

Теория категорий

Тутанов Михаил и Копейкина Софья
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

2 октября 2021 г.

Содержание

Основные определения	3
Примеры на основные определения	3
Ещё определения	4
Функтор	6
Примеры функторов	6
Мономорфизмы и эпиморфизмы	7
Естественные преобразования	8
Эквивалентность категорий	9
Скелеты	10
Лемма Йонеды	11
Пределы	12

Основные определения

Определение 1. *Категория \mathcal{C}* – это

- класс¹ $\text{Ob } \mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $\text{Hom}(X, Y)$ ² для любых двух X и Y из $\text{Ob } \mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ: \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
- для любого A из \mathcal{C} ³ существует $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ такое, что $f \circ \text{id}_A = f$, $\text{id}_A \circ f = f$ для любого осмысленного f .

Определение 2. Два объекта X и Y в категории \mathcal{C} называются *изоморфными*, если $\exists f \in \text{Hom}(X, Y)$ и $g \in \text{Hom}(Y, X)$ такие, что $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами*.

Определение 3. Объект A в категории \mathcal{C} называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из \mathcal{C} $|\text{Hom}(X, A)| = 1$ ($|\text{Hom}(A, X)| = 1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A , композиция $f \circ g$ в этом случае будет элементом $\text{Hom}(A', A')$, но $\text{id}_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f \circ g = \text{id}_{A'}$, аналогично $g \circ f = \text{id}_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. \square

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории \mathcal{C} определим следующую категорию \mathcal{C}^{op} , которую будем называть *двойственной* (*противоположной*): $\text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g \circ f$.

Примечание 1. Инициальный объект в \mathcal{C} соответствует терминальному в \mathcal{C}^{op} и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- *Sets*: $\text{Ob } \text{Sets} =$ все множества, $\text{Hom}(X, Y) =$ все отображения из X в Y , \circ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – \emptyset , терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

¹Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

²Обозначение *Mor* на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

³ Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups, Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*: $Ob\ HTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом, $Ob\ C = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $Ob\ C = M$, $Hom(x, y) = \emptyset$, если $x \not\leq y$, $= \emptyset$, иначе.
- *Rel*s, $Ob\ Rel$ s = все множества, $Hom(X, Y)$ = все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in R\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории C называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \rightarrow X$ и $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \rightarrow X$ и $g : Z \rightarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \rightarrow X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории C называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \rightarrow X \amalg Y$ и $i_Y : Y \rightarrow X \amalg Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : X \rightarrow Z$ и $g : Y \rightarrow Z$, существует единственный морфизм $h : X \amalg Y \rightarrow Z$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id , подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. \square

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y ⁴;
- *Groups*: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;

⁴Здесь ранее было указано, что оно существует не всегда, это неправда, оно всегда есть

- ЧУМ: $x \times y = \min(x, y)$, $x \amalg y = \max(x, y)$.

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

Определение 7. *Категорией стрелки* \mathcal{C}/A , где \mathcal{C} – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $\text{Ob } \mathcal{C}/A = \text{пары } (X, f)$, где $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}(X, A)$; $\text{Hom}((X, f), (Y, g)) = \{h \in \text{Hom}(X, Y) | f = g \circ h\}$.

Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A) . Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- *Sets*: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$;
- *Sets*^{op}: $X \amalg_A Y = X \amalg Y / \sim$, где \sim порождено $f(a) \sim g(a)$. В *Top* это просто склейка;
- *Groups*: произведение как на *Sets*, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

Определение 9. *Функтором* \mathcal{F} называется отображение между двумя категориями \mathcal{C} и \mathcal{D} (определённое и на объектах, и на морфизмах) со свойствами:

- Если $f \in \text{Hom}(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
- $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$.

