Геометрия и Топология

Мастера конспектов

14 января 2020 г.

Честно говоря, ненависть к этой вашей топологии просто невообразимая.

Содержание

1 Билет

Метрические пространства, произведение метрических пространств, пространство $\mathbb{R}^n$.

Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве X, если

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Пара (X, d), где d - метрика в X, называется *метрическим пространством*.

Примеры:

- Модуль разности на прямой;
- Евклидова метрика;
- $X = \mathbb{R}^n, d(x,y) := \max_{i=0}^{n}|x_i - y_i|$

Теорема 1. *(Прямое произведение метрических пространств). Пусть* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *- метрические пространства. Тогда функция*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_y(y_1, y_2)^2}$$

задаёт метрику на $X \times Y$*.*

Доказательство. 1 и 2 аксиомы очевидны. Проверим выполнение третьей. Сделать это несложно, нужно всего лишь написать неравенство и дважды возвести в квадрат. Можно как-нибудь поиспользовать Коши или КБШ, на ваш вкус. □

Пространство $X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$, на котором задана метрика

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

(которая называется *евклидовой*), есть $\mathbb{R}^n$.

2 Билет

Шары и сферы. Открытые множества в метрическом пространстве. Объединения и пересечения открытых множеств.

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

  Множества

  $$B_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\},$$
  $$\overline{B_r}(a) = D_r(a) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}.$$

  называются, соответственно, открытым шаром (или просто шаром) и замкнутым шаром пространства (X,d) с центром в точке a и радиусом r.

- Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subseteq X$. Множество A называется открытым в метрическом пространстве, если

$$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A.$$

Примеры:

  – $\varnothing$, X и $B_r(a)$ открыты в произвольном метрическом пространстве X.
  – В пространстве с дискретной метрикой любое множество открыто.

-

Теорема 2. *В произвольном метрическом пространстве X*

1. *объединение любого набора открытых множеств открыто;*
2. *пересечение конечного набора открытых множеств открыто.*

Доказательство.

1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \exists j \in I : x \in U_j \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_j \subseteq U.$$

2. Пусть семейство $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ — семейство открытых множеств в X. Хотим доказать, что $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ — открыто.

$$x \in U \Rightarrow \forall i : x \in U_i \Rightarrow \exists r_i : B_{r_i}(x) \subseteq U_i;$$
$$r := min\{r_i\} \Rightarrow B_r \subseteq U.$$

$\square$

3 Билет

Топологические пространства. Замкнутые множества, их объединения и пересечения. Замкнутость канторова множества.

Определение: Пусть X - произвольное множество, и множество $\Omega \subset \rho(X)$ обладает следующими свойствами:

- $\emptyset, X \in \Omega$
- Объединение любого набора множеств из Ω также лежит в Ω
- Пересечение любого конечного набора множеств из Ω также лежит в Ω

В таком случае:

- Ω - *топологическая структура* (или *топология*) на X.
- Множество X с выделенной топологической структурой называется *топологическим пространством.*

- Элементы множества Ω называются *открытыми множествами* пространства (X, Ω).

Определение: Множество $F \subseteq X$ называется *замкнутым* в X, если $X \backslash F$ открыто

Теорема 3. *В произвольном топологическом пространстве X:*

1. *$\emptyset$ и X замкнуты*
2. *Объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто*
3. *Пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто*

Доказательство. Замкнутость множеств их всех трёх пунктов проверяется по определению:

1. $\emptyset = X \backslash X$ и $X = X \backslash \emptyset$
2. $X \backslash \bigcap F_i = \bigcup (X \backslash F_i)$
3. $X \backslash \bigcup F_i = \bigcap (X \backslash F_i)$

В пунктах (b) и (c) мы использовали формулы Де Моргана. □

Примеры:

- В дискретной топологии все множества замкнуты
- В антидискретной топологии замкнуты только $\emptyset$ и X
- В метрическом пространстве любое одноточечное множество замкнуто.

  Доказательство. $X \backslash \{a\} = \bigcup_{b \in X \backslash \{a\}} B_{d(b,a)}(b)$ - открыто. □

- В метрическом пространстве любой замкнутый шар замкнут

  Доказательство. Для каждой точки $b \in X \backslash D_r(a)$ можно выбрать открытый шар $B_{d(b,a)-r}(b)$, который, во-первых, корректно определён (так как $b \notin D_r(a) \Rightarrow d(b,a) > r$), а во-вторых, не содержит точек из $D_r(a)$ (так как если $c \in B$ и $c \in D$, то $\Rightarrow d(c,b) < d(b,a) - r \Rightarrow d(c,a) \geq d(c,b) + d(b,a) > r$ и $d(c,a) \leq r$, противоречие) □

- Канторово множество замкнуто в стандартной топологи на $\mathbb{R}$

  Доказательство. Следует из построения множества. □

Утверждение-сюрприз от leon.tyumen: Пусть U открыто в X, а V замкнуто. Тогда:

- $U \backslash V$ открыто в X.

  Доказательство. $U \backslash V = U \cap (X \backslash V)$ □

- $V \backslash U$ замкнуто в X.

  Доказательство. $V \backslash U = V \cap (X \backslash U)$ □

4 Билет

Внутренность, замыкание и граница множества: определение и свойства включения, объединения, пересечения.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Внутренностью* множества A называется объединение всех открытых множество, содержащихся в A, т. е.:

$$\mathrm{Int}A = \bigcup_{U \in \Omega, U \subseteq A} U.$$

Свойства:

- $\mathrm{Int}A$ - открытое множество;
- $\mathrm{Int}A \subseteq A$;
- B открыто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq \mathrm{Int}A$;
- $A = \mathrm{Int}A \Leftrightarrow A$ открыто;
- $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$;
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$;
- $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$;
  Доказательство:
  $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Int}A \ldots$;
  $\supseteq$: $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B \subseteq A \cap B \Rightarrow \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B \subseteq \mathrm{Int}(A \cap B)$.
- $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$;
  Доказательство $\neq$:
  $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$,
  $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}B = \emptyset, \mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется пересечение всех замкнутых множество, содержащих A, т. е.:

$$\mathrm{Cl}A = \bigcap_{X \backslash V \in \Omega, V \supseteq A} V.$$

Свойства:

- $\mathrm{Cl}A$ - замкнутое множество;
- $A \subseteq \mathrm{Cl}A$;
- B замкнуто, $B \supseteq A \to B \supseteq \mathrm{Cl}A$;
- $A = \mathrm{Cl}A \Leftrightarrow A$ замкнуто;
- $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}A$;
- $A \subseteq B \to \mathrm{Cl}A \subseteq \mathrm{Cl}B$;

- $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$;
  Доказательство:
  $\subseteq$: $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq A \cup B$, причём наименьший;
  $\supseteq$: $\mathrm{Cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Cl}A$
- $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$ (на самом деле, даже $\neq$);
- $\mathrm{Cl}A = X \backslash \mathrm{Int}(X \backslash A)$.

Пусть (X, Ω) - топологическое пространство и $A \subseteq X$. Тогда *границей* множества A называется разность его замыкания и внутренности: $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Cl}A \backslash \mathrm{Int}A$.

Свойства:

- $\mathrm{Fr}A$ - замкнутое множество;
- $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \backslash A)$;
- A замкнуто $\Leftrightarrow A \supseteq \mathrm{Fr}A$;
- A открыто $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

5 Билет

Расположение точки относительно множества: внутренние и граничные точки, точки прикосновения, предельные и изолированные точки. Внутренность, замыкание и граница множества: из каких точек они состоят.

- Определения(A - множество в топологическом пространстве):
  1. Окрестностью точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку.
  2. Точка называется внутренней для A, если некоторая её окрестность содержится в A.
  3. Точка называется точкой прикосновения для A, если любая её окрестность пересекается с A.
  4. Точка называется граничной для A, если любая её окрестность пересекается с A и с дополнением A
  5. Точка называется изолированной для A, если она лежит в A и некоторая её окрестность пересекается по A ровно по этой точке.
  6. Точка называется предельной для A, если любая её выколотая окрестность пересекается с A.

  Примеры... :(

- 1. Внутренность множества есть множество его внутренних точек:
     - b — внутр. точка для $A \Rightarrow \exists U_\varepsilon(b) \subseteq A \Rightarrow U_\varepsilon(b) \subseteq IntA \Rightarrow b \in IntA$;
     - $b \in IntA \Rightarrow b$ лежит в A вместе с окрестностью $IntA \Rightarrow b$ — внутренняя точка для A.

2. Замыкание множества есть множество его точек прикосновения: b — точка прикосновения для $A \iff b \notin Int(X \setminus A) \iff b \in ClA$
3. Граница множества есть множество его граничных точек:
   b — граничная точка множества $A \iff (b \in ClA) \wedge (b \in Cl(X \setminus\ A)) \iff (b \in ClA) \wedge (b \notin IntA) \iff b \in FrA$.
4. Замыкание множества есть объединение множеств предельных и изолированных точек:
   $b \in ClA \iff b$ — точка прикосновения $\iff$ любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая выколотая окрестность b пересекается с A, либо существует выколотая окрестность, не пересекающаяся с A(тогда $b \in A$) $\iff$ либо b — предельная точка, либо b — изолированная точка.
5. Замыкание множества есть объединение граничных и внутренних точек:
   $b \in ClA \iff b$ — точка прикосновения $\iff$ любая окрестность b пересекается с $A \iff$ либо любая окрестность b пересекается с $X \setminus A$, либо существует окрестность, которая не пересекается $X \setminus A \iff$ либо b — граничная точка, либо b — внутренняя точка.

6 Билет

Сравнение метрик и топологий (грубее/тоньше). Липшицево эквивалентные метрики.

Определение: Топология Ω_1 *слабее (грубее)* топологии Ω_2 на X, если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. В этом случае топология Ω_2 *сильнее (тоньше)* топологии Ω_1

Пример: Из всех топологичских структур на X антидискретная топология - самая грубая; дискретная топология - самая тонкая.

Теорема 4. *Топология метрики d_1 грубее топологии метрики $d_2 \iff$ в любом шаре метрики d_1 содержится шар метрики d_2 с тем же центром*

Доказательство. " $\Rightarrow$ " шар $B_r^{d_1}(a)$ открыт в $d_2 \Rightarrow$ точка a входит в $B_r^{d_2}(a)$ вместе с некоторой своей окрестностью $B_q^{d_2}(a)$ " $\Leftarrow$ " U открыто в $d_1 \Rightarrow \forall a \in U \exists q > 0 : B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow \exists r > 0 : B_r^{d_2}(a) \subseteq B_q^{d_1}(a) \subseteq U \Rightarrow U$ открыто в d_2 □

Следствие 1: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X. Если $d_1(a,b) \leq d_2(a,b)$ для любых $a, b \in X$, то топология d_1 грубее топологии d_2

Доказательство. $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \forall r > 0 \forall a \in X B_r^{d_2}(a) \subseteq B_r^{d_1}(a) \iff$ топология d_1 грубее топологии d_2 □

Определение: Две метрики в одном множестве называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

Лемма: Пусть (X, d) - метрическое пространство. Тогда для любого $C > 0$ функция $C \cdot d$ - тоже метрика, причём эквивалентная метрике d.

