

# Матанализ. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Белова Ю. С.,  
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по матанализу.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2.</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Лекция 3.</b>	<b>6</b>

## 1 Лекция 1.

В этом семестре мы будем заниматься анализом функций от многих переменных, то есть,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , и если  $m = 1$ , то такая функция называется функцией многих переменных.

**Определение 1.** Кривые в  $\mathbb{R}^n$  - непрерывное отображение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Основная проблема состоит в том, что образ может выглядеть очень и очень сложно, потому нам хотелось бы более точно понять, как всё это устроено. Потому начнём рассматривать *спрямляемые кривые*, то есть, кривые с конечной длиной. Введём следующее определение:

**Определение 2.** Вариация функции -  $V_f([a, b]) = \sup_{a=x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ .

$(x - y)$  - евклидово расстояние.

*Утверждение 1.* Если  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна, то  $V_f([a, b]) = |f(a) - f(b)|$ .

*Утверждение 2.*  $V_f([a, b]) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}$ .

*Утверждение 3.*  $V_{f+g} \leq V_f + V_g$ .

*Утверждение 4.*  $V_f$  аддитивна на промежутке:  $a \leq b \leq c$ , тогда  $V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$ .

**Определение 3.** Вариация ограничена, если  $V_f < \infty$  на  $[a, b]$ .

**Лемма 1.**

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1$  и  $f_2$  монотонны, тогда  $f_1 - f_2$  имеют ограниченную вариацию.
- $f$  имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда  $f = f_1 - f_2$  на отрезке  $[a, b]$ , причём эти две функции монотонно возрастают.

*Доказательство.* Пусть у нас есть  $f$ , а также  $V_f([a, b]) < \infty$ . Рассмотрим  $\varphi(x) = V_f([a, x])$ .  $\varphi$  определена корректно, причём возрастает.  $f = \varphi - (\varphi - f)$ , скажем, что  $(\varphi - f) = h$ , тогда  $h(x) \leq h(y)$  при  $x \leq y$ . Но это нетрудно показать,  $\varphi(x) - f(x) \leq \varphi(y) - f(y)$  равносильно  $f(y) - f(x) \leq \varphi(y - \varphi(x)) = V_f([x, y])$ .  $\square$

По сути, если понимать определение вариации геометрически, то это просто длина кривой на отрезке. Перейдём теперь к способам обхода кривой.

**Лемма 2.** Пусть  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  - непрерывная биекция (тогда и монотонная). Тогда  $V_f[c, d] = V_{f \circ g}([a, b])$ .

*Доказательство.* Левая и правая части равны соответственно  $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$  и  $\sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(g(y_{k+1})) - f(g(y_k))|$ . Это, очевидно, одно и то же.  $\square$

Теперь стоит задаться вопросом: а когда же это  $V_f$  (или же, длину кривой) можно посчитать. Если  $f$  - гладкая функция (гладкая по координатам  $f_k$ ).  $f := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$V_f([a, b]) = \int_a^b \sqrt{(f'_1)^2(x) + \dots + (f'_n)^2(x)} dx.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sup_{a=x_0, \dots, x_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^2 + \dots + (f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k))^2} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{f_1'^2(\xi_{1,k}) + \dots + f_n'^2(\xi_{n,k})} \end{aligned}$$

Если  $f_i$  непрерывна, то  $f_i^2$  равномерно непрерывна.  $f_i'^2(\xi_{i,k}) \leq \min_{[x_k, x_{k+1}]} f_i'^2 + \varepsilon^2$  (для достаточно мелких разбиений и любого эpsilon, большего нуля). Тогда можно получить верхнюю оценку:  $\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{l=1}^n \min_{[x_k]} (f_l'^2) + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)} \leq \int_a^b \sqrt{\dots} + \varepsilon \sqrt{n}(b-a)$  (устремляем разбиение к бесконечно малому). А затем делаем аналогично снизу и получаем требуемое равенство.