Примеры функторов:

- $\pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Groups}$;
- Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда \mathcal{F} – гомоморфизм моноидов;
- M – моноид, $\mathcal{F} : M \rightarrow \text{Vect}_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \rightarrow \text{End}(V)$;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$ – выбор объекта в \mathcal{C} , а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

Функтор

Определение 10. *Функтор* - это отображение $F : C \rightarrow D$ между категориями со следующими свойствами:

1. Если $X \in \text{Ob } C$, то $F(x) \in \text{Ob } D$
2. $\forall A, B \in \text{Ob } C$ и $F : A \rightarrow B - F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, причем "произведение переходит в произведение" и "единичный гомоморфизм в единичный гомоморфизм т.е.
 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ и $F(id_A) = id_{F(A)}$

Утверждение 3. $A \simeq B \Rightarrow F(A) \simeq F(B)$

Доказательство:

$A \simeq B$, значит $\exists f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$.

Вспомним, что функтор сохраняет произведение и единичный гомоморфизм:

$F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$ и $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$.

Мы нашли гомоморфизмы с нужными нам свойствами, а значит $F(A) \simeq F(B)$.

QED

Примеры функторов

1. Забывающий функтор

Такой функтор стандартно обозначается как U , он "забывает" алгебраические структуры. Рассмотрим на примере групп:

$U : \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$

$U(G) = G$ как множество

$U(f) = f$ как отображение множеств

2. Свободный функтор

Это функтор, который "вспоминает" алгебраическую структуру. Рассмотрим также на примере групп:

$F : \text{Sets} \rightarrow \text{Groups}$

$F(X)$ = свободная группа, порожденная X

$F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, который переводит образующие в образующие: $x \mapsto f(x)$

3. Конкретный пример свободного функтора между ассоциативными алгебрами с единицей и векторными пространствами:

K - поле, $U : K - \text{Alg} \rightarrow \text{Vect}_K$ и $F : \text{Vect}_K \rightarrow K - \text{Alg}$

$F(V) = T(V) = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$

Со следующей структурой:

$V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes (n+m)}$

$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n; u_1 \otimes \dots \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m$

А с гомоморфизмами дела обстоят следующим образом:

$f : V \rightarrow W$, тогда $F(f) : T(V) \rightarrow T(W)$, который работает так:

$V^{\otimes n} \rightarrow W^{\otimes n}$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \rightarrow f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_n)$

4. Аналогично между коммутативными алгебрами и векторными пространствами:

$S : K - \text{CommAlg} \rightarrow \text{Vect}_K$

$S(V) = T(V)_{\langle u \otimes v - v \otimes u \rangle}$, что называется *симметрической алгеброй*

5. Еще пример - между абелевыми и обычными группами:

$$F : AbGroups \rightarrow Groups$$

$$F(G) = G/[G, G]$$

$$F(f)[g] = [f(g)]$$

6. *Множества с выделенной точкой* и свободный функтор между ними и категорией множеств:

$Sets_*$ - это категория, определенная следующим образом: $Ob\ Sets_*$ состоит из элементов следующего вида: $(A, a \in A)$. Гомоморфизмы устроены так: $f_* : (A, a) \rightarrow (B, b)$, причем переводит выделенную точку в выделенную точку.

Свободный функтор выглядит так:

$$F : Sets \rightarrow Sets_*$$

$$A \mapsto A \sqcup \{\emptyset\}$$

$$f \mapsto f \times (\emptyset; \emptyset)$$

7. *Контрпредставимый функтор* - это функтор, действующий из категории в категорию множеств $F : C \rightarrow Sets$, построенный следующим образом:

$$A \in Ob\ C \quad F(A) = Hom(A, X)$$

$$f : X \rightarrow Y \quad F(f) : Hom(A, X) \rightarrow Hom(A, Y)$$

$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

Определение 11. *Контрвариантный функтор* из C в D - это функтор из C^{op} в D^{op} :

$$A \in Ob\ C \quad F(A) \in Ob\ D$$

$$f : A \rightarrow B \quad F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \text{ и } F(f \circ g) = F(g) \circ F(f), \quad F(id_A) = id_{F(A)}$$

Определение 12. *Представимый функтор* - это такой функтор $h_A : C^{op} \rightarrow Sets$, $A \in Ob\ C$, действующий по правилу:

$$h_A(X) = Hom(X, A), \quad h_A(f) : \phi \mapsto \phi \circ f$$

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Мы хотим определить "инъективность" и "сюръективность" для гомоморфизмов между элементами категорий. Делается это следующим образом:

