
   Свободный функтор выглядит так:
   $F : Sets \to Sets_*$
   $A \mapsto A \sqcup \{\varnothing\}$
   $f \mapsto f \times (\varnothing; \varnothing)$

7. *Копредставимый функтор* - это функтор, действующий их категории в категорию множеств $F : C \to Sets$, построенный следующим образом:
   $A \in \mathrm{Ob}\ C\ F(X) = Hom(A, X)$
   $f : X \to Y - F(f) : Hom(A, X) \to Hom(A, Y)$
   $\phi \mapsto f \circ \phi$

Определение 11. *Контрвариантный функтор* из C в D - это функтор из C^{op} в D^{op}:
$A \in \mathrm{Ob}\ C - F(A) \in \mathrm{Ob}\ D$
$f : A \to B - F(f) : F(B) \to F(a)$ и $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, $F(id_A) = id_{F(A)}$

Определение 12. *Представимый функтор* - это такой функтор $h_A : C^{Op} \to Sets$, $A \in \mathrm{Ob}\ C$, действующий по правилу:
$h_A(X) = Hom(X, A)$, $h_A(f) : \phi \mapsto \phi \circ f$

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Мы хотим определить "инъективность"и "сюръективность"для гомоморфизмов между элементами категорий. Делается это следующим образом:

Определение 13. Гомоморфизм f называется *мономорфизмом*, если "на него можно сокращать слева т.е. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

Примеры

- Sets - инъективные отображения
- Groups - инъективне гомоморфизмы групп
- Rings - инъективные гомоморфизмы колец

Примечание 2. Сохраняют ли функторы мономорфизмы? НЕТ

Определение 14. Гомоморфизм $f : X \to Y$ называется *расщепимым мономорфизмом*, если $\exists r : Y \to X$ такой, что $r \circ f = id_X$

Примечание 3. Сохраняют ли функторы расщепимые мономорфизмы? ДА

Определение 15. Гомоморфизм f называется *эпиморфизмом*, если "на нее можно сокращать справа т.е. $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$
Аналогично можно определить расщепимый эпиморфизм:

Определение 16. Гомоморфизм $f : X \to Y$ называется *расщепимым эпиморфизмом*, если $\exists s : Y \to X$ такой, что $f \circ s = id_Y$ **Примеры эпиморфизмов**

- Sets - сюръективные отображения
- Groups - сюръективные гомоморфизмы групп
- HausTop - непрерывные отображения с $f(X) = Y$

Упражнение 1. *Расщепимый мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм* и *Расщепимый эпиморфизм + мономорфизм = изоморфизм*

Естественные преобразования

Определение 17. $\alpha : F \to G$ называется *естественным преобразованием* для функторов $F, G : C \to D$, если $\forall A \in C\ \exists \alpha_A : F(A) \to G(A)$ такой, что $\forall f \in Hom(A, B)\ \exists \alpha_B : F(B) \to G(B)$, причем следующая диаграмма коммутативна:

$f : A \to B, \quad A, B \in Ob\, C$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_A : F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
\alpha_B : F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Упражнение 2. $I = [Ob\ I = \{0, 1\}, Hom(I) = \{Hom(0, 0) = \{id_0\}, Hom(0, 1) = \{f = \{(0, 1)\}\}, Hom(1, 0) = \varnothing, Hom(1, 1) = \{id_1\}\}]$.
Задать естественное преобразование это все равно, что задать следующий функтор: $H : C \times I \to D \mid H(\ , 0) = F$ и $H(\ , 1) = G$, со следующей структурой категории $C \times I$:
$Ob\ C \times I = \text{Ob}\ C \times \text{Ob}\ I$, $Hom(C \times I) = Hom(C) \times Hom(I)$
Примеры

- $V \in Vect_K$. Для функторов $Vect_K \to Vect_K$ $F : V \mapsto V, f \mapsto f$ и $G : V \mapsto V^{**}, \phi \mapsto \phi^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha \mid \alpha_V : F \to G : V = F(V) \mapsto G(V) = V^{**}$ такое, что $\alpha_V(f)(v) = f(v)$
- *Топологическая группа* - это группа с топологической структурой, на которой заданы две непрерывные операции: $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$ и $G \to G : a \mapsto a^{-1}$
(к примеру, $(\mathbb{R}, +)$ и $(S^1, \cdot)$ - это топологические группы). В данном примере нас будет интересовать *локально компактные тополгические абелевы группы*. Для каждой группы A определим двойственную: $A^* = Hom(A, S^1)$ - непрерывные гомоморфизмы групп (вместе с какой-то топологией).
Итак, для функторов $LocCompAb \to LocCompAb$ $F = Id$ и $G : A \mapsto A^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha : F \to G$, которое определяется так же, как и в предыдущем примере.

Эквивалентность категорий

Определение 18. Есть три функтора $F, G, H : C \to D$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$. *Композиция(вертикальная) естественных преобразований* это естественное преобразование $\beta \circ \alpha : F \to H \mid (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$

Примечание 4. Заметим, что мы таким образом определили категорию $Funct(C, D)$ - функторов из C в D, в которой морфизмы - это естественные преобразования.

Определение 19. Есть четыре функтора $F, G : C \to D,\ H, K : D \to E$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \to G$ и $\beta : H \to E$.
Композиция(горизнтальная) естественных преобразований - это естественное преобразование $\beta \bullet \alpha : H \circ F \to K \circ G \mid (\beta \bullet \alpha)_A : H(F(A)) \to K(G(A))$, последнее работает следующим образом: $H(\alpha_A) : H(F(A)) \to H(G(A)), (\beta \bullet \alpha)_A = \beta_{G(A)}(H(\alpha_A))$

Упражнение 3. Композициии, определенные таким образом, действительно являются естественными преобразованиями.

Упражнение 4. Горизонтальная композиция коммутирует с вертикальной.

