Матлог. Основные записи

Кабашный Иван (@keba4ok)
на основе лекций С. О. Сперанского

22 января 2020 г.

Основные моменты.

Содержание

1 Лекция 1.

Определение 1. *Конкатенация* - записали подряд два слова. (A - алфавит, A^* - слова).

Определение 2. *Подслово* - как есть, *вхождение* - учитываем, где начинается подслово. Если подслово стоит в начале, то мы его и называем *начало*, а обозначаем как $\psi \sqsubseteq \varphi$.

Определение 3. $w[w'/u, k]$ - замена подслова w' на u, начинающегося в позиции k.

Начало 1 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 6

Определение 4. Фиксированное счётное множество Prop - *пропозициональные переменные.* Язык $\mathscr{L}$ классической пропозициональной логики состоит из переменных, а также символов $\to, \vee, \wedge, \neg$ и круглых скобочек.

Определение 5. Form (формулы) - наименьшее множество слов в алфавите, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\varphi * \psi) \in \mathrm{Form}$, где $*$ - любая из операций в определении выше (если отрицание, то отсительно одногой формулы, конечно).

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\psi \sqsubseteq \varphi$. *Тогда* $\psi = \varphi$.

Доказательство. По индукции по мощности большей формулы. База - переменная, очевидно. Иначе ψ представляется в виде "композиции" единственным образом, тогда возьмём первую часть этой композиции и сравним с первой частью того, как φ представляется в виде "композиции". По предположению индукции они должны совпасть, продолжение тривиально. $\square$

Конец 1 билета.

Начало 2 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 10

Лемма 2. *Каждую* $\varphi \in \mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ *можно единственным способом представить в виде* $(\theta \to \chi)$, $(\theta \vee \chi)$, $(\theta \wedge \chi)$ *или* $\neg\theta$, *где* $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *(это я везде безграмотно называю композицией).*

Доказательство. Ясно, что представление существует. А вот доказательство единственности - от противного по лемме 1. $\square$

Конец 2 билета.

Начало 3 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 11

Определение 6. Для каждой $\varphi \in \mathrm{Form}$ определим $\mathrm{Sub}(\varphi) := \{\psi \in \mathrm{Form} \,|\, \psi \preccurlyeq \varphi\}$ - *подформулы.*

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Form}$. *Тогда каждое вхождение* $\neq$ *или* (*является началом вхождения некоторой подформулы.*

Доказательство. Возвратная индукция по длине формулы. $\square$

Конец 3 билета.

Лемма 4. *Множество подслов φ - объединение множеств подслов элементов его композиции и его самого.*

Доказательство. Из лемм выше. $\square$

Начало 4 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 13

Определение 7. *Оценка* (v) - произвольная функция из Prop в $\{0, 1\}$, которую можно расширить и до Form (v^*) посредством применения операций к переменным. Если $v^*(\varphi) = 1$, то порой пишут $v \Vdash \varphi$.

Конец 4 билета.

Определение 8. Формулу называют *выполнимой*, если $v \Vdash \varphi$ для некоторой оценки, и *общезначимой* (тождественно истинной или тавтологией), если $v \Vdash \varphi$ для всех оценок.

Начало 6 билета. Подробнее: 1 лекция, страница 16

Определение 9. Формула *семантически следует* из множества формул и записывается $\Gamma \vDash \varphi$, если для любой оценки v, любая формула из множества истина, то φ истина.

Формулы называют *семантически эквивалентны*, и пишут $\varphi \equiv \psi$, если $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Конец 6 билета.

---

2 Лекция 2.

Начало 7 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 2

В Гильбертовском исчислении для классической пропозициональной логики используются следующие схемы аксиом (implication, conjunction, disjunction, negotiation):

- (I1). $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
- (I2). $\varphi \to (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;
- (C1). $\varphi \wedge \psi \to \varphi$;
- (C2). $\varphi \wedge \psi \to \psi$;
- (C3). $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$;
- (D1). $\varphi \to \varphi \vee \psi$;
- (D2). $\psi \to \varphi \vee \psi$;
- (D3). $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$;
- (N1). $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

- (N2). $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;
- (N3). $\varphi \vee \neg\varphi$,

а также, одно *правило вывода*, которое называется *modus ponents*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Конец 7 билета.

Начало 8 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 3

Определение 10. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$, тогда *выводом* из него в гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) элементов Form, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующиъ условий:

- φ_i - аксиома;
- φ_i - элемент Γ;
- $\exists\{j,k\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\}$ такие, что φ_k есть $\varphi_j \to \varphi_i$.

