Личные записи по матану$^{\beta}$

@keba4ok

18 октября 2021г.

Некоторые материалы пока что с практик в рамках подготовки к ближайшим контрольным.

Содержание

Задача 1. Интегралы с параметром.

Грубые оценки.

Задача (1.3.1).

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{\alpha+x^2(\alpha+\alpha^3)} \geq \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1+\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)} \geq 1$$
$$\leq \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha+(1-\alpha)^2(\alpha+\alpha^3)} \leq 1$$

Задача (1.3.2).

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta \geq \lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-R\theta}d\theta = -\frac{e^{-R\theta}}{R}\bigg|_0^\pi =$$
$$= -\frac{-e^{-R\frac{\pi}{2}}}{R}+\frac{1}{R}.$$

Разбиение на части.

Посредством замены переменных.

Задача (1.3.4).

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi e^{-\sin R\theta}d\theta = [R]\frac{1}{R}\int_0^\pi e^{-\sin\theta}d\theta.$$

Интегрирование по параметру.

Теорема 1. *Пусть $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция , дифференцируемая по первой переменной и такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ тоже непрерывна. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть c или d бесконечно и существуют g и h - непрерывные на [c,d] такие, что к условиям непрерывности добавляются*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq h(y),\ |f(x,y)|\leq g(y)$$

и

$$\int_c^d h(y)dy<\infty,\ \int_c^d g(y)dy<\infty,$$

тогда формула (1) также верна.

Задача (1.5.1).

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = [H_\varepsilon(t)=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^t}{\ln x}dx] = H_\varepsilon(b)-H_\varepsilon(a) =$$
$$=\int_a^b H_\varepsilon'(t)dt = \int_a^b\frac{dt}{t+1}.$$

Использование комплексов.

Задача (1.5.2)**.** $a > 0$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx.$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx =$$
$$= -\int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx = -\int_0^\infty \frac{e^i x - e^{-ix}}{2i} e^{-ax} dx =$$
$$= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{(i-a)x} - e^{-(i+a)x}) dx = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-a} + \frac{1}{i+a}\right] = \frac{-1}{1+a^2}.$$

Теорема 3 (*Интеграл Френеля*)**.**

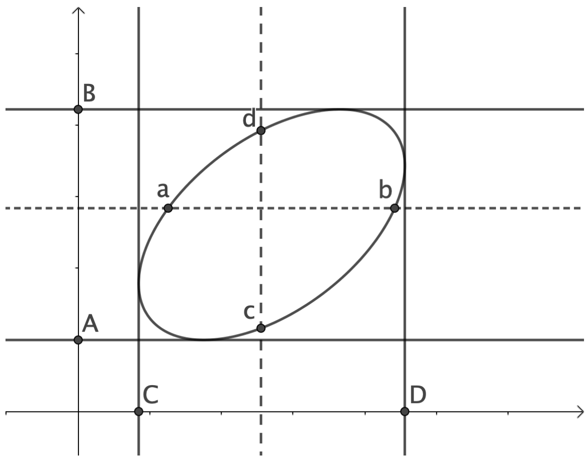
$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 2. Многомерное интегрирование.

Теорема 4 (*Тождество Фубини*)**.**

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy$$

Утверждение 1. Пусть Ω - (приличная) область в $\mathbb{R}^2$.



$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\chi_\Omega(x,y)dxdy =$$
$$= \int_C^D \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx = \int_A^B \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dxdy.$$

Задача (4.1.3)**.** $f(x,y) = x^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} x^2 dydx =$$
$$= \int_0^1 2\sqrt{1-x}x^2 dx$$

Задача 3. Перестановка пределов интегрирования.

Чертим график области (ну она же должна быть 2-х или 3-ч мерной, поэтому возможно), затем отслеживаем согласно *утв. 1* новые границы, а функция под интегралом остаётся той же самой.

