Матанализ 2 семестр билеты

Петров Сергей (@psn2706)
при поддержке Кабашного Ивана (@keba4ok),
Горбунова Леонида, Савельева Артёма,
и под конец знатно напизженно из
конспекта М. Опанасенко

25 июня 2021г.

Содержательное содержание.

Содержание

Билеты

Билет 1. Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры.

Определение 1. *Вариация функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$V_f([a,b]) = \sup_{\substack{x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \\ x_0 = a, x_n = b}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

Примечание 1. Свойства вариации

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ монотонна $\Rightarrow V_f([a,b]) = |f(a) - f(b)|$
- $V_f([a,b]) = 0 \Leftrightarrow f$ константо на $[a,b]$
- $V_{f+g} \le V_f + V_g$
- V_f аддитивна по промежутку:
  $a \le b \le c : V_f([a,c]) = V_f([a,b]) + V_f([b,c])$

Примечание 2. Будем говорить, что f имеет *ограниченную вариацию* на $[a,b]$, если V_f конечна на $[a,b]$.

Утверждение 1. Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны

- f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$
- $f = f_1 - f_2$, для каких-то f_1, f_2 неубывающих на $[a,b]$

Доказательство.
$\Rightarrow$ Рассмотрим $\varphi(x) = V_f([a,x]) \Rightarrow \varphi \nearrow f = \varphi - (\varphi - f)$, пусть $h = \varphi - f$. $h \nearrow \Leftrightarrow$ при $x \le y$: $h(x) \le h(y) \Leftrightarrow \varphi(x) - f(x) \le \varphi(y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \le \varphi(y) - \varphi(x) = V_f([x,y])$.

$\Leftarrow V_{f_1 - f_2}[a,b] \le V_{f_1}[a,b] + V_{-f_2}[a,b] = |f_1(a) - f_1(b)| + |f_2(a) - f_2(b)|$. □

Утверждение 2. *Замена переменной в вариации.* Пусть $g : [a,b] \to [c,d]$ непрерывная биекция, тогда $V_f[c,d] = V_{f \circ g}[a,b]$

Доказательство. g монотонна, будем считать, что возрастает. Любому набору $x_0, x_1, \dots, x_n$ из определения вариации V_f найдутся соответсвующие $y_0, y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющие условию $g(y_k) = x_k$ и подходящие для подстановки в определение $V_{f \circ g}$, т.к. $y_k \nearrow \Leftrightarrow g(y_k) \nearrow$. Тогда $V_f[c,d] \le V_{f \circ g}[a,b]$, но с другой стороны $V_f[c,d] \ge V_{f \circ g}[a,b]$, т.к. можно подставлять $x_k := g(y_k)$ в определение первой вариации. □

Билет 2. Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути.

Определение 2. Множество в $\mathbb{R}^n$ называют *кривой*, если оно является образом некоторой непрерывной функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Дуга кривой (или же путь) - подмножество кривой $f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Длина дуги кривой (пути)* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ это - $V_f([a,b])$.

Примечание 3. Если длина пути конечна, то путь называется спрямляемым, иначе - неспрямляемым.

Определение 4. *Естественная параметризация кривой* - параметризация длиной её дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Примечание 4. Естественная параметризация - параметризация, которая "равномерна по времени", т.е. за одинаковый промежуток времени проходим одинаковое расстояние.

Естественная параметризация спрямляемого пути. $\varphi : [a,b] \to [0,\beta], \varphi(x) = V_f([a,x])$, если φ строго возрастает (путь "без остановок", $f \not\equiv const$ ни на каком интервале), то φ - биекция и $\exists \psi : [0,\beta] \to [a,b], \psi = \varphi^{-1}, V_f([a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$, $V_{f\circ\psi}([c,d]) = V_f([\psi(c),\psi(d)]) = \varphi(\psi(d)) - \varphi(\psi(c)) = d - c$

Определение 5. *Гладкий путь* - образ гладкой $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (т.е. $f = (f_1,...,f_n)$, причём все f_k непрерывно дифференцируемы).

Напоминание 1. *Формула Лагранжа*, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) :$

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Утверждение 3. *Длина гладкого пути* $f = (f_1, ..., f_n)$ равна $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (f'_m(x))^2 dx}$

Доказательство. Рассмотрим $V_f([a,b]) = \sup\limits_{x_0=a,\dots,x_N=b} \sum\limits_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x)|$ и воспользуемся формулой Лагранжа $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f_m(x_{k+1}) - f_m(x_k))^2} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f'_m(\xi_{m,k}))^2} = (V)$, $\xi_{m,k} \in (x_k,x_{k+1}), (f'_m)^2$ равномерно непрерывна на $[x_k, x_{k+1}]$, значит для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое разбиение $[a,b]$ такое, что $(f'_m)^2(\xi_{m,k}) \le \min_{[x_k,x_{k+1}]}(f'_m)^2 + \varepsilon^2$. Тогда

$$(I) \le (V) \le \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{m=1}^{n} \min_{[x_k,x_{k+1}]} (f'_m)^2}}_{(I)} + \varepsilon\sqrt{n} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)}$$

Левая и правая части стремятся к интегралу из условия (при стремлении мелкости к нулю), тогда по теореме о двух миллиционерах туда же стремится и (V). $\square$

Естественная параметризация гладкого пути.

$$\varphi(x) = V_f([a,x]) = \int_a^x |f'(t)|dt = \int_a^x \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f'_k(t))^2 dt}.$$

Параметризация всё также по длине дуги $\psi = \varphi^{-1}$.

Утверждение 4. $|(f(\psi(x)))'| = 1$

Доказательство. $\varphi'(x) = |f'(x)|, \psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} = \frac{1}{|f'(\psi(x))|}$, $|(f(\psi(x)))'| = |f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)| = 1$ $\square$

Билет 3. Движение по окружности. Единственность простого вращения.

Единичная окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Хотим обойти её с единичной скоростью, начиная с точки (1,0).

Комплексные обозначения: рассмотрим биекцию $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ по правилу: $(x,y) \leftrightarrow (x+iy)$. Тогда путь можно рассматривать как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$.

Определение 6. *Простое вращение* по окружности это отображение
$\Gamma : \mathbb{R} \to \pi = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \big| x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$,

- $\Gamma \in C^1$ (гладкая)
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$
- $|\Gamma'(t)| = 1$ для любого t

Лемма 1. $\Gamma'(t) \equiv i\Gamma(t)$

Доказательство. $\Gamma(t) \in \pi \Rightarrow |\Gamma(t)| = \Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$
$\Rightarrow (\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)})' = \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0$
$\Rightarrow 2\Re(\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)}) = 0$, $|\Gamma'(t)| = |\overline{\Gamma(t)}| = 1$ и $\Gamma'(0)\overline{\Gamma(0)} = i \Rightarrow \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ □

Утверждение 5. Если Γ существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть Γ_1, Γ_2 - простые вращения, тогда по лемме
$(\Gamma_1\overline{\Gamma_2})' = \Gamma_1'\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{\Gamma_2'} = i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{i\Gamma_2} = 0 \Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = const, \Gamma_1(0)\overline{\Gamma_2(0)} = 1$
$\Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 = \dfrac{1}{\overline{\Gamma_2}} = \dfrac{\Gamma_2}{|\Gamma_2|} = \Gamma_2$ □

Билет 4. Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера.

Утверждение 6. Простое вращение $\Gamma(t)$ существует.

Доказательство. Докажем теперь существование. Предъявим сначала произвольную параметрицацию окружности, а затем постараемся сделать в ней замену переменной, чтобы получить хорошую функцию (которая должна быть, конечно, гладкой). Давайте параметризуем верхнюю половину $\mathbb{T}$ самым естественным образом: примем $x = t, y = \sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$ (двигаемся по часовой стрелке). Теперь нам нужно отпараметризовать нижнюю половину, возьмём для этого $x = -t$, $y = -\sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$, двигаться мы теперь будем по нижней половине, но в другом направлении, то есть, одну из половин нужно перевернутьт и "склеить" в один целостный проход. Тогда в нижней половине "сдвинем" рассмотрение на $1 \le t \le 3$, и преобразуем: $y = -\sqrt{1-(2-t)^2}$.

Осталось проверить, что полученная функция гладкая. Вообще, это почти везде очевидно, кроме ±1, это и проверим. $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, а вектор $f'(t) = (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})$. Функция $\varphi(x)$ на $(-1,1)$ выглядит как

$$\int_{-1}^{x} |f'(s)|ds = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Функция $\varphi(x)$ - возрастающая биекция, значит, мы можем посмотреть на обратную функцию $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$. Рассмотрим теперь для $x \in (-1, 1)$,

$$(f^{-1}(\psi(x)))' = (f_1'(\psi(x))\psi'(x), f_2'(\psi(x))\psi'(x)).$$

Тогда, так как $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))}$, это также и равно $\sqrt{1-\psi^2(x)}$, что также равно

$$(\psi'(x), \frac{-\psi(x)}{\sqrt{1-\psi(x)}}\sqrt{1-\psi^2(x)}).$$

В последнем также можно сократить числитель и знаменатель. Итого, $f(\psi(x))$ - гладкая на $(-1, 1)$, и более того, если $x \to \pm 1$, производная имеет конечный предел. Получается, дифференцируема на интервале, и производная имеет предел в крайних точках, тогда она в них также дифференцируема. Таким образом, для верхней половины мы всё показали, для нижней - аналогично, всего лишь с линейной заменой. □

Определение 7.

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(\Gamma(x)),$$
$$\sin(x) = \mathrm{Im}(\Gamma(x)).$$

Мы научились строить синус и косинус через вращение окружности. Немного не помню, обговаривали ли мы это на прошлой лекции, но Юрий Сергеевич кратко упомянул, что мы можем разложить $\Gamma(x)$ в ряд Тэйлора в $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ в силу свойства $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)$ и того, что остаточный член в форме Лагранжа будет стремиться к нулю при стремлении n к бесконечности.