## 2 Лекция 2.

Пусть  $\varphi$  - функция, которая определялась на прошлой лекции, а  $\psi$  - обратная ей.  $\psi$  - биекция, рассматриваем  $f \circ \psi$ . Посмотрим на  $\psi([0, \beta]) = [a, b]$ , тогда для любых  $c, d \in [0, b]$   $V_{f \circ \psi}([c, d]) = d - c$ .

Естественная параметризация гладкого пути практически не отличается от того, что мы уже рассматривали за одним небольшим исключением.

$$\varphi(x) = V_f([a, x]) = \int_a^x |f'(s)| ds = \int_a^x \sqrt{f_1'^2 + \dots + f_n'^2} ds,$$

причём предпоследнее вырежение равно  $|(f_1', \dots, f_n')|$ , а под корнем все функции от  $s$ . Рассмотрим опять  $\psi$ , и как выглядит вектор  $f(\psi(x)) = (f_1(\psi(x)), \dots, f_n(\psi(x)))$ , рассмотрим его производную, берём по координатам:  $f'(\psi(x)) = (f_1'(\psi(x)), \dots, f_n'(\psi(x)))$ . Но  $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}$ , тогда  $\varphi(s) = |f'(s)|$ , а также  $|f'(\psi(x))| = 1$ .

*Примечание 1.* Если  $f$  - гладкая на  $[a, b]$  и существует  $\int_a^b |f'(s)| ds$ , тогда выполнено то же самое, просто  $\varphi(x) = \int_a^x |f'(s)| ds$ .

Перейдём теперь к тригонометрии. Рассмотрим окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , мы планируем её обходить (то есть, через каждую точку по разу, с одинаковой скоростью, и так далее). Введём попутно также комплексное обозначение (мы не будем заниматься комплексным анализом, просто это удобно). отождествим  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$  понятно каким образом. Тогда какое вращение мы хотим? Мы хотим найти функцию  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{z : |z| = 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$ , а хотим потребовать также следующее:

- $\Gamma \in C^1$  (гладкая),
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$  (место старта и начальная скорость, с которой мы идём),
- $|\Gamma'(t)| = 1$  для любого  $t$  (постоянная скорость 1).

Сформулируем теорему:

**Теорема 1.** *Функция с данными свойствами существует и единственна.*

*Доказательство.*  $\Gamma(t) \in \mathbb{T}$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$ . Продифференцируем последнее, получим

$$\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0,$$

что также равно

$$2 \operatorname{Re}(\overline{\Gamma'(t)}\Gamma(t)) = 0.$$

То есть, мы получили, что  $\Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = ih(t)$ ,  $h(t) \in \mathbb{R}$ . Применим теперь оставшееся неиспользованное условие:  $|\Gamma(t)| = 1$ , а чтобы параметризация была естественна,  $|\Gamma'(t)|$  должно быть равно 1. То есть,  $h(t) = \pm 1$ . Подставим теперь нуль и получим, что функция в этой точке должна быть равна единице, а производная -  $i$ . Тогда остаётся один вариант:  $h(t) \equiv 1$ .

Посмотрим теперь ещё раз на начальное уравнение:  $\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ , то есть,

$$\Gamma'(t) = i\Gamma(t). \quad (1)$$

Таким образом, мы уже пришли к тому, что если вращение существует, то оно должно удовлетворять последнему уравнению, а также  $\Gamma(0) = 1$ . Это означает, что вращение, которое мы получаем, будет дифференцируемо бесконечно много раз.

Пока что, казалось бы, ни единственности, ни существования, однако из последних утверждений легко получается единственность. Пусть у нас есть  $\Gamma_{1,2}$  - два простых вращения. Дначит, они оба удовлетворяют (1). Тогда давайте запишем их частное через сопряжённые и возьмём производную:  $\left(\Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2(t)}\right)' = \Gamma_1'(t)\overline{\Gamma_2(t)} + \Gamma_1(t)\overline{\Gamma_2'(t)}$ , что равно  $i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1 i\overline{\Gamma_2} = 0$ .