Задача 4. Замена переменной.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ - открытые и, возможно, связные области. Пусть также есть $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ такая, что $\Phi \in C^1(\overline{\Omega_1})$ и Φ - биекция между данными областями. Тогда

$$\int_{\Omega_2} f(y)dy = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))d\Phi(x) = \\ = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))|\det \Phi_x|dx.$$

В частности, при $d = 2$, и при $\Phi(x, y) = (\Phi^1(x, y), \Phi^2(x, y))$,

$$d\Phi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\det d\Phi|_{(x,y)} = \Phi^1_1 \cdot \Phi^2_2 - \Phi^2_1 \cdot \Phi^1_2,$$

откуда получается результат замены:

$$\int_{\Omega_1} f(\Phi(x, y))|\Phi^1_1 \cdot \Phi^2_2 - \Phi^2_1 \cdot \Phi^1_2|dxdy.$$

Пример(ы) 1. *Полярная замена.* $\Omega_1 = \{(r, \varphi)|r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $\Omega_2 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда $\Phi^1 = r\cos\varphi$, $\Phi^2 = r\sin\varphi$,

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

И определитель, как нетрудно понять, будет равен r. В трёхмерном случае получается, конечно, *сферическая замена*.

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

Пример(ы) 2. *Экспоненциальная замена.* $\Phi = (e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots)$, тогда $\det = e^{u_1+u_2+\cdots}$.

Краткий лекционный материал.

Введение

Пусть X - некоторое универсальное пространство, а $\mathfrak{A}$ - набор его подмножеств.

Определение 1. $\mathfrak{A}$ - *полукольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$ тоже лежит в $\mathfrak{A}$, а их разность $A \backslash B$ представляется в виде конечного объединения попарно дизъюнктных множеств из $\mathfrak{A}$.

Определение 2. $\mathfrak{A}$ - *кольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$, объединение $A \cup B$ и разность $A \backslash B$ лежат в $\mathfrak{A}$.

Определение 3. $\mathfrak{A}$ - *алгебра множеств*, если оно кольцо, и для любого $A \in \mathfrak{A}$ множество X тоже лежит в $\mathfrak{A}$.

Примечание 1. При рассуждении о полукольцах разумно думать о

$$P(\mathbb{R}^n) = \{\prod_1^n [a_i, b_i); a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}\},$$

то есть, о полуинтервалах на прямой, в частности.

Определение 4. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - полукольца, тогда их *произведение*:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B, A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Утверждение 2 (полукольцо).

$$A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \backslash (A_2 \cup A_3) = \bigsqcup_1^N C_j$$

и это аналогично обобщается до вычитания больших объединений.

Определение 5. Функция $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ называется *мерой*, если для любых попарно дизъюнктных множеств A_1, ... $A_k \in \mathfrak{A}$ и таких, что $\bigsqcup_{i=1}^k A_i \in \mathfrak{A}$, верно равенство $\mu(\bigsqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$

Примечание 2. Данное свойство называется *аддитивностью*

Утверждение 3. Мера, определённая на полукольце, монотонна: если A, $B \in \mathfrak{A}$, и $B \subseteq A$, то $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Системы множеств и функции на них.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо, и $A \in \mathfrak{A}$. Определим *функцию-индикатор* (или *характеристическую функцию*):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$$

Определение 7. *Простая функция* - это функция вида $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$, где $A_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \in \mathbb{R}$

Примечание 3. Сумма и произведение простых функций - простые функции.

Определение 8. Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо, μ - мера и f - простая функция (всё пока что конечно). Тогда *элементарным интегралом* называется

$$\int f(x)dx = \sum a_i \mu(A_i)$$

Утверждение 4. Рассмотрим свойства интеграла:

- Линейность. Если у нас есть две простые функции: f и g, а также два числа: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда
$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$
- Монотонность. Пусть f и g - простые функции, а также $f \le g$. Тогда
$$\int f \le \int g.$$

Примечание 4. Для доказательства практически всего нужно просто рассмотреть дизъюнктное подразбиение данных функций.

Определение 9. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - полукольца с мерами μ и ν соответственно. Определим их произведение $\lambda : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Счётная аддитивность.

Определение 10. Пусть даны $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор подмножеств множества X, и функция $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$. Эта функция называется *счётно-аддитивной* (или *σ-аддитивной*), если для любого не более чем счётного набора попарно дизъюнктных множеств $\{B_i\}$ таких, что их объединение $B = \bigsqcup B_i$ лежит в $\mathfrak{B}$, верно равенство $\mu(B) = \sum \mu(B_i)$

Определение 11. Мера μ, определённая на полукольце (кольце, алгебре и т.д.) $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, называется *регулярной*, если для любого $A \in \mathfrak{A}$:

- $\mu(A) = \inf_{G \in \mathfrak{A}, A \subset G, G \text{ - открытое}} \mu(G)$
- $\mu(A) = \sup_{K \in \mathfrak{A}, K \subset A, K \text{ - компакт}} \mu(K)$

Теорема 5 (Александров). *Регулярная конечно аддитивная мера μ, опрелелённая на кольце в топологическом пространстве, счётно аддитивна.*

Определение 12. Если в определении алгебры сказать, что объединение и пересечение должны быть счётными, то мы получим *σ-алгебру*.

