Личные записи по матану$^\beta$

@keba4ok

18 октября 2021г.

Некоторые материалы пока что с практик в рамках подготовки к ближайшим контрольным.

Содержание

Задача 1. Интегралы с параметром.

Грубые оценки.

Задача (1.3.1)**.**

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{\alpha+x^2(\alpha+\alpha^3)} \geq \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1+\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)} \geq 1$$
$$\leq \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1-\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)} \leq 1$$

Задача (1.3.2)**.**

$$\lim_{R\to +\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta \geq \lim_{R\to +\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\theta}d\theta = -\frac{e^{-R\theta}}{R}\Big|_0^{\pi} =$$
$$= -\frac{-e^{-R\frac{\pi}{2}}}{R} + \frac{1}{R}.$$

Разбиение на части.

Посредством замены переменных.

Задача (1.3.4)**.**

$$\lim_{R\to +\infty}\int_0^{\pi} e^{-\sin R\theta}d\theta = [R]\frac{1}{R}\int_0^{\pi} e^{-\sin\theta}d\theta.$$

Интегрирование по параметру.

Теорема 1. *Пусть $f : [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция , дифференцируемая по первой переменной и такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ тоже непрерывна. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть c или d бесконечно и существуют g и h - непрерывные на [c,d] такие, что к условиям непрерывности добавляются*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq h(y),\ |f(x,y)| \leq g(y)$$

и

$$\int_c^d h(y)dy < \infty,\ \int_c^d g(y)dy < \infty,$$

тогда формула (1) также верна.

Задача (1.5.1)**.**

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = [H_\varepsilon(t) = \int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^t}{\ln x}dx] = H_\varepsilon(b) - H_\varepsilon(a) =$$
$$= \int_a^b H'_\varepsilon(t)dt = \int_a^b \frac{dt}{t+1}.$$

Использование комплексов.

Задача (1.5.2)**.** $a > 0$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx &= -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = \\ &= -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = -\int_0^\infty \frac{e^i x - e^{-ix}}{2i} e^{-ax} dx = \\ &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{(i-a)x} - e^{-(i+a)x}) dx = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-a} + \frac{1}{i+a}\right] = \frac{-1}{1+a^2}.\end{aligned}$$

Теорема 3 (*Интеграл Френеля*)**.**

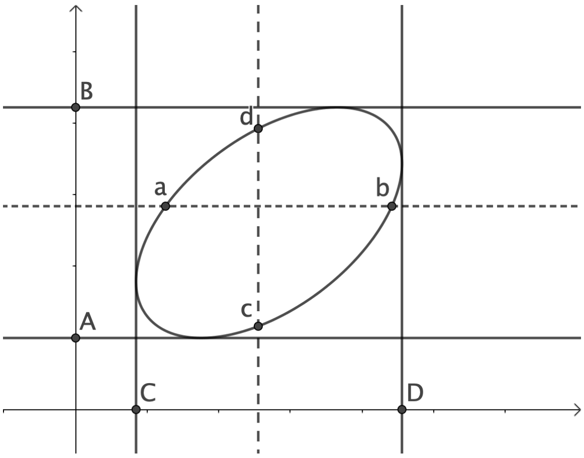
$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 2. Многомерное интегрирование.

Теорема 4 (*Тождество Фубини*)**.**

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy$$

Утверждение 1. Пусть Ω - (приличная) область в $\mathbb{R}^2$.



$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \chi_\Omega(x,y) dx dy = \\ &= \int_C^D \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy dx = \int_A^B \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx dy.\end{aligned}$$

Задача (4.1.3)**.** $f(x,y) = x^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \le 1\}$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} x^2 dy dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-x} x^2 dx\end{aligned}$$

Задача 3. Перестановка пределов интегрирования.

Чертим график области (ну она же должна быть 2-х или 3-ч мерной, поэтому возможно), затем отслеживаем согласно *утв. 1* новые границы, а функция под интегралом остаётся той же самой.

Задача 4. Замена переменной.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ - открытые и, возможно, связные области. Пусть также есть $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ такая, что $\Phi \in C^1(\overline{\Omega_1})$ и Φ - биекция между данными областями. Тогда

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))d\Phi(x) = \\ = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))|\det \Phi_x|dx.$$

В частности, при $d = 2$, и при $\Phi(x, y) = (\Phi^1(x, y), \Phi^2(x, y))$,

$$d\Phi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\det d\Phi|_{(x,y)} = \Phi^1_1 \cdot \Phi^2_2 - \Phi^2_1 \cdot \Phi^1_2,$$

откуда получается результат замены:

$$\int_{\Omega_1} f(\Phi(x, y))|\Phi^1_1 \cdot \Phi^2_2 - \Phi^2_1 \cdot \Phi^1_2|dxdy.$$

Пример(ы) 1. *Полярная замена.* $\Omega_1 = \{(r, \varphi)|r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $\Omega_2 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда $\Phi^1 = r\cos\varphi$, $\Phi^2 = r\sin\varphi$,

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

И определитель, как нетрудно понять, будет равен r. В трёхмерном случае получается, конечно, *сферическая замена*.

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

Пример(ы) 2. *Экспоненциальная замена.* $\Phi = (e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots)$, тогда $\det = e^{u_1+u_2+\cdots}$.