Конспект лекций по матанализу

Горбунов Леонид
при участии и редакторстве @keba4ok
на основе лекций Любарского Ю. И.

13 сентября 2021г.

Содержание

Теория меры

Алгебраические структуры подмножеств

Пусть нам дано множество $\mathcal{X}$ произвольной природы и система его подмножеств $\mathfrak{A}$.

Определение 1. $\mathfrak{A}$ - *полукольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$ тоже лежит в $\mathfrak{A}$, а их разность $A \backslash B$ представляется в виде конечного объединения попарно дизъюнктных множеств из $\mathfrak{A}$.

Примечание 1. Легко понять, что любое полукольцо содержит пустое множество.

Определение 2. $\mathfrak{A}$ - *кольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$, объединение $A \cup B$ и разность $A \backslash B$ лежат в $\mathfrak{A}$

Примечание 2. Легко понять, что тогда и $A \triangle B$ лежит в $\mathfrak{A}$. Тогда если на элементах кольца множеств определить операции сложения $+ := \triangle$ и умножения $\times := \cap$, то оно превратится в алгебраическое кольцо.

Определение 3. $\mathfrak{A}$ - *алгебра множеств*, если оно кольцо, и для любого $A \in \mathfrak{A}$ множество $X \backslash A$ тоже лежит в $\mathfrak{A}$

Утверждение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ - полукольца. Тогда $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ - тоже полукольцо.

Утверждение 2. Пусть множества A, B_1, ... B_n принадлежат какому-то полукольцу. Тогда $A \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ представляется в виде объединения конечного числа элементов этого полукольца.

Доказательство. $A \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A \backslash B_1) \cap \ldots \cap (A \backslash B_n) = (\bigsqcup_{i=1}^{k_1} C_{1,i}) \cap \ldots \cap (\bigsqcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i}) = \bigsqcup_{i_1,\ldots i_n} (C_{1,i_1} \cap \ldots \cap C_{n,i_n})$. В последнем выражении все множества попарно дизъюнктны, так как если бы, например, $(C_{1,i_1} \cap \ldots \cap C_{n,i_n}) \cap C_{1,j_1} \cap \ldots \cap C_{n,j_n} \ni x$, то для каждого k от 1 до n $x \in C_{k,i_k} \cap C_{k,j_k}$, что возможно только при $i_k = j_k$, но для всех k это равенство быть верным не может. $\square$

Пример(ы) 1. $P(\mathbb{R}) = \{[a, b) | a, b, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ - *полукольцо ячеек*
$P(\mathbb{R}^n) = \{[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) | a_i, b_i, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ - тоже полукольцо ячеек, только многомерных

Вводим меру

Пусть $\mathfrak{X}$ - множество произвольной природы, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{X})$.

Определение 4. Функция $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ называется *мерой*, если для любых попарно дизъюнктных множеств A_1, ... $A_k \in \mathfrak{A}$ и таких, что $\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathfrak{A}$, верно равенство $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$

Примечание 3. Данное свойство называется *аддитивностью*

Пример(ы) 2.

- $\mathfrak{X}$ - дискретное пространство, и для любого $x \in \mathfrak{X}$ $\mu(x) = 1$. Тогда $\mu(A) = \sum_{x \in A} 1$
- $\mathfrak{X}$ - дискретное пространство, и для любого $x \in \mathfrak{X}$ $\mu(x) = p_x$, причём $\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x = 1$. Тогда мы получаем в точности вероятностное пространство.

- $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ - полукольцо конечных ячеек. Тогда $\mu([a, b)) = b - a$ - мера.
- То же, что и в предыдущем примере, только теперь $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$, где f - монотонно возрастающая функция.

Утверждение 3. Мера, определённая на полукольце, монотонна: если A, $B \in \mathfrak{A}$, и $B \subseteq A$, то $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Доказательство. $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B) = \mu(B) + \mu(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i) = \mu(B) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \geq \mu(B)$ □

Простые функции

Определение 5. Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо, и $A \in \mathfrak{A}$. Определим *функцию-индикатор* (или *характеристическую функцию*):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$$

Определение 6. *Простая функция* - это функция вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, где $A_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \in \mathbb{R}$

Примечание 4. Сумма и произведение простых функций - простые функции.

Элементарный интеграл

Пусть мы имеем $\mathfrak{A}$ - полукольцо, μ - меру и f - простую функцию (всё пока что конечно). Можем тогда ввести следующее понятие:

Определение 7. *Элементарным интегралом* называется

$$\int f(x)dx = \sum a_i \mu(A_i)$$

Утверждение 4. Определение корректно.