Доказательство. НУ ОЧЕВИДНО ЖЕ □

Следствие 2: Пусть d_1, d_2 - две метрики на X, причём для любых $a, b \in X$ выполнено $d_1(a,b) \leq Cd_2(a,b)$. Тогда топология d_1 грубее топологии d_2.

Доказательство. По лемме d_2 и $C \cdot d_2$ эквивалентны, а по следствию 1 d_1 грубее $C \cdot d_2$ □

Определение: Метрики d_1, d_2 называются *липшицево эквивалентными*, если существуют $c, C > 0$ такие, что для любых $a, b \in X$ $c \cdot d_2(a,b) \leq d_1(a,b) \leq C \cdot d_2(a,b)$

Теорема 5. *Если метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны, то они эквивалентны.*

Доказательство. Согласно следствию 2, каждая из метрик грубее другой $\Rightarrow$ они эквивалентны. □

Упражнение: Верно ли обратное утверждение?

Ответ на упражнение: Нет.

Пример: Три метрики на $\mathbb{R}^2$ - Евклидова, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ и $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ эквивалентны (точки - это (x_1, y_1) и (x_2, y_2)).

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому первая и вторая метрики эквивалентны по предыдущей теореме. Аналогично, $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < 2 \cdot \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, поэтому вторая и третья метрики также эквивалентны. □

Определение: Топологическое пространство называется *метризуемым*, если существует метрика, порождающая его топологию.

Примеры:

- Дискретная топология порождается дискретной метрикой
- X с антидискретной топологией неметризуемо при $|X| > 1$

  Доказательство. Пусть $a, b \in X$ $(a \neq b)$, и $r = d(a,b)$. Тогда шар $B_r(a)$ открыт, непуст (так как $a \in B_r(a)$) и не совпадает со всем пространством (так как $b \notin B_r(a)$) □

7 Билет

База топологии: два определения и их эквивалентность. Критерий базы

Базой топологии Ω называется такой набор Σ открытых множеств, что всякое открытое множество представимо в виде объединения множеств из Σ.

$$\Omega \supseteq \Sigma \text{ - база } \Leftrightarrow \forall U \in \Omega \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W.$$

Теорема 6. *(Второе определение базы). Пусть (X, Ω) - топологическое пространстви и $\Sigma \subseteq \Omega$. Σ - база топологии $\Omega \iff \forall U \in \Omega \forall a \in U \exists V_a \in \Sigma : a \in V_a \subseteq U$.*

Доказательство. Совсем немного формулок:

- $\forall U \in \Omega$ и $\forall a \in U$.
  Σ – база $\Rightarrow \exists \Lambda \subseteq \Sigma : U = \bigcup_{W \in \Lambda} W \Rightarrow \exists V_a \in \Lambda : a \in V_a$
- $\forall U \in \Omega : U = \bigcup_{a \in U} V_a$.

$\square$

Теорема 7. *(Критерий базы). Пусть X - произвольное множество и $\Sigma = \{A_i\}_{i \in I}$ - его покрытие. Σ - база некоторой топологии $\Longleftrightarrow \forall A_s, A_m \in \Sigma \exists J_{s,m} \subseteq I : A_s \cap A_m = \bigcup_{j \in J_{s,m}} A_j$.*

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: $\Rightarrow$ По определению базы и открытости множеств $A_s \cap A_m$. $\Leftarrow$ Пусть Ω - совокупность всевозможных объединений множеств из Σ. Докажем, что Ω - топология на X.

- Σ - покрытие для $X \Rightarrow X \in \Omega$;
- объединение объединений есть объединение;
- $U, V \in \Omega \Rightarrow U = \bigcup_{s \in S \subseteq I} A_s$ и $V = \bigcup_{m \in M \subseteq I} A_m$,

$$U \cap V = \bigcup_{s,m} (A_s \cap A_m) = \bigcup_{s,m} \Bigg(\bigcup_{j \in J_{s,m}} A_j \Bigg) \in \Omega.$$

$\square$

8 Билет

База топологии в точке. Связь между базой топологии и базами в точках. Предбаза топологии, как из неё получается база.

- Пусть (X, Ω) — топологическое пространство, $a \in X$ и $\Lambda \subseteq \Omega . \Lambda$ называется базой топологии (базой окерестностей) в точке a, если:

  1. $\forall U \in \Lambda : a \in U$;
  2. $\forall U_\varepsilon(a) \exists V_a \in \Lambda : V_a \subseteq U_\varepsilon(a)$.

  Следствия

  1. Σ — база топологии $\Rightarrow \forall a \in X \ \Sigma_a := \{U \in \Sigma : a \in U\}$ — база в точке a.
  2. Пусть $\{\Sigma_a\}_{a \in X}$ — семейство баз во всех точках. Тогда $\bigcup_{a \in X} \Sigma_a$ — база топологии.

  Пример

  Множество $\Sigma_a = \{B_r(a) : r \in \mathbb{R}_+\}$ является базой метрического пространства в точке а.

- Набор Δ открытых множеств топологического пространства (X, Ω) называется *предбазой* топологии, если Ω — наименьшая по включению топология, содержащая Δ.

Теорема 8. *Любой набор Δ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X.*

Доказательство. Очевидно, Δ будет предбазой *топологии объединений конечных пересечений подмножеств* Δ $(X \bigcup \left\{\cup\{\cap_{i=1}^{k} W_i\}\right\}, W_i \in \ \Delta)$. □

Пример (*Следствие*)

База топологии является её предбазой.

9 Билет

Топология подпространства. Свойства: открытость и замкнутость подмножеств, база индуцированной топологии, транзитивность, согласованность с метрическим случаем.

Определение: Пусть (X, Ω) - топологическое пространство, и $A \subseteq X$. Тогда совокупность $\Omega_A = \{U \cap A : U \in \Omega\}$ - топология на множестве A.

Доказательство. Просто проверка аксиом топологии. □

Определение:

- Ω_A - *индуцированная топология*
- (A, Ω_A) - *подпространство* пространства (X, Ω).

Свойства:

- Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в самом пространстве
  Пример: $X = \mathbb{R}, A = [0, 1]$. Тогда $[0, 1)$ открыто в A, но не в X.
- Открытые множества открытого подпространства открыты и во всём пространстве.

  Доказательство. U открыто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : U = V \cap A$, т.е. открыто в X, как пересечение двух открытых множеств. □

- Множества, замкнутые в подпространстве, не обязательно замкнуты в самом пространстве

  Пример: $X = \mathbb{R}, A = (0, 1)$. Тогда $(0, \frac{1}{2}] = (0, 1) \backslash (\frac{1}{2}, 1)$ замкнуто в A, но не в X.

- Замкнутые множества замкнутого подпространства замкнуты и во всём пространстве.

  Доказательство. U замкнуто в $A \subseteq X \Rightarrow \exists V \in \Omega : A \backslash U = V \cap A$, но тогда $X \backslash U = (X \backslash A) \cup V$ т.е. открыто в X, как объединение двух открытых множеств. Значит, U замкнуто в X. □

- **База индуцированной топологии:** Если Σ - база топологии Ω, то $\Sigma_A = \{U \cap A : U \in \Sigma\}$ - база топологии Ω_A.

Доказательство. Просто проверка определения базы. $\square$

- **"Транзитивность"индуцированных топологий:** Пусть X - топологическое пространство, и $B \subseteq A \subseteq X$. Тогда $(\Omega_A)_B = \Omega_B$

  Доказательство. Так как $U \cap B = (U \cap A) \cap B$, то $\Omega_B \subseteq (\Omega_A)_B$. Покажем обратное. Пусть $U \in (\Omega_A)_B$. Это значит, что существует открытое в A множество V такое, что $U = B \cap V$. V открыто в $A \Rightarrow$ существует открытое в X множество W такое, что $V = X \cap W$. Но тогда $U = B \cap (X \cap W) = B \cap W \Rightarrow U$ открыто в X. $\square$

- **Связь с метрическим случаем:** Пусть (X, d) - метрическое пространство, и $A \subseteq X$. Рассмотрим метричесоке пространство $(A, d_{|A})$, а также порождаемую его метрикой топологию Ω''_A. Кроме того, рассмотрим топологичесоке пространство (X, Ω), порождаемую метрикой d, и его сужение (A, Ω_A) на A. Тогда $\Omega_A = \Omega''_A$

  Доказательство. $U \in \Omega''_A \iff U = \bigcup B^A_{r_i}(a_i) \iff U \overset{a_i \in A}{=} A \cap \left(\bigcup B^X_{r_i}(a_i)\right) \overset{(!)}{\Longrightarrow} U = A \cap V \iff U \in \Omega_A$. Таким образом, мы доказали одно вложение, и для полного счастья нам не хватает только равносильности в моменте (!). Мы победим, если для данного U, открытого в A, сможем выбрать открытое $V \in X$ такое, что $U = V \cap A$, и V представляется в виде объединения шаров из X с центрами из A. Но действительно, поскольку U открыто в A, существует какое-то $V' : U = V' \cap A$. Рассмотрим $V = \bigcup_{a_i \in V' \cap A} B^X_{r_i}(a_i)$, где $B^X_{r_i}(a_i)$ - шары, полностью содержащиеся в X (они существуют в силу его открытости). Тогда $U = V \cap A$, V открыто в X и удовлетворяет условию, которое мы так от него ждали. $\square$

10 Билет

Непрерывные отображения. Непрерывность композиции и сужения, замена области значений.

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества пространства Y является открытым подмножеством пространства X.

Также можно упомянуть, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Доказательство. $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$. $\square$

Теорема 9. *(О композиции непрерывных). Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ - непрерывны. Если $U \in \Omega_Z$, то $g^{-1}(U) \in \Omega_Y$, значит, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_X$. $\square$

Теорема 10. *(О сужении отображения). Пусть Z - подпространство X и $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда $f|_Z : Z \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. $\mathrm{in}_Z : Z \to X$ непрерывно, а также $f|_Z = f \circ \mathrm{in}_Z$. □

Теорема 11. *(Об изменении области значений). Пусть Z - подпространство Y, $f : X \to Y$ - отображение и $f(X) \subseteq Z$. Пусть $\tilde{f} : X \to Z$, т. ч. $\tilde{f}(x) = f(x)$. Тогда f непрерывная $\iff$ $\tilde{f}$ непрерывна.*

Доказательство. Докажем факт в обе стороны: $\Leftarrow$ $f = \mathrm{in}_Z \circ \tilde{f}$. $\Rightarrow$ $\forall U \in \Omega_Z \exists W \in \Omega_Y : U = W \cup Z$. $\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(W) \in \Omega_X$. □

11 Билет

Непрерывность в точке. Глобальная непрерывность эквивалентна непрерывности в каждой точке. Непрерывность и база окрестностей в точке.

- Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $a \in X$, если $\forall U_\varepsilon(f(a))\ \exists V_\delta(a) : f(V_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$. Пример:(...

  Теорема 12. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывно $\iff$ оно непрерывно в каждой точке пространства.*

  Доказательство:

  ($\Rightarrow$) Очевидно, $V = f^{-1}(U)$.