Определение 20. Категории C и D называются *эквивалентными*, если $\exists F : C \to D$ и $G : D \to C$, причем есть естественные преобразования
$\alpha : Id_G \to F \circ G, \alpha^{-1} : F \circ G \to Id_G$ и $\beta : Id_C \to G \circ F, \beta^{-1} : G \circ F \to Id$ такие, что
$\alpha \circ \alpha^{-1} = Id, \alpha^{-1} \circ \alpha = Id$ и $\beta \circ \beta^{-1} = Id, \beta^{-1} \circ \beta = Id$
Теперь приведём некоторые примеры двойственных категорий:

- Двойственность Понтрягина: $LocCompAb \simeq LocCompAb^{op}$ со следующими функторами: $F(A) = Hom(A, S^1)$, где на второй группе компактная открытая топология, и в обратную сторону также. Теперь надо указать естественное преобразование $id \to G \circ F$: $A \to Hom(Hom(A, S^1), S^1)$. Примеры: $\mathbb{Z} \longleftrightarrow S^1$, $(\mathbb{R}, +) \longleftrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $CompAb \longleftrightarrow Ab$;

- Двойственность Стоуна: $TotDiscComp^{op} \simeq Bool$, где $TotDiscComp$ – вполне несвязные (дополнение открытого открыто) компактные топологичекие пространства, $Bool$ – коммутативные кольца с единицей, в которых квадрат любого элемента равен ему самого. $F(X) =$ булева алгебра открытых множеств в X, умножение – пересечение, сумма – симметрическая разность. $G(R) =$ множество максимальных идеалов в R с топологией Зарисского.

- Двойственность Гельфанда: $Comp^{op} \simeq$ коммутативныеC^*-алгебры, где C^*-алгебра – алгебра над $\mathbb{C}$ с инволюцией *, нормой, согласованной с *: $||a *|| = ||a||$, $||aa^*|| = ||a||^2$, и эта алгебра полна как метрическое простанство, с данной нормой, морфизмы – морфизмы алгебр, не увеличивающие норму. $F(X) \to Map(X, \mathbb{C})$, $f^*(x) = f(\bar{x})$, $||f|| = max|f(x)|$. Функтор в другую сторону: $A \to$ множество максимальных идеалов, устойчивых относительно инволюции, с некоторой топологией.

- Категория накрытий $Cov(X)$: фиксируем компактно-порождённое связное топологическое пространство X, $ObCov(X) =$ пары из Y и накрытия $Y \to X$, морфизмы – непрерывные отображения из Y в Z, коммутирующее с выбранными накрытиями. Тогда $Cov(X)^{op} \simeq \pi_1(X)$-множества [5];

- Есть двойственность категорий, возникающая из теории Галуа.

Теорема 1. *Критерий эквивалентности категорий: $F : C \to D$ задаёт эквивалентность категорий тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

[5] здесь может быть когда-нибудь будет определение G – множеств

- *F унивалентен, то есть отображение $Hom(X,Y) \to Hom(F(X),F(Y))$ инъективно;*
- *F полон, то есть отображение $Hom(X,Y) \to Hom(F(X),F(Y))$ сюръективно;*
- *F существенно сюръективен: $\forall A \in D\ \exists X \in C : A \cong F(X)$.*

  Примечание 5. первые два условия означают, что $F(C)$ – полная подкатегория в D.

Доказательство.
Лемма 1. *$A \cong B$, $C \cong D$, тогда $Hom(A,C) \cong Hom(B,D)$, причём каждому морфизму слева сопоставляется единственный морфизм, делающий диаграмму из этого морфизма и двух фиксированных изоморфизмов коммутативной.*

В одну сторону: $G : D \to C$, $F \circ G \simeq id_D$, $X \simeq F(G(X))$ – существенная сюръективность.
Пусть $Ff = Fg$, $GFf = GFg$, тогда и f, и g делают соответствующую диаграмму из леммы коммутативной, откуда совпадают, то есть F – унивалентен.
Полнота: $f : F(A) \to F(B)$, рассмотрим $G(f)$ и диаграмму с $A, B, GF(A), GF(B)$, есть единственное g, делающее диаграмму коммутативной, $GF(g) = G(f)$, откуда $F(g) = f$.
В другую сторону: построим G, так как F существенно сюръективно, можно определить $G(X) = Y : X \cong F(Y)$[6], определим G на морфизмах, сделав диаграмму из $A, B, F(G(A)), F(G(B))$ коммутативной получим $g : F(G(A)) \to F(G(B))$, но F – полный и унивалентный, поэтому $g = F(h)$, $G(f) := h$. Изоморфизм между id и $F \circ G$ есть по построению, дальше надо построить $\eta_X : X \to G(F(X))$, для этого найдём $F(\eta_X) : F(X) \to F(G(F(X)))$, такое отображение $F(\eta_X)$ уже найдётся, и F можно убрать из-за его хороших свойств. □

Скелеты

Определение 21. Категория *скелетная*, если в ней изоморфные объекты совпадают.

Определение 22. *Скелет* категории C – скелетная полная подкатегория D (для любого объекта из C есть изоморфный ему из D).

Примечание 6. Скелет категории эквивалентен исходной категории, так как можно взять одним из функторов вложение.
Примеры скелетов:

- $Sets$ – кардиналы;
- Вполне упорядоченные множества – ординалы;
- $Vect_F$ – $F^{(I)}$, где I – кардинал.

Утверждение 4.
- В каждой категории существует скелет;
- Скелет эквивалентен исходной категории;
- Скелетные категории эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны;
- Две категории эквивалентны $\Leftrightarrow$ их скелеты изоморфны.

