

# Дифференциальные уравнения и динамические системы

Алешин Артем  
на основе лекций Пилюгина С. Ю.  
под редакцией @keba4ok

5 сентября 2021.

# Содержание

Литература . . . . .	3
<b>Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной</b>	<b>3</b>
Задача Коши . . . . .	3
Единственность . . . . .	3
Поле направлений . . . . .	4
Основные теоремы . . . . .	4
<b>Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка</b>	<b>4</b>
Интеграл . . . . .	4
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	5
<b>Замена переменных</b>	<b>6</b>
Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	7
Уравнения, сводящиеся к линейным . . . . .	8
Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме . . . . .	8
<b>Уравнение в полных дифференциалах</b>	<b>9</b>
Условие точности 1-формы . . . . .	10
Интегрирующий множитель . . . . .	10
<b>Системы дифференциальных уравнений</b>	<b>11</b>
Частные случаи . . . . .	11
Векторная запись нормальных систем . . . . .	12
<b>Теорема существования</b>	<b>12</b>
Ломаные Эйлера . . . . .	13
<b>Напоминание из анализа</b>	<b>15</b>
<b>Лемма Гронуолла</b>	<b>17</b>
<b>Метод приближений Пикара</b>	<b>17</b>

## Литература

- В. И. Арнольд Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Ю. Н. Бибиков Общий курс дифференциальных уравнения
- С. Ю. Пилюгин Пространства динамических систем

**Определение.** *Дифференциальное уравнение* – уравнение от неизвестной функции  $y(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$  – независимая переменная, вида

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

## Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

**Определение.** *Дифференциальное уравнение 1-го порядка*, разрешенное относительно производной – уравнение вида  $y' = f(x, y)$ ,  $f \in C(G)$ , где  $G$  – область (открытое связное множество) в  $\mathbb{R}_{x,y}^2$

**Определение.**  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  – *решение* на  $(a, b)$ , если

- $y$  – дифференцируема;
- $(x, (y(x))) \in G, x \in (a, b)$ ;
- $y'(x) \equiv f(x, y(x))$  на  $(a, b)$ .

**Пример(ы).**

- $y' = ky, k > 0, G = \mathbb{R}^2$ ;
- $\forall c \in \mathbb{R} \ y(x) = ce^{kx}$  – решение на  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** *Интегральная кривая* – график решения.

## Задача Коши

**Определение.**  $y(x)$  – решение *задачи Коши* с начальным условием  $(x_0, y_0)$ , если

- $y(x)$  – решение дифференциального уравнения на  $(a, b)$ ;
- $y(x_0) = y_0$ .

## Единственность

**Определение.**  $(x_0, y_0)$  – *точка единственности* для задачи Коши, если  $\forall y_1, y_2$  – решения  $\exists(\alpha, \beta) \ni x_0 : y_1|_{(\alpha, \beta)} = y_2|_{(\alpha, \beta)}$ .

**Пример(ы).**

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Если  $(x_0, y_0) = 0$ , то возможны следующие решения:

•

$$y_1 = 0$$

•

$$y_2 = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases}$$

•

$$y_3 = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Точка  $(0,0)$  не является точкой единственности, но при этом  $(1,1)$  уже будет точкой единственности

## Поле направлений

**Определение.** Из уравнения  $y' = f(x,y)$  мы можем вычислить *коэффициент наклона* в каждой точке  $(x,y)$

$$k = y'(x) = f(x,y)$$

Если в каждой точке  $(x,y)$  области  $G$  провести отрезок с угловым коэффициентом равным  $f(x,y)$ , то получится *поле направлений*. Любая интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка.

## Основные теоремы

**Теорема (О существовании).** Если  $y' = f(x,y)$ ,  $f \in C(G)$ , то  $\forall (x_0, y_0) \in G \exists$  решение задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$   $G$  называется *областью существования*.

