

ДТВ.билеты 2 семестр

Кабашный Иван (@keba4ok)
Горбунов Леонид, Савельев Артём
на основе лекций Ю. А. Давыдова
и других материалов

28 мая 2021 г.

Они самые.

Содержание

1	Билеты	3
1.1	Вероятностное пространство. Аксиомы вероятности. Дискретное вероятностное пространство. Схема равновозможных исходов.	3
1.2	Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	4
1.3	Независимость событий.	4
1.4	Дискретные случайные величины. Их распределения. Примеры распределений: Бернулли, биномиальное, геометрическое, распределение Пуассона. Независимость случайных величин.	5
1.5	Испытания Бернулли. Вероятность для числа успехов в схеме Бернулли. Пуассоновское приближение в схеме Бернулли.	6
1.6	Математическое ожидание и его свойства. Формула перемножения математических ожиданий для независимых величин. Примеры вычисления математического ожидания для	7
1.7	Дисперсия и ее свойства. Формула сложения дисперсий для независимых величин. Примеры вычисления дисперсии для стандартных распределений	9
1.8	Случайные векторы. Ковариация. Коэффициент корреляции.	10
1.9	Закон больших чисел (ЗБЧ). Пример применения ЗБЧ: теорема Вейерштрасса.	10
1.10	Локальная и интегральная предельная теорема Муавра в схеме Бернулли.	12
1.11	Производящие функции. Связь с математическим ожиданием и дисперсией. Производящая функция суммы независимых величин. Производящая функция суммы случайного числа независимых одинаково распределенных величин.	13
1.12	Ветвящийся процесс. Определение. Вероятность вырождения. Производящая функция ветвящегося процесса как итерация производящей функции числа непосредственных	13
1.13	Цепи Маркова со счетным множеством состояний. Основные определения. Вероятность конкретной траектории цепи. Вероятности перехода за n шагов. Инвариантные (стационарные) и предельные распределения цепи. Предельное распределение как инвариантное. Примеры несуществования (простое симметричное случайное блуждание).	14
1.14	Асимптотическое поведение вероятностей перехода – предельная теорема Маркова для конечной цепи с положительными вероятностями перехода и ее непосредственное обобщение.	16
1.15	Классификация состояний: существенные, несущественные состояния. Эргодические классы существенных состояний. Период состояния	17
1.16	Возвратные и невозвратные состояния, критерий возвратности. Возвратность простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d (теорема Пойа). Простое случайное блуждание на \mathbb{Z}	18
2	Указатель	21

1 Билеты

1.1 Вероятностное пространство. Аксиомы вероятности. Дискретное вероятностное пространство. Схема равновозможных исходов.

Определение 1. Ω - пространство элементарных событий или множество элементарных исходов, есть множество, состоящее из ω_i , элементарных событий. Нам важно лишь, чтобы это множество было непустым. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - некоторая совокупность подмножеств Ω , есть множество событий, элементы которого есть A_i - события.

Определение 2. \mathbb{P} - вероятность $A \Rightarrow \mathbb{P}(A)$ - вероятность события A .

Определение 3. Вся же тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется **вероятностным пространством**.

Для вероятностей существует несколько аксиом:

- $0 \leq \mathbb{P}(A \leq 1)$ для любого события,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- для любого счётного набора попарно непересекающихся события $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq \mathcal{F}$ выполнена *счётная аддитивность*:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} \mathbb{P}(A_n).$$

Некоторые свойства вероятностей:

- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$;
- $\forall A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Теперь перейдём к некоторым примерам вероятностных пространств:

Пример(ы) 1. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ **дискретно**, если Ω не более, чем счётно. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, элементы $\{\omega\}$ также считаем событиями.

Утверждение 1. Несколько предложений:

- Пусть \mathbb{P} - вероятность в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, где $p_\omega = \mathbb{P}\{\omega\}$. При этом $p_\omega \geq 0$, $\sum_\omega p_\omega = 1$.
- Предположим, что $\{p_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ такие, что выполнено последнее предложение предыдущего пункта, тогда $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ - вероятность.

Также, можно упомянуть про **равновероятные исходы**, из названия понятно, что это. Если $|\Omega| < \infty$ и $p_\omega = p$ для любого ω , тогда $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

1.2 Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Определение 4. *Условная вероятность*: $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (при $\mathbb{P}(B) > 0$).

Утверждение 2. Для условной вероятности выполнены аксиомы вероятности.

А теперь - несколько утверждений, которые касаются условной вероятности.

Утверждение 3. (B_n) - разбиение Ω (дизъюнктивный набор, который в объединении даёт всё множество). Тогда для любого A , $\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)$.

Доказательство.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_n B_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_n (A \cap B_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) \cdot \mathbb{P}_{B_n}(A).$$

□

Утверждение 4. *Формула Байеса.* Пусть мы знаем событие A , имеется разбиение (B_n) , тогда

$$\mathbb{P}_A(B_k) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{B_n}(A)}$$

Доказательство. Из определения условной вероятности,

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B),$$

Тогда просто применим формулу полной вероятности, и заменим $\mathbb{P}(A)$ на сумму. □

1.3 Независимость событий.

Примечание 1. На всякий случай доповпросов, я вставил некоторые рассуждения с лекции.

Перейдём к *независимости событий*. Начнём рассуждения с двух событий: A и B . Если $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$, или, что равносильно им обоим $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$, то события называются *независимыми*.

Пусть теперь имеется не два, а больше событий $\{A_1, \dots, A_n\}$. Нельзя сказать, что нам хватает попарной независимости для независимости совокупной.

Пример(ы) 2. (Пирамида Бернштейна). Рассмотрим тетраэдр, у которого стороны покрашены таким образом: белый, синий, красный и флаг России. Рассматриваем события: A_1 - на выпавшем основании есть белый цвет, и так далее A_2 и A_3 . Эти события попарно независимы, но не независимы в совокупности.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2),$$

но тогда

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Таким образом, нужно ввести корректное определение.

Определение 5. События A_1, \dots, A_n *независимы*, если выполнено:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j), \forall i \neq j, \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(A_k), \forall i \neq j \neq k, \\ &\dots \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть имеется T_1, \dots, T_m - разбиение $\{1, \dots, n\}$, независимые события A_1, \dots, A_n , $\{B_j\}_m$ - комбинация (всякие действия между элементами) событий $\{A_s, s \in T_j\}$. Тогда $\{B_j\}$ - независимы.

Доказательство. По индукции. □

1.4 Дискретные случайные величины. Их распределения. Примеры распределений: Бернулли, биномиальное, геометрическое, распределение Пуассона. Независимость случайных величин.

Определение 6. *Случайная величина* - это функция $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Пример(ы) 3. Число выпавших решек на n бросках.

Теперь немного о *распределении случайной величины*. Пусть имеется вероятностное пространство и случайная величина X . Нас интересует $\{\omega | X(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}\}$, то есть, мы хотим исследовать попадания случайной величины в те или иные зоны на прямой. Такую вероятность можно рассматривать как вероятность от множества B , но это слишком сложно, поэтому продолжим на таких двух пунктах:

- значения X , $X(\Omega) = \{a_1, \dots\}$, $\{a_k\}$ - значение X ,
- $A_k = \{\omega | X(\omega) = a_k\}$; $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, причём каждая $p_k \geq 0$, а их сумма равна единице.