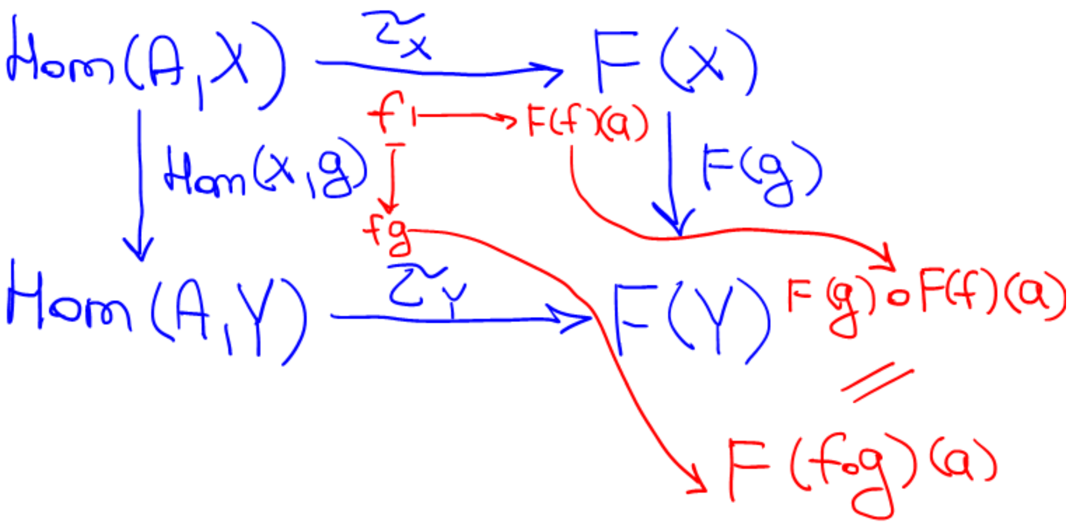
Доказательство. Первое – возьмём по представителю из каждого класса эквивалентности по отношению изоморфности. Четвёртое следует из третьего. Третье: F и G задают эквивалентность C и D $A \cong F(G(A))$, но тогда $A = F(G(A))$, построим G', на объектах совпадает с G, $f = F(h)$ из хороших свойств F, $G(f) := h$. □

[6] при этом мы выбираем один элемент даже не из множества, а из класса

Лемма Йонеды

Лемма 2. *(Лемма Йонеды) В произвольной категории C бозначим за h_A ковариантный функтор $Hom(A, --)$, а за $Nat(F, G)$ все естественные преобразования функторов F и G. Тогда теорема утверждает, что $Nat(h_a, F) \simeq F(A)$, где F действует из некоторой категории C в $Sets$.*

Доказательство:
Сначала подберем отображение "слева-направо":
Есть естественное преобразование $\eta : h_A \to F$, задача состоит в том, чтобы поставить ему в соответствие элемент из $F(A)$. Посмотрим, как оно действует на A: $Hom(A, A) \overset{\eta_A}{\to} F(A)$. Т.к. C - категория, то в $Hom(A, A)$ есть id_A, тогда в соответствии этому естественному преобразованию поставим то, во что отобразится id_A, т.е. $G(\eta) = \eta_A(id_A) \in F(A)$.
Теперь "справа-налево":
Задан элемент $a \in F(A)$, ему в соответствие поставим естественное преобразование $\tau : h_A \to F$ так, что для каждого $X \in Ob\ C$ задано отображение $Hom(A, X) \overset{\tau_X}{\to} F(X)$, действующее следующим образом: $A \overset{f}{\to} X \mapsto F(f)(a)$. Проверим его естественность:



По верху:
$f \mapsto F(f)(a) \mapsto (F(g) \circ F(f))(a)$
По низу:
$f \mapsto f \circ g \mapsto F(f \circ g)(a)$
Вспомним, что наш функтор ковариантный, а он разворачивает композицию, поэтому наше преобразование действительно естественно.
Теперь остается только проверить, что сопоставления взаимно обратные:
В одну сторону:
$a \in F(a) \longrightarrow A \overset{f}{X} \mapsto F(f)(a) \longrightarrow F(id_A)(a) = id_{F(A)}(a) = a$. *Сошлось.*
В другую:
$\eta_X : A \overset{f}{X} \mapsto \eta_A(f) \longrightarrow \eta_A(id_A) \longrightarrow \tau_X : A \overset{f}{\to} X \mapsto F(f)(\eta_A(id_A))$
$\tau_X(f) = F(f)(\eta_A(id_A)) = \eta_X(Hom(A, f)(id_A)) = \eta_X(f)$. *Тоже =).*

Следствие 1. $Nat(h_A, h_B) = Hom(A, B) = h_B(A)$

Следствие 2. *(Вложение Йонеды)* $h_- : C \to Set^{C^{Op}}$ - полный унивалентный ковариантный функтор, который действует следующим образом: $A \mapsto h_A$, $f : B \to A \mapsto Hom(f, -)$

Пределы

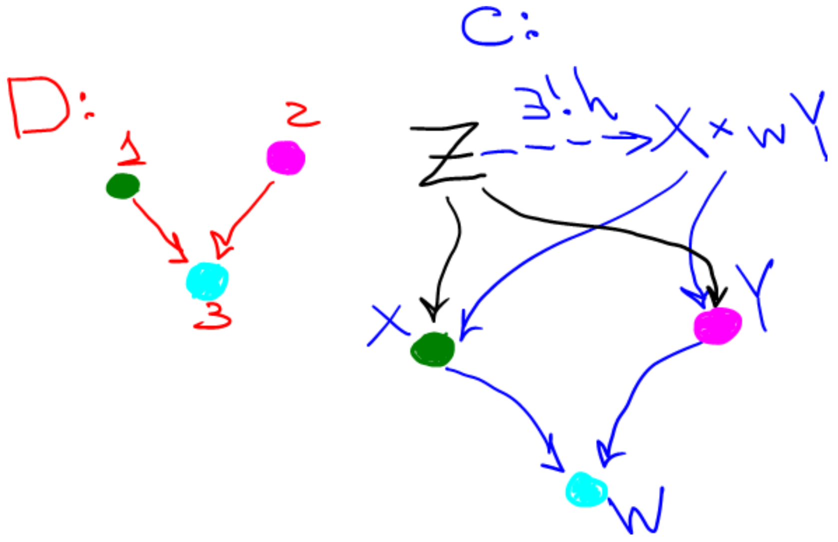
Определение 23. *Постоянный функтор* - это функтор $const_Z : D \to C$, $Z \in Ob\ C$, действующий следующим образом: $A \mapsto Z$, $f \mapsto id$

Определение 24. Категория D называется *малой категорией(диаграммой)*, если ее объекты составляют множество.

