# Личные записи по топологии

@keba4ok

13 октября 2021г.

Некоторые воспомниания с конца второго курса по топологии, которые напрямую связаны с нынешним материалом, а также важные факты с лекций и практик.

## Содержание

# Алгебраическая топология.

## Гомотопии.

Будем считать, что $X$ и $Y$ - топологические пространства, $f, g : X \to Y$ - непрерывные отображения.

**Определение 1.** $f$ и $g$ *гомотопны* ($f \sim g$), если существует непрерывное отображение $H : X \times [0,1] \to Y$ такое, что

- $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X$;
- $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$.

**Определение 2.** Отображение $H$ называется *гомотопией* между $f$ и $g$.

**Теорема 1.** *Гомотопность - отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных функций из $X$ в $Y$.*

**Теорема 2.** *Пусть $X, Y, Z$ - топологические пространства, отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ гомотопны, и отображения $g_0, g_1 : Y \to Z$ также гомотопны. Тогда $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$.*

**Определение 3.** Пусть $A \subset X$. Говорят, что гомотопия $H : X \times [0,1] \to Y$ *связана* на $A$, если $H(x,t) = H(x,0)$, $\forall x \in A$, $t \in [0,1]$ (если гомотопия не связана, то она *свободна*).

**Определение 4.** Два пути $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ *гомотопны* ($\alpha \sim \beta$), если существует соединяющая их гомотопия, связанная на $\{0,1\}$.

**Определение 5.** Пусть $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ - пути, и $\alpha(1) = \beta(0)$. Тогда *произведение путей* определяется как

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1), t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства произведения:

- произведения соответственно гомотопных путей гомотопны;
- ассоциативность;
- если $\varepsilon_p$ и $\varepsilon_q$ - постоянные пути в начале $\alpha(0) = p$ и $\alpha(1) = q$ пути $\alpha$. Тогда $\varepsilon_p \alpha \sim \alpha \varepsilon_q \sim \alpha$;
- пусть $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$. Тогда $\alpha\alpha' \sim \varepsilon_p$.

## Фундаментальная группа.

**Определение 6.** *Петля* - путь, у которого конец совпадает с началом. Множество петель в $X$ с началом и концом в *отмеченной точке* $x_0$, обозначается как $\Omega(X, x_0)$.

**Определение 7.** *Фундаментальная группа* топологического пространства $X$ с отмеченной точкой $x_0$ ($\pi_1(X, x_0)$) определяется так:

- множество элементов группы - фактор-множество $\Omega(X, x_0)/\sim$, где $\sim$ - гомотопность путей с фиксированным концом в $x_0$;

- групповое произведение определяется форумлой

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta],$$

где $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$.

**Определение 8.** Если $\gamma$ - путь из $p$ в $q$ (значение в начале, и значение в конце). Тогда $T_\gamma : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ - отображение групп (изоморфизм).

**Теорема 3.** *Если $X, Y$ - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, тогда*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**Определение 9.** (*Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением*). Если $X, Y$ - топологические пространства, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, $f(x_0) = y_0$. Тогда определим $f_* : \pi(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ так:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Свойства:

- $*$ от композиции - композиция $*$ к функциям;
- $\mathrm{id} : X \to X \Rightarrow \mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

*Утверждение* 1. $f : X \to Y$ - гомеоморфизм, тогда $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ будет изоморфизмом.

## Оставшаяся хуйня.

**Определение 10.** Топологическое пространство $X$ *односвязно*, если $X$ линейно связно и $\pi_1(X) = \{e\}$.

**Теорема 4.** *$S^n$ односвязно при всех $n$ хотя бы 2.*

*Следствие.* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ для всех $n$ хотя бы 3, односвязно.

**Определение 11.** $X, B$ - топологические пространства; $p : X \to B$ - непрерывное отображение называется *накрытием*, если $\forall y \in B$, существует окрестность $U : p^{-1}(U) = \sqcup v_i$, где каждое $v_i$ открыто в $X$ и $p_{\restriction v_i}$ - гомеоморфизм между $v_i$ и $U$.