Тогда мы можем сделать вывод, что $\mathbb{P}\{X \in B\} = \sum_{k|a_k \in B} p_k$, так как левая часть есть $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} A_k\}$, что равно $\mathbb{P}\{\bigcup_{k|a_k \in B} \{x = a_k\}\} = \sum_{k|a_k \in B} \mathbb{P}\{x = a_k\}$, что уже и равно левой части.

Определение 7. Таки образом, совокупность последовательностей $\left\{\frac{a_k}{p_k}\right\}$ и называется *распределением случайной величины*.

Пример(ы) 4. Приведём примеры распределений:

- *вырожденное*: $X(\omega) = a$ для любого ω .
- *распределение Бернулли*: $B(1, p)$, $p \in [0, 1]$, причём единица принимается с вероятностью p , 0 - иначе.
- *биномиальное*: $B(n, p)$, $p \in [0, 1]$, $X \sim B(n, p)$, если принимаются значения от 0 до n , причём $\mathbb{P}\{X = k\} = \mathbb{P}_n(k)$ (просто обозначение), и равно $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- *геометрическое* $X = 1, 2, \dots$, $p \in [0, 1]$. $\mathbb{P}\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p$.
- *пуассоновское* $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$, $X = 0, 1, \dots$, $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

Независимость случайных величин.

Определение 8. X и Y - *независимые случайные величины*, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}^1$ события $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ независимы.

Чуть позже будет критерий независимости, потому что по определению проверить зачастую слишком проблематично.

Определение 9. X_1, X_2, \dots, X_n - *назависимые случайные величины*, если $\forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, $\{X_i \in A_i\}$ независимы.

Теорема 2. (*Критерий независимости случайных величин*). Предположим, что X_k имеет распределение $(a_{kj})_j$, (p_{kj}) , $k = 1, \dots, n$. Тогда X_i *назависимы тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{P}\{X_1 = a_{1j_1}, X_2 = a_{2j_2}, \dots, X_n = a_{nj_n}\} = \prod_{k=1}^n p_{kj_k}$$

Доказательство. Из первого во второе - очевидно. В обратную сторону для начала докажем такой факт: если $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^1$, то тогда

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\{X_k \in A_k\}.$$

Докажем все факты для двух, обобщается это всё не сложно.

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j,s|a_{1j} \in A_1, a_{2s} \in A_2} \bigcap \{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s}\}\right),$$

Но вероятность объединения можно заменить на сумму вероятностей:

$$\sum_{-//-} \mathbb{P}\{X_1 = a_{1j}, X_2 = a_{2s}\} = \sum_{-//-} p_{1j}p_{2s} = \left(\sum_{j|a_{1j} \in A_1} p_{1j}\right) \left(\sum_{s|a_{2s} \in A_2} p_{2s}\right),$$

что равно

$$\mathbb{P}\{X_1 \in A_1\} \mathbb{P}\{X_2 \in A_2\}.$$

Это как раз и даёт нам независимость через немного хитрую вещь. Нам же нужна независимость для любого количества элементов, но казалось бы, у нас есть только для всех X_i . Однако, в лемме можно заменить некоторые A_l на \mathbb{R}^1 , и тогда выражение как раз показывает нам необходимые соотношения на оставшиеся величины. \square

1.5 Испытания Бернулли. Вероятность для числа успехов в схеме Бернулли. Пуассоновское приближение в схеме Бернулли.

Определение 10. Рассмотрим последовательность ε_k - независимых бернуллиевских величин (два исхода), $\varepsilon_k \sim B(1, p)$,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p \end{cases}$$

$\{\varepsilon_k = 1\}$ означает успех в каком-то испытании. То есть, *испытание Бернулли* - последовательность из однотипных испытаний.

ν_n - число успехов в n испытаниях., что равно $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k$. Покажем, что распределение биномиально. $\nu_n = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} C_n^k p^k q^{n-k} &= ? \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = \mathbb{P}\{\omega \mid \text{в цепочке } \varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega) \text{ в точности } k \text{ единиц}\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j = k\right\} = \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \text{ в } k \text{ единиц}} \mathbb{P}\{\varepsilon_1 = i_1, \dots, \varepsilon_n = i_n\} = \\ &= \sum_{-// -} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

Теперь встаёт вопрос: существуют ли независимые бернуллиевские случайные величины. Пусть $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_k = 0 \text{ или } 1\}$; $|\Omega| = 2^n$. $p_\omega = p^k (1-p)^{n-k}$ для $\omega = (i_1, \dots, i_n)$, в которой ровно k единиц. $\sum p_n = 1$, $\varepsilon_k(\omega) = \varepsilon_k(i_1, \dots, i_n) = i_k$.

$P_n(k) = \mathbb{P}\{\nu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ - можем ли мы как-то упростить это?

Теорема 3. n испытаний B с вероятностями успеха $p = p_n$, $n \cdot p_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \alpha$, тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_n(k) \rightarrow \pi_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} (np^k) q^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k q^{n-k} \sim \frac{\alpha^k}{k!} q^{n-k} \end{aligned}$$

Если что, k - константа.

$$\begin{aligned} q^{n-k} &= (1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k} \\ &\sim \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \sim e^{-np_n} = e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

В итоге, $P_n(k) \sim \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$. □

А теперь - несколько слов о точности аппроксимации. Оценим $|P_n(k) - \pi_k|$. $\pi_k = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$.

Теорема 4. $\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - \pi_k| \leq 2np^2$.

1.6 Математическое ожидание и его свойства. Формула перемножения математических ожиданий для независимых величин. Примеры вычисления математического ожидания для ...

Определение 11. Пусть X - случайная величина, тогда *математическое ожидание* - $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p_\omega$, если ряд абсолютно сходится в бесконечном случае.

Свойства:

- Существование математического ожидания эквивалентно существованию математического ожидания $|X|$ (для краткости пишут $E|X| < \infty$).
- Математическое ожидание линейно.
- Если $X \geq 0$, то $EX \geq 0$.
- $X \leq Y$, тогда $EX \leq EY$.
- $|EX| \leq E|X|$ (из $-|X| \leq X \leq |X|$).

А вот это уже можно обобщить до неравенства Йенсена:

Теорема 5. Если φ - выпуклая функция, тогда $\varphi(EX) \leq E\varphi(x)$.

Однако доказывать мы это не будем, а просто перейдём к следующей теореме:

Теорема 6. Пусть X - случайная величина $(a_k); (p_k)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(x) = \sum_k f(a_k)p_k$ (существуют или не существуют они одновременно).

Доказательство. Скажем для начала, что $f \geq 0$ (просто возьмём модуль, если что). Тогда $Ef(X) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))p_\omega = \sum_k \left(\sum_{\omega | X(\omega)=a_k} f(X(\omega))p_\omega \right) = \sum_k f(a_k) \sum_{\omega | X(\omega)=a_k} p_\omega = \sum_k f(a_k)p_k$. \square

Отсюда есть несколько следствий:

- $EX = \sum_k a_k p_k$, $f(x) = x$.
- Если X и Y имеют одинаковые распределения, то $EX = EY$.
- EX - центр масс.