Тогда

$$\cos x = \mathrm{Re}\,\Gamma(x) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

и аналогично синус по нечётным степеням. [из этого понимаем, что верна *формула Эйлера*, то есть, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, так как e^{ix} именно таки раскладывается в ряд Тейлора в окрестности нуля]

Мнимая экспонента обладает свойствами, аналогичным обыкновенной экспоненте, поэтому покажем, что $\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Рассмотрим $\Gamma(x+y)\overline{\Gamma(y)}$ - функцию от x, а y - параметр. Это - некоторый обход окружности, который также удовлетворяет всем нормировочным условиям. $\varphi(0) = 1$, $|\varphi'(x| = 1$, и, наконец, $\varphi'(0) = \Gamma'(0) = i$.

Теперь все прекрасные формулы косинуса и синуса суммы и разностей легко выводятся из доказанной формулы. Через мнимую экспоненту запишем: $e^{i(x+y) = e^{ix} \cdot e^{iy}}$, а там уже просто надо посмотреть на мнимые и действительные части.

Из полученных свойств получим, что $\Gamma(x)\Gamma(-x) = \Gamma(0 = 1)$, тогда $\Gamma(-x) = \overline{\Gamma(x)}$, откуда мы получаем чётность косинуса и нечётность синуса.

Можно упомянуть и формулу муавра. Распишем

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

это формулы Муавра. Также можно получить и периодичность, это, вообщем-то очевидно и завершает наш разговор об элементарных функциях.

Билет 5. Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры.

Определение 8. *Норма* на евклидовых пространствах - отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям:

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примечание 5. Все расстояния мы будем рассматривать с евклидовой нормой (т.е. $d(x,y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$). Такая метрика стандартна. Так как в этом семестре рассматриваемые размерности евлидовых пространств конечные, то с точки зрения сходимостей к нулю мы можем считать разные нормы эквивалентными.

Напоминание 2. *Модуль (или длина) евклидова вектора* $x = (x_1,x_2, ..., x_n)$:

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Определение 9. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение L, такое что $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)$, L называют *дифференциалом* функции f в точке a. L определяется матрицей A размера $m \times n$, её столбцы - это значения на базисных векторах, A называют *производной* функции.

Примечание 6. Запись $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \quad 0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{||x - a||} < \varepsilon$$

Примечание 7. Если L существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 дифференциалы f в точке a, тогда
$(L_1 - L_2)(x - a) = o(||x - a||)$ при $x \to a$, это возможно только если отображение $(L_1 - L_2)$ тождественный нуль.

Пояснение: пусть $L(x) = o(||x||), x = (x_1,...,x_n)$; $L(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} L(x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k L(e_k)$, где e_k - базисные вектора. Пусть $\exists k : L(e_k) \neq 0 \Rightarrow$ для векторов вида $y = a e_k, a \in \mathbb{R}_{>0}, a \to 0$, $\frac{L(y)}{||y||} = \frac{aL(e_k)}{a||e_k||} = \frac{L(e_k)}{||e_k||} \neq 0$, противоречие. □

Билет 6. Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений.

Определение 10. *Норма линейного отображения* L:

$$||L|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Lx||$$

Примечание 8. Следующие нормы эквивалентны:

- $||L|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Lx||$
- $||L|| = \sup_{||x|| = 1} ||Lx||$
- $||L|| = \sup_{||x|| < 1} ||Lx||$
- $||L|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Lx||}{||x||}$

Утверждение 7. (Линейное отображение липшицево) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейно, значит $\exists A : \forall x,y \in \mathbb{R}^n : \ ||Lx - Ly|| \leq A||x - y||$

Примечание 9. $||L|| = min\{A \big| \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n : \ ||Lx - Ly|| \leq A||x - y||\}$

Важный момент, почему важна операторная норма. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, тогда $||BA|| \leq ||B|| \cdot ||A||$, так как левая часть по определению равна $\sup_{||x|| \leq 1 (\text{в } \mathbb{R}^n)} \leq \sup_{||y|| \leq ||A||} ||By|| \leq ||B|| \cdot ||A||$. Заметим также две следующие вещи для линейного $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ равносильны:

- $\ker A = \{0\}$
- $||Ax|| \geq \varepsilon ||x||, \exists \varepsilon > 0.$

Доказательство. $\{x \ : \ ||x|| = 1\}$ - единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Пусть $f(x) : x \to ||Ax||$, f - непрерывная (?), $f \neq 0$ на единичной сфере, тогда $f \geq \varepsilon > 0$, $||Ax|| \geq \varepsilon ||x||$, $||x|| = 1$. □

Билет 7. Дифференцирование суммы, произведения, частного.

Билет 8. Дифференцирование суперпозиции функций.

Билет 9. Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению.

Определение 11. *Частной производной* функции f по i-ой координате в точке $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ называют предел:

$$f'_{x_i}(A) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{x_i - a_i}$$

Примечание 10. Будем называть функцию *гладкой*, если все её частные производные непрерывны.

Напоминание 3. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Теорема 1. *Если все частные производные $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывны в некоторой окрестности точки x^0, то f дифференцируема в x^0.*

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 1$. $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Применим формулу Лагранжа $f(x) - f(x^0) = f(x_1,...,x_n) - f(x_1^0,...,x_n^0) =$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \left(f(x_1^0,...,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}...,x_n) - f(x_1^0,...,x_{k-1}^0,x_k^0,x_{k+1}...,x_n)\right) =$

$$\sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}\Big|_{(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,\xi_k,x_{k+1},\dots,x_n)}(x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}\Big|_{x^0}(x_k - x_k^0) + o(|x-x^0|)$$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}(f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0})(x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} o(|x-x^0|)$, $|\text{LHS}|$ оценивается по неравенству КБШ как $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon\sqrt{n}|x - x^0|$ при $|x - x_0| < \delta$ (пользуемся непрерывностью f'_{x_k} в окрестности точки x_0 и тем, что $|t_k - x_0| < |x - x_0|$). Для $m > 1$ достаточно представить f в виде $f = (f_1,\dots,f_m)$ и рассмотреть каждую f_k отдельно. □

Примечание 11. Наличия частных производных в точке недостаточно, чтобы сказать, что функция дифференцируема.

Определение 12. *Производной функции f по направлению* единичного вектора e в точке x называется предел:

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ t\to 0}} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

Примечание 12. Частная производная f по k-ой координате это производная по направлению $(\underbrace{0,\dots,0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

Примечание 13. Производная $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по направлению $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ выражается через частные производные f.

$$f'_e(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k f'_{x_k}(x)$$

Билет 10. Лемма о билипшицевости.

Утв. 1. f - гладкая в окрестности точки x^0 с непрерывными частными производными, тогда f липшицева, то есть, $|f(x) - f(y)| \le C||x - y||$. Если мы зафиксируем точку x, то $|f(x) - f(y)| \le (||A|| + \varepsilon)||x - y||\ \forall\varepsilon > 0,\ A = A_x$. $||A_x|| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_x\right|$.

Утв. 2. [***Лемма о билипшицевости***] Если к тому же $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, то f - билипшицево (в окрестности x^0), $C_2||x - y|| \le |f(x) - f(y)| \le C_1||x - y||$. Докажем и его. $f(y) = f(x) + A_x(y-x) + o(||x-y||)$, тогда $||A_{x^0}z|| \ge \varepsilon||z||, \forall z \in \mathbb{R}^n$, $||A_x z||$ - $A_x z = A_{x^0}z + (A_x - A_{x^0})z$. Первый элемент не меньше $\varepsilon||z||$, а $||A_x - A_{x^0}||$ стремится к 0 в окрестности этой точки, тогда

$$|f(y) - f(x)| = |A_x(y - x)| + o(||x - y||),$$

но каждый из них можно ограничить снизу $\frac{\varepsilon}{2}||x - y||$.

Билет 11. Теорема об обратном отображении.

Теорема 2. *(Теорема об обратном отображении). Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$($G-$ открытое в $\mathbb{R}^n$). У f есть частные непрерывные производные. A - производная f в точке x^0, причём A невырождена. Тогда в окрестности т. x^0 существует гладкая g, т.ч. $g(f(x)) = x$ и производная g в т. x^0 это A^{-1}.*

Доказательство. Из прошлого билета у нас есть два утверждения

Утверждение 8. f гладкая в окрестности x^0, значит она там же липшецева, т.е. $\exists C\ \forall x,y :$ $|f(x)-f(y)| < C||x-y||$

Утверждение 9. $Ker(A) = \{0\} \Rightarrow f$ билипшицева, т.е. $\exists C_1,\ C_2 > 0\ \forall x,y :\ C_1||x-y|| <$ $|f(x)-f(y)| < C_2||x-y||$

Итого, у нас есть отображение $f : f(x) = f(x^0) + A(x-x^0) + o(||x-x^0||)$. Рассмотрим шарик $B_r(x^0) = \{x : ||x-x^0|| < r\}$, $f(B_r(x^0))$, f - биективна. Проверим, что он содержится в каком-то $B_{r'}(f(x^0))$.

Утв. 3. В условиях теоремы для любого r существует r', $f(\overline{B_r(x^0)}) \supset \overline{B_{r'}(f(x^0))}$. Для любого $y \in B_{r'}(f(x^0))$ $f(x) = y$, хотим найти x. $F(x) = ||f(x)-y||^2$, гладкая в окрестности x^0. Минимум этой функции где-то достигается (непрерывная на компакте). $F(x^0) = ||f(x^0) - y||^2 \leq r'^2$, тогда минимум не может достигаться на границе, так как иначе $||x-x^0|| = r$. Тогда с одной стороны $||f(x)-y||^2 = ||f(x)-f(x^0)+f(x^0)-y||^2$. f билипшицева, поэтому разность первых двух можно оценить чнизу $\varepsilon||x-x^0||$, а разность последних двух можно ограничить сверху r'^2, то есть, вся эта вещь как минимум r'^2.