Примечание 5. Пересечение σ-алгебр - σ-алгебра.

Определение 13. *Порождённая σ-алгебра* для $\mathfrak{B} \subset 2^X$ - $\overline{\mathfrak{B}}$ - наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{B}$.

Утверждение 5. Если $\mathfrak{A}$ - алгебра, из $\{E_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{A}$ следует, что $\cap_1^\infty E_n \subset \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ - σ-алгебра.

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ - полукольцо с (конечно-аддитивной) мерой μ. Определим функцию $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$ по правилу $\mu^*(A) = \inf(\sum \mu(A_i) | \{A_i\} \in \mathfrak{A}, \bigcup A_i \supset A)$ (т.е. инфимум по всем покрытиям множества A элементами полукольца) и назовём её *внешней мерой*.

Утверждение 6.

- $\mu^*(A) \leq \mu(A)$;
- Монотонность: если $A \subseteq B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- *Счётная полуаддитивность*: Если $\{A_i\} \in \mathfrak{A}$, и $\bigcup A_i \in \mathfrak{A}$ то $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$;
- Если μ - счётно-аддитивна, то $\mu^*_{\restriction \mathfrak{A}} = \mu$.

Теорема Лебега-Каратеодори.

Определение 15. Пусть X - множество произвольной природы. Монотонную и счётно-полуаддитивную функцию $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, такую, что $\gamma(\emptyset) = 0$, мы назовём *предмерой* на множестве X.

Определение 16. Множество $E \subseteq X$ называется *γ-измеримым*, если для любого $A \subseteq X$ верно равенство $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \setminus E)$ или, что равносильно, $\gamma(A) = \gamma(A \cap E) + \gamma(A \cap E^c)$.

Примечание 6. Внешняя мера - это предмера.

Теорема 6 (*Теорема Лебега-Каратеодори*)**.** *Пусть γ - предмера на множестве X, и $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ - набор всех γ-измеримых подмножеств. Тогда:*

- *Σ - σ-алгебра;*
- *$\gamma_{\restriction \Sigma}$ - счётно-аддитивная мера на Σ;*
- *Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо на X, и μ - (конечно) аддитивная мера на нём. Если мы определим $\gamma := \mu^*$, то $\Sigma \supset \overline{\mathfrak{A}}$.*

Определение 17. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек с естественной мерой μ (которая, как мы помним, счётно-аддитивна). Множества, измеримые относительно внешней меры μ^*, образуют σ-алгебру (будем обозначать её Σ) и называются *измеримыми по Лебегу*, а μ^* от них обозначается буквой λ и называется *мерой Лебега*.

Определение 18. Рассмотрим $\mathfrak{B} = \overline{P(\mathbb{R}^n)}$ - σ-алгебра, натянутая на полукольцо ячеек $P(\mathbb{R}^n)$. Она состоит из всевозможных счётных объединений и пересечений элементов $P(\mathbb{R}^n)$ и называется *Борелевской σ-алгеброй*. Эта алгебра содержит, например, все открытые множества (так как любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде дизъюнктного объединения ячеек).

Примечание 7. Любое измеримое по Борелю множество также измеримо и по Лебегу (в силу п.3 теоремы Лебега-Каратеодори), но обратное неверно.

Утверждение 7. Пусть γ - предмера на X. Если $E \subseteq X$, и $\gamma(E) = 0$, то E - γ-измеримо. Как следствие, любое подмножество γ-измеримого и имеющего предмеру ноль множества также измеримо.

Утверждение 8. Канторово множество имеет мощность континуум, измеримо по Борелю (а, значит, и по Лебегу) и имеет меру Лебега, равную нулю.

Определение 19. Мера на полукольце $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называется *σ-конечной*, если исходное множество X представляется в виде счётного объединения $\bigcup A_n$, где $A_i \in \mathfrak{A}$, и $\mu(A_i) < \infty$.

Утверждение 9 (*о структуре измеримых множеств*). Пусть $A \in \Sigma$ - (измеримое по Лебегу) множество. Тогда оно представимо в виде разности $B \setminus E$, где $B \in \mathfrak{B}$, а $\lambda(E) = 0$.