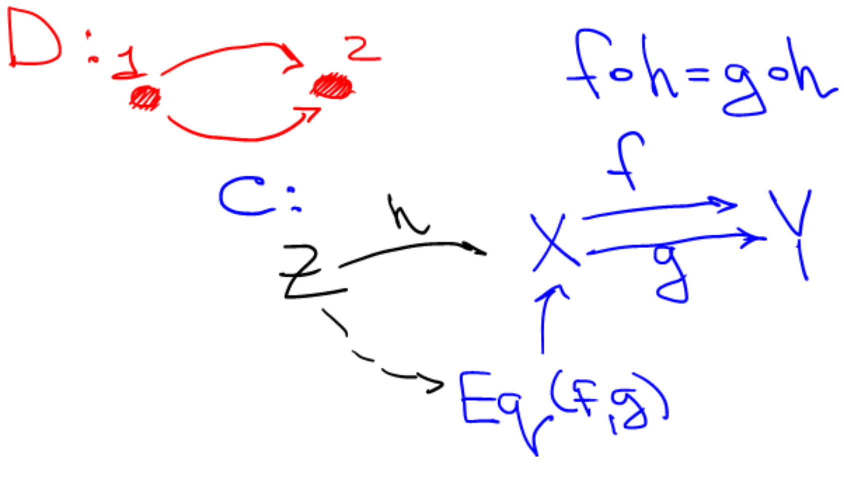
Определение 25. D - малая категория, $F : D \to C$ - функтор. *Предел* - это объект $lim\ F$, представляющий функтор, который действует следующим образом: $Z \mapsto Nat(const_Z, F)$

Примечание 7. Предел это "произведение со стрелками, которые надо уважать"
Примеры:

1. Расслоеное произведение: D - категория с тремя объектами $1, 2, 3$ и стрелками $1 \to 3$, $2 \to 3$ - и есть то, во что функтор F переводит это все: $X, Y, W \in Ob\ C$, стрелки $X \to W$, $Y \to W$. Пределом такого функтора будет объект $X \times_W Y$ со следующим свойством: $\forall Z \in Ob\ C$ и $Z \to X$, $Z \to Y$ $\exists! h : Z \to X \times_W Y$, сохраняющая коммутативность диаграммы.



2. Уравнитель морфизмов: D - категория с двумя объектами $1, 2$ и двумя стрелками $1 \to 2$ - и есть то, во что функтор F переводит это все: $X, Y \in Ob\ C$, две стрелки $f, g : X \to Y$. Пределом такого функтора будет объект $Eq(f, g)$ со следуюшим свойством: $\forall Z \in Ob\ C$ и $h : Z \to X$, причем $f \circ h = g \circ h$, $\exists! \alpha : Z \to Eq(f, g)$, сохраняющая коммутативность диаграммы.
Уравнитель для $C = Sets$ будет такой: $Eq(f, g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$

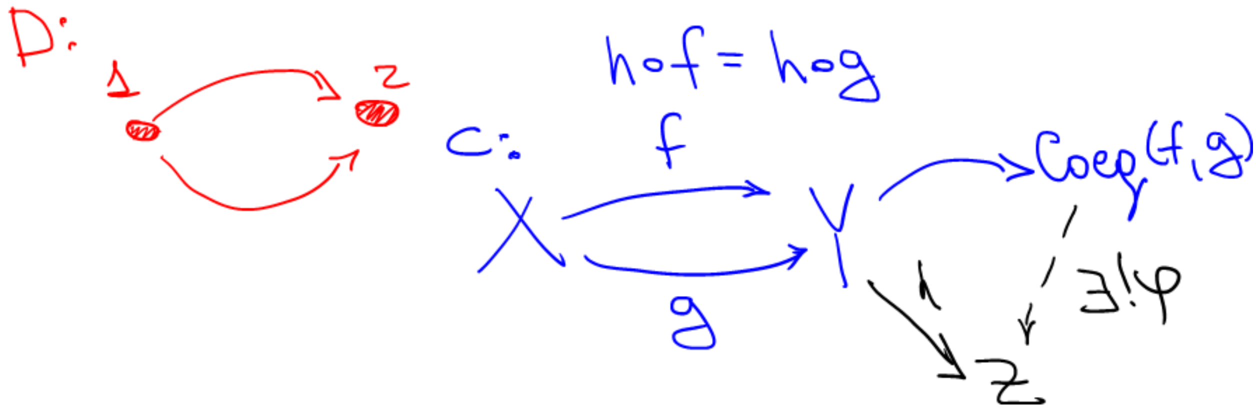


3. Пусть в D есть инициальный объект A. Тогда $lim\ F = F(A)$

Определение 26. *Копредел* $F : D \to C$ - это объект, копредставляющий функтор $G : Z \mapsto Nat(F, const_Z)$. Копредставляющий в том смысле, что $G \simeq Hom(Colim\ F, --)$
Примеры:

1. D - дискретная, т.е. есть категория, в которой есть только тождественные морфизмы. $Ob\ D = I$, есть то, во что функтор их переводит: $(X_i \in C)_{i\in I}$. Копределом для такой конструкции называется копроизведение $\coprod X_i$. В $Sets$ это дизъюнктное объединение