Определение 13. Гомоморфизм f называется *мономорфизмом*, если "на него можно сокращать слева т.е. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ "

Примеры

- $Sets$ - инъективные отображения
- $Groups$ - инъективные гомоморфизмы групп
- $Rings$ - инъективные гомоморфизмы колец

Примечание 2. Сохраняют ли функторы мономорфизмы? НЕТ

Определение 14. Гомоморфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *расщепимым мономорфизмом*, если $\exists r : Y \rightarrow X$ такой, что $r \circ f = id_X$

Примечание 3. Сохраняют ли функторы расщепимые мономорфизмы? ДА

Определение 15. Гомоморфизм f называется *эпиморфизмом*, если "на нее можно сокращать справа т.е. $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ "

Аналогично можно определить расщепимый эпиморфизм:

Определение 16. Гомоморфизм $f : X \rightarrow Y$ называется *расщепимым эпиморфизмом*, если $\exists s : Y \rightarrow X$ такой, что $f \circ s = id_Y$ **Примеры эпиморфизмов**

- Sets - сюръективные отображения
- Groups - сюръективные гомоморфизмы групп
- HausTop - непрерывные отображения с $f(X) = Y$

Упражнение 1. *Расщепимый мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм* и *Расщепимый эпиморфизм + мономорфизм = изоморфизм*

Естественные преобразования

Определение 17. $\alpha : F \rightarrow G$ называется *естественным преобразованием* для функторов $F, G : C \rightarrow D$, если $\forall A \in C \exists \alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ такой, что $\forall f \in Hom(A, B) \exists \alpha_B : F(B) \rightarrow G(B)$, причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} f: A \rightarrow B, & A, B \in \text{Ob } C & \\ \alpha_A: F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A) & & \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ \alpha_B: F(B) \xrightarrow{\alpha_B} G(B) & & \end{array}$$

Упражнение 2. $I = [Ob I = \{0, 1\}, Hom(I) = \{Hom(0, 0) = \{id_0\}, Hom(0, 1) = \{f = \{(0, 1)\}\}, Hom(1, 0) = \emptyset, Hom(1, 1) = \{id_1\}\}]$.

Задать естественное преобразование это все равно, что задать следующий функтор: $H : C \times I \rightarrow D \mid H(, 0) = F$ и $H(, 1) = G$, со следующей структурой категории $C \times I$: $Ob C \times I = Ob C \times Ob I, Hom(C \times I) = Hom(C) \times Hom(I)$

Примеры

- $V \in Vect_K$. Для функторов $Vect_K \rightarrow Vect_K F : V \mapsto V, f \mapsto f$ и $G : V \mapsto V^{**}, \phi \mapsto \phi^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha \mid \alpha_V : F \rightarrow G : V = F(V) \mapsto G(V) = V^{**}$ такое, что $\alpha_V(f)(v) = f(v)$
- *Топологическая группа* - это группа с топологической структурой, на которой заданы две непрерывные операции: $G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$ и $G \rightarrow G : a \mapsto a^{-1}$ (к примеру, $(\mathbb{R}, +)$ и (S^1, \cdot) - это топологические группы). В данном примере нас будет интересовать *локально компактные топологические абелевы группы*. Для каждой группы A определим двойственную: $A^* = Hom(A, S^1)$ - непрерывные гомоморфизмы групп (вместе с какой-то топологией). Итак, для функторов $LocCompAb \rightarrow LocCompAb F = Id$ и $G : A \mapsto A^{**}$ есть естественное преобразование $\alpha : F \rightarrow G$, которое определяется так же, как и в предыдущем примере.

Эквивалентность категорий

Определение 18. Есть три функтора $F, G, H : C \rightarrow D$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : G \rightarrow H$. **Композиция(вертикальная) естественных преобразований** это естественное преобразование $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H \mid (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$

Примечание 4. Заметим, что мы таким образом определили категорию $\text{Func}(C, D)$ - функторов из C в D , в которой морфизмы - это естественные преобразования.

Определение 19. Есть четыре функтора $F, G : C \rightarrow D$, $H, K : D \rightarrow E$ и два естественных преобразования: $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : H \rightarrow K$.