При этом, φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы*. Если φ выводится из Γ, то пишут $\Gamma \vdash \varphi$.

Основные свойства $\vdash$:

- монотонность;
- транзитивность;
- компактность (если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Delta \vdash \varphi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Конец 8 билета.

Начало 11 билета. Подробнее: 2 лекция, страница 9

Теорема 1. *(О дедукции). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Доказательство. В одну правую сторону очевидно, в обратную - по индукции по $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ показываем, что $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$, там три случая, и все, кроме одного, тривиальны. $\square$

Конец 11 билета.

Введём обозначения: $\top := p \to p$ и $\bot := \neg\top$, где p - фиксированная пропозициональная переменная.

Следствие 1. Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \varphi$$

для некоторых $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$.

Доказательство. Влево - очевидно, вправо - очевидно и применяется теорема о дедукции. □

Лемма 5. *Всякая аксиома гильбертовского исчисления для классической пропозициональной логики общезначима.*

`Начало 12 билета. Подробнее:` `2 лекция, страница 15`

Теорема 2. *(О корректности). Для любых* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$. Затем рассматриваем произаольную оценку v такую что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$ и покажем по индукции по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $v \Vdash \varphi_i$. □

`Конец 12 билета.`

`Начало 14 билета. Подробнее:` `2 лекция, страница 17`

Определение 11. $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называется *простой теорией*, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \mathrm{Form}$;
- $\{\varphi \in \mathrm{Form} \,|\, \Gamma \vdash \varphi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

`Про эквивалентные определения см. в` `доп. материалах с практик, страница 4`

`Конец 14 билета.`

`Начало 15 билета. Подробнее:` `2 лекция, страница 17`

Лемма 6. *Пусть* Γ *- простая теория, тогда для любых её элементов можно переписать действия над ними в рамках принадлежности к теории.*

`Конец 15 билета.`

`Начало 16 билета. Подробнее:` `2 лекция, страница 20`

Лемма 7. *(О расширении. a.k.a. Линденбаума). Пусть* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \varphi$. *Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \varphi$.

Доказательство. Рекурсивно докидываем к Γ элементы Form (их счётно). □

`Конец 16 билета.`

---

3 Лекция 3.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу $v_\Gamma(p) := 1$, если $p \in \Gamma$ и 0 иначе.

Лемма 8. *Пусть Γ - простая теория. Тогда для любой $\varphi \in \mathrm{Form}$,*

$$v_\Gamma \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$$

Доказательство. Индукция по построению φ, используя лемму 6. □

Начало 18 билета. Подробнее: 3 лекция, страница 4

Теорема 3. *(О сильной полноте $\vdash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$ если и только если $\Gamma \nvDash \bot$, а значит, Γ непротиворечиво если и только если Γ выполнимо.

Доказательство. Вправо - теорема о корректности, влево - от противного, рассматриваем Γ', как в лемме 7. □

Конец 18 билета.

Теорема 4. *(О слабой полноте $\vdash$). Для любой $\varphi \in \mathrm{Form}$,*

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vDash \varphi$$

то есть, выводимость из пустого равносильна общезначимости,

Начало 19 билета. Подробнее: 3 лекция, страница 5

Теорема 5. *(О компактности $\vDash$). Для любых $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}$,*

$$\Gamma \vDash \varphi \Longleftrightarrow \Delta \vDash \varphi$$

для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. В частности, $\Gamma \nvDash \bot$ тогда и только тогда, когда $\Delta \nvDash \bot$ для всех конечных $\Delta \subseteq \Gamma$, а значит, Γ выполнимо тогда и только тогда, когда всякое конечное подмножество Γ выполнимо.

Примечание 1. Нормальные доказательства и переформулировки не найдены.

Конец 19 билета.

Утверждение 1. Слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\vDash$ равно сильная полнота $\vdash$.

Начало 24 билета. Подробнее: 3 лекция, страница 6

Определение 12. *Сигнатура* - четвёрка вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где первые три - попарно непересекающиеся множества, а последнее - функция из $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Определение 13. *σ-структура* - пара вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_\mathfrak{A} \rangle,$$

где A - непустое множество, а $I_\mathfrak{A}$ - функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$, такая что:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_\mathfrak{A}(c) \in A$.

При этом, A - носитель, а $I_\mathfrak{A}$ - интерпретация σ в $\mathfrak{A}$.

Конец 24 билета.

