Теория вероятностей. Конспект 2 сем.

Мастера Конспектов

(по материалам лекций Давыдова Ю. А.,
а также других источников)

16 февраля 2021 г.

Некоторые записи по теории вероятностей.

Содержание

1 Лекция 1.

Начинаем мы с самого базового - аксиоматики и введения определений.

Определение 1. Ω - *пространство элементарных событий* или *множество элементарных исходов*, есть множество, состоящее из ω_i, *элементарных событий*. Нам важно лишь, чтобы это множество было непустым. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - некоторая совокупность подмножеств Ω, есть *множество событий*, элементы которого есть A_i - события.

Определение 2. $\mathbb{P}$ - вероятность $A \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ - вероятность события A.

Определение 3. Вся же тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Для вероятностей существует несколько аксиом:

- $0 \leq \mathbb{P}(a \leq 1)$ для любого события,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- для любого счётного набора попарно непересекающихся события $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq \mathcal{F}$ выполнена *счётная аддитивность*:

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} \mathbb{P}(A_n).$$

Некоторые свойства вероятностей:

- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$;
- $\forall A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Теперь перейдём к некоторым примерам вероятностных пространств:

Пример(ы) 1. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *дискретно*, если Ω не более, чем счётно. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, элементы $\{\omega\}$ также считаем событиями.

Утверждение 1. Несколько предложений:

- Пусть $\mathbb{P}$ - вероятность в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, где $p_\omega = \mathbb{P}\{\omega\}$. При этом $p_\omega \geq 0$, $\sum_\omega p_\omega = 1$.
- Предположим, что $\{p_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ такие, что выполнено последнее предложение предыдущего пункта, тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ - вероятность.

Также, можно упомянуть про *равновероятные исходы*, из названия понятно, что это. Если $|\Omega| < \infty$ и $p_\omega = p$ для любого ω, тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\omega|}$.

Начнём теперь разбираться с понятием *условная вероятность*.

Пример(ы) 2. Начнём с такого примера. Пусть у нас есть события A, B, причём их пересечение в вероятностном пространстве пусть. Тогда если исполнится B, то A уже исполнится не может.

Определение 4. *Условная вероятность*: $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (при $\mathbb{P}(B) > 0$).

Утверждение 2. Для условной вероятности выполнены аксиомы вероятности.

А теперь - несколько утверждений, которые касаютсся условной вероятности.

Утверждение 3. (B_n) - *разбиение* Ω (дизъюнктный набор, который в объединении даёт всё множество). Тогда для любого A $\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}_{B_k}(A)$.

Доказательство.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap\Omega) = \sum_n \mathbb{P}(A\cap(\bigcup_n B_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_n (A\cap B_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A\cap B_n) = \mathbb{P}(B_n)\cdot\mathbb{P}_{B_n}(A).$$

□

Утверждение 4. *Формула Байеса*. Пусть мы знаем событие A, имеется разбиение (B_n), тогда

$$\mathbb{P}_A(B_k) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}_{B_k}(A)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}_{B_n}(A)}$$

Утверждение 5. *Формула умножения*.

$$\mathbb{P}(\bigcap_1^n A_k) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdot\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdot\ldots$$

Перейдём к *независимости событий*. Начнём рассуждения с двух событий: A и B. Если $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, или, что равносильно им обоим $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, то события называются *независимыми*.

Пусть теперь имеется не два, а больше событий $\{A_q,\ldots,A_n\}$. Нельзя сказать, что нам хватает попарной независимости для независимости совокупной.

Пример(ы) 3. (Пирамида Бернштейна). Рассмотрим тетраедр, у которого стороны покрашены таким образом: белый, синий, красный и флаг России. Рассматриваем события: A_1 - на выпавшем основании есть белый цвет, и так далее A_2 и A_3. Эти события попарно независмы, но не независимы в совокупности.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2),$$

но тогда

$$\mathbb{P}((A_1\cap A_2)\cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Таким образом, нужно ввести корректное определение.

Определение 5. События $A_1,\ldots,A_n$ *независимы*, если выполнено:

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(A_i\cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j),\ \forall i\neq j,\\ \mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k),\ \forall i\neq j\neq k,\\ \ldots\\ \mathbb{P}(\bigcup_1^n A_i) = \prod_1^n \mathbb{P}(A_i).\end{gathered}$$

Теорема 1. *Пусть имеется* $T_1, \dots, T_m$ *- разбиение* $\{1, \dots, n\}$, *независимые события* $A_1, \dots, A_n$, $\{B_j\}_m$ *- комбинация (всякие действия между элементами) событий* $\{A_s, s \in T_j\}$. *Тогда* $\{B_j\}$ *- независимы.*

Доказательство. По индукции. □

Определение 6. *Случайная величина* - это функция $X : \Omega \to R$.

Пример(ы) 4. Число выпавших решек на n бросках.

Теперь немного о *распределении случайной величины*. Пусть имеется вероятностное пространство и случайная величина X. Нас интересует $\{\omega | X(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}\}$, то есть, мы хотим исследовать попадания случайной величины в те или иные зоны на прямой. Такую вероятность можно рассматривать как вероятность от множества B, но это слишком сложно, поэтому продолжим на таких двух пунктах:

- значения X, $X(\Omega) = \{a_1, \dots\}$, $\{a_k\}$ - значение X,
- $A_k = \{\omega | X(\omega) = a_k\}$; $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, причём каждая $p_k \geq 0$, а их сумма равна единице.

Тогда мы можем сделать вывод, что $\mathbb{P}\{X \in B\} = \sum_{k | a_k \in B} p_k$, так как левая часть есть $\mathbb{P}\{\bigcup_{k | a_k \in B}\}$, что равно $\mathbb{P}\{\bigcup_{k | a_k \in B} \{x = a_k\}\} = \sum_{k | a_k \in B} \mathbb{P}\{x = a_k\}$, что уже и равно левой части.

Определение 7. Таки образом, совокупность последовательностей $\frac{\{a_k\}}{\{p_k\}}$ и называется *распеределением случайной величины*.

Пример(ы) 5. Приведём примеры распределений:

- *вырожденное*: $X(\omega) = a$ для любого ω.
- *распределение Бернулли*: $B(1, p)$, $p \in [0{,}1]$, причём единица принимается с вероятностью p, 0 - иначе.
- *биномиальное*: $B(n, o)$, $p \in [0{,}1]$, $X \sim B(n, p)$, если принимаются значения от 0 до n, причём $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}_n(k)$ (просто обозначение), и равно $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

И в заключение...

2 Пофамильный указатель всех важных предметов

Быстрый список для особо ленивого поиска.