Пусть w - минимум $F(x)$ на $B_r(x^0)$, тогда $\operatorname{grad} F(w) = 0$, $= ||f(x)-y||^2 = \sum_{k=1}^{n}(f_k(x) - y_k)^2$,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_l}\right|_w = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right|_w 2(f_k(x)-y_k),$$

И теперь, если подставить в обе стороны w, то получатся нули. Посмотрим на правую часть как на СЛУ. Дроби фиксированы - числа из матрицы Якоби (изнач. - A_w), $f_k(x)$ - какие-то неизвестные. Матрица невырождена, так как нвырожденность не меняется от приведённого шевеления. Значит, решение этой системы единственно, но одно из решений мы уже знаем: $f_k(w) = y_k$. Поэтому, если мы подставим точку минимума функции F, то окажется, что эта точка переводится как раз в точку y, и тогда $F = 0$, а мы в точности нашли прообраз.

Мы уже установили, что f - билипшицева, что f в какой-то окрестность $f(V_{x_0})$ содержит V_{g_0}, а также, что обратное отображение g по крайней мере существует в какой-то окрестности.

Осталось лишь доказать один небольшой оставшийся момент. Пусть f - гладкая в x^0, тогда мы можем расписать $f(x) = f(x^0) + A(x-x^0) + R(x)$, где $|R(x)| = o(|x-x^0|)$ (модули над векторами с данного момента - естественно, нормы). Воспользуемся тем, что любая точка y, достаточно близкая к y^0, то, по доказанному ране, у неё есть прообраз. Напишем тогда ввиду прообразов: $y = y^0 + A(g(y) - g(y^0)) + R(g(y))$. Она выполнена для любого y в некоторой окрестности y^0.

Нам хотелось бы выразить $g(y^0)$. Рассмотрим $A(g(y) - g(y^0)) = y - y^0 - R(g(y))$. Это равенство двух векторов $\mathbb{R}^n$, матрица A невырожденная, потому у неё есть обратная, применим это знание: $g(y)-g(y^0) = A^{-1}(y-y^0) - A^{-1}(R(g(y)))$. Надо оценить остаток, так как всё остальное уже хорошее. Из того, что мы уже знаем, $\forall \varepsilon > 0, V_{x^0}^{\varepsilon} |R(x)| \leq \varepsilon|x-x^0|$ (кажется, в некоторой окрестности, поэтому размер окрестности должен быть другой переменной). Тогда $|R(g(y| \leq \varepsilon|g(y)-g(y^0)|$. Мы знаем, что f билипшицева, как и обратная, поэтому продолжаем неравенство $\leq \varepsilon C|y-y^0|$. Но у нас изначально есть $|A^{-1}(R(g(y)))| \leq ||A^{-1}||\varepsilon C|y-y^0|$. И теперь, собирая всё назад, получаем, что $g(y) = g(y^0) + A^{-1}(y-y^0) + o(|y-y^0|)$, это нам и нужно было: дифференцируемость в y^0 и явный дифференциал.

□

Билет 12. Матрица Якоби. Градиент.

Определение 13. *Градиент* это вектор, состоящий из частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$$

Примечание 14. Свойства

- Градиент указывает направление вектора, вдоль которого функция имеет наибольшее возрастание
- $df = \sum\limits_k \frac{\delta f}{\delta x_k} dx_k = \langle \text{grad } f, dx\rangle$

Определение 14. *Матрица Якоби* - матрица состоящая из всех частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, ..., f_m)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_m}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Примечание 15. Свойства

- Строчки матрицы Якоби - градиенты соответствующих функций
- Если все f_k непрерывно дифференцируемы в окрестности a, то матрица Якоби - производная f в a, т.е. $f(x) = f(a) + J(a)(x - a) + o(|x - a|)$
- (Свойство функториальности) Если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемы, то $J_{\psi\circ\varphi}(x) = J_\psi(\varphi(x))J_\varphi(x)$

Билет 13. Дифференцирование обратного отображения.

Теорема 3. *Пусть f - отображение из $X \subset \mathbb{R}^m$ в $Y \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемое в $x_0 \in X$ (его дифференциал там равен A), а g - отображение из Y в $Z \subset \mathbb{R}^k$, дифференцируемое в $y_0 = f(x_0) \in Y$ (его дифференциал там равен B), то композиция $g \circ f : X \to Z$ этих отображений будет дифференцируема в x_0, и её дифференциал там равен $B \circ A$.*

Доказательство. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(||x - x_0||)$ при $x \to x_0$ (отсюда следует, что f непрерывна в x_0). Также известно, что $g(y) = g(y_0) + B(y - y_0) + o(||y - y_0||)$. Подставляя первое равенство во второе, получаем, что $g(f(x)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + A(x - x_0) + o(||x - x_0||)) = g(f(x_0)) + B(A(x - x_0) + o(||x - x_0||)) + o(A(x - x_0) + o(||x - x_0||)) = g(f(x_0)) + BA(x - x_0) + o(||x - x_0||)$. □

Примечание 16. Мы воспользовались утверждением, что $A(h) = O_A(h)$ для вектора h и линейного оператора A. Его несложно доказать, используя неравенство треугольника для нормы. Действительно, пусть $h = h_1\vec{e_1} + ... + h_n\vec{e_n}$. Тогда $||A(h)|| = ||\sum_{i=1}^n h_i A(\vec{e_i})|| \leq \sum_{i=1}^n ||h_i A(\vec{e_i})|| \leq (\sum_{i=1}^n ||A(\vec{e_i})||)||h|| = \text{const}_A\, ||h||$.

Билет 14. Теорема о равенстве смешанных производных.

Определение 15. *Смешанная производная* порядка k определяется индуктивно:
База $k = 1$: обыкновенная частная производная $\frac{\delta f}{\delta x_{i_1}}$
Переход $k \to k+1$: возьмём частную производную по i_{k+1}-ой координате в точке A от частной производной порядка k, т.е. от $\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_k} \delta x_{i_{k-1}} \dots \delta x_{i_1}}$ (должна быть определена в некоторой окрестности A), если соответствующий предел существует, то его и назовём смешанной частной производной порядка $k+1$, обозначим так: $\frac{\delta^{k+1} f}{\delta x_{i_{k+1}} \delta x_{i_k} \dots \delta x_{i_1}}$

Теорема 4. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (G открытое), $f = f(x,y)$, смешанные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ непрерывны в точке $(x_0,y_0) \in G$ и определены в её окрестности. Тогда $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0,y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0,y_0)$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Лагранжа и вспомогательными функциями. [я вырезал пикчу нахуй, надо поправить ситуацию]

Примечание 17. Далее используются обозначения $f''_{xy} := \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$, $f''_{yx} := \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2)$$
$$F_1(x) = f(x,y_0 + \varepsilon_2) - f(x,y_0) \Rightarrow \varphi = F_1(x_0 + \varepsilon_1) - F_1(x_0) = \varepsilon_1 F_1'(\xi_1)$$
$$F_1'(\xi_1) = f_x'(\xi_1, y_0 + \varepsilon_2) - f_x'(\xi_1,y_0) = \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \varphi = \varepsilon_1\varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$
$$F_2(y) = f(x_0 + \varepsilon_1,y) - f(x_0,y) \Rightarrow \varphi = F_2(y_0 + \varepsilon_2) - F_2(y_0) = \varepsilon_2 F_2'(\eta_2)$$
$$F_2'(\eta_2) = f_y'(x_0 + \varepsilon_1,\eta_2) - f_y'(x_0,\eta_2) = \varepsilon_1 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow \varphi = \varepsilon_1\varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\varphi = \varepsilon_1\varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\xi_1,\eta_1 \in [x_0, x_0 + \varepsilon_1], \xi_2,\eta_2 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$$

При $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to 0 : \frac{\varphi}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \to f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ □

Следствие 1. Если частные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$ непрерывны в точке и определены в её окрестности, то и равны в ней.

Билет 15. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Сведём всё к одномерному случаю, т.к. одномерную формулу Тейлора мы знаем, $x \in \mathbb{R}^n$ - центр разложения в ряд Тейлора, $y \in \mathbb{R}^n, h = y - x$.
$[x,y]$ - отрезок, его можно параметризовать так: $x + t(y - x) = x + th, t \in [0,1]$.
$\varphi(t) = f(x + th)$, эту функцию мы можем дифференцировать, т.к. это композиция дифференцируемых функций.
$\varphi'(t) = \langle \text{grad } f, h \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(x + th)h_k$
...
$\varphi^{(s)}(t) = \sum\limits_{1 \le k_1, \dots, k_s \le n} \frac{\delta^s f}{\delta x_{k_1} \dots \delta x_{k_s}}(x + th)h_{k_1} \dots h_{k_s} = \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s f \right)(x + th)$
(последнее равенство следует воспринимать как удобное обозначение)

$$\varphi(\tau) = \sum_{s=0}^{m} \frac{\varphi^s(0)}{s!}\tau^s + \underbrace{\frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\tau^{(m+1)}}_{R_m(\tau,\varphi)}, \quad \xi \in [0, \tau]$$

$$R_m(\tau,\varphi)=\int_0^\tau \frac{\varphi^{(m+1)}(l)}{m!}(\tau^m-l)^m dl=\int_0^1 \frac{\varphi^{(m+1)}(l\tau)}{m!}\tau^{m+1}(1-l)^m dl$$

Подставим $\tau=1, t=0$, получим

Утверждение 10. *Формула Тейлора* с остатком в форме Пеано, $h=y-x$

$$f(y)=\sum_{s=0}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{\delta x_k}h_k\right)^s\frac{f}{s!}\right)(x)+o(|h|^m)$$

Билет 16. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Утверждение 11. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме (см. прошлый билет), $h=y-x$

$$f(y)=\sum_{s=0}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{\delta x_k}h_k\right)^s\frac{f}{s!}\right)(x)+\int_0^1\frac{(1-l)^m}{m!}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{\delta x_k}h_k\right)^{m+1}f\right)(x+lh)dl$$

Билет 17. Необходимое условие экстремума функции многих переменных.

