

## Seminar Nr. 1

### Șiruri numerice (recapitulare)

Lector Dr. ADINA JURATONI

Departamentul de Matematică

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

## 0.1 Șiruri numerice

1. a) Să se arate că șirul  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  verifică relația de recurență

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2;$$

b) Să se demonstreze folosind criteriul cleștelui formula lui Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Indicație. a) Folosim formula de integrare prin părți

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx = \dots$$

b) Reamintim semnificația simbolului dublu factorial !!:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$$

Din a) rezultă  $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$ ,  $n \geq 2$  și făcând succesiv pe  $n = 2m$ , respectiv

$n = 2m+1$  se arată că  $I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ , respectiv  $I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$ .

Se arată că șirul  $(I_n)$  este descrescător

$$I_{2m+1} \leq I_{2m} \leq I_{2m-1}$$

Se obține dubla inegalitate

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$$

care înmulțită cu  $\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{2}{\pi}$  prin trecere la limită pentru  $m \rightarrow \infty$  rezultă egalitatea din enunțul problemei.

[2.] a) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ .

b) Folosind rezultatul anterior, arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) = \frac{1}{e}$ .

*Indicație.* a) Fie  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ . Se folosește rezultatul

Dacă  $(a_n)$  este un șir de numere pozitive și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

b) Se folosește lema lui Cesaro-Stolz pentru  $a_n = \sqrt[n]{n!}$ ,  $b_n = n$ .

[3.] Să se studieze convergența șirului

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

*Indicație.* Se arată că șirul e monoton și mărginit.

[4.] Se consideră șirul  $(x_n)_n$  dat de relația de recurență

$$x_n = \frac{1}{12}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

unde  $x_0 = 1$  și  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

i) Determinați termenul general al șirului;

ii) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

*Soluție.* i) Ecuația caracteristică asociată șirului este:  $r^2 - \frac{1}{12}r - \frac{1}{2} = 0$ , echivalentă cu  $12r^2 - r - 6 = 0$ . Soluțiile ecuației sunt  $\frac{3}{4}$  și  $-\frac{2}{3}$ . Prin urmare, forma generală a șirului  $x_n$  este dată de

$$x_n = a \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Din condițiile  $x_0 = 1$  și  $x_1 = \frac{1}{2}$  obținem sistemul algebric  $\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b = \frac{1}{2} \end{cases}$  cu

soluția  $a = \frac{14}{17}$ ,  $b = \frac{3}{17}$ . Prin urmare, șirul  $x_n$  este de forma

$$x_n = \frac{14}{17} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{17} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

ii) Cum  $\left| \left( -\frac{2}{3} \right)^n \right| < \left( \frac{3}{4} \right)^n$  rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

[5.] Se consideră şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  definit astfel:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 10$ , iar pentru  $n \geq 1$  avem relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 6n + 1.$$

i) Să se determine termenul general al şirului;

ii) Calculaţi limita acestui şir.

*Soluţie.* i) Ecuaţia caracteristică asociată şirului este:  $r^2 - 7r + 12 = 0$  cu soluţiile  $r_1 = 3$  şi  $r_2 = 4$ . Prin urmare  $x_n^0 = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$ . Determinăm termenul general de forma

$$x'_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$$

care satisface relaţia

$$x'_{n+2} - 7x'_{n+1} + 12x'_n = 6n + 1.$$

Se observă că  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-2} = 0$ , deci  $x'_n = \alpha n + \beta$ , deci prin înlocuire se obţine

$$[\alpha(n+2) + \beta] - 7[\alpha(n+1) + \beta] + 12(\alpha n + \beta) = 6n + 1,$$

adică  $6\alpha n - 5\alpha + 6\beta = 6n + 1$  de unde prin identificarea coeficienţilor se obţine  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Prin urmare forma şirului este

$$x_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n + n + 1.$$

Cum  $x_1 = 3$  şi  $x_2 = 10$  avem  $\begin{cases} 3a + 4b = 1 \\ 9a + 16b = 7 \end{cases}$ , de unde rezultă  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

Şirul căutat are forma

$$x_n = 4^n - 3^n + n + 1.$$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n + n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left[ 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^n + \frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right] = \infty$ .