Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем
на основе лекций Пилюгина С. Ю.
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

Содержание

Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

Определение. *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной фукции $y(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, вида

$$f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

Определение. *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида $y' = f(x,y), f \in C(G)$, где G – область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2_{x,y}$

Определение. $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение* на (a,b), если

- y – дифференцируема;
- $(x,(y(x)) \in G, x \in (a,b)$;
- $y'(x) \equiv f(x,y(x))$ на (a,b).

Пример(ы).

- $y' = ky, k > 0,\ G = \mathbb{R}^2$;
- $\forall c \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ce^{kx}$ – решение на $\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральная кривая* – график решения.

Задача Коши

Определение. $y(x)$ – решение *задачи Коши* с начальным условем (x_0,y_0), если

- $y(x)$ – решение дифференциального уравнения на (a,b);
- $y(x_0) = y_0$.

Единственность

Определение. (x_0,y_0) – *точка единственности* для задачи Коши, если $\forall y_1, y_2$ – решения $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha,\beta)} = y_2|_{(\alpha,\beta)}$.

Пример(ы).

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если $(x_0,y_0) = 0$, то возможны следующие решения:

- $$y_1 = 0$$

- $$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

- $$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ не является точкой единственности, но при этом $(1,1)$ уже будет точкой единственности

Поле направлений

Определение. Из уравнения $y' = f(x,y)$ мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке (x,y)

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке (x,y) области G провести отрезок с угловым коэффициентом равным $f(x,y)$, то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

Основные теоремы

Теорема (*О существовании*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью существования.*

Теорема (*О единственности*)**.** *Если $y' = f(x,y)$, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, то $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ единственное решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0) G называется областью единственности.*

Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример(ы). $y' = f(x)$ – из анализа знаем, что единнственным решение при данном условии (x_0,y_0) будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Интеграл

Пусть $H \subset G$ – область

Определение. Функция $U \in C^1(H,\mathbb{R})$ называется *интегралом уравнения* $y' = f(x,y)$ в H, если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$;
- если $y(x), x \in (a,b)$ – решение с $(x,y(x)) \in H$, то $U(x,y(x)) = \text{const}$.

Теорема (Напоминание *теоремы о неявной функции*)**.**

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

- $$F(x_0,y_0) = 0$$

- $$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

тогда $\exists I, J$ *– открытые интервалы* $x_0 \in I, y_0 \in J$, $\exists z(x) \in C^1(I)$ *такая, что*

- $z(x_0) = y_0$;
- $F(x,y) = 0 \leftrightarrow y = z(x)$ *при* $(x,y) \in I \times J$.

Теорема (*Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка*). *Пусть* U *– интеграл* $y' = f(x,y)$ *в* $H \subset G$. *Тогда* $\forall (x_0,y_0) \in H$ $\exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0,y_0)$ *и* $\exists y(x) \in C^1(I)$ *такая что:*

- $y(x)$ *– решение задачи Коши с начальными данными* (x_0,y_0)
- $(x,y) \in H$ *и* $U(x,y) = U(x_0,y_0) \Rightarrow y = y(x)$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0)$. F удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, поэтому существуют I_0, J_0 $I_0 \times J_0 \subset H$ и $\exists y(x) \in C^1(I_0)$, $y(x_0) = y_0$. По теореме существования $\exists$ решение $z(x)$ задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0) на некотором промежутке $I \ni x_0$ такое что $(x,z(x)) \in I_0 \times J_0$. Тогда по определению интеграла $U(x,z(x)) = \text{const}$ $\Rightarrow F(x,z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$. □

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} &y' = m(x) \cdot n(y) \\ &m \in C((a,b)), n \in C((\alpha,\beta)) \\ &G = (a,b) \times (\alpha,\beta) \end{aligned}$$

- $y_0 \in (\alpha,\beta) n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

  Проверяется подставнкой

- $I \subset (\alpha,\beta), n(y) \neq 0$ при $y \in I$ Подсказка: Рассмотрим $y(x) : (x,y(x)) \in (a,b) \times I$ и отличную от 0 $y' = m(x)n(y)$, на $n(y)$ можно поделить

  $$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt.$$

  Замена $z = y(t)$

  $$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(t)dt,$$

  Обозначим за $N(y)$ и $M(x)$ некоторые первообразные $\frac{1}{n(y)}$ и $m(x)$ соответственно

  $$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) &= M(x) - M(x_0) \\ U(x,y) &:= N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли U интегралом.

Утверждение. (*Критерий интеграла*)

U – интеграл для уравнения $y' = f(x,y) \iff$

- $$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$
- $$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

Доказательство. Если $y(x)$ – решение, то $U(x,y(x)) = \mathrm{const}$

$$\frac{dU}{dx} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению $y' = m(x)n(y)$ и $U = N(y) - M(x)$ имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \qquad (1)$$

Замена переменных

Пример(ы). 1. $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная – x

Новая искомая функция – $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2. $y' = m(x)n(y)$, Пусть $n(y) \neq 0$

Новая переменная – x

Новая функция – $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x),\ \ p,q \in C((a,b))$$

$f(x,y)$ определена на $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G, поэтому G – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ($q \equiv 0$)

   $$y' = p(x)y$$

   Есть решение $y \equiv 0, x \in (a,b)$

   Если $y > 0$, то

   $$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

   $$y = ce^{\int p(x)dx}$$

   Для $y < 0$ то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

   Воспользуемся заменой переменной:

   Новая независимая переменная – x

   Новая функция – $v(x)$

   Будем искать решение $y(x)$ в виде $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

   $$\begin{aligned} y' &= v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx} \\ p(x)y + q(x) &= p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x) \\ v' \cdot e^{\int p(x)dx} &= q(x) \\ v' &= q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \\ v &= \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx \\ y &= e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right) \end{aligned}$$

   Заметим, что первообразная для $p(x)$ берется одна и та же

   Для задачи Коши с начальным условием (x_0,y_0) имеем

   $$y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds\right)$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \mathrm{const}$

Исключения – $m = 0, m = 1$, так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если $m > 0$, то есть решение $y \equiv 0$

Если $y \neq 0$, то возпользуемся заменой переменных $v = y^{1-m}$

$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x)$$
$$v' = (1-m)y'y^{-m}$$
$$\frac{v'}{(1-m)} = p(x)v + q(x)$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если α – не число Бернулли и $\alpha \neq 2$, то уравнение Рикатти не интегрируемо.

Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение Пфаффа

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

Определение. *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m,n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

Определение. *Интегральная кривая дифференциальной формы* F – гладкая кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Примечание. Кривая называется гладкой, если $\exists$ непрерывные $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ и $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \neq 0$

Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением

Пусть $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ – интегральная кривая F

Выберем $t_0 \in (a,b)$, пусть $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$

Тогда $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot{\gamma}_1(t)|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$

Положим $x = \gamma_1(t)$

Так как $\dot{\gamma}_1$ – непрерывна и не обращается в ноль на (α, β), то существует обратная функция.

Тогда $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для y:

$$\frac{dy}{dx} = \dot{\gamma}_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)}$$

γ была интегральной кривой формы F, то есть выполнялось равенство:

$$m(\gamma(t))\dot\gamma_1(t)+n(\gamma(t))\dot\gamma_2(t)=0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}=-\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}=-\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая γ уравнения $F=0$, то в локальных координатах они решают уравнение $y'=\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа $mdx+ndy=0$ локально совпадают с интегральными кривыми уравнения $y'=\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть $y(x)$ – решение уравнения $y'=-\frac{m}{n}, n(x,y(x))\neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем $\gamma_1(t)=x, \gamma_2(t)=y(x)$

$$\dot\gamma_1(t)=1, \dot\gamma_2(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}=-\frac{m(x,y)}{n(x,y)}=-\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод: $F=mdx+ndy=0$ – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-\frac{m}{n}\\ \frac{dx}{dy}&=-\frac{n}{m}\end{aligned}\right.$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Форма F – *точная*, если $\exists U\in C^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$

$$F=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Если F – точная, то $F=0$ называется *уравнением полных дифференциалов*

Теорема. *Если F – точная, то в окрестности произвольной точки $(x_0,y_0)\in G$ U – интеграл одного из уравнений:*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{m}{n}\ \textit{или}\ \frac{dx}{dx}=-\frac{n}{m}$$

Доказательство. $(x_0,y_0)\in G$ можно считать, что $n(x_0,y_0)\neq 0$, тогда $n(x,y)\neq 0$ в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение $y'=-\frac{m}{n}$

Пусть $y(x)$ – решение

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x))=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx}=m+n\cdot(-\frac{m}{n})\equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=n\neq 0$$

Получаем, что U – интеграл

∎

Условие точности 1-формы

$$U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна } \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Утверждение.

$$G = (a,b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных m и n следует, что F – точна

Доказательство. Фиксируем $(x_0,y_0) \in G$

Хотим построить U

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти φ

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial m}{\partial y}(s,y)ds + \varphi'(y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial n}{\partial x}(s,y)ds + \varphi'(y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Хотим

$$n(x,y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} m(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} n(x_0,t)dt$$

□

Примечание. Это утверждение верно не для любой области G, хотя верно, если G – звездчатое множество

Интегрирующий множитель

Определение. $\mu \in C^1, \mu \neq 0$ называется *интегрирующим множителем*, если μF – точная форма

Пример(ы). Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель – $\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{n(y)})$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x,y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться t и искать мы будем функции $x(t)$

Определение. *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

n и $m_1, \ldots, m_n$ – фиксированные натуральные числа

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f_i(t,x_1, \dot{x}_1, \ldots, \frac{d^{m_1-1}}{dt^{m_1-1}}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$ называется *порядком системы*

Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, все $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x_1, \ldots,x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка m* $x(t)$ – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t,y_1, \ldots, y_{m-1}) \end{cases} \iff \frac{d^m x}{dt^m} = f(t,x, \dot{x}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Если x решение уравнения, то очевидно, что $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \ldots y_m = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$ решения системы и наоборот, если $y_1, y_2, \ldots y_m$ решения системы, то $x = y_1$ решение уравнения.

Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на $\mathbb{R}^n$ зафиксируем $||x|| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$

Определение. Для уравнения $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$ $(f \in C(G) G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$ функция $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется *решением*, если

- $\exists \dot{x}$ на (a,b)
- $(t,x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t,x(t)), t \in (a,b)$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ называется решением задачи Коши с начальным условием (t_0,x_0), если

- x – решение
- $x(t_0) = x_0$

Теоремы существования

Теорема. *существования* *(Пеано)*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ *решение задачи Коши*

Доказательство. Рассмотрим $(t_0,x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \in G \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \text{ – компакт}$$

$$\exists M : |(t,x)| \leqslant M \ \forall (t,x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказываеть, что существует решение на промежутке $(t_0 - h, t_0 + h)$

Эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Определение. $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ – *решение интегрального уравнения*, если

1. $x \in C((a,b))$
2. $(t,x(t)) \in G$
3. $x(t)$ удоавлетворяет интегральному уравнению

Лемма. *x – решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \Leftrightarrow x$ – решение задачи Коши с начальным условием t_0,x_0*

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок $[t_0,t_0 + h]$ (для $[t_0 - h, t_0]$ все аналогично)

Ломаные Эйлера

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и разобьем отрезок $[t_0,t_0+h]$ на N равных частей $[t_k,t_{k+1}]$, $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0,x_0)(t - t_0), t \in [t_0,t_1]$$
$$g(t) = g(t_k) + f(t_k,g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Введем $\dot{g}(t)$ (точечка сверху это просто символ, так как g не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k,g(t_k)), t \in [t_k,t_{k+1}]$$

Лемма. $\forall k = 0,1,\ldots,n$

1. *g определена на $[t_k, t_{k+1}]$*
2. *$|g(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0), t \in [t_0,t_k]$*
3. *$g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{g}(s)ds$*

Доказательство. Индукция по k

База: $k = 1$ Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что $f(t_k,g(t_k))$ определено, для этого достаточно показать, что $(t_k,g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t-t_0| \leqslant \alpha, |g(t_k)-x_0| \leqslant \beta$

   Это верно, так как $|g(t_k)-x_0| \leqslant M|t_k-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$

2. $|g(t)-x_0| \leqslant |g(t)-g(t_k)| + |g(t_k)-x_0| \leqslant |f(t_k,g(t_k))|(t-t_k) + M(t_0-t_0) \leqslant M(t-t_0)$

3. $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)ds + \int_{t_k}^t g(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)ds$

□

Лемма. *(Арцела-Аскори)*

$$G = \{g_k : I \to \mathbb{R}^n, k \geqslant 0\}$$

Определение. G равномерно ограничено, если существет $N: \ |g_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in I$

Определение. G рваностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$
$\forall k \geqslant 0 \ \forall t_1, t_2 \in I \ |t_1 - t_2| < \delta \to |g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \varepsilon$

Если G - равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда из G можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера $g_N, N > 0$ и докажем, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерынва

$$|g_N(t) - x_0| \leqslant M(t-t_0) \leqslant Mh \Rightarrow |g_n(t)| \leqslant |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1) - g_N(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}_N(s)ds \right| \leqslant M|t_1 - t_2| \leqslant M\delta$$

В качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность g_N действительно равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к g

Для удобства можем считать, что вся последовательность g_N равномерно сходится к g

Мы хотим доказать, что g будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства g

1. $g_N \rightrightarrows g$ на $[t_0,t_0+h]$, g – непрерывна

2. $(t,g_N(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$

3. $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds?$

$$g_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,g_n(s))ds + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t,g_n(t)) \in R, f \in C(R)$$
$$\Downarrow$$
$$f(t,g_N(t)) \rightrightarrows f(t,g(t)) \text{ на } [t_0,t_0+h]$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{t_0}^t f(s,g_N(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s,g_n(s))ds \to 0$$

Так как R – компакт и f непрерывна на нем, то f равномерно непрерывна на R

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |t_1-t_2|<\delta\wedge|g_N(t_1)-g_N(t_2)|<\delta\to|f(t_1,g(t_1))-f(t_2,g(t_2))|<\varepsilon$$

Если $t\in[t_k,t_{k+1}]$, то $t-t_k<\frac{h}{N}<\delta$ при больших N
$\dot{g}_N(t)=f(t_k,g_N(t_k))$, поэтому $|\dot{g}_N(t)-f(t,g_N(t))|=|f(t_k,g_N(t_k))-f(t,g_N(t))|$
Поэтому, если N достаточно велико

$$\int_{t_k}^{t}|\dot{g}_N(s)-f(s,g_N(s))|ds\leqslant\varepsilon(t-t_k)$$

$$\text{Тогда }\left|\int_{t_0}^{t}\dot{g}_N(s)-f(s,g_N(s))ds\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t_1}\right|+\ldots+\left|\int_{t_k}^{t}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(t_1-t_0)+\ldots+\varepsilon(t-t_k)=\varepsilon(t-t_0)\leqslant\varepsilon h$$

Отсюда получаем, что $\int_{t_0}^{t}\dot{g}_N(s)-f(s,g_N(s))ds\to0$, следовательно $g(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,g(s))ds$

Таким образом, мы нашли решение g для исходного уравнения, и доказали теорему.

□

Напоминание из анализа

Определение. f удовлетворяет *условию Липшица* по x в $G\subset\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ $(f\in\mathrm{Lip}_x(G))$
Если $\exists L>0$ такое, что $\forall(t,x),(t,x')\in G$

$$|f(t,x)-f(t,x')|\leqslant L|x-x'|$$

Определение. f удовлетворяет *локальномум условию Липшица* по x в G, если $\forall(t_0,x_0)inG$ $\exists U$ – окрестность, такая что $f\in\mathrm{Lip}_x(U)$

$$f\in\mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть }f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}\text{ и }\exists\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \forall i,j=1,\ldots,n$$

Определение. *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Определение. A – матрица, тогда норма $||A||=\max\limits_{|x|=1}|Ax|$

$$\forall x\ |x|\leqslant||A||\cdot|x|$$

Лемма.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\in C(G)\Rightarrow f\in\mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

Доказательство. Фиксируем (t_0,x_0)

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \ ||\frac{\partial f}{\partial x}|| \text{ в } R$$

Рассмотрим $(t,x), (t,x') \in R, \ g(s) = f(t, sx + (1-s)x')$

$$f(t,x) - f(t,x') = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,sx + (1-s)x')ds$$
$$|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant |\int_0^1 | \leqslant \int_0^1 |\dots| \leqslant \int_0^1 L|x - x'|ds = L|x - x'|$$

□

Лемма.

$$f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G), K \text{ – } \textit{компакт в } G$$
$$\Downarrow$$
$$f \in \mathrm{Lip}_x(K)$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall L_n \to \infty \ \exists (t_n,x_n), (t_n, x_n') \in K :$$
$$|f(t_n,x_n) - f(t_n,x_n')| > L_n|x_n - x_n'|$$

Так как K – компакт, то из (t_n,x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_{n_k},x_{n_k}) \to (t_0, x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из t_{n_k}, x'_{n_k}, сходящуюся к (t_0,x_0')

Для удобства будем считать, что $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0), \ (t_n,x_n') \to (t_0,x_0)$

Случай 1 $x_0 = x_0'$ Так как f – локально-липшицева по x, то $\exists U \ni (t_0,x_0)$ и L, такие, что

$$(t,x), (t,x') \in U \to |f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x - x'|$$

При достатчно больших n $(t_n,x_n), \ (t_n,x_n') \in U$ и мы получаем противоречие

Случай 2 $x_0 \neq x_0'$

Рассмотрим $g(t,x,y) = \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|}$, $f \in C(G) \Rightarrow g$ непрервывна в окрестности U точки (t_0,x_0,x_0')

$$\Rightarrow \exists L : |g(t,x,y)| \leqslant L \Rightarrow |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x - y|$$

Тогда для достаточно больших n $(t_n,x_n,x_n') \in U$ и мы снова получаем противоречие.

