Теория категорий

Тутанов Михаил
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

6 сентября 2021 г.

Содержание

Основные определения

Определение 1. *Категория $\mathcal{C}$* – это

- класс[1] $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $\operatorname{Hom}(X, Y)$[2] для любых двух X и Y из $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ\colon \operatorname{Hom}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- для любого A из $\mathcal{C}$[3] существует $\mathrm{id}_A \in \operatorname{Hom}(A, A)$ такое, что $f \circ \mathrm{id}_A = f$, $\mathrm{id}_A \circ f = f$ для любого осмысленного f.

Определение 2. Два объекта X и Y в категории $\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, если $\exists f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ и $g \in \operatorname{Hom}(Y, X)$ такие, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами.*

Определение 3. Объект A в категории $\mathcal{C}$ называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из $\mathcal{C}$ $|\operatorname{Hom}(X, A)| = 1$ ($|\operatorname{Hom}(A, X)| = 1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A, композиция $f \circ g$ в этом случае будет элементом $\operatorname{Hom}(A', A')$, но $\mathrm{id}_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f \circ g = \mathrm{id}_{A'}$, аналогично $g \circ f = \mathrm{id}_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. □

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории $\mathcal{C}$ определим следующую категорию $\mathcal{C}^{op}$, которую будем называть *двойственной* (*противоположной*): $\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{op} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g \circ f$.

Примечание 1. Иницальный объект в $\mathcal{C}$ соответсвует терминальному в $\mathcal{C}^{op}$ и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- $Sets$: $\operatorname{Ob} Sets =$ все множества, $\operatorname{Hom}(X, Y) =$ все отображения из X в Y, $\circ$ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – $\emptyset$, терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

[1]Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

[2]Обозначение Mor на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

[3]Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups*, *Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*: $\mathrm{Ob}\, HTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = M$, $\mathrm{Hom}(x, y) = \emptyset$, если $x \leq y$, $= \emptyset$, иначе.
- *Rels*, $\mathrm{Ob}\, Rels$ = все множества, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ = все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \to X$ и $pr_Y : X \times Y \to Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$, существует единственный морфизм $h : Z \to X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$ и $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \leftarrow X$ и $g : Z \leftarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \leftarrow X \amalg Y$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id, подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. □

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y[4];
- *Groups*: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;

[4] Для меня странно, что произведение в этом случае существует всегда, а двойственное к нему – нет, но что поделать

- ЧУМ: $x \times y = min(x, y)$, $x \amalg y = max(x, y)$.

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

Определение 7. *Категорией стрелки* $\mathcal{C}/A$, где $\mathcal{C}$ – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/A =$ пары (X, f), где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$; $\mathrm{Hom}((X, f), (Y, g) = \{h \in \mathrm{Hom}(X, Y) | f = g \circ h\}$.

Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A). Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- $Sets$: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$;
- $Sets^{op}$: $X \amalg_A Y = X \amalg Y/ \sim$, где $\sim$ порождено $f(a) \sim g(a)$. В Top это просто склейка;
- $Groups$: произведение как на $Sets$, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 9. *Функтором* $\mathcal{F}$ называется отображение между двумя категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ (определённое и на объектах, и на морфизмах) с ожидаемыми свойствами:

- Если $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(A)}$.

Примеры функторов:

- $\pi_1 : Top \to Groups$;
- Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда $\mathcal{F}$ – гомоморфизм моноидов;
- M – моноид, $\mathcal{F} : M \to Vect_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \to End(V)$;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ – выбор объекта в $\mathcal{C}$, а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

Предметный указатель