Утверждение 10. Пусть $P(\mathbb{R}^n)$ - полукольцо ячеек, Σ - измеримые по Лебегу подмножества, λ - мера Лебега, и Δ ($\mathfrak{B} \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$) - какая-то другая σ-алгебра со своей мерой ν такая, что $\nu_{\restriction \mathfrak{B}} = \lambda_{\restriction \mathfrak{B}}$. Тогда $\nu_{\restriction \Delta} = \lambda_{\restriction \Delta}$

Утверждение 11.

- Мера Лебега инвариантна относительно сдвига. А именно, если $E \in \Sigma$, и $r \in \mathbb{R}^n$, то $\lambda(E + r) = \lambda(E)$
- Пусть μ - какая-то счётно-аддитивная мера на $\mathfrak{B}$, инвариантная относительно сдвига. Тогда $\mu = c\lambda$ для некоторой константы c.

Измеримость.

Определение 20. Пусть у нас есть (X, Σ, μ) и (Y, Δ, ν). $f : X \to Y$ *измеримо*, если $\forall A \in \Delta$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Примечание 8. Обозначим тройку (X, Σ, μ) как *пространство-мера*, причём обычно считают μ счётно аддитивной.

Определение 21. Пусть у нас есть (Y, Δ, μ) и множество $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Расширение*, наименьшая сигма-алгебра, которая это $\mathfrak{B}$ содержит - $\overline{\mathfrak{B}}$. Если она совпадает с Δ, то $\mathfrak{B}$ - образующее множество в Δ. Это множество можно и желательно выбирать как можно меньше.

Пример(ы) 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = B(X)$, что можно выбрать поменьше? Можно рассмотреть *диадические разбиения*, то есть, все такие кубики, вершины которых лежат в двоично-рациональных точках. То есть, набор кубиков, устроеный как

$$[\frac{p_1}{2^k}, \frac{p_1+1}{2^k}) \times [\frac{p_2}{2^k}, \frac{p_2+1}{2^k}) \times \dots \times [\frac{p_n}{2^k}, \frac{p_n+1}{2^k}).$$

Обозначим это разбиение как D. Ясно, что любое открытое множество G в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде объединения $G = \bigcup D_i$ кубиков из D. Как следствие, D порождает Борелевскую σ-алгебру. При этом, если есть два кубика, то они либо не пересекаются, либо один находится внутри другого. Таким образом, можно считать, что все D_i попарно дизъюнктны.

Утверждение 12. Пусть G_1 и G_2 - области в $\mathbb{R}^n$, и $f : G_1 \to G_2$ - гомеоморфизм, и дополнительно $f \in Lip(G_1)$. Пусть также есть измеримое по Лебегу множество $B \subset \Sigma_\lambda$, $B \subset G_1$, тогда $f(B)$ тоже измеримо по Лебегу (Лебегово)

Определение 22. Функция

$$f : (X, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}),$$

называется *измеримой по Лебегу*, если она измерима в вышеупомянутом смысле.

Определение 23. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, тогда

$$E_a(f) = \{x \in X : f(x) < a\}$$

- множества Лебега.

Примечание 9. Множества $\{x \in X : f(x) > a\}$, $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ и $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ также иногда называются множествами Лебега.

Утверждение 13. Отображение $f : X \to \mathbb{R}$ измеримо тогда и только тогда, когда $E_a(f) \in X$ для любого a.

Утверждение 14. Если у нас есть измеримые функции f_1 и f_2, то их сумма $f_1 + f_2$ и произведение $f_1 f_2$ тоже измеримы. Если X - метрическое пространство, и f_2 непрерывна, то $\frac{f_1}{f_2}$ также измерима там, где знаменатель не обращается в ноль.

Утверждение 15. Пусть теперь $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ - измеримые фукнции. Тогда их поточечный супремум $f(x) = \sup_i \{f_i(x)\}$ также измерим.

Примечание 10. Аналогично, измеримы фукнции $\inf_i\{f_i(x)\}$, $\limsup f_i(x) = \inf_m \sup_{k>m} f_i(x)$ и $\lim_i f_i(x)$ (если существует).

Интеграл Лебега.

Пусть есть функция $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Разобъём её на положительную и отрицательную части: $f = f_+ - f_-$, где, напомним, $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$ (заметим, что f_+ и f_- - наотрицательные функци).