**Теорема (О единственности).** Если  $y' = f(x,y)$ ,  $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$ , то  $\forall (x_0, y_0) \in G \exists$  единственное решение задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$   $G$  называется *областью единственности*.

## Интегрируемые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

**Пример(ы).**  $y' = f(x)$  – из анализа знаем, что единственным решением при данном условии  $(x_0, y_0)$  будет

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

## Интеграл

Пусть  $H \subset G$  – область

**Определение.** Функция  $U \in C^1(H, \mathbb{R})$  называется *интегралом уравнения*  $y' = f(x,y)$  в  $H$ , если выполнены следующие условия:

- $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ ;
- если  $y(x), x \in (a,b)$  – решение с  $(x, y(x)) \in H$ , то  $U(x, y(x)) = \text{const}$ .

**Теорема** (Напоминание *теоремы о неявной функции*).

$$F : H \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F \in C^1$$

Если

•

$$F(x_0, y_0) = 0$$

•

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

тогда  $\exists I, J$  – открытые интервалы  $x_0 \in I, y_0 \in J, \exists z(x) \in C^1(I)$  такая, что

- $z(x_0) = y_0$ ;
- $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = z(x)$  при  $(x, y) \in I \times J$ .

**Теорема** (Об интеграле для дифференциальных уравнений первого порядка). Пусть  $U$  – интеграл  $y' = f(x, y)$  в  $H \subset G$ . Тогда  $\forall (x_0, y_0) \in H \exists H_0 \subset H, H_0 = I \times J \ni (x_0, y_0)$  и  $\exists y(x) \in C^1(I)$  такая что:

- $y(x)$  – решение задачи Коши с начальными данными  $(x_0, y_0)$
- $(x, y) \in H$  и  $U(x, y) = U(x_0, y_0) \Rightarrow y = y(x)$

*Доказательство.* Фиксируем произвольную точку  $(x_0, y_0)$ . Рассмотрим  $F(x, y) = U(x, y) - U(x_0, y_0)$ .  $F$  удовлетворяет условию теоремы о неявной функции, так как  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ , поэтому существуют  $I_0, J_0, I_0 \times J_0 \subset H$  и  $\exists y(x) \in C^1(I_0), y(x_0) = y_0$ . По теореме существования  $\exists$  решение  $z(x)$  задачи Коши с начальными условиями  $(x_0, y_0)$  на некотором промежутке  $I \ni x_0$  такое что  $(x, z(x)) \in I_0 \times J_0$ . Тогда по определению интеграла  $U(x, z(x)) = \text{const} \Rightarrow F(x, z(x)) = 0 \Rightarrow z(x) = y(x)$ .  $\square$

## Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = m(x) \cdot n(y)$$

$$m \in C((a, b)), n \in C((\alpha, \beta))$$

$$G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$$

- $y_0 \in (\alpha, \beta), n(y_0) = 0 \Rightarrow y \equiv y_0$

Проверяется подстановкой

- $I \subset (\alpha, \beta), n(y) \neq 0$  при  $y \in I$  Подсказка: Рассмотрим  $y(x) : (x, y(x)) \in (a, b) \times I$  и отличную от 0  $y' = m(x)n(y)$ , на  $n(y)$  можно поделить

$$\frac{y'}{n(y(x))} = m(x), \int_{x_0}^x \frac{y'(t)dt}{n(y(t))} = \int_{x_0}^x m(t)dt.$$

Замена  $z = y(t)$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{n(z)} = \int_{x_0}^x m(t)dt,$$

Обозначим за  $N(y)$  и  $M(x)$  некоторые первообразные  $\frac{1}{n(y)}$  и  $m(x)$  соответственно

$$\begin{aligned} N(y(x)) - N(y(x_0)) &= M(x) - M(x_0) \\ U(x, y) &:= N(y) - M(x). \end{aligned}$$

Если  $y(x)$  – решение, то  $U(x, y(x)) = N(y(x_0)) - M(x_0)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0.$$

Это была некоторая эвристика для того, чтобы найти формулу для интеграла.