Композиция(горизонтальная) естественных преобразований - это естественное преобразование $\beta \bullet \alpha : H \circ F \rightarrow K \circ G \mid (\beta \bullet \alpha)_A : H(F(A)) \rightarrow K(G(A))$, последнее работает следующим образом: $H(\alpha_A) : H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$, $(\beta \bullet \alpha)_A = \beta_{G(A)}(H(\alpha_A))$

Упражнение 3. Композиции, определенные таким образом, действительно являются естественными преобразованиями.

Упражнение 4. Горизонтальная композиция коммутирует с вертикальной.

Определение 20. Категории C и D называются **эквивалентными**, если $\exists F : C \rightarrow D$ и $G : D \rightarrow C$, причем есть естественные преобразования

$\alpha : Id_C \rightarrow F \circ G$, $\alpha^{-1} : F \circ G \rightarrow Id_C$ и $\beta : Id_D \rightarrow G \circ F$, $\beta^{-1} : G \circ F \rightarrow Id_D$ такие, что $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = Id$ и $\beta \circ \beta^{-1} = Id$, $\beta^{-1} \circ \beta = Id$

Теперь приведём некоторые примеры двойственных категорий:

- Двойственность Понтрягина: $\text{LocCompAb} \simeq \text{LocCompAb}^{op}$ со следующими функторами: $F(A) = \text{Hom}(A, S^1)$, где на второй группе компактная открытая топология, и в обратную сторону также. Теперь надо указать естественное преобразование $id \rightarrow G \circ F : A \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(A, S^1), S^1)$. Примеры: $\mathbb{Z} \longleftrightarrow S^1$, $(\mathbb{R}, +) \longleftrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $\text{CompAb} \longleftrightarrow \text{Ab}$;
- Двойственность Стоуна: $\text{TotDiscComp}^{op} \simeq \text{Bool}$, где TotDiscComp - вполне несвязные (дополнение открытого открыто) компактные топологические пространства, Bool - коммутативные кольца с единицей, в которых квадрат любого элемента равен ему самого. $F(X)$ = булева алгебра открытых множеств в X , умножение - пересечение, сумма - симметрическая разность. $G(R)$ = множество максимальных идеалов в R с топологией Зарисского.
- Двойственность Гельфанда: $\text{Comp}^{op} \simeq$ коммутативные C^* -алгебры, где C^* -алгебра - алгебра над \mathbb{C} с инволюцией $*$, нормой, согласованной с $*$: $\|a * a\| = \|a\|$, $\|aa^*\| = \|a\|^2$, и эта алгебра полна как метрическое пространство, с данной нормой, морфизмы - морфизмы алгебр, не увеличивающие норму. $F(X) \rightarrow \text{Map}(X, \mathbb{C})$, $f^*(x) = f(\bar{x})$, $\|f\| = \max |f(x)|$. Функтор в другую сторону: $A \rightarrow$ множество максимальных идеалов, устойчивых относительно инволюции, с некоторой топологией.
- Категория накрытий $\text{Cov}(X)$: фиксируем компактно-порождённое связное топологическое пространство X , $\text{ObCov}(X)$ = пары из Y и накрытия $Y \rightarrow X$, морфизмы - непрерывные отображения из Y в Z , коммутирующие с выбранными накрытиями. Тогда $\text{Cov}(X)^{op} \simeq \pi_1(X)$ -множества⁵;
- Есть двойственность категорий, возникающая из теории Галуа.

Теорема 1. **Критерий эквивалентности категорий:** $F : C \rightarrow D$ задаёт эквивалентность категорий тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

⁵здесь может быть когда-нибудь будет определение G - множеств

- F *унивалентен*, то есть отображение $\text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$ инъективно;
- F *полон*, то есть отображение $\text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$ сюръективно;
- F *существенно сюръективен*: $\forall A \in D \exists X \in C : A \cong F(X)$.

Примечание 5. первые два условия означают, что $F(C)$ – полная подкатегория в D .

Доказательство.

Лемма 1. $A \cong B$, $C \cong D$, тогда $\text{Hom}(A, C) \cong \text{Hom}(B, D)$, причём каждому морфизму слева сопоставляется единственный морфизм, делающий диаграмму из этого морфизма и двух фиксированных изоморфизмов коммутативной.