Теорема 7. Пусть \bar{X} - случайный вектор; $(\bar{a}_k); (p_k)$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $Ef(\bar{X}) = \sum_k f(\bar{a}_k)p_k$.

Теорема 8. Если X и Y независимы, и их математические ожидания существуют, то у их произведения также существует математическое ожидание, причём равно произведению математических ожиданий.

Доказательство. Применим в предыдущей теореме $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $f(x, y) = xy$ и распишем $E(XY)$. \square

Пример(ы) 5. Пусть $X \sim B(n, p)$ имеет биномиальное распределение. Тогда $EX = \sum_0^n k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np$.

К такому выводу можно прийти и другим способом. Мы знаем, что случайная величина X имеет такое же распределение, как сумма бернуллиевских величин, одинаково распределённых: $X \stackrel{D}{=} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, (ε_k) независимы, $\varepsilon_k \sim B(1, p)$. $EX = \sum_1^n E\varepsilon_k = nE\varepsilon_k = np$.

Пример(ы) 6. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда

$$EX = \sum_0^\infty k \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_0^\infty \frac{\alpha^k}{(k-1)!} = \alpha e^{-\alpha} \sum_1^\infty \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha.$$

1.7 Дисперсия и ее свойства. Формула сложения дисперсий для независимых величин. Примеры вычисления дисперсии для стандартных распределений ...

Определение 12. *Дисперсия* - $DX = E[(X - EX)^2]$. Нужно, чтобы $E(X^2)$ было меньше бесконечности, тогда DX определена.

Примечание 2. Дисперсия характеризует меру разброса случайной величины от математического ожидания.

И рассмотрим её свойства:

- Дисперсия неотрицательная.
- $D(X + c) = DX$.
- $D(X \cdot c) = c^2 DX$.
- $DX = E(X^2) - (EX)^2$.
- $DX = \sum_k (a_k - EX)^2 p_k$, где $(a_k), (p_k)$ - распределение X .

Теорема 9. Если X, Y - независимые случайные величины, то $D(X + Y) = DX + DY$.

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $EX = EY = 0$, он достаточно очевиден, а теперь начнём сводить все остальные случаи к этому. Введём $\tilde{X} = X - EX; \tilde{Y} = Y - EY$. Тогда $D(X + Y) = D(\tilde{X} + \tilde{Y}) = DX + DY$, что и требовалось. \square

Рассмотрим теперь несколько примеров дисперсий.

Пример(ы) 7. Пусть $X \sim B(n, p)$, тогда $DX = np(1 - p)$.

Пример(ы) 8. Пусть $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$, тогда $DX = \alpha$.

Теорема 10. (*Неравенство Маркова*). Пусть $X \geq 0$. Тогда $\forall t > 0, \mathbb{P}\{X \geq t\} \leq \frac{EX}{t}$.

Доказательство. Введём понятие *индикатора*, то есть, функции $\mathbb{I}_A(\omega)$, которая равна 1, если $\omega \in A$, и 0 иначе (в нашем случае событие $A - \geq t$). Эта случайная величина имеет Бернуллиевское распределение, 1 с вероятностью $p = \mathbb{P}(A)$, и 0 с вероятностью $1 - p$. Ясно, что левую часть можно записать как $E\mathbb{I}_A$. Посмотрим теперь на $\frac{X}{t}$. Эта вещь не меньше 1 при $\omega \in A$, тогда $\mathbb{I}_A \leq \frac{X}{t}$, а значит, $E\mathbb{I}_A \leq E\left(\frac{X}{t}\right) = \frac{EX}{t}$. \square

Это неравенство имеет кучу следствий, рассмотрим некоторые из них.

Следствие 1. Пусть $f \uparrow, f(x) \geq 0$. Тогда $\mathbb{P}\{X \geq t\} = \mathbb{P}\{f(X) \geq f(t)\} \leq \frac{Ef(X)}{f(t)}$.

Следствие 2. Если $E(X^2) \leq \infty$, и $f(x) = x^2$, то, как следствие, получим $\mathbb{P}\{|X| \geq t\} \leq \frac{E(X^2)}{t^2}$, тогда при $t \rightarrow \infty$ получим более сильную оценку (на месте X^2 можно брать ещё большие степени). Также можно рассмотреть $f(x) = e^{ax}$, $a > 0$, тогда получим $\mathbb{P}\{x \geq t\} \leq \frac{E(e^{ax})}{e^{at}}$.

Теорема 11. (*Неравенство Чебышёва*). Пусть X - случайная величина, $EX^2 < \infty$ (DX определена). Тогда $\forall t > 0$,

$$\mathbb{P}\{|Y| \geq t\} \leq \frac{E(Y^2)}{t^2},$$

при $Y = X - EX$.

Доказательство. Из следствия 2, при подстановке $(X - EX)$. □

Определение 13. *Моменты* - матожидания следующего вида. Пусть X - случайная величина. Мы можем рассмотреть $E(X^n)$, $E(X - EX)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $E|X|^p$, $E|X - EX|^p$, $p \in \mathbb{R}$. Все эти матожидания называются моментами, первые два называются моментами n -го порядка, вторые два - *абсолютными моментами*, моменты с разностями называются *центрированными*.

Определение 14. Если случайных величин несколько, то вводятся *смешанные моменты*, моменты вида $E(X^n \cdot Y^m)$, или $E[(X - EX)(Y - EY)] = \text{cov}(X, Y)$ - частный случай, *ковариация*. Можем также через него определить *коэффициент корреляции* - $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, который является мерой линейной зависимости между X и Y .

1.8 Случайные векторы. Ковариация. Коэффициент корреляции.

Определение 15. *Случайный вектор* - вектор, который состоит из случайных величин?

Определение 16. Если случайных величин несколько, то вводятся *смешанные моменты*, моменты вида $E(X^n \cdot Y^m)$, или $E[(X - EX)(Y - EY)] = \text{cov}(X, Y)$ - частный случай, *ковариация*. Можем также через него определить *коэффициент корреляции* - $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$, который является мерой линейной зависимости между X и Y .

1.9 Закон больших чисел (ЗБЧ). Пример применения ЗБЧ: теорема Вейерштрасса.

Теорема 12. (*ЗБЧ Чебышева*). Пусть $\{X_j\}_{j \geq 1}$ - последовательность некоррелированных с. в. с равномерно ограниченными дисперсиями:

$$\sigma^2 := \sup_j \mathbb{D} X_j < \infty.$$

Тогда случайные величины

$$Z_n := \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_j}{n}$$

удовлетворяют соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{|Z_n| \geq r\} = 0, \quad \forall r > 0.$$

Доказательство. Имеем $\mathbb{E} Z_n = 0$ и

$$\mathbb{D} Z_n = \mathbb{D} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{D} X_j}{n^2} \leq \frac{\sigma^2}{n}.$$

В соответствии с неравенством Чебышева,

$$\mathbb{P}\{|Z_n| \geq r\} \leq \frac{\mathbb{D} Z_n}{r^2} \leq \frac{\sigma^2}{nr^2} \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$. □

Следствие 3. $\{X_j\}_{j \geq 1}$ - последовательность одинаково распределённых независимых с.в. с конечной дисперсией. Пусть a - их общее математическое ожидание. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} - a \right| \geq r \right) = 0, \quad \forall r > 0.$$

Теорема 13. (*ЗБЧ Бернулли*). Пусть S_n - число успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq r \right) = 0, \quad \forall r > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины X_j , такие, что они принимают значение 1, если был успех на j испытании, и 0 иначе. Тогда X_j независимы, имеют конечную дисперсию $p(1-p)$ и математическое ожидание p . Поэтому ЗБЧ Бернулли вытекает из следствия к теореме Чебышева. \square

Теорема 14. (*Теорема Вейерштрасса*). Любая непрерывная функция на интервале может быть равномерно приближена полиномами.