  ($\Leftarrow$) Пусть $U \in \Omega_Y \Rightarrow \forall a \in f^{-1}(U)\ \exists V_\varepsilon(a) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow a$ — внутренняя точка $f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \Omega_X$

  □

- **Теорема 13.** *Пусть X, Y — топологические пространства, $a \in X, f : X \to Y$ — отображение, Σ_a — база окрестностей в точке a и $\Lambda_{f(a)}$ — база окрестностей в точке $f(a)$. Тогда f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall U \in \Lambda_{f(a)}\ \exists V_a \in \Sigma_a : f(V_a) \subseteq U$.*

  Доказательство:

  ($\Rightarrow$) f непрерывно в точке $a \Rightarrow \big(\forall U \in \Lambda_{f(a)}\ \exists W_\varepsilon(a) : f(W_\varepsilon(a)) \subseteq U\big) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : V \in W_\varepsilon(a))$.

  ($\Leftarrow$) $\big(\forall U_\varepsilon(f(a)) \exists U \in \Lambda_{f(a)} : U \subseteq U_\varepsilon(f(a))\big) \wedge (\exists V \in \Sigma_a : f(V) \subseteq U \subseteq U_\varepsilon(f(a)))$

  □

12 Билет

Непрерывность в метрических пространствах (ϵ–δ). Липшицевы отображения. Функции расстояния.

Следствие из последней теоремы билета 11: Пусть X, Y - метрические пространства, $a \in X$, $f : X \to Y$ - отображение.

- f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$
- f непрерывно в точке $a \in X \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X d_X(x, a) < \delta \to d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$

Определение: Пусть X, Y - метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *липшицевым*, если существует $C > 0$ такое, что $d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a, b)$ для любых $a, b \in X$. Число C называют *константой Липшица* отображения f.

Теорема 14. *Всякое липшицево отображение непрерывно*

Доказательство. Напрямую следует из ϵ-δ определения непрерывности. □

Примеры:

- Зафиксируем точку x_0 метрического пространства (X, d). Тогда отображение $f : X \to \mathbb{R}$, заданное формулой $f(a) = d(x_0, a)$ 1-липшицево и, как следствие, непрерывно.

  Доказательство. Отображение f - 1-липшицево $\iff$ для любых $a, b \in X$ $d(a, b) \geq |f(a) - f(b)| = |d(x_0, a) - d(x_0, b)|$, что верно по неравенству треугольника □

- **Определение:** Пусть A - непустое подмножество метрического пространства (X, d). *Расстоянием от точки $x \in X$ до множества A* называют число $\inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Отображение $f : X \to R$, заданное формулой $f(x) = d(x, A)$, 1-липшицево и, как следствие, непрерывно.

  Доказательство. f - 1-липшицево $\iff$ для любых $a, b \in X$ $d(a, b) \geq |f(a) - f(b)| = |d(a, A) - d(b, A)|$. Докажем неравенство $d(a, b) \geq d(b, A) - d(a, A)$, второе неравенство доказывается аналогично. Для любого $\epsilon > 0$ найдётся точка $z \in A$ такая, что $0 < d(a, z) - d(a, A) < \epsilon$. Также можно заметить, что $d(b, A) \leq d(b, z)$. Тогда $d(b, A) \leq d(b, z) \leq d(b, a) + d(a, z) < d(b, a) + d(a, A) + \epsilon \Longrightarrow d(b, a) \geq d(b, A) - d(a, A)$. □

- Метрика d на множестве X является $\sqrt{2}$-липшицевым и, как следствие, непрерывным отображением $f : X \times X \to \mathbb{R}$

  Доказательство. Пусть $\widetilde{d}$ - стандартная метрика на $X \times X$. Пусть (x, y) и (a, b) - две точки из $X \times X$. Тогда по неравенству многоугольника (или просто два раза применённому неравенству треугольника) $|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b) \leq \sqrt{2}\sqrt{d(x, a)^2 + d(y, b)^2} = \sqrt{2}\widetilde{d}\big((x, y), (a, b)\big)$ □

13 Билет

Фундаментальные покрытия. Их применение для доказательства непрерывности функций. Фундаментальность открытых и конечных замкнутых покрытий.

Покрытие $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ топологического пространства X называется *фундаментальным*, если

$$\forall U \subseteq X : (\forall A_i \in \Gamma, U \cap A_i \text{ открыто в } A_i) \Rightarrow (U \text{ открыто в } X).$$

Теорема 15. *Пусть X, Y - топологические пространства, $\Gamma = \{A_i\}_{i \in I}$ - фундаментальное покрытие X и $f : X \to Y$ - отображение. Если $\forall A_i \in \Gamma$ сужение $f|_{A_i}$ непрерывно, то и само отображение f непрерывно.*

Доказательство. Хотим показать, что прообраз любого V, открытого в Y, открыт в X. Открытое в A_i $(f|_{A_i})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$, так как $f|_{A_i}$ непрерывна. Тогда $f^{-1}(V) \cap A_i$ открыто в A_i. Пусть $U = f^{-1}(V) \in X$, и для любого i мы тогда знаем, что $U \cap A_i$ открыто в A_i. Тогда из фундаментальности, U открыто в X. □

Покрытие топологического пространства называется:

- *открытым*, если оно стоит из открытых множеств;
- *замкнутым*, если оно состоит из замкнутых множеств;
- *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Теорема 16. *Всякое открытое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ открыто в A, а значит открыто в X. Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть объединение открытых множеств, а значит само открыто. Таким образом Γ фундаментально. □

Теорема 17. *Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство. (by lounres.) Пусть дано покрытие Γ и $U \subseteq X$, что для всякого $A \in \Gamma$ множество $U \cap A$ замкнуто в A, а значит замкнуто в X. Тогда

$$U = U \cap X = \bigcup_{A \in \Gamma} U \cap A$$

есть конечное объединение замкнутых множеств, а значит само замкнуто. Таким образом Γ фундаментально. □

14 Билет

Фундаментальность локально конечных замкнутых покрытий.

Покрытие называют *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия.

Пример... :(

Теорема 18. *Всякое локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.*

Доказательство:

Пусть $\{A_i\}$ — локально конечное замкнутое покрытие. Хотим проверить его фундаментальность;

1. Пусть U — произвольное множество, такое что $U \cap A_i$ — открытое в A_i.
2. В каждой точке b пространства рассмотрим окрестность U_b, перескающуюся с конечным числом множеств покрытия(локальная конечность). Тогда $\{U_b\}$ — открытое покрытие пространства $\Rightarrow$ оно фундаментально(13 билет).

3. Зафиксируем b, тогда $\{U_b \cap A_i\}$ — конечное замкнутое покрытие $U_b \Rightarrow \{U_b \cap A_i\}$ — фундаментальное покрытие U_b(13 билет).

Покажем, что $\forall b\,((U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i))$ — открыто в $U_b \cap A_i \Rightarrow U \cap U_b$ — открыто в U_b(фундаментальность из п.3) $\Rightarrow U$ — открыто в пространстве(фундаментальность п.2).

Действительно, $(U \cap U_b) \cap (U_b \cap A_i) = (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i), U \cap A_i$ — открытое в A_i(п.1) $\Rightarrow U \cap A_i = V \cap A_i$, где V — открытое во всём пространстве(определение открытого в подпространстве) $\Rightarrow (U \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = (V \cap A_i) \cap (U_b \cap A_i) = V \cap (U_b \cap A_i)$ — открытое в $U_b \cap A_i$

□

15 Билет

Топология прямого произведения (конечный случай). Тихоновская топология. Согласованность с метрическим случаем.

Теорема 19.

- *Пусть (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) - топологические пространства. Тогда $\Sigma = \{U \times V : U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y\}$ является базой топологии $\Omega_{X\times Y}$ на $X \times Y$*
- *Если Σ_X и Σ_Y - базы топологий (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) соответственно, то $\Lambda = \{U \times V : U \in \Sigma_X, V \in \Sigma_Y\}$ является базой топологии на $X \times Y$*

Доказательство.

- Воспользуемся критерием базы. Во-первых, Σ - покрытие $X \times Y$, так как $X \times Y \in \Sigma$. Во-вторых, пересечение любых двух элементов из Σ представляется в виде объединения нескольких (в данном случе одного) элементов из Σ: $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ $(U_1, U_2 \in \Omega_X,\ V_1, V_2 \in \Omega_Y)$
- Аналогично предыдущему пункту доказываем, что Λ - база некоторой топологии $\Omega'_{X\times Y}$ на $X \times Y$, причём $\Omega'_{X\times Y} \subseteq \Omega_{X\times Y}$. Поэтому достаточно показать, что всякий элемент из $\Omega_{X\times Y}$ представляется в виде объединения элементов из $\Omega'_{X\times Y}$. Но это действительно так: Если $A \times B \in \Omega_{X\times Y}$, то $A = \bigcup A_i (A_i \in \Sigma_X)$, $B = \bigcup B_j (B_j \in \Sigma_Y)$, и $A \times B = \bigcup (A_i \times B_j)$

□

Определение: $X \times Y$ с описанной выше топологией называется *произведением* топологических пространств (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y), а сама топология называется *стандартной.*

Обозначения:

- $X = \prod_{i \in I} X_i$ - произведение топологических пространств.
- Элементами X являются такие функции $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ что $x(i) \in X_i$
- $p_i : X \to X_i$ - координатная проекция, где $p_i(x) = x(i)$.

ПРИМЕРЫ? КАКИЕ ПРИМЕРЫ? В ПРЕЗЕНТАЦИИ НЕ БЫЛО НИКАКИХ ПРИМЕРОВ! Ну при желании можно сказать, что можно задать топологию на $\mathbb{R}^2$ не как обычно, а через произвдение топологий, и получить "топологию квадратиков а на самом деле это будет одно и то же (см, например, второе определение базы)

Определение: Пусть $\{(X_i, \Omega_i)\}_{i\in I}$ - семейство топологических пространств. *Тихоновская топология* на $X = \prod_{i\in I} X_i$ задаётся предбазой, состоящей из всевозможных подмножеств вида $p_i^{-1}(U)$, где $i \in I$ и $U \in \Omega_i$

Теорема 20. *Пусть (X, d_x) и (Y, d_y) - два метрических пространства. Метрики d_x, d_y задают метрику на $X \times Y$, которая порождает топологию Ω_1. Кроме того, метрики d_x, d_y порождают топологии Ω_X, Ω_Y на множествах X, Y соответственно, которые в свою очередь образуют топологию Ω_2 на $X \times Y$, Тогда $\Omega_1 = \Omega_2$.*

Доказательство. Рассмотрим на $X\times Y$ метрику $\widetilde{d}$: $\widetilde{d}\big((x,y),(a,b)\big) = \max\{d_X(x,a), d_Y(y,b)\}$. Легко проверить, что $\widetilde{d} \le d \le \sqrt{2}\widetilde{d} \Rightarrow \widetilde{d}$ и d липшицево эквиваленты, а тогда она задают одну топологию.