Начало 25 билета. Подробнее: 3 лекция, страница 14

Определение 14. Пусть $\mathfrak{A}$ b $\mathfrak{B}$ - две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ есть *гомоморфизм* из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

- для любого n-местного предиката и всех $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,
$$(a_1, \dots, a_n) \in P^\mathfrak{A} \Rightarrow (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^\mathfrak{B};$$
- для любого m-местного функционала и всех $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$,
$$\xi(f^\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m)) = f^\mathfrak{B}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$
- для любой константы,
$$\xi(c^\mathfrak{A}) = c^\mathfrak{B}.$$

Определение 15. Инъективный гомоморфизм называют *вложением*, если выполнено усиление первого пункта, где следствие заменяется на равносильность.

Определение 16. Сюръективное вложение называют *изоморфизмом* и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если они изоморфны, т.е. между ними существует изоморфизм.

Определение 17. *Автоморфизм* - изоморфизм на себя. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ - множество всех автоморфизмов $\mathfrak{A}$.

Конец 25 билета.

---

4 Лекция 4.

Начало 27 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 2

Определение 18.

$$\mathrm{Var} := \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$$

есть фиксированное на всю жизнь счётное множество *предметных переменных* или просто *переменных*.

Определение 19. *Язык* $\mathscr{L}_\sigma$ кванторной классической логики над сигнатурой σ состоит из элементов $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Var}$, а также *символов связок*, *символов кванторов* и *вспомогательных символов*.

Определение 20. Term_σ - наименьшее множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma\,.$$

Элементы Term_σ называют *σ-термами.*

Начало 30 билета [да, он посередине другого, а вторая часть ещё дальше].
Подробнее: 4 лекция, страница 4

Определение 21. Form_σ - наименьшее множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \mathrm{Pred}$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Form}_\sigma;$$

- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$, то

$$\{(\Phi \to \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \wedge \Psi), \neg\Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma;$$

- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то

$$\{\forall x\ \Phi, \exists x\ \Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma\,.$$

Элементы которого называются *σ-формулами.* Атомарными формулами называются формулы, которые не содержат ни символов связок, ни символов кванторов. Их множество - Atom_σ.

Примечание 2. Для понимания, кажется, Term - выражения с переменными, константами, действиями и т.д., а вот Form - сравнения выражений (в частности), логические утверждения, кванторные.

Определение 22. Для любых $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ определим

$$\mathrm{sub}(t) := \{s \in \mathrm{Term}_\sigma \,|\, s \preccurlyeq t\},$$
$$\mathrm{Sub}(\Phi) := \{\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma \,|\, \Psi \preccurlyeq \Phi\},$$

которые называются соответственно *подтермами* и *подформулами.*

Лемма 9. *Пусть* $\{t, s\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$ *таковы, что* $t \sqsubseteq s$*. Тогда* $t = s$*.*

Конец 27 билета.

Начало 28 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 5

Лемма 10. *(О единственности представления термов). Всякий* $t \in \mathrm{Term}_\sigma \setminus (\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma)$ *можно единственным образом представить в виде* $f(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*.*

Конец 28 билета.

Лемма 11. *Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ *и* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*. Тогда всякое вхождение* f *в* t *является началом вхождения некоторого подтерма.*

Начало 29 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 6

Лемма 12. *(О подтермах). Пусть* $t \in \mathrm{Term}_\sigma$*.*

- *если* $t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma$*, то* $\mathrm{sub}(t) = \{t\}$*;*
- *если* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*, то*

$$\mathrm{sub}(t) = \mathrm{sub}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

Конец 29 билета.

Лемма 13. *(О единственности представления атомов). Всякий* $\Phi \in \mathrm{Atom}$ *можно единственными образом представить в виде* $P(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$*,* $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ *и* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$*.*

Лемма 14. *Пусть* $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *таковы, что* $\Phi \sqsubseteq \Psi$*. Тогда* $\Phi = \Psi$*.*

Лемма 15. *(О единственности представления формул). Всякую* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \setminus \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно единственным образом представить в виде комбинации формул (одной или двух) и символов связок или символов кванторов.*

Лемма 16. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*. Тогда всякое вхождение* $\neg$*,* $($*,* $\forall$ *или* $\exists$ *в* Φ *является началом вхождения некоторой подформулы.*

Лемма 17. *Пусть* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*.*

- *Если* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$*, то* $\mathrm{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$*;*

- *Если* $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$*, где* $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$*, то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \mathrm{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\};$$

- *Если* $\Phi = \neg\Theta$*, где* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$*, или* $\Phi = Q \times \Theta$*, где* $x \in \mathrm{Var}$, $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $Q \in \{\forall, \exists\}$*, то*

$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

Определение 23. Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$. Тогда каждое вхождение Qx в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют *областью действия* данного вхождения Qx. Вхождение x в Φ называется *связанным*, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и *свободным* иначе. Далее, говорят, что x является *свободной переменной* в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Скажем, что $\mathrm{FV}(\Phi)$ - множество $z \in \mathrm{Var}$ таких, что у z имеется хотя бы одно свободное вхождение в Φ. Интуитивно, элементы этого множества играют роль параметров Φ, а запись $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ указывает на то, что $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_l\}$.

