Теория вероятностей. Конспект 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Давыдова Ю. А.,
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по теории вероятностей.

Содержание

1 Лекция 1.

Начинаем мы с самого базового - аксиоматики и введения определений.

Определение 1. Ω - *пространство элементарных событий* или *множество элементарных исходов*, есть множество, состоящее из ω_i, *элементарных событий*. Нам важно лишь, чтобы это множество было непустым. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - некоторая совокупность подмножеств Ω, есть *множество событий*, элементы которого есть A_i - события.

Определение 2. $\mathbb{P}$ - вероятность $A \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ - вероятность события A.

Определение 3. Вся же тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Для вероятностей существует несколько аксиом:

- $0 \le \mathbb{P}(a \le 1)$ для любого события,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- для любого счётного набора попарно непересекающихся события $\{A_i\}_{i\in N} \subseteq \mathcal{F}$ выполнена *счётная аддитивность*:

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \mathbb{P}(A_n).$$

Некоторые свойства вероятностей:

- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$;
- $\forall A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \le \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Теперь перейдём к некоторым примерам вероятностных пространств:

Пример(ы) 1. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *дискретно*, если Ω не более, чем счётно. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, элементы $\{\omega\}$ также считаем событиями.

Утверждение 1. Несколько предложений:

- Пусть $\mathbb{P}$ - вероятность в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$, где $p_\omega = \mathbb{P}\{\omega\}$. При этом $p_\omega \ge 0$, $\sum_\omega p_\omega = 1$.
- Предположим, что $\{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ такие, что выполнено последнее предложение предыдущего пункта, тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$ - вероятность.

Также, можно упомянуть про *равновероятные исходы*, из названия понятно, что это. Если $|\Omega| < \infty$ и $p_\omega = p$ для любого ω, тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\omega|}$.

Начнём теперь разбираться с понятием *условная вероятность*.

Пример(ы) 2. Начнём с такого примера. Пусть у нас есть события A, B, причём их пересечение в вероятностном пространстве пусть. Тогда если исполнится B, то A уже исполнится не может.

Определение 4. *Условная вероятность*: $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (при $\mathbb{P}(B) > 0$).

Утверждение 2. Для условной вероятности выполнены аксиомы вероятности.

А теперь - несколько утверждений, которые касаютсся условной вероятности.

Утверждение 3. (B_n) - *разбиение* Ω (дизъюнктный набор, который в объединении даёт всё множество). Тогда для любого A $\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}_{B_k}(A)$.

Доказательство.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap\Omega) = \sum_n \mathbb{P}(A\cap(\bigcup_n B_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_n (A\cap B_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A\cap B_n) = \mathbb{P}(B_n)\cdot\mathbb{P}_{B_n}(A).$$

□

Утверждение 4. *Формула Байеса*. Пусть мы знаем событие A, имеется разбиение (B_n), тогда

$$\mathbb{P}_A(B_k) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}_{B_k}(A)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}_{B_n}(A)}$$

Утверждение 5. *Формула умножения*.

$$\mathbb{P}(\bigcap_1^n A_k) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdot\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdot\ldots$$

Перейдём к *независимости событий*. Начнём рассуждения с двух событий: A и B. Если $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, или, что равносильно им обоим $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, то события называются *независимыми*.

Пусть теперь имеется не два, а больше событий $\{A_q,\ldots,A_n\}$. Нельзя сказать, что нам хватает попарной независимости для независимости совокупной.

Пример(ы) 3. (Пирамида Бернштейна). Рассмотрим тетраедр, у которого стороны покрашены таким образом: белый, синий, красный и флаг России. Рассматриваем события: A_1 - на выпавшем основании есть белый цвет, и так далее A_2 и A_3. Эти события попарно независмы, но не независимы в совокупности.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2),$$

но тогда

$$\mathbb{P}((A_1\cap A_2)\cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Таким образом, нужно ввести корректное определение.