2. D - категория "два объекта - две параллельные стрелки"(как во втором примере предела). Копределом такого функтора называется коуравнитель $Coeq(f, g)$ со следующим свойством: $\forall Z \in C$ со стрелкой $h : Y \to Z$, сохраняющей коммутативность диаграммы, т.е. $h \circ f = h \circ g$, $\exists!\phi : Coeq(f, g) \to Z$, сохраняющая коммутативность диаграммы



3. D - натуральные числа как упорядоченное множество. Функтор переводит их в $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Если предположить, что $C = Sets$ и $X_i \to X_{i+1}$ - вложения, то $ColimX_i = \cup X_i$

Определение 27. Категория C называется *полной*, если в C есть все (малые) пределы. Т.е. $\forall D$ - малой и $\forall F : D \to C\ \exists \lim F$

Теорема 2. *C - полная Lra в C существуют произведения и уравнители*

Доказательство:
$\Rightarrow$ - *очевидно (существуют все пределы, значит существуют и их частные случаи)*
$\Leftarrow$: *$limF = Eq()$*

Сопряжённые функторы

Определение 28. Функторы $F : C \longrightarrow D$ и $G : D \longrightarrow C$ называются *сопряжёнными*, если задан естественный изоморфизм бифункторов: $Hom_D(F(X), Y) \simeq Hom_C(X, G(Y))$. F в этом случае сопряжённый *слева* к G.
Примеры сопряжённых функторов:

- $G : Groups \longrightarrow Sets$ – забывающий функтор, $F : Sets \longrightarrow Groups$ – $F(X)$ – свободная группа;
- $G : Ab \longrightarrow Groups$ – в некотором смысле тоже забывающий, $F : Groups \longrightarrow Ab$: $F(H) = H^{ab} = H/[H, H]$;

- $G: Vect_K \longrightarrow Sets$ – забывающий, $F: Sets \to Vect_K$, $F(I) = K^{(I)}$;
- $G: CommRings \longrightarrow Sets$ – забывающий, $F: Sets \longrightarrow CommRings$: $F(X) = \mathbb{Z}[X]$;
- $G: Rings \longrightarrow Sets$ – забывающий, $F: Sets \longrightarrow Rings$, $F(X) = \mathbb{Z}\, X = T^*(\mathbb{Z}^{(X)})$;
- $G: K - Alg \longrightarrow Vect_K$ – «забывающий», $F: Vect_K \longrightarrow K - Alg$: $F(V) = T^*(V)$;

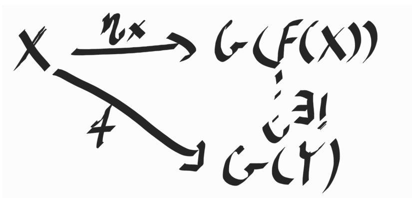
Упражнение 5. $F: (\mathbb{Z}, le) \longrightarrow (\mathbb{R}, le)$, найти сопряжённые слева и справа.
Теорема 3. *Если $F: C \longrightarrow D$ сопряжённый слева к $G: D \longrightarrow C$, то G сохраняет пределы, а F – копределы, то есть $G(\lim K) \simeq \lim(G \circ K)$.*

Доказательство. Надо задать $Hom_C(X, G(\lim K)) \simeq Nat(const_X, G \circ K)$, воспользуемся сопряжённостью функторов и определением предела: $Hom_C(X, G(\lim K)) \simeq Hom_D(F(X), \lim K) \simeq Nat(const_{F(X)}, K) \simeq Nat(const_X, G \circ K)$. □

Теорема 4. *Теорема Фрейда: Пусть D полна, $G: D \longrightarrow C$ сохраняет пределы и выполнено условие $(*)$:*
$\forall X \in C \exists \{A_i\}_{i \in I(X)}$, где $I(X)$ – множество объектов D, вместе с $f_i: X \longrightarrow G(A_i)$, такое что для любых $A \in D$ и $f: X \longrightarrow G(A)$, $\exists \phi_i: A_i \longrightarrow A: f = G(phi_i) \circ f_i$. Тогда у G есть сопряжённый слева.

Доказательство. Определим категорию стрелок: X/G, $ObX/G = f: X \to G(A)$, $Mor(f: X \to G(A), g: X \to G(B)) = \{\phi: A \to B: G(\phi) \circ f = g$.
Лемма 3. *У G есть сопряжённый слева $\Leftrightarrow \forall X \in C$ в X/G есть инициальный объект.*

Доказательство. Надо задать $\forall X F(X) \in D$, $\eta_X: X \to G(F(X)): Hom(X, G(Y)) \simeq Hom(F(X), Y)$ так что $\forall \phi \in Hom(F(X), Y), \phi \longleftrightarrow G(\phi) \circ \eta_X$ задаёт биекцию. Так как Hom(инициальный объект, $-$) – одноэлементное множество, для любых $X, Y, f: X \to G(Y)$, должен существовать единственный морфизм $G(F(X)) \to G(Y)$, делающий диаграмму коммутативной:



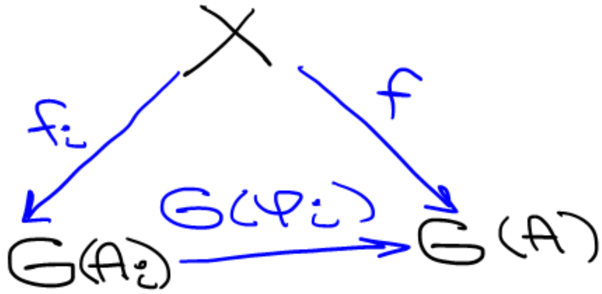
Пусть F у нас есть, возьмём в качестве η_X элемент $\mathrm{Hom}(X, G(F(X)) \simeq \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$, соответствующий $id_{F(X)}$.