Определение 24.

$$\mathrm{Sent}_\sigma := \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \emptyset\}/$$

Элементы которого называют *σ-предложениями.* Они могут выступать в качестве *нелог. аксиом.*

`Конец 30 билета.`

`Начало 31 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 13`

Определение 25. t называем *свободным для подстановки* вместо x в Φ, если ни одно из свободных вхождений x в Φ не находится в области действия квантора по переменной из t.

`Конец 31 билета.`

`Начало 32 билета. Подробнее [лучше сразу туда]: 4 лекция, страница 16`

Определение 26. *Означивание переменных* - функции из Var в A. Каждое означивание v в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{v} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\overline{v}(x) := v(x);$$
$$\overline{v}(c) := c^{\mathfrak{A}};$$
$$\overline{v}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_n)).$$

А через v^x_a (x - переменная, a - элементA) будет обозначаться особенное означивание такое, что оно равно $v^x_a(y) = a$, если $y = x$ и $v(y)$ - иначе.

Определение 27. Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ индукцией по построению Φ. Короче, надо просто расписать все логические связки и кванторы, что они означают. Когда эта вещь выполнена, мы будем говорить, что Φ *истинно* в $\mathfrak{A}$ при v.

Определение 28. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Поворят, что $\mathfrak{A}$ *является моделью* Γ и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Конец 32 билета.

Начало 33 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 19

Теорема 6. *Пусть ξ - изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Тогда для каждой σ-формулы Φ и любого означивания v в $\mathfrak{A}$,*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v] \Longleftrightarrow \mathfrak{B}\, \Phi[v \circ \xi].$$

Доказательство. Примем $\mu := v \circ \xi$, заметим, что $\overline{\mu}(t) = \xi(\overline{v}(t))$, а потом провернём индукции по построению Φ. □

Конец 33 билета.

Начало 34 билета. Подробнее: 4 лекция, страница 23

Определение 29. Для произвольного класса $\mathscr{K}$ σ-структур Предположим

$$\mathrm{Th}(\mathscr{K}) := \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \,|\, \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathscr{K}\}.$$

Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны*, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Конец 34 билета.

Следствие 2. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

5 Лекция 5.

Начало 35 билета. Подробнее: 5 лекция, страница 2

Определение 30. $S \subseteq A^l$ называется *определимым в* $\mathfrak{A}$, если существует σ-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_l)$ такая, что

$$S = \{\vec{a} \in A^l | \, \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{a}]\};$$

в этом случае говорят, что Φ *определяет* S *в* $\mathfrak{A}$.

Примечание 3. Задача с практики пока что отсутствует.

Конец 35 билета.

Определение 31. $\mathrm{supp}(n)$ - множество всех простых делителей $n \in \mathbb{N}$.

Начало 38 билета. Подробнее: 5 лекция, страница 9

Утверждение 2. Пусть S определимо в $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$,

$$\xi[S] \subseteq S,$$

то есть, S замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$.

Конец 38 билета.

Определение 32. σ-структуру $\mathfrak{A}$ называют *нормальной*, если $=$ интерпретируется в $\mathfrak{A}$ как настоящее равенство, то есть, $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с id_A.

Начало 40 билета. Подробнее: 5 лекция, страница 13

Определение 33. Eq_σ - множество состоящее из σ-предложений

- $\forall x\, x = x$;
- $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \to x = z)$;

а также всех σ-предложений видов

- $\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_n \forall y_n (\vec{x} = \vec{y} \to (P(\vec{x}) \leftrightarrow P(\vec{y})))$;
- $\forall x_1 \forall y_1 \dots \forall x_m \forall y_m (\vec{x} = \vec{y} \to f(\vec{x}) = f(\vec{y}))$,

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\mathrm{arity}_\sigma(f) = m$. Под *аксиомами равенства для* σ понимают элементы Eq_σ.

Конец 40 билета.

Определение 34. Обозначим за $\mathfrak{A}'$ нормальную σ-структуру с носителем $A_{/=^{\mathfrak{A}}}$ такую, что мы заменяем константы и функционалы $\mathfrak{A}$ (произвольная модель Eq_σ) на их классы эквивалентности по равенству, и оставляем все предикаты.

