Геометрия и топология. Факты 2 сем.

Кабашный Иван (@keba4ok)

(по материалам лекций Фоминых Е. А.,
практик, а также других источников)

26 марта 2021 г.

Основные (по моему мнению) факты по топологии.

Содержание

1 Аффинные пространства.

1.1 Начальные определения и свойства.

Определение 1. *Аффинное пространство* - тройка $(X, \vec{X}, +)$, состоящая из непустого множества *точек*, векторного пространства над $\mathbb{R}$ (*присоединённое*) и операцией $+ : X \times \vec{X} \to X$ *откладывания вектора*.

Налагаемые условия - для любых точек $x, y \in X$ существует единственный вектор $v \in \vec{X}$ такой, что $x + v = y$ $(\vec{xy})$, а также ассоциативность откладывания вектора.

Определение 2. *Начало отсчёта* аффинного пространства - произвольная фиксированная точка $o \in X$.

Лемма 1. *Начало отсчёта $o \in X$ задаёт биекцию $\varphi_o : X \to \vec{X}$ по правилу:*

$$\varphi_o(x) = \vec{ox} \; \forall x \in X.$$

Такая биекция называется векторизацией аффинного пространства.

Определение 3. *Линейная комбинация* $\sum t_i p_i$ точек с коэффициентами относительно начала отсчёта $o \in X$ - вектор $v = \sum t_i \vec{op_i}$, или точка $p = o + v$. Комбинация называется *барицентрической*, если сумма коэффициентов равна единице, и *сбалансированной*, если сумма коэффициентов равна нулю.

Теорема 1. *Барицентрическая комбинация точек - точка, не зависящая от начала отсчёта. Сбалансированная комбинация точек - вектор, не зависящий от начала отсчёта.*

1.2 Материальные точки.

Определение 4. Пусть x — некоторая точка аффинного пространства и m — ненулевое число. *Материальной точкой* (x,m) называется пара: точка x с вещественным числом m, причем число m называется *массой* материальной точки (x,m), а точка x — носителем этой материальной точки.

Определение 5. *Центром масс* системы материальных точек (x_i, m_i) называется такая точка z (притом единственная), для которой имеет место равенство

$$m_1 \cdot z\vec{x}_1 + \ldots + m_n \cdot z\vec{x}_n = 0.$$

1.3 Аффинные подпространства и оболочки.

Определение 6. Множество $Y \subset X$ - *аффинное подпространство*, если существуют такие линейное подпространство $V \subset \vec{X}$ и точка $p \in Y$, что $Y = p + V$. V называется*направлением* Y. Определение подпространства не зависит от выбора точки в нём.

Определение 7. *Размерность* $\dim X$ афинного пространства есть размерность его присоединённого векторного пространства.

Определение 8. *Параллельный перенос* на вектор $v \in \vec{X}$ - отображение $T_v : X \to X$, заданное равенством $T_v(x) = x + v$.

Определение 9. Аффинные подпространства одинаковой размерности *параллельны*, если их направления совпадают.

Определение 10. *Прямая* - аффинное подпространство размерности 1, *гиперплоскость* в X - аффинное подпространство размерности $\sim X - 1$.

Утверждение 1. Две различные гиперплоскости не пересекаются тогда и только тогда, когда они параллельны.

Определение 11. *Суммой аффинных подпространств* называется наименьшее аффинное подпространство, их содержащее.

Теорема 2. *Пересечение любого набора аффинных подпространств - либо пустое множество, либо аффинное подпространство.*

Определение 12. *Аффинная оболочка* $\operatorname{Aff} A$ непустого множества $A \subset X$ - пересечение всех аффинных подпространств, содержащих A. Как следствие, это - наименьшее аффинное подпространство, содержащее A.

Теорема 3. $\operatorname{Aff}(A)$ *- множество всех барицентрических комбинаций точек из* A*.*

Определение 13. Точки $p_1, \ldots, p_k$ *аффинно зависимы*, если существуют такие коэффициенты $t_i \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $\sum t_i = 0$ и $\sum t_i p_i = 0$. Если такой комбинации нет, то точки *аффинно независимы*.

Теорема 4. *(Переформулировки аффинной независимости.) Для* $p_1, \ldots, p_k \in X$ *следующие свойства эквивалентны:*

- *они аффинно независимы;*
- *векторы* $p_1 p_i$, $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, *линейно независимы;*
- $\dim \operatorname{Aff}(p_1, \ldots, p_k) = k - 1$*;*
- *каждая точка из* $\operatorname{Aff}(p_1, \ldots, p_k)$ *единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации* p_i*.*

1.4 Базисы и отображения.

Определение 14. *Аффинный базис* - набор $n + 1$ точке в X, пространстве размерности n, являющийся аффинно независимым. Или же, это - точке $o \in X$ и базис $e_0, \ldots, e_n$ пространства $\vec{X}$.