Теорема 5. *(Необходимое условие экстремума) $f: G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (G открытое) гладкая, x^0 - точка локального минимума или максимума. Тогда grad $f\big|_{x^0}=0$*

Доказательство. grad $f=\left(\frac{\delta f}{\delta x_1},\frac{\delta f}{\delta x_2},...,\frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$

Пусть $\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0}\neq 0$, тогда $f(x_1^0,...,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,...,x_n^0)-f(x_1^0,...,x_n^0)=$
$\underbrace{\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0}}_{\neq 0}(x_k-x_k^0)+o(|x_k-x_k^0|)\Rightarrow\rightarrow\leftarrow$ (свелось к одномерному случаю)

Напоминание 4. Одномерный случай, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g(x)=g(x^0)+g'(x^0)(x-x^0)+o(|x-x^0|)$

- $g'(x^0)>0$, тогда при достаточно малом $|x-x^0|$:
  $0<g'(x^0)-\varepsilon<\frac{g(x)-g(x^0)}{x-x^0}<g'(x^0)+\varepsilon$, в таких окрестностях $g(x)>g(x^0)$ при $x>x^0$, $g(x)<g(x^0)$ при $x<x^0$, значит x^0 - не экстремум.
- $g'(x^0)<0$, тогда при достаточно малом $|x-x^0|$:
  $g'(x^0)-\varepsilon<\frac{g(x)-g(x^0)}{x-x^0}<g'(x^0)+\varepsilon<0$, в таких окрестностях $g(x)<g(x^0)$ при $x>x^0$, $g(x)>g(x^0)$ при $x<x^0$, значит x^0 - не экстремум.

□

Билет 18. Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Определение 16. *Квадратичная форма* $Q(x), x=(x_1,...,x_n)$ - это выражение вида $\sum\limits_{1\leq k,l\leq n}a_{k,l}x_kx_l$, где $a_{k,l}$ - скаляр.

Определение 17. (*Знак квадратичной формы*) Квадратичная форма $Q(x), x \in \mathbb{R}^n, a_{k,l} \in \mathbb{R}$ положительно (отрицательно) определена, если для всех ненулевых $x : Q(x) > 0(Q(x) < 0)$ и знакопеременна, если может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Примечание 18. (Квадр. форма на сфере) Легко видеть, что $Q(cx) = c^2Q(x)$, где c - скаляр, поэтому $Q(x)$ имеет тот же знак, что и $Q(cx)$, т.е. вдоль фиксированного направления кв. форма имеет фиксированный знак, а значит достаточно рассматривать x на сфере, чтобы определить знак кв.формы. Сфера - компакт, $Q(x)$ - непрерывная функция, а потому $Q(x)$ достигает минимума и максимума на сфере. Тогда можно составить равносильное определение знака, квадратичная форма называется:

- положительно-определенной, если $\min\limits_{||x||=1} Q(x) > 0$
- отрицательно-определенной, если $\max\limits_{||x||=1} Q(x) < 0$
- знакопеременной, если $\min\limits_{||x||=1} Q(x) < 0 < \max\limits_{||x||=1} Q(x)$

Теорема 6. (*Достаточное условие экстремума*) *Пусть у $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x^0 нулевой градиент и определены все смешанные производные второго порядка. Тогда если квадратичная форма $Q(h) = \sum\limits_{1\le k,l\le n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0)h_k h_l$*

- *положительно определена, значит x^0 точка локального минимума.*
- *отрицательно определена, значит x^0 точка локального максимума.*

Доказательство. Докажем для полож. квадр. формы, формула Тейлора

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0)(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + o(||x - x_0||^2)$$

Обозначим $a_{k,l} = \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0)$
При $x \ne x^0 : \sum\limits_{1<k,l\le n} a_{k,l}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) = \langle A(x - x^0), (x - x^0)\rangle = Q(x - x^0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$ $Q(x - x^0) \ge \varepsilon||x - x^0||^2$

Пояснение: $Q(x)$ - положительная квадратичная форма, а потому $\varepsilon = \min\limits_{||x||=1} Q(x) > 0$, тогда $Q(x) = Q(||x||e) = Q(e)||x||^2 \ge \varepsilon||x||^2$, т.к. $||e|| = 1$.

Поделим равенство

$$f(x) - f(x^0) = Q(x - x^0) + o(||x - x_0||^2)$$

на $||x-x^0||^2$, тогда, если $||x-x^0||$ достаточно мало, то правая часть строго положительна. □

Примечание 19. Квадратичную форму можно привести к симметричному виду $\sum a_{k,l}h_k h_l$, $a_{k,l} = a_{l,k}$, значит её можно привести и к диагольному виду $Q(h) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k^2$

- $Q(h)$ положительна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k > 0$ (x^0 т. мин.)
- $Q(h)$ отрицательна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k < 0$ (x^0 т. макс.)
- $Q(h)$ знакопеременна $\Leftrightarrow \exists k,l : \lambda_k < 0 < \lambda_l$ (x^0 не т. экстр.)

- иначе требуется дополнительное исследование

Примечание 20. Почему, если кв. форма знакопеременна, то x^0 не экстремум? Зафиксируем y_1, y_2 т.ч. $Q(y_1) < 0 < Q(y_2)$ и $||y_1|| = ||y_2|| = 1$. Тогда в равенство

$$f(x) - f(x^0) = Q(x - x^0) + o(||x - x_0||^2)$$

можно подставлять точки вида $x = cy_1 + x^0$ ($\Rightarrow Q(x - x^0) = c^2 Q(y_1)$), в этом случае при достаточно малом $|c| = ||x - x^0||$ правая часть строго отрицательна; если же подставлять $x = cy_2 + x^0$ - строго положительна.

Утверждение 12. *Критерий Сильвестра* для симметричной квадратичной формы:

- для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны.
- Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.

Билет 19. Касательные вектора. Касательная плоскость.

Утверждение 13. Есть уравнение $z = f(x,y)$ задающее плоскость и у f есть частные производные в (x_0, y_0). Тогда $z = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}\big|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}\big|_{(x_0,y_0)}(y - y_0)$ - уравнение касательной плоскости. $(\frac{\delta f}{\delta x}\big|_{(x_0,y_0)}, \frac{\delta f}{\delta y}\big|_{(x_0,y_0)}, -1)$ - вектор нормали к кас.плоскости.

Билет 20. Теорема о неявной функции для двух переменных.

Это про случай $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Теорема 7. *(О неявной функции). $F : G \to \mathbb{R}(G \subset \mathbb{R}^2 -$ открытое)*

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $F \in C^1(G)$
- $F'y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists I_x, I_y : \quad x_0 \in I_x, y_0 \in I_y, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^2$
и $f : I_x \times I_y \in \mathbb{R}$ такая, что

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$f \in C^1, f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

Примечание 21. (неформальное рассуждение, почему такая формула) Предположим, что f существует и дифференцируема, $F(x,f(x)) = 0$ на всей области определения f, продифференцируем левую и правую часть по правилу композиции $F'_x(x,f(x)) + F'_y(x,f(x))f'(x) = 0$.

Доказательство. Существование: пусть функция $g_x(y) = F(x,y)$, будем считать, что в малой окрестности $V_{(x_0,y_0)} : \ F'_y > 0$, тогда $g(y)$ - возрастающая. Тогда $\forall x \in V \exists! y : \ F(x,y) = 0$.
Непрерывность: рассмотрите прямоугольник с разрезами (т.е. $g_x(y)$). Так как решения уравнения $F(x,y) = 0$ образуют замкнутое множество, то из того, что $x \to a$ и $f(x) \not\to f(a)$, следует, что есть второй корень на линии $x = a$, а у нас корни единственные.
Гладкость: $F(x+h,f(x+h)) - F(x,f(x)) = F(x+h,f(x)+(f(x+h)-f(x))) - F(x,f(x)) = (F)$, при $h \to 0$ можно применять формулу Тейлора для F, получим $(F) = h(F'_x(x,f(x)) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}F'_y(x,f(x))) + o(|h|)$ ∎

Билет 21. Теорема о неявной функции для произвольного числа переменных.

Это про случай $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Билет 22. Теорема о неявной функции для систем уравнений. Примеры.

Это про случай $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
Теорема 8. $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
$F : G \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$

- $F \in C^1(G)$
- $F(x^0,y^0) = 0$
- $F'_y(x^0,y^0)$ *обратима (матрица $n \times n$ из частных производных)*

тогда в некоторой окрестности $V_{(x^0,y^0)} \subset G$:

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),\ \ f : V_{(x^0,y^0)} \to \mathbb{R}^n$$

$$f'(x) = -(F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))$$

Доказательство. Докажем индукцией по n.
База: $n = 1$ $\forall m$ доказано ранее.
Переход: $F = (F_1, F_2, ..., F_n), F_k : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$.
Имеем n уравнений вида $F_k = 0$.
Хотим: $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_m)$, *т.е. выразить каждый игрик через иксы.*
Матрица невырождена, будем считать, что $\frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0$.
Тогда $y_n = f^*(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1})$ по предположению индукции.
$\varphi_k(x,y_1, ..., y_{n-1}) = F_k(x,y_1, ..., y_{n-1}, f^*), 1 \le k \le n-1$ ($\varphi_n = 0$ из-за того, как выбрали f^*).
$\frac{\delta \varphi_k}{\delta y_l} = \frac{\delta F_k}{\delta y_l} + \frac{\delta F_k}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_l}$
Вспомним как выглядит невырожденная матрица $F'_y(x^0, y^0)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

Добавим к первым $n-1$ столбцам последний, домноженный на скаляр, от этого матрица не перестанет быть невырожденной.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_1} & \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta\varphi_1}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta\varphi_2}{\delta y_1} & \frac{\delta\varphi_2}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta\varphi_2}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta y_1} & \frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta\varphi_n}{\delta y_1} & \frac{\delta\varphi_n}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta\varphi_n}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ & & & & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ & & \varphi'_y & & \vdots \\ & & & & \frac{\delta F_{n-2}}{\delta y_n} \\ & & & & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \quad 0 & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

откуда $det(\varphi'_y)\frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0 \Rightarrow det(\varphi'_y) \neq 0$, а значит для системы $\{\varphi_k\}_{k \leq n-1} = 0$ применимо предположение индукции, т.е. $y_k = f_k(x)$ при $k \leq n-1$. Также получаем $y_n = f^*(x, f_1(x), ..., f_{n-1}(x)) = f_n(x)$, что мы и хотели получить. Итоговая функция: $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Гладкость и искомая производная следуют из того, что мы умеем брать производную по композиции. $\square$

Билет 23. Полярные и сферические координаты. Параметризации поверхностей.