Теорема 7. *Для любых σ-формул Φ и означивания v в $\mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v] \Longleftrightarrow \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[v'],$$

где v' отображает каждую $x \in \mathrm{Var}$ в $[v(x)]$.

Доказательство. Для начала, как в ещё одном недавнем доказательстве заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{v}' = [\overline{v}(t)],$$

что несложно доказывается индукцией по построению t, а затем опять же, индукция по постоению самой Φ. $\square$

Следствие 3. Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

- у Γ есть нормальная модель;
- у $\Gamma \cup \mathrm{Eq}_\sigma$ есть модель.

Определение 35. σ-формулу Φ называют

- *выполнимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и v;

- *общезначимой*, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[v]$ для всех $\mathfrak{A}$ и v.

Определение 36. Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x_1, \ldots, x_l$ - в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке их появления в Φ. Определим тогда *универсальное замыкание* $\tilde{\forall}$ - $\forall x_1 \ldots \forall x_l \Phi$ и *экзистенциальное замыкание* $\tilde{\exists}$ аналогично.

Определение 37. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ *семантически следует из* Γ, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \Longrightarrow \mathfrak{A} \Vdash \tilde{\forall}\Phi.$$

Если выполнено $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$, то такие формулы называют *семантически эквивалентными* и пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Определение 38. σ-формула Φ называется *бескванторной*, если в ней нет кванторов.

Определение 39. Под *пренексными нормальными формами* понимаются σ-формулы вида

$$Q_1 x_1 \ldots Q_l x_l \Psi,$$

где Q_i - кванторы, x_i - переменные и Ψ бескванторная.

6 Лекция 6.

Сейчас будет Гильбертовское исчисление для кванторной логики. В моём понимании, это как некоторый апдейт пропозициональной, во многом они схожи, достаточно только взглянуть на *схемы аксиом*:

Начало 49 билета. Подробнее: 6 лекция, страница 2

- (I1). $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;
- (I2). $\Phi \to (\Psi \to \Theta) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta))$;
- (C1). $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$;
- (C2). $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$;
- (C3). $\Phi \to (\Psi \to \Phi \wedge \Psi)$;
- (D1). $\Phi \to \Phi \vee \Psi$;
- (D2). $\Psi \to \Phi \vee \Psi$;
- (D3). $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta))$;
- (N1). $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$;
- (N2). $\neg\Phi \to (\Phi \to \Psi)$;
- (N3). $\Phi \vee \neg\Phi$;
- (Q1). $\forall x \Phi \to \Phi(x/t)$, где t свободен для x в Φ;
- (Q2). $\Phi(x/t) \to \exists x \Phi$, где t свободен для x в Φ.

Примечание 4. В случаях, когда $=$ содержится в Pred_σ, элементы Eq_σ также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Также имеется *modus ponens* (MP):

$$\frac{\Phi \qquad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$

И два новых "кванторных" правила вывода:

$$\frac{\Psi \to \Phi}{\Psi \to \forall x \Phi}\ (\mathrm{BR1}) \qquad \text{и} \qquad \frac{\Phi \to \Psi}{\exists x \Phi \to \Psi}\ (\mathrm{BR2}),$$

где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$, и они традиционно называются *правилами Бернайса*.

`Конец 49 билета.`

Определение 40. *Вывод* - опять-таки, конечная последовательность $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ элементов Form_σ такую, что для каждого i от 0 до n выполнено одно из следующих условий:

- Φ_i - аксиома;
- Φ_i - элемент Γ;
- Φ_i полулчается из некоторых предшествующих по (MP);
- Φ_i получается из некоторой предшествующей по (BRi).

Φ_n - *заключение*, а элементы Γ - *гипотезы*. Пишут $\Gamma \vdash \Phi$, если существует вывод из Γ с заключением Φ.

Определение 41. Φ *опровержима* в Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$; Φ *независима* от Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.

Основные свойства $\vdash$ - опять:

- монотонность (если $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$);
- транзитивность (если $\Delta \vdash \Psi$ для всех $\Psi \in \Gamma$, и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$);
- компактность (если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$).

Определение 42. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$. Для всякой пропозицональной формулы φ обозначим $\xi\varphi$ - результат замены (всех вхождений) каждой $p \in \mathrm{Prop}$ в φ на $\xi(p)$.

Утверждение 3. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ и $\vdash \varphi$ (в пропозициональном исчислении). Тогда $\vdash \xi\varphi$ (уже в кванторном исчислении).