Определение 5. События $A_1,\ldots,A_n$ *независимы*, если выполнено:

$$\mathbb{P}(A_i\cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j),\ \forall i\neq j,$$
$$\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k),\ \forall i\neq j\neq k,$$
$$\ldots$$
$$\mathbb{P}(\bigcup_1^n A_i) = \prod_1^n \mathbb{P}(A_i).$$

Теорема 1. *Пусть имеется* $T_1, \dots, T_m$ *- разбиение* $\{1, \dots, n\}$*, независимые события* $A_1, \dots, A_n$*,* $\{B_j\}_m$ *- комбинация (всякие действия между элементами) событий* $\{A_s, s \in T_j\}$*. Тогда* $\{B_j\}$ *- независимы.*

Доказательство. По индукции. □

Определение 6. *Случайная величина* - это функция $X : \Omega \to R$.

Пример(ы) 4. Число выпавших решек на n бросках.

Теперь немного о *распределении случайной величины.* Пусть имеется вероятностное пространство и случайная величина X. Нас интересует $\{\omega | X(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}\}$, то есть, мы хотим исследовать попадания случайной величины в те или иные зоны на прямой. Такую вероятность можно рассматривать как вероятность от множества B, но это слишком сложно, поэтому продолжим на таких двух пунктах:

- значения X, $X(\Omega) = \{a_1, \dots\}$, $\{a_k\}$ - значение X,
- $A_k = \{\omega | X(\omega) = a_k\}$; $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, причём каждая $p_k \geq 0$, а их сумма равна единице.

Тогда мы можем сделать вывод, что $\mathbb{P}\{X \in B\} = \sum_{k|a_k \in B} p_k$, так как левая часть есть $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B}\}$, что равно $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B}\{x = a_k\}\} = \sum_{k|a_k \in B} \mathbb{P}\{x = a_k\}$, что уже и равно левой части.

Определение 7. Таки образом, совокупность последовательностей $\frac{\{a_k\}}{\{p_k\}}$ и называется *распеределением случайной величины*.

Пример(ы) 5. Приведём примеры распределений:

- *вырожденное*: $X(\omega) = a$ для любого ω.
- *распределение Бернулли*: $B(1, p)$, $p \in [0{,}1]$, причём единица принимается с вероятностью p, 0 - иначе.
- *биномиальное*: $B(n, p)$, $p \in [0{,}1]$, $X \sim B(n, p)$, если принимаются значения от 0 до n, причём $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}_n(k)$ (просто обозначение), и равно $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

2 Лекция 2.

Приведём ещё несколько примеров распределений:

Пример(ы) 6.

- *геометрическое* $X = 1, 2, \dots$, $p \in [0{,}1]$. $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p$.
- *пуассоновское* $X \sim \mathcal{P}(\alpha), \alpha > 0$, $X = 0, 1, \dots$, $P\{X = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

Независимость случайных величин.

Определение 8. X и Y - *независимые случайные величины*, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}^1$ события $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ независимы.

Чуть позже бужет критерий независимости, потому что по определению проверить зачастую слишком проблематично.

Определение 9. $X_1, X_2, \dots, X_n$ - назависимые случайные величины, если $\forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, $\{X_i \in A_i\}$ независимы.

Теорема 2. *(Критерий независимости случайных величин). Предположим, что X_k имеет распределение $(a_{kj})_j$, (p_{kj}), $k = 1, \dots, n$. Тогда X_i назависимы тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{P}\{X_1 = a_{1j_1}, X_2 = a_{2j_2}, \dots, X_n = a_{nj_n} = \prod_{k=1}^{n} p_{kj_k}$$

Доказательство. Из первого во второе - очевидно. В обратную сторону для начала докажем такой факт: если $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, то тогда

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X_k \in A_k\}.$$

Докажем все факты для двух, обобщается это всё не сложно.

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2\} = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{j,s | a_{1j} \in A_1, a_{2s} \in A_2} \bigcap \{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s} \Bigg),$$

Но вероятность объединения можно заменить на сумму вероятностей:

$$\sum_{-//-} \mathbb{P}\{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s}\} = \sum_{-//-} p_{1j} p_{2s} = \Bigg(\sum_{j | a_{1j} \in A_1} p_{1j} \Bigg) \Bigg(\sum_{s | a_{2s} \in A_2} p_{2s} \Bigg),$$

что равно

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \mathbb{P}\{X_2 \in A_2\}.$$