Определение 15. Каждая точка однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $\sum_{i=0}^{n} t_i e_i$, а числа t_i называют *барицентрическими координатами* этой точки.

Определение 16. (Говно-определение). Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если отображение $\tilde{F}_p$ линейно для некоторой точки $p \in X$. Отображение $\tilde{F}_p : \vec{X} \to \vec{Y}$ индуцируется из любого отображения $F : X \to Y$ посредством формулы $\forall v \in \vec{X}$ $\tilde{F}_p(v) = \overrightarrow{F(p)F(q)}$, где $q = p + v$.

Определение 17. Отображение $\tilde{F}$ называется *линейной частью* аффинного отображения F.

Определение 18. (Нормальное определение.) Отображение $F : X \to Y$ называется *аффинным*, если существует такое линейное $L : \vec{X} \to \vec{Y}$, что для любых $q, p \in X$, $\overrightarrow{F(p)F(q)} = L(\vec{pq})$.

Теорема 5. *Пусть* $x \in X$, $y \in Y$, $L : \vec{X} \to \vec{Y}$ *линейно. Тогда существует единственное аффинное отображение* $F : X \to Y$ *такое, что* $\tilde{F} = L$ *и* $F(x) = y$.

Лемма 2. *Пусть* $p_1, \ldots, p_n$ *- аффинно независимые точки в аффинном пространстве* X, $q_1, \ldots, q_n$ *- точки в аффинном пространстве* Y. *Тогда существует такое аффинное отображение* $F : X \to Y$, *что* $F(p_i) = q_i \; \forall i$. *Кроме того, если* $\dim X = n - 1$, *то такое отображение единственно.*

Лемма 3. *Аффинное отображение сохраняет барицентрические комбинации.*

Лемма 4. *Композиция аффинных отображений - аффинное отображение. При этом линейная часть композиции - композиция линейных частей.*

Утверждение 2. Образ и прообраз аффинного подпространства - аффинное подпространство. Образы (прообразы) параллельных подпространств параллельны.

Теорема 6. *Параллельный перенос - аффинное отображение, его линейная часть тождественна. Верно также и обратное.*

Определение 19. Аффинное отображение $F : X \to X$ такое, что $\tilde{F} = k \, \mathrm{id}$ для некоторого $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, называется *гомотетией*, а k называют *коэффициентом растяжения* гомотетии F. Такое отображение имеет ровно одну неподвижную точку, называемую центром.

Теорема 7. *(Основная теорема аффинной геометрии.) Пусть* X, Y *- аффинные пространства,* $\dim X \geq 2$. *Пусть* $F : X \to Y$ *- инъективное отображение, и для любой прямой* $l \subset X$ *её образ* $F(l)$ *- тоже прямая. Тогда* F *- аффинное отображение.*

2 Проективные пространства.

2.1 Начальные определения и свойства.

Определение 20. Пусть V - векторное пространство над полем K. На множестве $V \setminus \{0\}$ введём отношение эквивалентности

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in K : x = \lambda y.$$

Тогда фактор V по этому отношению называют *проективным пространством* ($\mathbb{P}(V)$), порождённым векторным V. Само отображение из векторного пространства в соответствующее проективное называют *проективизацией*.

Примечание 1. *Размерность* $\mathbb{P}(V)$ по определению равна $\dim V - 1$.

Теорема 8. *Пусть* $Y, Z \subset X$ *- подпространства,* $\dim Y + \dim Z \geq \dim X$, *тогда*

- $Y \cap Z \neq \emptyset$;
- $Y \cap Z$ *- подпространство;*
- $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$.

Определение 21. Пусть W - непустое векторное подпространство V. Тогда $\mathbb{P}(W)$ называется *проективным подпространством* $\mathbb{P}(V)$.

Определение 22. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$ - проективное пространство размерности n. Числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$, являющиеся координатами вектора v, порождающего $p \in \mathbb{P}(V)$, называются *однородными координатами*.

Определение 23. $\hat{X} = \mathbb{P}(V)$ - *проективное пополнение* аффинного пространства X, а множество $X_\infty = \mathbb{P}(\vec{X} \times 0) \subset \hat{X}$ - *бесконечно удалённые точки*. Также, множество этих точек есть гиперплоскость в $\hat{X}$, которая называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью*.

Определение 24. Пусть V - векторное пространство, $W \subset V$ - линейная гиперплоскость, X - гиперплоскость ей пареллельная. Тогда биекцию $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W) \to X$ называют *картой* пространства $\mathbb{P}(V)$.

Определение 25. Пусть на $\mathbb{R}p^1$ (прямая с бесконечно удалённой точкой) выбрана аффинная система координат, в которой $A = a$, $B = b$, $C = c$ и $D = d$. Определим *двойное отношение* четвёрки точек (A, B, C, D) формулой

$$[A, B, C, D] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-c}{b-d}.$$

Утверждение 3. Данное определение инвариантно относительно выбора карты, а само отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

3 Указатель.

Он самый.