2. Если мы определим интеграл Лебега $I(f)$ для неотрицательных функций, то сможем определить и для произвольной функции $g = g_+ - g_-$: $I(g) = I(g_+) - I(g_-)$ при условии, что хотя бы один из интегралов $I(g_+)$ и $I(g_-)$ меньше бесконечности. Если же оба интеграла равны бесконечности, то определить интеграл Лебега от функции g мы не можем.

3. Таким образом, наша текущая цель - определить интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$. Для этого мы будем пользоваться определёнными ранее простыми функциями.

   Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$ - простая функция, E_k - измеримые множества. Для неё мы уже определяли $I(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$.

   Идея: Приблизить произвольную функцию простыми.

Теорема 7 (*Малая теорема Леви*)**.** *Даны неотрицательные простые функции f и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Также $g_i(x) \le g_{i+1}(x)$, и для почти любого x есть предел $\lim_{i\to\infty} g_i(x) = f(x)$. Тогда $\lim_{i\to\infty} I(g_i) = I(f)$.*

Лемма 1. *Дана неотрицательная измеримая функция f. Тогда существует последовательность неотрицательных простых функций $\{f_i\}$, почти всюду монотонно возрастающих (по i) к f.*

Определение 24. Дана неотрицательная измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда величина $I(f) := \sup\{I(h), h - \text{простая функция, и } 0 \le h \le f\}$ называется *интегралом Лебега*.

Свойство(а) (Интеграл Лебега, часть 1).

- **Монотонность:** Если $0 \le f_1 \le f_2$, то $I(f_1) \le I(f_2)$

- **Аддитивность с простой функцией:** f - измеримая функция, и $0 \le \phi \le f$ - простая функция. Тогда $I(f) = I(f - \phi) + I(\phi)$.

- *Неравенство Чебышёва*: Даны неотрицательная измеримая функция f, вещественное число a и соответствующее множество Лебега $E_a = \{x : f(x) \ge a\}$. Тогда $f \ge a\chi(E_a)$, и $I(f) \ge I(a\chi(E_a)) = a \cdot \mu\{x : f(x) \ge a\}$.

Теорема 8. *f и $\{f_n\}$ - измеримые неотрицательные функции на пространстве с конечной мерой. Известно, что $\{f_n\}$ почти всюду монотонно возрастает к f. Тогда $I(f_n)$ монотонно возрастает к $I(f)$.*

Свойство(а) (Интеграл Лебега, часть 2).

- Интеграл Лебега от функции f можно определить не как супремум по всем простым функция, а как предел интеграла простых функций, стремящихся к f.
- **Линейность:** Если f_1, f_2 - измеримые неотрицательные, то $I(f_1+f_2) = I(f_1)+I(f_2)$.
- Если $I(f) = 0$, то $f = 0$ почти везде.

Определение 25. Множество E называется *σ-конечным*, если оно представляется в виде счётного объединения множеств конечной меры.

Утверждение 16. Пусть $f \geq 0$ - измерима, $I(f) < \infty$. Тогда её носитель $\operatorname{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$ - σ-конечное множество.

Пусть задана измеримая функция $f \geq 0$. Для любого измеримого множества $E \in \Sigma$ можно рассмотреть функцию от множества E, определённую по правилу $I(f, E) = I(f \cdot \chi_E)$

Теорема 9. *Дана последовательность вложенных друг в друга множеств $\{E_i\}$, $E_{i+1} \subseteq E_i$, $\mu\{E_1\} < \infty$, $I(f, E_1) < \infty$ и $E = \bigcap_i E_i$. Тогда*

$$I(f, E) = \lim_{i\to\infty} I(f, E_i)$$

Примечание 11. Далее мы будем обозначать $I(f)$ через $\int f d\mu$

Теорема 10 (*Лемма Фату*)**.** *Пусть $\{f_n\}$ - последовательность неотрицательных измеримых функций. Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Определение 26. Окончательное определение интеграла Лебега. Дана измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Определим функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$. Тогда f_+и f_- измеримы и неотрицательны. Мы уже умеем определять $\int f_+ d\mu$ и $\int f_- d\mu$. Если оба эти интеграла равны бесконечности, то определить $\int f d\mu$ мы не можем, в противном же случае положим $\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$

Определение 27. Функция f называется *суммируемой*, если оба интеграла $\int f_+ d\mu$ и $\int f_- d\mu$ конечны или, что равносильно, конечен и $\int |f| d\mu$

Свойство(а) (Интеграл Лебега, часть 3).

