Геометрия и Топология

Мастера конспектов

11 января 2021 г.

Билет 1

Метрические пространства, произведение метрических пространств, пространство $\mathbb{R}^n$.

Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ для любых $x, y \in X$;
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Пара (X,d), где d - метрика в X, называется *метрическим пространством.*

Теорема 1. (Прямое произведение матриц). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) - метрические пространства. Тогда функция

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d_y(y_1,y_2)^2}$$

задаёт метрику на $X \times Y$.

Доказательство. 1 и 2 аксиомы очевидны. Проверим выполнение третьей. Сделать это несложно, нужно всего лишь написать неравенство и дважды возвести в квадрат. Можно как-нибудь поиспользовать Коши или КБШ, на ваш вкус. □

Пространство $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y + n)$, на котором задана метрика

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

(которая называется *евклидовой*), есть $\mathbb{R}^n$.

Билет 2

Шары и сферы. Открытые множества в метрическом пространстве. Объединения и пересечения открытых множеств.

- Пусть (X,d) — метрическое пространство, $a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

  Множества

  $$B_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\},$$
  $$\overline{B_r}(a) = D_r(a) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}.$$

  называются, соответственно, открытым шаром (или просто шаром) и замкнутым шаром пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r.

- Пусть (X,d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется открытым в метрическом пространстве, если

  $$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A.$$

  Примеры:

  – $\varnothing$, X и $B_r(a)$ открыты в произвольном метрическом пространстве X.

  – В пространстве с дискретной метрикой любое множество открыто.

- **Теорема 2.** В произвольном метрическом пространстве X

  1. объединение любого набора открытых множеств открыто;
  2. пересечение конечного набора открытых множеств открыто.

Доказательство.

1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \exists j \in I : x \in U_j \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_j \subseteq U.$$

2. Пусть семейство $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \forall i : x \in U_i \Rightarrow \exists r_i : B_{r_i}(x) \subseteq U_i;$$
$$r := min\{r_i\} \Rightarrow B_r \subseteq U.$$

□

Билет 4

Внутренность, замыкание и граница множества: определение и свойства включения, объединения, пересечения.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Внутренностью* множества A называется объединение всех открытых множество, содержащихся в A, т. е.:

$$\mathrm{Int}A = \bigcup_{U \in \Omega, U \subseteq A} U.$$

Свойства:

- $\mathrm{Int}A$ - открытое множество;
- $\mathrm{Int}A \subseteq A$;
- B открыто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \mathrm{Int}A$;
- $A = \mathrm{Int}A \Leftrightarrow A$ открыто;
- $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$;
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$;
- $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$;
  Доказательство:
  $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}A \dots$;
  $\supseteq$: $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B \subseteq A \cap B \Rightarrow \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$.
- $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$;
  Доказательство $\neq$:
  $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$,
  $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}B = \emptyset, \mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых множество, содержащих A, т. е.:

$$\mathrm{Cl}A = \bigcap_{X \setminus V \in \Omega, V \supseteq A} V.$$

Свойства:

- $\mathrm{Cl}A$ - замкнутое множество;
- $A \subseteq \mathrm{Cl}A$;
- B замкнуто, $B \supseteq A \to B \supseteq \mathrm{Cl}A$;
- $A = \mathrm{Cl}A \Leftrightarrow A$ замкнуто;
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}A$;
- $A \subseteq B \to \mathrm{Cl}A \subseteq \mathrm{Cl}B$;
- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$;
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$ (на самом деле, даже $\neq$);
- $\mathrm{Cl}A = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus (X \setminus A))$.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *границей* множества A называется разность его замыкания и внутренности: $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Cl}A \setminus \mathrm{Int}A$.

Свойства:

- $\mathrm{Fr}A$ - замкнутое множество;
- $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$;
- A замкнуто $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}A$;
- A открыто $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

Билет 5

Расположение точки относительно множества: внутренние и граничные точки, точки прикосновения, предельные и изолированные точки. Внутренность, замыкание и граница множества: из каких точек они состоят.

- Определения(A - множество в топологическом пространстве):
  1. Окрестностью точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.
  2. Точка называется внутренней для A, если некоторая её окрестность содержится в A.
  3. Точка называется точкой прикосновения для A, если любая её окрестность пересекается с A.
  4. Точка называется граничной для A, если любая её окрестность пересекается с A и с дополнением A

5. Точка называется изолированной для A, если она лежит в A и некоторая её окрестность пересекается по A ровно по этой точке.
6. Точка называется предельной для A, если любая её выколотая окрестность пересекается с A.

Примеры... :(

- 1. Внутренность множества есть множество его внутренних точек:
     - b — внутр. точка для $A \Rightarrow \exists U_{(b)} \subseteq A \Rightarrow U_{(b)} \subseteq IntA \Rightarrow b \in IntA$;
     - $b \in IntA \Rightarrow b$ лежит в A вместе с окрестностью $IntA \Rightarrow b$ — внутренняя точка для A.
  2. Замыкание множества есть множество его точек прикосновения: b — точка прикосновения для $A \iff b \notin Int(X \setminus A) \iff b \in ClA$
  3. Граница множества есть множество его граничных точек:
     b — граничная точка множества $A \iff (b \in ClA) \wedge (b \in Cl(X \setminus A)) \iff (b \in ClA) \wedge (b \notin IntA) \iff b \in FrA$.
  4. Замыкание множества есть объединение множеств предельных и изолированных точек:
     TBC...
  5. Замыкание множества есть объединение граничных и внутренних точек:
     TBC...