□

Лемма Гронуолла

Лемма. *(Лемма Гронуолла)*
Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$ *при* $t \in (a,b)$ *и* $\exists t_0 \in (a,b), \lambda, \mu \geqslant 0$, *такие что*

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right|, \; t \in (a,b)$$

$$\textit{Тогда } \varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

Доказательство. Разберем случай, когда $t \leqslant t_0$ (случай $t < t_0$ оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right| \geqslant \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu\Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)}\dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)}\Phi \leqslant 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leqslant \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leqslant \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s) ds \right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

Метод приближений Пикара

Теорема. *(Теорема Пикара)*

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\mathrm{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \; G \textit{ – область существования и единственности}$$

Доказательство. **Существование** Зафиксируем $(t_0,x_0) \in G$ Возьмем $\alpha, \beta > 0$, что $R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 : \; |f(t,x)| \leqslant M, \; (t,x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$ – константа Липшица по x в R

Последовательные приближения Пикара $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds,\ \ k \leqslant 0$$

Лемма. $\forall k\ \varphi_k$ *определены на* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *и их графики лежат в* R

Доказательство. Идукция по k

База $\varphi_0 \equiv x_0$ для всех t, график очевидно лежит в R

Переход

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds$$

$$(s,\varphi_k(s)) \in R \Rightarrow\ \ f \text{ -- определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)ds\right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

□

Докажем теперь, что φ_k – равномерно сходятся на $[t_0 - h, t_0 + h]$

Введем $\psi_0(t) = \phi_0(t),\ \ \psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$ при $k \geqslant 0$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частинчые суммы этого ряда равны $\varphi_k(t)$

Поэтому сходимость ряда $\Longleftrightarrow$ сходимость $\varphi_k(t)$

Лемма. $k \geqslant 1 \Rightarrow |\psi_k(t)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$

Доказательство. Рассмотрим только случай $t \geqslant t_0$

$k = 1$

$$|\psi_1(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))ds\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_0(s))|ds \leqslant M|t - t_0|$$

$k \to k + 1$

$$|\psi_{k+1}| = |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_k(s)) - f(s,\varphi_{k-1}(s))|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L|\psi_k(s)|ds \leqslant \int_{t_0}^{t} L\frac{M}{L}\frac{|L(s - t_0)|^k}{k!}ds = \frac{M}{L}\frac{|L(t - t_0)|^{k+1}}{(k + 1)!}$$

□

$$\sum|\psi_k(t)| \leqslant \sum \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!} \leqslant \frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}e^{Lh}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum \psi_k \text{ – сходистя равномерно на } [t_0-h,t_0+h]$$

$$\varphi_k \rightrightarrows g$$

Проверим, тчо g является решением нашего уравнения, для этого достаточно проверить, что g – решение эквивалентного интегрального уравнения

$$\varphi_k \text{ непрерывна } \Rightarrow g \text{ непрерывна}$$
$$(t,\varphi_k(t)) \in R \Rightarrow (t,g(t)) \in R$$
$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\varphi_k(s))ds$$
$$f \text{ равномерно непрерывна на } R \Rightarrow f(s,\varphi_k(s)) \rightrightarrows f(s,g(s)) \text{ на } R$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{t_0}^t f(s,\varphi_k(s))ds \to \int_{t_0}^t f(s,g(s))ds$$
$$\Downarrow$$
$$g(t) = x_0$$

Единственность Предположим, что существуют два различных решения $x_1(t), x_2(t)$ задачи Коши с начальным условиям (t_0,x_0)

$$(t,x_1(t)),(t,x_2(t)) \in R$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x_1(s))ds$$
$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x_2(s))ds$$
$$|x_1(t)-x_2(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^t |f(s,x_1(s))dsf(s,x_2(s))|ds\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^t L|x_1(s)-x_2(s)|ds\right|$$
$$|x_1-x_2| \geqslant 0 \Rightarrow \text{ по лемме Гронуолла } x_1 = x_2$$

□

Теорема. *G – область единственности, тогда если существует два решения x_1,x_2 на промежутках (a_1,b_1) и (a_2,b_2) соответственно и $\exists\ t_0 \in (a,b) = (a_1,b_1)\cap(a_2,b_2):\ x_1(t_0) = x_2(t_0)$*

$$\Downarrow$$

$$x_1 \equiv x_2 \text{ на } (a,b)$$

Доказательство. Докажем, что они совпадают на $[t_0,b)$, остальное аналогично

$$T := \{t' \mid t' \geqslant t_0, x_1|_{[t_0,t']} = x_2|_{[t_0,t']}\}$$

$$T' = \sup T$$

Предположим, что $T' < b$

Тогда по непрерывности $x_1(T') = x_2(T') = x'$

Так как $(T',x') \in G$, а G – область единственности, то $x_1(t) = x_2(t)$ на $[T',T'+\varepsilon)$ $\Rightarrow T'+\varepsilon \in T$, получаем противоречие с тем, что T' – sup $\square$

Метод сжимающих отображений

$$\dot{x} = f(t,x),\ \ f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

$$(t_0,x_0) \in G,\ \ (t_{,0},x_0) \in R \subset G,\ \ L \text{ – константа Липшица}$$

$$h_0 \leqslant h \text{ такое что } Lh_0 < 1$$

$$X := \{x \text{ – непрерывные функции на } [t_0-h_0,t_0+h_0], (t,x(t)) \in R\}$$

$$\text{Метрика на } X\text{: } \rho(x,y) = \max_{t\in[t_0-h_0,t_0+h_0]} |x(t)-y(t)|$$

$$(X,\rho) \text{ – полное метрическое пространство}$$

Введем оператор $\mathcal{L} : X \to X$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \psi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

Корректность Очевидно, ψ непрерывна, нам нужно только показать, что $(t,\psi(t)) \in R$

$$|\psi(t)-x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \right| \leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$$

$$\Downarrow$$

$$(t,\psi(t)) \in R$$

Сжимаемость

$$\varphi_1, \varphi_2 \in X$$

$$\rho(\mathcal{L}(\varphi_1),\mathcal{L}(\varphi_2)) = \max_t \left| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t \int_{t_0}^{t} L|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds \leqslant \max_t \left| \int_{t_0}^{t} L\rho(\varphi_1,\varphi_2)ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t |t-t_0| L\rho(\varphi_1,\varphi_2) \leqslant Lh_0\rho(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$Lh_0 < 1$$

По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

Отсюда мы получаем существование и единственность решения для задачи Коши.

Продолжимость решений

$$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G),\ G \text{ – область единственности}$$

Определение. $x(t)$ – решение на (a,b)

Решение $y(t)$ – *продолжение вправо* $x(t)$, если y решение на $(a,b_1),\ b_1 > b$ и $x|_{(a,b)} = y|_{(a,b)}$

Теорема. *Теорема о продолжимости вправо Решение x на (a,b) продолжимо вправо за b* $\iff \exists x' = \lim\limits_{t \to b-0} x(t), (b,x') \in G$

Доказательство. " $\Rightarrow$ " Очевидно

" $\Leftarrow$ " По теореме существования $\exists z(t)$ на промежутке $(b-h, b+h) : z(b) = x'$

$$\text{Рассмотрим } y(t) = \begin{cases} x(t), t \in (a,b) \\ z(t), t \in [b,b+h) \end{cases}$$

$$y'(b) = z'(b) = f(b,x')$$
$$y(b) = z(b)$$

$y(t)$ – продолжение x вправо за b

□

Определение. $x(t)$ – *полное решение* на (a,b), если оно не продолжимо вправо за b и влево за a

Теорема. *Существование и единственность полного решения*

$\forall (t_0,x_0) \in G\ \exists!$ *полное решения задачи Коши с н.д.* (t_0,x_0)

Доказательство. Фиксируем (t_0,x_0)

Рассмотрим

$$T = \{(a,b) \ni t_0 \mid \exists \text{ решение задачи Коши } x(t) \text{ на } (a,b)\}$$

$$T \neq \emptyset$$

$$A = \inf a, B = \sup b : (a,b) \in T$$

Докажем, что $\exists!$ полное решение на (A,B)

Будем рассматривать только $[t_0,B)$ (влево аналогично). Для начала определим решение на этом промежутке.

Фиксируем $\tau \in (t_0,B)$

Так как $B = \sup\{b\} \Rightarrow \exists b \in (\tau,B),\ \exists x_b$ – решение на $[t_0,b)$

Положим $x(\tau) = x_b(\tau)$

Корректность Рассмотрим $b' \in (\tau,b)$

По теореме об области единственности $x_b(t) = x_{b'}(t)$ на $[t_0,b) \cap [t_0,b') \Rightarrow x_b(\tau) = x_{b'}(\tau)$

Получаем, что $x(t)$ – корректно определенная функция, очевидно, что она является решением.

Единственность Пусть есть $x_1(t)$ – полное решение на (A_1,B_1) и $x_2(t)$ – полное решение на (A_2,B_2), по теореме единственности они совпадают на пересечении

Если $(A_1,B_1) \cap (A_2,B_2) \neq (A_1,b_1)$, то (без ограничения общности можно считать, что $B_2 > B_1$) тогда x_2 – продолжение x_1 вправо, но x_1 было полным, получаем противоречие.