- **Монотонность**: $f_1 \leq f_2 \implies \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu$
- **Линейность для суммируемых функций**: Если f_1, f_2 - суммируемые функции, то $\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$

Теорема 11. ***Теоремы о предельных переходах под знаком интеграла:***

1. ***Монотонный предельный переход***. *Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность функций, $f_n \nearrow f$ почти всюду и $\int_X f_1 d\mu < \infty$. Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

2. *То же самое, только теперь $f_n \searrow f$.*

3. ***Лемма Фату.*** *Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность неотрицательных измеримых функций, и $\int \inf_{k\geq 1} f_k d\mu < \infty$. Тогда*
$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

4. *Теорема о мажорируемой сходимости. Пусть (X, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{f_n\}$ - последовательность измеримых функций, почти всюду сходящаяся к f (но, возможно, не монотонно). Предположим, есть суммируемая функция $g \geq 0$ такая, что $|f_n| < g$ и $|f| < g$. Тогда*
$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$
при $n \to \infty$

Определение 28. Пусть μ, ν - две меры на одной и той же σ-алгебре пространства X. Мы говорим, что ν - *абсолютно непрервна* относительно μ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\mu(E) < \delta$ следует, что $\nu(E) < \varepsilon$. В частности, из того, что $\mu(E) = 0$, следует, что $\nu(E) = 0$.

Утверждение 17. Если μ - σ-конечная мера, то $I_f(E)$ абсолютно непрерывна относительно неё

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu)$ и $(\mathfrak{B}, \Delta, \nu)$ - пространства с мерами. Можно построить полукольцо $R = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{X \times Y | X \in \mathfrak{A}, Y \in \mathfrak{B}\}$ и определить на нём σ-аддитивную меру $\mu \otimes \nu(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y)$. По теореме Лебега-Каратеодори в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ есть σ-алгебра Θ множеств, измеримых относительно $\mu \otimes \nu$.

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu)$, $(\mathfrak{B}, \Delta, \nu)$ - пространства с мерами, $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \Theta, \mu \otimes \nu)$ - их произведение. Если у нас есть функция $F(x, y) : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$, то она, с одной стороны, может быть измеримой относительно $\mu \otimes \nu$, а, с другой стороны, при фиксированном $x \in \mathfrak{A}$ быть измеримой относительно ν. Хотелось бы понять, как все эти махинации связаны между собой.

Теорема 12 (*Теорема Тонелли*)**.** *Пусть $F : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ - неотрицательная измеримая функция, меры μ и ν σ-конечны. Тогда «всё можно»:*

1. *При почти всех $x \in \mathfrak{A}$ функция $\phi_x(y) = F(x, y) : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ измерима*

2. *При почти всех $y \in \mathfrak{B}$ функция $\psi_y(x) = F(x, y) : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ измерима*

3. *$\Phi(x) = \int_{\mathfrak{B}} \phi_x(y) d\nu$ - измерима*

4. *$\Psi(y) = \int_{\mathfrak{A}} \psi_y(x) d\mu$ - измерима*

5. *$\int_{\mathfrak{A}} \Phi(x) d\mu = \int_{\mathfrak{B}} \Psi(y) d\nu = \int_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} F(x, y) d\mu \otimes \nu$*

   Альтернативная запись:
$$\int_{\mathfrak{A}} \Big(\int_{\mathfrak{B}} F(x, y) d\nu\Big) d\mu = \int_{\mathfrak{B}} \Big(\int_{\mathfrak{A}} F(x, y) d\mu\Big) d\nu = \int_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} F(x, y) d\mu \otimes \nu$$

Теорема 13 (*Теорема Фубини*)**.** *$F(x, y)$ - суммируемая (но уже, возможно, не положительная) относительно $\mu \otimes \nu$ функция. Тогда «всё можно».*

Пространства суммируемых функций.

Пусть $(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu)$ - пространство с мерой. Как обычно, на всякий случай считаем меру σ-конечной.

Определение 29. $L^1(\mathfrak{A}, \Sigma, \mu) = \{f : \int_{\mathfrak{A}} |f| d\mu < \infty\}$. Хотелось бы определить норму $||f||_{L^1} := \int_{\mathfrak{A}} |f| d\mu$, но вот незадача: норма может быть равна нулю, когда функция отлична от нуля на непустом множестве нулевой меры. Поэтому мы будем подразумевать, что наши функции определены с точностью до множества меры нуль, а, если быть точным, введём отношение эквивалентности $f \sim g \iff f - g = 0$ почти везде, и будем подразумевать не сами функции, а их классы.