$\Sigma_1 = \{B_r^{\widetilde{d}}(x,y) : (x,y) \in X \times Y\}$ - база топологии Ω_1. Заметим, что $B_r^{\widetilde{d}}(x,y) = B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y)$ и рассмотрим множество $\Sigma_2 = \{B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y) : (x,y) \in X\times Y\}$. Докажем, что Σ_2 - база топологии Ω_2. Попытаемся проверить второе определение базы, для этого рассмотрим произвольные $U \in \Sigma_2$ и $(x_0,y_0) \in U$ и попытаемся найти элемент $V \in \Sigma_2$ такой, что $(x_0,y_0) \in V \subseteq U$. Так как $(x_0,y_0) \in U$, то существуют открытые $U_x \in \Omega_X, U_y \in \Omega_Y$ такие, что $(x_0,y_0) \in U_x \times U_y \subseteq U$. Но тогда существуют шары $B_{r_x}^{d_x}(x_0) \subseteq U_x$ и $B_{r_y}^{d_y}(y_0) \subseteq U_y$, откуда следует, что $(x_0,y_0) \in V = B_r^{\widetilde{d}}(x_0,y_0) \in U$ $(r = max(r_x,r_y))$, что и требовалось. □

16 Билет

Непрерывность и произведение: проекции, теорема о покоординатной непрерывности.

$X = \Pi_{i\in I} X_i$ - произвеиение топологических пространств.

Теорема 21. *Координатные проекции $p_i : X \to X_i$ непрерывны.*

Доказательство. $\forall U$ открытого в X_i: $p_i^{-1}(U)$ - элемент предбазы Тихоновской топологии (по определению), следовательно открыт в X. □

(Отображение в произведение двух) Пусть X, Y, Z – топологические пространства. Любое отображение $f : Z \to X \times Y$ имеет вид

$$f(z) = (f_1(z), f_1(z)), \text{ для всех } z \in Z,$$

где $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$ - некоторые отображения, называемые *компонентами* отображениями f.

(Отображение в произведение дохуя) Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ - топологические пространства. *Компонентами* отображения $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ называются отображения $f_i : Z \to X_i$, задаваемые формулами

$$f_i := p_i \circ f$$

Теорема 22. *(О покоординатной непрерывности). Пусть Z и $\{X_i\}_{i \in I}$ - топологические пространства, $X = \Pi_{i \in I} X_i$ - тихоновское произведение. Тогда отображение $f : Z \to \Pi_{i \in I} X_i$ непрерывно, равносильно тому что каждая его компонента f_i непрерывна.*

Доказательство. Докажем в обе стороны:

$\Rightarrow$ $f_i = p_i \circ f$, при этом p_i и f непрерывны, следовательно, и f_i непрерывна.

$\Leftarrow$ Сначала для любого U из предбазы X существует такой индекс $i \in I$ и $V \in \Omega_i$ такой, что $U = p_i^{-1}(V)$. Тогда $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(V)) = (p_i \circ f)^{-1}(U) = f_i^{-1}(V)$ - открытое, так как f_i непрерывно.

$\forall W$ открытого в X, $W = \bigcup$ (конечных пересечений эл-в предбазы) (далее - $\bigcup_{fuck}$)

$f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{fuck}) = \bigcup f^{-1}$(конечных пересечений) $= \bigcup$ (конечных пересечений прообразов элементов предбазы)

□

Дополнительно от keba4ok: Также для проверки на непрерывность $f : X \to Y$ достаточно проверить открытость $f^{-1}(U)$ для всякого U из какой-либо базы или предбазы Y.

17 Билет

Пример функции на плоскости, непрерывной по каждой координате, но разрывной.

Функция : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная уравнением

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Непрерывна по каждой координате, но разрывна в точке (0,0).

Доказательство. Док-во непрерывности функции $f(x) = \frac{2cx}{x^2+c^2}$ полагаем, не представляет труда доказать студентам, получившим 5 за матанализ. А в точке (0,0) функция разрывна, так как при $x = y \neq 0$ функция равна 1. □

18 Билет

Арифметические операции. Сумма, произведение, частное непрерывных функций.

Теорема 23. *Следующие функции являются непрерывными из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ в стандартной метрике:*

- *f(x, y)=x+y*
- *f(x, y)=xy*

Доказательство.

- Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Тогда $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow |x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, откуда получаем, что $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_)| < 2\delta = \epsilon$
- Положим $\delta = \frac{\epsilon}{2\max\{|x_0|, |y_0|\}+1}$. Также пусть $x = x_0 + a, y = y_0 + b$, $|a|, |b| < \delta$. Тогда $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |ay_0 + bx_0 + ab| < \delta|y_0| + \delta|x_0| + \delta^2 \leq \delta(2\max\{|x_0|, |y_0|\} + 1) \leq \epsilon$

□

Следствие: Пусть X - топологическое пространство, и $f, g : X \to \mathbb{R}$ - непрерывные функции. Тогда функции $f + g$ и fg также непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F : X \to \mathbb{R}^2$, действующую по правилу $F(x) = (f(x), g(x))$. Она непрерывна по каждой координате $\Rightarrow$ она непрерывна. Тогда $f + g = (x + y) \circ F$ - непрерывна как композиция непрерывных функций. Аналогично для функции fg. □

Следствие: Пусть X - топологическое пространство, а функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны. Тогда функция $\frac{f}{g}$ непрерывна на своей области определения

Доказательство. Пусть $D = \{a \in X : g(a) \neq 0\}$ - область определения функции $\frac{f}{g}$ и подпространство в X. Тогда $g_{|D}$ - непрерывная функция на D (так как $(g_{|D}^{-1}(U) = g^{-1}(U) \cap D$. Рассмотрим также непрерывную функцию $h : \mathbb{R} \backslash \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $h \circ = \frac{1}{g}$ также непрерывна, и $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ тоже непрерывна на D. □

19 Билет

Гомеоморфизм. Гомеоморфные интервалы на прямой, $S^n \backslash \{p\}$ и $\mathbb{R}^n$.

Пусть X, Y - топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если

- f - биекция;
- f - непрерывно;
- f^{-1} - непрерывно;

Говорят, что пространство X *гомеоморфно* пространству Y ($X \simeq Y$), если существует гомеоморфизм $X \to Y$.

Дополнительно от keba4ok: Гомеоморфность - отношение эквивалентности среди топологических пространств.

Примеры на прямой, плоскости и т.д....:(

20 Билет

Аксиомы счётности. Теорема Линделёфа.

Будем считать, что множество X счётно, если существует инъекция $X \to \mathbb{N}$ (всякое подмножество счётного - счётно).

1. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, если оно обладает счётными базами во всех своих точках.
2. Топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме счётности*, если оно имеет счётную базу.
3. Топологическое свойство называется *наследственным*, если из того, что пространство X обладает этим свойством, следует, что любое его подпространство тоже им обладает(аналогично про наследование при произведении).

Свойства:

1. $2AC \Rightarrow 1AC$:

   см. 8 билет
2. Обратное неверно:

   X — несчётное множество с дискретной метрикой. Тогда в каждой точке есть счётная база - сама точка, но при этом счётной базы всего пространства нет — каждый элемент должен входить в базу.
3. Всякое метрическое пространство удовлетворяет $1AC$:

   Шары вида $B_{\frac{1}{n}}(a)$, где $n \in \mathbb{N}$ — база в точке a.
4. $2AC$ наследственна(в обоих смыслах):
   - Пересечём базу с подмножеством — получится счётная база подпространства.
   - Рассмотрим декартово произведение счётных баз — получим счётную базу декартова произведения пространств.

Теорема 24 (Теорема Линделёфа)**.** *Если пространство удовлетворяет $2AC$, то из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие X, а Σ — счётная база. Рассмотрим $\Lambda := \{V \in \Sigma | \exists U_i : V \in U_i\}$. Заметим, что Λ — покрытие любого U_i(из определения базы) $\Rightarrow \Lambda$ — покрытие X, тогда каждому $V \in \Lambda$ сопоставим произвольное U_j, в котором оно лежит. Тогда $\{U_j\}$ — счётное покрытие X. □

21 Билет

Сепарабельные пространства. Сепарабельность и счетная база.

Определение: Подмножество A топологического пространства X называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Переформулировка: A всюду плотно $\iff$ любая точка из X - точка прикосновения для $A \iff \forall U \in \Omega \backslash \{\emptyset\} U \cap A \neq \emptyset$

Пример: $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Определение: Топологическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит счётное всюду плотное множество.

Теорема 25.

- *Если топологическое пространство удовлетворяет* $2AC$*, то оно сепарабельно.*
- *Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет* $2AC$*.*

Доказательство.

- $2AC \implies$ существует счётная база Σ. Из каждого множества $U \in \Sigma$ выберем одну точку. Множество A выбранных точек счётно и всюду плотно (см. переформулировку всюду плотного множества).
- Пусть A - счётное всюду плотное множество. Рассмотрим $\Sigma = \{B_{\frac{1}{n}}(a) : a \in A, \in \mathbb{N}\}$, докажем, что это база. Проверим второе определение базы: выберем произвольное открытое U и произвольную точку $X \in U$. Существует такое k, что $B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$. Но $B_{\frac{1}{2k}}(x) \cap A \neq \emptyset$, то есть содержит какую-то точку a. Тогда шар $B_{\frac{1}{2k}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{k}}(x) \subseteq U$, и он открыт.

□

22 Билет

Аксиомы отделимости $T_1 - T_3$. Замкнутость диагонали в $X \times X$. Критерий регулярности.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* T_1, если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме отдельности* T_2, если любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющий аксиоме T_2, называются *хаусдорфовыми*.

Теорема 26. *(Замкнутость ёбаной диагонали). X хаусдорфово равносильно тому, что $\{(a,a) : a \in X\}$ замкнуто в $X \times X$.*

Доказательство. (by lounres)

$\Rightarrow$ Покажем, что $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Пусть $(b, c) \notin \Delta$. Тогда по T_2 есть окрестности U_b и U_c точек b и c в X, что $U_b \cap U_c = \varnothing$. Следовательно $(U_b \times U_c) \cap \Delta = \varnothing$, тогда $U_b \times U_c$ — окрестность (b, c), лежащая в $(X \times X) \setminus \Delta$ как подмножество.

$\Leftarrow$ Пусть b и c - различные точки X. Тогда $(b, c) \notin \Delta$. Поскольку Δ замкнуто, то $(X \times X) \setminus \Delta$ открыто. Поскольку $\{U \times V \mid U, V \in \Omega_X\}$ — база $X \times X$, то есть некоторые открытые в X множества U и V, что

$$(b, c) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta.$$

Следовательно, $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$, а значит, $U \cap V = \varnothing$. При этом $b \in U$, а $c \in V$. Значит U и V — непересекающиеся окрестности b и c. Поскольку b и c случайны, то выполнена T_2. □

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости* T_3, если в нём любое замкнутое множество илюбая не содержащаяся в этом множестве точка обладают непересекающимися окрестностями. Пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются *регулярными.*

Теорема 27. *(Критерий блядской регулярности). X регулярно тогда и только тогда, когда удовлетворяет T_1 и $\forall a \in X$ любой окрестности U_a существует окрестность V_a такая, что $Cl V_a \subseteq U_a$.*

Доказательство. (by lounres)

$\Rightarrow$ Пусть U_a — некоторая окрестность некоторой точки a в X. Тогда $X \setminus U_a$ замкнуто. По T_3 у $X \setminus U_a$ и a есть непересекающиеся окрестности W_a и V_a соответственно. Тогда $X \setminus W_a$ замкнуто; при этом $W_a \supseteq X \setminus U_a$, следовательно $X \setminus W_a \subseteq U_a$; аналогично имеем, что $V_a \subseteq X \setminus W_a$. Следовательно

$$\mathrm{Cl}(V_a) \subseteq X \setminus W_a \subseteq U_a.$$

Таким образом мы нашли искомую окрестность V_a.