В одну сторону: $G : D \rightarrow C$, $F \circ G \simeq id_D$, $X \simeq F(G(X))$ – существенная сюръективность.

Пусть $Ff = Fg$, $GFf = GFg$, тогда и f , и g делают соответствующую диаграмму из леммы коммутативной, откуда совпадают, то есть F – унивалентен.

Полнота: $f : F(A) \rightarrow F(B)$, рассмотрим $G(f)$ и диаграмму с $A, B, GF(A), GF(B)$, есть единственное g , делающее диаграмму коммутативной, $GF(g) = G(f)$, откуда $F(g) = f$.

В другую сторону: построим G , так как F существенно сюръективно, можно определить $G(X) = Y : X \cong F(Y)$ ⁶, определим G на морфизмах, сделав диаграмму из $A, B, F(G(A)), F(G(B))$ коммутативной получим $g : F(G(A)) \rightarrow F(G(B))$, но F – полный и унивалентный, поэтому $g = F(h)$, $G(f) := h$. Изоморфизм между id и $F \circ G$ есть по построению, дальше надо построить $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$, для этого найдём $F(\eta_X) : F(X) \rightarrow F(G(F(X)))$, такое отображение $F(\eta_X)$ уже найдётся, и F можно убрать из-за его хороших свойств. \square

Скелеты

Определение 21. Категория *скелетная*, если в ней изоморфные объекты совпадают.

Определение 22. *Скелет* категории C – скелетная полная подкатегория D (для любого объекта из C есть изоморфный ему из D).

Примечание 6. Скелет категории эквивалентен исходной категории, так как можно взять одним из функторов вложение.

Примеры скелетов:

- Sets – кардиналы;
- Вполне упорядоченные множества – ординалы;
- $\text{Vect}_F - F^{(I)}$, где I – кардинал.

Утверждение 4. • В каждой категории существует скелет;

- Скелет эквивалентен исходной категории;
- Скелетные категории эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны;
- Две категории эквивалентны \Leftrightarrow их скелеты изоморфны.

Доказательство. Первое – возьмём по представителю из каждого класса эквивалентности по отношению изоморфности. Четвёртое следует из третьего. Третье: F и G задают эквивалентность C и D $A \cong F(G(A))$, но тогда $A = F(G(A))$, построим G' , на объектах совпадает с G , $f = F(h)$ из хороших свойств F , $G(f) := h$. \square

⁶при этом мы выбираем один элемент даже не из множества, а из класса

Лемма Йонеды

Лемма 2. (Лемма Йонеды) В произвольной категории C обозначим за h_A ковариантный функтор $\text{Hom}(A, -)$, а за $\text{Nat}(F, G)$ все естественные преобразования функторов F и G . Тогда теорема утверждает, что $\text{Nat}(h_A, F) \simeq F(A)$, где F действует из некоторой категории C в Sets .

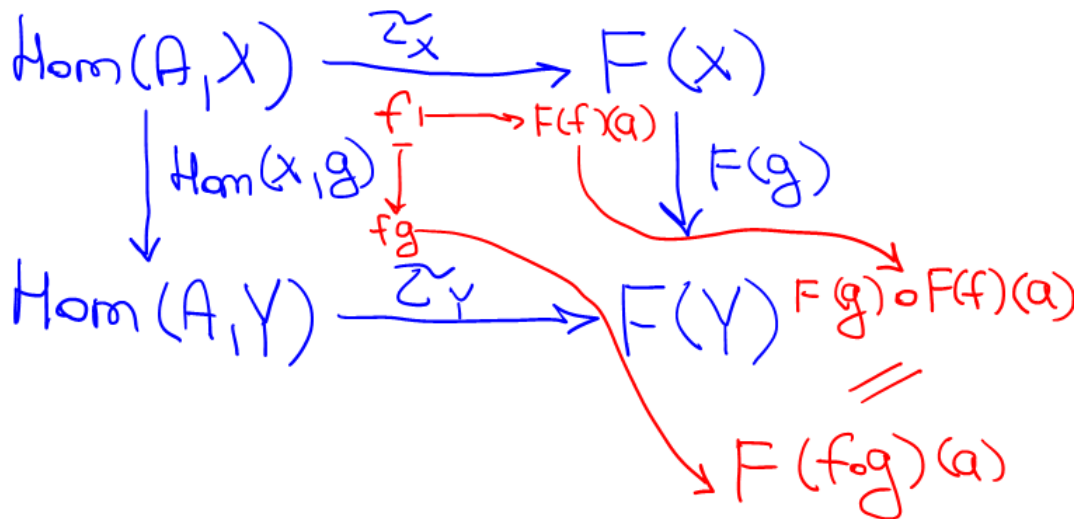
Доказательство:

Сначала подберем отображение "слева-направо":

Есть естественное преобразование $\eta : h_A \rightarrow F$, задача состоит в том, чтобы поставить ему в соответствие элемент из $F(A)$. Посмотрим, как оно действует на A : $\text{Hom}(A, A) \xrightarrow{\eta_A} F(A)$. Т.к. C - категория, то в $\text{Hom}(A, A)$ есть id_A , тогда в соответствии этому естественному преобразованию поставим то, во что отобразится id_A , т.е. $G(\eta) = \eta_A(\text{id}_A) \in F(A)$.

Теперь "справа-налево":

Задан элемент $a \in F(A)$, ему в соответствие поставим естественное преобразование $\tau : h_A \rightarrow F$ так, что для каждого $X \in \text{Ob } C$ задано отображение $\text{Hom}(A, X) \xrightarrow{\tau_X} F(X)$, действующее следующим образом: $A \xrightarrow{f} X \mapsto F(f)(a)$. Проверим его естественность:



По верху:

$$f \mapsto F(f)(a) \mapsto (F(g) \circ F(f))(a)$$

По низу:

$$f \mapsto f \circ g \mapsto F(f \circ g)(a)$$

Вспомним, что наш функтор ковариантный, а он разворачивает композицию, поэтому наше преобразование действительно естественно.

Теперь остается только проверить, что сопоставления взаимно обратные:

В одну сторону:

$$a \in F(A) \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \mapsto F(f)(a) \longrightarrow F(\text{id}_A)(a) = \text{id}_{F(A)}(a) = a. \text{ Сошлось.}$$

В другую:

$$\eta_X : A \xrightarrow{f} X \mapsto \eta_A(f) \longrightarrow \eta_A(\text{id}_A) \longrightarrow \tau_X : A \xrightarrow{f} X \mapsto F(f)(\eta_A(\text{id}_A))$$

$$\tau_X(f) = F(f)(\eta_A(\text{id}_A)) = \eta_X(\text{Hom}(A, f)(\text{id}_A)) = \eta_X(f). \text{ То же } =.$$

Следствие 1. $\text{Nat}(h_A, h_B) = \text{Hom}(A, B) = h_B(A)$

Следствие 2. (Вложение Йонеды) $h_- : C \rightarrow \text{Set}^{C^{Op}}$ - полный унивалентный ковариантный функтор, который действует следующим образом: $A \mapsto h_A, f : B \rightarrow A \mapsto \text{Hom}(f, -)$

Пределы

Определение 23. *Постоянный функтор* - это функтор $const_Z : D \rightarrow C$, $Z \in Ob C$, действующий следующим образом: $A \mapsto Z$, $f \mapsto id$