Сформулируем некоторое утверждение, которое позволит нам проверять, является ли  $U$  интегралом.

*Утверждение.* (*Критерий интеграла*)

$U$  – интеграл для уравнения  $y' = f(x, y) \iff$

•

$$\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$$

•

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

*Доказательство.* Если  $y(x)$  – решение, то  $U(x, y(x)) = \text{const}$

$$\frac{dU}{dy} \equiv 0$$

$$\frac{d}{dy}U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot f \equiv 0$$

□

Применяя это утверждение к нашему уравнению  $y' = m(x)n(y)$  и  $U = N(y) - M(x)$  имеем:

$$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(N(y) - M(x)) = -m(x) + \frac{1}{n(y)} \cdot m(x)n(y) \equiv 0 \quad (1)$$

## Замена переменных

**Пример(ы).** 1.  $y' = f(ax + by)$

Новая независимая переменная –  $x$

Новая искомая функция –  $v = ax + by$

$$\frac{dv}{dx} = a + by' = a + bf(v)$$

2.  $y' = m(x)n(y)$ , Пусть  $n(y) \neq 0$

Новая переменная –  $x$

Новая функция –  $v = N(y)$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{n(y(x))} \cdot y'(x) = m(x)$$

Все сводится к уравнению, решение которого мы уже умеем находить

$$\frac{dv}{dx} = m(x)$$

## Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x), \quad p, q \in C((a, b))$$

$f(x, y)$  определена на  $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ ,  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны на  $G$ , поэтому  $G$  – область существования и единственности.

1. Для начала научимся решать *однородное линейное уравнение* ( $q \equiv 0$ )

$$y' = p(x)y$$

Есть решение  $y \equiv 0, x \in (a, b)$

Если  $y > 0$ , то

$$U = \int \frac{dy}{y} - \int p(x)dx = \log(y) - \int p(x)dx = \log(C)$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

Для  $y < 0$  то же самое

2. *Метод вариации произвольной переменной* (Лагранж)

Воспользуемся заменой переменной:

Новая независимая переменная –  $x$

Новая функция –  $v(x)$

Будем искать решение  $y(x)$  в виде  $y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$

$$y' = v'e^{\int p(x)dx} + v \cdot p(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$p(x)y + q(x) = p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x)$$

$$v' \cdot e^{\int p(x)dx} = q(x)$$

$$v' = q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$v = \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$y = e^{\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx \right)$$

Заметим, что первообразная для  $p(x)$  берется одна и та же

Для задачи Коши с начальным условием  $(x_0, y_0)$  имеем

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right)$$

## Уравнения, сводящиеся к линейным

*Уравнение Бернулли*  $y' = p(x)y + q(x)y^m, m = \text{const}$

Исключения –  $m = 0, m = 1$ , так как тогда это будет обычное линейное уравнение

Если  $m > 0$ , то есть решение  $y \equiv 0$

Если  $y \neq 0$ , то воспользуемся заменой переменных  $v = y^{1-m}$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^m} &= p(x)y^{1-m} + q(x) \\ v' &= (1-m)y'y^{-m} \\ \frac{v'}{(1-m)} &= p(x)v + q(x)\end{aligned}$$

Получилось линейное уравнение, которое мы уже умеем решать.

*Уравнение Рикатти*

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, ab \neq 0$$

Бернулли показал, что при  $\alpha = \frac{4k}{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$  это уравнение имеет решения.

Луивилль(1841) доказал, что если  $\alpha$  – не число Бернулли и  $\alpha \neq 2$ , то уравнение Рикатти не интегрируемо.

## Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

*Уравнение Пфаффа*

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$$

**Определение.** *Дифференциальная 1-форма*

$$F = m(x,y)dx + n(x,y)dy, m, n \in C^1(G), m^2 + n^2 \neq 0$$

**Определение.** *Интегральная кривая дифференциальной формы*  $F$  – гладкая кривая  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in (a,b)$

$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0 \text{ на } (a,b)$$

*Примечание.* Кривая называется гладкой, если  $\exists$  непрерывные  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$  и  $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \neq 0$

*Связь уравнения Пфаффа с обыкновенным дифференциальным уравнением*

Пусть  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  – интегральная кривая  $F$

Выберем  $t_0 \in (a,b)$ , пусть  $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$

Тогда  $\exists(\alpha, \beta) \ni t_0 : \dot{\gamma}_1(t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$

Положим  $x = \gamma_1(t)$

Так как  $\dot{\gamma}_1$  – непрерывна и не обращается в ноль на  $(\alpha, \beta)$ , то существует обратная функция.

Тогда  $x = \gamma_1(t) \iff t = \gamma_1^{-1}(x)$

Положим  $y = \gamma_2(\gamma_1^{-1})$

Дифференциальное уравнение для  $y$ :

$$\frac{dy}{dx} = \dot{\gamma}_2(t) \cdot \frac{d}{dx}(\gamma_1^{-1}(x)) = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)}$$

$\gamma$  была интегральной кривой формы  $F$ , то есть выполнялось равенство:



$$m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) = 0$$

Тогда понятно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$

Мы получили, что если у нас есть интегральная кривая  $\gamma$  уравнения  $F = 0$ , то в локальных координатах они решают уравнение  $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Значит интегральные кривые уравнения Пфаффа  $m dx + n dy = 0$  локально совпадают с интегральными кривыми уравнения  $y' = \frac{m(x,y)}{n(x,y)}$

Верно и обратное: пусть  $y(x)$  – решение уравнения  $y' = -\frac{m}{n}, n(x,y(x)) \neq 0$

Как тогда получить из этого уравнения интегральную кривую уравнения Пфаффа?

Берем  $\gamma_1(t) = x, \gamma_2(t) = y(x)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1, \dot{\gamma}_2(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))}$$

Мы получили интегральную кривую уравнения Пфаффа.

Вывод:  $F = m dx + n dy = 0$  – запись совокупности двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \\ \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m} \end{cases}$$

## Уравнение в полных дифференциалах

**Определение.** Форма  $F$  – *точная*, если  $\exists U \in C^2(\mathbb{R}_{x,y}^2)$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Если  $F$  – точная, то  $F = 0$  называется *уравнением полных дифференциалов*

**Теорема.** Если  $F$  – точная, то в окрестности произвольной точки  $(x_0, y_0) \in G$   $U$  – интеграл одного из уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{n} \text{ или } \frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$$

*Доказательство.*  $(x_0, y_0) \in G$  можно считать, что  $n(x_0, y_0) \neq 0$ , тогда  $n(x, y) \neq 0$  в некоторой окрестности

Рассмотрим уравнение  $y' = -\frac{m}{n}$

Пусть  $y(x)$  – решение

$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = m + n \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) \equiv 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = n \neq 0$$

Получаем, что  $U$  – интеграл

□

## Условие точности 1-формы

$$U \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in C^1$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Из курса матанализа знаем, что если производные непрерывны, то они совпадают

$$F \text{ точна} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

*Утверждение.*

$$G = (a, b) \times (\alpha, \beta)$$

Тогда из равенства частных производных  $m$  и  $n$  следует, что  $F$  – точна

*Доказательство.* Фиксируем  $(x_0, y_0) \in G$

Хотим построить  $U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = n$$

$$U = \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \varphi(y) \text{ удовлетворяет первому уравнению}$$

Нужно только найти  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial m}{\partial y}(s, y) ds + \varphi'(y) = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial n}{\partial x}(s, y) ds + \varphi'(y) = n(x, y) - n(x_0, y) + \varphi'(y) \end{aligned}$$

Хотим

$$n(x, y) = n(x, y) - n(x_0, y) + \varphi'(y)$$

Тогда можно взять в качестве  $\varphi(y) = \int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x m(s, y) ds + \int_{y_0}^y n(x_0, t) dt$$