В другую сторону: определим $F(X)$ через лемму Йонеды как объект, такой что $\mathrm{Hom}_D(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(X, G(Y))$, $\phi \to G(\phi) \circ \eta_X$. $f: X \to X'$, $Hom(F(X), F(X') \simeq Hom(X, G(F(X'))$, определим $F(f)$ как морфизм, соответствующий $\eta_{X'} \circ f$, тогда $G(F(f)) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ f$. Проверим, что F сохраняет композицию: $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$. $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) \Leftrightarrow G(F(f') \circ F(f)) \circ \eta_X = \eta_{X''} \circ f' circf$. Левая часть равна $GF(f') \circ GF(f) \circ \eta_X$, правая $= GF(f') \circ \eta_{X'} \circ f = GF(f') \circ GF(f) \circ \eta_X$. □

□

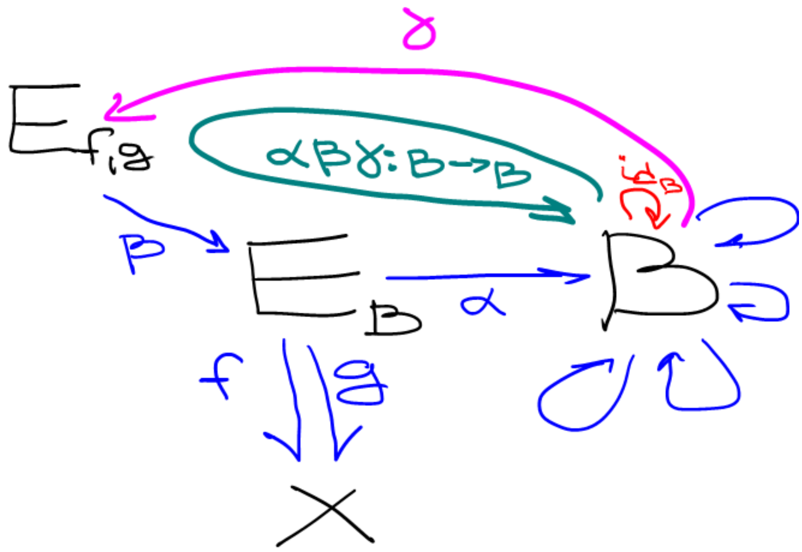
Теорема Фрейда

Теорема 5. *$G: D \to C$ - функтор, причем D - полная, сохраняющий пределы и со следующим свойством: $\forall X \in Ob\ C\ \exists \{A_i\}_{i \in I}$ - множество объектов D вместе с множеством стрелок $X \xrightarrow{f_i} G(A_i)$ такое, что $\forall A \in Ob\ D$ и $\forall f : X \to G(A)\ \exists i \in I$ и $\exists \phi_i : A_i \to A$ такие, что следующий треугольник коммутативен:*



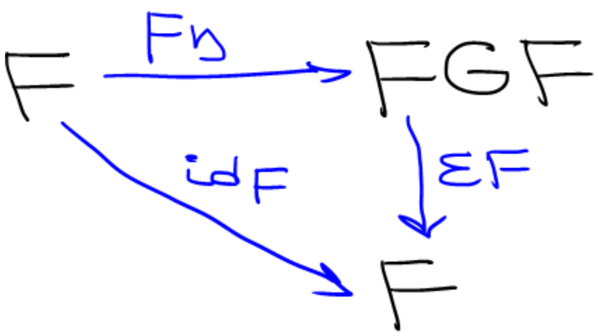
Тогда и только тогда у G есть сопряженный слева.
Доказательство:
Лемма 4. *Если D - полная, то X/G - тоже полная.*
Доказательство Леммы:
Что нужно: для каждого функтора $K : I \to X/G$, где I - малая категория, требуется найти предел.
K сопоставляет каждому i - $X \to G(A_i)$
Т.к. D - полная, то можно в ней найти предел функтора $K_D : I \to D$, который каждому i будет сопоставлять A_i. Обозначим предел за $lim\ A_i$. Т.к. G - сохраняет пределы, то $G(lim\ A_i) = lim\ G(A_i)$ - предел соответствующего функтора, но уже для категории C. Осталось лишь показать, что объект $X \to G(lim\ A_i) = lim\ G(A_i)$ будет пределом функтора K. По универсальному свойству предела K_C морфизмы $X \to G(A_i)$ единственным образом задают морфизм $X \to lim\ G(A_i) = G(lim\ A_i)$. А $X \to G(A_i)$ и $X \to G(lim\ A_i)$ - это объекты X/G, причем последний - будет пределом функтора K по универсальному свойству.
Давайте строить инициальный объект, исходя из свойства, приписанного функтору G в условии теоремы:
*Такое условие, в терминах категории X/G называется "содержание преинициального семейства": $\exists \{B_i\}_{i \in I}$ - множество объектов **в** X/G такое, что $\forall B \in Ob\ X/G\ \exists i \in I$ и $\exists \phi : A_i \to A$*
Итак, благодаря этому соображению для доказательства теоремы Фрейда и применения самой первой леммы остается лишь доказать следующее утверждение:
Если в категории есть преинциальное семейство, то в ней есть инициальный объект.
Лемма 5. *$f, g : A \to B$. Утверждение: $\phi : E \to A$, где E это уравнитель f и g - мономорфизм, т.е. $\phi \circ h = \phi \circ h' \Rightarrow h = h'$*
Доказательство Леммы:
По определению уравнителя: $f \circ \phi \circ h' = f \circ \phi \circ h = g \circ \phi \circ h = g \circ \phi \circ h'$
$\phi \circ h$, $\phi \circ h'$ - это стрелки из некоторого X в A, причем действуют одинаково (по определению). По определению уравнителя: $\forall \psi : X \to A\ !\exists \theta : X \to E$ такой, что диаграмма будет коммутативна. Стрелки h и h' сохранили коммутативность, они представляют одну стрелку типа ψ, а значит по опредлению совпадают.