Доказательство. Фиксируем вывод $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, а затем рассмотрим $\xi\varphi_0, \ldots, \xi\varphi_n = \xi\varphi$, и нетрудно показать, что это также вывод, там только аксиомы и MP. □

Следствие 4. Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ и $\vDash \varphi$ (в смысле пропозициональной логики). Тогда $\vdash \xi\varphi$.

Доказательство. В силу теоремы о (слабой) полноте для пропозиционального исчисления мы имеем $\vdash \varphi$, а потому $\vdash \xi\varphi$. □

Утверждение 4. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$.

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x \Phi.$$

Доказательство. В правую сторону: пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Значит, $\Gamma \vdash \top \to \Phi$. Применяем BR1, получаем $\Gamma \vdash \top \to \forall x\Phi$. Таким образрм, $\Gamma \vdash \forall x\Phi$.

В обратную: пусть $\Gamma \vdash \forall x\Phi$. Используем аксиому $\forall x\Phi \to \Phi$ (Q1), откуда легко получаем $\Gamma \vdash \Phi$. □

Примечание 5. Таким образом, мы получили *правило обобщения* (GR):

$$\frac{\Phi}{\forall x \Phi}$$

Следствие 5. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \tilde{\forall} \Phi.$$

Начало 54 билета. Подробнее: 6 лекция, страница 16

Теорема 8. *(О дедукции). Для любых* $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$.

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

Доказательство. В левую сторону очевидно, в правую точно так же, как и в изначальной теореме о дедукции, разве что надо рассмотреть новые случаи BR1 и BR2. □

Конец 54 билета.

Следствие 6. Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longleftrightarrow \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \Psi_i \to \Phi$$

для некоторых $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma$.

Лемма 18. *Пусть* $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\vDash \varphi$ *(в смысле пропозициональной логики). Тогда* $\vDash \xi\varphi$.

Лемма 19. *Пусть* Φ *- аксиома кванторного исчисления. Тогда* $\vDash \Phi$.

Теорема 9. *(О корректности). Для любых* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \Longrightarrow \Gamma \vDash \Phi.$$

7 Билетные вопросы из 7,8 лекций.

Раз уж оттуда не очень много рассматривается в рамках зачёта, напишу пока что только то, что важно по мнению Станислава Олеговича (будет время - докину и остальное).

Начало 57 билета. Подробнее: 7 лекция, страница 17

Теорема 10. *(О компактности $\models$, a.k.a. локальная т. Гёделя-Мальцева). Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,*

$$\Gamma \models \Phi \Longleftrightarrow \Delta \models \Phi$$

для некоторого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. В частности, $\Gamma \not\models \perp$, если и только если $\Delta \not\models \perp$ для всех конечных $\Delta \subseteq \Gamma$, а значит, Γ выполнимо если и только если всякое конечное подмножество Γ выполнимо.

Примечание 6. Переформулировка пока что не найдена.

Конец 57 билета.

Начало 58 билета. Подробнее: 7 лекция, страница 18

Утверждение 5. Пусть у $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ есть модели сколь угодно большой конечной мощности. Тогда у Γ есть бесконечная модель.

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что в множестве предикатов содержится $=$. Для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ положим

$$\Phi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg x_i = x_j.$$

Очевидно, что для любой σ-структуры GA,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_n \Longleftrightarrow |A| \geq n.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ удовлетворяет условию предложения. Рассмотрим

$$\Gamma' := \Gamma \cup \{\Phi_n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}.$$

Разумеется, Γ' локально выполнимо. Значит, оно выполнимо, то есть, у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$. Поскольку в $\mathfrak{A}$ истинны все Φ_n, то A бесконечно. $\square$

Конец 58 билета.

Начало 59 билета. Подробнее: 8 лекция, страница 2

Определение 43. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - σ-структуры. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является *подструктурой* $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ - *расширением* $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, если $A \subseteq B$ и id_A является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Примечание 7. Пока что не найдено, всякая ли подструктура поля является полем.

Конец 59 билета.

Начало 60 билета. Подробнее: 8 лекция, страница 4

Определение 44. $\mathfrak{A}$ является *элементарной подструктурой* $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ - *элементарным расширением* $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ и для любых $\Phi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}].$$

Теорема 11. *(Теорема Лёвингейма-Сколема, о понижении мощности). У каждой σ-структуры есть элементарная подструктура мощности $\leq |\,\mathrm{Form}_\sigma\,|$.*

Конец 60 билета.

Начало 61 билета. Подробнее: 8 лекция, страница 4

Доказательство. Тут всё, что было в презентации на 5 страниц и есть по сути план, так что переходите по ссылке выше. □

Конец 61 билета.