Это как раз и даёт нам независимость через немного хитрую вещь. Нам же нужна независимость для любого количества элементов, но казалось бы, у нас есть только для всех X_i. Однако, в лемме можно заменить некоторые A_l на $\mathbb{R}^1$, и тогда выражение как раз показывает нам необходимые соотношения на оставшиеся величины. □

Пример(ы) 7. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$ - независимы (пуассоновские распределения). Найдём тогда распределение $X + Y$, $X + Y = 0, 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X + Y = n\} = \mathbb{P}\{\sqcup_{k=0}^{n} \{X + Y = n, X = k\}\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X + Y = n, X = k\} = \\
= \sum_{k=0}^{n} \{X = k, Y = n - k\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X = K\} \mathbb{P}\{Y = n - k\} = \\
= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \cdot \frac{\beta^{n-k}}{k(n-))!} e^{-\beta} = e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k \beta^{n-k} = \\
= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} (\alpha + \beta)^n = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} e^{-(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем вывод: $X + Y \sim \mathcal{P}(\alpha + \beta)$ - пуассоновское распределение.

Испытание Бернулли.

Определение 10. Рассмотрим последовательность ε_k - независимых бернуллиевских величин (два исхода), $\varepsilon_k \sim B(1,p)$,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, \ p \\ 0, \ q = 1-p \end{cases}$$

$\{\varepsilon_k = 1\}$ означает успех в каком-то испытании. То есть, *испытание Бернулли* - последовательность из однотипных испытаний.

ν_n - число успехов в n испытаниях., что равно $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. Покажем, что распределение биномиально. $\nu_n = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} C_n^k p^k q^{n-k} &\stackrel{?}{=} \mathbb{P}\{\nu_n = l\} = \mathbb{P}\{\omega | \text{ в цепочке } \varepsilon_1(\omega), \ldots, \varepsilon_n(\omega) \text{ в точности } k\text{единиц}\} = \\ &= \mathbb{P}\{\sum_1^n \varepsilon_j = k\} = \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}| \text{ в } \bar{i} \ k \text{ единиц}} \mathbb{P}\{\varepsilon_1 = i_1, \ldots, \varepsilon_n = i_n\} = \\ &= \sum_{-//-} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Теперь встаёт вопрос: существуют ли независимые бернуллиевские случайные величины. Пусть $\Omega = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) | i_k = 0 \text{ или } 1\}$; $|\Omega| = 2^k$. $p_\omega = p^k(1-p)^{n-k}$ для $\omega = (i_1, \ldots, i_n)$, в которой ровно k единиц. $\sum p_n = 1$, $\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k(i_1, \ldots, i_n) = i_k$.

$P_n(k) = \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ - можем ли мы как-то упростить это?

Теорема 3. *n испынаний Б с веростностями успеха $p = p_n$, $n \cdot p_n \to_{n\to\infty} \alpha$, тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_n(k) \to \pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} (np^k) q^{n-k} = \\ = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})(np)^k q^{n-k} \sim \frac{\alpha^k}{k!} q^{n-k} \end{aligned}$$

Если что, k - константа.

$$\begin{aligned} q^{n-k} = (1-p)^{n-k} = (1-\frac{np_n}{n})^n (1-\frac{np_n}{n})^{-k} \\ \sim (1-\frac{np_n}{n})^n \sim e^{-np_n} = e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге, $P_n(k) \sim \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

□

А теперь - несколько слов о точности аппроксимации. Оценим $|P_n(k) - \pi_k|$. $\pi_k = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$.

Теорема 4. $\sum_{k=0}^\infty |P_n(k) - \pi_n| \leq 2np^2$.

3 Лекция 3.

Теорема 5. *$S_n \sim B(n,p)$; $S \sim \mathcal{P}(np)$, тогда для любого $B \subset \mathbb{R}^1$, $|\mathbb{P}\{S_n \in B\} - \mathbb{P}\{S \in B\}| \leq p^2 n$.*

Следствие 1. Пусть $p_k = \mathbb{P}\{S = k\} = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$, тогда $\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - p_k| \leq 2p^2 n$.