**Пример(ы) 1.**

- гомеоморфизм ($v_i$ - всё пространство);
- $p : \mathbb{R} \to S^1$, где $p(x) = (\cos x, \sin x)$.

**Теорема 5** (*о постоянстве числа лисотв*). *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $B$ - связно. Тогда $|p^{-1}(B)|$ одинаково у всех $b \in B$.*

**Определение 12.** $|p^{-1}(b)|$ - *число листов* накрытия

**Определение 13.** $p : X \to B$ - накрытие; $f : Y \to B$ - непрервное отображение. *Поднятием отображения* $f$ называется непрерывное отбражение $\tilde{f} : Y \to X$ такое, что $f = p \circ \tilde{f}$.

**Теорема 6** (*о поднятии пути*)**.** *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого пути $\alpha : [0,1] \to B$ такого, что $\alpha(0) = b_0$, существует и притом единственное поднятие $\tilde{\alpha}$ пути $\alpha$ такое, что $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.*

**Лемма 1** (*о непрерывном аргументе*)**.** *Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда*

- *существует непрерывная функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)| \cdot (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$;*
- *такая $\varphi$ единственная с точностью до добавления числа, кратного $2\pi$.*

**Теорема 7** (*о поднятии гомотопии*)**.** *Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $b_0 \in B$, $x_0 \in X$, причём $p(x_0) = b_0$. Тогда для любого непрерывного отображения $H : K \to B$ такого, что $H(0,0) = b_0$, существует, и притом единственное, поднятие $\tilde{H}$, что $\tilde{H}(0,0) = x_0$.*

*Следствие.* Пусть $\alpha, \beta$ - пути в $B$ такие, что $\alpha(0) = \beta(0)$ и $\alpha(1) = \beta(1)$. Если $\alpha \sim \beta$, то их поднятие в одну и ту же точку $x_0 \in X$ гомотопны, и, что показывается изначально, $\tilde{\alpha(1)} \sim \tilde{\beta(1)}$.

**Определение 14.** Петля, гомотопная постоянной, называется *стягиваемой*.

*Следствие.* Поднятие стягиваемой петли - стягиваемая петля.

*Следствие.* Пусть $p : X \to B$ - накрытие; $x_0 \in X, b_0 \in B$ такие, что $p(x_0) = b_0$. Тогда индуцированный гомеоморфизм $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ является инъекцией.

**Определение 15.** Образ группы $\pi_1(X, x_0)$ при $p_*$ называется *группой накрытия*.

*Утверждение* 2. Петля из группы накрытия при поднятии не размыкается.

**Определение 16.** Накрытие $p : X \to B$ называется *универсальным*, если $X$ односвязно ($\pi_1(x) = \{e\}$, $X$ - линейно связно).

**Лемма 2.** *Сопоставим каждой петле $\alpha \in \Omega(B, b_0)$ конец её поднятия с началом в $x_0$, то есть, рассматриваем отображение $\Omega(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ (так как конец поднятия проецируется в $b_0$). Это соответствие определяет биекцию $\pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$.*

**Теорема 8.** $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, *при* $n \geq 2$.

**Теорема 9.** $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

*Следствие.* $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

## Ретракции.

**Определение 17.** *Ретракция* - непрерывное отображение $f : X \to A$, где $A \subset X$, такое, что $f|_A = \mathrm{id}_A$. Если существует ретракция $f : X \to A$, то $A$ называется *ретрактом* пространства $X$.

**Теорема 10.** *Подмножество $A$ топологического пространства $X$ является его ретрактом тогда и только тогда, когда всякое непрерывное отображение $g : A \to Y$ в произвольное пространство $Y$ можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$.*

**Лемма 3.** *Если $\rho : X \to A$ - ретракция, $\mathrm{in} : A \to X$ - вложение и $x_0 \in A$, то*

- *$\rho : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ - сюръекция;*

- $\text{in} : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ - *инъекция.*

**Теорема 11** (*Теорема Борсука в размерности 2*)**.** *Не существует ретракции из $D^2$ на $S^1$.*

**Определение 18.** Точка $a \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f : X \to X$, если $f(a) = a$. Говорят, что прстранство обладает свойством неподвижной точки, если всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.