Начало 63 билета. Подробнее: 8 лекция, страница 10

Следствие 7. (Следствие из теоремы Л-С). Для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ слудующие условия эквивалентны:

- у Γ есть бесконечная модель;
- для каждого кардинала $\kappa \geq |\,\mathrm{Sent}_\sigma\,|$ у Γ есть модель мощности κ.

Доказательство. Красиво дополняем до σ_S, с подробностями по ссылке выше. □

Конец 63 билета.

---

8 Билеты.

Начало и конец обозначены в конспекте, чтобы я тыщу раз из документа в документ не копировал, и для общей полноты материала (вдруг чего спросят вне вопросов).

1. Что такое формула в PCL? Покажите, что если ψ является началом φ, то $\psi = \varphi$.

2. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности представления формул в PCL.

3. Сформулируйте и докажите основное утверждение о подформулах в PCL.

4. Опишите семантику для PCL.

5. Что такое гомоморфизм? Изоморфизм? Автоморфизм?

6. Определите семантическое следование и эквивалентность в PCL. Опшите алгоритм приведения формул в PCL к д.н.ф. (без построения их таблиц истинности)

7. Опишите гильбертовское исчисление для PCL.

8. Сформулируйте и докажите основные свойства $\vdash$ в PCL.

9. Покажите, что $\vdash p \to p$ и $\{p \wedge q\} \to q \wedge p$.
`См. 2 лекция, страница 7`

10. Покажите, что $\{\neg p \to q, \neg p \to \neq q\} \vdash p$.

11. Сфорулируйте и докажите теорему дедукции для $\vdash$ в PCL (считая известным $\vdash p \to p$).

12. Сфорулируйте и докажите теорему о корректности $\vdash$ в PCL.

13. Какие множества формул называются противоречивыми в PCL? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях простоты в PCL.
`См. Доп. материал с практик, страница 2`

14. Что такое простая теория в PCL? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях простоты в PCL.

15. Сформулируйте и докажите лемму о свойствах простых теорий (в PCL).

16. Сформулируйте и докажите (счётную версию) леммы о расширении (в PCL).

17. Приведите альтернативное доказательство леммы о расширении (в PCL), в котором вместо рекурсии используется лемма Цорна.
`См. доп. материалы с практик, страница 6`

18. Сформулируйте и докужите теорему о сильной полноте $\vdash$ в PCL (тут можно пользоваться леммой о свойствах простых теорий).

19. Сформулируйте теорему о компактности $\vDash$ в PCL; переформулируйте её в терминах выполнимости (с обоснованием).

20. Приведите альтернативное доказательство теоремы о компактности $\vDash$ в PCL; тут считается известной теорема Тихонова.
`См. доп. материалы с практик, страница 9`

21. Выведите $((p \vee q) \vee r) \to (p \vee (q \vee r))$ в исчислении естественной дедукции для PCL.

22. Выведите $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$ в исчислении естественной дедукции для PCL.

23. Выведите $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$ в исчислении естественной дедукции для PCL.

24. Что такое сигнатура? Что такое структура данной сигнатуры σ.

25. Что такое гомоморфизм? Вложение? Изоморфизм? Автоморфизм?

26. Сколько автоморфизмов у $\langle \mathbb{N}; < \rangle$? А у $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$? (Разумеется, ответы следует обосновать)

27. Что такое терм? Покажите, что если терм t является началом терма s, то $t = s$.

28. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности представления термов.

29. Сформулируйте и докажите основное утверждение о подтермах.

30. Что такое формула в QCL? Какие вхождения переменной в формулу (в QCL) называются связанными, а какие - свободными? Какие формулы называются предложениями?

31. t называется свободным для (подстановки вместо) x в Φ, если...

32. Опишите семантику для QCL.

33. Сформулируйте и докажите утверждение о сохранении истинности при изоморфизме.

34. Что такое $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$ и $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$? Что такое элементарная эквивалентность?

35. $S \subseteq A^l$ называется определимым в $\mathfrak{A}$, если ... Покажите, что $\mathbb{P}$ определимо в $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, где $|$ интерпретируется как отношение делимости.

36. Покажите, что $\{p^n | p \in \mathbb{P} \text{ и } n \in \mathbb{N}\}$ определимо в $\langle \mathbb{N}; \perp \rangle$, где $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты.

37. Покажите, что функция умножения на $\mathbb{N}$ определима в $\langle \mathbb{N}; =; \mathrm{Sq}; + \rangle$, где Sq интерпретируется как одноместный предикат "быть квадратом".

38. Что такое "метод автоморфизмов"? Приведите примеры его применения.