Доказательство. (Доказательство следствия). Искомая сумма равна $\sum_{k \in B_+}(P_n(k) - p_k) + \sum_{k \in B_-}(p_k - P_n(k))$, где $B_+ = \{k | P_n(k) - p_k \geq 0\}$, а $B_- = B_+^C$ - его дополнение. Тогда, продолжая равенство, получаем $(\mathbb{P}\{S_n \in B_+\} - \mathbb{P}\{S \in B_+\}) + (\mathbb{P}\{S \in B_-\} - \mathbb{P}\{S_n \in B_-\}) \leq 2p^2 n$. □

Доказательство. (Доказательство теоремы). Поговаривают, что это очень сложно. Начнём строить вероятностное пространство, возьмём носитель $\mathbb{N}$, где натуральные числа соответствуют вероятностям $q_k = \pi_{k-2}$, $k \geq 3$, $q_1 = 1 - p$, $q_2 = \pi_0 - (1-p)$, где $\pi_k = \frac{p^k}{k!}e^{-p}$.

Рассмотрим тогде ε_1 и η_1 такие, что $\varepsilon_1(1) = 0$, $\varepsilon_1(k) = 1$, $\forall k \geq 1$, а $\eta_1(1) = 0$, $\eta_1(2) = 0$, $\eta_1(k) = k - 2$, $k \geq 3$. Причём $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 = 0\} = 1 - p$; $\mathbb{P}\{varepsilon_1 = 1\} = p$, то есть, $\varepsilon_1 \sim B(1,p)$, а $\mathbb{P}\{\eta_1 = k\} = \pi_k$, то есть, $\eta_1 \sim \mathcal{P}(p)$. Тогда $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 = \eta_1\} = q_1 + q_3 = 1 - p + pe^{-1}$, а $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 \neq \eta_1\} = p - pe^{-1} = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$.

Построим теперь $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, для каждого Ω_i будут свои ε_i и η_i, а $\bar{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_i \in \Omega_i$, причём $p_{\bar{\omega}} = \prod p_{\omega_i}$. Для получившегося пространства строим $\tilde{\varepsilon_k} : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $\tilde{\varepsilon_k}(\bar{\omega}) = \varepsilon_k(\omega_k)$, и аналогично $\tilde{\eta}_k$.

Упражнение 1. $(\tilde{\varepsilon}_k)$ незав., и аналогично для η.

Рассмотрим $S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i \longrightarrow B(n,p)$ и $S = \sum_{i=1}^n \tilde{\eta}_i \longrightarrow \mathcal{P}(np)$, то есть, как раз те распределения, которые нам нужны. Перейдём к $\mathbb{P}_k\{\varepsilon_k \neq \eta_k\} \leq p^2$, но эта вероятность, как легко проверяется (проверять не будем), равна $\mathbb{P}\{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\}$, для любого k.

Тогда $\mathbb{P}\{S_n \neq S\} \leq \mathbb{P}\{\bigcup_{k=1}\{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\}\}$ по вложенности соответствующих событий. Но мы можем продолжить цепочку $\leq \sum_1^n \mathbb{P}\{\tilde{\varepsilon}_k \neq \tilde{\eta}_k\} \leq np^2$. Осталось лишь сделать последний шаг: $\mathbb{P}\{S_n \in B\} = \mathbb{P}\{S_n \in B, S_n = S\} + \mathbb{P}\{S_n \in B, S_n \neq S\} \leq \mathbb{P}\{S_n \neq S\} + \mathbb{P}\{S \in B, S_n = S\} \leq np^2 + \mathbb{P}\{S \in B\}$. Однако, если бы мы начали с $\mathbb{P}\{S \in B\}$, то получили бы точно так же, что оно не больше $np^2 + \mathbb{P}\{S_n \in B\}$, что мы и хотели. □

Переходим к небольшому параграфу про случайные векторы. Не думаю, что тут было что-то существенно важное, поэтому просто оставлю определение.

Определение 11. $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, где $X_k : \Omega \to \mathbb{R}^1$ для $k = 1, \ldots, n$, тогда $\bar{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \to (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.

Вот математическое ожидание - важная штука.

Определение 12. Пусть X - случайная величина, тогда $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p_\omega$, если ряд абсолютно сходится в бесконечном случае.

Свойства:

Утверждение 6. Существование математического ожидания эквивалентно существованию математического ожидания $|X|$ (для краткости пишут $E|X| < \infty$).

Утверждение 7. Математическое ожидание линейно.