□

*Примечание.* Это утверждение верно не для любой области  $G$ , хотя верно, если  $G$  – звездчатое множество

## Интегрирующий множитель

**Определение.**  $\mu \in C^1, \mu \neq 0$  называется *интегрирующим множителем*, если  $\mu F$  – точная форма

**Пример(ы).** Уравнение с разделяющимися переменными:

$$m(x)n(y)dx + dy = 0$$

Интегрирующий множитель  $-\frac{1}{n(y)}$

$$m(x)dx + \frac{1}{n(y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{n(y)} \right)$$

И как мы уже видели интегралом будет

$$U(x, y) = \int m(x)dx + \int \frac{1}{n(y)}dy$$

## Системы дифференциальных уравнений

Отныне независимая переменная будет обозначаться  $t$  и искать мы будем функции  $x(t)$

**Определение.** *Системы дифференциальных уравнений общего вида* (системы разрешимые относительно старших производных)

$n$  и  $m_1, \dots, m_n$  – фиксированные натуральные числа

Для каждого  $i = 1, \dots, n$  имеем уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f_i(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, \frac{d^{m_1-1}}{dt^{m_1-1}}, \dots, x_n, \dot{x}_n, \dots, \frac{d^{m_n-1}}{dt^{m_n-1}})$$

$m = \sum m_i$  называется *порядком системы*

### Частные случаи

- *Нормальная система* Ищем  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , все  $m_i = 1$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

- *Дифференциальное уравнение порядка  $m$*   $x(t)$  – искомая функция

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Системы общего вида всегда сводятся к нормальным системам

Покажем, что дифференциальное уравнение сводится к нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{m-1} = y_m \\ y_m = f(t, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases} \iff \frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, \dot{x}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}})$$

Если  $x$  решение уравнения, то очевидно, что  $y_1 = x, y_2 = \dot{x}, \dots, y_m = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$  решения системы и наоборот, если  $y_1, y_2, \dots, y_m$  решения системы, то  $x = y_1$  решение уравнения.

## Векторная запись нормальных систем

Сейчас мы введем некоторые обозначения и соглашения, с которыми будем работать в дальнейшем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$\text{Вектор } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Векторная функция } f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Тогда исходная система принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$\text{Для функции } f(t) \text{ под записью } \int f(t)dt \text{ будем подразумевать } \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

В качестве нормы на  $\mathbb{R}^n$  зафиксируем  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

**Определение.** Для уравнения  $\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n$  ( $f \in C(G)G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ ) функция  $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется **решением**, если

- $\exists \dot{x}$  на  $(a, b)$
- $(t, x(t)) \in G$
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in (a, b)$

**Определение.**  $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется решением задачи Коши с начальным условием  $(t_0, x_0)$ , если

- $x$  – решение
- $x(t_0) = x_0$

## Теорема существования

**Теорема.** *существования* (Пеано)

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$f \in C(G) \Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in G \exists \text{ решение задачи Коши}$

*Доказательство.* Рассмотрим  $(t_0, x_0) \in G$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t, x) \in G \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} - \text{компакт}$$

$$\exists M : |(t, x)| \leq M \quad \forall (t, x) \in R$$

$$h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

Будем доказывать, что существует решение на промежутке  $(t_0 - h, t_0 + h)$

*Эквивалентное интегральное уравнение*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

**Определение.**  $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  – *решение интегрального уравнения*, если

1.  $x \in C((a, b))$
2.  $(t, x(t)) \in G$
3.  $x(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

**Лемма.**  $x$  – решение интегрального уравнения  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Leftrightarrow x$  – решение задачи Коши с начальным условием  $t_0, x_0$

Доказательство леммы очевидно.