□

Теорема. *Теорема о полном решении и компакте*
Пусть K – компактное подмножество в G
$x(t)$ – полное решение на конечном промежутке (a,b)
$\Rightarrow \exists \Delta = \Delta(K) > 0 : (t,x(t)) \notin K, t \in (a,a+\Delta) \cup (b-\Delta, b)$

Доказательство.

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \ \forall (t_0,x_0) \in K : H(t_0,x_0) = \{|t-t_0| \leqslant \alpha, |x-x_0| \leqslant \beta\} \subset G$$

$$\Rightarrow H' = \bigcup_{(t_0,x_0)\in K} H(t_0,x_0) \text{ – компакт в } G$$

$$\Rightarrow \ \exists M > 0 \ |f(t,x)| \leqslant M \text{ в } H'$$

$$\Rightarrow \forall (t_0,x_0) \in K \text{ берем } R = H(t_0,x_0)$$

$$\exists h \ \forall (t_0,x_0) \in K : \ [t_0-h,t_0+h] \text{ – промежуток Пеано}$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$$\Delta := \frac{h}{2}$$

Рассмотрим полное решение $x(t)$ на (a,b)
Предположим, что $\exists \tau \in (b-\Delta,b) : (\tau,x(\tau)) \in K$
Тогда $\exists$ решение $x(t)$ задачи Коши с н.д. $(\tau,x(\tau))$ на $[\tau-h,\tau+h]$
Рассмотрим

$$y(t) = \begin{cases} x(t), t \in (a,\tau) \\ z(t), t \in [\tau, \tau+h) \end{cases}$$

Определено на $(a,\tau+h), \tau+h = \tau+2\Delta > b$
$\Rightarrow y$ – продолжение $x(t)$ за b вправо. □

$$y' = f(y), y \in \mathbb{R} f \in C[0,1], f(y) > 0, y \in (0,1], f(0) = 0$$

Определение. Система $\dot{x} = f(t,x)$ называется *сравнимой с линейной*, если

1. $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$

2. $\exists$ непрерывные $m(t)$ и $n(t)$ на $(a,b) : m(t), n(t) \leqslant 0$

$$|f(t,x)| \leqslant m(t)|x| + n(t)$$

Теорема. *Если система сравнима с линейной, то любое полное решение определено на промежутке (a,b)*

Доказательство. Пусть $x(t)$ – полное решенеие на (a',b')

Предположим, что $b' < b$, выберем $t_0 \in (a',b'),\ x_0 = x(t_0)$

Рассмотрим $[t_0,b'] \subset (a,b) \Rightarrow \exists M,N > 0 :\ m(t) \leqslant M, n(t) \leqslant N$ на $[t_0,b']$

Запишем интегральное уравнение для x

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

$$t \in [t_0,b') :\ |x(t)| \leqslant |x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0| + \left| \int_{t_0}^{t} m(s)|x(s)| + n(s)ds \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} M|x(s)| + Nds\right.$$

$$\Downarrow$$

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + N|b' - t_0| + M \int_{t_0}^{t} |x(s)|ds$$

$$\Downarrow \text{ (лемма Гронуолла)}$$

$$|x(t)| \leqslant (|x_0 + N|b - t_0|)e^{M(t-t_0)} \leqslant (|x_0| + N|b - t_0|)e^{M(b'-t_0)} =: N_1$$

$$(t,x(t)) \in K,\ t \in [t_0,b'),\ K = [t_0,b'] \times \{|x| \leqslant N1\}$$

Получаем противоречие с теоремой о полном решении и компакте, так как для любого сколь угодно близкого слева к b' числа t $(t,x(t))$ содержится в компакте K □

Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = P(t)x + q(t), x \in \mathbb{R}^n,\ P(t)$ непрерывная на (a,b) $n \times n$-матрица $q(t)$ непрерывный на (a,b) вектор

Что мы знаем про нашу систему?

$$f(t,x) = P(t)x + q(t)$$

$$f \in C(G), G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$$

Матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x} = P(t)$ – непрерывна в G

$$f \in \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

G – область существования и единственности

$$|f(t,x)| \leqslant ||P(t)|| \cdot |x| + |q(t)|$$

$$||P(t)||, |q(t)| \leqslant 0 \text{ и непрерывны в } G$$

Любое полное решение $x(t)$ определено на (a,b)

Далее мы будем рассматирвать только полные решения.

Свойство существования и единственности

1. $\forall (t_0,x_0) \in G\ \exists$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0,x_0), определенное на (a,b)
2. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения на (a,b) и $\exists t_0 \in (a,b) :\ x_1(t_0) = x_2(t_0)$, то $x_1|_{(a,b)} = x_2|_{(a,b)}$

Однородные линейные системы

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P(t) \in C((a,b))$$

Теорема. *Множество решений ЛОС – линейное пространство над* $\mathbb{R}$

Доказательство. Очевидно. □

Рассмотрим n решений $x_1(t), \dots x_n(t)$
Сопоставим им $n \times n$ матрицу

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Обозначим $W(t) = \det \Phi(t)$ – *Определитель Вронского (вронскиан)*
Лемма. $\exists t_0 : W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) \equiv 0$

Доказательство. Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = 0$$

Так как $\det = 0 \Rightarrow \exists c \neq 0$ – решение

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Тогда $x(t) = \Phi(t)c = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$ – решение

$$x(t_0) = \Phi(t_0)c = 0$$

$$\text{Естьрешение } y(t) \equiv 0$$

$$x(t_0) = y(t_0) \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

$$\Phi(t)c \equiv 0,\ c \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \equiv 0$$

□

Главная задача – описать структуру множества решений линейной однородной системы

Определение. $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – *фундаментальная матрица*, если существует $t_0 \in (a,b)$, в которой $W(t_0) \neq 0$ (тогда по предыдущей лемме $W(t) \neq 0$ на (a,b))

Теорема. $\forall$ *ЛОС* $\exists$ *фундаментальная матрица*

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (a,b)$, $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}^n$ – линейно независимы.
Тогда $\forall i$ существует решение $x_i(t), x_i(t_0) = a_i$
Возьмем в качестве фундаментальной матрицы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, $\Phi(t_0) = (a_1, \dots a_n)$, $W(t_0) \neq 0 \Rightarrow W(t) \neq 0$ на всем интервале. □

Примечание. $a_i = e_i$ – базисные векторы тогда $\Phi(t_0) = E$
$\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица, нормированная к единичной* при $t = t_0$

Теорема. *об общем решении ЛОС*
$\Phi(t)$ – *фундаментальная матрица* $\Rightarrow \forall x(t)$ – *решение ЛОС* $\exists!\ c \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c$

Доказательство. $\Phi(t)$, рассмотрим решение $x(t)$, фиксируем точку $t_0 \in (a,b)$

Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)c = x(t_0)$$

Поскольку Φ – фундаментальная матрица, ее определитель отличен от нуля и эта система имеет единственное решение.

Рассмотрим $y(t) = \Phi(t)c$ – линейная комбинация столбцов $\Phi(t)$, поэтому это тоже решение ЛОС

$$y(t_0) = \Phi(t_0)c = x(t_0)$$

По единственности решений ЛОС $y(t) = x(t)$ на (a,b)

Единственность c следует из единственности решения алгебраической системы. □

Таким образом, мы установили линейный изоморфизм:

$$\{\text{решения ЛОС}\} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \Phi(t)c$$

Выбор фундаментальной матрицы – выбор базиса пространства решений.

Теорема. *о множестве фундаментальных матриц*

Φ – *ф.м.* $\Rightarrow \{$*ф.м. ЛОС*$\} = \{\Phi(t)C : C$ – *матрица* $n \times n, \det C \neq 0\}$

Доказательство. " $\supset$ " Рассмотрим $\Psi = \Phi C$

Столбцы Ψ – линейные комбинации столбцов Φ, значит они решения. $\det\Psi = \det\Phi \cdot \det C \neq 0$

" $\subset$ "s Ψ – ф.м. $\Psi = (\psi_1, \dots \psi_n)$

$\forall i \ \psi_i = \Phi c_i \Rightarrow \Psi = (\Phi c_1, \dots, \Phi c_n) = \Phi C, \ C = (c_1, \dots, c_n)$

$0 \neq \det\Psi \det\Phi \det C \Rightarrow \det C \neq 0$

□

Теорема. *Пусть* $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, x_i – *решения ЛОС*

$\Rightarrow \frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t)$

Доказательство.

$$\frac{dx_i}{dt} = Px_i$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = (Px_1, \dots, Px_n) = P(x_1, \dots, x_n) = P\Phi$$

□

Задача нахождения фундаментальной матрицы

- Тривиальна в случае $n = 1$

$$\dot{x} = p(t), \ \Phi(t) = e^{\int p(t)dt}$$

- $n = 2$ Построение ф.м. по $P(t)$ – неразрешимая задача:

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\ddot{y} + t^\alpha y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -t^\alpha y \end{cases}$

Предположим $y(t) \not\equiv 0$

$$\text{Рассмотрим } x(t) = \frac{\dot{y}}{y}$$

$$\text{Тогда } \dot{x} = -\frac{1}{y^2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{y}\ddot{y} = -x^2 - t^\alpha$$

– уравнение Рикатти, для которого ни одно решение не представимо в элементарных функциях.