Утверждение 8. Если $X \geq 0$, то $EX \geq 0$.

Утверждение 9. $X \leq Y$, тогда $EX \leq EY$.

Утверждение 10. $|EX| \leq E|X|$ (из $-|X| \leq X \leq |X|$).

А вот это уже можно обобщить до неравенства Йенсена:

Теорема 6. *Если φ - выпуклая функция, тогда $\varphi(EX) \leq E\varphi(x)$.*

Однако доказывать мы это не будем, а просто перейдём к следующей теореме:

Теорема 7. *Пусть X - случайная величина $(a_k);(p_k)$, $f : \mathbb{R}^{\to} \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(x) = \sum_k f(a_k)p_k$ (существуют или не существуют они одновременно).*

Доказательство. Скажем для начала, что $f \geq 0$ (просто возьмём модуль, если что). Тогда $Ef(X) = \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))p_\omega = \sum_k \left(\sum_{\omega|X(\omega)=a_k} f(X(\omega))p_\omega\right) = \sum_k f(a_k) \sum_{\omega|X(\omega)=a_k} p_\omega = \sum_k f(a_k)p_k$. □

Следствие 2. $EX = \sum_k a_k p_k$, $f(x) = x$.

Следствие 3. Если X и Y имеют одинаковые распределения, то $EX = EY$.

Следствие 4. EX - центр масс.

Теорема 8. *Пусть $\bar{X}$ - случайный вектор; $(\bar{a}_k);(p_k)$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(\bar{X}) = \sum_k f(\bar{a}_k)p_k$.*

Теорема 9. *Если X и Y независимы, и их математические ожидания существуют, то у их произведения также существует матожидание, притом равно произведению матожиданий.*

Доказательство. Применим в предыдущей теореме $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x, y) = xy$ и распишем $E(XY)$. □

4 Лекция 4.

Начнём сегодня с примеров.

Пример(ы) 8. Пусть $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение. Тогда $EX = \sum_0^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np$.

К такому выводу можно прийти и другим способом. Мы знаем, что случайная величина X имеет такое же распределение, как сумма бернуллиевских величин, одинаково распределённых: $X =^D \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, (ε_k) независимы, $\varepsilon_k \sim B(1, p)$. $EX = \sum_1^n E\varepsilon_k = nE\varepsilon_k = np$.

Пример(ы) 9. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда

$$EX = \sum_0^\infty k\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\sum_0^\infty \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = \alpha e^{-\alpha}\sum_1^\infty \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha.$$

Теорема 10. *(Неравенство Маркова). Пусть $X \geq 0$. Тогда $\forall t > 0$, $\mathbb{P}\{X \geq t\} \leq \frac{EX}{t}$.*

Доказательство. Введём понятие *индикатора*, то есть, функции $\mathbb{I}_A(\omega)$, котоpяа равна 1, если $\omega \in A$, и 0 иначе (в нашем случае собыние A - $\geq t$). Эта случайная величина имеет Бернуллиевское распределение, 1 с вероятностью $p = \mathbb{P}(A)$, и 0 с вероятностью $1 - p$. Ясно, что левую часть можно записать как $E\mathbb{I}_A$. Посмотрим теперь на $\frac{X}{t}$. Эта вещь не меньше 1 при $\omega \in A$, тогда $\mathbb{I}_A \leq \frac{X}{t}$, а значит, $E\mathbb{I}_A \leq E\left(\frac{X}{t}\right) = \frac{EX}{t}$. □

Это неравенство имеет кучу следствий, рассмотрим некоторые из них.

Следствие 5. Пусть $f \uparrow$, $f(x) \geq 0$. Тогда $\mathbb{P}\{X \geq t\} = \mathbb{P}\{f(X) \geq f(t)\} \leq \frac{Ef(X)}{f(t)}$.

Следствие 6. Если $E(X^2) \leq \infty$, и $f(x) = x^2$, то, как следствие, получим $\mathbb{P}\{|X| \geq t\} \leq \frac{E(X^2)}{t^2}$, тогда при $t \to \infty$ получим более сильную оценку (на месте X^2 можно брать ещё большие степени). Также можно рассмотреть $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$, тогда получим $\mathbb{P}\{x \geq t\} \leq \frac{E(e^{aX})}{e^{at}}$.