**Теорема 12.** *Любое непрерывное отображение $f : D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку.*

**Определение 19.** $X$ и $Y$ *гомотопически эквивалентны* ($X \sim Y$), если существуют непрерывные отображение $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \sim \text{id}_x$ и $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Такие $f$ и $g$ называются *гомотопически обратными* отображениями. Каждое из $f$ и $g$ называется *гомотопической эквивалентностью.*

**Определение 20.** Ретракция $f : X \to A$ называется *деформационной ретракцией*, если её композиция с включением $\text{in}\, A \to X$ гомотопна тождественносу отображению, то есть

$$\text{in} \circ f \sim \text{id}_X .$$

Если существуют деформационная ретракция $X$ на $A$, то $A$ называется деформационным ретрактом пространства $X$.

**Теорема 13.** *Деформационная ретракция - гомотопическая эквивалентность.*

**Теорема 14.** *Гомотопическая эквивалентность - отношение эквивалентности между топологическими пространствами.*

**Определение 21.** Класс пространства, гомотопически эквивалентных данному $X$ называется его *гомотопическим типом*. Свойства (характеристики) топологических пространств, одинаковые у гомотопических эквивалентных, - *гомотопические свойства.*

**Теорема 15.** *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.*

**Лемма 4.** *Пусть $f, g : X \to Y$ - гомотопные отображения, $H : X \times t \to Y$ - гомотопия между ними, $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$, $\gamma(t) = H(x_0, t)$ - путь от $y_0$ к $y_1$. Тогда $g_* = T_\gamma \circ f_*$.*

**Определение 22.** Топологическое пространство *стягиваемо*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

**Лемма 5.** *Пусть $h : S^1 \to X$ - непрерывное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:*

- *$h$ гомотопно постоянному отображению;*
- *$h$ продолжается до непрерывного отображения $D^2 \to X$;*
- *$h_*$ - тривиальный гомоморфизм фундаментальных групп.*

**Теорема 16.** *Для любой непрерывной функции $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(-x) = f(x)$.*

**Определение 23.** *Топологической парой* $(X, A)$ называется топологическое пространство $X$ с выделенным подмножеством $A$, на котором мы рассматриваем топологию, индуцированную с $X$.

**Определение 24.** Топологическая пара называется *парой Борсука*, если для любого топологического пространства $Y$, любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и любой гомотопии $F : A \times I \to Y$ такой, что $F_0 = f|_A$ (напомним, что по определению $F_t(\cdot) = F(\cdot, t)$) существует гомотопия $G : X \times I \to Y$ такая, что $G_t|_A = F_t$ для всех $t \in I$ и $G_0 = f$. Иными словами, любую гомотопию $A$ внутри $Y$, начинающуюся с $f$, можно продолжить до гомотопии всего $X$.

*Утверждение* 3. Если $(X, A)$ - пара Борсука и $A$ стягиваемо, то $X$ гомотопически эквивалентно $X/A$.

## Клеточные пространства и накрытия.

**Определение 25.** *Клеточное пространство* размерности $n$ определяется по индукции следующим образом. Клеточное пространство размерности 0 - дискретное пространство. Клеточное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ - топологическое пространство $X$, которое может быть получено (с точностью до гомеоморфизма) из клеточного пространства $Y$ с размерностью $k < n$ приклеиванием набора $\{D_i^n\}_{i \in I}$ копий диска $D^n$ по непрерывным отображениям $\varphi_i : \partial D)i^n \to Y$, где $\partial D_i^n$ - краевая сфера диска $D_i^n$.

*Клеточное разбиение* - конкретный способ представить $X$ в таком виде, вместе с аналогичным представлением $Y$ и так далее до размерности 0.