$\Leftarrow$ Пусть даны замкнутое F и точка a вне него. Тогда $U_a := X \setminus F$ — окрестность a. Тогда есть окрестность V_a точки a, что $\mathrm{Cl}(V_a) \subseteq U_a$. Следовательно $\mathrm{Int}(X \setminus V_a) \supseteq X \setminus U_a = F$. Значит $\mathrm{Int}(X \setminus V_a)$ и V_a — непересекающиеся окрестности F и a. □

23 Билет

Аксиома отделимости T_4. Нормальномть метрических пространств.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *четвёртой аксиоме отделимости*, если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями.

Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, назыывается *нормальным.*

Теорема 28. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть (X,d) — метрическое пространство. В нём выполняется $T_1(r = \frac{d(x,y)}{2})$. Покажем T_4 — пусть A,B — непересекающиеся замкнутые множества. $X \setminus B$ — открытое и содержит $A \Rightarrow \forall a \in A \exists r_a : B_{r_a}(a) \subseteq X \setminus B \iff B_{r_a}(a) \cap B = \varnothing$. Аналогично для каждой точки b из B находим окрестность $B_{r_b}(b)$, не пересекающуюся с A. Рассмотрим $U = \bigcup B_{\frac{r_a}{2}}(a)$ и $V = \bigcup B_{\frac{r_b}{2}}(b)$. Допустим $z \in (U \cap V)$(иначе мы нашли две непересекающиеся окрестности, т.к. объединение открытых - открыто). $z \in (U \cap V) \Rightarrow \exists x \in A, y \in B : z \in (B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap B_{\frac{r_y}{2}}(y)) \Rightarrow d(x,y) \leq \frac{r_x}{2} + \frac{r_y}{2} \leq max(r_x,r_y) \Rightarrow (x \in B_{r_y}y) or (y \in B_{r_x}(x))$— противоречие. □

Дополнительно от artemi.sav:
X — нормально $\Rightarrow X$ — регулярно $\Rightarrow X$ — хаусдорфо $\Rightarrow X$ удовлетворяет T_1.
Заметим, что из T_1 следует, что любая точка - замкнута, из чего следует, что каждое следующее условие — частный случай предыдущего (например, X — нормально, то есть удовлетворяет T_4 и T_1, вместо одного замкнутого множества в условии T_4 можем взять точку и получить T_3, то есть регулярность).

24 Билет

Связность. Связные подмножества прямой.

Определение: Топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

Примечание: Когда говорят, что какое-то множество связно, то всегда имеют в виду, что множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно- должно быть ясно из контекста) что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

Теорема 29. *Следующие утверждения эквивалентны связности пространства X:*

- *X нельзя разбить на два непустых замкнутых множества*
- *Любое подмножество X, открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем X.*
- *Не существует непрерывного сюръективного отображения из X в пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией.*

Доказательство.

- U и V открыты в $X \iff V = X \backslash U$ и $U = X \backslash V$ замкнуты в X.

- Если $U \subseteq X$ открыто и замкнуто одновременно, то $V = X \backslash U$ тоже открыто и замкнуто одновременно, причём $U \sqcup V = X$. Значит, либо U путо или совпадает со всем X, либо X несвязно.
- Для произвольного сюръективного отображения f рассмотрим $U = f^{-1}(0), V = f^{-1}(1)$. Заметим, что $U \sqcup V = X$. Так как $\{0\}$ и $\{1\}$ открыты, то открытость U, V равносильна непрерывности f.

$\square$

Примеры:

- Антидискретное пространство связно.
- Дискретное пространство из ≥ 2 точек несвязно.
- $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ несвязно.
- $[0,1] \cup [2,3]$ несвязно.

Теорема 30. *Отрезок* $[0,1]$ *связен.*

Доказательство. $X = [0,1]$ - подпространство в $\mathbb{R}$. Предположим противное: $X = U \sqcup V$, U и V непусты и открыты. Не умаляя общности, пусть $0 \in U$. Тогда 0 входит в U с некоторой своей окрестностью $[0,a)$. Рассмотрим $t = \sup\{x : [0,x) \subseteq U\}$. Очевидно, что $t \in X$. Возможны два случая: $t \in U$ или $t \in V$. В первом случае t входит в U с некоторой своей окрестностью, и, так как $t < 1$, мы можем "чуть-чуть подвинуть"границу вправо, противоречие. Во втором же случае t входит в V с некоторой своей окрестностью, и мы получаем противоречие по аналогичной причине. $\square$

Теорема 31. *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- X *связно*
- X *выпукло (т.е.* $\forall a < b \in X$ *верно* $[a,b] \subseteq X$*)*
- X *есть интервал (в широком смысле), точка или пустое множество.*

Доказательство.

- (1) $\implies$ (2): Предположим противное: X не выпукло. Тогда существуют $a < b < c$ такие, что $a, c \in X$ и $b \notin X$. Тогда $X = \big((-\infty, b) \cap X\big) \sqcup \big((b, \infty) \cap X\big)$. Оба множества непусты, так как первое содержит a, а второе - c. Противоречие со связностью X.

- (2) $\implies$ (1): Предположим, $X = U \sqcup V$, U и V непусты и открыты в X. Выберем $a \in U$, $B \in V$. Не умаляя общности, $a < b$. Тогда отрезок $[a,b]$ разбивается на два непустых открытых в нём мнжожества - $[a,b] \cap U$ и $[a,b] \cap V$, что противоречит его связности.

- (2) $\implies$ (3): Либо X пусто (и всё хорошо), либо существует точка $a \in X$. Рассмотрим $l = \inf\{x : x \in X\}, r = \sup\{x : x \in X\}$. Либо $l = -\infty$, и тогда $(\infty, a] \subseteq X$, либо l конечно, и тогда $[l, a] \subseteq X$ или $(l, a] \subseteq X$, и ничего левее не принадлежит. Аналогично с r. В любом случае получаем требуемое.

- (3) $\implies$ (2): Очевидно.

$\square$

25 Билет

Непрерывный образ связного пространства. Теорема о промежуточном значении.

Теорема 32. *(Непрерывный образ связного пространства связен). Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение и пространство X связно, то и множество $f(X)$ связно.*

Доказательство. От противного, пусть $f(X)$ несвязно. Тогда $f(X) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, где U, V непусты и открыты.

Следовательно, мы имеем разбиение пространства X на два непустых открытых множества - $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, что противоречит связности пространства X. $\square$

Теорема 33. *(О промежуточном значении). Если $f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывное отображение, и пространство X связно, тогда для любых $a, b \in f(X)$ множество $f(X)$ содержит все числа между a и b.*

Доказательство. $f(X)$ связно $\Rightarrow$ $f(X)$ выпукло $\Rightarrow$ $f(x)$ содержит $[a,b]$. $\square$

26 Билет

Компоненты связности. Разбиение пространства на компоненты связности.

Компонентой связности пространства X называется всякое его максимальное по включению связное подмножество.

Лемма. *Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.*

Доказательство. Обозначим это семейство множеств за $\{A_i\}, Y := \bigcup A_i$. Допустим Y — несвязно, тогда $Y = U \cup V$, где U и V — открытые непересекающиеся множества. Заметим, что $\forall A_i : A_i \subseteq U \vee A_i \subseteq V$(иначе $A_i = (A_i \cap U) \cup (A_i \cap V)$, где $A_i \cap U$ и $A_i \cap V$ — непустые открыте подмножества в A_i). Зафиксируем A_0, НУО $A_0 \subseteq V \Rightarrow \forall A_i (A_i \cap A_0 \neq \varnothing) \Rightarrow \forall A_i \subseteq V \Rightarrow U = \varnothing$, противоречие. $\square$

Теорема 34.

1. *Каждая точка пространства X содержится в некоторой компоненте связности.*
2. *Различные компоненты связности пространства X не пересекаются.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in X$. Тогда множество A — объединение всех связных множеств, содержащих x, является искомой компонентой связности(оно связно по лемме и наибольшее по включению по своему определению).

2. Пусть U,V — пересекающиеся компоненты связности, тогда $U \cup V$ — связное множество(по лемме), содержащее U и V, что противоречит определению компоненты связности.

$\square$

27 Билет

Свойства компонент связности, их замкнутость.

Свойства компонент связности:

- Любое связное множество содержится в некоторой его компоненте связности.

  Доказательство. Пусть A - связное множество пространства X, а C - такая его компонента свзяности, что $A \cap C \neq \emptyset$. Тогда $C' = A \cup C$ также связно. Значит, $A \subseteq C$, так как иначе получается противоречие с максимальностью C. $\square$

- Две точки содержатся в одной компоненте связности $\iff$ они содержатся в одном связном подмножестве.

- Пространство несвязно $\iff$ оно имеет хотя бы две компоненты связности.

Следствие: Число компонент связности - топологический инвариант.

Доказательство. Предположим, $X \cong Y$. Докажем, что если a, b лежат в одной компоненте связности C множества X, то $f(a), f(b)$ лежат в одной компоненте связности множества Y. Действительно, предположим, $f(C)$ несвязно. Тогда $f(C) = U \sqcup V$, где U, V непусты и открыты в Y. Тогда $C = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$, что противоречит его связности. Аналогично, свойство точек лежать в одном связном множестве сохраняется и при обратном преобразовании. Значит, любая компонента связности C в X перейдёт именно в компоненту связности $f(C)$ множества Y. $\square$

Лемма: Замыкание связного множества связно.

Доказательство. Предположим противное: $\mathrm{Cl}A = U \sqcup V$, где U, V открыты в $\mathrm{Cl}A$ и непусты. Тогда A в силу связности целиком лежит либо в U, либо в V, не умаляя общности в U. Но так как V открыто, то U замкнуто, и $A \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}A$, откуда следует, что $U = \mathrm{Cl}A$. $\square$

Теорема 35. *Каждая компонента связности топологического пространства замкнутоа.*

Доказательство. Пусть $C \subseteq X$ -компонента связности. Тогда $C \subseteq \mathrm{Cl}C$, причём это вложение строгое, если C не замкнуто. В этом случае получаем противоречие с максимальностью компоненты связности. $\square$

28 Билет

Линейная связность. Непрерывный образ линейно связного множества. Компоненты линейной связности. Пространства с линейно связными окрестностями.

Путём в топологическом пространства X называется непрерывное отображение $\alpha : [0,1] \to X$. Началом пути α называется точка $\alpha(0)$, а концом - точка $\alpha(1)$. При этом говорят, что путь α соединяет эти дву точки.

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любые две точки можно соединить путём.

Теорема 36. *(Линейная связность и непрерывность). Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение и пространство X линейно связер, то и пространство $f(X)$ линейно связно.*

Доказательство. Если α - путь, соединяющий точки $a,b \in X$, то $f \circ \alpha$ - путь, соединяющий точки $f(a),f(b) \in f(X)$. □

Вообще, получается, что *соединимость путём* - отношение эквивалентности на множестве точек пространства. Доказать можно, но не хочется. Рефлексивность и симметричность очевидны, давайте проверим транзитивность.