39. Покажите, что любая биекция из $\mathbb{P}$ на $\mathbb{P}$ может быть единственным образом расширена до автоморфизма $\langle \mathbb{N}; | \rangle$.

40. Что понимается под аксиомами равенства для σ, то есть, что такое Eq_σ?

41. Сформулируйте и докажите утверждение о "теориях с равенством".

42. Что такое конгруэнция?

43. Дайте альтернативное описание конгруэнций в теории групп.

44. Дайте альтернативное описание конгруэнций в теории колец.

`См. билеты 42-44 в материалах практики, страница 7`

45. Пусть σ состоит только из одноместных предикатных символов. Покажите, что если у σ-предложения Φ есть модель, то у него есть модель мощности не более 2^n, где n - число предикатных символов в Φ.

46. Что такое конечный спектр предложения? Конечный спектр? Покажите, что если S_1 и S_2 - конечные спектры, то $S_1 \cap S_2$ и $S_1 \cup S_2$ - также конечные спектры.

`См. материалы с практик, страница 8`

47. Покажите, что $\{3 \cdot n | n \in \mathbb{N} \text{ и } n \neq 0\}$ является конечным спектром.

48. Покажите, что $\{n^2 | n \in \mathbb{N} \text{ и } n \neq 0\}$ является конечным спектром.

49. Опишите кванторные аксиомы и правила гильбертовского исчисления для QCL.

50. Выведите $\neg\forall x\Phi \leftrightarrow \exists x\neg\Phi$ в гильбертовском исчислении для QCL (при этом можно пользоваться пропозициональными тавтологиями).

51. Выведите $\forall x(\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\forall x\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$, в гильбертовском исчислении для QCL.

52. Выведите $\exists y\forall x\Psi \to \forall x\exists y\Phi$ в гильбертовском исчислении для QCL. Покажите, что обратная импликация в общем случае невыводима в QCL.

53. Опишите алгоритм приведения формул в QCL к п.н.ф. (???)

54. Сформулируйте и докажите теорему дедукции для $\vdash$ в QCL (при этом можнопользоваться доказательством теоремы дедукции для $\vdash$ в PCL).

55. Покажите, что правила Бернайса сохраняют общезначимость.

56. Что такое обогащение? Объединение?

См лекцию 7, страницу 9

57. Сформулируйте теорему о компактности $\vDash$ в QCL; переформулируйте её в терминах выполнимости (с обоснованием).

58. Верно ли, что если у множества предложений есть сколь угодно большие конечные модели, то у него есть также бесконечные модели? (ответ следует обосновать)

59. Что такое подструктура? Всякая ли подструктура поля является полем?

60. Что такое элементарная подструктура? Сформулируйте теорему Лёвингейма-Сколема о понижении мощности.

61. Приведите схему доказательства теорема Лёвингейма-Сколема о понижении мощности.

62. Покажите, что $|\operatorname{Form}_\sigma| = \max\{|\operatorname{Pred}_\sigma|, |\operatorname{Func}_\sigma|, |\operatorname{Const}_\sigma|, \aleph_0\} = \max\{|\sigma|, \aleph_0\} = |\operatorname{Sent}_\sigma|$.

63. Покажите, что если у $\Gamma \subseteq \operatorname{Sent}_\sigma$ есть бесконечная модель, то для каждого кардинала $\kappa \geq |\operatorname{Sent}_\sigma|$ у Γ есть модель мощности κ.

С этого момента я порядком подзаебался, и поэтому пока что только указания, где в презентации про аксиоматизируемость это всё находится.

64. Какие классы структур называются (конечно) аксиоматизируемыми? Аксиоматизируем ли класс всех конечных полей, например?

См. доп. материал с практик, со страницы 4 по страницу 7

65. Сформулируйте и докажите простейший критерий аксиоматизируемости.

См. доп. материал с практик, страница 6

66. Будет ли аксиоматизируем или конечно аксиоматизируем класс всех делимых абелевых групп?

???

67. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель $\operatorname{Th}(\mathfrak{N})$. Покажите, что $\lambda n.[\underline{n}^{\mathfrak{A}}]$ вкладывает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$.

???

68. Есть ли у $\operatorname{Th}(\mathfrak{N})$ счётные нестандартные модели? (ответ следует обосновать)

См. доп. материал с практик, страница 22

69. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Покажите, что в $\mathfrak{A}$ всякий нестандартный элемент (если таковой существует) больше всех стандартных.

См. доп. материал с практик, страница 24

70. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Чему равносильно $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{N}$? (ответ следует обосновать)

См. доп. материал с практик, страница 26