Примечание 5. Я не понял, что тут рассказывает Юрий Ильич, поэтому доказательство найдено в других источниках. Суть просто в попарном подразбиении и перегуппировке.

Доказательство. Пусть $f = \sum \alpha_i \cdot \chi(a_i) = \sum \beta_j \cdot \chi(b_j)$, рассмотрим тогда $c_{ij} = a_i \cap b_j$.

$$\sum \mu(a_j) \cdot \alpha_j = \sum \mu(c_{ij}) \cdot \alpha_i = \sum \mu(c_{ij}) \cdot \beta_j = \sum \mu(b_j) \beta_j$$

□

Утверждение 5 (Техническое замечение).

$$\int \chi_A = \mu(A).$$

Утверждение 6. Рассмотрим свойства интеграла:

- Линейность. Если у нас есть две простые функции: f и g, а также два числа: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$

- Монотонность. Пусть f и g - простые функции, а также $f \leq g$. Тогда

$$\int f \leq \int g.$$

Примечание 6. Для доказательства практически всего нужно просто рассмотреть дизъюнктное подразбиение данных функций.

Включаем бесконечность

Пусть у нас, по прежнему, имеется кольцо, и простая функция f. Выделим тогда у неё положительную и отрицательную часть (f^+ и f^-). Такие, что положительная часть во всех положительных значениях остаётся таковой, а при отрицательных - обнуляется. Почти аналогично с отрицательной, только мы рассматриваем модуль того, что останется. Таким образом,

$$f = f^+ - f^-.$$

Определим тогда $I_+(f) = \int f_+$, и аналогично I_-. Мы хотим определить интеграл от функции, как $I_+(f) - I_-(f)$. Но нам мешает то, что обе эти функции могут быть бесконечными. Так что в случае, когда оба интеграла равны бесконечности, у нас ничего не получится, и этот случай мы попросу запрещаем. И рассматриваем мы теперь только функции, который могут быть бесконечны максимум в одну сторону.

Примечание 7. Монотонность и линейность останутся при данном определении (последнее, конечно, опять таки при конечности хотя бы одного из интегралов).

Произведение мер

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - полукольца с мерами μ и ν соответственно. Определим функцию $\lambda : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} : \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$

Утверждение 7. λ - мера на полукольце $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, т.е. для любых попарно дизъюнктных C_1, ... C_n, $C_i = A_i \times B_i$ и таких, что $\bigsqcup_{i=1}^n C_i = C = A \times B \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, верно равенство $\lambda(\bigsqcup_{i=1}^n C_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i)$

Доказательство. По определению мер $\lambda(\bigsqcup_{i=1}^n C_i) = \mu(A)\nu(B)$, $\sum_{i=1}^n \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i)$, поэтому мы будем доказывать равенство $\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i)$. Так как все C_i попарно дизъюнктны, верно равенство $\chi_C(x, y) \sum_{i=1}^n \chi_{C_i}(x, y)$. Зафиксируем x, тогда функция-индикатор $\chi_{C_i}(x, y)$ на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ превращается в функцию индикатор $\chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)$ на $\mathfrak{B}$. Проинтегрируем равенство по y, получим: $\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}\nu(B_i)$. Интегрируя теперь по x, получаем $\mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i)$, что и требовалось. □

Счётная аддитивность (она же σ-аддитивность)

Определение 8. Пусть даны $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор подмножеств множества X, и функция $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$. Эта функция называется *счётно-аддитивной* (или *σ-аддитивной*), если для любого не более чем счётного набора попарно дизъюнктных множеств $\{B_i\}$ таких, что их объединение $B = \bigsqcup B_i$ лежит в $\mathcal{D}$, верно равенство $\mu(B) = \sum \mu(B_i)$

Пример(ы) 3.

