Конспект лекций по матанализу

Горбунов Леонид
при участии и редакторстве @keba4ok
на основе лекций Любарского Ю. И.

13 сентября 2021г.

Содержание

Теория меры **3**
Алгебраические структуры подмножеств 3
Вводим меру 3
Простые функции 4
Элементарный интеграл 4
Включаем бесконечность 5

Теория меры

Алгебраические структуры подмножеств

Пусть нам дано множество $\mathcal{X}$ произвольной природы и система его подмножеств $\mathfrak{A}$.

Определение 1. $\mathfrak{A}$ - *полукольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$ тоже лежит в $\mathfrak{A}$, а их разность $A \backslash B$ представляется в виде конечного объединения попарно дизъюнктных множеств из $\mathfrak{A}$.

Примечание 1. Легко понять, что любое полукольцо содержит пустое множество.

Определение 2. $\mathfrak{A}$ - *кольцо множеств*, если для любых A, $B \in \mathfrak{A}$ их пересечение $A \cap B$, объединение $A \cup B$ и разность $A \backslash B$ лежат в $\mathfrak{A}$

Примечание 2. Легко понять, что тогда и $A \triangle B$ лежит в $\mathfrak{A}$. Тогда если на элементах кольца множеств определить операции сложения $+ := \triangle$ и умножения $\times := \cap$, то оно превратится в алгебраическое кольцо.

Определение 3. $\mathfrak{A}$ - *алгебра множеств*, если оно кольцо, и для любого $A \in \mathfrak{A}$ множество $X \backslash A$ тоже лежит в $\mathfrak{A}$

Утверждение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ - полукольца. Тогда $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ - тоже полукольцо.

Утверждение 2. Пусть множества A, B_1, ... B_n принадлежат какому-то полукольцу. Тогда $A \backslash (B_1 \cup ... \cup B_n)$ представляется в виде объединения конечного числа элементов этого полукольца.

Доказательство. $A \backslash (B_1 \cup ... \cup B_n) = (A \backslash B_1) \cap ... \cap (A \backslash B_n) = (\bigsqcup_{i=1}^{k_1} C_{1,i}) \cap ... \cap (\bigsqcup_{i=1}^{k_n} C_{n,i}) = \bigsqcup_{i_1, ... i_n} (C_{1,i_1} \cap ... \cap C_{n,i_n})$. В последнем выражении все множества попарно дизъюнктны, так как если бы, например, $(C_{1,i_1} \cap ... \cap C_{n,i_n}) \cap C_{1,j_1} \cap ... \cap C_{n,j_n} \ni x$, то для каждого k от 1 до n $x \in C_{k,i_k} \cap C_{k,j_k}$, что возможно только при $i_k = j_k$, но для всех k это равенство быть верным не может. $\square$

Пример(ы) 1. $P(\mathbb{R}) = \{[a, b) | a, b, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ - *полукольцо ячеек*
$P(\mathbb{R}^n) = \{[a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n) | a_i, b_i, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ - тоже полукольцо ячеек, только многомерных

Вводим меру

Пусть $\mathfrak{X}$ - множество произвольной природы, $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{X})$.

Определение 4. Функция $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ называется *мерой*, если для любых попарно дизъюнктных множеств A_1, ... $A_k \in \mathfrak{A}$ и таких, что $\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathfrak{A}$, верно равенство $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$

Примечание 3. Данное свойство называется *аддитивностью*

Пример(ы) 2.

- $\mathfrak{X}$ - дискретное пространство, и для любого $x \in \mathfrak{X}$ $\mu(x) = 1$. Тогда $\mu(A) = \sum_{x \in A} 1$
- $\mathfrak{X}$ - дискретное пространство, и для любого $x \in \mathfrak{X}$ $\mu(x) = p_x$, причём $\sum_{x \in \mathfrak{X}} p_x = 1$. Тогда мы получаем в точности вероятностное пространство.

- $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ - полукольцо конечных ячеек. Тогда $\mu([a, b)) = b - a$ - мера.
- То же, что и в предыдущем примере, только теперь $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$, где f - монотонно возрастающая функция.

Утверждение 3. Мера, определённая на полукольце, монотонна: если A, $B \in \mathfrak{A}$, и $B \subseteq A$, то $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Доказательство. $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B) = \mu(B) + \mu(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i) = \mu(B) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \geq \mu(B)$ □

Простые функции

Определение 5. Пусть $\mathfrak{A}$ - полукольцо, и $A \in \mathfrak{A}$. Определим *функцию-индикатор* (или *характеристическую функцию*):

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$$

Определение 6. *Простая функция* - это функция вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$, где $A_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \in \mathbb{R}$

Примечание 4. Сумма и произведение простых функций - простые функции.

Элементарный интеграл

Пусть мы имеем $\mathfrak{A}$ - полукольцо, μ - меру и f - простую функцию (всё пока что конечно). Можем тогда ввести следующее понятие:

Определение 7. *Элементарным интегралом* называется

$$\int f(x)dx = \sum a_i \mu(A_i)$$

Утверждение 4. Определение корректно.

Примечание 5. Я не понял, что тут рассказывает Юрий Ильич, поэтому доказательство найдено в других источниках. Суть просто в попарном подразбиении и перегуппировке.

Доказательство. Пусть $f = \sum \alpha_i \cdot \chi(a_i) = \sum \beta_j \cdot \chi(b_j)$, рассмотрим тогда $c_{ij} = a_i \cap b_j$.

$$\sum \mu(a_j) \cdot \alpha_j = \sum \mu(c_{ij}) \cdot \alpha_i = \sum \mu(c_{ij}) \cdot \beta_j = \sum \mu(b_j) \beta_j$$

□

Утверждение 5 (Техническое замечение).

$$\int \chi_A = \mu(A).$$

Утверждение 6. Рассмотрим свойства интеграла:

- Линейность. Если у нас есть две простые функции: f и g, а также два числа: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда
$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$

- Монотонность. Пусть f и g - простые функции, а также $f \le g$. Тогда

$$\int f \le \int g.$$

Примечание 6. Для доказательства практически всего нужно просто рассмотреть дизъюнктное подразбиение данных функций.

Включаем бесконечность

Пусть у нас, по прежнему, имеется кольцо, и простая функция f. Выделим тогда у неё положительную и отрицательную часть (f^+ и f^-). Такие, что положительная часть во всех положительных значениях остаётся таковой, а при отрицательных - обнуляется. Почти аналогично с отрицательной, только мы рассмотриваем модуль того, что останется. Таким образом,

$$f = f^+ - f^-.$$

Определим тогда $I_+(f) = \int f_+$, и аналогично I_-. Мы хотим определить интеграл от функции, как $I_+(f) - I_-(f)$. Но нам мешает то, что обе эти функции могут быть бесконечными. Так что в случае, когда оба интеграла равны бесконечности, у нас ничего не получится, и этот случай мы попросу запрещаем. И рассмотриваем мы теперь только функции, который могут быть бесконечны максимум в одну сторону.

Примечание 7. Монотонность и линейность останутся при данном определении (последнее, конечно, опять таки при конечности хотя бы одного из интегралов).

Предметный указатель

Алгебра множеств, 3
Интеграл
  элементарный, 4
Кольцо множеств, 3
Мера, 3
Полукольцо множеств, 3
Полукольцо ячеек, 3
Простая функция, 4
Функция-индикатор, 4
Характеристическая функция, 4