Доказательство. Если α - путь из a в b, а β - путь из b в c, то

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{for } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & \text{for } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Данный путь искомый, так как непрерывность γ следует из фундаментальности покрытия $\{[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]\}$ и непрерывности $\alpha(2t)$, $\beta(2t-1)$.

□

Компонентой линейной связности пространства X называется класс эквивалентности отношения соединимости путём.

Теорема 37. *(Для понта от keba4ok:) Всякое линейное пространство связно.*

Следствие: компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.

Теорема 38. *(О точках со связной окрестностью). В топологическом пространстве, каждая точка которого имеет линейно связную окрестность,*

- *Компоненты линейной связности открыты;*
- *Компоненты линейной связности совпадают с компонентами связности.*

Доказательство.

- Пусть W - компонента линейной связности, $a \in W$ и U - линейно связная окрестность точки a. Тогда $U \subseteq W$, влечёт открытость W.

- Пусть $W_i, i \in I$ - компоненты линейной связности пространства. По предыдущему пункту, каждое W_i открыто. Пусть A - компонента связности. В силу связности, A не может пересекать несколько разных

□

29 Билет

Линейная связность влечёт связность. Пример связного, но не линейно связного пространства.

Теорема 39. *Всякое линейно связное пространство связно.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $a \in X$. Пусть A — её компонента связности. Т.к. пространство линейно связно, то $\forall b \in X \exists$ путь α_b, соединяющий a и b, путь — связное множество(почему-то подчёркнуто, надо чекнуть 8 лекцию/предыдущий билет) $\Rightarrow b \in A$, т.к. объединение связных множеств связно(26 билет), а A — максимальное по включению связное множество $\Rightarrow A = X$ — связно. □

Следствие: *Компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.*

Теорема 40. *Множество* $X = \left\{(x, cos\frac{1}{x}) \cup (0{,}0) : x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$ *связно, но не линейно связно.*

Доказательство. $A = \{(x{,}cos\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. График A линейно связен(как образ *непрерывного отображения* f:$(0{,}+\infty) \to (x, cos\frac{1}{x})$), значит связен. X связно, так как $ClA = X$, а замыкание связного множества— связно(27 билет).

Покажем, что X не линейно связно — от противного, пусть $\alpha : [0{,}1] \to X$ — произвольный непрерывный путь, соединяющий $(0{,}0)$ и $(c{,}cos\frac{1}{c})$. Рассмотрим множество $T = \{t \in [0{,}1] : \alpha(t) = (0{,}0)\}$.

T — замкнуто в $[0{,}1]$, т.к. $T = \alpha^{-1}((0{,}0))$, а прообраз замкнутого(точка, очевидно, замкнута в T) — замкнут.

Докажем теперь, что T — открыто, тогда $T = [0{,}1]$(т.к. открытое и замкнутое одновременно подмножество связного пространства $[0{,}1]$, либо пустое, либо все простаранство), и тогда $\alpha([0{,}1]) = (0{,}0)$.

Действительно, из непрерывности $\alpha : \forall t_0 \in T, \varepsilon = 1, \exists \delta > 0 : \alpha(B_\delta(t_0) \subseteq B_1((0{,}0))$. Покажем, что $B_\delta(t_0) \subseteq T$. От противного, пусть $t_1 \in B_\delta(t_0) : \alpha(t_1) \neq (0{,}0)$. Но $\alpha(t) = (x(t){,}y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны(16 билет). НУО $x(t_1) > 0$, тогда $x(t_0) = 0 \Rightarrow \exists t_2 \in [t_0{,}t_1] : x(t_2) = \frac{1}{2\pi n}$(кажется, была теорема о промежуточном значении при непрерывном отображении связного пространства в $\mathbb{R}$). А значит $t_2 \in B_\delta(t_0)$, но $\alpha(t_2) = (\frac{1}{2\pi n}) \notin B_1((0{,}0))$, противоречие. □

30 Билет

Негомеоморфоность разных видов интервалов, окружности и плоскости.

Следующие множества попарно негомеоморфны:

1. $[0, 1]$
2. $[0, 1)$
3. $(0, 1)$
4. S^1
5. $\mathbb{R}$

Доказательство. Чтобы доказать, что эти пространства попарно негомеоморфны, достаточно заметить, что в п. (a) связность (линейная связность) не теряется при удалении двух крайних точек, в пп. (b) и (d) - только при удалении одной точки, в п. (c) - всегда теряется. А в п. (e) вообще можно удалить много точек без потери линейной связности.

□

31 Билет

Компактные пространства. Компактность отрезка.

Топологическое пространство *компактно*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Примеры:

- Конечное пространство компактно;
- Любое антидискретное пространство компактно;
- Бесконечное дискретное пространство некомпактно;
- $\mathbb{R}$ некомпактно.

Замечание: Когда говорят, что какое-то множество компактно, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

Теорема 41. *(Лемма Гейне-Борела (нихуя себе, у неё есть название)). Отрезок* $[0,1]$ *компактен.*

Доказательство. Докажем факт от противного, пусть $I = [0,1]$ некомпактен. Тогда имеется его открытое покрытие $\{U_i\}$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Разделим I пополам на два отрезка. Тогда один из них, обозначим его I_1, нельзя покрыть конечным числом множеств U_i. Далее продолжим так делить пополам, получим последовательность вложенных отрезков I_n, причём длина I_n равна 2^{-n}.

В силу аксиомы полноты найдётся точка $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Так как $c \in [0,1]$, то найдётся такое U_j, что $c \in U_j$. Очевидно, что при достаточно больших n имеем $I_n \subseteq U_j$, что противоречит невозможности покрытия любого I_n конечным числом множеств U_i. □

32 Билет

Замкнутое подмножество компакта компактно. Произведение компактов компактно.

Теорема 42. *Пусть X — компактное пространство и A — его замкнутое подмножество. Тогда A — компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие A, тогда $\{U_i\} \cup (X \setminus A)$ — открытое покрытие X, выделим конечное подпокрытие и уберём $X \setminus A$, получим конечное подпокрытие A. □

Теорема 43. *Пусть X, Y — компактные пространства. Тогда их произведение $X \times Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть W_i — открытое покрытие, тогда представим его в виде объединения элементов базы, из них выберем конечное подпокрытие и для каждого выбранного множества базы рассмотрим какое-нибудь из исходных множеств, в котором оно содержалось.

Поэтому достаточно рассмотреть покрытие, состоящее из элементов базы — вида $U_i \times V_i$, где U_i открыто в X, а V_i открыто в Y. Т.к. Y компактно, то для любого слоя $\{x\} \times Y$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_{i_x} \times V_{i_x}$. Пусть $W_x = \bigcap U_{i_x}$, оно открыто в X, поэтому $\{W_x\}_{x \in X}$ — открытое покрытие X, значит можно выбрать конечное подпокрытие, тогда выбранное для соответствующих слоев $\{x_i\} \times Y$ конечное покрытие будет являться искомым конечным покрытием произведения(рассмотрим произвольное (x,y) — находим в каком множестве покрытия W_{x_i} лежит x, затем в каком множестве слоя $\{x_i\} \times Y$ лежит y и соответствующее множество $U \times V$ будет содержать (x,y)). □

33 Билет

Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. Хаусдорфов компакт нормален.

Теорема 44. *Пусть $A \subseteq X$ - компакт в Хаусдорфовом пространстве X. Тогда A замкнуто в X.*

Доказательство. Пусть $b \in X \backslash A$ - произвольная точка. Покажем, что она внутренняя для $X \backslash A$. Для каждой точки $a \in A$ рассмотрим соответствующие ей непересекающиеся окрестности U_a и V_a точек a и b соответственно. Тогда $\{U_a\}_{a \in A}$ - покрытие A открытыми множетвами. Так как A компактно, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{a_j}\}$. Тогда $W = \bigcap V_{a_j}$ - искомая окрестность точки b, не пересекающаяся с A. □

Теорема 45. *Если топологическое пространство X Хаусдорфово и компактно, то оно нормально.*

Доказательство. Докажем сначала, что X регулярно. Пусть $A \subseteq X$ - замкнутое множество, и $b \in X \backslash A$. Заметим, что A - также компакт (как замкнутое подмножество компакта). Вспомним конструкцию из доказательства предыдущей теоремы и дополнительно рассмотрим открытое множество $R = \bigcup U_{a_j}$. Оно не пересекается с W. Значит, выполнена аксиома T_3 (T_1 выполнена в силу Хаусдорфовости пространства).

Докажем теперь, что X нормально. Пусть $A, B \subseteq X$ - замкнутые множества (и, как следствие, компакты). Для каждой точки $b \in B$ рассмотрим соответствующие окрестности R_b и W_b множества A и точки b соотетственно. $\{W_b\}_{b\in B}$ - открытое покрытие $B \implies$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{W_{b_j}\}$. Тогда $\bigcup R_{b_j}$ и $\bigcup W_{b_j}$ - искомые окретности множеств A и B соответственно. □

34 Билет

Компактные множества в $\mathbb{R}^n$.

Сейчас будут предварительные подготовки к последней теореме. Возможно, в их доказательство поверят наслово.

Теорема 46. *Компактное метрическое пространство ограничено.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $a \in X$ и рассмотрим открытое поерытие X шарами $B_r(a), r > 0$. В силу компактности X, выберем конечное подпокрытие $B_{r_1}(a), \ldots, B_{t_k}(a)$. Пусть $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$, тогда $X \subseteq B_r(a)$. □

Следствие: компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Доказательство. Метрическое пространство хаусдорфово, а компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. □

Теорема 47. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Доказываем в разные стороны поочерёдно:

$\Rightarrow$: Очевидно из последнего следствия.
$\Leftarrow$: Множество A ограничено в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$ содержится в некотором кубе $[-a,a]^n$. Куб компактен, так как это произведение компактов. Тогда A - замкнутое подмножество компакта $[-a,a]^n \Rightarrow$ компакт. □

35 Билет

Компактность и центрированные наборы множеств. Их применение для доказательства непустоты пересечения замкнутых множеств.

Набор подмножеств множества X *центрирован*, если любой его конечный поднабор имеет непустое переечение.

Пример: Набор $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ непустых вложенных множеств центрирован.

Теорема 48. *X компактно $\iff$ любой центрированный набор замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Заметим, что $\{X \setminus A_i\}$ — покрытие $X \iff \bigcap A_i = \varnothing$, т.к. $\bigcup(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap A_i$.

($\Rightarrow$) От противного, пусть $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств и $\bigcap A_i = \varnothing$. Тогда $\{X \setminus A_i\}$ — открытое покрытие X. Выберем из него конечное подпокрытие, тогда соответствующие A_i имеют пустое пересечение, что противоречит центрированности.

($\Leftarrow$) От противного, пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $\{X \setminus U_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств. По предположению, $\bigcap(X \setminus U_i \neq \varnothing)$, что противоречит тому, что $\{U_i\}$ покрытие X. □

Следствие: *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_i\}$ — центрированный набор замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда их пересечение непусто.*

Доказательство. Пусть A_0 — компактно, тогда $\{A_0 \cap A_i\}$ — центрированный набор замкнутых подмножеств компакта A_0. По теореме, пересечение всех этих множеств непусто. □

Следствие: *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_i\}$ — линейно упорядоченный по включению набор непустых замкнутых множеств в X, хотя бы одно из которых компактно. Тогда их пересечение непусто.*

Доказательство. $\{A_i\}$ — центрированный набор, значит из предыдущего следствия, их пересечение непусто. □

36 Билет

Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово.