А если x не представим в элементарных функция, то и y не представим в элементарных функциях. □

Комплексные Решения ЛОС

$$\dot{x} = P(t)x, x \in \mathbb{R}^n, P \in C(a,b)$$

$$z = x + iy,\ x,y \in \mathbb{R}^n$$

Лемма. *$P(t)$ – вещественная матрица, $z = x + iy$ – комплексное решение $\Leftrightarrow$ x,y – вещественное решения*

Лемма. *об овеществлении*

$\Psi(t) = (y_1, \dots, y_2)$ – *комплексная фундаментальная матрица, у котрой* $y_1 = \overline{y_2}$

$\Phi(t) = (\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \dots, y_n)$ – *ф.м*

Доказательство.

$$\Phi = \Psi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \neq 0$$

□

Системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n$$

Метод Эйлера Ищем решения в виде $x(t) = \gamma e^{\lambda t}$, $\gamma \neq 0$

$$\dot{x} = \lambda\gamma e^{\lambda t} = A\gamma e^{\lambda t}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\gamma = \lambda\gamma$$

Простой частный случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и простые(кратность каждого 1)

Тогда есть n решений $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t}$

$$\Phi(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \gamma_n e^{\lambda_n t} \text{ -- фудаментальна}$$

$\{A\ n \times n$ комплексные матрицы$\}$
$||A||$ – операторная норма A

$$||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$$

Определение. *Матричная экспонента*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^K}{k!}$$

Теорема. *Этот ряд сходистя*

Доказательство. $\Sigma_m = \sum_{k=0}^{M} \frac{A^k}{k!}$

$$||\Sigma_m - \Sigma_{m+l}|| = ||\sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{A^k}{k!}|| \leqslant \sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{||A||^k}{k!} \to 0$$

□

Теорема. $B = S^{-1}AS \Rightarrow e^B = s^{-1}e^A S$

Для матриц, вообще говоря, неверно равенство $e^{A+B} = e^A e^B$

Теорема.

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(A+B)\ldots(A+B) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \to e^A e^B$$

□

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \ t \in \mathbb{R}$$

Теорема.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k t^k = \frac{d}{dt}\left(E + At + \ldots \frac{1}{m!} A^m t^m\right) = A + A^2 t + \ldots \frac{1}{(m-1)!} A^m t^{m-1} = A\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{A^k t^k}{k!}\right)$$

□

Следствие. e^{At} – фундаментальная матрица $\dot{x} = Ax$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \Rightarrow \text{ столбцы } e^{At} \text{ – решения}$$

$$t = 0, e^{A\cdot 0} = E$$

$$\text{Если } A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_n)$$
$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$
$$e^{At} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Вычисление e^{At}

$$B = s^{-1}AS \Rightarrow e^{Bt} = S^{-1}e^{At}S$$

Матрицу A можно привести к ЖНФ
$\exists S : S^{-1}AS = J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m)$, где J_i – жордановы блоки.

$$S^{-1}e^{At}S = \operatorname{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_m t})$$

Жорданов блок $J_l = \lambda E_s + I_s$

$$I_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{J_s t} = e^{\lambda E_s t + I_s t} = e^{\lambda E_s t} \cdot e^{I_s t}$$

$$e^{\lambda E_s t} = e^{\operatorname{diag}(\lambda t, \dots, \lambda t)} = e^{\lambda t} \cdot E_s$$

$$\text{Вычислим } e^{I_s t}$$
$$I_s^0 = E_s$$
$$I_s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$I_s^{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$I_s^k = 0, k \geqslant s$$

$$e^{I_s t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_s^k t^k =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^{J_l t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Зная каждую матрицу $e^{J_s t}$, легко вычислить и всю e^{Jt}

Оценка фундаментальной матрицы
Теорема. *A – матрица, λ_j – собственные числа:*

$$\forall a > \operatorname{Re} \lambda_j, j = 1, \dots, n \exists c > 0 :$$
$$||e^{At}|| \leqslant Ce^{at}$$

Доказательство.

$$J = S^{-1} AS$$

Достаточно посчитать норму $||e^{Jt}||$

Ненулевой элемент – $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j t}$, $|e^{\lambda_j t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$

$$a > \max \operatorname{Re} \lambda_j$$

$$e^{-at} \cdot \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j, t} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c_{j,k} : \ |e^{-at} \cdot \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j, t}| \leqslant c_{j,k}$$

Тогда $|\frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j t}| \leqslant c_{j,k} e^{at}$ при $t \geqslant 0$
В качестве константы C можно взять $\max c_{j,k}$ (пар (j,k) конечное число) □

Сравнение с методом Эйлера

$$\dot{x} = Ax$$

Предполагаем, что с.ч. A вещественные и простые
λ_j – с.ч. A, γ_j – соответствующие с.в.
Методом Эйлера получаем, что ф.м. равна:

$$(\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t})$$

Если следовать методу матричной экспоненты:
Берем $S : S^{-1} AS = J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Тогда $S^{-1}e^{At}S = e^{Jt} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$
S – решение уравнения $AS = SJ$, $S = (s_1, \dots, s_n)$
$As_j = \lambda_j s_j \Rightarrow s_j$ – собственные векторы.
Знаем, что e^{At} – фундаментальная матрица
По теореме об общем виде фундаментальных матриц $\Rightarrow e^{At} \cdot S$ – ф. м.

$$e^{At}S = Se^{Jt} = (s_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, s_n e^{\lambda_n t})$$

То же самое. что и методом Эйлера

Случай Лаппо-Данилевского

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbb{R}^n, A \in C(a,b)$$

Теорема. *предположим, что* $\exists t_0 \in (a,b)$*:*

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \cdot A(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} \text{ – \textit{фундаментальная матрица}}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} = A(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

Тогда $e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$ – матрица решений и $W(t_0) = \det(E) = 1$

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t}\right)^k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t}\right)^k = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \cdot \ldots \cdot \int_{t_0}^{t}\right) = A(t)\left(\int_{t_0}^{t}\right)^{k-1} + \left(\int_{t_0}^{t}\right)A(t)\left(\int_{t_0}^{t}\right)^{k-2} + \dots$$

Так как матрица и интеграл коммутируют:

$$= kA(t)(\int_{t_0}^{t})^{k-1}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}(\int_{t_0}^{t})^k = \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k!} \cdot k \cdot A(t)(\int_{t_0}^{t})^{k-1} = A(t)\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{(k-1)!}(\int_{t_0}^{t})^{k-1} \to A(t)e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

Откуда и следует формула для производной. □

Неоднородные линейные системы

Определение. *Неоднородная линейная система*

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t), x \in \mathbb{R}^n$$

Соответствующая Лос $\dot{x} = P(t)x$

Теорема. *Об общем решении неоднородной линейной системы*
Пусть $y(t)$*– решение НЛС*
$\Phi(t)$ *– ф.м. соответсвующей ЛОС*
$\Rightarrow \forall x(t)$ *– решение НЛС* $\exists!\ c \in \mathbb{R}^n:\ x(t) = \Phi(t)c + y(t)$

Доказательство.

$$x(t) - y(t) \text{ – решение ЛОС}$$

$$\dot{x} - \dot{y} = Px + Q - (Py + Q) = P(x - y)$$

Тогда $x - y = \Phi(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$
При фиксированном y, $x = \Phi(t)c + y(t)$, причем c – единственно.

□

Метод Лагранжа $\Phi(t)$ – ф.м. соответствующей ЛОС
Ищем решение $x(t)$ НЛС в виде

$$x(t) = \Phi(t)\alpha(t), \alpha \in C^1$$

$$\dot{x} = \dot{\Phi}\alpha + \Phi\dot{\alpha} = Px + Q$$

Так как $\dot{\Phi}(t) = P\Phi(t)$, уравнение можно переписать в виде

$$P\Phi\alpha + \Phi\dot{\alpha} = P\Phi\alpha + Q$$

Откуда

$$\Phi\dot{\alpha} = Q, \det\Phi \neq 0$$

$$\exists\Phi^{-1} \in C$$

$$\Phi\dot{\alpha} = Q \Leftrightarrow \dot{\alpha} = \Phi^{-1}Q$$

$$\alpha = \int \Phi^{-1}Qdt$$

$$x(t) = \Phi\int \Phi^{-1}Qdt$$

Логарифм матрицы

Определение. *Логарифм матрицы* $\log(B)$ – такая матрица A, что $e^A = B$, так как e^A всегда обратима, необходимо, чтобы $\det B \neq 0$

Оказывается, что это условие необходимо и достаточно

Теорема.

$$\forall A, \det A \neq 0\ \exists \log A$$

Напомним, что

$$I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица } r \times r$$

Лемма. $\lambda \neq 0$

$$Z = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$$

Тогда $e^Z = E_r + \frac{I_r}{\lambda}$

Доказательство. Ряд в определении Z конечен

$z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

$$\log(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p$$

$$e^{\log(1+z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p\right)^k = 1 + z$$

Частная сумма ряда $\sigma_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p)^k$

$$\sigma_{m+1}(z) - \sigma_m(z) = z^{m+1}(...)$$

$$\sigma_m(z) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} z + \ldots + a_m^{(m)} z^m + \ldots$$
$$\sigma_{m+1}(z) = a_0^{(m+1)} + a_1^{(m+1)} z + \ldots + a_m^{(m+1)} z^m + \ldots$$

Коэффициенты до m-го совпадают

$\sigma_{m+1}(z) \to 1 + z$

Значит, $\sigma_m(z) = 1 + z + z^m(\ldots)$

То же самое можно проделать и для матричной экспоненты:

$$\Sigma_m(Z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p\right)^k =$$

$$= E_r + \frac{I_r}{\lambda} + \mathbb{O}$$

Откуда и следует требуемое равенство.