- $\mathcal{D} = \mathcal{P}\, X$, и для любого $B \in \mathcal{D} \mu(B) = |B|$ - *считающая функция*
- Вероятностное пространство

- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{D} = P(\mathbb{R})$, $\mu([a,b)) = b - a$
- Модификация предыдущего примера: $\mu([a,b)) = f(b) - f(a)$, где f - монотонно возрастающая непрерывная функция
- $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{D} = \{< a, b > | a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$, f - просто монотонно возрастающая функция. Тогда мера $\mu(< a, b >) = f(b) - f(a)$ не будет счётно-аддитивной. Но если мы определим меру так:
  - $\mu([a,b)) = \lim_{x \to b_-} f(x) - \lim_{y \to a_-} f(y)$
  - $\mu([a,b]) = \lim_{x \to b_+} f(x) - \lim_{y \to a_-} f(y)$
  - $\mu((a,b]) = \lim_{x \to b_+} f(x) - \lim_{y \to a_+} f(y)$
  - $\mu((a,b)) = \lim_{x \to b_-} f(x) - \lim_{y \to a_+} f(y)$

  то она уже будем счётно-аддитивной.

Утверждение 8. Не существует "универсальной меры т.е. функции $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, обладающей следующими свойствами:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ - счётноаддитивна
- $\mu([0,1]) = 1$
- Для любых $A \subseteq \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $\mu(A + x) = \mu(A)$

Доказательство. Предположим противное: такая функция существует. Определим на $\mathbb{R}$ бинарное отношение $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$. Легко видеть, что это отношение эквивалентности. Воспользуемся аксиомой выбора и выберем по одному представителю из каждого класса так, чтобы они все лежали на отрезке $[0,1]$. Образуем из них множество A. С одной стороны, $\mu(A) = \mu([0,1]) - \mu([0,1] \backslash A) \geq 1 < \infty$. Рассмотрим множества $A_q = \{A + q\}$ для всех $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Они попарно не пересекаются, их мера равна мере A, а их объединение лежит в отрезке $[-1,2]$. Тогда $|0,1] \cap \mathbb{Q}| \cdot \mu(A) = \sum_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \mu(A_q) = \mu(\bigsqcup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} A_q) \leq \mu([-1,2]) < \infty$, откуда $\mu(A) = 0$. Но $\bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{Q}} A_\lambda = \mathbb{R} \implies \infty = \mu(\mathbb{R}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mu(A_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Q}} 0 = 0$, противоречие. □

Определение 9. Мера μ, определённая на полукольце (кольце, алгебре и т.д.) $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, называется *регулярной*, если для любого $A \in \mathfrak{A}$:

- $\mu(A) = \inf_{G \in \mathfrak{A}, A \subseteq G, G \text{ - открытое}} \mu(G)$
- $\mu(A) = \sup_{K \in \mathfrak{A}, K \subseteq A, K \text{ - компакт}} \mu(K)$

Теорема 1. *Регулярная мера μ, определённая на кольце, счётноаддитивна.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ - попарно дизъюнктные элементы кольца, и $A = \bigsqcup A_i \in \mathfrak{A}$. Хотим доказать, что $\mu(A) = \sum \mu(A_i)$.
В одну сторону это практически очевидно: для любого натурального n $A_1 \cup ... \cup A_n \subseteq A \implies \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A_1 \cup ... \cup A_n) \leq \mu(A)$. Переходя к пределу по n, получаем неравенство в одну сторону.
Теперь докажем, что для любого $\epsilon > 0$ верно неравенство $\sum \mu(A_i) \geq \mu(A) - 2\epsilon$, откуда и будет следовать неравенство во вторую сторону. Для этого выберем компакт $K \subseteq A$ такой, что $\mu(K) \geq \mu(A) - \epsilon$, а для каждого A_i - такое G_i, что $\mu(G_i) \leq \mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Так как $\bigsqcup A_i = A \supset K$, то и $\bigcup G_i \supset K$, а тогда можно выбрать конечное подпокрытие G_{i_1}, ... G_{i_s}. В итоге $\mu(K) \leq \sum_{j=1}^{s} \mu(G_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{s} \mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^{i_j}} < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i) + \epsilon \implies \sum \mu(A_i) \geq \mu(K) - \epsilon \geq \mu(A) - 2\epsilon$, что и требовалось. □

Счётно-аддитивные структуры

Определение 10. Непустое $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется *σ-алгеброй*, если для любого не более чем счётного набора множеств $\{A_i\}$ их объединение и пересечение и $X \backslash A_i$ также лежат в $\mathfrak{A}$

Примечание 8. $\emptyset = A \cap (X \backslash A)$, $X = A \cup (X \backslash A)$, $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$ также лежат в $\mathfrak{A}$.

Примечание 9. Если $\{A_i\}_{i \in I}$ - произвольный набор σ-алгебр над каким-то множеством, то $\bigcap_{i \in I} A_i$ - тоже σ-алгебра.