Утверждение 18. $L^1(0,1)$ - нормированное пространство:

1. $||f|| \geq 0$, $f = 0 \iff ||f|| = 0$
2. $||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$
3. $||f_1 + f_2|| \leq ||f_1|| + ||f_2||$

Утверждение 19. $L^1(0,1)$ - полное пространство: если $\{f_n\} \in L^1$ - последовательность Коши, то существует $f \in L^1$ такая, что $||f_n - f|| \to 0$ при $n \to \infty$

Теорема 14 (*Теорема Мюнца*). *Рассмотрим последовательность функций $\{t^{\lambda_n}\}$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Любую функцию $f \in C[0,1]$ можно равномерно приблизить «обобщёнными полиномами» $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^{\lambda_k}$*
2. *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$*

Лемма 2 (*Лемма Урысона*). *Пусть X - Хаусдорфово пространство, $K \subset G \subset X$, K - компакт, G - открытое. Тогда существует непрерывное отображение $f : X \to [0,1]$ такое, что $f_{\restriction_K} = 1$ и $f_{\restriction_{X \setminus G}} = 0$.*

Определение 30. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Их *свёрткой* называется функция $h(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$. Очень похоже на умножение полиномов.

Свойство(а) (Свёртки).

1. **Коммутативность:** $f * g = g * f$
2. **Дистрибутивность:** $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
3. $||f * g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$

Разное из неуспетого.

Определение 31. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (*сходится по мере*), если (и только если) $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Утверждение 20. Если f_n сходятся к f почти всюду, то они сходятся к ней также и по мере.

Утверждение 21. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то существует подпоследовательность f_{n_k} таких, что они сходятся к f почти всюду.

Теорема 15 (*Теорема Егорова*). *$\mu(X) < \infty$, $f_n \to f$ почти всюду. Тогда $\forall \delta > 0\ \exists E \subset X$, $\mu(X \backslash E) < \delta$ и f_k сходятся к f на E.*

Теорема 16 (*Теорема Лузина*). *Слудующие утверждения эквивалентны:*

- *f измерима на $[0, 1]$;*
- *$\forall \delta > 0\ \exists E \subset [0, 1]$ и $g \in C[0, 1]$: $\mu(E) > 1 - \delta$ и $f|_E = g|_E$.*

Утверждение 22. Любую функцию из $L^1(\mathbb{R})$ можно приблизить по L^1-норме непрерывными функциями с компактными носителем.

Теорема 17 (*Теорема Радона-Никодима*). *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ - пространство с мерой, μ - σ-конечна. Если мера $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна относительно μ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$), то $\exists f : X \to \mathbb{R}$: $\nu(A) = \int_A f d\mu$.*

Теорема 18 (*Неравенство Гёльдера*). *$f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p, q \geq 1$), тогда $fg \in L^1$ и*

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}$$

Следствие 1.

$$||f||_{L^p} = \sup_{g \in L^q,\, ||g||_{L^q} = 1} \int fg d\mu.$$

Теорема 19 (*Неравенство Йенсена*). *μ - вероятностная мера, Ψ - выпукла и суммируема, f суммируема. Тогда*

$$\Psi(\int f d\mu) \leq \int \Psi(f) d\mu.$$

Теорема 20 (*Неравенство Минковского для интегралов*). *$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ - пространства с σ-конечными мерами. f - $\mu \otimes \nu$ - измеримая, $p > 1$. Тогда*

$$|| \int_Y f(x, y) f\nu ||_{L^p(\mu)} \leq \int_Y ||f(x, y)||_{L^p(\mu)} d\nu$$

Следствие 2. При $1 < p < q < \infty$ верно, что

$$\Big|\Big| ||f(x, y)||_{L^P(\mu)} \Big|\Big|_{L^q(\nu)} \leq \Big|\Big| ||f(x, y)||_{L^q(\nu)} \Big|\Big|_{L^p(\mu)}.$$

Теорема 21 (*Формула Стокса*). *$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\omega \in W^1$ - 1-форма ($f(x, y)dx + g(x, y)dy$) - всё кусочно гладкое. Тогда*

$$\int\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

(при обходе по часовой стрелке)

Предметный указатель