Мы будем доказывать разрешимость эквивалентного интегрального уравнения на  $[t_0 - h, t_0 + h]$

Сузимся на отрезок  $[t_0, t_0 + h]$  (для  $[t_0 - h, t_0]$  все аналогично)

## Ломанные Эйлера

Зафиксируем  $N \in \mathbb{N}$  и разобьем отрезок  $[t_0, t_0 + h]$  на  $N$  равных частей  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $t_k = t_0 + \frac{kh}{N}$

Определим функцию  $g(t)$

$$g(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), t \in [t_0, t_1]$$

$$g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k), t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Введем  $\dot{g}(t)$  (точечка сверху это просто символ, так как  $g$  не дифференцируема в некоторых точках)

$$\dot{g}(t) = f(t_k, g(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}]$$

**Лемма.**  $\forall k = 0, 1, \dots, n$

1.  $g$  определена на  $[t_k, t_{k+1}]$
2.  $|g(t) - x_0| \leq M(t - t_0), t \in [t_0, t_k]$
3.  $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s) ds$

*Доказательство.* Индукция по  $k$

База:  $k = 1$  Очевидно *Переход:*

1. Достаточно показать, что  $f(t_k, g(t_k))$  определено, для этого достаточно показать, что  $(t_k, g(t_k)) \in R \Leftrightarrow |t - t_0| \leq \alpha, |g(t_k) - x_0| \leq \beta$

Это верно, так как  $|g(t_k) - x_0| \leq M|t_k - t_0| \leq Mh \leq \beta$

2.  $|g(t) - x_0| \leq |g(t) - g(t_k)| + |g(t_k) - x_0| \leq |f(t_k, g(t_k))|(t - t_k) + M(t_0 - t_0) \leq M(t - t_0)$

3.  $g(t) = g(t_k) + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)ds + \int_{t_k}^t \dot{g}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}(s)ds$

□

**Лемма.** (*Арцела-Аскори*)

$$G = \{g_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n, k \geq 0\}$$

**Определение.**  $G$  равномерно ограничено, если существует  $N : |g_k(t)| \leq N \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in I$

**Определение.**  $G$  рваностепенно непрерывно, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall k \geq 0 \forall t_1, t_2 \in I |t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \varepsilon$$

Если  $G$  - равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна, тогда из  $G$  можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера  $g_N, N > 0$  и докажем, что она равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна

$$|g_N(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \leq Mh \Rightarrow |g_N(t)| \leq |x_0| + Mh$$

$$|g_N(t_1) - g_N(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{g}_N(s)ds \right| \leq M|t_1 - t_2| \leq M\delta$$

В качестве  $\delta(\varepsilon)$  можно взять  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$

Отсюда получаем, что последовательность  $g_N$  действительно равномерно ограничена и рваностепенно непрерывна, тогда по лемме Арцела-Аскори из нее можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к  $g$

Для удобства можем считать, что вся последовательность  $g_N$  равномерно сходится к  $g$

Мы хотим доказать, что  $g$  будет решением интегрального уравнения, для этого нужно проверить следующие свойства  $g$

1.  $g_N \rightrightarrows g$  на  $[t_0, t_0 + h], g$  - непрерывна

2.  $(t, g_N(t)) \in R \Rightarrow (t, g(t)) \in R$

3.  $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s))ds$

$$g_N(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_N(s))ds + \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))ds$$

$$g_N \rightrightarrows g, (t, g_N(t)) \in R, f \in C(R)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t, g_N(t)) \rightrightarrows f(t, g(t)) \text{ на } [t_0, t_0 + h]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^t f(s, g_N(s))ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, g(s))ds$$

$$\text{Теперь нужно проверить, что } \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))ds \rightarrow 0$$

Так как  $R$  – компакт и  $f$  непрерывна на нем, то  $f$  равномерно непрерывна на  $R$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \wedge |g_N(t_1) - g_N(t_2)| < \delta \rightarrow |f(t_1, g(t_1)) - f(t_2, g(t_2))| < \varepsilon$$