Доказательство. Итак, пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ - непрерывная функция. Обозначим

$$w_f(r) := \max_{|s-t| < r} |f(s) - f(t)|$$

её модуль равномерной непрерывности. Как известно, $\lim_{r \rightarrow 0} w_f(r) = 0$. Пусть S_n - число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда выражение

$$B_{n,f}(p) := \mathbb{E} f \left(\frac{S_n}{n} \right) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

является полиномом степени n по переменной p . Тогда полагая $Z_n = \frac{S_n}{n}$, получим из [строчка из доказательства какой-то хуйни, следствия ЗБЧ, можно написать] для любых r, n

$$\begin{aligned} |B_{n,f}(p) - f(p)| &\leq \max_{|z-a| < r} |f(z) - f(a)| + 2 \max_{[0,1]} |f(\cdot)| \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq r \right) \leq \\ &\leq w_f(r) + 2 \max_{[0,1]} |f(\cdot)| \frac{p(1-p)}{nr^2} \leq \\ &\leq w_f(r) + \max_{[0,1]} |f(\cdot)| \frac{1}{2nr^2}. \end{aligned}$$

Наконец, выбирая $r = n^{-1/3}$, найдём

$$|B_{n,f}(p) - f(p)| \leq w_f(n^{-1/3}) + \max_{[0,1]} |f(\cdot)| \frac{1}{2n^{1/3}},$$

причём эта оценка стремится к нулю с ростом n и не зависит от p . \square

1.10 Локальная и интегральная предельная теорема Муавра в схеме Бернулли.

Теорема 15. (*Локальная теорема Муавра-Лапласа*). Пусть S_n - число успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ верно, что

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{\frac{-(k - np)^2}{2np(1-p)}\right\} (1 + o(1))$$

равномерно по $k \in [np - \varepsilon_n n^{2/3}, np + \varepsilon_n n^{2/3}]$.

Доказательство. По формуле Стирлинга

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \frac{n^n e^k e^{n-k}}{e^n k^k (n-k)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1\pi p(1-p)n}} \frac{(np)^k}{k^k} \frac{[n(1-p)]^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}. \end{aligned}$$

Определим параметр $v = v(n, k)$ соотношением $k = np + v$. Тогда имеем $n - k = n(1 - p) - v$, причём $v = o(n^{2/3})$. Анализируя логарифмы, получим, что

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{k^k}{(np)^k}\right) &= k \ln\left(1 + \frac{v}{np}\right) = (np + v) \left(\frac{v}{np} - \frac{v^2}{2(np)^2} + o\left(\frac{v^3}{n^3}\right)\right) = \\ &= v + \frac{v^2}{2np} + o(1), \end{aligned}$$

и аналогично,

$$\ln\left(\frac{(n-k)^{n-k}}{(n(1-p))^{n-k}}\right) = -v + \frac{v^2}{2n(1-p)} + o(1).$$

Складывая оценки логарифмов, получим (старшие члены сокращаются!)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{(np)^k}{k^k} \frac{(n(1-p))^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}\right) &= -\frac{v^2}{2np} - \frac{v^2}{2n(1-p)} + o(1) = \\ &= \frac{-v^2}{2np(1-p)} + o(1). \end{aligned}$$

по определению, $\frac{v^2}{2np(1-p)} = \frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}$, так что теорема доказана. \square

Теорема 16. (*Интегральная теорема Муавра-Лапласа*). Пусть S_n - число успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. Положим $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}}$. Тогда для любых вещественных $a < b$ и $n \rightarrow \infty$ верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{a \leq Z_n \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du.$$

Доказательство. Утверждение теоремы получается простым суммированием асимптотик из локальной теоремы. \square

1.11 Производящие функции. Связь с математическим ожиданием и дисперсией. Производящая функция суммы независимых величин. Производящая функция суммы случайного числа независимых одинаково распределенных величин.

Определение 17. *Производящая функция:* $X \in Z_+$; $p_k = \mathbb{P}\{X = k\}$; $\varphi(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $|z| < 1$

Свойства:

- Если X, Y - сл. нез. величины, то $\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z)\varphi_Y(z)$, так как $\varphi_{X+Y}(z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X z^Y) = E(z^X)E(z^Y) = \varphi_X(z)\varphi_Y(z)$.
- (Следствие) Если X_1, X_2, \dots, X_n - н.о.р. сл. величины, то $\varphi_{S_n}(z) = [\varphi(z)]^n$, где $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, φ - производящая функция X_1 .
- $\varphi'(1) = EX$, $\varphi''(1) = E[X(X-1)]$, откуда $DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2$.

Доказательство. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\varphi(1) - \varphi(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-t^k}{1-t} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k t_k^{k-1}$, $t \leq t_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k k t_k^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k k t_k^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k k = EX$, значит $\varphi'(1) = EX$, повторив аналогичное рассуждение еще раз, получим соотношение на $\varphi''(1)$. \square

- Пусть τ и (X_k) - н.о.р. сл. величины, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $U = S_\tau$, φ - общая производящая функция, тогда $\varphi_U(z) = \varphi_\tau(\varphi(z))$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi_U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{U = k\} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{U = k | \tau = n\}] z^k &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n | S_n = k\}] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n\} \mathbb{P}\{S_n = k\}] z^k &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n\} \mathbb{P}\{S_n = k\} z^k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n\} [\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n = k\} z^k] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n\} \varphi_{S_n}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau = n\} [\varphi(z)]^n = \varphi_\tau(\varphi(z)). \end{aligned}$$

\square

1.12 Ветвящийся процесс. Определение. Вероятность вырождения. Производящая функция ветвящегося процесса как итерация производящей функции числа непосредственных ...

(*Описание ветвящегося процесса*). Мы последовательно строим дерево. В 0 уровне 1 вершина, из которой появляются потомки, которые составляют 1 уровень, из каждого появляются потомки, составляющие 2 уровень итд. M_n - число вершин на n -ом уровне, X - общая случайная величина количества потомков вершины, φ - производящая функция X , φ_n - производящая функция M_n . Заметим, что $M_{n+1} = \sum_{i=1}^{M_n} X_{n,i}$, где $X_{n,i}$ - количество потомков i -ой вершины на n -ом уровне. По последнему пункту 11 билета из этого следует $\varphi_{n+1} = \varphi_n(\varphi(z))$, таким образом $\varphi_n = \varphi^{n0}$, где φ^{n0} - n -ая композиция φ .

$$q_n = \mathbb{P}\{M_n = 0\}, q = \mathbb{P}\{\bigcup \{M_n = 0\}\} \cdot \{M_n = 0\} \subset \{M_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \uparrow q.$$

Теорема 17. q совпадает с наименьшим корнем уравнения $\varphi(t) = t$.