Теорема 49. *Если $f : X \to Y$ - непрерывное отображение, и X компактно, то Y тоже компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ - открытое покрытие $f(X)$. Так как f непрерывно, то $\{f^{-1}(U_i)\}$ - открытое покрытие X.Так как X компактно, можно выбрать конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_{i_k})\}$. Но тогда $\{U_{i_k}\}$ - конечное подпокрытие $f(X)$. □

Следствие: Компактность - топологическое свойство.

Теорема 50. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, и X компактно. Тогда $f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. X - компактно, тогда и $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ компактно, т.е. замкнуто и ограничено $\implies$ содержит свои sup и inf □

Теорема 51. *Пусть $f : X \to Y$ - непрерывная биекция из компактного пространства X на Хаусдорфово пространство Y. Тогда f^{-1} тоже непрерывно.*

Доказательство. Нам надо показать, что если $A \subseteq X$ замкнуто в X, то $f(A)$ замкнуто в Y. Заметим, что V компактно (как замкнутое подмножество компакта) $\implies$ $f(V)$ компактно(как непрерывный образ компакта) $\implies$ $f(V)$ замкнуто (так как любой компакт в хасдорфовом пространстве замкнут). □

Определение: Отображение $f : X \to Y$ называется *вложением*, если f - гомеоморфизм между X и $f(X)$.
Следствие: Если $f : X \to Y$ – непрерывная иньекция компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y , то f – вложение.

37 Билет

Лемма Лебега. Равномерная непрерывность на компактах.

Теорема 52. *(Лемма Лебега). Пусть X - компактное метрическое пространство и $\{U_i\}$ - его открыто поерытие. Тогда существует такое $r > 0$, что любой шар радиуса r содержится в одном (согласно википедии, хотя бы) элементе покрытия.*

Определение: число r называется *числом Лебега* данного покрытия.

Доказательство. $\forall a \in X \exists r_a > 0$: шар B_{r_a} содержится в одном из U_i. $\{B_{r_a \setminus 2}(a)\}_{a \in X}$ - открытое покрытие X, можно выбрать из него конечное подпокрытие и докажем, что в качестве числа Лебега r подходит неименьший из радиусов шаров подпокрытия.

Берём $\forall B \in X$ - центр шара $B_r(b)$. Находим шар $B_{r_a \setminus 2}$ из подпокрытия, содержащий точку b. Тогда $B_r(b) \subseteq B_{r_a}(a)$, а $B_{r_a}(a)$ содержится в одном из U_i. □

Следствие: (Лемма Лебега для отображений (это в билете не просят)). Пусть X - компактное метрическое пространство, Y - топологическое пространство, $f : X \to Y$ непрерывно и $\{U_i\}$ - открытое покрытие Y. Тогда $\exists r > 0 : \forall a \in X$ $f(B_r(a))$ содержится в одном из U_i.

Доказательство. Применим нормальную Лемму к покрытию $\{f^{-1}(U_i)\}$. □

Пусть (X, d_X), Y, d_Y - метрические пространства, тогда отображение $f : X \to Y$ *равномерно непрерывно*, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a, b \in X$ $d_X(a,b) < \delta \to d_Y(f(a),f(b)) < \epsilon$.

Теорема 53. *Если X компактно, то любое непрерывное $f : X \to Y$ будет равномерно непрерывным.*

Доказательство. Применим лемму Лебега для отображения f и покрытия пространства Y шарами радиуса $\epsilon \setminus 2$. □

38 Билет

Предел последовательности, секвенциальное замыкание. Первая АС и секвенциальное замыкание.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек топологического пространства X. Точка $b \in X$ называется её *пределом*, если $\forall U_\varepsilon(b) \exists N \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(b), \forall n > N$. Если b — предел последовательности $\{a_n\}$, то говорят, что $\{a_n\}$ сходится к b($a_n \to b$, $b = lim\, a_n$).

Примеры:

- Постоянная последовательность сходится;
- Если $a_n \to b$, то любая её подпоследовательность сходится к b.
- В антидискретном пространстве каждая его точка является пределом любой последовательности.

Пусть A — подмножество топологического пространства X. Совокупность пределов всевозможных последовательностей точек множества A называют *секвенциальным замыканием* этого множетсва и обозначают $SClA$.

Теорема 54. *Если пространство X удовлетворяет 1AC, то для любого $A \subseteq X$ верно $SClA = ClA$.*

Доказательство. Пусть $b \in ClA$, $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — счётная база в b. Тогда $U_k = \cap_{i=1}^k V_i$ — убывающая база в b ($U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$).

$\forall n \in \mathbb{N}$ выбираем $a_n \in U_n \cap A$. Тогда $a_n \to b$.(Рассмотрим произвольную окрестность W точки b, существует V_m из базы, такое что $V_m \subseteq W$, тогда $U_m \subseteq V_m \subseteq W$, значит начиная с индекса m, все a_i лежат в этой окрестности). То есть $SClA \supseteq ClA$. Обратное доказано в теореме из дополнения(см. ниже). □

Дополнительно от artemi.sav:

Теорема: $SClA \subseteq ClA$.

Доказательство: Предел последовательности точек из A — точка прикосновения(Любая окрестность пересекается с множеством).

Теорема: *В хаусдорфом пространстве ни одна последовательность не может иметь больше одного предела.*

Доказательство: Действительно, пусть имеется два предела, тогда по хаусдорфости у них есть непересекающиеся окрестности, а по определению предела для каждой окрестности, начиная с какого-то момента, элементы последовательности лежат в ней. Противоречие.

39 Билет

Полные метрические пространства. Полнота $\mathbb{R}^n$. Замкнутое подмножество полного пространства полно.

Определение: Последовательность точек $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ в метрическом пространстве (X, d) называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*, *последовательностью Коши*), если: $\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, k > N d(x_m, x_k) < \epsilon$

Свойства:

- Всякая сходящаяя последовательность фундаментальна
- Всякая фундаментальная последовательность ограничена
- Всякая фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Определение: Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его фндаментальная последовательность имеет предел.

Примеры:

- $\mathbb{R}$ полно - было в анализе
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ не полно.

  Доказательство. Возьмём последовательность, стремящуюся к нулю. □

Теорема 55. $\mathbb{R}^n$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\{a_k\}$ - фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$. Тогда $a_i = (a_i^1,...a_i^n)$. Если $\{a_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^n$, то $\{a_k^j\}$ - фундаментальна в $\mathbb{R}$ для любого $1 \leq j \leq n$. Так как $\mathbb{R}$ полно, то $\{a_k^j\}$ сходится к A^j. Но тогда $\{a_k\}$ сходится к $A = (A^1,...A^n)$. □

Теорема 56. *Пусть X - полное пространство, и $Y \subseteq X$ - замкнутое множество. Тогда Y тоже полно.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность в Y. Так как X полно, эта последовательность имеет предел $b \in X$. b - предельная точка для замкнутого Y $\implies b \in Y$. □

40 Билет

Теорема о вложенных шарах. Нигде не плотные множества. Теорема Бэра.

Теорема 57. *Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность его замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, обладает непустым пересечением.*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть $D_{r_0} \supseteq D_{r_1} \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность замкнутых шаров, причём $(r_n)_{n=0}^{\infty} \to 0$. В каждом D_{r_n} выберем точку a_n. Поскольку $(r_n)_{n=0}^{\infty} \to 0$, то $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда по полноте X следует, что у неё есть предел a.

Заметим, что $a_k \in D_{r_n}$ для всяких $k \geqslant n \geqslant 0$, а D_{r_n} замкнуто, значит $a \in D_{r_n}$. Таким образом $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D_{r_n}$.

$\Leftarrow$ Пусть $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ - фундаментальная последовательность. Заметим, что для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ есть $N_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всяких $k, l \geqslant N_n$ верно, что $d(a_k, a_l) \leqslant \frac{1}{2^n}$ и $N_{n+1} \geqslant N_n$. Значит $a_k \in D_{1/2^n}(a_{N_n})$ для всех $k \geqslant N_n$.

Таким образом получим последовательность шаров $D_1(a_{N_0}) \supseteq D_{1/2}(a_{N_1}) \supseteq D_{1/4}(a_{N_2}) \supseteq \ldots$. Тогда в их пересечении есть точка a. Несложно понять, что a — предел $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. □

Пусть X - топологическое пространство. Тогда множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным*, если Int Cl$A = \emptyset$.

Определение: Ext$A$ = Int$(X \backslash A)$.

Свойство: Ext$A$ открыто и $X = \mathrm{Int}A \sqcup \mathrm{Fr}A \sqcup \mathrm{Ext}A$.

Лемма нахуй не нужная в билете: следующие утверждения эквивалентны:

- A нигде не плотно;
- Ext$A$ всюду плотно;
- Любое непустое открытое $U \subset X$ содержит непустое открытое $V \subset U$, что $V \cap A = \emptyset$.

Теорема 58. *(Теорема Бэра). Плотное пространство нельзя покрыть счётным набором нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ — счётное покрытие X нигде не плотными множествами.

Построим последовательность вложенных закрытых шаров $(D_n)_{n=0}^{\infty}$ с радиусами $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ следующим образом. D_0 — любой шар (ненулевого радиуса). Шар D_{n+1} строится так. $\mathrm{Int}(D_n) \cap \mathrm{Ext}(A_n)$ непусто и открыто, значит содержит открытый шар B, а он содержит закрытый шар D_{n+1} чей радиус $r_{n+1} \leqslant r_n/2$. Значит $D_{n+1} \subseteq D_n$ и $D_{n+1} \cap A_n = \varnothing$.

Поскольку мы построили уменьшающуюся последовательность шаров, что их радиусы сходятся у нулю, то в их пересечении лежит некоторая точка a. Так как для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно, что $a \in D_{n+1}$, то $a \notin A_n$, значит $a \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X$ — противоречие. □

41 Билет

Секвенциальная компактность. Всякое компактное метрическое пространство секвенциально компактно. Компактность и 1АС влечёт секвенциальную

компактность.

Говорят, что топологическое пространство *секвенциально компактно*, если любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Точка b называется *точкой накопления* множества A, если любая её окрестность содержит бесконечне число точек этого множества.

Лемма: *В компактном пространстве всякое бесконечное множество имеет точку накопления.*

Доказательство: Пусть $S \subset X$ — бесконечное множество. От противного, пусть $\forall x \in X \exists$ окрестность U_x точки $x : |U_x \cap S| < \infty$. Тогда $\{U_x\}_{x \in X}$ покрытие компактного $X \Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_k}$, но тогда $S = \cup_{i=1}^{k}(U_{x_i} \cap S)$ — конечно, противоречие.