*Клетки* - внутренности приклеиваемых дисков, а также точки исходного 0-мерного пространства.

**Определение 26.** Клеточный комплекс -

- *конечный*, если клеток конечное число;
- *локально конечный*, если клетки образуют локально конечное покрытие;
- *конечномерный*, если размерности клеток ограничены; при этом максимальная размерность клетки называется *размерностью* пространства.

**Определение 27.** Пусть $X$ - клеточное пространство с зафиксированным клеточным разбиением. Его $k$-мерный остов - объединение всех клеток размерности не боле $k$. Обозначение $X_k$ или $\mathrm{sk}_k(X)$.

**Теорема 17.** *Пусть* $\Gamma$ *- граф,* $X$ *- топологическое пространство. Тогда отображение* $f : \Gamma \to X$ *- непрерывно тогда и только тогда, когда его сужение на каждое ребро (замкнутое) графа непрерывно.*

**Теорема 18.** *Фундаментальная группа букета n окружностей - свободная группа с n образующим (обозначение* $F_n$*). В качестве образующих можно взять однократные обходы окружностей букета.*

**Теорема 19.** *Пусть* $\Gamma$ *- локально конечный граф.* $T \subset \Gamma$ *- стягиваемый подграф. Тогда* $\Gamma/T \sim \Gamma$*.*

*Следствие.* Связный граф с $n$ вершинами и $m$ рёбрами гомотопически эквивалентен букету $m - n + 1$ окружностей (или точке, если $m - n + 1 = 0$).

*Следствие.* Фундаментальная группа связного графа с $n$ вершинами и $m$ рёбрами - свободная группа с $m - n + 1$ образующими.

**Определение 28.** Клеточное подпространство клеточного пространства $X$ - замкнутое множество $Y \subset X$, состоящее из целых клеток.

**Теорема 20.** *Пусть*

- $X$ *- клеточное пространства* $Y \subset X$ *- клеточное подпространство;*
- $Z$ *- топологическое пространство,* $f : X \to Z$ *- непрерывное отображение;*
- $H_0 : Y \times [0,1] \to Z$ *- гомотопия,* $H_0(\cdot, 0) = f|_Y$*.*

*тогда существует гомотопия* $H : X \times [0,1] \to Z$*, продолжающая* $H_0$ *и такая, что* $H(\cdot, 0) = f$*.*

**Лемма 6.** *Пусть* $\Gamma$ *- локально конечный граф,* $T \subset \Gamma$ *- стягиваемый подграф. Тогда существует непрерывное* $h : \Gamma \to \Gamma$ *такое, что*

- $h|_T = \mathrm{const}$*;*
- $h \sim \mathrm{id}_\Gamma$*;*
- *существует такая гомотопия* $\{h_t\}$ *между* id *и* $h$*, что* $h_t(T) \subset T$ *при всех* $T$*.*

**Теорема 21.** *Пусть* $Y$ *- топологическое пространство,* $X$ *получается приклеиванием к* $Y$ *диска* $D^2$ *по непрерывному отображению* $\hat{\alpha} : S^1 \to Y$*,* $x_0 = \alpha(1,0)$*. Тогда*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, x_0)/N([\alpha]),$$

*где* $N([\alpha])$ *- нормальное замыкание элемента* $[\alpha]$ *фундаментальной группы* $\pi_1(Y, x_0)$*.*

**Теорема 22.** *При приклеивании клетки размерности* $n \geq 3$ *фундаментальная группа не меняется.*

**Лемма 7** (*о свободной точке*)**.** *Существует* $H_1 : X \to X$*, совпадающее с* $H$ *на краю* $K$ *и такое, что образ* $H_1$ *не покрывает* $X \backslash Y$*.*

*Следствие.* Фундаментальная група конечного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе 2-мерного остова.