Таким образом, мы получили, что  $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = \text{const}$ , но поскольку  $\Gamma(0) = 1$ , то эта константа и равна единице. То есть,  $\Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1$ , следовательно, эти функции равны, единственность доказана.

Докажем теперь существование. Предъявим сначала произвольную параметризацию окружности, а затем постараемся сделать в ней замену переменной, чтобы получить хорошую функцию (которая должна быть, конечно, гладкой). Давайте параметризуем верхнюю половину  $\mathbb{T}$  самым естественным образом: примем  $x = t$ ,  $y = \sqrt{1-t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  (двигаемся по часовой стрелке). Теперь нам нужно отпараметризовать нижнюю половину, возьмём для этого  $x = -t$ ,  $y = -\sqrt{1-t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , двигаться мы теперь будем по нижней половине, но в другом направлении, то есть, одну из половин нужно перевернуть и "склеить" в один целостный проход. Тогда в нижней половине "сдвинем" рассмотрение на  $1 \leq t \leq 3$ , и преобразуем:  $y = -\sqrt{1-(2-t)^2}$ .

Осталось проверить, что полученная функция гладкая. Вообще, это почти очевидно, кроме  $\pm 1$ , это и проверим.  $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ , а вектор  $f'(t) = (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})$ . Функция  $\varphi(x)$  на  $(-1, 1)$  выглядит как

$$\int_{-1}^x |f'(s)| ds = \int_{-1}^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Функция  $\varphi(x)$  - возрастающая биекция, значит, мы можем посмотреть на обратную функцию  $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ . Рассмотрим теперь для  $x \in (-1, 1)$ ,

$$(f^{-1}(\psi(x)))' = (f_1'(\psi(x))\psi'(x), f_2'(\psi(x))\psi'(x)).$$

Тогда, так как  $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$ , это также и равно  $\sqrt{1-\psi^2(x)}$ , что также равно

$$(\psi'(x), \frac{-\psi(x)}{\sqrt{1-\psi^2(x)}} \sqrt{1-\psi^2(x)}).$$

В последнем также можно сократить числитель и знаменатель. Итого,  $f(\psi(x))$  - гладкая на  $(-1, 1)$ , и более того, если  $x \rightarrow \pm 1$ , производная имеет конечный предел. Получается, дифференцируема на интервале, и производная имеет предел в крайних точках, тогда она в них также дифференцируема. Таким образом, для верхней половины мы всё показали, для нижней - аналогично, всего лишь с линейной заменой.  $\square$

После доказательства теоремы, можно, наконец, ввести определения:

**Определение 4.**

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\Gamma(x)),$$

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(\Gamma(x)).$$

Далее уже можно поговорить о бесконечной дифференцируемости и формуле Муавра, этим, вместе с доказательством, что мы нашли привычные функции, мы, кажется, и планируем заниматься далее.

### 3 Лекция 3.

Для начала, закончим с тригонометрией. Мы научились строить синус и косинус через вращение окружности. Немного не помню, обговаривали ли мы это на прошлой лекции, но Юрий Сергеевич кратко цпомянул, что мы можем разложить  $\Gamma(x)$  в ряд Тэйлора в  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$  в силу свойства  $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)$  и того, что остаточный член в форме Лагранжа будет стремиться к нулю при стремлении  $n$  к бесконечности.

Тогда

$$\cos x = \operatorname{Re} \Gamma(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

и аналогично синус по нечётным степеням.

Мнимая экспонента обладает свойствами, аналогичным обыкновенной экспоненте, поэтому покажем, что  $\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$ . Рассмотрим  $\Gamma(x+y)\overline{\Gamma(y)}$  - функцию от  $x$ , а  $y$  - параметр. Это - некоторый обход окружности, который также удовлетворяет всем нормировочным условиям.  $\varphi(0) = 1$ ,  $|\varphi'(x)| = 1$ , и, наконец,  $\varphi'(0) = \Gamma'(0) = i$ .

Теперь все прекрасные формулы косинуса и синуса суммы и разностей легко выводятся из доказанной формулы. Через мнимую экспоненту запишем:  $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ , а там уже просто надо посмотреть на мнимые и действительные части.