Определение 18. *Полярные координаты* - отображение $f: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\rho \geq 0\}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$, задаваемое формулами

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi.$$

Определение 19. *Сферические координаты* - как полярные, только в $\mathbb{R}^3$. Задаются же соответственные отношения:

$$z = \rho\cos\psi$$
$$y = \rho\sin\psi\sin\phi$$
$$x = \rho\sin\psi\cos\phi.$$

Билет 24. Задача условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума.

Утверждение 14 (*Задача условного экстремума*). Дана гладкая функция $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и и соотношения между между переменными - уравнения(условия) с гладкими функциями вида ($m \leq n$):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

требуется найти условные экстремумы f.

Примечание 22. В некоторых случаях можно $n - m$ переменных выбирать произвольно, остальные однозначно восстановятся.

Примечание 23. m соотношений задают какую-то поверхность, обозначим её S. *Все точки из S можно подставлять в f, можно вообще считать, что $f_S : S \to \mathbb{R}$ и мы ищем экстремумы f_S*

Зафиксируем точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in S$.
Хотим выяснить является ли она экстремальной.

Уравнение $f(x) = f(x^0)$ задаёт поверхность уровня, обозначим её L.
А вообще - это неважно.

Попробуем свести всё к одномерному случаю, для этого рассмотрим всевозможные гладкие кривые на S, проходящие через x^0, т.е. гладкие функции вида $x(t), t \in (-a, a), a \in \mathbb{R}_+, x(t) \in S$, $x(0) = x^0$.

Тогда вдоль такой кривой можно рассмотреть $h(t) : t \mapsto f(x(t))$
$(h : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, если т. x^0 условный экстремум f, то $t = 0$ экстр. для h
Пояснение: иначе вдоль этой кривой из любой окрестности т. x^0 можно пойти по S так, чтобы f возрастала; и так, чтобы убывала; пойти = сдвинуть значение t (t - это просто число); оставаясь на S мы соблюдаем все m условий, так что всё корректно.
Тогда необходимо, чтобы $h'(0) = 0$. По правилу композиции: $h'(0) = (f(x(t)))'\big|_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(x(0)) \frac{\delta x_k}{\delta t}(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(x^0) \frac{\delta x_k}{\delta t}(0) = \langle \text{grad } f(x(0)), x'(0) \rangle = 0$.

Напоминание 5 (geometry reference). Два вектора называются перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю.

Что это значит? Если говорить о каком-то геометрическом смысле, то мы получили следующее утверждение: скалярное произведение нуль, значит градиент f в т. x^0 перпендикулярен касательному вектору S в т. x^0 (почему $x'(0)$ это касательный вектор? Да потому что он сам по себе градиент, т.е. состоит из производных. В данном случае $x(t)$ это кривая, так что и касательный вектор, подразумевается, соответствующий этой кривой)

Рассматривая всевозможные кривые $x(t)$ можно получать касательный вектор $x'(0)$ по любому направлению в касательной плоскости. *Пояснение-цитата от Белова:* ну и понятно, что если мы посмотрим все гладкие кривые на поверхности S, проходящие через точку x^0, то в качестве касательных векторов мы получим любой вектор из касательной плоскости.

Но тогда мы получаем вывод, что градиент f в т. x^0 перпендикулярен любому вектору из касательной плоскости, т.е. перпендикулярен всей касательной плоскости к S в т. x^0 *(это тавтология по сути)*
Равносильное утверждение: у S и L совпадают кас. плоскости в т. x^0; равносильность следует из того, что градиент всегда перпендикулярен касательной плоскости

Градиенты f_k-ых тоже перпендикулярны касательной плоскости к S.

$\Rightarrow f \in Lin(f_k)$, т.е. $f = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$

Билет 25. Функции Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума. Примеры.

Определение 20. Пусть есть m условий вида $F_k(x_1, ..., x_n) = 0$ и мы хотим найти условный экстремум $F(x_1, ..., x_n)$. Рассмотрим *функцию Лагранжа* $L(x_1, ...x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = F - \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k F_k$, тогда все частные производные L должны быть нулевыми.

Билет 26. Теорема о перестановке пределов. Общий вид теоремы Стокса-Зайделя.

Теорема 9. *Пусть X, Y - хаусдорфовы топологические, а Z - полное метрическое пространства. Также есть множества $A \subset X$, $B \subset Y$, имеющие предельные точки $a \notin A$ и $b \notin B$ соответственно. $F : X \times Y \to Z$ - функция. Предположим, выполнены следующие условия:*

1. *Для любого y существует равномерный по y предел $\phi(y) = \lim_{x \to a} F(x, y)$*
2. *Для любого x существует предел $\psi(x) = \lim_{y \to b} F(x, y)$*

Тогда существуют и равны пределы $\lim_{y \to b} \phi(y)$, $\lim_{x \to a} \psi(x)$ и $\lim_{x \to a, y \to b} F(x, y)$

Доказательство.
Лемма 2. *Пусть X - хаусдорфово топологическое , а Z - полное метрическое (с метрикой ρ) пространства, есть множество $C \subset X$, имеющее предельную точку $c \notin C$. Пусть для. любого $\epsilon > 0$ существует окрестность V_ϵ точки c такая, что для любых $w_1, w_2 \in V_\epsilon$ $\rho(f(w_1), f(w_2)) < \epsilon$. Тогда f имеет предел в c.*

Доказательство. Положим $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ и рассмотрим соответствующую ему окрестность $V_{\frac{1}{n}}$. Можем считать, что $V_{\frac{1}{n+1}} \subset V_{\frac{1}{n}}$. В каждой окрестности выберем точку $w_n \in V_{\frac{!}{n}}$. Легко видеть, что $\{f(w_n)\}$ фундаментальная последовательность, имеющая предел z_0 (так как Z полно). Тогда $\rho(f(x), z_0) \leq \rho(f(x), f(w_n)) + \rho(f(w_n), z_0) < \frac{2}{n}$ - мы воспользовались тем, что $\rho(f(x), f(w_n)) < \frac{1}{n}$, если x достаточно близко к w_n (например, лежит в $V_{\frac{1}{n}}$). □

Перейдём к доказательству теоремы. Условие 1) теоремы равносильно следующему: $\forall \epsilon > 0 \exists U_a \ni a : \forall x \in U_a \forall y \in B \rho(F(x, y), \phi(y)) < \epsilon$. Зафиксируем сначала произвольное $\epsilon > 0$ (ему соответствует U_a), а затем $x_0 \in U_a \cap A$ (это множество непусто, так как a - предельная). Тогда $\rho(F(x_0, y), \phi(y)) < \epsilon$ при всех $y \in B$(*). Кроме того, существует окрестность $V_b \ni b$ такая, что $\rho(F(x_0, y), \psi(x_0)) < \epsilon$ для любого $y \in V_b \cap B$ (здесь V_b) зависит от x_0, так как равномерности нет) (**).
Выберем теперь произвольные $y_1, y_2 \in V_b \cap B$. Тогда $\rho(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq \rho(\phi(y_1), F(x_0, y_1)) + \rho(F(x_0, y_1), \psi(x_0)) + \rho(\psi(x_0), F(x_0, y_2)) + \rho(F(x_0, y_2), \phi(y_2)) < 4\epsilon$ (мы воспользовались неравенствами (*)и (**)). По лемме, существует $\lim_{y \to b} \phi(y) = P$
$\rho(\psi(x_0), P) \leq \rho(\psi(x_0), F(x_0, y)) + \rho(F(x_0, y), \phi(y)) + \rho(\phi(y), P) < 3\epsilon$, если $x_0 \in U_a \cap A$, $y \in V_b \cap B$. Это и значит, что существует $\lim_{x \to a} \psi(x) = P = \lim_{y \to b} \phi(y)$.
Осталось разобраться с пределом по совокупности переменных. $\rho(F(x, y), P) \leq \rho(F(x, y), \phi(y)) + \rho(\phi(y), P) < 2\epsilon$. Когда именно? Сначала выбираем такую окрестность $V \ni b$, что $\rho(\phi(y), P) < \epsilon$, тогда окрестность $U \ni a$ такая, что $\rho(F(x, y), \phi(y))\epsilon$ для всех $y \in V$ найдётся по равномерности предела $\phi(y) = \lim_{x \to a} F(x, y)$. □

Теорема 10. *(Теорема Стокса-Зейделя). Пусть X, Y - хаусдорфовы топологичесике, а Z - полное метрическое пространства. $A \subset X$, $B \subset Y$ - множества, $b \in B$ - предельная точка. $F : X \times Y \to Z$ - функция, и $x_0 \in X$. Предположим, выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $y \in B$ функция $F(x, y)$ непрерывна в точке x_0.*
2. *существует равномерный по $x \in A$ предел $\psi(x) = \lim_{y \to b} F(x, y)$*

Тогда $\psi(x)$ непрерывна в x_0.

Доказательство. Просто применить предыдущую теорему □

Билет 27. Голоморфные функции. Примеры. Общий вид дифференциала голоморфной функции.

Функция $f : D \to C$ - *голоморфна* в области(открытое связное множество) D, если она имеет комплексную производную в каждой точке $z \in D$. Говорт, что функция голоморфна в точке z_0, если она голоморфна в некоторой окрестности этой точки.

Примеры:

1. $f = \text{const}$; $f^{'}(z) = 0$
2. $f(z) = az, a \neq 0$; Если $a = re^{i\phi}$, то f поворачивает плоскость вокруг 0 на угол ϕ и растягивает плоскость в r раз.
3. $f(z) = z^n, f$ увеличивает угол между лучами, выходящими из 0 в n раз.

Билет 28. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.

Билет 29. Голоморфность суммы степенного ряда.

Утверждение 15. Пусть ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в точке z_1. Тогда этот ряд сходится абсолютно и равномерно в круге любого радиуса, строго меньшего, чем $|z_1 - z_0|$.