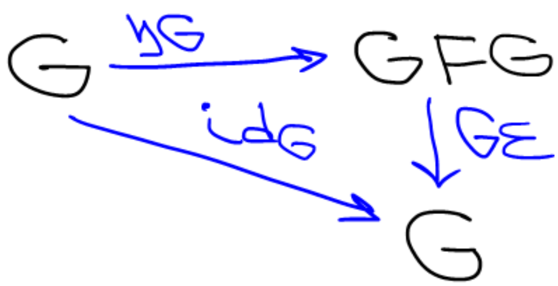
Доказательство ***утверждения****: Итак, у нас есть преинициальный объект* $B = \prod_i B_i$, *т.е.* $\forall W \in X/G \exists \psi : B \to W = \pi_i \circ \phi_i$, *где* π_i *- это проекция на соответствующий элемент произведения (из которого в определении преинциального семейства существовала стрелка). Возьмем уравнитель* E_B *всех стрелок вида* $B \to B$ *вместе с* $\alpha : E_B \to B$ *и покажем, что это и будет искомым* ***инициальным объектом****.*
Пусть есть какие-то две (стрелка есть хотя бы одна, ведь это банально $\alpha \circ \psi$*) стрелки* f, g *из* E_B *в* X*. Т.к.* D *полная, то мы можем взять уравнитель этих стрелок* $E_{f,g}$ *вместе с* $\beta : E_{f,g} \to E_B$*. Вспомним, что из* B *есть стрелки во всё, значит и есть стрелка* $\gamma : B \to E_{f,g}$*. Заметим, что* $\alpha\beta\gamma$ *- это стрелка из* B *в* B*, а значит по определению* E_B*:* $\alpha\beta\gamma\alpha = id_B\alpha$*, а т.к.* α *еще и мономорфизм по доказанному ранее, то* $\alpha\beta\gamma = id_B$*.*
Теперь осталась лишь игра скобок:
$f = f(\alpha\beta\gamma) = (f\alpha)\beta\gamma \overset{\alpha-\text{уравнитель} f,g}{=} (g\alpha)\beta\gamma = g(\alpha\beta\gamma) = g \Leftrightarrow f = g$. *Что и требовалось доказать.*



Еще немного про сопряженность

Лемма 6. $F : C \rightleftarrows D : G$ *- сопряжены* $\Leftrightarrow \exists \eta : Id_C \to GF$ *и* $\exists \epsilon : FG \to Id_D$ *такие, что следующие две диаграммы коммутативны:*





Доказательство:
$\Rightarrow$.
$\eta : Id_C \to GF$ - $Hom(A, GF(A)) \simeq Hom(F(A), F(A))$.

$\epsilon : FG \to Id_D$ - $Hom(FG(B), B) \simeq Hom(G(B), G(B))$
Посмотрим на следующую диграмму и заменим в ней каждую стрелку по сопряженности, получится соседняя диаграмма, которая, очевидно, коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "id_{F(A)}"] \arrow[d, "F(\eta_A)"'] & F(A) \arrow[d, "id_{F(A)}"] \\
FGF(A) \arrow[r, "\varepsilon_{F(A)}"] & F(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & GF(A) \arrow[d, "id_{GF(A)}"] \\
GF(A) \arrow[r, "id_{GF(A)}"'] & GF(A)
\end{tikzcd}$$

Другой треугольник аналогично преобразовывается.
$\Leftarrow$.
Нужно построить естественную биекцию $Hom(F(A), B) \rightleftarrows Hom(A, G(B))$
Например, действующую по таким правилам:
Туда: $f \mapsto G(f) \circ \eta_A$
Обратно: $g \circ \epsilon_B \circ F(g)$
Осталось показать, что они взаимнообратны. Их взаимнообратность это и есть коммутативность треугольников, которые были в условии.

Монада

Эта Лемма подводит нас к одному важному определению. Вообще говоря, такие функторы GF *называются* **эндофункторами** *(как эндоморфизмы по отношению к морфизмам). Заметим одно интересное свойство:* $T = GF$. $T^2 = GFGF = G(FG)F \overset{G\epsilon F}{\to} GF = T$. $\mu = G\epsilon F$.

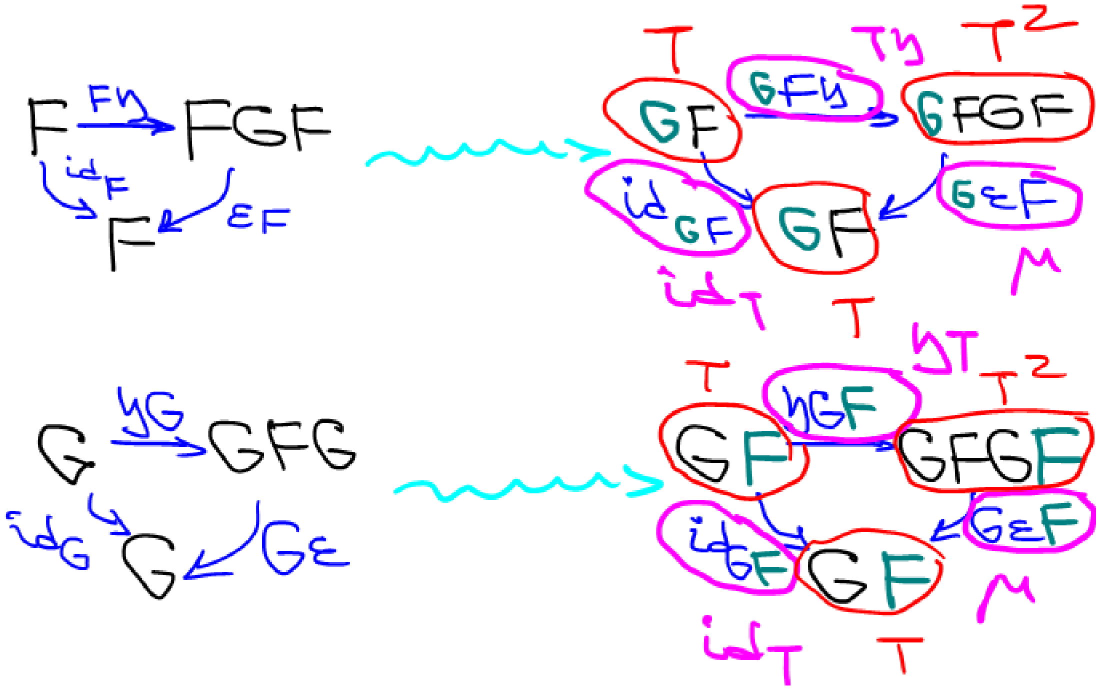
Примечание 8. Это своего рода "умножение".
Итак, определение:
Набор $T : C \to C$, $\eta : Id_C \to T$, $\mu : T^2 \to T$ называется **монадой**, если следующие две диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "id_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "id_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