Теорема 11. *(Неравенство Йенсена). X - случайная величина, и есть некоторая выпуклая функция $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Тогда $\varphi(EX) \leq E[\varphi(X)]$.*

Доказательство. Предположим, что X принимает два значения: a и b с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Тогда $EX = ap + b(1-p)$, это - какая-то линейная комбинацие, то есть, лежит между точками. Рассмотрим тогда неравенсто $\varphi(ap + b(1-p))$ - с одной стороны, $\varphi(ap) + \varphi(b(1-p))$. Первое меньше второго из выпуклости, а для большего количества точек просто рассмотрим по индукции. □

Теперь перейдём к *дисперсии.*

Определение 13. $DX = E[(X - EX)^2]$. Нужно, чтобы $E(X^2)$ было меньше бесконечности, тогда DX определена.

Примечание 1. Дисперсия характеризует меру разброса случайной величины от математического ожидания.

И рассмотрим её свойства.

Утверждение 11. Дисперсия неотрицательная.

Утверждение 12. $D(X + c) = DX$

Утверждение 13. $D(X \cdot c) = c^2 DX$

Утверждение 14. $DX = E(X^2) - (EX)^2$

Утверждение 15. $DX = \sum_k (a_k - EX)^2 p_k$, где $(a_k), (p_k)$ - распределение X.

Теорема 12. *Если X, Y - независимые случайные величины, то $D(X + Y) = DX + DY$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $EX = EY = 0$, он достаточно очевиден, а теперь начнём сводить все остальные случаи к этому. Введём $\tilde{X} = X - EX$; $\tilde{Y} = Y - EY$. Тогда $D(X + Y) = D(\tilde{X} + \tilde{Y}) = DX + DY$, что и требовалось. □

Рассмотрим теперь несколько примеров дисперсий.

Пример(ы) 10. Пусть $X \sim B(n, p)$, тогда $DX = np(1 - p)$.

Пример(ы) 11. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда $DX = \alpha$.

Теорема 13. *(Неравенство Чебышёва). Пусть X - случайная величина, $EX^2 < \infty$ (DX определена). Тогда $\forall t > 0$,*

$$\mathbb{P}\{|Y| \geq t\} \leq \frac{E(Y^2)}{t^2}$$

Доказательство. Из следствия 6, при подстановке $(X - EX)$. □

Определение 14. *Моменты* - матожидания следующего вида. Пусть X - случайная величина. Мы можем рассмотреть $E(X^n)$, $E(X - EX)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $E|X|^p$, $E|X - EX|^p$, $p \in \mathbb{R}$. Все эти матожидания называются моментами, первые два называются моментами моментами n-го порядка, вторые два - *абсолютными моментами*, моменты с разностями называются *центрированными.*

Определение 15. Если случайных величин несколько, то вводятся *смешанные моменты*, моменты вида $E(X^n \cdot Y^m)$, или $E[(X-EX)(Y-EY)] = \operatorname{cov}(X,Y)$ - частный случай, *ковариация*. Можем также через него определить *коэффициент корреляции* - $\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, который является мерой линейной зависимости между X и Y.

Теорема 14. *(Закон больших чисел (в немного ослабленном смысле)). Пусть (X_k) - независимые, одинаково распределённые случацные величины, $EX_k = a$, $DX_k = \sigma^2 < \infty$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon\} \to$, $n \to \infty$.*

Определение 16. *Сходимость по вероятности*: $Y_n \to^{\mathbb{P}} Y$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\} \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим эту вероятность, и заметим, что $E\frac{S_n}{n} = a$, тогда по Чебышёву, искомая нами вероятность, ограничивается сверху $\frac{D(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} D(S_n) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2\frac{1}{n} \to 0$, $n \to 0$. $\square$

Сформулируем также несколько усложнений (второе даже записывать не буду, оно всё равно не в курсе).

Теорема 15. *(Теорема Хинчина). Пусть X_k - н.о.р.с.в., тогда если $E|X_1| < \infty$, $EX_k = a$, тогда $\frac{S_n}{n} \to^{\mathbb{P}} a$.*

И в заключение...

5 Пофамильный указатель всех важных предметов

Быстрый список для особо ленивого поиска.