Определение 11. Пусть $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. *$\sigma$-алгебра, порождённая $\mathcal{D}$* - это наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{D}$. мы будем обозначать её $\overline{\mathcal{D}}$

Утверждение 9. Для любого $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ порождённая $sigma$-алгебра существует и единственна.

Доказательство. Хотя бы одна σ-алгебра, содержащая $\mathcal{D}$, существует: это просто $\mathcal{P}(X)$. Но тогда если $\{A_i\}_{i \in I}$ - все такие σ-алгебры, то $\bigcap_{i \in I} A_i$ - наименьшая. □

Утверждение 10. Любое открытое и замкнутое множество на прямой содержится в $\overline{P(\mathbb{R})}$

Доказательство. Заметим, что интервал (a, b) представляется в виде счётного объединения ячеек $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b)$, а любое открытое подмножество прямой является объединением не более чем счётного объединения попарно непересекающихся открытых интервалов и лучей. Если же какое-то A замкнуто, то $\mathbb{R} \backslash A$ открыто и представляется в виде $\bigcup P_i$, $P_i \in P(\mathbb{R})$. Тогда $A = X \backslash (\bigcup P_i) = \bigcap (X \backslash P_i)$ тоже представимо в виде не более, чем счётного объединения элементов из $P(\mathbb{R})$, а потому лежит в $\overline{P(\mathbb{R})}$. □

Утверждение 11. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - алгебра, и известно, что для любых $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{A}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ также принадлежит $\mathfrak{A}$. Тогда A - σ-алгебра.

Доказательство. Надо проверить, что если $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ также принадлежит $\mathfrak{A}$. Но $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = X \backslash (\bigcap (X \backslash F_i))$, т.е. лежит в $\mathfrak{A}$. □

Примечание 10. Можно доказать и в обратную сторону (т.е. из счётного объединения вывести счётное пересечение), причём дополнительно можно наложить условие попарной дизъюнктности рассматриваемых множеств - доказательство будет аналогичным (только во втором случае придётся ввести новую последовательность множеств $\{G_i\}$, определённую по индукции $G_1 = E_1$, $G_k = E_k \backslash (E_1 \cup ... \cup E_{k-1})$)

Внешняя мера

Определение 12. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - полукольцо с (конечно-аддитивной) мерой μ. Определим функцию $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\mu^*(A) = \inf(\sum \mu(A_i) | \{A_i\} \in \mathfrak{A}, \bigcup A_i \supset A)$ (т.е. инфимум по всем покрытиям множества A элементами полукольца) и назовём её *внешней мерой*.

Утверждение 12.

1. $\mu^*(A) \leq \mu(A)$
2. Монотонность: если $A \subseteq B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. *Счётная полуаддитивность*: Если $\{A_i\} \in \mathfrak{A}$, и $\bigcup A_i \in \mathfrak{A}$ то $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$

4. Если μ - счётно-аддитивна, то $\mu^*_{\restriction\mathfrak{A}} = \mu$

Доказательство.

1. A - это одно из покрытий самого себя.

2. B - это одно из покрытий множества A.

3. Обозначим $A = \bigcup A_i$. Если для какого-то i $\mu^*(A_i) = \infty$, то неравенство очевидно, поэтому далее считаем, что все $\mu^*(A_i) < \infty$. Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Для каждого A_n существует покрытие $\{B_{n_k}\}_{k\geq 1}$ элементами полукольца, для которого $\mu^*(A_i) > \sum_{k\geq 1} \mu(B_{n_k}) - \frac{\epsilon}{2^n}$. Тогда $\bigcup_{n,k} B_{n_k}$ - покрытие A, и $\mu^*(A) \leq \sum_{n,k} \mu(B_{n_k}) < \sum \mu(A_i) + \epsilon$. Значит, $\mu^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i)$, что и требовалось.