Доказательство. $q_n = \mathbb{P}\{M_n = 0\} = \varphi_n(0) = \varphi^{n0}(0)$. $q_{n+1} = \varphi(q_n) \Rightarrow q = \varphi(q)$, так как φ - непрерывная. То есть q - корень $\varphi(t) = t$. Пусть t^* - наименьший корень $\varphi(t) = t$, $q_0 = 0 \leq t^*$, если $q_n \leq t^*$, то $q_{n+1} = \varphi(q_n) \leq \varphi(t^*) = t^*$, так как φ - монотонна, а значит $q \leq t^* \Rightarrow q = t^*$. \square

В последующих рассуждениях мы будем использовать, что $\varphi(1) = 1, \varphi(0) = p_0$ и φ - неубывающая выпуклая функция

Теорема 18. (*Критерий невырожденности*).

Следующие условия равносильны:

- $q < 1$
- $EX > 1$ или $\mathbb{P}\{X = 1\} = 1$

Доказательство.

($2 \Rightarrow 1$) 2 случай очевиден; если $EX > 1$, то $\varphi'(1) > 1$, а значит $\exists \delta$, такое что $\varphi(t) < t, \forall 1 - \delta < t < 1 \Rightarrow q = t^* < 1$.

($2 \Leftarrow 1$) Пусть ни то ни другое неверно, тогда $EX \leq 1 \Rightarrow \varphi'(1) \leq 1 \Rightarrow$ либо $\varphi(t) > t \forall t < 1$, тогда $q = t^* = 1$, либо $\varphi(t) = t \forall t \in [a; 1]$ и $\varphi(t) > t \forall t \in [0; a)$, тогда $\varphi'(1) = 1, \varphi''(1) = 0$, а значит $EX = 1, DX = 0 \Rightarrow X = 1$, то есть $\mathbb{P}\{X = 1\} = 1$. \square

Определение 18. Если $EX < 1$, то процесс подкритический,

Если $EX = 1$, то процесс критический,

Если $EX > 1$, то процесс надкритический.

1.13 Цепи Маркова со счетным множеством состояний. Основные определения. Вероятность конкретной траектории цепи. Вероятности перехода за n шагов. Инвариантные (стационарные) и предельные распределения цепи. Предельное распределение как инвариантное. Примеры несуществования (простое симметричное случайное блуждание).

Определение 19. Пусть (Ω, F, \mathbb{P}) - вероятностное пространство. Последовательность случайных величин $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ (с не более чем счётным множеством состояний L) называется *цепью Маркова*, если $\mathbb{P}(X_{n+1} = l_{n+1} | X_n = l_n, X_{n-1} = l_{n-1}, \dots, X_0 = l_{i_0}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = l_{n+1} | X_n = l_n)$ для любых $l_{i_0}, \dots, l_{n+1} \in L$, т.е., неформально говоря, если каждая случайная величина зависит только от предыдущей.

Далее везде мы состояние цепи Маркова будем просто обозначать числами, писать i вместо l_i .

Определение 20. Если $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ не зависит от n , то цепь Маркова называется *однородной*. Отныне считаем, что все рассматриваемые цепи однородны.

Определение 21. *Начальное распределение* $\pi_0(x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$. Можно записать в виде вектора: $\overline{\pi}_0 = (\pi_0(x_i))_{i=0,1,\dots}$

Определение 22. *Вероятность перехода* из i в j - $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$. *матрица перехода* $P = (p_{i,j})_{i,j=0,1,\dots}$

Теорема 19. $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)p_{x_0, x_1} \dots p_{x_{n-1}, x_n}$

Доказательство. Индукция по n . База $n = 0$ очевидна. Переход: $p_{x_{n-1}, x_n} = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \frac{\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0)}$. \square

Определение 23. Определим *вероятности перехода за n шагов*: $p_{i,j}(n) = \mathbb{P}(X_{t+n} = j | X_t = i)$ Им соответствует матрица $P^{(n)}$.

Корректность данного определения интуитивно очевидна из однородности цепи Маркова, но докажем её строго:

Утверждение 5. Это определение корректно:

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+n} = j | X_t = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{t+n} = j, X_t = i)}{\mathbb{P}(X_t = i)} = \\ &= \frac{\sum_{(i_1, \dots, i_{n-1})} \mathbb{P}(X_t = i, X_{t+1} = i_1, \dots, X_{t+n-1} = i_{n-1}, X_{t+n} = j)}{\mathbb{P}(X_t = i)} = \\ &= \frac{\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \mathbb{P}(X_t = i) p_{i, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, j}}{\mathbb{P}(X_t = i)} = \text{Const}, \end{aligned}$$

т.е. не зависит от t

\square

Теорема 20.

1. $p_{i,j}(n+m) = \sum_k p_{i,k}(n) p_{k,j}(m)$
2. $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$
3. $P^{(n)} = P^n$

Доказательство. Докажем первый пункт, из которого сразу будут следовать остальные. $p_{i,j}(n+m) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_k \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) = \sum_k p_{i,k}(n) \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k) = \sum_k p_{i,k}(n) p_{k,j}(m)$ \square

Определение 24. Распределение π называется *инвариантным (стационарным)* для переходной матрицы P , если $\pi \cdot P = \pi$

Следствие 4. $\pi^n \cdot P = \pi$

Утверждение 6. У простого симметричного случайного блуждания нет стационарного распределения.

Доказательство. Если бы стационарное распределение $\bar{\pi}$ существовало, то оно удовлетворяло бы функциональному уравнению $\pi(n) = \frac{\pi(n-1) + \pi(n+1)}{2}$, откуда $\pi(n+1) - \pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, и $\pi(n) = cn + \pi(0)$. Но такое решение не удовлетворяет соотношению $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi(n) = 1$, противоречие. \square

Определение 25. Предположим, что последовательность $(\overline{p(n)}) = (\bar{\pi} P^n)_{n=0,1,\dots}$ сходится к некоторому распределению τ по метрике из теоремы Маркова (сумма модулей разностей координат) (для случая конечного пространства значений это равносильно по координатной сходимости). Тогда τ называется *предельным распределением* для начального состояния. π .

Теорема 21.

1. τ - действительно распределение.

2. τ стационарно.

Доказательство. 1. $1 - \epsilon < \sum_i |\tau_i - p_i(n)| - \sum_i p_i(n) \leq \sum_i \tau_i \leq \sum_i |\tau_i - p_i(n)| + \sum_i p_i(n) < \epsilon + 1$ для любого $\epsilon > 0$ и $n > N(\epsilon)$. Неотрицательность же τ_i очевидна (предел неотрицательных величин неотрицателен).