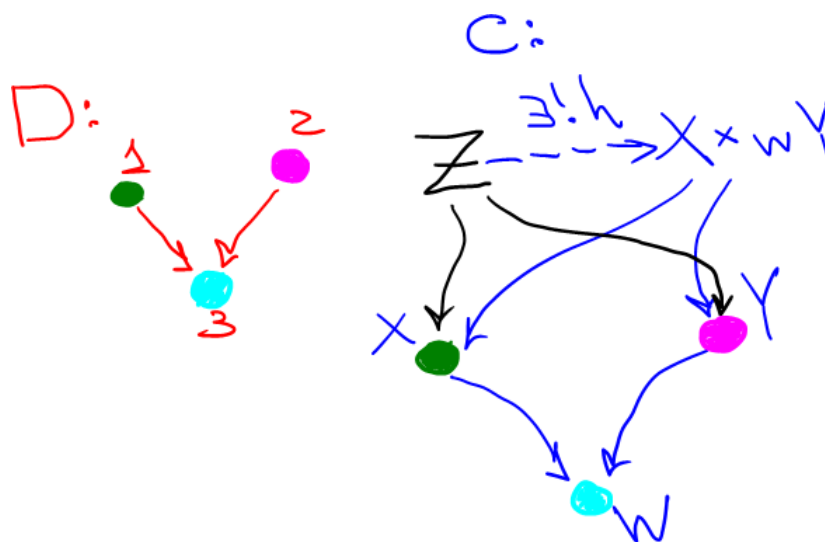
Определение 24. Категория D называется *малой категорией (диаграммой)*, если ее объекты составляют множество.

Определение 25. D - малая категория, $F : D \rightarrow C$ - функтор. *Предел* - это объект $\lim F$, представляющий функтор, который действует следующим образом: $Z \mapsto Nat(const_Z, F)$

Примечание 7. Предел это "произведение со стрелками, которые надо уважать"

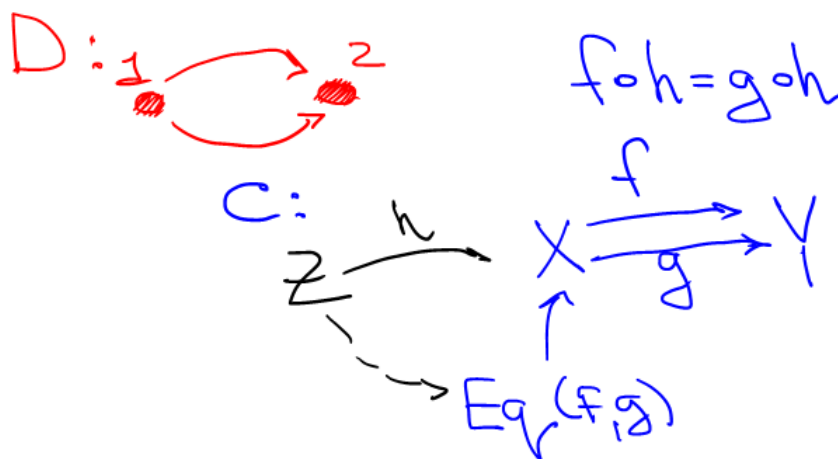
Примеры:

1. Расслоенное произведение: D - категория с тремя объектами 1, 2, 3 и стрелками $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$ - и есть то, во что функтор F переводит это все: $X, Y, W \in Ob C$, стрелки $X \rightarrow W$, $Y \rightarrow W$. Пределом такого функтора будет объект $X \times_W Y$ со следующим свойством: $\forall Z \in Ob C$ и $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y \exists! h : Z \rightarrow X \times_W Y$, сохраняющая коммутативность диаграммы.



2. Уравнитель морфизмов: D - категория с двумя объектами 1, 2 и двумя стрелками $1 \rightarrow 2$ - и есть то, во что функтор F переводит это все: $X, Y \in Ob C$, две стрелки $f, g : X \rightarrow Y$. Пределом такого функтора будет объект $Eq(f, g)$ со следующим свойством: $\forall Z \in Ob C$ и $h : Z \rightarrow X$, причем $f \circ h = g \circ h$, $\exists! \alpha : Z \rightarrow Eq(f, g)$, сохраняющая коммутативность диаграммы.

Уравнитель для $C = Sets$ будет такой: $Eq(f, g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$