Из полученных свойств получим, что  $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \Gamma(0) = 1$ , тогда  $\Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)}$ , откуда мы получаем чётность косинуса и нечётность синуса.

Можно упомянуть и формулу муавра. Распишем

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

это формулы Муавра. Также можно получить и периодичность, это, вообще-то очевидно и завершает наш разговор об элементарных функциях.

Перейдём теперь к многочерному анализу. Мы бы хотели точно также уметь анализировать функции и делать всё то, что мы уже умеем делать для одномерных функций, в том числе, решать экстремальные задачи. Нас интересуют функции  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Начнём с того, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$  расстояние задаётся как

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2} = \|x - y\|.$$

И если у нас имеется точка  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , то её норма есть  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ . Вообще, норму можно задать как угодно, если она удовлетворяет таким свойствам:

- норма - функция  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ ,
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv (0, \dots, 0)$ ,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Разберёмся с понятием *гладкости*. Для начала, алгебраически. Пусть у нас есть функция нескольких переменных  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, \dots, x_m)$ .

**Определение 5.**  $f$  дифференцируема в точке  $(x_1, \dots, x_m)$ , если  $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|x - y\|)$ , где  $L$  - линейное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , причём однородное, то есть,  $L(0) = 0$ .

**Определение 6.** Это линейное отображение  $L$  называется *дифференциалом* в точке  $x$ .

На топологии мы доказывали, что в конечномерном пространстве различные норма липшицево-эквивалентны, потому мы просто во всех рассуждениях будем использовать именно евклидовы нормы, потому что они удобные. А теперь перейдём к базовым свойствам.

*Примечание 2.*  $L$  - единственно.

*Примечание 3.* Если у нас есть две функции:  $f$  и  $g$ , то дифференциал  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  есть  $\alpha L_1 + \beta L_2$ , где  $L_1$  и  $L_2$  - дифференциалы  $f$  и  $g$ .

Рассмотрим теперь отображение общего вида:  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда

**Определение 7.** (Гладкость).  $f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|y - x\|)$ , где  $L$  - линейное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L(x + y) = L(x) + L(y)$ .  $o$ -малое в данном случае можно понять как

$$\frac{f(y) - f(x) - L(y - x)}{\|y - x\|} \rightarrow 0,$$

то есть, элемент  $\mathbb{R}^n$  стремится к нулю, но для удобства можно взять евклидову норму этого выражения.

Какой вид имеет общее линейное отображение из  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ? Естественно, это - матрица, это мы знаем из алгебры и умеем расписывать переход в тривиальном базисе.

Перейдём к свойствам линейных отображений. Мы умеем их складывать, умножать, а также, совершать композиции в случае согласованности размерностей, которая соответствует перемножению матриц.

Пусть теперь, опять же, у нас есть отображение  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то  $L(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$  - подпространство, которое имеет размерность от 0 до  $n$ , эту размерность мы понимаем как *ранг* линейного отображения. Если же мы берём композицию линейных отображений, то ранг не может вырасти (куда растягивать-то). Также, легко видеть, что если  $m < n$ , то  $\dim(L(\mathbb{R}^m)) \leq m < n$ .

Зададимся теперь вопросом, какая существует естественная метрика на линейных отображениях  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . По сути, эти линейные отображения представляют собой евклидово пространство размерности  $m \cdot n$ . Задать на нём мы можем евклидову метрику: под корнем будут квадраты всех матричных элементов. Эта норма вычисляется проще, но зато гораздо менее естественна, чем следующая (например, относительно вопроса о композиции).  $\|L\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $Lx \in \mathbb{R}^n$ . Эта вещь конечна, так как она не превосходит  $\sum_{k=1}^m \|Le_k\|$ , а также выполняются все свойства нормы.

Геометрический смысл у данной нормы очень простой: мы смотрим, насколько сильно она растягивает расстояние в зависимости от направления.

Завершаем лекцию несколькими переопределениями нормы:

- $\sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$ ,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$ ,
- $\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$ ,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$ .