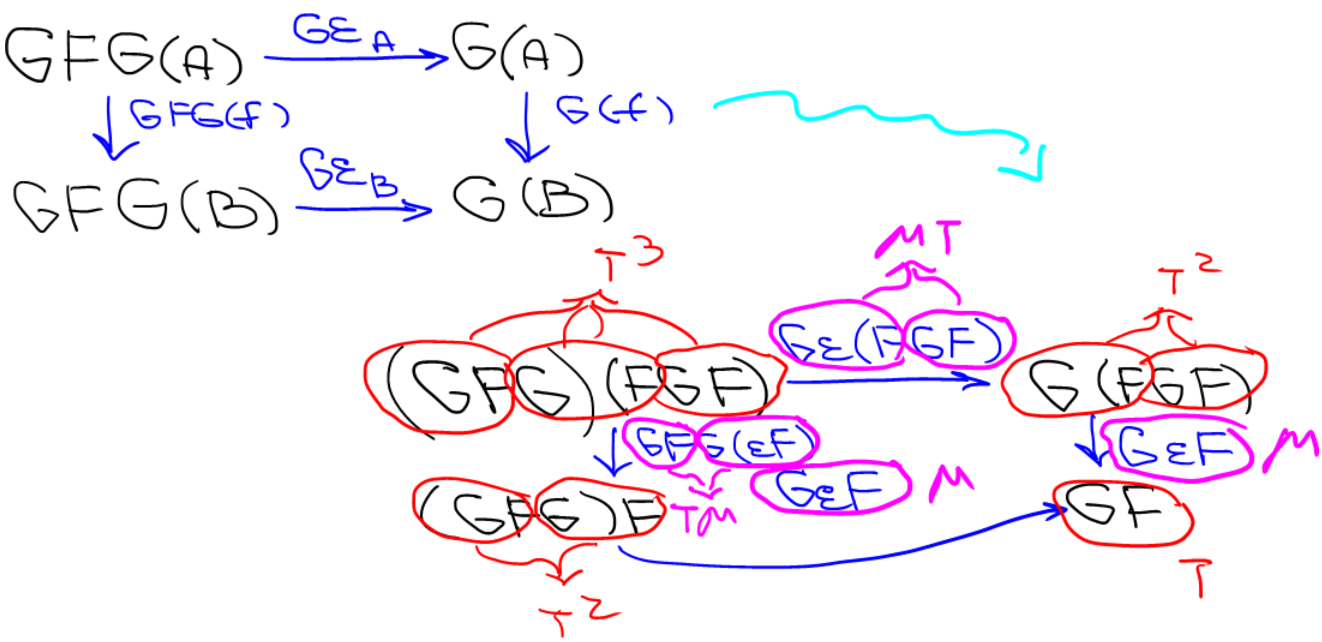
Теорема 6. *$F \dashv G$. Тогда $T = G \circ F$ вместе с $\eta : Id_C \to T$ и $\mu = G\epsilon F : T^2 \to T$ является монадой.*

Доказательство:

"Коммутативность η": "домножим"правую диаграмму из леммы выше на G, а левую "запустим"от F, сошьем их "по общему ребру"и получим то, что требуется:



"Коммутативность μ": заметим, что это частный случай диаграммы естественного преобразования $G\epsilon : GFG \to G$ при $A = FGF(X)$, $B = F(X)$:



Примеры монад

1. *Списки*

   > *T - список букв переводит в список слов из этих букв*

   > *η - из буквы делает одноэлементный список ($x \mapsto [x]$)*

$>$ μ - *стирает границы внутренних списков*
($[[...]_1, [...]_2, [...]_3, ...] \mapsto [...,...,..._1, ...,...,..._2, ...,...,..._3, ...]$*)*

2. *Множества*
   $> T : X \mapsto \mathcal{P}(X)$
   $> \eta : x \mapsto x$
   $> \mu : M \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \mapsto \cup M (\in \mathcal{P}(X))$

3. *Монада* $Write$ M *- фиксированный моноид*
   $> T : X \mapsto X \times M$
   $> \eta : x \mapsto (x, 1)$
   $> \mu : (x, m, n) \mapsto (x, mn)$

4. *Монада State* S *- фиксированное множество (состояний)*
   $> T : X \mapsto Hom(S, X)$
   $>$ η *- получает функцию, которая все состояния переводит в* x
   $>$ μ *- при построении пользуемся известным фактом:*
   $Hom(S, Hom(S, X)) \simeq Hom(S \times S, X)$*, а по последнему отображение строим так: выделяем из него строчки вида* $(s, s) \mapsto x$ *и их принимаем как* $s \mapsto x$.

5. $> T : V \mapsto V^{**}$
   $> \eta : v \mapsto v^{**}$
   $> \mu : (V^*)^{***} \mapsto (V^*)^*$*, причем* $\mu_v = \eta^*_{v^*}$

6. Ω *- фиксированное множество*
   $> T : X \mapsto Hom(Hom(X, \Omega), \Omega)$
   $> \eta : x \mapsto (f \mapsto f(x))$
   $>$ μ *как в предыдущем примере.*

Предметный указатель