2. $d(\bar{\tau}P, \bar{\tau}) \leq d(\bar{\tau}P, \overline{p(n+1)}) + d(\overline{p(n+1)}, \overline{p(n)}) + d(\overline{p(n)}, \bar{\tau}) < 3\epsilon$ при $n > N(\epsilon)$. Здесь неочевидным является факт, что $d(\bar{x}P, \bar{y}P) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$. Докажем его по аналогии с рассуждениями из теоремы Маркова: $d(\bar{x}P, \bar{y}P) = \sum_j \left| \underbrace{\sum_i x_i p_{i,j} - \sum_i y_i p_{i,j}}_{A_j} \right| = \sum_{j \in J_+} \sum_i (x_i -$

$y_i) p_{i,j} - \sum_{j \in J_-} \sum_i (x_i - y_i) p_{i,j} \leq \sum_j \sum_i |x_i - y_i| p_{i,j} = \sum_i |x_i - y_i| \sum_j p_{i,j} = d(\bar{x}, \bar{y})$, что и требовалось (мы поменяли в выкладках знаки суммирования, потому что ряд сходится абсолютно).

□

1.14 Асимптотическое поведение вероятностей перехода – предельная теорема Маркова для конечной цепи с положительными вероятностями перехода и ее непосредственное обобщение.

Теорема 22. (*Теорема Маркова о финальных вероятностях*). Пусть (X_n) - цепь Маркова, у которой $m < \infty$ состояний. Предположим, что $\forall i, j$ верно неравенство $p_{i,j} \geq \delta > 0$. Тогда существует единственное стационарное распределение $\bar{\pi}$, причём $\max_{i,j} |p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq C(\max\{0, 1 - 2\delta\})^n$, где $C > 0$ - константа.

Доказательство. Мы будем применять теорему о сжимающем отображении. Для этого определим на множестве $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ метрику $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$. Полученное метрическое пространство будет полным, так как метрика d эквивалентна стандартной евклидовой метрике пространства \mathbb{R}^m , которое полно. Также определим отображение $T\bar{x} := \bar{x}P$. Проверим, что оно сжимающее. $d(T\bar{x}, T\bar{y}) = \sum_{j=1}^m \left| \underbrace{\sum_i x_i p_{i,j} - \sum_i y_i p_{i,j}}_{A_j} \right| =$

$\sum_{j \in J_+} \sum_i (x_i - y_i) p_{i,j} - \sum_{j \in J_-} \sum_i (x_i - y_i) p_{i,j} = \sum_i (x_i - y_i) (\sum_{j \in J_+} p_{i,j} - \sum_{j \in J_-} p_{i,j})$ (Здесь $J_+ = \{s | A_s \geq 0\}$, $J_- = \{s | A_s < 0\}$). Возможны три случая:

- $J_- = \emptyset$. Тогда $d(T\bar{x}, T\bar{y}) = \sum_i (x_i - y_i) \sum_j p_{i,j} = 0 \leq C(1 - \delta)^n$
- $J_+ = \emptyset$ - аналогичен предыдущему.
- В J_- и J_+ есть хотя бы одно по одному состоянию. Тогда легко понять, что $\delta \leq \sum_{j \in J_+} p_{i,j} \leq 1 - \delta$ и аналогично с J_- , и $d(T\bar{x}, T\bar{y}) = \sum_i (x_i - y_i) (\sum_{j \in J_+} p_{i,j} - \sum_{j \in J_-} p_{i,j}) \leq \sum_i |x_i - y_i| \cdot |(\sum_{j \in J_+} p_{i,j} - \sum_{j \in J_-} p_{i,j})| \leq (1 - 2\delta) \sum_i |x_i - y_i| = (1 - 2\delta) d(\bar{x}, \bar{y})$. (заметим, что если этот случай реализовался, то $\delta \leq \frac{1}{2}$)

Мы убедились, что отображение сжимающее. Тогда выполнены все условия теоремы о сжимающем отображении, и в нашем метрическом пространстве существует единственная неподвижная точка $\bar{\pi}$. По индукции получаем, что $d(T^n \bar{x}, \bar{\pi}) \leq (1 - 2\delta)^n d(\bar{x}, \bar{\pi}) \leq 2(1 - 2\delta)^n$, так как $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^m |x_i - y_i| \leq \sum_{i=0}^m |x_i| + |y_i| = 2$. Зафиксируем теперь произвольное i и рассмотрим вектор $\bar{x} = (p_{i,j})$. Получим, что $\max_j |p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq \sum_j |p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq 2(1 - 2\delta)^n$ - равномерная оценка по i . □

Следствие 5. Пусть (X_n) - цепь Маркова, у которой $m < \infty$ состояний. Предположим, что для некоторого $N > 0$ и $\forall i, j$ верно неравенство $p_{i,j}(N) \geq \delta > 0$. Тогда существует единственное стационарное распределение $\bar{\pi}$, причём $\max_{i,j} |p_{i,j}(n) - \pi_j| \leq C\rho^n$, где $C > 0$ и $0 \leq \rho < 1$ - некоторые константы.

Доказательство. Будем использовать обозначения из теоремы Маркова и рассмотрим отображение $U = T^N$. По теореме Маркова оно сжимающее, существует единственное стационарное распределение π и $d(U^{kN}\bar{x}, \bar{\pi}) \leq 2(\max\{0, 1 - 2\delta\})^k$. Так как всегда верно неравенство $d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$, то $\sup_{\bar{x}, \bar{y}} d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leq \sup_{\bar{x}, \bar{y}} d(\bar{x}, \bar{y})$. Обозначим через $\Delta_n = \sup_{\bar{x}, \bar{y}} d(T^n\bar{x}, T^n\bar{y})$. Из вышесказанного следуют следующие свойства:

1. (Δ_n) нестрого убывает.
2. $\Delta_{kN} \leq 2(\max\{0, 1 - 2\delta\})^k$.

Тогда легко показать, что эта последовательность убывает к нулю экспоненциально быстро всегда, для этого достаточно взять $\rho = \max\{0, 1 - 2\delta\}^{\frac{1}{N}} C = \frac{2}{\rho^{N-1}}$, тогда $\Delta_{kN+r} \leq \Delta_{kN} \leq 2(\max\{0, 1 - 2\delta\})^k = 2\rho^{kN} \leq \frac{2}{\rho^{N-1}} \rho^{kN+r} = C\rho^{kN+r}$. В итоге получили оценку $d(T^n\bar{x}, T^n\bar{y}) \leq C\rho^n$, откуда требуемое неравенство выводится так же, как в оригинальной теореме. Для полного доказательства осталось лишь проверить, что $\bar{\pi}$ - стационарное распределение для T . Но $d(T\bar{\pi}, \bar{\pi}) = d(T(T^{Nk}\bar{\pi}), T^{Nk}\bar{\pi}) = d(T^{Nk}(T\bar{\pi}), T^{Nk}\bar{\pi}) \leq \Delta_{Nk} \rightarrow 0$, и значит, $d(T\bar{\pi}, \bar{\pi}) = 0$. \square

1.15 Классификация состояний: существенные, несущественные состояния. Эргодические классы существенных состояний. Период состояния ...

Определение 26. Состояние j называется *достижимым* из i , если для некоторого натурального n $p_{i,j}(n) > 0$ (в таком случае мы будем писать $i \rightarrow j$)

Определение 27. Состояния i и j *сообщаются*, если они достижимы друг из друга (обозначим это через $i \leftrightarrow j$)

Определение 28. Состояние i *существенно*, если оно сообщается с любым достижимым из него состоянием (т.е. $\forall j$ из $i \rightarrow j$ следует, что $j \rightarrow i$), и *несущественно* в противном случае.