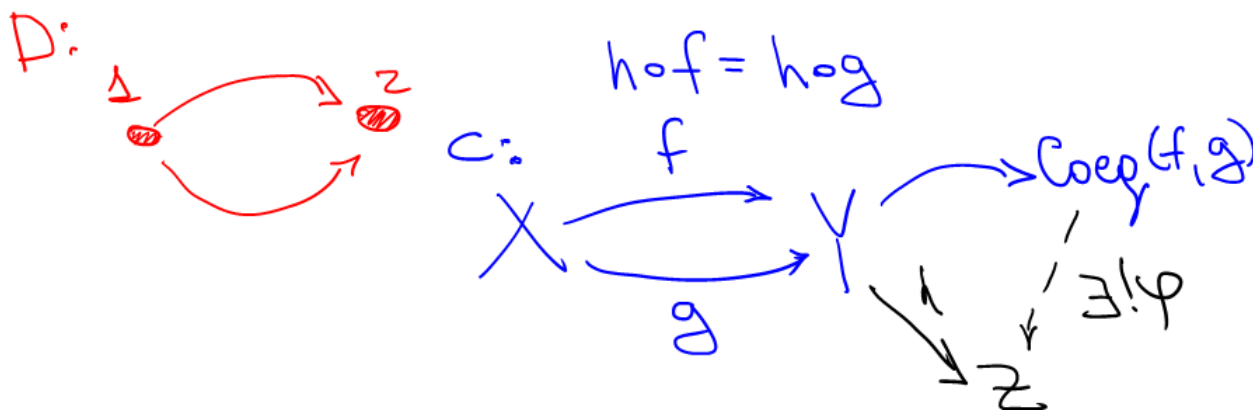


3. Пусть в D есть инициальный объект A . Тогда $\lim F = F(A)$

Определение 26. *Копредел* $F : D \rightarrow C$ - это объект, копредставляющий функтор $G : Z \mapsto \text{Nat}(F, \text{const}_Z)$. Копредставляющий в том смысле, что $G \simeq \text{Hom}(\text{Colim } F, -)$

Примеры:

1. D - дискретная, т.е. есть категория, в которой есть только тождественные морфизмы. $\text{Ob } D = I$, есть то, во что функтор их переводит: $(X_i \in C)_{i \in I}$. Копределом для такой конструкции называется копроизведение $\coprod X_i$. В Sets это дизъюнктное объединение
2. D - категория "два объекта - две параллельные стрелки" (как во втором примере предела). Копределом такого функтора называется коуравнитель $\text{Coeq}(f, g)$ со следующим свойством: $\forall Z \in C$ со стрелкой $h : Y \rightarrow Z$, сохраняющей коммутативность диаграммы, т.е. $h \circ f = h \circ g$, $\exists! \phi : \text{Coeq}(f, g) \rightarrow Z$, сохраняющая коммутативность диаграммы



3. D - натуральные числа как упорядоченное множество. Функтор переводит их в $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Если предположить, что $C = \text{Sets}$ и $X_i \rightarrow X_{i+1}$ - вложения, то $\text{Colim } X_i = \cup X_i$

Определение 27. Категория C называется *полной*, если в C есть все (малые) пределы. Т.е. $\forall D$ - малой и $\forall F : D \rightarrow C \exists \lim F$

Теорема 2. C - полная Lra в C существуют произведения и уравниатели

Доказательство:

\Rightarrow - очевидно (существуют все пределы, значит существуют и их частные случаи)
 \Leftarrow : $\lim F = \text{Eq}()$

Предметный указатель

Вложение Йонеды, 11
Двойственная категория, 3
Естественное проеобразование, 8
Забывающий функтор, 6
Изоморфные объекты, 3
Категория, 3
Категория стрелки, 5
Композиция(вертикальная) естественных пре-
образований, 9
Композиция(горизонтальная) естественных
преобразований, 9
Контрвариантный функтор, 7
Копредел, 13
Копредставимый функтор, 7
Копроизведение объектов, 4
Критерий эквивалентности категорий, 9
Лемма Йонеды, 11
Малая категория(диаграмма), 12
Множества с выделенной точкой, 7
Полнота функтора, 10
Постоянный функтор, 12
Предел, 12
Представимый функтор, 7
Произведение объектов, 4
Расслоённое произведение, 5
Расщепимый мономорфизм, 7
Расщепимый эпиморфизм, 8
Свободный функтор, 6
Скелет, 10
Скелетная категория, 10
Терминальный объект, 3
Топологическая группа, 8
Унивалентность функтора, 10
Функтор, 5, 6
Эквивалентность категорий, 9
Эпиморфизм, 7
мономорфизм, 7
полная категория, 13