□

Доказательство. (существования логарифма матрицы)

Рассмотрим Жорданов блок ($\lambda \neq 0$): $\lambda E_r + I_r$

Его логарифмом является $\log(\lambda) E_r + Z$

Действительно,

$$e^{\log \lambda E_r + Z} = e^{\log \lambda E_r} \cdot e^Z = \lambda E_r \cdot (E_r + \frac{I_r}{\lambda}) = \lambda E_r + I_r$$

Тогда несложно видеть, что логарифм жордановой формы $J = (J_1, \ldots, J_m)$ это

$$\log J = (\log J_1, \ldots, \log J_m)$$

Если $A = SJS^{-1}$, то $\log A = S \log J S^{-1}$, действительно

$$e^{S \log J S^{-1}} = S e^{\log J} S^{-1} = SJS^{-1} = A$$

□

Линейные периодические системы

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), x \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists\, \omega > 0: \ P(t+\omega) = P(t), \ q(t+\omega) = q(t), \ t \in \mathbb{R}$$

Лемма. *$x(t)$ – решение $\Rightarrow y(t) = x(t+\omega)$ – тоже решение*

Доказательство. $\frac{dy}{dt} = \frac{dx(t+\omega)}{dt} = \frac{dx(t+\omega)}{d(t+\omega)} = P(t+\omega)x(t+\omega) + q(t+\omega) = P(t)y(t) + q(t)$ □

Одронодная линейная система с периодической матрицей:

$$\dot{x} = P(t)x$$

Теорема. *Флоке*
$\Phi(t)$ – ф.м. $\Rightarrow \exists\omega$-периодическая $G(t), \ \det G(t) \neq 0$, и R – постоянная матрица: $\Phi(t) = G(t)e^{Rt}$

Доказательство. $\Phi(t)$ – ф.м.
Рассмотрим ее сдвиг на период: $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$ – это тоже ф. м. (по предыдущей лемме)
По теореме о множестве фундаментальных матриц: $\exists B, \det B \neq 0: \ \Psi(t) = \Phi(t)B$
$\exists \log B$ в качестве $R = \frac{1}{\omega}\log B$ $G(t) = \Phi(t)e^{-Rt}, \ \det G(t) \neq 0$

$$G(t+\omega) = \Phi(t+\omega)\cdot e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t)\cdot B\cdot e^{-R\omega}\cdot e^{-Rt} = \Phi(t)e^{-Rt}$$

□

Определение. *Матрица монодромии* такая матрица B, что $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$
мультипликаторы – собственные числа матрицы монодромии

Утверждение. Мультипилкаторы не зависят от Φ

Доказательство. Рассмотрим $\Phi_1(t)$ – ф.м. B_1 – матрица монодромии Φ_1

$$\exists S \det S \neq 0 : \Phi_1(t) = \Phi(t)S$$

$\Phi(t)SB_1 = \Phi_1(t)B_1 = \Phi_1(t+\omega = \Phi(t+\omega)S = \Phi(t)BS$

$$\Phi(t)SB_1 = \Phi(t)BS$$
$$BS = SB_1$$
$$B = SB_1S^{-1}$$

□

Теорема. *о мультипликаторах*
μ – мультипликатор $\Leftrightarrow \exists$ ненулевое решение $x(t) : x(t+\omega) = \mu x(t)$

Доказательство. Зафиксируем ф.м. $\Phi(t): \ \Phi(0) = E$
Рассмотрим $x(t) = \Phi(t)x_0, \ x_0 \neq 0$

$$x(t+\omega) = \Phi(t+\omega)x_0 = \Phi(t)Bx_0$$

Рассмотрим равенство

$$x(t+\omega) = \mu x(t)$$

$$\mu x(t) = \mu\Phi(t)x_0 = \Phi(t)Bx_0$$

Можно поделить на $\Phi^{-1}(t)$

$$\mu x_0 = Bx_0 \Leftrightarrow \mu \text{ – с.ч. } B \text{ (мультипликатор)}$$

□

Формула Остроградского-Лиувилля (Якоби)

$$\dot{x} = P(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ (не обязательно фундаментальная матрица)}$$

$$W(t) = \det\Phi(t)$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = (\operatorname{Tr} P(t)) \cdot W(t)$$

Дифференцирование определителя

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ (a_{ij} Дифференцируемы)}$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dots & \dot{a}_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dot{a}_{21} & \dots & \dot{a}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{a}_{n1} & \dots & \dot{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

Формула очевидным образом следует из определения детерминанта$A(t) = \sum\limits_{\pi \in S_n} (-1)^{\operatorname{sign}\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n}$

Доказательство. (формулы Остроградского-Лиувилля)

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^{(1)} & \dots & \dot{x}_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$\dot{x}_i = [Px_i]^{(1)} = p_{11}x_i^{(1)} + p_{12}x_i^{(2)} + \dots + p_{1n}x_i^{(n)}$$

Прибавляя к 1-й строке j-ю, умноженную на $-p_{1j}$, тогда мы получим, что

$$W_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}x_1^{(1)} & \dots & p_{11}x_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} = p_{11}W(t)$$

Аналогично получаем, что

$$W_i(t) = p_{ii}W(t)$$

Откуда и следует Формула Остроградского-Лиувилля

$$\frac{d}{dt}W(t) = p_{11}W(t) = p_{22}W(t) + \ldots + p_{nn}W(t) = TrW(t)$$

□

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение порядка n*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = b(t)$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n, b \in C(I)$, $I-$ открытый промежуток $\mathbb{R}$

Определение. Решением уравнения называется функция $x(t)$, определенная на $(\alpha, \beta) \subset I :$ и удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\exists\ \dot{x}, \ldots, x^{(n)}$ на (α,β)
2. $x^{(n)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) \equiv b(t)$

Определение. Решение задачи Коши

Фиксируем начальные данные $t_0 \in I$ и числа $x_0,\dot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$

Решение задачи Коши с этими начальными данными – решение $x(t)$ на (α,β), такое что

$$x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

Рассмотрим вспомогательную линейную систему с неизвестными функциями $y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = -a_n y_1 - \ldots - a_1 y_n + b \end{cases}$$

Как мы уже видели, если $x(t)$ – решение уравнения, то $y_i = x^{(i-1)}$ – решение системы

Если $y_1, \ldots, y_n$ – решение системы, то $x = y_1$ – решение уравнения

$x(t)$ – решение задачи Коши с н.д. $t_0,x_0, \ldots, x_0^{(n-1)} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – решение задачи Коши для системы с н.д. $y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$

Теорема. *(существование и единственность линейного уравнения высшего порядка)*

1. *$\forall (t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$ $\exists$ решение $x(t)$ задачи Коши на I*

2. *Если $x_1(t), x_2(t)$ – решения и $\exists\ t_0$:*

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \ldots, x_1^{(n-1)}(t_0) = x_2^{(n-1)}(t_0) \Rightarrow x_1 \equiv x_2$$

Однородные линейные уравнения

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = 0$$

Множество решений – линейное пространство

Определение. $x_1, \ldots, x_n$ – решения однородного уравнения называются *линейно независимыми*, если

$$c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t) \equiv 0 \text{ на } I \Rightarrow c_i = 0 \forall i$$

Определение. Определитель Вронского

$$W(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \ldots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Следствие. 1. $\exists t_0 \in I : W(t_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$

2. $W(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ на I

3. $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы

Доказательство. "$1 \Rightarrow 3$" Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & \ldots & x_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\exists\ C \neq 0 \Rightarrow c_1x_1(t_0) + \ldots + c_nx_n(t_0) = 0$$

$$c_1x_1^{(n-1)} + \ldots + c_nx_n^{(n-1)} = 0$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t) \text{ – решение}$$

$$y(t_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = 0$$

Есть решение $z(t) \equiv 0$ с такими же начальными данными

$$\Rightarrow y \equiv z \Rightarrow c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t) \equiv 0$$

"$3 \Rightarrow 2$" Предположим, что

$$\exists \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1 x_1^{(n-1)} + \ldots + c_n x_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall t \; W(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