Утверждение 7. \leftrightarrow - отношение эквивалентности на множестве существенных состояний S .

Определение 29. Классы эквивалентности на S по \leftrightarrow называются *эргодическими классами*.

Определение 30. Для каждого состояния i рассмотрим множество $L_i = \{n > 0 | p_{i,i}(n) > 0\}$. Если $L_i \neq \emptyset$, то можно определить *период состояния* i как $d(i) = \gcd(L_i)$.

Утверждение 8. Если $i \leftrightarrow j$, то $d(i) = d(j)$.

Доказательство. Из существенности этих состояний следует, что $\exists k, l$ такие, что $p_{i,j}(k) > 0$ и $p_{j,i}(l) > 0$. Тогда для $n = d(i) \in L_i$ $p_{j,j}(l+n+k) \geq p_{j,i}(l)p_{i,i}(n)p_{i,j}(k) > 0$ и $p_{j,j}(l+k) \geq p_{j,i}(l)p_{i,j}(k) > 0$, откуда получаем, что числа $n+k+l$ и $k+l$ лежат в L_j . Тогда $d(j) | n+k+l$, $d(j) | k+l \implies d(j) | n = d(i)$. Аналогично, $d(i) | d(j)$. \square

Определение 31. Одинаковый период состояний в одном эргодическом классе называется *периодом класса*.

Теорема 23. Пусть E - эргодический класс с периодом $d > 1$. Тогда $E = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} C_j$, при этом если $x \in C_k$, и $p_{x,y} > 0$, то $y \in C_{k+1 \bmod d}$. Более того, это разбиение единственно с точностью до циклического сдвига индексов.

Доказательство. Выберем произвольное состояние i_0 и определим $C_k = \{j | \exists n p_{i_0,j}(k+nd) > 0\}$. Понятно, что $E = \bigcup_{k=0}^{d-1} C_k$.

Сначала докажем, что эти классы попарно дизъюнкты. Предположим противное: существуют состояние x и различные числа $0 \leq k_1, k_2 < d$ такие, что $p_{x_0,x}(n_1d + k_1) > 0$, $p_{x_0,x}(n_2d + k_2) > 0$. Так как x, x_0 лежат в одном эргодическом классе, то для некоторого r верно $p_{x,x_0}(r) > 0$. Тогда из x_0 в себя же можно добраться как за $n_1d + k_1 + r$ шаг, так за $n_2d + k_2 + r$ шаг, а тогда $d | n_1d + k_1 + r$, $d | n_2d + k_2 + r \implies d | k_1 - k_2$, что невозможно.

Осталось доказать, что другого такого разбиения нет. Действительно, пусть $E = \bigsqcup_{k=0}^{d-1} D_k$ (переходы здесь так же из i -го множества в $i+1$ -ое), и $D_0 \cap C_0 \supset i$ (так как мы можем циклически сдвигать индексы). Если для некоторого m теперь найдётся элемент j такой, что $j \in C_m$, $j \notin D_m$ (другой случай аналогичен), то рассмотрим путь из i в j . По индукции легко показывается, что его t -ое звено (нумеруем с нуля) лежит и в C_t , и в D_t , противоречие. \square

Определение 32. Эти C_i называются *циклическими подклассами* данного эргодического класса.

1.16 Возвратные и невозвратные состояния, критерий возвратности. Возвратность простого случайного блуждания в \mathbb{Z}^d (теорема По́йа). Простое случайное блуждание на $\mathbb{Z} \dots$

Для данного состояния j определим $f_{j,j}(k) = \mathbb{P}(\underbrace{X_k = j, X_{k-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j}_{A_k} | X_0 = j)$ - вероятность впервые вернуться обратно на k -ом шаге. Так как события (A_k) попарно дизъюнкты, то $\mathbb{P}(\bigcup_k A_k | X_0 = j) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{j,j}(k) = f_j \leq 1$ - вероятность хотя бы раз вернуться обратно. Также пусть $p_{j,j}(n)$ - вероятность перехода из j в j за n шагов.

Определение 33. Если $f_j = 1$, то состояние j называется *возвратным*.

Лемма 1. $p_{j,j}(n) = \sum_{k=1}^n f_{j,j}(k) p_{j,j}(n-k)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} p_{j,j}(n) &= \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((X_n = j) \cap A_k | X_0 = j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k | X_0 = j) \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j, X_{k-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = j) = \\ &= \sum_{k=1}^n f_{j,j}(k) \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j) = \sum_{k=1}^n f_{j,j}(k) p_{j,j}(n-k) \end{aligned}$$

\square

Доопределим $f_{j,j}(0) = 0$, $p_{j,j}(0) = 1$, и рассмотрим производящие функции F и G последовательностей $(f_{j,j}(n))$ и $(p_{j,j}(n))$ соответственно. Они определены при $|t| < 1$. Из утверждения выше следует, что $G(t) - 1 = F(t)G(t) \iff G(t) = \frac{1}{1-F(t)}$.

Лемма 2. Последовательность $(a_k)_{k=0}^\infty$ неотрицательна, ограничена сверху константой C и имеет производящую функцию $A(t)$. Тогда $\lim_{t \nearrow 1} A(t) = A(1) = \sum_{k=0}^\infty a_k$.

Доказательство. Во-первых, $A(t) \leq A(1) \implies \limsup_{t \nearrow 1} A(t) \leq A(1)$. Во-вторых, для любого натурального N верно, что $A(t) \geq \sum_{k=0}^N a_k t^k \implies \liminf_{t \nearrow 1} A(t) \geq \liminf_{t \nearrow 1} (\sum_{k=0}^N a_k t^k) = \sum_{k=0}^N a_k \implies \liminf_{t \nearrow 1} A(t) \geq A(1)$. Значит, $\lim_{t \nearrow 1} A(t) = A(1)$. \square

Из леммы следует, что $\sum_{k=0}^\infty p_{j,j}(k) = G(1) = \frac{1}{1-F(1)} = \frac{1}{1-f_j}$. В итоге получаем следующий критерий возвратности состояния:

Теорема 24. Состояние j возвратно \iff ряд $\sum_{k=0}^\infty p_{j,j}(k)$ расходится.

Следствие 6. Если i возвратно, и $i \leftrightarrow j$, то j тоже возвратно.

Доказательство. $\exists k, l \in \mathbb{N}$ такие, что $p_{i,j}(k) > 0$, $p_{j,i}(l) > 0$. Тогда $p_{j,j}(n+k+l) \geq p_{j,i}(l)p_{i,i}(n)p_{i,j}(k) = Cp_{i,i}(n)$, где $C > 0$. Значит, ряд $\sum_{n=0}^\infty p_{j,j}(n+k+l)$ тоже расходится, а вместе с ним и ряд $\sum_{n=0}^\infty p_{j,j}(n)$. \square

Теорема 25. (Теорема По́йа):

1. Простое случайное блуждание на \mathbb{Z} возвратно только при $p = q = \frac{1}{2}$
2. Простое случайное симметричное блуждание на \mathbb{Z}^2 возвратно
3. Простое случайное блуждание на \mathbb{Z}^d , $d > 2$, невозвратно

Во всех случаях мы выходим из начала координат.

