Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

Определение. $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на (a,b), если

- y – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на (a,b).

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0,\ G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем (x_0,y_0), если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a,b);
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0,y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

- $$y_1 = 0$$

- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется* *областью существования*.

Теорема (*О единственности*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется* *областью единственности*.

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии (x_0,y_0) будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*)**.**

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

- $$F(x_0,y_0) = 0$$
- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*)**.** *Пусть* U *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$*. Тогда* $\forall(x_0,y_0) \in H$ $\exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* (x_0,y_0)
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют I_0, J_0 $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$. По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \mathrm{const}$ $\Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. □

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} &y' = m(x) \cdot n(y) \\ &m \in C((a,b)), n \in C((\alpha,\beta)) \\ &G = (a,b) \times (\alpha,\beta) \end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha,\beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подставнкой

- $I \subset (\alpha,\beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

  $$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

  Замена $z = y(t)$

  $$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

  Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

  $$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) = M(x) - M(x_0) \\ U(x,y) := N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли U интегралом.

Утверждение. (*Критерий интеграла*)

U – интеграл для уравнения $y' = f(x,y) \iff$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$
- $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

Доказательство. Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = \text{const}$

$$\frac{dU}{dy} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dy}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \tag{1}$$

Замена переменных

Пример(ы). 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – x

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – x

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x),\ \ p,q \in C((a,b))$$

$f(x,y)$ определена на $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G, поэтому G – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

$$y' = p(x)y$$

Есть решение $y \equiv 0, x \in (a,b)$

Если $y > 0$, то

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

Воспользуемся заменой переменной:

Новая независимая переменная – x

Новая функция – $v(x)$

Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

$$\begin{aligned} y' &= v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx} \\ p(x)y + q(x) &= p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x) \\ v' \cdot e^{\int p(x)dx} &= q(x) \\ v' &= q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \\ v &= \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\ y &= e^{\int p(x)dx}(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx) \end{aligned}$$

Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

Для задачи Коши с начальным условием (x_0,y_0) имеем

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}ds)$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \mathrm{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то возпользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x)$$
$$v' = (1-m)y'y^{-m}$$
$$\frac{v'}{(1-m)} = p(x)v + q(x)$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если α – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение Пфаффа

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Определение. *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m,n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

Определение. *Интегральная кривая дифференциальной формы* F – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Примечание. Кривая называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\dot\gamma_1, \dot\gamma_2$ и $(\dot\gamma_1, \dot\gamma_2) \neq 0$

Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая F

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot\gamma_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot\gamma_1(t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot\gamma_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на (α, β), то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для y:

$$\frac{dy}{dx} = \dot\gamma_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x)} = \frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}$$

γ была интегральной кривой формы F, то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая γ уравнения $F = 0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $mdx + ndy = 0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq =$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \dot{\gamma}_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F = mdx + ndy = 0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{m}{n} \\ \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{n}{m} \end{array}\right.$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Форма F – *точная*, если $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Если F – точная, то $F = 0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

Теорема. *Если F – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0) \in G$ U – интеграл одного из уравнений:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ *или* } \frac{dx}{dx} = -\frac{n}{m}$$

Предметный указатель