Теорема 59. *Всякое компактное метрическое пространство секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность в X. Выделим сходящуюся подпоследовательность:

Если различных точек в последовательности конечно, то это очевидно. Пусть множество $\{a_i\}$ бесконечно. Тогда по лемме у него существует точка накопления b. Рассмотрим шары $B_{\frac{1}{k}}(b)$ и в каждом выберем элемент a_{n_k} последовательности так, чтобы n_k была возрастающей последовательностью(так как на каждом шаге мы отбрасываем конечный префикс последовательности, а в шаре лежит бесконечное количество элементов, то мы можем так сделать). Полученная подпоследовательность будет сходится к b. ☐

Теорема 60. *обобщение Если топологическое пространство компактно и удовлетворяет 1AC, то оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Рассуждаем аналогично с предыдущим доказательством, только вместо шаров берём убывающую базу в точке b(см. билет 38). ☐

42 Билет

Вполне ограниченность. Всякое секвенциально компактное метрическое пространство вполне ограничено и полно.

Пусть (X, d) - метрическое пространство.

Определение: Подмножество $A \subseteq X$ называется его ϵ-сетью ($\epsilon > 0$), если $d(b, A) < \epsilon$ для любой точки $b \in X$.

Определение: Пространство X *вполне ограничено*, если для любого $\epsilon > 0$ существует его конечная ϵ-сеть.

Примеры:

- $\mathbb{Z}$ - 1-сеть в $\mathbb{R}$.

Теорема 61. *Всякое секвенциально компактное метрическое пространство полно и вполне ограничено*

Доказательство.

- **Полнота:** Пусть $\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность. Так как пространство секвенциально компактно, то можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. А любая фундаментальная последовательность, имеющая сходяющуюя подпоследовательность, сходится.

- **Вполне ограниченность:** Предположим, для какого-то $\epsilon > 0$ не существует конечной ϵ-сети. Построим бесконечную последовательность $\{a_k\}$ так: в качестве a_1 возьмём произвольную точку из X, а на i-ом шаге будем брать такую точку a_i, что $d(a_j, a_i) \geq \epsilon \forall j < i$ (так сделать всегда можно, так как конечная сеть отсутствует). Но тогда из последовательности $\{a_k\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как расстояние между любыми двумя её элементами $\geq \epsilon = const$.

□

43 Билет

Всякое полное вполне ограниченное метрическое пространство компактно.

Теорема 62. *Всякое полное вполне ограниченное метрическое пространствокомпактно.*

Доказательство. От противного: пусть $\{U_1\}$ - открытое покрытие X, не имеющее конечного подпокрытия. Пусть A_1 - конечная 1-сеть. $\{D_1(a)\}_{a \in A_1}$ - конечное покрытие X. Тогда $\exists a_1 \in A_1 : C_1 = D_1(a_1)$ не покрывается конечным числом U_i. Одно из них не покрывается конечным числом U_i.

Пусть A_2 - конечная $\frac{1}{2}$ - сеть. Тогда короче возьмём C_1, пересечём его с конечным покрытием вокруг этой сети, и получим, что один из элементов разбиения не покрывается конечным числом U_i. Получаем C_2, и так далее строим убывающую последовательность замкнутых множеств, причём каждый элемент не покрывается конечным числом U_i и их диаметр стремится к нулю.

По теореме о вложенных шарах, у них есть непустое пересечение, но тогда $\exists j : b \in U_j \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(b) \subset U_j \Rightarrow \exists K : C_k \subset B_\epsilon(b) \subset U_j$. А это противоречие с тем, что C_k не покроется конечным числом U_i. □

44 Билет

Всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено и имеет счётную базу.

Теорема 63. *Всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем конечное подпокрытие из всех шаров радиуса ε — центры выбранных шаров будут образовывать искомую ε-сеть. □

Лемма: *Всякое вполне ограниченное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Доказательство. Полагаем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, A_n$ — конечная ε_n-сеть. Полагаем $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
A — счётно(счётное объединение конечных множеств), A всюду плотно(в любом открытом есть шар $B_{\frac{1}{n}}(x)$, который пересекает A_n, а значит и A) $\Rightarrow X$ сепарабельно $\Rightarrow$ имеет счётную базу(21 билет). □

Теорема 64. *Всякое компактное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы и леммы получаем, что всякое метрическое пространство вполне ограничено, а значит, имеет счётную базу. □

45 Билет

46 Билет

Факторпространства, их топологические свойства. Частные случаи: стягивание подмножества в точку, приклеивание по отображению, фактор по действию группы. Пропускание отображения через фактор.
(by lournes)

Разбиение множества - это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.

Фактормножество множества X по его разбиению S - это множество элементами которого являются подмножества X, составляющие разбиение S. Обозначение $X\backslash_S$.

Теорема 65. *(Топологические свойства факторпространств).*

- *Факторпространство связного пространства связно;*
- *Факторпротсранство линейно связного пространства линейно связно;*
- *Факторпространства сепарабельного пространства сепарабельно;*
- *Факторпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. В целом, тут всё, очевидно, сохраняется при непрерывных отображениях. □

Частные случаи факторпространств.

1. *Стягивание подмножества в точку.* Пусть $A \subseteq X$, тогда можно рассмотреть разбиение S, где A стягивается в одну точку, а все остальные точки не трогаются.
2. - *Несвязное объединение.* Пусть X, Y — топологические пространства. Тогда их *несвязное объединение* — множество $X \sqcup Y$ с топологией, где всякое подмножество U открыто тогда и только тогда, когда $U \cap X$ открыто в X и $U \cap Y$ открыто в Y.

- Аналогично можно рассматривать не только два пространство, а всякое семейство пространств. Если есть семейство топологических пространств Σ, то можно рассмотреть пространство $\bigsqcup_{X\in\Sigma} X$, где всякое подмножество U открыто тогда и только тогда, когда $U \cap X$ открыто в X для всех $X \in \Sigma$.
- *Приклеивание по отображению.* Пусть даны топологические пространства X, Y, множество $A \subseteq X$ и непрерывное отображение $f : A \to Y$. Рассмотрим факторпространства несвязного объединения $X \sqcup Y$, где стягиваются множества $\{b\} \cup f^{-1}(b)$ для каждого $b \in f(A)$, а остальные точки остаются как есть. Это пространство обозначается как $X \sqcup_f Y$.

Пример. Если $X = Y = S^1$, $A = \{x\}$, где $x \in X$, а f — любое, то $X \sqcup_f Y$ — "восьмёрка" (две окружности, склеенные по точке) со стандартной метрической топологией.

3. *Склеивание частей одного пространства.* Пусть даны топологическое пространство X, множество $A \subseteq X$ и непрерывная функция $f : A \to X$. Тогда можем рассмотреть разбиение S на минимальные множества, что для всякого $a \in f(A)$ точка a и элементы $f^{-1}(a)$ лежат в одном множестве; в случае, если $A \cap f(A) = \varnothing$ неодноточечеными множествами разбиения S будут $\{a\} \cup f^{-1}(a)$ для каждого $a \in f(A)$. В таком случае X/S есть склейка X по функции f. Обозначение: X/f.

   Пример. Пусть $X = [0; 1] \times [0; 1]$, $A = \{0\} \times [0; 1]$, $f : A \to X, (0, t) \mapsto (1, t)$. Тогда $X/f \simeq S^1 \times [0; 1]$ — боковая поверхность цилиндра.

4. *Фактор по действию группы.* Пусть даны топологическое пространство X и подгруппа Γ группы $\mathrm{Homeo}(X)$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\exists g \in \Gamma :\ g(x) = y$. Тогда $X/\!\sim$ обозначается как X/Γ.

   Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $\Gamma = \{f : X \to X, x \mapsto x + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (в таком случае $\Gamma \cong \mathbb{Z}^+$). Тогда $X/\Gamma \simeq S^1$.

Пример.

1. $[0; 1]/[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}] \simeq [0; 1]$
2. Пространство $[0; 1]/(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ не метризуемо и не хаусдорфово (в отличие от $[0; 1]$). В данном случае $[0; 1]/(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) = [0; \frac{1}{3}] \cup b \cup [\frac{2}{3}; 1]$, где $\{b\}$ само по себе открыто, а всякие окрестности $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ содержат b.

Теорема 66 (о пропускании отображения через фактор)**.** *Пусть даны топологические пространства X и Y, отношение эквивалентности $\sim$ на X, каноническая проекция $p : X \to X/\!\sim$ и отображение $f : X \to Y$, что для всяких $x_1, x_2 \in X$ верно, что $x_1 \sim x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$. Тогда*

1. *Существует единственное отображение $\overline{f} : X/\!\sim\ \to Y$, что $f = \overline{f} \circ p$.*
2. *f непрерывно тогда и только тогда, когда $\overline{f}$ непрерывно.*

Доказательство.

1. Заметим, что для всякого $T \in X/\!\sim$ верно, что:
   - для каждого $x \in T$ значение $f(x)$ одно и то же;
   - для всякого $x \in T$ верно, что $f(x) = \overline{f}(p(x)) = \overline{f}(T)$.

Из этого следует, что для всякого $T \in X/\sim$ значение $\overline{f}$ определено строго единственным образом, значит $\overline{f}$ существует и единственно.

2. ($\Leftarrow$) Очевидно, поскольку тогда f является композицией непрерывных отображение, а значит само непрерывно.

   ($\Rightarrow$) Пусть U — открытое множество в Y. Тогда $p^{-1}(\overline{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ открыто в X. Следовательно $\overline{f}^{-1}(U)$ тоже открыто по определению топологии на $X/\sim$. Значит $\overline{f}$ непрерывно.

□

47 Билет

Хаусдорфовы факторпространства компактов(следствие пропускания отображения через фактор). D^n/S^{n-1} гомеоморфно S^n.

Теорема 67. *Пусть X, Y — топологические пространства, X — компакт, Y — Хаусдорфово(T_2). $f : X \to Y$ — непрерывно и сюръективно. Рассмотрим $\sim$ по $X : x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $Y \cong X_{/\sim}$.*

Доказательство. Хотим доказать, что $\overline{f}$ — гомеоморфизм(см.пропускание отображения через фактор).

Докажем, что оно — биекция: очевидно из определения $X_{/\sim}$ и Y(и там и там элементы — классы эквивалентности). $\overline{f}$ — непрерывно по теореме о пропускании.

X — компакт $\Rightarrow$ $X_{/\sim}$ — компакт, а значит $\overline{f}$ действует из компакта в Хаусдорфово, значит это гомеоморфизм(36 билет). □

Теорема 68. *D^n/S^{n-1} гомеоморфно S^n.*

Доказательство. $X = [0{,}1]^n$ — компакт(32 билет — произведение компактов компакт), $Y = S^{n-1}$ — Хаусдорфово(по определению, видимо).

$f : D^n_\pi \to S^n . f(x) = (\frac{x}{|x|} sin|x|, cos|x|), f(0) = (0{,}1); S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Первая координата лежит в $\mathbb{R}^n$, вторая координата лежит в $\mathbb{R}$. Проверяется, что эта функция удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и получаем искомое(TBC...). □

48 Билет

49 Билет

Всякая связная замкнутая поверхность гомеоморфна поверхности, задаваемой канонической разверткой I или II типа.

Доказательство. Не хочу я это писать, картинки никак не передать □

И в заключение...

50 Пофамильный указатель всех мразей

Быстрый список для особо заебавшегося поиска.