*Следствие.* Пусть $X$ - конечномерное связное пространство, $T$ - максимальное дерево в $X$ и $x_0 \in T$. Для каждой одномерной клетки $e \subset X \backslash T$ выберем петлю $s_e$, начинающуюся в $x_0$, проходязую по $T$ до $e$ и возвращающуюся (вновь по $T$) в исходную точку $x_0$. Тогда гомотопические классы петель $s_e$ являются свободными образующими группы $\pi_1(X, x_0)$.

*Следствие.* Если $\pi_1(Y, x_0)$ задана образующими и соотножениями, то $\pi_1(X, x_0)$ получается добавлением $[\alpha]$ в список соотношений.

**Определение 29.** Группа называется *конечно представленной*, если её можно задать образующими и соотношениями так, что образующих и соотношений конечное множество.

*Следствие.* Фундаментальная группа конечного клеточного пространства - конечно представленнаая группа.

*Следствие.* Любая конечно представленная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого конечного клеточного пространства размерности 2.

*Утверждение* 4. Пусть $p : X \to Y$ и $q : Y \to Z$ - накрытия. Тогда если $q$ - конечнолистно, то $q \circ p : X \to Z$ - накрытие.

*Утверждение* 5. Следующие условия эквивалентны:

- накрытие регулярно;
- все группы $p_*(\pi_1(X, x))$ с $x \in p^{-1}(b_0)$ совпадают;
- группа автоморфизмов накрытия действует в слое $p^{-1}(b_0)$ транзитивно.

**Определение 30.** *Морфизмом накрытий* $p_X : (X, x_0) \to (B, b_0)$ и $p_Y : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ - это непрерывное отображение $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, такое что

$$p_Y \circ f = p_X.$$

**Определение 31.** *Группой накрытия* $p : (X, x_0) \to (B, b_0)$ называется $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$.

# Дифгем.

## «Напоминания».

Основные понятия мы определяем для натурально параметризованных кривых. Так, пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - натурально параметризованная кривая, то есть, $|\gamma'(t)| = 1$ в каждой точке $t \in [a, b]$.

**Определение 32.** *Базис Френе* кривой $\gamma$ в точке $t \in [a, b]$ - пара векторов $v, n \in \mathbb{R}^2$, определяемая условиями:

- $v = \gamma'(t)$;
- $(v, n)$ - положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости.

Обозначается как $v$, $n$ или $v(t)$, $n(t)$ или $v_\gamma(t)$, $n_\gamma(t)$, а заныватся *скоростью* и *нормалью* соответственно.

## Кривизны.

**Определение 33.** *Кривизна* натурально параметризованной кривой $\gamma$ в точке $t$ - такое число $\kappa = \kappa(t) \in \mathbb{R}$, что

$$\gamma''(t) = v'(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

Эквивалентное определение: $\kappa = \langle v', n\rangle$. Из этой формулы следует, что $\kappa$ гладко зависит от $t$.

**Определение 34.** Пусть $\gamma$ - произвольная (не натурально пааметризованная) регулярная кривая. Кривизна $\gamma$ в точке $t$ - кривизна её натуральной параметризвции в соответствующей точке.

**Теорема 23.** *Для произвольной регулярной кривой $\gamma$*

$$\kappa = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3},$$

*где $[,]$ - внешнее произведение векторов (определитель матрицы).*

**Теорема 24.** *Для натурально параметризованной кривой $\gamma$*

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v. \end{cases}$$

**Определение 35.** *Поворот* натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - это

$$\int_a^b \kappa(t)dt,$$

где $\kappa$ - кривизна этой кривой.

*Примечание.* Для не натурально параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ поворот можно найти по формуле

$$\int_a^b \kappa(t)|\gamma'(t)|dt.$$

Краткая запись (интеграл по длине): $\int_a^b \kappa dt$.

*Примечание.* Непрерывный аргумент функции $v : [a, b] \to S^1$ - такая непрерывная функция $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$, Что

$$v(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$$

для всех $t \in [a, b]$. Непрерывный аргумент существует у любой такой непрерывной функции. Он единственен с точностью до константы, кратной $2\pi$.