Если  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , то  $t - t_k < \frac{h}{N} < \delta$  при больших  $N$

$$\dot{g}_N(t) = f(t_k, g_N(t_k)), \text{ поэтому } |\dot{g}_N(t) - f(t, g_N(t))| = |f(t_k, g_N(t_k)) - f(t, g_N(t))|$$

Поэтому, если  $N$  достаточно велико

$$\int_{t_k}^t |\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))| ds \leq \varepsilon(t - t_k)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) ds \right| &\leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \right| + \dots + \left| \int_{t_k}^t \right| \leq \\ &\leq \varepsilon(t_1 - t_0) + \dots + \varepsilon(t - t_k) = \varepsilon(t - t_0) \leq \varepsilon h \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $\int_{t_0}^t \dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) ds \rightarrow 0$ , следовательно  $g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$

Таким образом, мы нашли решение  $g$  для исходного уравнения, и доказали теорему.  $\square$

## Напоминание из анализа

**Определение.**  $f$  удовлетворяет *условию Липшица* по  $x$  в  $G \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$  ( $f \in \text{Lip}_x(G)$ )

Если  $\exists L > 0$  такое, что  $\forall (t, x), (t', x) \in G$

$$|f(t, x) - f(t', x)| \leq L|t - t'|$$

**Определение.**  $f$  удовлетворяет *локальному условию Липшица* по  $x$  в  $G$ , если  $\forall (t_0, x_0) \in G$   $\exists U$  – окрестность, такая что  $f \in \text{Lip}_x(U)$

$$f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

$$\text{Пусть } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ и } \exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \forall i, j = 1, \dots, n$$

**Определение.** *Матрица Якоби*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Определение.**  $A$  – матрица, тогда норма  $\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$

$$\forall x \quad |x| \leq \|A\| \cdot |x|$$

**Лемма.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow f \in \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G)$$

*Доказательство.* Фиксируем  $(t_0, x_0)$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : G \supset R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$$

$$\exists L > 0 : \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \text{ в } R$$

Рассмотрим  $(t, x), (t, x') \in R$ ,  $g(s) = f(t, sx + (1 - s)x')$

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(t, x') &= g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx + (1 - s)x') ds \\ |f(t, x) - f(t, x')| &\leq \left| \int_0^1 \right| \leq \int_0^1 |\dots| \leq \int_0^1 L|x - x'| ds = L|x - x'| \end{aligned}$$

□

**Лемма.**

$$f \in C(G), \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G), K - \text{компакт в } G$$

$$\Downarrow$$

$$f \in \text{Lip}_x(K)$$

*Доказательство.* Предположим противное:

$$\forall L_n \rightarrow \infty \exists (t_n, x_n), (t_n, x'_n) \in K :$$

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, x'_n)| > L_n |x_n - x'_n|$$

Так как  $K$  – компакт, то из  $(t_n, x_n)$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $(t_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow (t_0, x_0)$

После этого можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из  $t_{n_k}, x'_{n_k}$ , сходящуюся к  $(t_0, x'_0)$

Для удобства будем считать, что  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$ ,  $(t_n, x'_n) \rightarrow (t_0, x_0)$

**Случай 1**  $x_0 = x'_0$  Так как  $f$  – локально-липпшицева по  $x$ , то  $\exists U \ni (t_0, x_0)$  и  $L$ , такие, что

$$(t, x), (t, x') \in U \rightarrow |f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$$

При достаточно больших  $n$   $(t_n, x_n), (t_n, x'_n) \in U$  и мы получаем противоречие

**Случай 2**  $x_0 \neq x'_0$

Рассмотрим  $g(t, x, y) = \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|}$ ,  $f \in C(G) \Rightarrow g$  непрерывна в окрестности  $U$  точки  $(t_0, x_0, x'_0)$

$$\Rightarrow \exists L : |g(t, x, y)| \leq L \Rightarrow |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

Тогда для достаточно больших  $n$   $(t_n, x_n, x'_n) \in U$  и мы снова получаем противоречие.