Доказательство. Пусть $r < |z_1 - z_0|$ - радиус того самого круга. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1 - z_0)^k$ сходится, $\lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n = 0$. В частности, $|a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < C$ при всех n. Значит, "хвост"этого ряда - $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k < C \sum_{k=N}^{\infty} \Big(\underset{\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}}{= q} \Big)^k \leq C \sum_{k=N}^{\infty} r^k$ - оценивается числом, не зависящим от z. □

Теорема 11. *Пусть ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ (*) имеет радиус сходимости R. Тогда функция f дифференцируема в любой точке t, в которой $|t - z_0| < R$, причём её производная равна $f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(t - z_0)^{k-1}$ (**).*

Доказательство. Хотим доказать дифференцируемость в какой-то точке t. Для начала заметим, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, и радиусы сходимости R и R' соответственно рядов (*) и (**) равны в силу теоремы Коши-Адамара: $\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{nc_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{R}$. В частности, ряд (**) равномерно сходится в любом круге радиуса меньше R, в том числе и в некоторой окрестности точки t. Определим $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(z - z_0)^k$, $f_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} kc_k(z - z_0)^{k-1}$. Тогда $\frac{f(z)-f(t)}{z-t} - f'(t) = (\frac{f_n(z)-f_n(t)}{z-t} - f_n'(t)) + (f_n'(t) - f'(t)) + \frac{(f(z)-f_n(z))-(f(t)-f_n(t))}{z-t}$. Первое слагаемое "маленькое когда z достаточно близко к t, второе - когда n достаточно велико. Осталось разобраться с третьим. $\frac{(f(z)-f_n(z))-(f(t)-f_n(t))}{z-t} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k\big(\frac{z^k-t^k}{z-t}\big) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k\big(z^{k-1} + z^{k-2}t + ... + zt^{k-2} + t^{k-1}\big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k|t - z_0|^{k-1}$ - оно тоже мало при достаточно большом n. Значит, выбирая подходящие n и окрестность точки t, можно добиться того, чтобы $|\frac{f(z)-f(t)}{z-t} - f'(t)|$ было маленьким, т.е. f будет дифференцируема в точке t. □

Билет 30. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Лемма об аппроксимации |x|.

Примечание 24. $d(f,g) = \sup |f - g|$

Утверждение 16. (не надо рассказывать в билетах, но могут спросить как доп. вопрос) Пусть K - компактное множество. $C(K)$ - множество непрерывных функций из K в $\mathbb{R}$. Тогда $C(K)$ - полное метрическое пространство с метрикой $d(f,g) = \sup |f - g| = \max |f - g|$.

Доказательство. То, что это действительно метрическое пространство, понять легко. Докажем его полноту. Выберем любое $\epsilon > 0$. Так как $\{f_i\}$ - фундаментальная последовательность, то $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| = d(f_n, f_m) < \epsilon$. В частности, для любого $x_0 \in K$ последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, т.е. имеет предел $f(x_0)$. Более того, если $\forall n, m \geq N = N(\epsilon)|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$, то и $|f(x_0) - f_N(x_0| \leq \epsilon$. Значит, стремление $f_n(x_0) \to f(x_0)$ равномерно по x_0.
Хотим установить непрерывность f, из этого будет следовать полнота. $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon$, если мы выберем какое-нибудь достаточно большое n, чтобы для любого x $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ (по равномерности стремления f_n) и возьмём x к f достаточно близко к x_0, чтобы было выполнено $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ - так можно сделать по непрерывности f_n. □

Определение 21. $\mathcal{A}$ - *Алгебра в пространстве непрерывных функций*, если $\mathcal{A} \subset C(K)$ и $\mathcal{A}$ - линейное векторное пространство такое, что $f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow fg \in \mathcal{A}$.

Определение 22. *Выделение/разделение точек*. $\mathcal{A}$ *выделяет* точки, если $\forall x \in K \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$. $\mathcal{A}$ *разделяет* точки, если $\forall x_1, x_2 \in K \exists f \in \mathcal{A} : \ f(x_1) \neq f(x_2)$

Теорема 12. *(Теорема Стоуна-Вейерштрасса). $\mathcal{A}$ - алгебра, $\mathcal{A} \subset C(K)$, K - компактно и хаусдорфово, $\mathcal{A}$ выделяет и разделяет точки. Тогда $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.*

Доказательство.
Лемма 3. *Для любого $\epsilon > 0$ существует полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $\sup_{-1 \leq x \leq 1} ||x| - p(x)| < \epsilon$*

Доказательство. $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$, поэтому нам достаточно научиться приближать полиномами функцию $\sqrt{1 - x}$, $x \in [0, 1]$.
Зафиксируем $t \in [0, 1)$. Тогда функция $\sqrt{1 - tx}$ приближается полиномами Тейлора с центром в нуле на отрезке $[0, 1]$: $\sqrt{1 - tx} = P_{n,t}(x) + R_{n,t}(x)$, где остаток $R_{n,t}$ стремится к нулю равномерно по x.
Для любого $\epsilon > 0$ найдётся t, для которого выполнено неравенство $\sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{1 - tx} - \sqrt{1 - x}| < \frac{\epsilon}{2}$. Зафиксируем это t, и подберём полином p такой, что $\sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{1 - tx} - p(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, откуда сразу получаем, что $\sup_{x \in [0,1]} |p(x) - \sqrt{1 - x}| < \epsilon$. Осталось лишь подставить в данный полином $1 - x^2$. □

Примечание 25.
- Все полиномы p не содержат мономов нечётной степени
- Можно считать, что для всех приближающих полиномов p выполнено равенство $p(0) = 0$.

Доказательство.
- Очевидно следует из определения.
- Пусть p - полином, приближающий с точностью ϵ, т.е. $\sup_{x \in [-1,1]} ||x| - p(x)| < \epsilon$, тогда, подставляя $x = 0$, получаем, что $|p(0)|\epsilon$. Тогда из неравенства треугольнка получаем, что $p'(x) = p(x) - p(0)$ - полином, приближающий с точностью 2ϵ.

□

□

Билет 31. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Завершение доказательства.

Лемма 4. 1. *Если $f \in \overline{\mathcal{A}}$ (т.е. приближается элементами алгебры), то и $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$*

2. *Если f_1, f_2 приближаются, то $\max(f_1(x), f_2(x))$ и $\min(f_1(x), f_2(x))$ тоже приближаются.*

Доказательство. 1. Будем считать, что $|f| \leq 1$ (иначе просто разделим на $\max_{x \in K} |f(x)|$, который существует в силу компактности K). Пусть p_ϵ - полином (без свободного члена), приближающий $|x|$ с точностью ϵ. Тогда $p_\epsilon \circ f \in \mathcal{A}$ (так как мы можем складывать элементы алгебры и умножать их друг на друга и на константу из $\mathbb{R}$), и $|p_\epsilon(f(x)) - |f(x)|| < \epsilon$ для любого $x \in K$.

2. $\max(f_1, f_2) = \frac{f_1+f_2}{2} + \frac{|f_1-f_2|}{2}$, аналогично с минимумом. А то, что сумма приближаемых приближаема и приближаемая, умноженная на константу, приближаемы, и так очевидно.

□

Лемма 5. *Пусть даны различные точки $x_1, x_2 \in K$, а также какие-то вещественные числа u_1, u_2. Тогда существует функция $f \in \mathcal{A}$, для которой $f(x_1) = u_1$, $f(x_2) = u_2$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ разделяет точки: найдётся функция f_1 такая, что $f_1(x_1) \neq f_2(x_1)$. Рассмотрим функции f_1 и f_1^2 и попробуем найти вещественные числа a, b, для которых верно следующее: $\begin{cases} (af_1 + bf_1^2)(x_1) & = & u_1 \\ (af_1 + bf_1^2)(x_2) & = & u_2 \end{cases}$ Матрица этой СЛУ имеет определитель $f_1(x_1)f_1^2(x_2) - f_1^2(x_1)f_1^2(x_2) = f_1(x_1)f_1(x_2)(f_1(x_1) - f_1(x_2))$. Последня скобка не равна нулю в силу выбора функции f. Если ни $f_1(x_1)$, ни $f_1(x_2)$ не равны нулю, то СЛУ невырождена и имеет решение. Разберём другой случай. Тогда, не умаляя общности, $f_1(x_2) \neq 0$, и существует $f_2 \in \mathcal{A}$ такая, что $f_2(x_1) \neq 0$. Заменим f_1 на $f_1 + \tau f_2$ и рассмотрим аналогичную систему и её определитель. Если τ достаточно мало, все три сомножителя будут ненулевыми, а в этом случае решение существует. □

Лемма 6. *Пусть $f \in C(K)$, $\epsilon > 0$ и $x_0 \in K$, тогда найдётся функция $g_{x_0} \in \overline{\mathcal{A}}$ такая, что $g(x_0) = f(x_0)$ и $g(x) \leq f(x) + \epsilon$.*

Доказательство. Для любой точки $\tilde{x} \in K$ найдётся функция $g_{\tilde{x}}$, для которой $g_{\tilde{x}}(x_0) = f(x_0)$ и $g_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ по предыдущей лемме (если $\tilde{x} = x_0$, то подойдёт $g_{\tilde{x}} = f$). Так как f непрерывна, то существует окрестность $V_{\tilde{x}} \ni \tilde{x}$, в которой f и $g_{\tilde{x}}$ не сильно отличаются: $|g_{\tilde{x}}(y) - f(y)| < \epsilon$ для любого $y \in V_{\tilde{x}}$. $\{V_{\tilde{x}}\}_{\tilde{x} \in K}$ - открытое покрытие компакта $K \implies$ можно извлечь конечное подпокрытие, соответствующее точкам $\{g_{\tilde{x}_i}\}_{i=1}^n$. Тогда функция $G = \min(g_{\tilde{x}_1}, ... g_{\tilde{x}_1})$ лежит в $\overline{\mathcal{A}}$ по лемме из начала билета, а также удовлетворяет равенству $G(x_0) = f(x_0)$ и неравенству $G(x) \leq f(x) + \epsilon$. □

Докажем, наконец, теорему Стоуна-Вейерштрасса.