4. Введём вспомогательную функцию $\overline{\mu}$, которая определяется так же, как и μ^*, только теперь мы на каждое рассматриваемое покрытие дополнительно наложили ограничение попарной дизъюнктности составляющих его множеств.
Докажем для начала, что $\overline{\mu} = \mu*$. То, что $\overline{\mu}(A) \geq \mu^*(A)$, очевидно - во втором случае инфимум берётся по большему множеству. Зафиксируем теперь $\epsilon > 0$ и будем доказывать, что $\overline{\mu}(A) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Для этого рассмотрим покрытие A такими множествами $\{A_i\} \in \mathfrak{A}$, что $\sum \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Определим последовательность множеств $\{B_i\}$ по правилу $B_1 := A_1$ и $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup ...A_{k-1})$ при $k > 1$. Все B_i, во-первых, попарно дизъюнктны, а во-вторых, представляются в виде конечного объединения попарно дизъюнктных элементов полукольца (см. утверждение из раздела "алгебраические структуры подмножеств"). Для определённости, пусть $B_i = \bigsqcup_j B_{i,j}$. Тогда $\{C_{i,j}\}$ - покрытие множества A попарно непересекающимися элементами полукольца, откуда мы заключаем, то $\overline{\mu}(A) \leq \sum_{i,j} \mu(C_{i,j}) = \sum \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. В последнем равенстве мы воспользовались счётной аддитивностью меры μ и тем, что $\bigsqcup_{i,j} C_{i,j} = \bigcup A_i \supset A$
Вернёмся к исходному утверждению. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Так как A - само себе дизъюнктное покрытие, то $\overline{\mu}(A) \leq \mu(A)$. С другой стороны, для любого $\epsilon > 0$ существует покрытие A попарно дизъюнктными элементами полукольца $\{A_i\} \in \mathfrak{A}$, для которого $\sum \mu(A_i) \leq \overline{\mu}(A) + \epsilon$. Собирая два последних предложения вместе и пользуясь счётной аддитивностью μ, получаем: $\mu(A) = \sum \mu(A \cap A_i) \leq \sum \mu(A_i) \leq \overline{\mu}(A) + \epsilon$. Так как это выполнено для любого $\epsilon > 0$, то $\mu(A) \leq \overline{\mu}(A) = \mu^*(A)$. Но всегда верно обратное неравенство $\mu(A) \geq \mu^*(A)$, откуда мы и получаем требуемое равенство мер.

□

Теорема Лебега-Каратеодори

Определение 13. Пусть X - множество произвольной природы. Монотонную и счётно-полуаддитивную функцию $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, такую, что $\gamma(\emptyset) = 0$, мы назовём *предмерой* на множестве X.

Определение 14. Множество $E \subseteq X$ называется *γ-измеримым*, если для любого $A \subseteq X$ верно равенство $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$ или, что равносильно, $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \cap E^c)$

Примечание 11. Внешняя мера - это предмера

Теорема 2. *Теорема Лебега-Каратеодори*
Пусть γ - предмера на множестве X, и $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор всех γ- измеримых подмножеств. Тогда:

1. Σ - σ-алгебра

2. *$\gamma_{\restriction\Sigma}$ - счётно-аддитивная мера на Σ.*

3. *Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо на X, и μ - (конечно) аддитивная мера на нём. Если мы определим $\gamma := \mu^*$, то $\Sigma \supset \overline{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство.

- Сначала докажем, что Σ - это (обычная) алгебра.
$\gamma(A) = \gamma(A) + \gamma(\emptyset) = \gamma(A\backslash\emptyset) + \gamma(A \cap \emptyset) \implies \emptyset \in \Sigma$. Аналогично, $X \in \Sigma$.
Если $E \in \Sigma$, то $E^c \in \Sigma$ - следует из симметричного определения измеримой функции.
Так как $A \cup B = X\backslash((X\backslash A) \cap (X\backslash B))$, то достаточно проверить только, что если E_1, $E_2 \in \Sigma$, то $E_1 \cap E_2 \in \Sigma$. Хотим: $\gamma(A) = \gamma(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \gamma(A\backslash(E_1 \cap E_2))$. Воспользуемся теперь определением γ-измеримого множества и подставим туда различные пары множеств:
$$\begin{cases}\gamma(A) = \gamma(A \cap E_1) + \gamma(A\backslash E_1), & \text{- подставили пару } (A, E_1)\\ \gamma(A \cap E_1) = \gamma(A \cap E_1 \cap E_2) + \gamma((A \cap E_1)\backslash E_2) & \text{- подставили пару } (A \cap E_1, E_2)\\ \gamma(A\backslash(E_1 \cap E_2)) = \gamma(A\backslash E_1) + \gamma((A \cap E_1)\backslash E_2) & \text{- подставили пару } (A\backslash(E_1 \cap E_2), E_1)\end{cases}$$
Выражая $\gamma(A \cap E_1)$ из первого уравнения во второе, получаем равенство $\gamma(A) = \gamma(A \cap E_1 \cap E_2) + \gamma(A\backslash E_1) + \gamma((A \cap E_1)\backslash E_2)$, но правая часть по третьему равенству равна в точности $\gamma(A \cap E_1 \cap E_2) + \gamma(A\backslash(E_1 \cap E_2))$. Мы доказали, что множество $E_1 \cap E_2$ тоже γ-измеримо.