□



## Лемма Гронуолла

**Лемма.** (*Лемма Гронуолла*)

Пусть  $\varphi(t) \geq 0$  при  $t \in (a, b)$  и  $\exists t_0 \in (a, b)$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$ , такие что

$$\varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|, \quad t \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \varphi(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$$

*Доказательство.* Разберем случай, когда  $t \leq t_0$  (случай  $t > t_0$  оставим на проверку любопытному читателю)

$$\Phi(t) := \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| \geq \varphi(t)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu \Phi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\mu(t-t_0)} \dot{\Phi} - \mu e^{\mu(t-t_0)} \Phi \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-\mu(t-t_0)}) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi e^{-\mu(t-t_0)} \leq \Phi(t_0) = \lambda$$

□

Частный случай:

$$\varphi(t) \leq \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| \Rightarrow \varphi(t) = 0$$

## Метод приближений Пикара

**Теорема.** (*Теорема Пикара*)

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in C, \text{Lip}_{x, \text{loc}}(G) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$\Rightarrow G$  – область существования и единственности

*Доказательство.* Зафиксируем  $(t_0, x_0) \in G$  Возьмем  $\alpha, \beta > 0$ , что  $R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$

$$\exists M > 0 : |f(t, x)| \leq M, (t, x) \in R$$

$$h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$$

$L > 0$  – константа Липшица по  $x$  в  $R$

*Последовательные приближения Пикара*  $\varphi_k(t)$

$$\varphi_0(t) \equiv x_0$$

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds, \quad k \leq 0$$

**Лемма.**  $\forall k$   $\varphi_k$  определены на  $[t_0 - h, t_0 + h]$  и их графики лежат в  $R$

*Доказательство.* Индукция по  $k$

**База**  $\varphi_0 \equiv x_0$  для всех  $t$ , график очевидно лежит в  $R$

**Переход**

$$\varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds$$

$$(s, \varphi_k(s)) \in R \Rightarrow f - \text{определена}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_k(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq \beta$$

□

Докажем теперь, что  $\varphi_k$  – равномерно сходятся на  $[t_0 - h, t_0 + h]$

Введем  $\psi_0(t) = \phi_0(t)$ ,  $\psi_k(t) = \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)$  при  $k \geq 0$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$$

Частичные суммы этого ряда равны  $\varphi_k(t)$

Поэтому сходимость ряда  $\iff$  сходимость  $\varphi_k(t)$

□

# Предметный указатель

Дифференциальная 1-форма, 8  
Дифференциальное уравнение, 3  
    1-го порядка, 3  
Дифференциальное уравнение порядка  $m$ ,  
    11  
Задача Коши, 3  
Интеграл уравнения, 4  
Интегральная кривая, 3  
Интегральная кривая дифференциальной  
    формы, 8  
Интегрирующий множитель, 10  
Коэффициент наклона, 4  
Лемма Арцела-Аскори, 14  
Лемма Гронуолла, 17  
Локальное условие Липшица, 15  
Матрица Якоби, 15  
Метод вариации произвольной переменной,  
    7  
Нормальная система, 11  
Область  
    единственности, 4  
    существования, 4  
Однородное линейное уравнение, 7  
Поле направлений, 4  
Порядок системы, 11  
Последовательные приближения Пикара,  
    17  
Решение дифференциального уравнения, 3  
Решение интегрального уравнения, 13  
Система дифференциальных уравнений об-  
    щего вида, 11  
Теорема  
    об интеграле для дифференциальных  
        уравнений первого порядка, 5  
Теорема Пикара, 17  
Точка единственности, 3  
Точная форма, 9  
Уравнение Бернулли, 8  
Уравнение Пфаффа, 8  
Уравнение Рикатти, 8  
Уравнение полных дифференциалов, 9  
Условие Липшица, 15  
Эквивалентное интегральное уравнение, 13