"$2 \Rightarrow 1$" тривиально

□

Отрицания тоже равносильны

$$W(t, x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \forall t \in I$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists t_0 W(t_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1, \ldots, x_n \text{ – линейно независимы}$$

Определение. Набор решений $x_1, \ldots, x_n$ – называется *фундаментальной системой решений*, если $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы

Теорема. *$\exists$ фундаментальная система решений*

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in I$

Фиксируем n линейно независмых вектрово $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$

$\exists$ решения $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{pmatrix} x_i(t_0) \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$W(t_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \Rightarrow$ решения линейно независимы □

Теорема. *(Об общем решении)*

Если $x_1, \ldots, x_n$ – фундаментальная система решений, то $\forall$ решения $x(t)$ $\exists!$ $c_1, \ldots, c_n$:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t)$$

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in I$

Рассмотрим алгебраическую систему

$$\begin{cases} x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + \ldots + c_n x_n(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) \end{cases}$$

$$W \neq 0 \Rightarrow \text{ существует решение } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

□

Метод Эйлера

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0, \ a_i = \text{const}, \ a_i \in \mathbb{R}$$

Введем оператор L на $x \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x$$

$$x - \text{решение } \Leftrightarrow L(x) \equiv 0$$

Множество решений – ядро оператора L

$$L(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} + \ldots + a_n e^{\lambda t} = p_n(\lambda) e^{\lambda t}$$

$$p_n = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \ldots + a_n - \textit{характеристический многочлен}$$

Утверждение. $e^{\lambda t}$ – решение $\Leftrightarrow p_n(\lambda) = 0$

$$\begin{gathered} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{вещественное решение } e^{\lambda t} \\ \lambda \in \mathbb{C} \lambda = a + bi \Rightarrow \text{ комплексное решение } e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ \Rightarrow e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt - \text{вещественные решения} \end{gathered} \tag{2}$$

Утверждение. Пусть λ_0 – корень $p_n(\lambda)$ кратности $m > 1$

$$\text{Тогда } e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{m-1} e^{\lambda_0 t} - \text{решения}$$

Доказательство. $L(t^k e^{\lambda t}, \ k \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant k \leqslant m-1$

$$L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} p_n(\lambda) e^{\lambda t} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}(p_n(\lambda)) t^{k-s} e^{\lambda t}$$

$$s \leqslant m-1 \Rightarrow \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}(p_n(\lambda)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L(t^k e^{\lambda_0 t}) = 0$$

□

Мы получаем по m решений для каждого корня кратности m – всего n решений. Правда ли, что они линейно независимы?

Линейная независимость квазиодночленов

$$t^k e^{\lambda t}, k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0 \text{ – } \textit{квазиодночлен}$$

Утверждение. $\{t^{k_i}e^{\lambda_i t}\},\ i = 1, \ldots, N\ (k_i, \lambda_i) \neq (k_j, \lambda_j)$ при $i \neq j$
Линейно независимы на $\mathbb{R}$

Доказательство. Индукция по числу различных λ_i

База $\lambda_i = \lambda$

Предположим, что $c_1 t^{k_1} e^{\lambda t} + \ldots + c_n t^{K_N} e^{\lambda t} \equiv 0$, откуда получаем

$$P(t)e^{\lambda t} = 0\ P(t) \text{ – многочлен}$$

Коэффициенты этого многочлена – $c_1, \ldots, c_N$

$P(t)e^{\lambda t} \equiv 0 \Rightarrow P(t) \equiv 0 \Rightarrow c_i = 0\ \forall i$

Переход Доказали для $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Теперь докажем для $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$

$$c_1 t^{k_1} e^{\lambda_1 t} + \ldots c_N t^{k_N} e^{\lambda_N t} \equiv 0$$

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0, \quad P_i \text{ – многочлены}$$

Умножим на $e^{-\lambda_{m+1} t}$

$$P_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + \ldots + P_m e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} + P_{m+1} \equiv 0$$

Заметим, что если $P(t)$ многочлен, то $\dfrac{d}{dt}P(t)e^{\lambda t} = R(t)e^{\lambda t}$, где $R(t)$ тоже многочлен

$$\deg P = \deg R$$

Дифференцируем тождество по t достаточно много раз, чтобы производная P_{m+1} стала нулем

$$R_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{m+1})t} + \ldots + R_m e^{(\lambda_m - \lambda_{m+1})t} \equiv 0 \Rightarrow R_1 \equiv \ldots \equiv R_m \equiv 0$$

Степени сохраняются $\Rightarrow P_1 \equiv \ldots \equiv P_m \equiv 0 \Rightarrow P_{m+1} \equiv 0 \Rightarrow P_{m+1} \equiv 0 \Rightarrow c_1 = \ldots c_N = 0$

□

Неоднородное линейное уравнение порядка n

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = q(t),\ p_i, q \in I$$

$$L(x) = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)x$$

$$L : C^n(I) \to C(I)$$

$L(x) = q(t)$ сопосталяем соответствующее однородное уравнение $L(x) = 0$

Теорема. *(об общем решении линейного неоднородного уравнения)*

$x_1, \ldots, x_n$ – *фундаментальная система решений уравнения* $L(x) = 0$

y – *решение* $L(x) = q \Rightarrow \forall x$ – *решение* $L(x) = q \exists! c_1, \ldots, c_n$

$$x = y + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

Доказательство.

$$L(x - y) = L(x) - L(y) = 0$$

$x - y$ – решение однородного уравнения $\exists! c_1, \ldots, c_n : x - y = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ □

Метод Лагранжа

$$L(x) = q$$

Предполагаем, что $x_1, \dots, x_n$ – ф.с.р. $L(x) = 0$ (старший коэффициент L равен 1)

Ищем $y(t) : L(y) = q$

$$y(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \dots + \alpha_n(t)x_n(t)$$

Такие, что

$$\dot\alpha_1 x_1 + \dots + \dot\alpha_n x_n = 0$$

$$\dot\alpha_1 \dot x_1 + \dots + \dot\alpha_n \dot x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\dot\alpha_1 x_1^{(n-2)} + \dots + \dot\alpha_n x_n^{(n-2)} = 0$$

$$\dot\alpha_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \dot\alpha_n x_n^{(n-1)} = q$$

тогда старшие производные имеют вид:

$$\dot y = \dot\alpha_1 x_1 + \dots + \dot\alpha_n x_n + \alpha_1 \dot x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \alpha_1 \dot x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$y'' = \dot\alpha_1 x_1 + \dots + \dot\alpha_n x_n + \alpha_1 x_1'' + \dots + \alpha_n x_n'' = \dot\alpha_n x_n + \alpha_1 x_1'' + \dots + \alpha_n x_n''$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dot\alpha_1 x_1^{(n-2)} + \dots + \dot\alpha_n x_n^{(n-2)} + \alpha_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n x_n^{(n-1)} = \alpha_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_n x_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = \dot\alpha_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \dot\alpha_n x_n^{(n-1)} + \alpha_1 x_1^{(n)} + \dots + \alpha_n x_n^{(n)} = q(t) + \alpha_1 x_1^{(n)} + \dots + \alpha_n x_n^{(n)}$$

Если y удовлетворяет всем вышеприведенным соотношениям, то y – решение

Действительно, подставим y в наше уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = q(t)$$

$$L(y) = q + \alpha_1(x_1^{(n)} + p_1(t)x_1^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x_1) + \dots + \alpha_n(x_n^{(n)} + p_1(t)x_n^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x_n) = q$$

(все x_1 – решения соответсвующего однородного уравнения)

Заметим, что система разрешима на α_i разрешима

$$\begin{cases} \dot\alpha_1 x_1 + \dots + \dot\alpha_n x_n \\ \vdots \\ \dot\alpha_1 x_1^{(n-1)} + \dots + \dot\alpha_n x_n^{(n-1)} = q \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \dot x_1 & \dots & \dot x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(t, x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

Поэтому $\exists!\ \dot\alpha_1, \dots, \dot\alpha_n \in C(I)$

Метод неопределенных коэффициентов

Предположим, что $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = q(t)$

$$q(t) = e^{\alpha t} \cdot Q_m(t),\ Q_m(t) \text{ – многочлен степени } m$$

Мы хотим найти решение в виде $x(t) = t^k e^{\alpha t} R_m(t)$, где $R_m(t)$ – многочлен степени m

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

Если $p(\alpha) \neq 0$, положим $k = 0$
Если же α корень, то k – кратность

Теорема. $\exists!$ *решение неоднородного уравнения, имеющее вид* $x(t) = t^k e^{\alpha t} R_m(t)$, *где* $R_m(t)$ *– многочлен степени* m

Доказательство.