- Теперь покажем, что $\gamma_{\restriction\Sigma}$ - аддитивна.
Пусть $E_1, E_2 \in \Sigma$ - дизъюнктные множества. Тогда $\gamma(E_1 \cup E_2) = \gamma((E_1 \cup E_2)\backslash E_2) + \gamma((E_1 \cup E_2) \cap E_2) = \gamma(E_1) \cap \gamma(E_2)$, что и требовалось.

- Следующий шаг - доказать, что Σ - это σ-алгебра.
Мы помним, что достаточно доказывать утверждение про объединение попарно дизъюнктных множеств: если $\{E_i\} \in \Sigma$ - попарно дизъюнктны, то $E = \bigsqcup E_i \in \Sigma$, т.е. что для любого $A \subseteq X$ верно равенство $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A\backslash E)$. Как и раньше, нам достаточно вместо равенства доказать неравенство в обе стороны. Неравенство $LHS \leq RHS$ верно в силу полуаддитивности γ. Будем доказывать неравенство в обратную сторону. Сразу отметим, что если $\gamma(A) = \infty$, то оно верно, поэтому далее мы считаем, что $\gamma(A) < \infty$. Для любого натурального n: $\gamma(A) = \gamma(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) + \gamma(A\backslash \bigcup_{i=1}^n E_i) \geq \gamma(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) + \gamma(A\backslash E)$.
Докажем, что для любого натурального n верно соотношение $\gamma(A\cap\bigsqcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \gamma(A\cap E_i)$. Переход практически очевиден, поэтому сосредоточим наше внимание на базе: $\gamma(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \gamma(A \cap E_1) + \gamma(A \cap E_2)$. Но это ни что иное, как определение измеримости для пары $(A \cap (E_1 \cup E_2), E_1)$.
Комбинируя результаты двух последних абзацев, получаем неравенство $\gamma(A) \geq \sum_{i=1}^n \gamma(A\cap E_i) + \gamma(A\backslash E)$. Так как $\gamma(A) < \infty$, мы можем перейти к пределу по n и получить неравенство $\gamma(A) \geq \sum_{i=1}^\infty \gamma(A \cap E_i) + \gamma(A\backslash E) \geq \gamma(A \cap E) + \gamma(A\backslash E)$ (в последнем переходе мы воспользовались счётной полуаддитивностью γ).

- $\gamma_{\restriction\Sigma}$ - счётно-аддитивная функция.
Пусть есть счётный набор $\{E_i\} \subseteq \Sigma$ попарно дизъюнктных множеств. Мы уже доказали, что $E = \bigsqcup E_i \in \Sigma$. Хотим доказать, что $\sum_{i=1}^\infty = \gamma(E)$. Неравенство $LHS \geq RHS$ выполняется в силу полуаддитивности, поэтому мы будем доказывать неравенство $LHS \leq RHS$.
Для любого натурального n верно соотношение $\gamma(E) = \gamma(E\cap(E_1\cup ...\cup E_n)) + \gamma(E\backslash(E_1\cup$

$\ldots \cup E_n)) \geq \gamma(E \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)) = \sum_{i=1}^n \gamma(E_i)$. переходя к пределу по n, получаем требуемое неравенство.

- Достаточно показать, что $\mathfrak{A} \subseteq \Sigma$. Пусть $E \in \mathfrak{A}$. Надо доказать, что для любого $A \subseteq X$ $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$. Опять-таки, в силу полуаддитивности μ^* достаточно доказать только неравенство $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$ и, как и в пункте 3, нетривиальным будет только случай $\mu^*(A) < \infty$.
  Для любого $\epsilon > 0$ докажем, что $\mu^*(A) + \epsilon \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$, из этого будет следовать требуемое. Можно выбрать $\{C_i\}_{i \geq 1}$ - такое покрытие A попарно дизъюнктными элементами полукольца, что $\sum \mu(C_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. Тогда $\{C_i \cap E\}_{i \geq 1} \subseteq \mathfrak{A}$ - покрытие $A \cap E$, откуда $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(C_i \cap E)$. Также $C_i \backslash E = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} D_{i,j}$ - конечное объединение попарно дизъюнктных элементов полукольца, а тогда $\{D_{i,j}\}$ - покрытие $A \backslash E \implies \mu^*(A \backslash E) \leq \sum_{i,j} \mu(D_{i,j}) = \sum_{i \geq 1} \mu(C_i \backslash E)$. Складывая два последних неравенства, получаем, что $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \leq \sum_{i \geq 1} (\mu(C_i \cap E) + \mu(C_i \backslash E)) = \sum_{i \geq 1} \mu(C_i) \leq \mu^*(A) + \epsilon$.