**Лемма 8.** *Непрерывный аргумент $\alpha(t)$ - гладкая функция от $t$.*

**Теорема 25.** *Пусть $v(t)$ - скорость натурально параметризованной кривой $\gamma$, $\alpha(t)$ - непрерывный аргумент для $v(t)$. Тогда $\alpha'(t) = \kappa(t)$, где $\kappa$ - кривизна $\gamma$.*

*Следствие.* Поворот кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ равен изменению аргументы вектора $\gamma'(t)$ от $t = a$ до $t = b$.

*Следствие.* Вектор $\gamma'(a)$ и $\gamma'(b)$ определяют поворот привой $\gamma$ с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

**Теорема 26.** *Для любой гладкой функции $\kappa : I \to \mathbb{R}$ существует регулярная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, у которой кривизна равна этой функции. Такая кривая единственная с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.*

**Лемма 9.** *Пусть $\kappa : I \to \mathbb{R}$ - гладкая функция, $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in S^1$. Тогда существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ таая, что $\gamma(t_0) = p_0$, $\gamma'(t_0) = v_0$, $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ для всех $t \in I$.*

## Многомерие.

**Определение 36.** Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ - натурально параметризованная регулярная кривая, $t \in I$. Вектор $\gamma''(t)$ - *вектор кривизны* $\gamma$ в точке $t$. Его длина $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ - *кривизна*. Его направление $n_\gamma(t) := \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$ (далее - просто *нормаль*).

**Определение 37.** *Бинормаль* $\gamma$ в точке $t$ - вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$. *Кручение* $\gamma$ в точке $t$ - число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$.

**Теорема 27.** *Для натурально параметризованной кривой в $\mathbb{R}^3$, кривизна которой не обращается в нуль, верны формулы*

$$\begin{cases} v' = \kappa n; \\ n' = -\kappa v + \tau b; \\ b' = -\tau n. \end{cases}$$

*Где $v, n, b$ -базис Френе, $\kappa$ - кривизна, $\tau$ - кручение.*

**Теорема 28.** *Для не натурально параметризованной кривой $\gamma$ в $\mathbb{R}^3$,*

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3},$$

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|}.$$

**Определение 38.**

- плоскость $(v, n)$ - *соприкасающаяся плоскость*;

- плоскость $(n, b)$ - *нормальная плоскость*;
- плоскость $(v, b)$ - *спрямляющая плоскость*.

*Примечание.* Направляющая идея: из формула $b' = -\tau n$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается со скоростью $|\tau|$.

*Следствие.* Кривая $\gamma$ (с ненулевой кривизной) лежит в отной плоскости тогда и только тогда, когда $\tau \equiv 0$.

## Многомерные формулы Френе.

**Определение 39.** Будем называть гладкую кривую $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *невырожденной*, если для любого $t \in I$ векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

**Теорема 29.** *Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ - невырожденная натурально параметризованная кривая. Тогда существует единственный набор гладких функций $v_1, \ldots, v_n : I \to \mathbb{R}$ и $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ (кривизны) такой, что для всех $t \in I$*

- *$v_1(t), \ldots, v_n(t)$ - положительно ориентированный ортонормированный безис в $\mathbb{R}^n$ (базис Френе);*
- *$\kappa_1(t), \ldots, \kappa_{n-2}(t) > 0$ ($\kappa_{n-1}$ может менять знак);*
- *$v_1 = \gamma'$;*
- *верны формулы Френе:*

$$v_1' = \kappa_1 v_2; v_i' \ = -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}; v_n' = -\kappa_{n-1} v_{n-1}.$$

**Определение 40.** Кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ - *замкнута*, если её можно продолжить до гладкой $(b-a)$-периодической функции $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

*Следствие.* Поворот замкнутой привой равен $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

**Определение 41.** $k$ - число вращения.

**Определение 42.** *Простая замкнутая кривая* - замкнутая кривая, у которой нет самопересечений.

**Определение 43.** Поворот простой замкнутой кривой равнен $\pm 2\pi$.

# Предметный указатель