Доказательство. Для каждой точки x_k определим непрерывную функцию g_k из предыдущей леммы и окрестность $V(x_k)$ такую, что $|g_k(y) - g_k(x_k)| < \epsilon$ и $|f(y) - f(x_k)| < \epsilon$ при всех $y \in V(x_k)$ (просто пересекали две окрестности, соответствующие двум неравенствам). $\{V_k\}_{x_k \in K}$ - открытое покрытие компакта $K \implies$ можно извлечь конечное подпокрытие, соответствующее, не умаляя общности, точкам $x_1, ... x_n$. Для каждого x_i, соответствующая этой точке функция g_i удовлетворяет следующим соотношениям:

- $g_k(x_k) = f(x_k)$
- $g_k(x) \leq f(x) + \epsilon$ для всех $x \in K$.
- $g_k \in \overline{\mathcal{A}}$.

Определим функцию $G(x) = \max_{1 \leq i \leq n}(g_i)$. Тогда $G(x) \leq f(x) + \epsilon$. Получим теперь оценку в другую сторону. Для каждой точки $y \in K$ есть покрывающая её окрестность $V(x_k)$ для некоторого k. Это значит, что $|f(y) - f(x_k)| < \epsilon$ и $|g_k(y) - g_k(x_k)| < \epsilon$, но $g_k(x_k) = f(x_k)$, откуда по неравенству треугольника $\underline{|f(y) - g_k(y)|} < 2\epsilon$. Значит, $G(y) \geq g_k(y) > f(y) - 2\epsilon$. Получаем, что f приближается элементом $G \in \overline{\mathcal{A}}$, но этот элемент приближается элементами из $\mathcal{A} \implies G$ тоже приближается элементами $\mathcal{A}$, что и требовалось. □

Билет 32. Теорема о неподвижной точке. Приложение к дифференциальным уравнениям.

Определение 23. *Сжимающее отображение* $T : X \to X$, X - полное метрическое пространство с метрикой ρ

$$\exists \alpha < 1 : \ \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x,y)$$

Теорема 13. *У сжимающего отображения T есть единственная неподвижная точка, т.е. такая, что $Tx = x$.*

Доказательство. Единственность: пусть x и y - две неподвижные точки отображения T, тогда $\rho(x,y) = \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x,y)$, откуда $1 \leq \alpha$, противоречие.
Существование: расммотрим орбиту x, т.е. $x, Tx, T(Tx) = T^2x, ..., T^nx, ...$, такая последовательность фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n,m > N : \ \rho(T^nx, T^mx) < \varepsilon$$

действительно, при $n \leq m : \rho(T^nx, T^my) \leq \alpha^n \rho(x, T^{m-n}x) \leq \alpha^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho(T^kx, T^{k+1}x)$
$\leq \alpha^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha^k \rho(x, Tx) = \frac{\alpha^n \rho(x,Tx)}{1-\alpha} < \varepsilon$. А значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} T^nx = e \in X$ - неподвижная точка, т.к. $T^nx \to e \Rightarrow T(T^nx) = T^{n+1}x \to Te = e$ (суть в том, что Te отличается от $T^{n+1}e$ на сколь угодно мало, а значит $Te = \lim\limits_{n+1\to\infty} T^{n+1}x = e$). □

Примечание 26. $\rho(T^nx, T^my) < \varepsilon$ при $n,m > N$.

Билет 33. Топология в пространстве бесконечно дифференцируемых над R функций. Метризуемость.

Примечание 27. Сходимость: будем говорить, что последовательность $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(R)$ сходится к $f \in C^\infty(R)$, если для любого компактного множества $K \subset R$ функции f_j сходятся к f равномерно на K.

Утверждение 17.

$$d(f,g) = \sum_{j,n\geq 0} \frac{2^{j+n}||f^{(j)} - g^{(j)}||_{\infty,I_n}}{1 + ||f^{(j)} - g^{(j)}||_{\infty,I_n}}$$

(I_n - компакты, $||\cdot||_\infty = \sup||\cdot||$) тогда d - метрика.

Утверждение 18. Топология порожденная такой метрикой и топология порожденная такой сходимостью совпадают.

Билет 34. Интеграл в смысле главного значения. Преобразование Гильберта. Гладкость.

Определение 24. Пусть функция f интегрируема по Риману на множестве $[a,b]\backslash\{x_0\}$, $x_0 \in (a,b)$. Будем говорить, что f *интегрируема в смысле главного значения* и писать $(p.v.)\int_a^b f(x)dx$, если существует предел $\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x)dx\right)$.

Определение 25. Пусть f - гладкая на $[a,b]$, $y \in (a,b)$. Отображение, которое функции f сопоставляет функцию $(p.v.)\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx$, называется *преобразованием Гильберта*

Теорема 14. *В условиях предыдущего определения интеграл* $(p.v.)\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx$ *существует.*

Доказательство. Можем считать, что y - середина отрезка $[a,b]$ (иначе просто откусим от бОльшей половины кусок, он не влияет на существование интеграла). Рассмотрим функцию $g(x)$, которая равна $f'(y)$, если $x=y$ и $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ иначе. Она непрерывна на $[a,b]$, поэтому интегрируема по Риману (а тем более в смысле главного значения). Но Легко видеть, что функция $\frac{f(y)}{y-x}$ интегрируема в смысле главного значения, и её интеграл $(p.v.)\int_a^b \frac{f(y)}{y-x}$ равен нулю (симметрия относительно оси ординат). Поэтому, функция $\frac{f(x)}{y-x} = -\frac{f(x)-f(y)}{x-y} + \frac{f(y)}{y-x}$ тоже интегрируема в смысле главного значения. □

Примечание 28. Заметим, что мы пользовались только непрерывностью f на $[a,b]$ и дифференцируемостью f в точке y. Последнее условие можно заменить на липшицевость в окрестности точки y: $|f(x)-f(y)| \le C|x-y|^a$, $a>0$. Действительно, тогда $\lim_{t\to y_-}\int_a^t g(x)dx \le \lim_{t\to y_-}\int_a^t C|y-x|^{a-1}dx = \lim_{t\to y_-} -C((y-t)^a-(y-a)^a)$ - существует и конечен. Аналогично поступаем с $t\to y_+$. получаем, что $\int_a^b g(x)dx$ - конечный несобственный интеграл, и наше рассуждение работает.

Билет 35. Аддитивные функции промежутка. Полукольца. Примеры.

Определение 26. Пусть X - множество произвольной природы, A - система его подмножеств. Функция $\mu : A\to[0,+\infty]$ называется *аддитивной*, если для любого конечного набора попарно дизъюнктных множеств $a_1,\ldots+a_n \in A$ таких, что $a_1\cup\ldots\cup a_n$ тоже лежит в A, верно равенство $\mu(a_1\cup\ldots\cup a_n) = \mu(a_1)+\ldots+\mu(a_n)$.

Пример(ы) 1. Во всех примерах $X=\mathbb{R}$

1. $A = \{< a,b > | a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$, $\mu(< a,b >) = b-a$
2. $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mu(a) = \min(|a|,\infty)$
3. Пусть g - неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Она имеет разрывы только первого рода. Определим $g-_(x) = \lim_{t\to x_-} f(t)$, $g_+(x) = \lim_{t\to x_+} g(t)$. Пусть $A = \{< a,b > | a < b, a,b\in\mathbb{R}\}$.
   $\mu([a,b]) = g_+(b) - g_-(a)$
   $\mu([a,b)) = g_-(b) - g_-(a)$
   $\mu((a,b]) = g_+(b) - g_+(a)$
   $\mu((a,b)) = g_-(b) - g_+(a)$

Определение 27. Множество $A\subset\mathcal{P}(X)$ называется *полукольцом*, если:

- $\emptyset \in A$
- $a, b \in A \implies a \cap b \in A$
- $a, b \in A \implies A \backslash B$ представляется в виде конечного объединения попарно дизъюнктных элементов из A.

Определение 28. Множество $A \subset \mathcal{P}(X)$ называется *кольцом*, если оно полукольцо, и $a, b \in A \implies A \backslash B \in A$.

Определение 29. Множество $A \subset \mathcal{P}(X)$ называется *алгеброй*, если оно кольцо, и $X \in A$.

Примечание 29. Если $a, b \in A$, и A - алгебра, то $a \cup b \in A$

Доказательство. $a \cup b = X \backslash ((X \backslash a) \cap (X \backslash b))$ □

Примечание 30. Если на A определить операции умножения $\times := \cap$ и сложения $+ := \Delta$ (симметрическая разность), то A превратится в алгебраическое кольцо

Доказательство. Просто проверить ручками. □

Пример(ы) 2. 1. $A = \{[a, b) | a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ - *полукольцо ячеек* в $X = \mathbb{R}$

2. $A = \{[a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n) | a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$ - *полукольцо ячеек* в $X = \mathbb{R}^n$

Теорема 15. *Если A - полукольцо в X, а B - полукольцо в Y, то $A \times B$ - полукольцо в $X \times Y$*

Доказательство. Просто проверить ручками. □

Примечание 31. Поскольку $a = (a \cap b) \sqcup (a \backslash b)$, то $\mu(a) = \mu(a \cap b) + \mu(a \backslash)$. Вспоминаем, что функция μ неотрицательна и получаем монотонность: если $c \subseteq d$, то $\mu(c) \leq \mu(d)$

Билет 36. Простые функции. Интеграл от простой функции.

Определение 30. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$ для некоторого натуралньего n, вещественных $c_1, ... c_n$ и попарно дизъюнктных множеств $E_1, ... E_n$.

Определение 31. *Интегралом Лебега от простой функции* $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$ называется величина $I(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$, где μ - аддитивная функция на X.

Утверждение 19. 1. Если $f \geq 0$, то $I(f) \geq 0$

2. $I(f + g) = I(f) + I(g)$, где f, g - простые (тогда их сумма тоже простая)

3. $I(af) = aI(f)$, где $a \in \mathbb{R}$, f - простая.