□

Борелевские множества и мера Лебега

Определение 15. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек с естественной мерой μ (которая, как мы помним, счётно-аддитивна). Множества, измеримые относительно внешней меры μ^*, образуют σ-алгебру (будем обозначать её Σ) и называются *измеримыми по Лебегу*, а μ^* от них обозначается буквой λ и называется *мерой Лебега*.

Определение 16. Рассмотрим $\mathfrak{B} = \overline{P(\mathbb{R}^n)}$ - σ-алгебра, натянутая на полукольцо ячеек $P(\mathbb{R}^n)$. Она состоит из всевозможных счётных объединений и пересечений элементов $P(\mathbb{R}^n)$ и называется *Борелевской σ-алгеброй*. Эта алгебра содержит, например, все открытые множества (так как любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде дизъюнктного объединения ячеек).

Примечание 12. Любое измеримое по Борелю множество также измеримо и по Лебегу (в силу п.3 теоремы Лебега-Каратеодори), но обратное неверно.

Примечание 13. Мощность Борелевской алгебры - континуум, так как все её элементы получаются из изначального континуального набора $P(\mathbb{R}^n)$ применением счётного числа пересечений и объединений.

Утверждение 13. Пусть γ - предмера на X. Если $E \subseteq X$, и $\gamma(E) = 0$, то E - γ-измеримо. Как следствие, любое подмножество γ-измеримого и имеющего предмеру ноль множества также измеримо.

Доказательство. Пусть $A \subseteq X$ - произвольное подмножество. Пользуясь монотонностью и полуаддитивностью предмеры, напишем цепочку неравенств: $\gamma(A \backslash E) \leq \gamma(A) \leq \gamma(A \cap E) + \gamma(A \backslash E) \leq \gamma(E) + \gamma(A \backslash E) = \gamma(A \backslash E)$. Значит, все неравенства обращаются в равенство, и $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \backslash E)$. □

Пример(ы) 4.

1. Отрезок в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, измерим (так как замкнут) и имеет меру Лебега, равную нулю, так как его можно зажать в прямоугольники сколь угодно малого объёма. По утверждению выше всего его подмножества, коих $2^{\text{КОНТИНУУМ}}$ штук, также измеримы. Значит, в $\mathbb{R}^n$ множество измеримых по Лебегу функций имеет мощность $2^{\text{КОНТИНУУМ}}$ (больше не может, так как $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$).

2. На плоскости надо действовать хитрее. То же рассуждение пройдёт, если мы придумаем какое-нибудь континуальное множество, имеющее меру ноль. Утверждается, что нам подойдёт Канторово множество.

Утверждение 14. Канторово множество имеет мощность континуум, измеримо по Борелю (а, значит, и по Лебегу) и имеет меру Лебега, равную нулю.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что число из отрезка $[0,1]$ принадлежит Канторову множеству, если и только если оно записывается в троичной записи с помощью цифр 0 и 2 (по модулю обработки предельных случаев вида 0,22222...).
Второе утверждение верно, так как мы получили Канторово множество путём выкидывания из отрезка $[0,1]$ счётного числа открытых интервалов.
Посчитаем меру дополнения к Канторову множеству. Мы имеем один отрезок длины $\frac{1}{3}$, два отрезка длины $\frac{1}{9}$, ... 2^{k-1} отрезков длины $\frac{n}{3^k}$. Сумма их длин (мер) равна единице (несложно просуммировать ряд), а тогда мера Канторова множества равна $\lambda([0,1]) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - 1 = 0$ □

Определение 17. Мера на полукольце $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется *σ-конечной*, если исходное множество X представляется в виде счётного объединения $\bigcup A_n$, где $A_i \in \mathfrak{A}$, и $\mu(A_i) < \infty$.

Примечание 14. Мера Лебега является σ-конечной.