$$L(x) = q(t) = e^{\alpha t} Q_m(t) = e^{\alpha t} \sum_{s=0}^{m} q_s t^s$$

$$R_m(t) = \sum_{s=0}^{m} r_s t^s$$

$$L(t^k e^{\alpha t} R_m(t) = L(\sum_{s=0}^{m} r_s t^{k+s} e^{\alpha t} = \sum_{s=0}^{m} r_s L(t^{k+s} e^{\alpha t}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} r_s L\left(\frac{\partial^{k+s}}{\partial \alpha^{k+s}} e^{\alpha t}\right) = \sum_{s=0}^{m} r_s \frac{\partial^{k+s}}{\partial \alpha^{k+s}} L(e^{\alpha t}) =$$

$$\sum_{s=0}^{m} r_s \frac{\partial^{k+s}}{\partial \alpha^{k+s}} p_n(\alpha) e^{\alpha t} = \sum_{s=0}^{m} r_s \sum_{\nu}^{k+s} C_{k+s}^{\nu} p_n^{(\nu)}(\alpha) t^{k+s-\nu} e^{\alpha t}$$

$$\begin{cases} p_n^{(\nu)}(\alpha) = 0,\ \nu = 0, \ldots, k-1 \\ p_n^{(k)} \neq 0 \end{cases}$$

Хотим:

$$\sum_{s=0}^{m} r_s \sum_{\nu}^{k+s} C_{k+s}^{\nu} p_n^{(\nu)}(\alpha) t^{k+s-\nu} e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \sum_{s=0}^{m} q_s t^s$$

Коэффициенты при старшем члене должны быть равны должны быть равны:

$$k + s - \nu = m$$

$$k - \nu = m - s \geqslant 0 \text{ т.к. } s \leqslant m$$

$\nu \geqslant k$, так как самая первая производная, которая дает ненулевое слагаемое это $p_n^{(k)}$

$$\Rightarrow k = \nu, m = s$$

В левой части при $t^m e^{\alpha t}$ стоит только $r_m C_{k+m}^{m} p_n^{(k)}(\alpha) = q_m \Rightarrow \exists! r_m$, т.к. $p_n^{(k)}(\alpha) \neq 0$
Теперь вычислим коэффициенты при $t^i e^{\alpha t}$, где $0 \leqslant i < m$

$$k + s - \nu = i$$

$$k - \nu = i - s$$

$$k - \nu \leqslant 0 \Rightarrow i - s \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$
$$i \leqslant s$$

$$\text{Тогда } r_i c_{i+k}^k p_n^{(k)}(\alpha) + H(r_{i+1}, \ldots, r_m) = q_i$$

$r_{>i}$ мы уже нашли, значит r_i снова определяется однозначно. □

Метод неопределенных коэффициентов для линейных систем

$$\dot{x} = Ax + q(t)$$

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t} \; q_i \text{ -- многочлены}$$

Пусть k – максимальный размер жорданова блока для матрицы J
m – наибольшая из степеней q_i

Тогда существует решение $x(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$

$\deg r_i = m + k$

Формула Остроградского-Лиувилля для линейных уравнений порядка n

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = 0$$

Вронскиан

$$W(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ z_n = -a_n(t)z_1 - \ldots - a_1(t)z_n \end{cases}$$

$y_1, \ldots, y_n$ – решения системы, соотвествующие $x_1, \ldots, x_n$

$$\frac{d}{dt}W(t) = \operatorname{Tr} P(t) W(t)$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} = -a_1(t)W(t)}$$

Зависимость решений от начальных данных и параметров

$$\dot{x} = f(t,x,\mu),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \mu \in \mathbb{R}^m \text{ – вектор параметнров}$$

Рассматриваем f в $G \times M$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область, $M \subset \mathbb{R}^m_\mu$ – открытое множество
Предположим, что $\forall \mu \in M$

$$f(-,-,\mu) \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G)$$

Задача Коши с н.д. $(\tau,\xi) \in G$
При фиксированном параметре $\mu \in M$

$$x(t,\tau,\xi,\mu) \text{ – решение задачи Коши с н.д.}(\tau,\xi)$$

Для него есть максимальный промежуток $I(\tau,\xi,\mu)$

Лемма. *(об оценке разности решений)*

$$\dot{x} = f(t,x)$$

$$\dot{y} = g(t,x)$$

Предположим, что $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$, L – константа Липшица f по x в G

$$|f(t,x)| \leqslant M \ \text{ в } G$$

$$|f(t,x) - g(t,x)| \leqslant m \ \forall (t,x) \in G$$

$x(t) : x(t_0) = x_0,\ y(t) : y(\tau_0) = \xi_0$ – решения на $[a,b]$
Тогда $|x(t) - y(t)| \leqslant (|x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + m(b-a))e^{L(b-a)}$

Доказательство.

$$x(t) = x_o + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} f(s,x(s))ds + \int_{\tau_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

$$y(t) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^{t} g(s,y(s))ds$$

$$|x(t)-y(t)| \leqslant |x_0+\xi_0| + \left|\int_{t_0}^{\tau_0} f(s,x(s))ds\right| + \left|\int_{\tau_0}^{t} f(s,x(s)) + f(s,y(s)) - f(s,y(s)) - g(s,y(s))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + \left|\int_{\tau_0}^{t} f(s,x(s)) - f(s,y(s))ds\right| + \left|\int_{\tau_0}^{t} g(s,y(s)) - f(s,y(s))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + \int_{\tau_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds + m|t - \tau_0|$$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + m(b-a) + L\int_{\tau_0}^{t} |x(s) - y(s)|ds$$

По лемме Гроноулла

$$|x(t) - y(t)| \leqslant (|x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + m(b-a))e^{L|t-\tau_0|} \leqslant (|x_0 - \xi_0| + M|t_0 - \tau_0| + m(b-a))e^{b-a}$$

$\square$

Теорема. *(о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров)*

$$\dot{x} = f(t,x,\mu)$$
$$f \in C, \mathrm{Lip}_{x,\,\mathrm{loc}}(G \times M)$$

Фиксируем решение $x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)$
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \forall [a,b] \subset I(\tau_0,\xi_0,\mu_0)\ \exists \delta > 0$
$\forall (\tau,\xi,\mu)$, *если* $|\xi - \xi_0|,|\tau - \tau_0|, |\mu - \mu_0| < \delta$, *то*

1. $[a,b] \subset I(\tau,\xi,\mu)$
2. $|x(t,\tau,\xi,\mu) - x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)| < \varepsilon, t \in [a,b]$

Доказательство. Можно считать, что $\tau_0, \tau \in (a,b)$

$$R_0 = \{(t,x) : t \in [a,b], |x - x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)| \leqslant \varepsilon\}$$

Уменьшим ε так, чтобы $R_0 \subset G$
R_0 – компакт
$\{\mu : |\mu - \mu_0| \leqslant \varepsilon\} \subset M$
$R = R_0 \times \{\mu : |\mu - \mu_0| \leqslant \varepsilon\} \subset G \times M$ – компакт
$\exists N > 0 :\ |f(t,x,\mu)| \leqslant N$ $L > 0$ – константа Липшица f по x в R
Выберем $\delta_1 > 0$ такое, что $\delta_1(q + N + (b - a))e^{L(b-a)} < \varepsilon$
f равномерно непрерывна на $R \Rightarrow \exists \delta \in (0,\delta_1)$:
$|\mu - \mu_0| < \delta \Rightarrow |f(t,x,\mu) - f(t,x,\mu_0)| < \delta_1,\ (t,x) \in R_0$
$\delta < \delta_1 \Rightarrow \delta(1 + N) < \varepsilon$
Верны 2 утверждения:

I $y(t) = |x(t,\tau,\xi,\mu) - x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)| < \varepsilon$ для $t \in [a,b] \cap I(\tau,\xi,\mu)$

II $I(\tau,\xi,\mu) \supset [a,b]$

Доказательство. (I)
Оценим $y(\tau)$

$$|y(\tau)| = |\xi - (\xi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} f(s,x(s,\tau_0,\xi_0,\mu_0),\mu_0)ds)| \leqslant |\xi - \xi_0| + N|\tau - \tau_0| \leqslant \delta(1 + N) < \varepsilon$$

$$|\xi - x(\tau,\tau_0,\xi_0,\mu_0)| < \varepsilon$$

Предположим, что (I) неверно:
$\exists t' \in [a,b] \cap I(\tau,\xi,\mu)$ такой что
$y(t') = \varepsilon$
Пусть $t' > \tau$ и t' – первая точка, в которой выполняется это равенство
Тогда $y(t) \leqslant \varepsilon,\ t \in [\tau,t'] \Rightarrow (t,x(t,\tau,\xi,\mu)) \in R_o$ при $t \in [\tau,t']$
$\Rightarrow y(t) \leqslant (|\xi - \xi_0| + |\tau - \tau_0| \cdot N + \delta_1(b - a))e^{L(b-a)} \leqslant (\delta + \delta N + \delta_1(b - a))e^{L(b-a)} < \varepsilon, t \in [\tau,t']$
Противоречие с $y(t') = \varepsilon$ □

Доказательство. (II)
Предположим, что $I(\tau,\xi,\mu) = (\alpha,\beta)$
И (II) неверно, то есть $\beta < b$ или $\alpha > a$
Рассмотрим первый случай, тогда по теореме о полном решении и компакте график $(t,x(t,\tau,\xi,\mu))$ покидает компакт R_0 при приближении к β слева, но это противоречит (I) □

□

Предметный указатель