Теорема 16. *Пусть $A \subset \mathcal{P}(X)$ - полукольцо с аддитивной функцией μ, а $B \subset \mathcal{P}(Y)$ - полукольцо с аддитивной функцией ν. Тогда $\phi(a \times b) := \mu(a)\nu(b)$ - аддитивная функция на полукольце $A \times B$.*

Билет 37. Сигма алгебры. Свойства.

Определение 32. $\mu : A \to [0, +\infty]$ *счётно аддитивна*, если для любого счётного набора попарно дизъюнктных множеств $a_1, a_2, \ldots \in A$ $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a_k)$

Определение 33. Аддитивная функция μ называется *регулярной*, если:

1. $\mu(a) = \sup_{K \in A, K-\text{компакт}, K \subseteq a} \mu(K)$
2. $\mu(a) = \sup_{G \in A, G-\text{открытое}, a \subseteq G} \mu(G)$

Теорема 17. *(Теорема Александрова, её в билете не спрашивают) Регулярная мера счётноаддитивна.*

Доказательство. □

Определение 34. $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется *сигма-алгеброй*, если оно алгебра, и для любого счётного набора множеств из A их объединение тоже лежит в A.

Примечание 32. Можно рассматривать не счётное объединение, а счётное пересечение, поскольку $\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus a_i)$ и наоборот.

Утверждение 20. Пусть A - сигма-алгебра, и μ - аддитивная функция на A. Следующие утверждения эквивалентны:

1. μ счётноаддитивна
2. Если $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \ldots$ - счётная последовательность вложенных множеств из A, и $a = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$, то $\mu(a) = \lim_{k\to\infty} \mu(a_k)$.

Доказательство. **Из 1 в 2:** Определим последовательность попарно дизъюнктных множеств $\{b_k\}$ по правилу $b_1 = a_1$, $b_{k+1} = a_{k+1} \setminus a_k$. Тогда $a = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k$. Так как μ счётноаддитивна, то $\mu(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(b_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n)$.
Из 2 в 1: Пусть $\{b_k\}$ - счётный набор попарно дизъюнктных множеств. Определим последовательность вложенных множеств $\{a_k\}$ по правилу $a_1 = b_1$, $a_{k+1} = a_k \cup b_k$, тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} b_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(b_k)$. □

Билет 38. Внешняя мера. Свойства.

Определение 35. Отображение $\tau \colon 2^X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ называется *внешней мерой*, если:

(1) $\tau(\emptyset) = 0$;

(2) для любого множества $A \subset X$ и последовательности такой $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, выполнено неравенство

$$\tau(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(A_k).$$

При $A_n = \emptyset$ для всех $n > N \in \mathbb{N}$, из условия (2) следует, что внешняя мера *конечно-полуаддитивна*. В частности, внешняя мера *монотонна*, то есть

$$A \subset B \implies \tau(A) \leq \tau(B),$$

так как можно взять $A_1 = B$ и $A_k = \emptyset$ при всех $k > 1$.

Определение 36. Множество $A \subset X$ будем называть *измеримым относительно внешней меры* τ, если для всех $E \subset X$ имеет место равенство

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{1}$$

Билет 39. Предмера. Теорема Лебега-Каратеодори.

Определение 37. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо в X, μ_0 — счётно-аддитивная функция на $\mathcal{P}$. Для каждого $A \subset X$ определим

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}. \tag{2}$$

Отметим, что если A нельзя покрыть счётным объединением множеств из $\mathcal{P}$, то $\mu^*(A) = +\infty$.

Теорема 18 (*Каратеодори*)**.** *Пусть $\mu_0 \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ — счётно-аддитивная функция на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$, а μ^* определено как в (2). Тогда:*

1. *μ^* — внешняя мера на X.*
2. *σ-алгебра $\mathfrak{U}_{\mu^*}$ содержит в себе $\mathcal{P}$.*
3. *Если μ — мера, получающаяся ограничением внешней меры μ^* на $\mathfrak{U}_{\mu^*}$, то $\mu(P) = \mu_0(P)$ для всех элементов $P \in \mathcal{P}$.*
4. *Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{P}$, а ν — мера на $\mathfrak{A}$ такая, что $\nu(P) = \mu_0(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$ таких, что $\mu(A) < \infty$.*

   Более того, если μ — σ-конечна, то условие конечности $\mu(A)$ можно отбросить, то есть $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$.

Доказательство.

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$, так как $\mu_0(\emptyset) = 0$. Проверим счётную полуаддитивность. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Поскольку μ^* определяется как инфимум, для каждого $k \in \mathbb{N}$ мы можем найти такой набор множеств $\{P_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, что

   $$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{kj}) \le \mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k},$$

   где $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{kj} \supset A_k$, а $\epsilon > 0$ — некоторое число. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{kj} \supset A$, и по определению μ^*

   $$\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{kj}) \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon.$$

   Поскольку ϵ был произвольным, отсюда следует, что отображение μ^* счётно-полуаддитивно и является внешней мерой.

2. Пусть $P \in \mathcal{P}, E \subset X$. Проверим неравенство

   $$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

   Если $\mu^*(E) = +\infty$, то оно очевидно. Иначе (опять же, пользуясь свойствами инфимума) выберем множества $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ так, что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$,

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \le \mu^*(E) + \epsilon.$$

Тогда

$$E \cap P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap P), \qquad E \setminus P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus P) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{kj},$$

где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$. По определению μ^* имеем

$$\mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_0(P_k \cap P) + \sum_{j=1}^{n_k} \mu_0(Q_{kj}) \right).$$

Заметим, что $P_k = (P_k \cap P) \cup (P_k \setminus P) = (P_k \cap P) \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{kj}$, а значит

$$\mu_0(P_k) = \mu_0(P_k \cap P) + \sum_{j=1}^{n_k} \mu_0(Q_{kj}).$$

Таким образом,

$$\mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Устремляя ϵ к нулю, получаем требуемое неравенство. Таким образом, мы доказали, что $P \in \mathfrak{U}_{\mu^*}$, то есть, что $\mathcal{P} \subset \mathfrak{U}_{\mu^*}$.

3. Проверим, что $\mu^*(P) = \mu_0(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$. Поскольку $P \subset P$, $\mu^*(P) \leq \mu_0(P)$. С другой стороны, если $P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, то $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap P)$, и

$$\mu_0(P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k \cap P) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k).$$

Беря инфимум по P_k, получаем

$$\mu_0(P) \leq \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) = \mu^*(P).$$

Таким образом, $\mu_0(P) = \mu^*(P)$.

4. Пусть $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$. Тогда для произвольного набора $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$ такого, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A$, выполнено неравенство

$$\nu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k).$$

Беря в правой части инфимум по всем наборам P_k, получаем, что $\nu(A) \leq \mu(A)$.

Поймём, что $\mu(A \cap P) = \nu(A \cap P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$ таких, что $\mu(P) < \infty$. Действительно, если бы это было не так, то получилось бы, что

$$\mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P),$$

а это невозможно.

Если $\mu(A) < \infty$ или мера μ σ-конечна, то множество A можно покрыть элементами P_k полукольца $\mathcal{P}$ конечной меры, причём (как мы уже показывали), их можно считать дизъюнктными. Тогда

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A \cap P_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A \cap P_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(A \cap P_k) = \nu(A).$$

Таким образом, последний пункт теоремы доказан. □

Билет 40. Теорема о структуре измеримых множества. Единственность продолжения.

Определение 38. Множество $A \subset X$ будем называть *измеримым относительно внешней меры* τ, если для всех $E \subset X$ имеет место равенство

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{3}$$

Определение 39. Пусть $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо, μ_0 — счетно-аддитивная функция из $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Мера μ, построенная в теореме Каратеодори, называется *стандартным продолжением* μ_0.

Билет 41. Борелевская сигма-алгебра. Мера Лебега.

Определение 40. Пусть (X,T) — топологическое пространство. Тогда *борелевской σ-алгеброй* в X будем называть минимальную σ-алгебру, содержащую T (то есть все открытые, а значит и замкнутые, множества).[1]

Заметим, что теорема Каратеодори даёт не только существование стандартного продолжения, но и формулу, по которой можно считать меру через исходную функцию μ_0:

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(P_k) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\}.$$

Из теоремы Каратеодори и утверждения **??** следует, что стандартное продолжение — полная мера.

Мы показали, что если мера μ σ-конечна, то ее продолжение единственно. Можно привести примеры, показывающие, что в общей ситуации это условие нельзя отбросить.

Определение 41. Стандартное продолжение функции $l_1 \colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой Лебега* на $\mathbb{R}$.

Билет 42. Единственность меры Лебега. Регулярность меры Лебега.

Так как $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n) = \mathbb{R}$ и $l_1([-n,n)) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то l_1 σ-конечна, то есть мера Лебега определена на σ-алгебре $\mathfrak{A}_{l_1^*}$ единственным образом.

[1] В дальнейшем мы сможем определить понятие длины для всех множеств из борелевской σ-алгебры над $\mathbb{R}$.

Билет 43. Измеримые отображения. Свойства.

Определение 42. Пара $(X,\mathfrak{A})$, где X — множество, а $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра в X, называется *измеримым пространством*.

Поскольку дальше в этом параграфе много утверждений связано с прообразами, введём следующие удобные обозначения:

$$E(a < f < b) = f^{-1}((a,b)) = \{x \in E : f(x) \in (a,b)\},$$
$$E(f \le a) = f^{-1}([-\infty,a]),$$

и так далее (здесь подразумевается, что f определено на E).

Определение 43. Пусть E — измеримое множество относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Говорят, что функция f *измерима* относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, если

$$E(f > a) = f^{-1}\big((a, +\infty]\big) \in \mathfrak{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R}).$$

Билет 44. Интеграл Лебега. Примеры.

Определение 44. Тройка $(X,\mathfrak{A},\mu)$ называется *пространством с мерой*, если X — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств, μ — мера на $\mathfrak{A}$.

Определение 45. Пусть f — простая функция на X, принимающая значения c_k на множествах разбиения E_k, E — измеримое множество. Тогда *интегралом f по множеству E* называется значение

$$\int_E f d\mu \coloneqq \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E \cap E_k). \tag{4}$$

Указатель

Основные понятия.