Измеримые по Борелю множества устроены просто, однако измеримых по Лебегу множеств, как мы увидели, значительно больше, и про их структуру мы пока ещё ничего не знаем. Но это ситуация поправимая, ведь существует

Утверждение 15. Белов называл его гордым словосочетанием *«теорема о структуре измеримых множеств»*
Пусть $A \in \Sigma$ - (измеримое по Лебегу) множество. Тогда оно представимо в виде разности $B \backslash E$, где $B \in \mathfrak{B}$, а $\lambda(E) = 0$

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $\lambda(A) < \infty$. Для произвольного $\epsilon > 0$ рассмотрим покрытие A попарно дизъюнктными элементами полукольца ячеек $\{c_j\}$ такое, что $\lambda(A) = \mu^*(A) + \epsilon \geq \sum \mu(C_j)$ (здесь мы пользуемся конечностью $\lambda(A)$). Если $C^\epsilon = \bigcup C_j$, то $\mu(C^\epsilon) = \sum \mu(C_j) \leq \lambda(A) + \epsilon$. $D = \bigcap C^\epsilon \in \mathfrak{B}$ (хоть написано объединение по всем $\epsilon > 0$, достаточно рассмотреть счётную подпоследовательность, стремящуюся к нулю). $\mu(D) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu(C^\epsilon) = \lambda(A)$. Также $A \subseteq D$. Тогда $\lambda(A \backslash A) = \mu^*(D \backslash A) = 0$ (в этом месте мы воспользовались измеримостью A - в произвольном случае мы не могли бы использовать аддитивность mu^*). Положим теперь $B = D$, $E = A \backslash D$ и получим требуемое.
Чтобы свести случай $\lambda(A) = \infty$ к предыдущему, достаточно рассмотреть по отдельности множества $A \cap A_i$ (они также измеримы и имеют конечную меру Лебега в силу σ-конечности последней), объединить соответствующие им B_i и E_i и воспользоваться тем, что объединение счётного числа множеств меры ноль также имеет меру ноль (по счётной аддитивности λ). □

Что на самом деле произошло? Мы придумали счётно-аддитивную функцию λ на Борелевских множествах, а потом продлили её на Σ. Но единственно ли это продолжение? Ответ положительный.

Утверждение 16. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек, Σ - измеримые по Лебегу подмножества, λ - мера Лебега, и Δ ($\mathfrak{B} \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$) - какая-то другая σ-алгебра со своей мерой ν такая, что $\nu_{\restriction \mathfrak{B}} = \lambda_{\restriction \mathfrak{B}}$. Тогда $\nu_{\restriction \Delta} = \lambda_{\restriction \Delta}$

Доказательство. Во-первых, $\nu(E) = 0 \iff \lambda(E) = 0$, так как множество нулевой меры получается аппроксимацией Борелевскими множествами нулевой меры.
Во-вторых, если $A \in \Delta$, то можно найти $E \in \Delta$ такое, что $\mu(E) = \nu(E) = 0$, и $A \sqcup E \in \mathfrak{B}$. Но тогда $\mu(A) = \mu(A \sqcup E) - \mu(E) = \nu(A \sqcup E) - \nu(E) = \nu(A)$. □

Утверждение 17.

- Мера Лебега инвариантна относительно сдвига. А именно, если $E \in \Sigma$, и $r \in \mathbb{R}^n$, то $\lambda(E+r) = \lambda(E)$
- Пусть μ - какая-то счётно-аддитивная мера на $\mathfrak{B}$, инвариантная относительно сдвига. Тогда $\mu = c\lambda$ для некоторой константы c.

  Доказательство.

  Для полуинтервалов это очевидно, а если $\{X_i\}$ - покрытие E, то $\{X_i + r\}$ - покрытие $E + r$.

- Для простоты ограничимся одномерным случаем, хотя в случае произвольной размерности доказательство будет таким же. Пусть $c = \mu([0,1))$. Тогда $\mu(a,b) = c(b-a)$. Действительно, если $b-a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то $\mu(a,b) = \mu(0, \frac{p}{q}) = p \cdot \mu(0, \frac{1}{q}) = \frac{c}{q}$. А если $b-a \notin \mathbb{Q}$, то можно приблизить рациональными. Значит, на полуинтервалах меры λ и $c \cdot \mu$ совпадают, а, значит, они совпадают везде, так как мера продолжается единственным образом.

  $\square$

Предметный указатель