Доказательство.

1. $p(2k+1) = 0$, $p(2k) = \binom{2k}{k}(pq)^k = \left(\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\right)(4pq)^k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}(4pq)^k$. если $p = q = \frac{1}{2}$, то ряд из p_k расходится, и блуждание возвратно. Иначе $0 \leq 4pq < 1$, и ряд сходится даже быстрее, чем геометрическая прогрессия.
2. $p(2k+1) = 0$, $p(2k) = \sum_{m=0}^k \mathbb{P}(X_{2k} = 0 \text{ и мы сделали ровно } m \text{ шагов вправо} | X_0 = 0) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{m} \binom{2k-m}{m} \binom{2k-2m}{k-m} = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{m=0}^k \frac{(2k)!}{m!(2k-m)!} \frac{(2k-m)!}{m!(2k-2m)!} \frac{(2k-2m)!}{((k-m)!(k-m)!)} = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{m=0}^k \frac{(2k)!}{(m!)^2((k-m)!)^2} = \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m}^2 = \left(\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi k}$, и ряд из p_k расходится
3. Не доказывали.

\square

Следствие 7. Для любой точки $x \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{P}(\text{хотя бы один раз прийти в } 0 | X_0 = x) = 1$.

Доказательство. Обозначим $f(x) = \mathbb{P}(\text{хотя бы один раз прийти в } 0 | X_0 = x)$. По формуле полной вероятности, получаем $f(x) = \mathbb{P}(\text{хотя бы один раз прийти в } 0 | X_0 = x) = \mathbb{P}(\text{хотя бы один раз прийти в } 0 | X_0 = x, X_1 = x-1) \mathbb{P}(X_1 = x-1) + \mathbb{P}(\text{хотя бы один раз прийти в } 0 | X_0 = x, X_1 = x+1) \mathbb{P}(X_1 = x+1) = \frac{1}{2}(f(x-1) + f(x+1))$. Легко понять, что решение данного функционального уравнения над \mathbb{Z} - $f(x) = ax + b$, причём $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого x , и $f(0) = 1$ по теореме По́йа. из первого свойства получаем, что $a = 0$, а из второго, что $b = 1$. Значит, $f(x) \equiv 1$. \square

Следствие 8. Написав аналогичное функциональное уравнение и рассмотрев $(0, 0)$, его соседей, соседей соседей и т.д., можно доказать данное утверждение для блуждания на \mathbb{Z}^2 .

Определим $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} (X_n)$.

Теорема 26. При $n \rightarrow \infty$ и $j \geq 0$ $\mathbb{P}(M_n \geq j) \approx 2\mathbb{P}(X_n \geq j)$.

Доказательство. $\mathbb{P}(M_n \geq j) = \mathbb{P}(M_n \geq j, X_n \geq j) + \mathbb{P}(M_n \geq j, X_n < j) = \mathbb{P}(X_n \geq j) + \mathbb{P}(X_n > j) = 2\mathbb{P}(X_n \geq j) - \mathbb{P}(X_n) = j \approx 2\mathbb{P}(X_n \geq j)$. В обосновании нуждается равенство $\mathbb{P}(M_n \geq j, X_n < j) = \mathbb{P}(S_n > j)$. Применим *принцип отражения*: рассмотрим траекторию на \mathbb{Z}^2 , попадающую под первое условие, отметим момент, когда она впервые пересекла прямую $y = j$, и отразим часть справа от неё. Получим траекторию, попадающую под второе условие. И наоборот, любая траектория, заканчивающаяся в точке с ординатой $> j$, где-то пересекает прямую $y = j$, и мы можем по ней построить траекторию такую, что $M_n \geq j, X_n < j$. Получили взаимоднозначное соответствие между данными двумя множествами, а значит, и вероятности тоже равны. \square

Теорема 27. (*Задача о разорении игрока*). Есть два игрока, у одного из них a монет, у другого b ($a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). За каждый ход либо первый игрок отдаёт одну монету второму, либо наоборот, причём оба события имеют вероятность $\frac{1}{2}$. Проигрывает игрок, у которого не остаётся монет. Тогда вероятность выигрыша первого игрока равна $\frac{a}{a+b}$.

Доказательство. Пусть в игре находится фиксированное число монет $(a + b)$. Обозначим через ϵ_i последовательность ходов ($\epsilon_i = 1$, если на i -ом ходе монету получил первый игрок и -1 иначе). Рассмотрим событие $A = \{\text{первый игрок проиграл}\}$. $\mathbb{P}(A) = f(x)$. Тогда $f(0) = 1$, $f(a + b) = 0$, а в остальных случаях применим формулу полной вероятности и получим соотношение $f(a) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(A | \epsilon_1 = +1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(A | \epsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}(f(a - 1) + f(a + 1))$. Решение данного функционального уравнения - $f(x) = px + q$, причём мы знаем, что $q = 1$, $0 = p(a + b) + 1$. В итоге получаем $f(a) = \frac{b}{a+b}$, а требуемая вероятность выигрыша равна $\frac{a}{a+b}$. \square

Пусть (X_n) - простое симметричное случайное блуждание на \mathbb{Z} . $T_+(n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{X_j \geq 0, X_{j-1} < 0\}}$ - время пребывания на положительной полуоси. Аналогично определяется $T_-(n)$. Понятно, что $T_+(n) + T_-(n) = n$

Лемма 3. $\mathbb{P}(T_+(2n) = 2k) = p_k p_{n-k}$, где $p_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$

Доказательство. Давыдов ссылался на какую-то книжку. \square

Теорема 28. Для любых $1 \geq b > a \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ $\mathbb{P}(\frac{T_+(2n)}{2n} \in [a, b]) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{b} - \arcsin \sqrt{a})$

Доказательство. $\mathbb{P}(\frac{T_+(2n)}{2n} \in [a, b]) = \sum_{2na \leq 2k \leq 2nb} \mathbb{P}(T_+(2n) = 2k) \approx \sum_{2na \leq 2k \leq 2nb} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \sum_{na \leq k \leq nb} \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} = \sum_{a \leq \frac{k}{n} \leq b} \frac{1}{n} h(\frac{k}{n}) \approx \int_a^b h(x) dx = \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{b} - \arcsin \sqrt{a})$, где $h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ \square

2 Указатель

Начали спрашивать быстрые вопросы, и ты пришёл сюда? Ну ладно ебать, удачи

вероятностное пространство	независимые события
вероятность перехода	неравенство Маркова
ветвящийся процесс	неравенство Чебышева
возвратное состояние	однородная цепь
дискретное вл	период класса
дисперсия	период состояния
достижимое состояние	предельное распределение
задача о разорении игрока	производящая функция
ЗБЧ Бернулли	равновероятные исходы
ЗБЧ Чебышева	распределение св
инвариантное распределение	сообщающиеся состояние
интегральная теорема Лапласа	случайная величина
испытание Бернулли	случайный вектор
ковариация	теорема Вейерштрасса
коэф корреляции	теорема Маркова
критерий невырожденности	теорема Пойа
критерий независимости св	условная вероятность
локальная теорема Лапласа	формула Байеса
матожидание	цепь Маркова
моменты	циклический подкласс
начальное распределение	эргодические классы
независимые св	